

## Chapitre 6

# Densités de probabilité

### 6.1 Introduction

A ce stade, il manque encore l'information sur la densité de probabilité (p.d.f.) des pentes de la surface pour que le modèle électromagnétique de la diffusion par la surface de la mer aux hyperfréquences puisse être utilisé.

En premier lieu, les résultats expérimentaux, disponibles dans la littérature, concernant les fonctions de densité de probabilité des déplacements et des pentes sont passés en revue, comparés et critiqués.

La p.d.f. des pentes ne peut être bien approximée par une courbe de Gauss ; les écarts par rapport à la gaussienne sont modélisés selon l'approche de Cox & Munk, qui utilise les développements en série de Gram-Charlier. En se basant sur leurs mesures, Cox & Munk proposent une variation linéaire des variances des pentes des grandes vagues en fonction de la vitesse du vent. Par ailleurs, celles-ci sont aussi définies par intégration du spectre des pentes et une comparaison montre que la variation linéaire n'est valable que sur un petit domaine de vitesse du vent, domaine couvert par les mesures de Cox & Munk. De plus, ce modèle n'évolue qu'en fonction de la vitesse du vent. C'est pourquoi nous introduisons une approche qui utilise la pente significative des vagues comme paramètre de la p.d.f. des pentes.

Finalement, la corrélation entre déplacement et courbures conduit à la relation existant entre la hauteur significative des vagues ( $H_{1/3}$ ) et la valeur r.m.s. des déplacements de la surface ( $\sigma$ ). Il est montré que ces deux paramètres ne sont pas reliés de manière univoque; la connaissance de la densité de probabilité des déplacements n'est pas suffisante pour obtenir cette relation, mais des informations sur la corrélation entre déplacement et courbures,  $C$ , ou de façon équivalente sur la largeur du spectre,  $\epsilon$ , sont nécessaires. La relation correcte est donnée par

$$H_{1/3} = F(\epsilon) \sigma$$

avec  $3 \leq F(\epsilon) \leq 4$  pour  $0 \leq \epsilon \leq 1$ .

La fonction  $F(\epsilon)$  est calculée puis modélisée en fonction de la pente significative. Sur le domaine de variation de la pente significative en pleine mer (jusque 0,02), la relation  $H_{1/3} = 4 \sigma$  est une bonne approximation.

## **6.2 Fonction de densité de probabilité des déplacements**

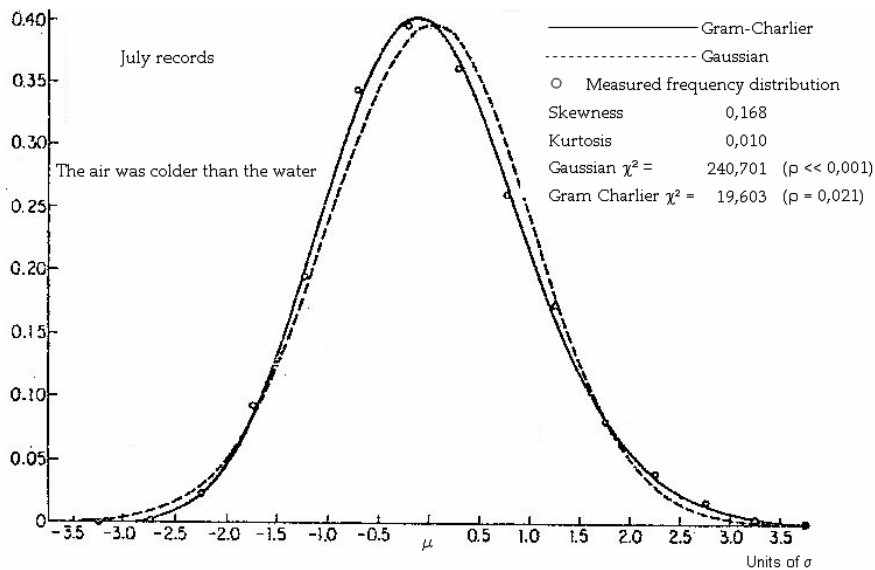
### **6.2.1 Introduction**

La fonction de densité de probabilité (p.d.f.) des déplacements de la surface,  $P(\zeta)$ , où  $\zeta$  est le déplacement de la surface de la mer, est gaussienne, en première approximation. C'est une hypothèse habituelle car son utilisation est simple. Toutefois, dans la réalité,  $P(\zeta)$  s'écarte d'une gaussienne pour différentes raisons. Une première raison évidente est que les vagues sont limitées en hauteur par le brisement et que, dès lors, des vagues indéfiniment grandes sont physiquement impossibles. Une autre raison est que les différentes composantes des vagues ne sont pas statistiquement indépendantes car il existe des interactions non-linéaires entre les composantes. Dès lors,  $P(\zeta)$  s'écarte d'une gaussienne et peut s'exprimer comme un développement en série de Gram-Charlier (annexe 6.1).

## 6.2.2 Mesures de Kinsman

Kinsman (1965) a analysé deux mois de données relatives à des vagues en pleine mer, produites par un vent à durée d'action limitée. Les mesures ont été effectuées à l'aide d'une jauge capacitaire en surface. La figure 6.1 fournit la p.d.f. des déplacements de la surface qui en résulte.

Il s'agit de deux mois de données qui correspondent à des situations différentes. En juillet, la mer est plus chaude que l'air, c'est un cas d'atmosphère instable. Par contre, en novembre, c'est l'inverse, l'atmosphère est stable. Les auteurs fournissent aussi, pour chaque mois, le coefficient d'obliquité (« skewness ») qui est une mesure de l'asymétrie de la p.d.f. et le coefficient d'escarpement (« kurtosis ») qui est une mesure du caractère plus pointu de la p.d.f. par rapport à une gaussienne (section 3.3.3). En novembre, le coefficient d'obliquité est plus petit, la p.d.f. est moins penchée et le coefficient d'escarpement plus grand, la p.d.f. est plus escarpée.



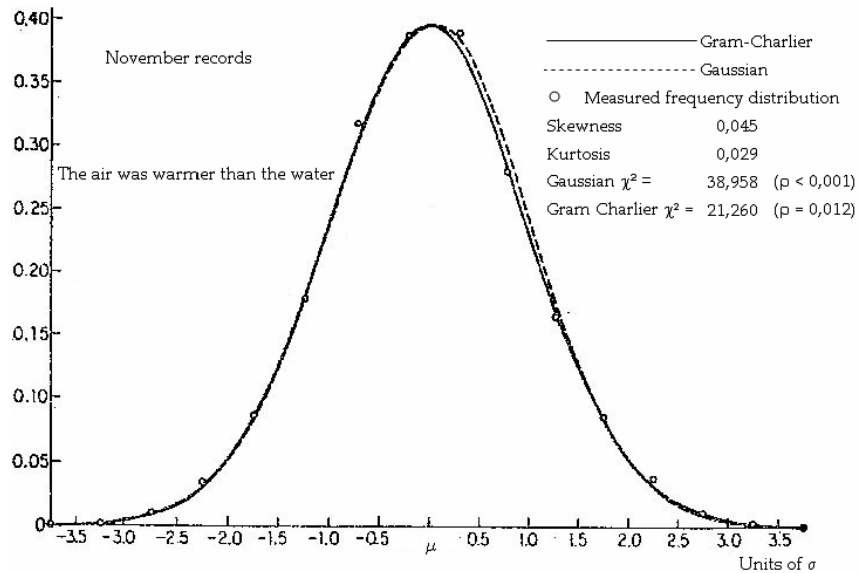


Figure 6.1 : P.d.f. des déplacements de la surface (Kinsman, 1965)

$P(\zeta)$  ressemble à une gaussienne, mais penchée de façon significative. Une telle distribution montre que la fréquence d'occurrence de grandes valeurs de  $\zeta$  positives est plus grande que dans le cas d'une gaussienne. Par ailleurs, la fréquence d'occurrence de grandes valeurs négatives est plus petite que dans le cas d'une gaussienne. Il en résulte que les vagues tendent à former des crêtes étroites et pointues et des creux longs et plats, comme schématisé à la figure 6.2.

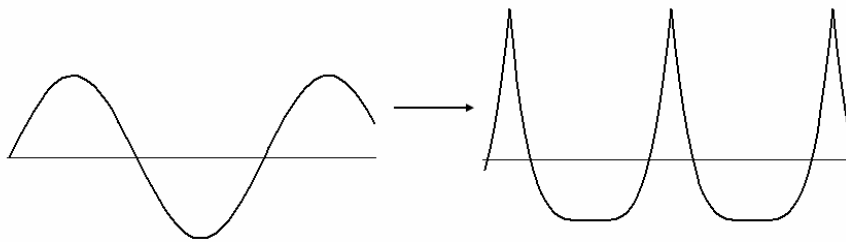


Figure 6.2 : Forme des vagues à partir de la p.d.f. des déplacements de la surface

La forme non gaussienne tient compte du fait qu'une vague n'est pas symétrique par rapport au plan horizontal moyen. Cette p.d.f. représente seulement les grandes vagues, car, à cause des caractéristiques techniques de la jauge capacitaire qui est limitée en

fréquence dans sa réponse, les données collectées ne contiennent pas d'informations concernant les vagues de fréquence supérieure à 2,5 Hz.

En conclusion, les mesures de Kinsman fournissent la p.d.f. des déplacements de la surface en un point donné et pour des grandes vagues à distance d'action limitée.

### 6.2.3 Mesures de Plate

Plate (1978) a observé des vagues générées par le vent dans une cuve à ondes. La forme des vagues a été analysée pour la région de croissance non-linéaire : elle est fortement pointue, penchée et non sinusoïdale. Mais la forme de la vague est similaire pour toutes les distances d'action. Le caractère penché de la vague s'étend à la p.d.f. des déplacements de la surface comme observé en mer et présenté à la figure 6.3. Ces mesures ont un caractère « exceptionnel » si on les compare à celles de Kinsman : elles sont faites en cuve à ondes, dans une zone où elles sont très penchées. Il en résulte que la déviation de la p.d.f. par rapport à la gaussienne est plus importante que pour les mesures de Kinsman.

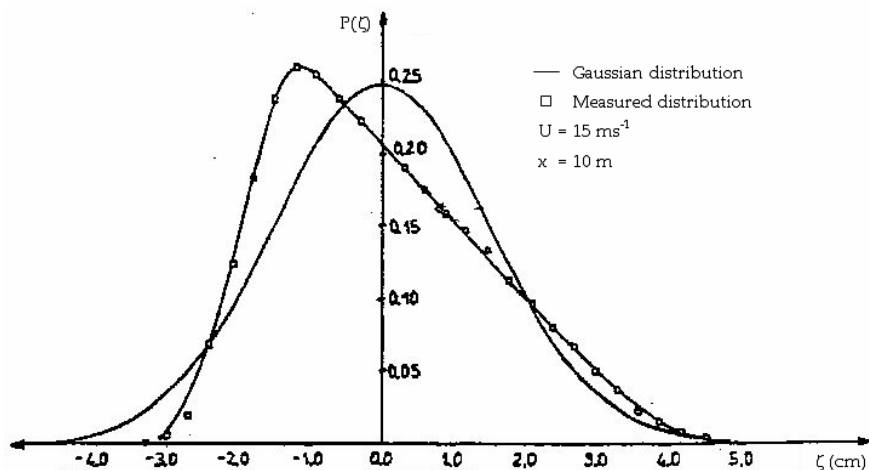


Figure 6.3 : P.d.f. des déplacements de la surface (Plate, 1978)

#### 6.2.4 Mesures de Huang & Long

Huang & Long (1980) ont présenté des données en laboratoire et en océan, qui ont été collectées sous un large domaine de vitesses de vent ( $0$  à  $20 \text{ ms}^{-1}$ ) et de conditions de vagues. Ces données fournissent la p.d.f. des déplacements de la surface. Celle-ci n'est pas gaussienne et elle est de plus en plus penchée au fur et à mesure que la vitesse du vent ou l'amplitude des vagues augmente. Elle peut être approximée par un développement en série de Gram-Charlier. La tendance de la variation des cumulants normalisés est analysée par rapport à la pente significative,  $\xi$ , définie par (2.28). Les auteurs fournissent donc des expressions de ces cumulants en fonction de  $\xi$  et leurs mesures confirment les observations précédentes de Kinsman et de Plate (annexe 6.2).

#### 6.2.5 Conclusion

La p.d.f. des déplacements de la surface de la mer en un point donné n'est pas gaussienne : il n'y a pas de symétrie verticale pour une grande vague : les pointes sont escarpées et les creux sont plats. La section suivante présente une autre information statistique : la fonction de densité de probabilité (p.d.f.) des pentes.

### 6.3 Fonction de densité de probabilité des pentes

Soient  $\zeta_x$  et  $\zeta_y$ , les pentes le long des axes  $X$  et  $Y$  respectivement. La fonction de densité de probabilité jointe des pentes est représentée par  $P(\zeta_x, \zeta_y)$ .

#### 6.3.1 Mesures de Schooley

Schooley (1954) a mesuré la p.d.f. jointe des pentes de la surface de la mer à l'aide d'une méthode optique simple pour des vitesses de vent jusque  $10 \text{ ms}^{-1}$ . La p.d.f. des pentes est approximativement gaussienne dans la direction perpendiculaire au vent et légèrement

penchée dans la direction parallèle au vent.

L'auteur fait l'hypothèse simplificatrice que la p.d.f. jointe des pentes peut être approximée par une distribution gaussienne bidimensionnelle. La dispersion est plus grande dans la direction du vent que perpendiculairement. Les directions avec le vent et perpendiculaire au vent sont non corrélées. Schooley fournit les valeurs r.m.s. des pentes dans ces deux directions : elles augmentent avec le vent et sont plus grandes dans la direction parallèle au vent.

### 6.3.2 Mesures de Cox & Munk

Cox & Munk (1954a, 1954b) ont mesuré la p.d.f. des pentes en photographiant, à partir d'un avion à 600 m d'altitude, le scintillement du soleil sur la surface de la mer pour des vents mesurés à 12,5 m de hauteur de 0 à 14 ms<sup>-1</sup>. Ils ont fait deux types de mesures :

- la surface est couverte par un film d'huile naturel ou artificiel et est donc une surface luisante;
- la surface est propre, (absence de tout film en surface).

Les résultats principaux sont les mêmes que ceux de Schooley : les pentes dans les deux directions, avec le vent (suffixe u) et perpendiculairement au vent (suffixe c), sont non corrélées et les variances dans ces deux directions augmentent avec le vent. Une asymétrie est observée uniquement dans la direction avec le vent.

Prenons pour l'axe principal X, la direction perpendiculaire au vent et pour l'axe principal Y, celle avec le vent qui pointe arbitrairement dans la direction du vent. Les pentes moyennes dans les directions X et Y sont négligeables sur une surface, dont les dimensions linéaires sont plus grandes que la plus grande des longueurs d'onde. On peut donc les prendre égales à zéro :

$$\langle \zeta_x \rangle = \langle \zeta_y \rangle = 0 \quad (6.1)$$

Les composantes normalisées des pentes sont définies par :

$$\zeta_c = \zeta_x / \sigma_c \text{ et } \zeta_u = \zeta_y / \sigma_u \quad (6.2)$$

avec  $\sigma_c^2$  = variance des pentes dans la direction perpendiculaire au vent

et  $\sigma_u^2$  = variance des pentes dans la direction avec le vent.

La p.d.f. des pentes est reproduite à la figure 6.4.

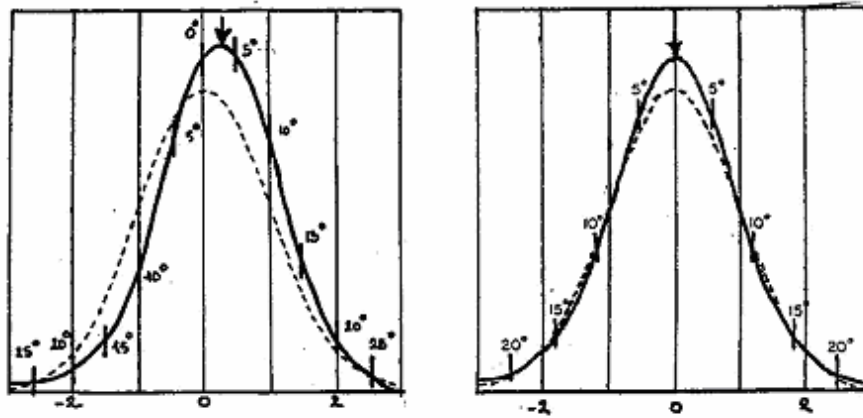


Figure 6.4 : Sections principales de la p.d.f. des pentes. Les courbes à droite sont pour l'axe perpendiculaire au vent et les courbes à gauche pour l'axe avec le vent. Les courbes en traits pleins se rapportent à la distribution observée tandis que les courbes en traits pointillés se rapportent à une distribution gaussienne de même variance. Cette p.d.f. concerne une vitesse de vent de  $10 \text{ ms}^{-1}$ . La flèche repère les modes de la distribution. La pente maximale pour la direction parallèle au vent est positive, ce qui correspond aux pentes sur la face arrière. (Cox & Munk, 1954b)

Comme la p.d.f. des pentes n'est pas strictement gaussienne, Cox & Munk proposent un développement en série de Gram-Charlier (annexe 6.1):

$$P_{GC}(\zeta_x, \zeta_y) = 1/(2\pi \sigma_c \sigma_u) \exp(-(\zeta_c^2 + \zeta_u^2)/2) F(\zeta_c, \zeta_u) \quad (6.3.a)$$

$$F(\zeta_c, \zeta_u) = [ 1 - (1/2) \gamma_{21} (\zeta_c^2 - 1) \zeta_u - (1/6) \gamma_{03} (\zeta_u^3 - 3\zeta_u) + (1/24) \gamma_{40} (\zeta_c^4 - 6\zeta_c^2 + 3) + (1/4) \gamma_{22} (\zeta_c^2 - 1) (\zeta_u^2 - 1) + (1/24) \gamma_{04} (\zeta_u^4 - 6\zeta_u^2 + 3) ] \quad (6.3.b)$$

pour des pentes jusque  $\zeta_c = \zeta_u = 2,5$  et où les valeurs r.m.s.,  $\sigma_c$  et  $\sigma_u$ , les coefficients d'obliquité,  $\gamma_{21}$  et  $\gamma_{03}$  (définis en annexe 6.1), et les coefficients d'escarpement,  $\gamma_{40}$ ,  $\gamma_{22}$  et  $\gamma_{04}$  (définis en annexe 6.1), sont évalués à partir des données.

Les variances augmentent linéairement avec le vent mais moins rapidement si la surface est luisante. Pour une surface propre :

$$\sigma_c^2 = 0,003 + 1,92 \cdot 10^{-3} U_{12,5} \pm 0,002 \quad (6.4.a)$$

$$\sigma_u^2 = 0,000 + 3,16 \cdot 10^{-3} U_{12,5} \pm 0,004 \quad (6.4.b)$$

où les valeurs ( $\pm$ ) donnent les déviations standards des valeurs observées par rapport aux valeurs fournies par la régression linéaire.

De plus

$$1,0 \leq (\sigma_u^2 / \sigma_c^2) \leq 1,8 \quad \text{et} \quad (\sigma_u^2 / \sigma_c^2)_{\text{moyen}} = 1,34$$

Et pour une surface luisante :

$$\sigma_c^2 = 0,003 + 0,84 \cdot 10^{-3} U_{12,5} \pm 0,002 \quad (6.5.a)$$

$$\sigma_u^2 = 0,005 + 0,78 \cdot 10^{-3} U_{12,5} \pm 0,002 \quad (6.5.b)$$

avec  $(\sigma_u^2 / \sigma_c^2)_{\text{moyen}} = 1,16$ .

Les coefficients d'obliquité diminuent avec la vitesse du vent pour la surface propre tandis que la dispersion des données pour la surface luisante est telle qu'une dépendance en la vitesse du vent n'est pas visible. Pour une surface propre :

$$\gamma_{21} = -0,01 + 0,0086 U_{12,5} \pm 0,03 \quad (6.6.a)$$

$$\gamma_{03} = -0,04 + 0,033 U_{12,5} \pm 0,12 \quad (6.6.b)$$

Pour une surface luisante :

$$\gamma_{21} = 0,00 \pm 0,02 \quad (6.7.a)$$

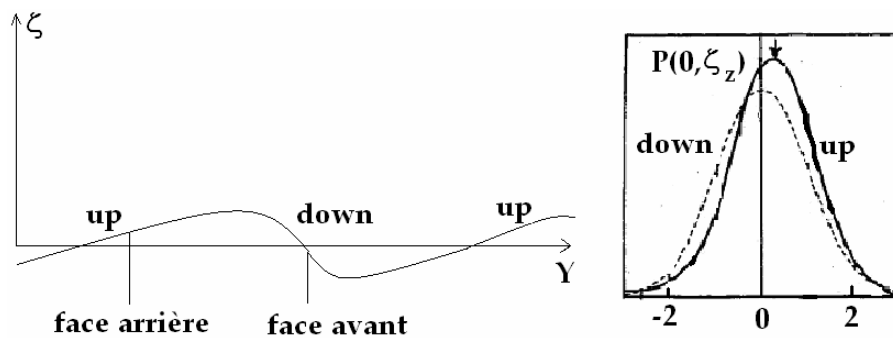
$$\gamma_{03} = -0,02 \pm 0,05 \quad (6.7.b)$$

Dans la direction du vent, la face des vagues « au vent » (up) est plus

aplatie et plus étalée que celle « sous le vent » (down), comme illustré à la figure 6.5. De ce fait, nous observons

- un plus grand nombre de pentes du côté « au vent » que du côté « sous le vent » ;
- plus de pentes de faible amplitude du côté « au vent » ;
- et plus de pentes de très grande amplitude du côté « sous le vent ».

Il en résulte que la pente la plus probable est de quelques degrés sur la face « au vent » de la vague, alors qu'elle serait de  $0^\circ$  si la vague était symétrique et que la pdf est au-dessus de la gaussienne sur la face « au vent » et en dessous sur la face « sous le vent », sauf pour les très grandes amplitudes (au-delà de  $25^\circ$ ). Ceci est présenté à la figure 6.5, où l'axe Y est dans la direction du vent.



**Figure 6.5 :** Caractéristiques de la surface de la mer comme expliquées par la p.d.f. des pentes pour l'axe avec le vent. La courbe en traits pleins se rapporte à la distribution observée tandis que la courbe en traits pointillés se rapporte à une distribution gaussienne de même variance.

Selon la précision des mesures, les coefficients d'escarpement sont indépendants de la vitesse du vent. Ils sont du même ordre de grandeur, que la surface soit propre ou non. Dans le cas d'une surface propre :

$$\gamma_{40} = 0,40 \pm 0,23 \quad (6.8.a)$$

$$\gamma_{22} = 0,12 \pm 0,06 \quad (6.8.b)$$

$$\gamma_{04} = 0,23 \pm 0,41 \quad (6.8.c)$$

Pour une surface luisante :

$$\gamma_{40} = 0,36 \pm 0,24 \quad (6.9.a)$$

$$\gamma_{22} = 0,10 \pm 0,05 \quad (6.9.b)$$

$$\gamma_{04} = 0,26 \pm 0,31 \quad (6.9.c)$$

A cause de l'escarpement, des pentes très petites sont plus probables que celles requises par une p.d.f. gaussienne. Si on compare les variances des pentes fournies par Schooley et par Cox & Munk, on constate qu'elles sont semblables pour des vents modérés mais pour des vents faibles ou forts, celles de Schooley sont plus petites.

### 6.3.3 Mesures de Cox

Cox (1958) a mesuré les pentes de la surface de l'eau dues aux vagues de vent dans un tunnel de laboratoire, pour trois distances d'action (1,47, 2,14 et 3,20 m) et pour des vitesses de vent de 2,4 à 12,2 ms<sup>-1</sup>. Il a étudié les variances des pentes en fonction de la vitesse et de la distance d'action du vent. Les résultats de Cox ne concordent pas avec l'augmentation linéaire de la variance avec la vitesse du vent, comme trouvé par Cox & Munk. Cela peut être attribué au fait que les mesures de Cox sont faites en cuve à ondes tandis que celles de Cox & Munk sont faites dans l'océan sans considérer l'effet de la distance d'action. De plus les résultats de Cox fournissent des valeurs purement expérimentales pour les variances et aucune mesure n'existe pour les coefficients d'obliquité et d'escarpement.

### 6.3.4 Mesures de Long & Huang

Long & Huang (1976) ont effectué des mesures de pentes des vagues dans le domaine capillogravifique, en laboratoire, à l'aide d'un appareil utilisant la réfraction d'un faisceau laser. Cet appareil est sensible aux vagues jusque 100 Hz et les vitesses de vent enregistrées étaient de 3,28 à 12,7 ms<sup>-1</sup>. Ils ont obtenu les variances des pentes dans les directions au vent et perpendiculaire au vent pour des

conditions de vent et des distances d'action différentes. A nouveau, ces résultats ne sont qu'expérimentaux et ils indiquent que la dépendance linéaire des variances en la vitesse du vent n'est pas correcte. Par ailleurs, il n'y a pas d'information sur les coefficients d'obliquité et d'escarpement.

Le fait de la disparité des variances peut être attribué, selon Huang & Long, aux différents dispositifs et appareils utilisés pour faire les mesures. En effet, les résultats incluent des vagues de fréquences différentes car les appareils sont différents et les variances des pentes ne sont pas obtenues selon les mêmes méthodes. En tout état de cause, il est préférable d'utiliser les variances proposées par Cox & Munk car elles ont été mesurées dans l'océan.

### **6.3.5 Variances des pentes**

La p.d.f des pentes n'est pas gaussienne et un développement en série de Gram-Charlier est utilisé pour la représenter. Les variances des pentes sont données par Cox & Munk pour des surfaces propre ou couverte d'un film d'huile dans l'océan et par Cox et Long & Huang pour une surface propre dans une cuve à ondes. Comme expliqué précédemment, la préférence est donnée aux résultats de Cox & Munk, car ils sont obtenus à partir de mesures en océan. Par ailleurs, Cox & Munk sont les seuls qui fournissent des valeurs de coefficient d'obliquité et d'escarpement.

Mais il nous faut encore décider si on utilise les résultats pour la surface propre ou pour la surface couverte d'huile. En effet, comme seules les « grandes vagues » (par rapport à la longueur d'onde électromagnétique) nous intéressent et que l'huile sur la mer amortit les petites vagues, on pourrait penser que la mer couverte d'huile correspond à une mer avec uniquement des « grandes vagues ». Ceci suggère une comparaison entre les résultats de Cox & Munk et la variance des pentes obtenue à partir du spectre. En effet, il faut que la p.d.f. des pentes soit cohérente avec le spectre des pentes.

Les variances des pentes de la surface de mer peuvent être obtenues par intégration du spectre des pentes dans les deux directions

principales, soit :

$$\sigma_c^2 = 1/(2\pi)^2 \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K^2 \sin^2\alpha \gamma(K,\alpha) K dK d\alpha \quad (6.10.a)$$

$$\sigma_u^2 = 1/(2\pi)^2 \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K^2 \cos^2\alpha \gamma(K,\alpha) K dK d\alpha \quad (6.10.b)$$

$$\sigma_s^2 = \sigma_c^2 + \sigma_u^2 = 1/(2\pi)^2 \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K^2 \gamma(K,\alpha) K dK d\alpha \quad (6.10.c)$$

où  $\alpha$  est l'angle formé entre la direction du vent et le vecteur nombre d'onde,  $\bar{K}$ , et le suffixe « s » indique les pentes. L'équation (6.10.c) peut se réécrire en fonction du spectre en amplitude en nombre d'onde,  $S(K)$ , par

$$\sigma_s^2 = 1/(2\pi) \int_0^\infty K^2 S(K) dK \quad (6.11)$$

Il s'agit de la variance totale des pentes des vagues qui se scinde en  $\sigma_{LS}^2$ , la variance des pentes des grandes vagues et en  $\sigma_{RS}^2$ , la variance des pentes des petites vagues. Ces variances sont obtenues par intégration jusqu'à, respectivement à partir de, un nombre d'onde limite,  $K_b$ , qui indique la transition entre les grandes vagues et les petites. Elles sont définies par (4.49) pour  $\sigma_{LS}^2$  et par (4.50) pour  $\sigma_{RS}^2$ .

Le modèle électromagnétique de diffusion ne nécessite que la connaissance de la p.d.f. des pentes pour les grandes vagues. Dès lors, seul  $\sigma_{LS}^2$  nous intéresse.

Mais qu'ont mesuré Cox & Munk ? Observons l'évolution de  $\sigma_{LS}^2$  avec  $K_b$  pour différentes vitesses de friction du vent, comme représenté à la figure 6.6 par les traits pleins.

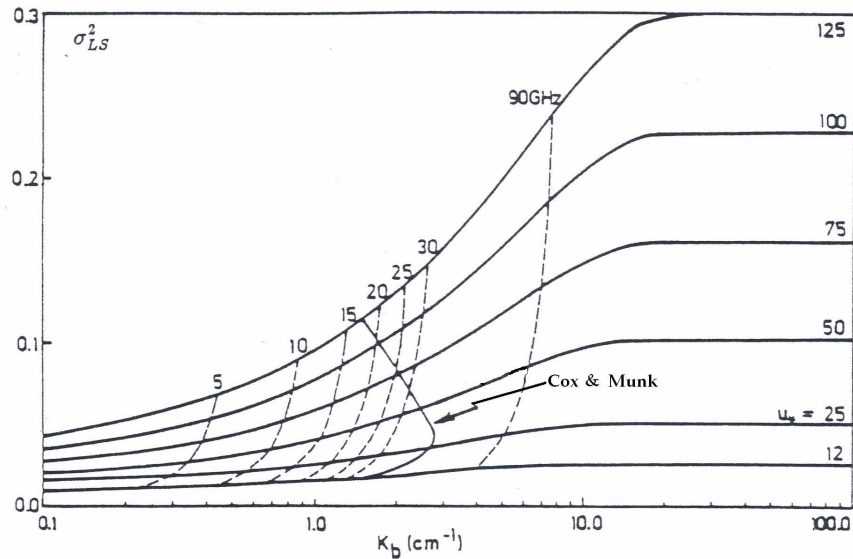


Figure 6.6 : Variance des pentes des grandes vagues,  $\sigma_{LS}^2$ , calculée par intégration du spectre de Bjerkaas-Riedel (1979) en fonction du nombre d'onde limite,  $K_b$ , et de la vitesse de friction du vent,  $u_*$  (en  $\text{cm s}^{-1}$ ). Elle est comparée avec 1) le nombre d'onde le plus grand qui est inclus dans la variance totale de Cox & Munk, 2) le plus grand nombre d'onde limite,  $K_b$ , fonction de la fréquence électromagnétique, inclus dans  $\sigma_{LS}^2$  (courbes en pointillés)

Parallèlement à cela, nous avons calculé, pour les différentes vitesses de friction, la valeur de  $K_b$  qui donnait, après intégration du spectre, la valeur de  $\sigma_s^2$  mesurée par Cox & Munk pour une mer « propre » pour cette vitesse du vent. Ceci est représenté par la courbe en traits pleins, notée « Cox & Munk ». Cette courbe représente donc la valeur du nombre d'onde de coupure du dispositif utilisé par Cox & Munk. Ce nombre d'onde de coupure se situe autour de  $2 \text{ cm}^{-1}$ . Par ailleurs, la valeur du nombre d'onde critique est de  $3,64 \text{ cm}^{-1}$  (c'est le nombre d'onde pour lequel gravité et tension superficielle sont égales). Nous pouvons conclure que les mesures de Cox & Munk pour une surface propre n'incluent pas les effets des pentes des vagues capillaires. Nous utiliserons donc leur modèle pour une mer « propre », car il correspond à la séparation électromagnétique des vagues à grande et

petite échelle.

En effet, si d'un point de vue hydrodynamique, la séparation entre les petites vagues et les grandes vagues tient compte des forces de rappel au sein du liquide, d'un point de vue électromagnétique, elle dépend de la valeur de la fréquence d'observation. Une vague est dite grande si sa fréquence est plus petite que la fréquence de l'onde électromagnétique d'observation et vice versa pour une vague dite petite. Les courbes en traits pointillés représentent  $K_b$  pour une vitesse de vent donnée et pour une fréquence électromagnétique d'observation donnée. Dès lors, se baser sur les variances de Cox & Munk ne sera valable que pour certaines fréquences d'observation. Pour une variance totale des pentes des grandes vagues, valable quelle que soit la fréquence électromagnétique, la variance pour une mer propre de Cox & Munk sera remplacée par la valeur obtenue à partir de l'équation (4.49) où  $K_b$  est donné en fonction de la fréquence électromagnétique d'observation (chapitre 1).

Cependant, la séparation entre les composantes avec le vent et perpendiculaire au vent se basera sur le modèle de Cox & Munk, car aucune autre information n'est disponible à ce propos. Avec  $R$ , le coefficient entre la variance des pentes dans la direction perpendiculaire au vent,  $\sigma_c^2$ , et la variance des pentes dans la direction du vent,  $\sigma_u^2$ , on obtient :

$$\sigma_c^2 = R/(R+1) \sigma_{LS}^2 \quad (6.12)$$

$$\sigma_u^2 = 1/(R+1) \sigma_{LS}^2 \quad (6.13)$$

où  $R$  est donné par :

$$R = (\sigma_c^2/\sigma_u^2)_{\text{Cox \& Munk}} \quad (6.14)$$

et où  $\sigma_c^2$  est donné par (6.4.a) et  $\sigma_u^2$  par (6.4.b).

### 6.3.6 Extension du domaine de validité de Cox & Munk

L'expression de la p.d.f. des pentes donnée par Cox & Munk n'est valable que sur leur domaine de mesures des pentes et de vitesses de vent. Si on l'extrapole vers des valeurs de grandes pentes, la valeur

de la p.d.f. ainsi obtenue devient négative dans la direction avec le vent, ce qui est incorrect pour une densité de probabilité. Cela provient d'une extension analytique de la p.d.f. proposée à des valeurs de pente qui se trouvent en dehors du domaine observé durant les expériences de Cox & Munk. Ceci est observé pour des valeurs de  $\zeta = \sqrt{\zeta_u^2 + \zeta_c^2}$  supérieures à environ 2,5, bien que la valeur exacte dépende de la vitesse du vent. Pour contrecarrer ce problème, Lemaire (1998) propose une extension de la p.d.f. de Gram-Charlier,  $P_{GC}$  donnée par Cox & Munk à une p.d.f. gaussienne  $P_G$  avec les mêmes variances de pente, pour des valeurs de  $\zeta$  plus grandes qu'une valeur limite  $\zeta_{CM} = 2$ . Cette valeur quelque peu arbitraire correspond à un point quasi constant où  $P_{GC}$  et  $P_G$  sont égales et il est aussi près de la limite de validité de  $P_{GC}$  par rapport aux observations de Cox & Munk.

Les deux p.d.f. sont reliées de façon continue en utilisant le filtre :

$$f(\zeta) = 1 / (1 + \exp(-4(\zeta - \zeta_{CM}))) \quad (6.15)$$

Et l'expression utilisée est donc :

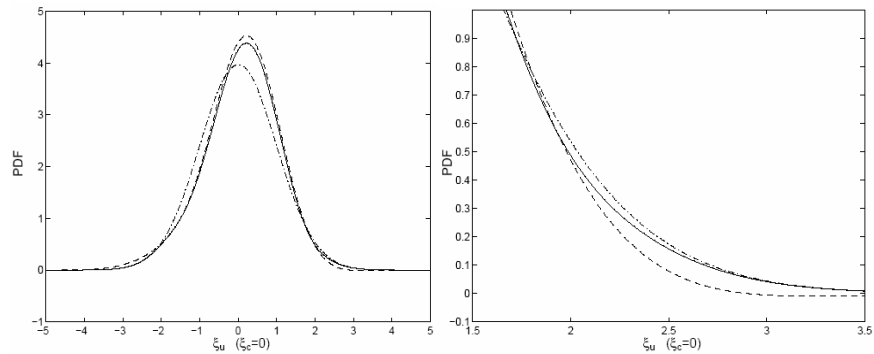
$$P(\zeta_x, \zeta_y) = (1 - f(\zeta)) P_{GC}(\zeta_x, \zeta_y) + f(\zeta) P_G(\zeta_x, \zeta_y) \quad (6.16)$$

ou encore avec (6.3.a) :

$$P(\zeta_x, \zeta_y) = (1 / 2\pi\sigma_c\sigma_u) \exp(-(\zeta_c^2 + \zeta_u^2)/2) [(1 - f(\zeta)) F(\zeta_c, \zeta_u) + f(\zeta)] \quad (6.17)$$

avec (6.15) et (6.3.b).

Finalement une réévaluation des variables  $\zeta_c$  et  $\zeta_u$  et de  $P(\zeta_x, \zeta_y)$  est réalisée de telle sorte que la p.d.f. soit normalisée à l'unité et que les variances des pentes calculées en utilisant (6.17) soient égales à  $\sigma_{LS}^2$  donné par le spectre. Il en résulte une correction de l'amplitude de la p.d.f. qui est de l'ordre de 3 %. La figure 6.7 extraite de Lemaire (1998) illustre la combinaison ainsi utilisée.



**Figure 6.7** : La ligne en pointillés correspond à la p.d.f. des pentes donnée par le développement en série de Gram-Charlier évalué par Cox & Munk. La ligne en traits et points est une p.d.f. gaussienne avec les mêmes variances des pentes. La ligne en trait plein représente l'expression (6.17). (b) est un agrandissement de (a) (Lemaire, 1998)

### 6.3.7 Conclusion

La p.d.f. des pentes - qui est nécessaire à la fois dans le terme d'ordre zéro et dans le terme d'ordre un de la diffusion par une surface rugueuse - doit être celle qui correspond aux pentes de grand échelle.

Les premières mesures de la p.d.f. des pentes indiquaient qu'elle n'était pas strictement gaussienne : il n'y a pas d'asymétrie dans la direction perpendiculaire au vent, mais une légère obliquité dans la direction avec le vent. Cox & Munk ont fait une hypothèse simplificatrice : la p.d.f. jointe des pentes est approximée par une distribution bidimensionnelle qui a une dispersion plus grande dans la direction du vent que perpendiculairement au vent. Les directions avec le vent et perpendiculaire au vent sont non corrélées. Ils ont proposé un développement en série de Gram-Charlier de la p.d.f. des pentes et ses coefficients ont été évalués à partir de leurs données.

Dans les mesures de Cox & Munk, aucune distinction n'a été faite entre les contributions des grandes vagues et des petites vagues aux variances des pentes. En comparant les variances de Cox & Munk et celles obtenues par intégration du spectre, nous montrons que les variances de Cox & Munk pour une surface « propre » sont

approximativement (figure 6.6) celles des vagues à grande échelle pour les fréquences électromagnétiques de la bande de 15 à 30 GHz. Nous en déduisons que les autres coefficients pour une surface propre sont aussi appropriés au cas des vagues qui nous intéressent du point de vue électromagnétique.

A cause de la dépendance non linéaire des variances par rapport à la vitesse du vent et à cause de la séparation entre grandes et petites vagues, qui est liée à la fréquence électromagnétique d'observation, la variance totale du modèle de Cox & Munk est remplacée par la variance totale obtenue à partir du spectre. Seule la séparation entre les composantes avec le vent et perpendiculaire au vent est celle proposée par Cox & Munk. Finalement, l'expression de Cox & Munk est étendue par une p.d.f. gaussienne pour les grandes pentes afin d'éviter que la p.d.f. des pentes ne devienne négative pour les grandes pentes.

En conclusion, la p.d.f. des pentes pour les grandes vagues est donnée par les équations (4.49), (6.2), (6.3.b), (6.4.a), (6.4.b), (6.6.a), (6.6.b), (6.8.a) à (6.8.c), (6.12) à (6.15) avec  $\zeta_{CM} = 2$  et (6.17).

Ce modèle est basé sur des mesures faites entre  $u^* = 12 \text{ cms}^{-1}$ , la limite de validité inférieure du spectre et  $u^* = 60 \text{ cms}^{-1}$ , la limite supérieure des expériences de Cox & Munk. En dehors de ce domaine, le modèle est extrapolé.

Il nous faut terminer par une remarque. Dans la méthode de Burrows-Brown proposée par Guissard (chapitre 1), l'hypothèse que  $\zeta$  et toutes ses dérivées sont gaussiennes est faite. Cette hypothèse permet de définir de façon univoque la p.d.f. avec seulement la variance et la corrélation. Cette hypothèse n'est donc pas une hypothèse nécessaire, elle n'est qu'une simplification mathématique.

La dernière section présente la relation existant entre la hauteur significative des vagues ( $H_{1/3}$ ) et la valeur r.m.s. des déplacements de la surface ( $\sigma$ ).

## 6.4 Hauteur significative

Le déplacement vertical de la surface de la mer peut être décrit par diverses quantités : le déplacement  $\zeta(x,y,t)$ , la hauteur  $H$  définie comme la distance verticale entre la crête d'une vague et le creux voisin, l'amplitude  $a = H/2$  (une quantité positive comme  $H$ ), la variance des déplacements  $\sigma^2 = \langle \zeta^2 \rangle$  et la hauteur significative  $H_{1/3}$  définie comme la valeur moyenne du tiers des vagues les plus hautes. La relation suivante est communément acceptée et largement diffusée dans la littérature, à savoir  $H_{1/3} = 4\sigma$ , sans que celle-ci ne soit justifiée. En effet, la fonction de densité de probabilité des déplacements (qui fournit  $\sigma$ ) n'est pas suffisante pour obtenir cette relation puisque  $H_{1/3}$  est lié aux déplacements de la surface dont la pente est nulle, c'est-à-dire la hauteur.

La relation entre  $H_{1/3}$  et  $\sigma$  est étudiée à l'annexe 6.3 et il est montré que celle-ci ne peut être unique, car elle dépend du coefficient de corrélation  $C$  entre le déplacement et la courbure en un point donné de la surface. Elle dépend de façon équivalente de la largeur du spectre via la quantité

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 - C^2} \quad (6.18)$$

Il faut noter que la largeur du spectre  $\varepsilon$  (6.18) n'est pas la même que la largeur de bande spectrale  $\nu$  (4.22). La relation entre les deux est étudiée à l'annexe 6.3, à la section A6.3.4. Deux cas simples existent quand  $C$  vaut 0 ou 1. Pour des déplacement et courbure complètement corrélés, on a  $C = 1$  ou  $\varepsilon = 0$ , tandis que pour des déplacement et courbure complètement non corrélés, on a  $C = 0$  ou  $\varepsilon = 1$ .

On montre, en annexe 6.3, que dans le cas extrême  $\varepsilon = 1$ ,

$$H_{1/3} = 3,000 \sigma$$

tandis que pour l'autre cas extrême  $\varepsilon = 0$ ,

$$H_{1/3} = 4,004 \sigma$$

Dès lors, la relation communément utilisée  $H_{1/3} = 4\sigma$  n'est valable que dans le cas particulier où déplacement et courbure sont

complètement corrélés.

En général, dès que le spectre des déplacements est connu, le paramètre  $\varepsilon$  peut être calculé avec (6.18) par :

$$\varepsilon^2 = 1 - M_2^2 / (M_4 M_0) \quad (6.19)$$

Le spectre en fréquence choisi est le modèle UCL-3 (section 4.6), car c'est le seul qui est fonction d'autres paramètres que la vitesse du vent, à savoir la pente significative,  $\xi$ , la longueur d'onde au pic du spectre,  $\Lambda_0$  et la distance d'action,  $x$ . La pente significative est définie par l'équation (2.28), à savoir :

$$\xi \equiv \sigma / \Lambda_0 \quad (2.28)$$

C'est un bon indicateur de l'état de la mer pour une mer non pleinement développée. Avec le spectre UCL-3, le moment d'ordre  $i$  est donné par :

$$M_i = \sigma^2 (m/4)^{i/4} \omega_0^i \Gamma((m-i)/4) / \Gamma((m-1)/4)$$

où  $\Gamma(x)$  est la fonction Gamma et  $m$  est la pente du spectre après le pic en fréquence,  $\omega_0$ .

En introduisant cette expression dans (6.19), on obtient :

$$\varepsilon^2 = 1 - (m-5)/4 [\Gamma((m-3)/4) / \Gamma((m-1)/4)]^2 \quad (6.20)$$

une expression qui montre que  $\varepsilon$  dépend uniquement de  $m$ , donc de la pente significative,  $\xi$ , et de la distance d'action,  $x$ . La largeur spectrale,  $\varepsilon$ , est représentée à la figure 6.8 en fonction de la pente significative, pour une distance d'action de 10 m. La valeur maximale de la pente significative en pleine mer est de 2 % ou 0,02 (section 2.2.5). Le coefficient de corrélation  $C$  est aussi dessiné sur la même figure.

Il faut noter que si  $m = 5$  (ou si  $x = 10$  m et  $\xi = 0,03979$ ),  $\varepsilon = 1$ , le spectre est très large et les amplitudes sont distribuées selon une gaussienne. D'autre part, si  $m = 5$ , le spectre des déplacements est en  $\omega^5$  comme proposé par Phillips et d'autres pour une mer pleinement développée. Ces deux conclusions (une mer pleinement développée et une distribution gaussienne des amplitudes) ajoutées au fait que la

densité de probabilité des amplitudes, observée en mer, est presque une fonction de Rayleigh, tendent à confirmer la suggestion faite par Huang et al. que des conditions de mer non pleinement développées sont plus fréquentes que des conditions pleinement développées.

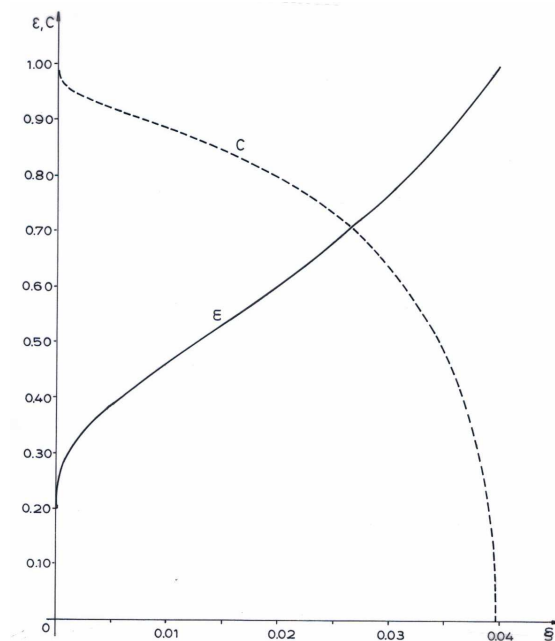


Figure 6.8 : Paramètres  $\epsilon$  (ligne continue) et  $C$  (ligne pointillée) en fonction de la pente significative  $S$  pour une distance d'action de 10 m

La relation entre la hauteur significative des vagues et la valeur r.m.s. des déplacements peut donc s'écrire comme

$$H_{1/3} = F(\epsilon) \sigma \quad (6.21)$$

où

$$3 \leq F(\epsilon) \leq 4$$

pour

$$0 \leq \epsilon \leq 1$$

ou

$$0 \leq C \leq 1$$

Il en résulte que  $H_{1/3} = 3\sigma$  quand  $\varepsilon = 1$  (ou  $C = 0$ ), c'est-à-dire pour un spectre large ou des déplacement et courbures non corrélés, tandis que  $H_{1/3} = 4\sigma$  quand  $\varepsilon = 0$  (ou  $C = 1$ ), c'est-à-dire pour un spectre infiniment étroit ou des déplacement et courbures complètement corrélés. De plus, la densité de probabilité des amplitudes des vagues est de type gaussien dans le premier cas et de type Rayleigh dans le second cas.

La figure 6.9 illustre le comportement de  $F$  avec la largeur spectrale  $\varepsilon$ . La fonction  $F(\varepsilon)$  est monotone et décroissante avec  $\varepsilon$  et sera donc toujours comprise entre  $3\sigma$  et  $4\sigma$ . En se référant à la figure 6.8, on remarque que même pour des petites valeurs de la pente significative  $S$ ,  $\varepsilon$  reste toujours supérieur à environ 0,25. Ceci indique que le cas extrême  $\varepsilon \rightarrow 0$  - c'est-à-dire un spectre infiniment étroit et une densité de probabilité de Rayleigh - n'arrivera que très rarement en pratique. Cependant, la relation  $H_{1/3} = 4\sigma$  peut être approchée à 5 % près pour des mers avec des pentes significatives inférieures à 2,5 %, soit les valeurs rencontrées en pleine mer.

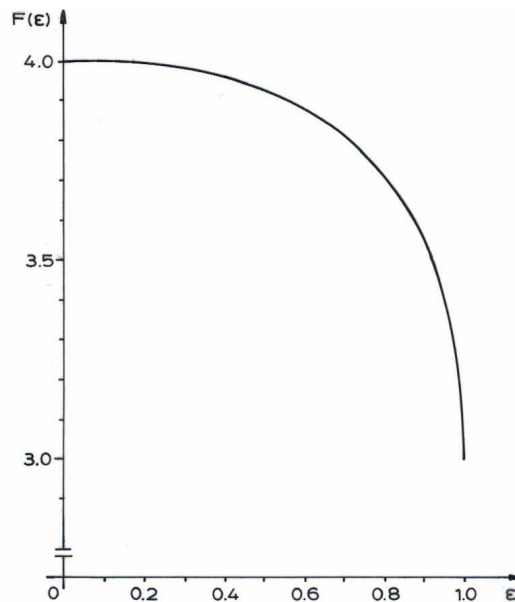


Figure 6.9 : La fonction  $F(\varepsilon)$  en fonction de  $\varepsilon$

## 6.5 Conclusion

La fonction de densité de probabilité des déplacements de la surface de la mer en un point donné n'est pas gaussienne, car les vagues ont des pointes escarpées et des creux plats.

Le modèle électromagnétique de la diffusion par la surface de la mer aux hyperfréquences nécessite la connaissance de la fonction de densité de probabilité des pentes des vagues à grande échelle.

Nous avons montré que le modèle de Cox & Munk pour une surface « propre » (c'est-à-dire sans film d'huile) concerne bien les vagues que le modèle électromagnétique considère comme « grandes ». Dès lors, ce modèle est adopté pour les coefficients d'obliquité (équations (6.6.a) et (6.6.b)), les coefficients d'escarpement (équations (6.8.a) à (6.8.c)) et le partage de la variance des pentes des grandes vagues,  $\sigma^2_{LS}$ , en la composante dans la direction du vent,  $\sigma^2_u$ , et la composante dans la direction perpendiculaire au vent,  $\sigma^2_c$  (équations (6.12) à (6.14)). Par contre,  $\sigma^2_{LS}$  lui-même, est donné par l'intégrale du spectre (équation (4.49)).

La p.d.f. ainsi obtenue est étendue pour les valeurs des grandes pentes de telle sorte que la p.d.f. ne soit jamais négative (équations (6.15) à (6.17) avec (6.3.b)).

Nous montrons que la relation entre la hauteur significative des vagues,  $H_{1/3}$ ,  $\epsilon\tau\lambda\alpha\omega\alpha\lambda\epsilon\upsilon\rho\rho.\mu.\sigma.\delta\epsilon\sigma\delta\epsilon\pi\lambda\alpha\chi\epsilon\mu\epsilon\nu\tau\sigma,\sigma$ , dépend de la largeur du spectre,  $\epsilon$  :  $H_{1/3} = F(\epsilon)\sigma$  où  $3 \leq F(\epsilon) \leq 4$ . Cette fonction est donnée en annexe 6.3. Mais la relation communément utilisée  $H_{1/3} = 4\sigma$  est correcte à 5 % près pour les valeurs de pente significative rencontrées en pleine mer.



## Annexe 6.1

# Séries de Gram-Charlier

Il est possible d'obtenir une représentation d'une p.d.f. de cumulants connus (voir section 3.3.3) en fonction d'une p.d.f. connue. La série de Gram-Charlier est la représentation  $g(x)$  obtenue à partir d'une p.d.f. normale,  $f(x)$ . Soit  $f(x)$  une p.d.f. connue, de cumulants connus  $K_n$ . Dès lors, la représentation  $g(x)$  d'une p.d.f. inconnue de cumulants connus  $K'_n$  est donnée par :

$$g(x) = L f(x)$$

où  $L$  est un opérateur donné par

$$K'_n = K_n + \varepsilon_n$$

Cet opérateur est (Johnson & Kotz, 1970) :

$$L = \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \left( (-D)^j / j! \right) \right]$$

où

$$D^j = d^j / (dx)^j$$

ou

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} 1/i! \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \left( (-D)^j / j! \right) \right]^i$$

Mais nous avons généralement :

$$D^j f(x) = P_j(x) f(x)$$

où  $P_j(x)$  est un polynôme de degré  $j$  en  $x$ .

Ceci conduit à :

$$g(x) = \left[ 1 - \varepsilon_1 P_1(x) + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2) P_2(x) - \frac{1}{6} (\varepsilon_1^3 + 3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3) P_3(x) + \frac{1}{24} (\varepsilon_1^4 + 6 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_4) P_4(x) + \dots \right] f(x)$$

Supposons que  $x$  est une variable centrée réduite et que  $f(x)$  est une p.d.f. normale :

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$$

Dès lors  $K_n = 0$  pour  $n > 2$  implique que  $\varepsilon_n = K'_n$  pour  $n > 2$  et  $(-1)^j P_j(x) = H_j(x)$ , le polynôme d'Hermite. De plus, parce que  $g(x)$  est standardisé, nous avons

$$\varepsilon_1 = 0 \quad K_1 = 0$$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad K_2 = 1$$

$$\varepsilon_3 = K'_3 = \gamma_3 = \mu_3$$

$$\varepsilon_4 = K'_4 = \gamma_4 = \mu_4 - 3$$

En conséquence :

$$g(x) = [1 - 1/6 \gamma_3 H_3(x) + 1/24 \gamma_4 H_4(x) + \dots] 1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$$

est le développement de Gram-Charlier. Ou, avec plus de termes :

$$g(x) = [1 - 1/6 \gamma_3 H_3(x) + 1/24 \gamma_4 H_4(x) + 1/120 \gamma_5 H_5(x) + 1/720 (\gamma_6 + 10 \gamma_3^2) H_6(x) + 1/5040 (\gamma_7 + 35 \gamma_3 \gamma_4) H_7(x) + 1/40320 (\gamma_8 + 56 \gamma_3 \gamma_5 + 35 \gamma_4^2) H_8(x) + \dots] 1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$$

Dans de nombreuses applications, seuls les quatre premiers cumulants sont utilisés :

$$g(x) \approx [1 - 1/6 \gamma_3 (x^3 - 3x) + 1/24 \gamma_4 (x^4 - 6x^2 + 3)] 1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$$

Cette procédure peut être généralisée sous une forme bidimensionnelle :

$$P(x,y) = 1/2\pi\sigma_x\sigma_y [1 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \gamma_{ij} H_i(x') H_j(y')] e^{-(x'^2+y'^2)/2}$$

où  $x' = x/\sigma_x$  et  $y' = y/\sigma_y$ .

## Annexe 6.2

# Mesures de Huang & Long

Huang & Long proposent un développement en série de Gram-Charlier pour la p.d.f. des déplacements de la surface. Les cumulants sont exprimés en fonction de  $\S$ , la pente significative. L'amplitude de la distorsion du profil de la surface de la mer (crêtes pointues et creux plats), mesurée par le coefficient d'oblicité  $\gamma_3$ , est proportionnelle à la pente significative,  $\S$ .

La courbe la mieux adaptée à toutes les données est donnée par :

$$\gamma_3 = 8\pi \S$$

Quand la vitesse du vent augmente, l'oblicité tend vers la valeur 1 :

$$\gamma_3 = 1 \text{ d'où } \S = 1/8\pi \approx 0,04$$

Les cumulants normalisés d'ordre plus élevé ont aussi été modélisés par des lois empiriques en fonction de  $\S$  :

|                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| $\gamma_4$ pas de tendance claire | $-0,1 < \gamma_4 < -0,4$      |
| $\gamma_5 = -110 \S$              | $\gamma^{\max}_5 \approx -5$  |
| $\gamma_6 = -5000 \S^2$           | $\gamma^{\max}_6 \approx -10$ |
| $\gamma_7 = 750 \S$               | $\gamma^{\max}_7 \approx 30$  |
| $\gamma_8 = 150.000 \S^2$         | $\gamma^{\max}_8 \approx 250$ |

avec

$$\gamma_n = K_n/\sigma_n$$

Les valeurs des cumulants d'ordre élevés qui augmentent rapidement vont provoquer des problèmes dans la convergence de l'approximation de Gram-Charlier, comme cela est confirmé par les expériences : plus de termes rendent l'approximation plus mauvaise. Mais, même pour un développement en série asymptotiquement

divergent, un nombre optimal de termes peut donner une bonne approximation. Le critère utilisé est que le nombre de termes optimal est celui pour lequel  $|\gamma_i|$  est minimal ; c'est donc  $\gamma_4$  le cumulant normalisé d'ordre le plus élevé qui est considéré. En conclusion, le développement de Gram-Charlier jusqu'à l'ordre 4 donne la meilleure approximation, comme suggéré théoriquement par Longuet-Higgins (1963) :

$$P(\zeta) = [ 1 - 1/6 \gamma_3 H_3 + 1/24 \gamma_4 H_4 + 1/72 \gamma_3^2 H_6 ] 1/\sqrt{2\pi} \sigma e^{-\zeta^2/2\sigma^2}$$

où

$$\langle \zeta \rangle = 0$$

La première approximation ( $\gamma_i = 0$  pour  $i \geq 3$ ) donne la forme gaussienne :

$$P(\zeta) = 1/\sqrt{2\pi} \sigma e^{-\zeta^2/2\sigma^2}$$

comme proposé par Kinsman (1965).

## Annexe 6.3

# Hauteur significative

Pour les besoins de cette analyse, seul le processus stochastique  $\zeta(t)$  est considéré en un point fixe de l'espace : pente et courbure seront comprises comme les dérivées temporelles  $\partial\zeta/\partial t$  et  $\partial^2\zeta/\partial t^2$ . Ceci afin de réduire le nombre de variables et permettre l'utilisation du spectre en fréquence des déplacements de la surface de la mer. En effet, l'extension au cas bidimensionnel demanderait l'utilisation de six variables (le déplacement, deux pentes, deux courbures et la dérivée seconde mixte) et impliquerait l'utilisation du spectre spatial.

### A6.3.1 Hypothèses de base

La surface est représentée par le processus stochastique  $\zeta(x,y,t)$  qui est supposé être stationnaire et homogène. L'hypothèse de base est que  $\zeta(x,y,t)$  est donné par une représentation de Rice, c'est-à-dire par une somme d'un nombre infini d'ondes progressives sinusoïdales. En un point donné, le déplacement de la surface est donc la somme d'un grand nombre  $N$  de variables aléatoires indépendantes et, par le théorème central limite, pour  $N$  tendant vers l'infini, la densité de probabilité de  $\zeta(x,y,t)$  est gaussienne, de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  c'est-à-dire :

$$f(\eta) = \sqrt{1/2\pi} \exp(-\eta^2/2)$$

où  $\eta$  est la variable réduite  $\eta = \zeta/\sigma$  et

$$\sigma^2 \equiv \langle \zeta^2(x,y,t) \rangle \quad (\text{A6.3.1})$$

Les crochets  $\langle \rangle$  représentent la moyenne statistique ou l'espérance mathématique.

Les processus stochastiques  $\zeta'(t) = \partial\zeta/\partial t$  et  $\zeta''(t) = \partial^2\zeta/\partial t^2$  sont aussi décrits par des densités de probabilité gaussiennes avec les variances  $m_2$  pour les pentes et  $m_4$  pour la courbure :

$$m_2 \equiv \langle \zeta'^2(x,y,t) \rangle \quad (\text{A6.3.2})$$

$$m_4 \equiv \langle \zeta''^2(x,y,t) \rangle \quad (\text{A6.3.3})$$

De plus, par le théorème central limite en trois dimensions, la densité de probabilité jointe de  $(\zeta, \zeta', \zeta'')$  est gaussienne et a la forme suivante :

$$f(\zeta, \zeta', \zeta'') = 1/[(2\pi)^{3/2} (\Delta m_2)^{1/2}] \exp[-(1/2) (\zeta'^2/m_2 + (m_4 \zeta^2 + 2m_2 \zeta \zeta' + \sigma^2 \zeta''^2)/\Delta)] \quad (\text{A6.3.4})$$

avec

$$\Delta \equiv \sigma^2 m_4 - m_2^2$$

car la pente est non corrélée avec le déplacement et la courbure en un même point et  $m_2$  est aussi égal à la valeur négative de la covariance des déplacements et courbure :

$$m_2 = -\langle \zeta(x,y,t) \zeta''(x,y,t) \rangle$$

Le calcul de la densité de probabilité de l'amplitude des vagues commence avec la densité de probabilité jointe donnée par (A6.3.4).

### A6.3.2 Densité de probabilité de l'amplitude des vagues

Afin de relier la hauteur des vagues  $H$  au déplacement de la surface  $\zeta$ , il est préférable d'utiliser l'amplitude des vagues  $a$ , ou le maximum de  $\zeta$  qui est une quantité non négative par définition. Cartwright & Longuet-Higgins (1956) ont calculé la densité de probabilité des amplitudes normalisées  $\eta_a = a/\sigma$ . Cependant la fonction  $g(\eta_a)$  qu'ils obtiennent n'est pas une densité de probabilité dans le sens que celle-ci n'est pas normalisée.

On peut montrer que

$$\int_0^\infty g(\eta_a) d\eta_a = (1+C)/2 \quad (\text{A6.3.5.a})$$

où

$$C = -m_2 / \sigma \sqrt{m_4} \quad (\text{A6.3.5.b})$$

est le coefficient de corrélation entre déplacement et courbure. Par conséquent, la densité de probabilité correctement normalisée est obtenue en divisant  $g(\eta_a)$  par la quantité (A6.3.5.a); le résultat est :

$$f(\eta_a) = \frac{\sqrt{2/\pi} \quad \varepsilon/(1+C) \exp(-\alpha^2/2) + C/(1+C) \eta_a \exp(-\eta_a^2/2)}{[1+\text{erf}(C\alpha/\sqrt{2})]} \quad \text{pour } 0 \leq \eta_a \quad (\text{A6.3.6})$$

avec la fonction d'erreur définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

et

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 - C^2} \quad (6.18)$$

$$\alpha \equiv \eta_a / \varepsilon$$

La densité de probabilité de l'amplitude (A6.3.6) dépend de deux paramètres : la valeur r.m.s. des déplacements  $\sigma$  et le coefficient de corrélation entre déplacement et courbure  $C$ . Cette dernière quantité est non négative par définition et plus petite ou égale à l'unité; il en va de même pour  $\varepsilon$ . Nous montrerons ci-après que  $\varepsilon$  est une mesure de la largeur du spectre des déplacements.

Deux cas simples existent quand  $C$  vaut 0 ou 1. Pour des déplacement et courbure complètement corrélés, c'est-à-dire  $C = 1$  ou  $\varepsilon = 0$ , la densité de probabilité (A6.3.6) se réduit à une densité de Rayleigh :

$$\begin{aligned} f(\eta_a) &= \eta_a \exp(-\eta_a^2/2) \quad \text{pour } 0 \leq \eta_a \\ &= 0 \quad \text{pour } \eta_a < 0 \end{aligned}$$

tandis que pour des déplacement et courbure complètement non corrélés, c'est-à-dire  $C = 0$  ou  $\varepsilon = 1$ , la densité de probabilité se réduit à une densité gaussienne unilatérale :

$$\begin{aligned} f(\eta_a) &= \sqrt{2/\pi} \exp(-\eta_a^2/2) \quad \text{pour } 0 \leq \eta_a \\ &= 0 \quad \text{pour } \eta_a < 0 \end{aligned}$$

Notons ici que, en accord avec Cartwright & Longuet-Higgins, la

densité de probabilité des hauteurs observée en mer est plus proche d'une densité de Rayleigh que d'une densité gaussienne.

### A6.3.3 L'expression de $H_{1/3}$

La relation suivante est la conséquence des définitions précédentes :

$$H_{1/3} = 2a_{1/3} = 2 \sigma \eta_a^{1/3} \quad (\text{A6.3.7})$$

Afin d'obtenir  $\eta_a^{1/3}$ , définissons la fonction

$$q(l) = \int_l^\infty f(\eta_a) d\eta_a \quad (\text{A6.3.8})$$

Si on choisit  $l$  de telle sorte que

$$q(l) = 1/3 \quad (\text{A6.3.9})$$

alors

$$\eta_a^{1/3} = I(l)/q(l) = 3 I(l)$$

où

$$I(l) = \int_l^\infty \eta_a f(\eta_a) d\eta_a \quad (\text{A6.3.10})$$

On peut montrer que, dans le cas extrême  $\varepsilon = 1$ ,

$$H_{1/3} = 3,000 \sigma$$

tandis que pour l'autre cas extrême  $\varepsilon = 0$ ,

$$H_{1/3} = 4,004 \sigma$$

Ces résultats soulignent le fait que la relation entre  $H_{1/3}$  et  $\sigma$  ne peut être spécifiée univoquement par la seule connaissance de la densité de probabilité des déplacements car elle dépend de la nature exacte de la surface stochastique via le coefficient de corrélation entre déplacement et courbure  $C$ .

#### A6.3.4 Le paramètre $\varepsilon$

Nous montrerons dans cette section que le paramètre  $\varepsilon = \sqrt{1 - C^2}$  est une mesure de la largeur du spectre des déplacements de la surface. Nous l'évaluerons pour une forme particulière du spectre. Si  $\zeta(t)$  a une fonction de covariance  $\Gamma(t)$ , alors  $\zeta'(t)$  a une fonction de covariance  $(-\partial^2 \Gamma(t)/\partial t^2)$ . Dès lors une hypothèse sur le coefficient de corrélation entre déplacement et courbure est suffisant pour déterminer de manière univoque  $C$  ou  $\varepsilon$ . Ceci est évidemment équivalent à une hypothèse sur le spectre des déplacements de la surface puisque le spectre est défini comme la transformée de Fourier de la fonction de covariance. La relation entre  $\varepsilon$  (ou  $C$ ) et le spectre des déplacements est donnée par la relation entre les moments de la densité de probabilité des déplacements, pentes et courbures et les moments du spectre des déplacements.

Le coefficient de corrélation entre déplacement et courbure,  $C$ , est défini par l'équation (A6.3.5.b), où il est lié à la variance des déplacements,  $\sigma^2$ , des pentes,  $m_2$ , et des courbures,  $m_4$ . L'équation (6.18) pose  $\varepsilon$  en fonction de  $C$ . Avec la définition (4.23) de  $M_i$ , le moment d'ordre  $i$  de  $\phi(\omega)$ , et les équations (A6.3.1) à (A6.3.3), on peut relier les moments des densités de probabilité aux moments du spectre :

$$\sigma^2 = M_0$$

$$m_2 = M_2$$

$$m_4 = M_4$$

On obtient alors l'équation (6.19). Si on la compare avec l'équation (4.24) qui donne la valeur de  $v$ , « la largeur de bande spectrale », en fonction des moments du spectre, on constate que  $\varepsilon$  est une mesure de la largeur du spectre en fréquence des déplacements.

Quand on combine (6.19) et (4.24),  $\varepsilon$  et  $v$  sont reliés par :

$$v^2 = \varepsilon^2 + 1/\sigma^2 [M_2^2/M_4 - M_1^2/M_2] \quad (\text{A6.3.12})$$

Si l'on compare ces deux expressions,  $v$  et  $\varepsilon$ , les domaines de valeurs sont différents car les définitions sont différentes. Mais leur évolution avec la pente significative est semblable puisque à la fois

$v$  et  $\varepsilon$  sont une mesure de la largeur du spectre et que celle-ci augmente avec l'augmentation de la pente significative.

En général, dès que le spectre des déplacements est connu, le paramètre  $\varepsilon$  peut être calculé par (6.19).

Une estimation de  $\varepsilon$  en fonction de la pente significative est donnée par l'équation (4.31) avec (4.32) et l'équation (6.20).

Enfin, les deux cas extrêmes de la densité de probabilité des amplitudes des vagues sont reliés aux deux cas extrêmes du spectre des déplacements :  $\varepsilon = 0$  correspond à un spectre infiniment étroit tandis que  $\varepsilon = 1$  à un spectre très large.

### A6.3.5 Relation entre $H_{1/3}$ et $\sigma$

La relation entre la hauteur significative des vagues et la valeur r.m.s. des déplacements s'écrit comme (6.21). La fonction  $F(\varepsilon)$  doit être estimée. L'équation (A6.3.7) fournit l'expression suivante :

$$F(\varepsilon) = 2 \eta_a^{1/3}$$

qui nécessite l'évaluation des deux intégrales  $I(l)$  et  $q(l)$  définies respectivement par (A6.3.10) et (A6.3.8), et la recherche de la solution  $l$  par (A6.3.9).

Après de longs calculs, la fonction  $F(\varepsilon)$  peut s'écrire sous la forme

$$F(\varepsilon) = 6 (a(\varepsilon) + C b(\varepsilon)) / (1 + C)$$

où

$$a(\varepsilon) = \sqrt{2/\pi} \varepsilon \exp(-l^2/2\varepsilon^2) + 1 [\operatorname{erf}(l/\varepsilon\sqrt{2}) - 2/3]$$

$$b(\varepsilon) = \sqrt{\pi/2} [2 - \operatorname{erf}(l/\sqrt{2})] + 1/3 - f(l) - \sqrt{2/\pi} \arctan(\varepsilon/C)$$

$$f(l) = \int_0^l \exp(-x^2/2) \operatorname{erf}(Cx/\varepsilon\sqrt{2}) dx$$

et  $l$  est aussi une fonction de  $\varepsilon$ , donnée par (A6.3.9). La figure A6.1 illustre le comportement de  $l$  avec la largeur spectrale  $\varepsilon$ .

### A6.3.6 Quelques propriétés de l'amplitude des vagues a

En introduisant l'amplitude de la vague  $a$ , l'amplitude moyenne  $\langle a \rangle$ , le moment d'ordre deux par rapport à l'origine  $\langle a^2 \rangle$ , le moment d'ordre deux par rapport à la moyenne ou la variance  $\sigma_a^2$ , et l'amplitude significative des vagues  $a_{1/3}$ , Longuet-Higgins (1952) obtient les relations suivantes entre ces quantités, sous l'hypothèse que le spectre consiste en une seule bande fréquentielle étroite (c'est-à-dire  $\epsilon \cong 0$ )

$$\langle a \rangle / \sqrt{\langle a^2 \rangle} = \sqrt{\pi/2} \quad (\text{A6.3.13})$$

$$\sigma_a / \sqrt{\langle a^2 \rangle} = \sqrt{1 - \pi/4} \quad (\text{A6.3.14})$$

$$a_{1/3} / \sqrt{\langle a^2 \rangle} = 1,416 \quad (\text{A6.3.15})$$

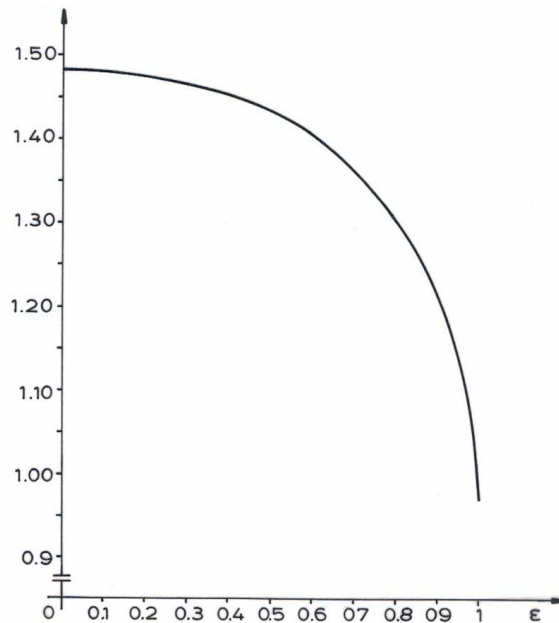


Figure A6.1 : Le paramètre  $l$  en fonction de  $\epsilon$ , donné par l'équation (A6.3.9)

L'équation (A6.3.15) est présentée par Longuet-Higgins (1982) comme  $H_{1/3} = 2,83 \sqrt{\langle a^2 \rangle}$ . Par (A6.3.13) et (A6.3.15), on obtient :

$$a_{1/3}/\sqrt{\langle a \rangle} = 1,60$$

qui est équivalente à  $H_{1/3} = 1,60 H_m$ , une relation proposée par Bonnefille (1976) avec  $H_m$ , la hauteur moyenne des vagues,  $H_m = 2\langle a \rangle$  et  $H_{1/3} = 2 a_{1/3}$ .

Par (A6.3.13) et (A6.3.14) :

$$\sigma_a/\langle a \rangle = \sqrt{4/\pi - 1}$$

et par (A6.3.14) et (A6.3.15) :

$$a_{1/3}/\sigma_a = 3,05 \quad (\text{A6.3.16})$$

Par (A6.3.16), on peut conclure que :

$$H_{1/3} = 2 \cdot 3,05 \sigma_a$$

qui peut être comparé au résultat de Phillips (1977) citant Longuet-Higgins (1952) :

$$H_{1/3} = 3,13 \sigma$$

Le facteur 2 est oublié, le facteur 3,13 devrait être 3,05 et, plus important,  $\sigma$  est apparemment pris à la place de  $\sigma_a$  !

La façon générale d'obtenir ces quantités est de calculer les moments de la densité de probabilité des amplitudes des vagues. Cartwright & Longuet-Higgins (1956) ont évalué les moments  $\mu_n$  de l'amplitude réduite  $\eta_a = a/\sigma$  définis par

$$\mu_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta_a) \eta_a^n d\eta_a$$

où  $f(\eta_a)$  est la densité de probabilité des amplitudes réduites. Ils ont donné des expressions explicites des  $\mu_n$  comme fonctions du paramètre  $\epsilon$ , sous les hypothèses de la section 6.4.2. Cependant, comme noté précédemment, les auteurs utilisent une densité de probabilité non normalisée  $g(\eta_a)$ , qui doit être multipliée par  $2/(1+C)$  afin d'obtenir la densité de probabilité normalisée  $f(\eta_a)$ . De plus, les moments  $v_n$  de l'amplitude  $a$  sont reliés aux moments réduits par

$$v_n = \sigma^n \mu_n$$

et non pas par  $v_n = \sigma^{n+1} \mu_n$ , comme donné par les auteurs. Finalement si  $\mu_n'$  sont les moments réduits proposés par les auteurs, on obtient  $v_n$  par

$$v_n = 2 \sigma^n / (1+C) \mu_n' \quad (\text{A6.3.17})$$

L'expression de  $v_2 = \langle a^2 \rangle$  sera nécessaire pour l'application à l'altimètre dans la section suivante.

### A6.3.7 Application à l'altimètre

Dans l'interprétation des mesures de la surface de la mer obtenues à partir de l'analyse de la forme de l'impulsion retour de l'altimètre, la relation  $H_{1/3} = 4 \sigma$  est communément utilisée pour extraire la hauteur significative. Hayne (1980) affirme que cette relation est valable sous l'hypothèse d'une densité de probabilité gaussienne pour les déplacements de la surface, alors que nous venons de montrer qu'elle dépend de  $\epsilon$ . Le même auteur fait l'hypothèse que l'altimètre mesure la valeur r.m.s. des déplacements  $\sigma$ , alors que cet instrument est sensible à la distribution verticale des points spéculaires de pente nulle, décrits par  $\langle a^2 \rangle$  ou  $v_2$  dans les notations de la section précédente.

La relation correcte entre  $H_{1/3}$  et  $v_2$  est obtenue avec les équations (6.21) et (A6.3.17) pour  $n = 2$ , avec l'expression  $v_2' = 2 - \epsilon^2 = 1 + C^2$ , comme donné par Cartwright et Longuet-Higgins. Elle a la forme :

$$H_{1/3} = A(\epsilon) \sqrt{\langle a^2 \rangle}$$

où la fonction  $A(\epsilon)$  est définie par :

$$A(\epsilon) = \sqrt{\frac{(1+C)}{2(1+C^2)}} F(\epsilon) \quad (\text{A6.3.18})$$

et prend les valeurs extrêmes suivantes :

$$A(0) = F(0) / \sqrt{2} = 4 / \sqrt{2} \quad A(1) = F(1) / \sqrt{2} = 3 / \sqrt{2}$$

Cette fonction est représentée à la figure A6.2 qui montre qu'elle est presque toujours égale à la constante 2,85, sauf pour  $\epsilon$  proche de l'unité. Dès lors la relation entre  $\epsilon$  et  $\sqrt{\langle a^2 \rangle}$ , ou entre  $\sigma$  et  $\sqrt{\langle a^2 \rangle}$ , dépendent toutes deux de l'état de la mer via le paramètre  $\epsilon$  (ou  $C$ ). On ne peut donc extraire correctement la hauteur significative, ou la valeur r.m.s. des déplacements, des mesures altimétriques sans aucune autre information sur l'état de la mer. Cependant, pour un large domaine de valeurs de  $\epsilon$ , où  $A(\epsilon)$  est approximativement constant, l'altimètre donne une bonne estimation directe de  $H_{1/3}$ .

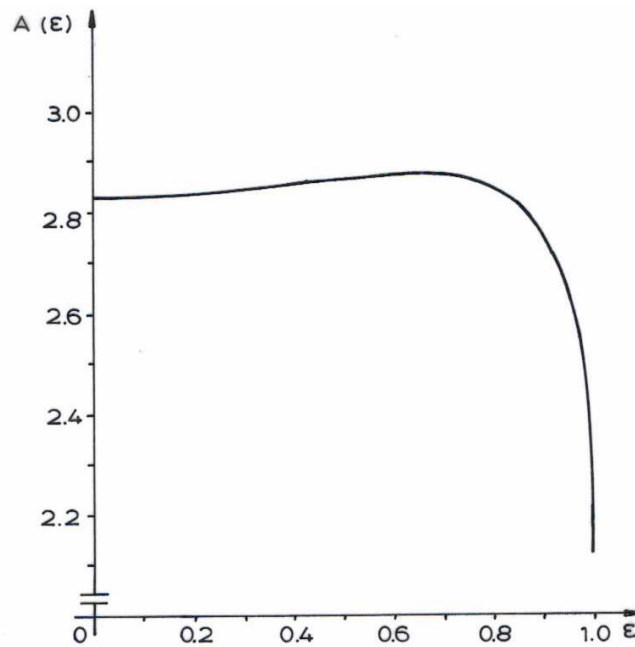


Figure A6.2 : La fonction  $A(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ , donnée par l'équation (A6.3.18)