



Université Catholique de Louvain

Institut de Recherche en Sciences Psychologiques

Quand le rapport de deux nombres naturels ouvre sur le continu

Etude comportementale du traitement de la magnitude des fractions chez l'enfant et l'adulte

Gaëlle Meert

Thèse présentée en vue de l'obtention
du titre de docteur en sciences psychologiques

Promoteurs : Jaques Grégoire
Marie-Pascale Noël

Louvain-la-Neuve, Belgique

Décembre 2010

« Dieu a fait les nombres naturels, l'homme a inventé les autres. »

Kronecker (1823 – 1891), Mathématicien et logicien allemand

Au terme de ce travail, je tiens à remercier les personnes qui ont contribué à sa réalisation. Ce travail a été un parcours semé d'obstacles, mais également une période de vie unique, stimulante et riche en rencontres.

Tout d'abord, je voudrais exprimer ma reconnaissance à Jacques Grégoire et Marie-Pascale Noël, promoteurs de cette thèse. La confiance et le soutien que vous m'avez témoignés m'ont permis de mener à bien mon projet. Jacques, je te remercie de m'avoir donné une large marge de liberté et d'autonomie pour mener les projets qui me tenaient à cœur. Marie-Pascale, je te remercie pour tes conseils et ta rigueur qui m'ont poussée à dépasser mes limites.

Merci aux membres de mon comité d'encadrement, Xavier Seron et Pierre Feyereisen, pour vos commentaires éclairants. Je remercie également Alain Content et Wim Fias d'avoir accepté d'être membres de mon jury, et Mariane Frenay d'assurer la présidence du jury.

Mon travail s'est enrichi au travers des échanges avec les membres du groupe cognition numérique. Pour cela, je voudrais remercier Mauro, Sandrine M., Valérie, Laurence, Alice, Michaël, Virginie, Nicolas, Hien, Laetitia, Samuel, Julie, Christophe, Arnaud, Aurélie, Sandrine C., Maria, et Angels.

Merci à mes collègues de l'unité PSED, CODE et NESC pour l'environnement chaleureux de travail que vous m'avez offert. Merci à Gentiane, Julia, Sandrine N., Christelle, Isabelle L., Marianne, Gaëlle, Véronique, Anne-Sophie, Anne, Marie, Catherine, Virginie, Benoît, David, Sarah, Nastasya, Isabelle R., et Mariane pour les moments conviviaux partagés sur les temps de midi. Je voudrais adresser un remerciement particulier à Véronique, Anne-Sophie, Sandrine M. et Maria P. Merci pour vos conseils, votre écoute, votre disponibilité et votre gentillesse. Votre amitié a été un soutien très précieux au cours de ces six dernières années.

Merci à Yolande, Isabelle et Marianne pour votre disponibilité et votre dévouement.

Merci à Pauline Jadot, Laurence Petitjean, Nicolas Michaux, et Christine Nossent qui ont contribué à la réalisation des expériences. Votre dévouement et enthousiasme ont fait de vous de très précieux collaborateurs. Merci également à toutes les personnes qui ont participé à mes études, et plus particulièrement aux enfants, enseignants et parents qui ont accepté de prendre part à nos recherches.

Merci, Valéry, pour ta patience bienveillante, ton soutien inconditionnel et tes conseils avisés lors de la réalisation de cette thèse. Merci, Malo, pour le bonheur que tu me procures chaque jour. J'ai beaucoup de chance de partager votre vie. Je savoure au quotidien votre présence.

Merci à mes parents qui m'ont soutenue dans mes projets et qui m'ont aidée à surmonter les moments les plus difficiles. Merci d'avoir éveillé en moi un intérêt pour la science. Merci également à Emilie, Nicolas et mes grands-parents pour vos encouragements et la confiance que vous avez eue en moi.

Merci à Papa, Emilie, Marie Bronchart et Nadine pour la relecture du manuscrit. Merci aux grands-parents de Malo sur qui j'ai pu compter ces derniers mois.

Plan

Introduction générale	p. 1
------------------------------	-------------

Partie théorique

Chapitre 1 : La cognition numérique	p.11
--	-------------

1. Les effets comportementaux classiques	p.13
1.1. Les effets de distance et de taille numérique	p.13
1.2. L'effet SNARC (Spatial-Numerical Association of Response Code)	p.16
2. Les modèles théoriques classiques	p.17
2.1. Le modèle de l'accumulateur	p.17
2.2. Le modèle de la ligne numérique mentale	p.19
2.3. Le modèle de réseau neuronal	p.23
3. Le rôle du symbole dans le traitement numérique	p.24
3.1. Ancrage du traitement numérique symbolique dans le système préverbal de représentation numérique	p.25
3.2. Impact de la symbolisation sur les représentations numériques mentales	p.26
3.3. Le modèle du triple code	p.28
4. Au-delà des numéraux à un seul chiffre	p.30
5. Conclusions	p.33

Chapitre 2 : Traitement cognitif des rapports	p.35
--	-------------

1. Traitement cognitif de la magnitude de rapports non symboliques	p.35
1.1 Données chez l'animal	p.36
1.2 Données chez le nouveau-né	p.39
1.3 Données chez l'enfant de 3 à 11 ans	p.40
1.4 Données chez l'adulte	p.51
1.5 Conclusions	p.52
2. L'apprentissage des fractions et ses obstacles	p.53
3. Traitement cognitif de la magnitude des fractions	p.57
4. Conclusions générales	p.61

Empirical part

Introduction

p.65

- 1 Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2009). Rational numbers: Componential vs. holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62, 1598-1616.
- 2 Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010a). Comparing the magnitude of two fractions with common components: which representations are used by 10- and 12-year-old children? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, 244 - 259.
- 3 Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010b). Comparing 5/7 to 2/9: Adults can do it by accessing the magnitude of the whole fractions. *Acta Psychologica*, 135, 284-292.
- 4 Meert, G., Grégoire, J., Seron, X., & Noël, M. P. The mental representation of the magnitude of symbolic and non-symbolic ratios in adults. Manuscript submitted for publication.

General discussion

- 1 Overview of the findings p.181
 - 1.1 First experimental issue: Magnitude representation p.181
 - 1.1.1 . Studies in adults p.181
 - 1.1.2 . Study in children p.188
 - 1.2 Second experimental issue: Interference and inhibition p.189
 - 1.3 Third experimental issue: Specificity of the processing of fractions p.192
 - 1.4 Fourth experimental issue: Indirect access p.194
- 2 Theoretical implications p.197
 - 2.1 Intentional vs. automatic activation p.197
 - 2.2 Extension of the models of mental magnitude representation to ratios p.199
 - 2.2.1 . The compressed number line model p.200
 - 2.2.2 . The accumulator model p.203
 - 2.3 The whole number bias p.205
 - 2.4 Conclusions p. 207
- 3 Limits and perspectives p.207
 - 3.1 Inferring the cognitive processing of the fraction magnitude from the comparison distance effect p.208
 - 3.2 Numerical comparison task and strategic aspects p.209

3.3 Interference from the magnitude of the components in a magnitude-comparison task	p.211
3.4 Improving the negative-priming design	p.211
3.5 Inferring the properties of the mental magnitude representation from the properties of the estimates produced by the participants	p.212
3.6 Our conclusions might not apply to all fractions	p.213
4 Conclusions	p.214
References	p.219

Introduction générale

Percevoir et évaluer des rapports entre diverses entités ou dimensions est une opération récurrente dans nos interactions avec notre environnement. Si la capacité de traiter des magnitudes absolues¹ continues (p.ex., une distance) ou discrètes (p.ex., le nombre d'adversaires) est adaptative, le traitement de leurs relations l'est tout autant. Lorsqu'un animal doit poser un choix entre deux sources de nourriture, il peut baser ce choix sur la quantité absolue de nourriture fournie par chaque source. Ainsi, un oiseau qui cherche à optimiser son comportement de recherche de nourriture choisira de se nourrir dans un arbre avec douze cerises, plutôt qu'un arbre avec six cerises. Cependant, en présence d'autres animaux, un choix basé sur la quantité absolue pourrait ne pas être adaptatif, alors qu'un choix basé sur une quantité relative (ou rapport de quantités) pourrait l'être (Gallistel, 1990; Harper, 1982). Un oiseau qui voit six congénères se diriger vers l'arbre avec douze cerises et un congénère vers l'arbre avec six cerises aura une plus grande part de nourriture s'il choisit de se nourrir dans l'arbre avec la plus petite quantité absolue (en considérant le rapport de force des oiseaux égal entre les deux sources de nourriture – encore un rapport! – et la taille des cerises homogènes). De même, dans notre société, un adulte espérant un gain donné préférera jouer à un jeu de loterie avec une chance sur 10 000 de gagner, plutôt qu'un jeu avec une chance sur 100 000. Ces exemples portent sur la mise en relation de quantités discrètes.

La mise en relation de quantités continues fait également partie de notre quotidien. Un bébé qui voit sa maman se diriger vers lui perçoit un rapport constant entre la hauteur et la largeur de sa maman, la forme des personnes et des objets restant constante quelle que soit la distance nous séparant d'eux. De même, si les dimensions de toutes choses et celles de l'univers diminuaient de moitié pendant notre sommeil, nous ne pourrions, à notre réveil, nous en rendre compte (Rouche, 1992). Les rapports entre dimensions seraient en effet conservés. Certains se souviennent peut-être de leur réaction (surprise, rires ou pleurs) lorsque, enfants, ils ont été confrontés à l'image reflétée par un miroir déformant, indiquant le caractère inhabituel de cette expérience dans laquelle les rapports ont été modifiés. Ces exemples mettent en évidence que la perception des rapports peut être plus importante que la perception des dimensions absolues.

¹ Absolu est utilisé dans le sens « opposé à relatif ».

Chez l'être humain, le langage a permis de symboliser les rapports sous forme de fractions. Ces rapports symboliques de deux nombres naturels représentent les nombres rationnels (voir Encadré 1). Ils étendent donc l'univers des nombres naturels qui permettent de dénombrer des entités discrètes (p.ex., 5 doigts) ou des unités de mesure (p.ex., 5 cm) à l'univers des nombres rationnels dans lequel une infinité de nombres s'intercalent entre deux nombres. La mise en relation de deux nombres naturels permet donc d'entrer dans une dimension continue. Ce passage ne se fait pas sans difficulté au niveau des apprentissages. Pour beaucoup de personnes, les fractions évoquent de mauvais souvenirs scolaires. L'apprentissage des fractions est associé à des difficultés persistantes et fréquentes (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; English & Halford, 1995; Grégoire & Meert, 2005; Mack, 1993; Sophian, 1996; Stafylidou & Vosniadou, 2004). L'obstacle le plus évoqué est la tendance des enfants à généraliser leur connaissance des nombres naturels et du comptage aux fractions (appelée *biais des nombres naturels* par Ni & Zhou, 2005). Au cours de l'apprentissage, l'enfant doit surmonter ce biais et restructurer graduellement ses connaissances numériques (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

La genèse historique des fractions a également été un processus lent et graduel où l'univers des nombres s'est progressivement étendu des nombres naturels aux nombres rationnels (Ifrah, 1994). Lors de sa création par les Egyptiens avant l'Antiquité Grecque, la fraction était uniquement considérée comme l'écriture d'une division par un nombre naturel et était utilisée dans des situations de fractionnement (p.ex., $\frac{1}{4}$ de terrain lors de la répartition de terres ou $\frac{1}{2}$ héquat² de céréales lors d'échanges commerciaux). Durant l'Antiquité Grecque, la fraction était considérée comme un rapport de deux nombres naturels qui ne représentait néanmoins pas un nombre. L'univers des nombres était alors restreint aux nombres naturels car, selon les conceptions de l'époque, les nombres ne se divisaient pas en deçà de l'unité (contrairement aux grandeurs). Il faut attendre 250 après J-C pour que la fraction soit conçue comme la représentation symbolique d'un nombre.

² L'héquat avait une valeur d'un peu moins de 5 litres.

Encadré 1. Nombre rationnel, quotient, fraction, rapport et proportion... un peu de terminologie mathématique

- Un *nombre rationnel* est un quotient de deux nombres entiers. Il peut être représenté par une fraction et tous les rapports équivalents de nombres entiers (p.ex., $1/2$, $2/4$, $3/6$, etc.) ou par l'écriture décimale (appelée dans l'usage courant nombre décimal) (p.ex., 0,50). L'ensemble des nombres rationnels constitue une extension de l'ensemble des nombres entiers (c.-à-d., les nombres entiers positifs et négatifs), qui est lui-même une extension des nombres naturels (c.-à-d., les nombres entiers positifs et zéro). Dans nos recherches, nous avons restreint le terme fraction aux rapports de deux entiers positifs (naturels).
- Un *quotient* est le résultat d'une division (p.ex., 0,25 est le quotient de $1 : 4$).
- La *fraction* « a/b » est une des notations d'un nombre rationnel, où a et b désignent des nombres entiers (b étant nécessairement non nul). Le numérateur « a » et le dénominateur « b » sont liés par le trait de fraction qui équivaut à un signe de division. Dans l'usage courant, le terme fraction est utilisé comme nombre et non comme une simple écriture. La notation d'une fraction peut recourir à des numéraux arabes (« $\frac{3}{4}$ ») ou verbaux (« trois quarts »). Le terme fraction est emprunté du latin *fractio*, du verbe *frangere* (rompre, briser). Le dénominateur vient du latin *denominator* (*celui qui désigne en combien de parts se fait le partage*), et le numérateur vient de *numerator* (*celui qui compte les morceaux*).
- Un *rapport* de deux grandeurs a et b est un nombre rationnel tel que son produit par b redonne a . Un rapport est donc un mode de relation qui utilise la division. On obtient le rapport de a à b en posant le résultat de cette division sous forme de fraction (« a/b »). La fraction représente donc symboliquement un rapport.
- Quatre nombres a , b , c , d pris dans cet ordre sont en *proportion* si le rapport de a à b égal celui de c à d ($a/b = c/d$). Une proportion est donc un rapport d'égalité entre deux rapports. Le quotient des rapports est constant et est appelé coefficient de proportionnalité. Ainsi si 1kg de pommes coûte 2€, le prix des pommes augmente proportionnellement au nombre de kilos avec un coefficient de proportionnalité égal à 2 (4€ pour 2kg, 8€ pour 4 kg, etc.)

Adapté de Baruk (1992)

Le long chemin qui a amené les mathématiciens au cours de l'histoire, et l'enfant au cours de ses apprentissages, à développer les fractions à partir des nombres naturels laisse penser que les fractions ne sont pas intuitives et sont uniquement utiles en sciences mathématiques. Ce raisonnement doit toutefois être nuancé. Si les fractions occupent une place centrale en algèbre, dans le raisonnement proportionnel et les probabilités, elles sont également présentes dans notre vie quotidienne. Les expressions suivantes en témoignent: « Les contestataires ne représentent qu'une fraction du personnel », « J'ai mangé $\frac{3}{4}$ de pomme », « Mon bus arrive dans une demi-heure », « J'ai eu 10% de remise sur le prix d'achat de ma voiture », « Cette carte est à l'échelle $\frac{1}{300}$ », « Il faut ajouter $\frac{3}{4}$ d'eau pour $\frac{1}{4}$ de sirop ». Par ailleurs, les difficultés que posent les fractions sont étonnantes quand nous considérons que nous traitons sans cesse des rapports dans notre environnement, que ceux-ci lient des dimensions continues et/ou discrètes.

Les recherches en cognition numérique ont suivi le même chemin que l'histoire de la construction des nombres et l'apprentissage de ceux-ci en s'intéressant depuis de nombreuses années au traitement et à la représentation mentale de la magnitude des nombres naturels, limitant l'univers des nombres à sa dimension discrète. Cela s'explique probablement par le fait qu'en regard des difficultés liées à la genèse ontogénique et historique des fractions, beaucoup ont pensé que leur traitement et leur représentation dépassaient les limites de nos capacités préverbaux de traitement numérique (p.ex., Butterworth, 2001, 2007). Or ces capacités ont été au centre des préoccupations des chercheurs ces vingt dernières années. Ce n'est que très récemment que l'intérêt pour le traitement cognitif de la magnitude des fractions a vu le jour en cognition numérique.

En 2005, lors de l'élaboration de notre projet de thèse, aucune étude sur le traitement et la représentation mentale de la magnitude des fractions n'avait été publiée dans le champ de la cognition numérique. L'abondante littérature sur les difficultés d'apprentissage des fractions visait uniquement à identifier les obstacles conceptuels, notamment par l'analyse qualitative des erreurs. Explorer la capacité de notre cerveau à représenter une magnitude à partir de la relation entre deux nombres naturels nous est apparu rapidement nécessaire pour contribuer à une meilleure compréhension des difficultés d'apprentissage. Par ailleurs, l'interférence des nombres naturels sur le traitement des fractions pouvait, selon nous, se situer à deux niveaux : (1) au niveau conceptuel (biais des nombres naturels, Ni & Zhou, 2005) et (2) au niveau du traitement de la magnitude de la fraction. Si les études sur l'apprentissage des fractions

avaient largement exploré le premier point, le deuxième n'avait pas été abordé. Ainsi, un enfant qui avait acquis suffisamment de connaissances conceptuelles pour prendre en compte la fonction du dénominateur et du numérateur, pouvait-il être mis en difficulté par la magnitude de ces nombres naturels lors du traitement de la magnitude de la fraction? L'objectif principal de nos recherches était donc d'identifier les processus et les représentations impliqués lors du traitement de la magnitude des fractions. Nos recherches sont innovantes en cognition numérique car elles portent sur des nombres appartenant à un ensemble plus large que celui des naturels. Elles le sont également dans l'abondante littérature sur l'apprentissage des fractions par l'usage de méthodes expérimentales et leur intérêt pour les représentations numériques mentales.

Notre exposé sera divisé en une partie théorique, une partie empirique et une discussion générale. La partie théorique présentera en deux chapitres le cadre de nos recherches. Le premier chapitre donnera un aperçu du champ de la cognition numérique qui s'est développé autour de l'étude du traitement de la magnitude des nombres naturels. Nous commencerons ce chapitre par la présentation des effets comportementaux qui ont été classiquement observés lors de ce traitement et qui seront testés lors du traitement de la magnitude des fractions. Les modèles théoriques qui ont été proposés pour expliquer ces effets seront présentés. Ensuite, l'influence de la symbolisation sur le traitement des nombres naturels sera discutée car la spécificité du traitement symbolique sera également testée dans nos études empiriques sur les rapports. Enfin, nous résumerons les études qui se sont intéressées au traitement de numéraux à deux chiffres (p.ex., 51). Ces études visaient à déterminer si les adultes activaient la représentation de la valeur holistique de ces numéraux (représentation intégrée) ou s'ils traitaient les chiffres sans accéder à une représentation intégrée (processus de décomposition). Ces études sont éclairantes pour l'étude du traitement de la magnitude des fractions car les numéraux à deux chiffres sont proches des fractions par la relative complexité de leur structure (respectivement organisation des chiffres selon un système de position en base 10 et mise en relation numérique de deux numéraux par la barre de fraction). Ils diffèrent néanmoins des fractions par le fait qu'ils sont ordonnés de manière discrète. Le second chapitre théorique ouvre l'étude du traitement numérique à la dimension continue des nombres en faisant la synthèse des travaux sur l'apprentissage et le traitement des rapports. Nous présenterons les études sur le traitement de rapports non symboliques chez l'animal et l'être humain à différents âges de la vie (nouveau-nés, enfants d'âge préscolaire et scolaire, et adultes). Nous aborderons ensuite l'apprentissage des fractions et ses principaux obstacles.

Enfin, nous exposerons en détail l'étude de Bonato, Fabbri, Umiltà et Zorzi (2007) qui a testé la représentation de la magnitude des fractions chez l'adulte. C'était la seule étude publiée sur cette question au moment de la réalisation de nos recherches empiriques.

La partie empirique comprend quatre études comportementales dont le but était de tester les processus et les représentations mentales impliqués dans le traitement de la magnitude des fractions. Plus précisément, elles visaient à répondre à quatre questions : (1) Les adultes et les enfants d'âge scolaire sont-ils capables de représenter mentalement la valeur holistique des fractions? Dans quels contextes s'appuient-ils sur cette capacité? (2) La magnitude relative des composants est-elle également traitée et ce traitement peut-il interférer avec le traitement de la magnitude des fractions? (3) Le traitement des fractions est-il plus complexe que le traitement des rapports non symboliques? Les propriétés de la représentation mentale de la valeur holistique diffèrent-elles entre les fractions et les rapports non symboliques? (4) La représentation mentale de la valeur holistique d'une fraction est-elle activée à partir de l'accès à la représentation numérique mentale des composants et du traitement de leur relation numérique (accès indirect)?

Notre première étude apporte des données relatives aux deux premières questions expérimentales. Plus précisément, elle a testé, chez l'adulte, les effets de distance numérique lors de la comparaison numérique de fractions avec composants communs afin d'identifier les représentations mentales activées lors de ce traitement (question 1). Ces effets ont permis de déterminer si la représentation mentale de la valeur holistique des fractions était activée (représentation holistique) ou si seule la magnitude des composants était traitée sans accès à la représentation holistique (stratégie componentielle). Par ailleurs, les performances lors de la comparaison de fractions de dénominateurs communs (p.ex., $\frac{4}{7} - \frac{6}{7}$) et lors de la comparaison de fractions de numérateurs communs (p.ex., $\frac{5}{7} - \frac{5}{9}$) ont été comparées afin de tester si la magnitude relative des composants était traitée et si ce traitement pouvait interférer avec le traitement de la magnitude des fractions (question 2). Enfin, un paradigme d'amorçage de la comparaison de nombres naturels par la comparaison de fractions a été utilisé afin de tester le recours à l'inhibition du traitement de la magnitude relative des composants lors du traitement correct de la magnitude des fractions (question 2).

Notre seconde étude est une réplication de la première étude chez des enfants de 10 et 12 ans qui étaient capables de comparer correctement des fractions avec composants communs. Elle apporte donc des données relatives aux deux premières questions expérimentales pour l'enfant d'âge scolaire. Les effets de distance numérique ont été testés afin de déterminer si ces enfants accédaient à la représentation mentale de la valeur holistique des fractions (question 1). Les performances lors de la comparaison des fractions de dénominateurs communs et de numérateurs communs ont été contrastées afin de tester si la magnitude relative des nombres naturels composant la fraction était traitée (question 2). La sélection des enfants sur base de leurs bonnes performances a permis d'étudier l'impact de ce traitement indépendamment du biais des nombres naturels observé au cours du développement conceptuel des fractions. Le contrôle de l'interférence créée par le traitement de la magnitude relative des composants a été testé au moyen de l'analyse des effets d'amorçage des nombres naturels par des fractions (question 2).

La troisième étude a testé les effets de distance lors de la comparaison numérique de fractions sans composants communs (p.ex., $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$) chez l'adulte afin d'apporter des données complémentaires à la première question expérimentale. Cette étude a permis de clarifier en partie les conditions expérimentales qui favorisaient un accès à la représentation mentale de la valeur holistique des fractions.

La quatrième étude visait à répondre à la troisième et la quatrième question expérimentale. Des adultes ont réalisé une tâche d'estimation de la magnitude de fractions et de rapports non symboliques. La spécificité du traitement des rapports symboliques (question 3) a été explorée par l'analyse de l'effet du format sur les performances. L'hypothèse d'un accès indirect à la représentation mentale de la valeur holistique des fractions (question 4) a été testée par l'analyse de l'effet de la taille des composants sur les performances.

Nous terminerons notre exposé par une synthèse générale des résultats. Premièrement, nous montrerons que nos études ont contribué à nuancer les premières conclusions parues dans la littérature en apportant des données en faveur de la capacité des enfants d'âge scolaire et des adultes à représenter mentalement la magnitude d'une fraction de manière approximative. Nos résultats seront discutés en lien avec les études parues très récemment dans la littérature sur cette question. Cette discussion permettra de mettre en évidence les aspects stratégiques liés au traitement de la fraction. En effet, même si l'adulte a la capacité

Introduction générale

de se représenter la valeur holistique des fractions, il utilisera dans certains contextes expérimentaux des stratégies alternatives de traitement qui pourraient être moins coûteuses. Deuxièmement, nous résumerons les effets qui suggèrent un traitement de la magnitude relative des composants lors du traitement de la magnitude des fractions (traitement hybride de la magnitude des fractions). Le traitement de la magnitude relative des composants peut être une source d'interférence qui nécessiterait le recours à l'inhibition. Troisièmement, nous présenterons les données qui suggèrent que les adultes aient une représentation numérique mentale plus précise des fractions que des rapports non symboliques. Cette conclusion est en défaveur de l'hypothèse selon laquelle le traitement des fractions serait plus complexe que le traitement des rapports non symboliques. Enfin, nous résumerons les données en faveur d'un accès indirect à la représentation mentale de la magnitude des fractions. Les implications théoriques de nos résultats seront discutées en trois points: (1) le caractère intentionnel vs. automatique du traitement de la magnitude des fractions, (2) l'extension des modèles théoriques classiques en cognition numérique à la représentation mentale de la magnitude des rapports, et (3) le biais des nombres naturels. Pour terminer, les limites de nos études seront discutées en ouvrant de nouvelles perspectives de recherche.

Partie théorique

Chapitre 1 : La cognition numérique

La cognition numérique est un champ de la psychologie cognitive qui s'est développé autour de l'étude du traitement des nombres naturels. Ce chapitre vise à définir les effets comportementaux qui ont été classiquement observés lors de ce traitement et qui seront appliqués à l'étude du traitement des nombres rationnels dans nos études empiriques. Dans un second temps, nous présenterons les modèles théoriques explicatifs les plus utilisés. Ensuite, l'impact de la symbolisation sur la représentation mentale de la magnitude sera abordé car l'objet de nos études empiriques est le traitement de nombres rationnels représentés symboliquement par des fractions numériques arabes (p.ex., $5/9$) ainsi que la spécificité de ce traitement symbolique. Enfin, nous décrirons les études qui ont testé le traitement de la magnitude de numéraux arabes à deux chiffres. Comment l'adulte traite-t-il la magnitude de ces numéraux dont la structure se complexifie? Accède-t-il à la représentation mentale de la valeur holistique du nombre (représentation intégrée) ou traite-t-il chaque composant indépendamment l'un de l'autre (décomposition)? La question du traitement de la magnitude se posera sous la même forme pour les fractions qui représentent une magnitude par la relation de deux nombres naturels. Cette question fera l'objet du chapitre suivant.

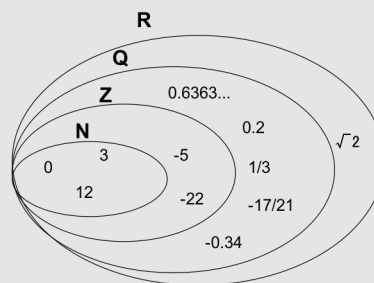
Avant de poursuivre ce chapitre, quelques concepts méritent d'être précisés. Dans l'usage courant, les nombres sont assimilés aux nombres naturels. Ces nombres ont pour fonction d'identifier trois propriétés empiriques : la cardinalité (p.ex., cinq enfants), l'ordinalité (p.ex., le cinquième bus) et l'identité (p.ex., la chaîne de télévision n°5). Dans l'usage mathématique actuel, un nombre est un élément d'un ensemble de nombres (nombres naturels, nombres entiers, nombres rationnels, nombres réels) (voir Encadré 2). Cet ensemble doit donc être spécifié afin de préciser les propriétés des nombres auxquels nous faisons référence. Dans ce chapitre, le terme *nombre* sera utilisé dans son usage commun. Ce terme sera complété des qualificatifs *naturels*, *entiers*, *rationnels*, ou *réels* lorsque nous ferons référence à un ensemble de nombres plus large que celui des nombres naturels, ou que nous voudrions contraster les nombres naturels à d'autres types de nombres. Le terme *numérosité* désigne la cardinalité ou le nombre d'éléments d'une collection d'items. Cette propriété des collections ne varie pas lorsque les éléments changent de nature ou de position. Le terme *numéral* désigne les symboles utilisés pour représenter des nombres. Ce sont des représentations externes au sujet, organisées sous forme de systèmes (arabe ou verbal) établis

par convention et transmis culturellement. Le terme *magnitude* sera utilisé en référence à une quantité ou une grandeur. Une magnitude peut être continue (non composée d'éléments naturellement distincts) ou discrète (composée d'éléments naturellement distincts). Elle peut être mesurée ou dénombrée selon sa nature.

Encadré 2. Les nombres naturels, entiers, rationnels et réels.

- L'ensemble des *nombres naturels*, noté **N**, correspond à l'ensemble des nombres entiers positifs, plus zéro. Les nombres entiers positifs permettent de compter les objets un par un.
- L'ensemble **Z** inclut les *nombres entiers* positifs et négatifs. Pour pouvoir accorder du sens à ces nombres, il faut disposer d'une origine de comptage et que ce comptage ait du sens de part et d'autre de l'origine (p.ex., expression d'une température en degrés, de part et d'autre du zéro fixé conventionnellement).
- L'ensemble **Q** inclut les *nombres rationnels* dont la spécificité est d'être toujours énonçables par une classe de fractions équivalentes.
- L'ensemble des *nombres réels*, noté **R**, étend les nombres aux nombres irrationnels. Les nombres irrationnels expriment des mesures que le rapport de deux entiers ne peut exprimer. Par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté est de 1 unité est représentée par la racine carrée de 2, un nombre irrationnel. La spécificité des nombres réels est la continuité. Ils correspondent un par un aux points d'une droite. Bien que les nombres rationnels fourmillent sur une droite, seuls ils ne constitueraient qu'une droite en pointillés.

Les ensembles **N**, **Z**, **Q** et **R** peuvent être représentés comme des ensembles emboîtés.



Adapté de Baruk (1992)

1 Les effets comportementaux classiques

1.1 Les effets de distance et de taille numérique

Dans une tâche de comparaison numérique, l'*effet de distance* désigne la modulation des performances (en termes de vitesse et de précision) par la distance numérique entre les nombres. Deux nombres sont comparés plus rapidement et avec une probabilité moindre d'erreurs s'ils sont distants numériquement (p.ex., 4 _ 9) que s'ils sont proches (p.ex., 4 _ 5) (Moyer & Landauer, 1967).

L'*effet de taille* réfère à la diminution des performances avec l'augmentation de la taille des nombres à traiter. Dans une tâche de comparaison numérique, les réponses sont plus lentes et plus souvent incorrectes pour des nombres de grande taille (p.ex., 21 _ 25) que pour des nombres de petite taille (p.ex., 5 _ 9) lorsque la distance entre ces nombres est fixée (p.ex., Buckley & Gilman, 1974). Dans une tâche d'estimation numérique, la variabilité des estimations augmente linéairement avec la magnitude du nombre à estimer (p.ex., Whalen, Gallistel, & Gelman, 1999).

L'*effet de rapport* résulte de la combinaison des effets de distance et de taille. Plus le rapport des deux nombres à discriminer s'approche de 1, plus les performances diminuent. Ainsi, 7 et 9 sont moins bien discriminés que 2 et 3 car la valeur du rapport 7/9 (0,77) est plus proche de 1 que la valeur du rapport 2/3 (0,67). Cet effet indique que les représentations numériques mentales sont organisées sous la forme d'un continuum (Moyer & Landauer, 1967) et qu'elles obéissent à la loi de Weber-Fechner. Cette loi s'applique également à la représentation mentale de continuums physiques comme les longueurs, les degrés d'angle, les luminosités et les tonalités (voir Cohen Kadosh, Brodsky, Levin, & Henik, 2008; Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont, & Orban, 2003; Pinel, Piazza, Le Bihan, & Dehaene, 2004 pour des études récentes; voir Cohen Kadosh, Lammertyn, & Izard, 2008 pour une revue).

Partie théorique

La loi de Weber-Fechner a été formulée afin de rendre compte de la relation entre une magnitude physique objective et la perception de cette magnitude. Selon cette loi, la sensation perçue augmente linéairement avec le logarithme de l'intensité du stimulus :

$$S = k * \log (I)$$

où S est la sensation perçue, I l'intensité de la stimulation et k une constante.

Le plus petit changement d'intensité qui peut être perçu de manière systématique augmente linéairement avec l'intensité du stimulus. Cette relation est exprimée par la fraction de Weber qui est une constante:

$$k = \Delta I / I$$

où ΔI est le seuil de discrimination (la plus petite différence d'intensité perçue).

Par conséquent, la différence numérique nécessaire à la discrimination de deux nombres est plus importante pour des nombres relativement grands que pour des nombres relativement petits. Ainsi, si des adultes peuvent discriminer 9 et 10 (distance = 1, rapport 9/10), ils pourront discriminer 18 et 20 (distance = 2, rapport 9/10).

Les effets de distance, de taille et de rapport caractérisent les performances numériques non symboliques de l'animal (p.ex., Flombaum, Junge, & Hauser, 2005; Meck & Church, 1983; Nieder, Freedman, & Miller, 2002; Nieder & Miller, 2003), du nouveau-né (p.ex., Xu & Spelke, 2000), de l'adulte provenant de cultures amazoniennes avec un lexique restreint de numéraux verbaux (Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, 2004) et de l'adulte de nos cultures occidentales (p.ex., Buckley & Gilman, 1974). La capacité de traitement numérique serait donc préverbale, commune aux animaux et aux êtres humains, et issue de l'évolution (Dehaene, 1992; Dehaene, Dehaene-Lambertz, & Cohen, 1998; Gallistel & Gelman, 1992, 2000). Par ailleurs, que les stimuli à discriminer soient présentés dans la même modalité sensorielle ou dans une modalité différente, ces effets sont observés (p.ex., Barth, Kanwisher, & Spelke, 2003). Ceci indique la nature abstraite des représentations numériques mentales.

Ces effets ne se limitent pas au traitement de numérosités. Ils ont d'ailleurs été décrits pour la première fois par Moyer et Landauer (1967) lors d'une tâche de comparaison numérique sur des nombres arabes à un seul chiffre chez l'adulte. Ces effets ont également été observés pour des numéraux arabes à deux chiffres (p.ex., Dehaene, Dupoux & Mehler, 1990), ainsi que pour des numéraux verbaux (p.ex., « CINQ ») (p.ex., Buckley & Gilman, 1974). Chez l'enfant, l'effet de distance est déjà observé à 6 ans lors de la comparaison numérique de numéraux arabes à un seul chiffre (Duncan & McFarland, 1980). La similitude des effets comportementaux observés lors du traitement numérique symbolique et non symbolique suggère que le traitement numérique symbolique s'ancre dans nos capacités numériques préverbaux.

L'accès aux représentations numériques mentales à partir de la notation symbolique serait automatique car l'effet de distance numérique a été également observé dans des tâches où la dimension numérique n'était pas pertinente. Par exemple, Dehaene et Akhavein (1995) ont observé un effet de distance numérique dans une tâche de jugement de similitude physique entre deux numéraux arabes (p.ex., 1 vs. 2) ou deux numéraux verbaux écrits (p.ex., UN vs. DEUX). Lorsque les numéraux différaient physiquement, les réponses étaient plus lentes s'ils étaient proches numériquement (p.ex., 1 vs. 2) que s'ils étaient distants (p.ex., 1 vs. 8). En outre, Pavese et Umiltà (1998) ont observé une interférence de la magnitude à laquelle référaient des chiffres arabes lorsque des adultes devaient donner le nombre de chiffres présentés (p.ex., « cinq » pour le stimulus 44444). Cet effet de type Stroop était d'autant plus important que la magnitude des chiffres était proche du nombre de chiffres. Chez l'enfant, l'activation des représentations numériques mentales serait automatique aux alentours de 6 ans pour des nombres arabes à un seul chiffre (Duncan & McFarland, 1980; Rubinsten, Henik, Berger, & Shahr-Shalev, 2002; voir Noël, Rousselle, & Mussolin, 2005 pour une revue) et dès 7 ans pour des nombres arabes à deux chiffres (Mussolin & Noël, 2007).

1.2 L'effet SNARC (Spatial-Numerical Association of Response Code)

L'effet SNARC a été pour la première fois testé directement par Dehaene, Bossini et Giraux (1993) dans une tâche de jugement de parité. Ces auteurs ont observé que les réponses des participants étaient plus rapides à droite lorsque le nombre à traiter était relativement grand et à gauche lorsque le nombre à traiter était relativement petit. Cet effet suggère une association automatique entre la représentation mentale des nombres et une organisation spatiale de gauche à droite.

Depuis cette étude, le lien entre nombres et espace a été largement exploré. Dans leur revue de littérature, Hubbard, Piazza, Pinel et Dehaene (2005) ainsi que Gevers et Lammertyn (2005) ont résumé les principales propriétés de l'effet SNARC. Premièrement, la magnitude serait codée spatialement par rapport à l'intervalle des nombres utilisés. Dans l'étude de Dehaene et al. (1993), les réponses aux nombres 4 et 5 étaient plus rapides à droite qu'à gauche quand les nombres variaient de 0 à 5. Par contre, les réponses aux mêmes nombres étaient plus rapides à gauche quand les nombres variaient de 4 à 9. Deuxièmement, l'association entre nombres et espace serait activée automatiquement. Ainsi, un effet SNARC a été observé dans des tâches où la dimension numérique n'était pas pertinente (p.ex., Dehaene et al., 1993; Fias, Lauwereyns, & Lammertyn, 2001). Troisièmement, l'effet SNARC serait indépendant de la modalité de réponse (réponse bimanuelle avec ou sans les mains croisées, pointage, saccades oculaires) (p.ex., Dehaene et al., 1993; Fischer, 2003; Fischer, Warlop, Hill, & Fias, 2004). Un biais attentionnel vers la droite ou la gauche a même été créé par la simple présentation d'un nombre (Fischer, Castel, Dodd, & Pratt, 2003). Ces résultats suggèrent que l'effet SNARC se situe à un niveau de représentation spatiale commun à la programmation des mouvements des yeux, des mains et de l'attention. Quatrièmement, des facteurs culturels, tel le sens de la lecture et de l'écriture, pourraient déterminer en partie l'association entre nombres et espace (Dehaene et al., 1993; Zebian, 2005). Enfin, le codage spatial ne serait pas spécifique aux nombres. Il a été observé pour des séquences ordonnées comme les jours de la semaine, les mois et les lettres (Gevers, Reynvoet & Fias, 2003, 2004).

2 Les modèles théoriques classiques

Nous allons présenter ci-dessous deux modèles numériques analogiques, le modèle de l'accumulateur et le modèle de la ligne numérique mentale, formulés afin de rendre compte des effets comportementaux détaillés dans la section précédente. Nous terminerons en présentant le modèle neuronal qui propose une implémentation de la ligne numérique mentale au sein d'un réseau neuronal.

2.1 Le modèle de l'accumulateur

Le modèle de l'accumulateur a été initialement proposé par Meck et Church (1983) pour expliquer les performances des animaux en estimation numérique et temporelle. Ce modèle a été repris par Gallistel et Gelman (1992, 2000) afin d'intégrer les données empiriques relatives au traitement numérique chez l'animal et l'être humain. Selon Gallistel et Gelman, l'évolution aurait doté l'être humain d'un système sous forme d'accumulateur. Ce système utiliserait un format de représentation mentale commun aux quantités discrètes et aux quantités continues. Les représentations mentales de la magnitude, appelées *magnitudes mentales*, seraient organisées sous la forme d'un continuum et seraient générées par des mécanismes distincts en fonction de la nature des quantités. Le mode de comptage préverbal permettrait de représenter des magnitudes discrètes. Pour chaque item compté, une quantité fixe serait versée dans l'accumulateur. Au terme du comptage, l'état de l'accumulateur correspondrait à la valeur cardinale de la collection (Fig. 1-1A). Le mode continu permettrait de représenter une quantité continue telle une durée. Du début de la stimulation jusqu'à sa fin, une quantité continue serait versée dans l'accumulateur. L'état final de l'accumulateur représenterait cette fois la durée de la stimulation. Au terme du comptage ou de la stimulation, l'état de l'accumulateur serait lu en mémoire et pourrait être comparé à une autre magnitude stockée en mémoire. Les représentations mentales de la magnitude seraient variables. La variabilité augmenterait proportionnellement à la magnitude. Plus la numérosité est grande, plus les représentations seraient variables. Cette variabilité scalaire serait liée au processus de lecture de l'état de l'accumulateur en mémoire, plutôt qu'au processus d'accumulation ou de comparaison. Elle expliquerait l'effet de taille numérique, alors que le degré de recouvrement des magnitudes mentales expliquerait l'effet de distance. L'accumulateur est un système de

codage par sommation car la représentation d'une magnitude inclut la représentation des magnitudes inférieures à celle-ci.

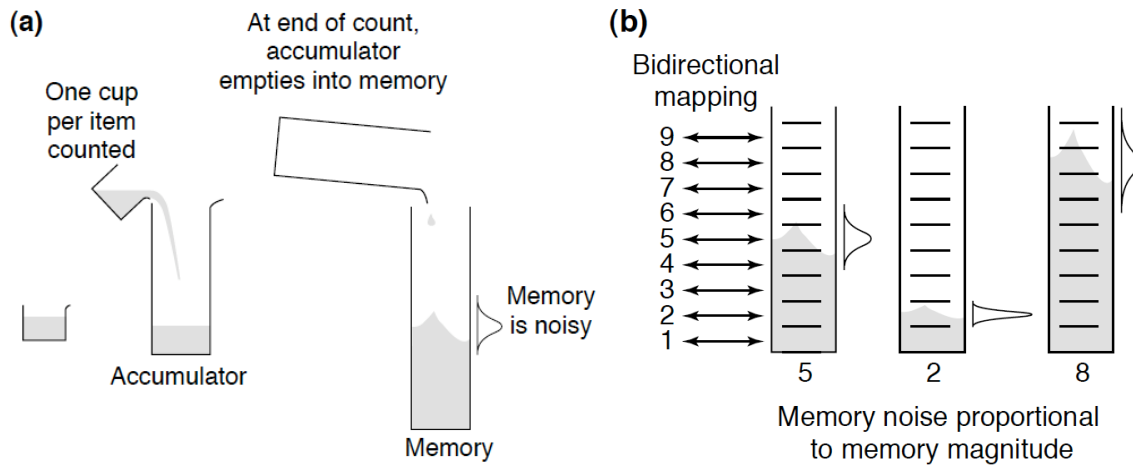


Figure 1-1. (A) le mode de comptage préverbal alimente l'accumulateur d'une quantité fixe pour chaque item compté. L'accumulation à la fin du comptage est lue en mémoire. Les magnitudes lues en mémoire présentent une variabilité scalaire. (B) Une procédure apprise d'appariement entre les numéraux et les magnitudes mentales permet d'accéder à la magnitude à partir d'un numéral et inversement (D'après Whalen, Gallistel, & Gelman, 1999).

Ce système de représentation de la magnitude sous-tendrait des opérations arithmétiques telles qu'ordonner, additionner, soustraire, multiplier et diviser (voir Gallistel & Gelman, 2000 pour une revue des données chez l'animal). L'utilisation d'une représentation commune pour les quantités discrètes et continues permettrait de combiner ces deux types de quantités au moyen d'opérations arithmétiques, ce qui aurait une valeur adaptative. Ainsi, le comportement de recherche de nourriture des animaux est déterminé par le rapport entre le nombre d'aliments obtenus à une source de nourriture et le temps passé à cette source, multiplié par la taille moyenne des aliments (Gallistel, 1990 ; Harper, 1982) (voir chapitre 2, page 36 pour un exemple). Le traitement numérique symbolique obéissant à la loi de Weber chez les êtres humains adultes, Whalen, Gallistel et Gelman (1999) ont proposé qu'une procédure apprise permette d'apparier dans les deux sens les numéraux et les magnitudes mentales (Fig. 1-1B).

Selon Gallistel, Gelman et Cordes (2006), la pensée mathématique se développerait à partir du système des magnitudes mentales. Ce système serait isomorphe aux nombres réels. En effet, les magnitudes mentales seraient continues et permettraient de représenter des quantités discrètes, tout comme les nombres réels³ sont continus et incluent les nombres naturels. Cette affirmation contraste avec l'histoire culturelle des nombres qui a vu les nombres réels progressivement créés à partir des nombres naturels. Selon les auteurs, cette histoire ne serait qu'une redécouverte de ce que le cerveau fait depuis toujours : utiliser des magnitudes continues pour représenter des quantités discrètes et continues. Cela prend sens lorsque l'on considère l'asymétrie entre magnitude discrète et magnitude continue. Des magnitudes continues peuvent représenter des magnitudes discrètes, l'inverse n'étant pas toujours vrai. Ainsi, les anciens Grecs ont constaté qu'il n'y a pas d'unité de longueur commune qui divise un nombre entier de fois la diagonale et le côté d'un carré. Par contre, dans un histogramme, la longueur d'une barre peut toujours représenter une fréquence. Les auteurs ajoutent que les nombres naturels sont apparus fondateurs dans l'histoire culturelle, probablement en raison du caractère discret du langage humain. Le langage, via le comptage verbal, aurait privilégié, au sein du système des magnitudes mentales, les magnitudes qui seraient générées par le processus de comptage préverbal et qui seraient par conséquent ordonnées de manière discrète. Selon cette perspective, les nombres naturels seraient la fondation du concept verbal de nombre.

2.2 Le modèle de la ligne numérique mentale

A la suite de Restle (1970), Dehaene (1989, 1992) a suggéré que les quantités numériques soient représentées de manière approximative sous la forme d'un continuum appelé *ligne numérique mentale*. Cette ligne serait comprimée vers les grands nombres (Dehaene, 2003) (Fig. 1-2). D'un essai à un autre, une numérosité serait représentée mentalement par des valeurs approximatives qui tendent à se regrouper autour de sa valeur logarithmique. En termes mathématiques, la représentation mentale d'une numérosité serait une variable aléatoire de distribution normale centrée sur la valeur logarithmique de cette numérosité. La

³ La spécificité de l'ensemble des réels est la continuité. Les nombres réels correspondent un par un aux points d'une droite. Bien que les nombres rationnels fourmillent sur une droite, seuls ils ne constitueraient qu'une droite en pointillés puisqu'ils n'incluent pas les nombres irrationnels (Baruk, 1992). Néanmoins, cette distinction fait appel à un degré élevé d'abstraction mathématique qui pourrait être non pertinent d'un point de vue cognitif. Les nombres rationnels introduisent déjà une continuité en s'intercalant entre les nombres naturels.

variabilité des représentations serait constante au travers des numérosités. La ligne numérique mentale est un système de codage de la position: chaque nombre est représenté par un segment de ligne numérique qui n'inclut pas l'ensemble des segments correspondant aux nombres inférieurs à celui-ci. Cette représentation analogique serait indépendante du langage et déterminée biologiquement. Son substrat cérébral se situerait au niveau du segment horizontal du sillon intra-pariétal (voir Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003 pour une revue).

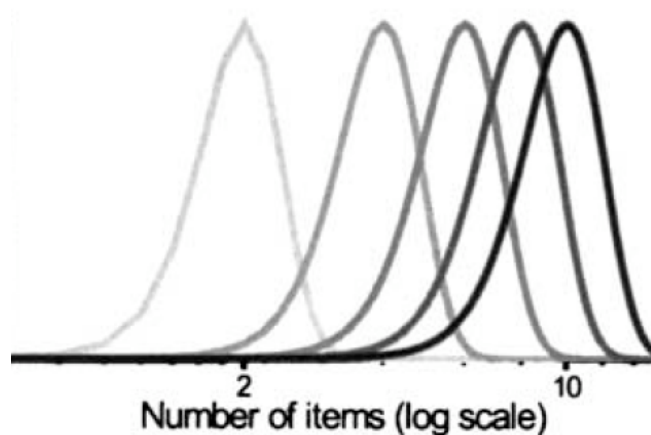


Figure 1-2. Représentation schématique de la ligne numérique mentale avec compression logarithmique (D'après Nieder & Miller, 2003)

Dans ce modèle, l'effet de distance est expliqué par la superposition des distributions d'activation. Plus les nombres sont proches, plus les distributions d'activation qui les représentent se superposeraient et plus leur discrimination serait difficile (Fig. 1-2). L'effet de taille est expliqué par la compression logarithmique. Pour une distance numérique donnée, la superposition des distributions d'activation serait plus importante pour les grands nombres que pour les petits nombres (Fig. 1-2). La discrimination des grands nombres serait par conséquent plus difficile que la discrimination des petits nombres. L'effet SNARC est expliqué par l'orientation de la ligne numérique mentale. Les petits nombres seraient représentés à gauche et les grands nombres à droite.

Le modèle de l'accumulateur et le modèle de la ligne numérique mentale modélisent différemment l'origine de l'obéissance du traitement numérique à la loi de Weber. Le modèle de l'accumulateur prévoit une représentation linéaire avec une variabilité scalaire issue de la lecture en mémoire (Fig. 1-3A) alors que le modèle de la ligne numérique prévoit une représentation logarithmique avec une variabilité fixe (Fig. 1-3D). Ces deux modèles mènent à des prédictions psychophysiques identiques (Dehaene, 2003).

Une observation qui permettrait de départager ces modèles est le caractère symétrique ou asymétrique des distributions d'activation des neurones qui répondent de manière préférentielle à une numérosité (Dehaene, 2003; Nieder & Miller, 2003). Nieder et ses collègues ont identifié de tels neurones au moyen de l'enregistrement électrophysiologique intracellulaire chez le singe (Nieder, Freedman, & Miller, 2002; Nieder & Miller, 2003). La tâche demandée aux singes était de juger si deux stimuli visuels présentés séquentiellement présentaient le même nombre d'éléments (tâche d'appariement différé). Des neurones situés dans le cortex préfrontal latéral et le sillon intra-pariétal présentaient une activité maximale pour une numérosité donnée (numérosité préférentielle) et une activité moindre pour les numérosités proches numériquement. Cette activité diminuait avec l'augmentation de la distance entre la numérosité préférentielle et la numérosité traitée (propriété de filtre). Les courbes d'activation de ces neurones étaient asymétriques lors de leur représentation sur une échelle linéaire: la pente pour les numérosités plus petites que la numérosité préférentielle était plus forte que la pente pour les numérosités plus grandes (Nieder & Miller, 2003). Par contre, ces courbes étaient symétriques sur une échelle logarithmique.

Nieder et Miller (2003) ont testé le degré d'ajustement d'une courbe de Gauss (mesure de la symétrie) aux courbes d'activation sur l'échelle linéaire et l'échelle logarithmique. Le degré d'ajustement était meilleur pour l'échelle logarithmique ⁴. Ce profil correspond au profil attendu par le modèle de la compression logarithmique (Fig.1-3 C & D). Cette compression serait présente dès la phase d'encodage de la numérosité et n'augmenterait pas lors de la rétention de cette information. Ce résultat est également en désaccord avec

⁴ Le degré d'ajustement a été en réalité testé pour quatre fonctions: linéaire, logarithmique, puissance avec un exposant de 0.5 et puissance avec un exposant de 0.33. Les quatre échelles s'ajustaient bien aux données comportementales (lin. : $R^2 = .93$, log. : $R^2 = .98$, puiss. 0.5 : $R^2 = .97$, puiss. 0.33 : $R^2 = .98$) et aux données neurophysiologiques pendant la présentation du modèle (lin. : $R^2 = .72$, log. : $R^2 = .89$, puiss. 0.5 : $R^2 = .83$, puiss. 0.33 : $R^2 = .86$) et pendant le délai (lin. : $R^2 = .84$, log. : $R^2 = .96$, puiss. 0.5 : $R^2 = .92$, puiss. 0.33 : $R^2 = .93$). Néanmoins, le degré d'ajustement était toujours statistiquement meilleur pour les trois échelles non linéaires que pour l'échelle linéaire.

l'hypothèse de Gallistel et Gelman (2000) selon laquelle la source de variabilité est la mémoire. Un meilleur ajustement des données sur une échelle logarithmique a été également montré pour la distribution des performances comportementales (le pourcentage d'essais où les deux stimuli étaient jugés identiques en termes de numérosité) dans la même étude et pour la distribution de la réponse neuronale à la présentation d'une numérosité déviante dans un paradigme d'adaptation fMRI chez l'adulte (Jacob & Nieder, 2009b).

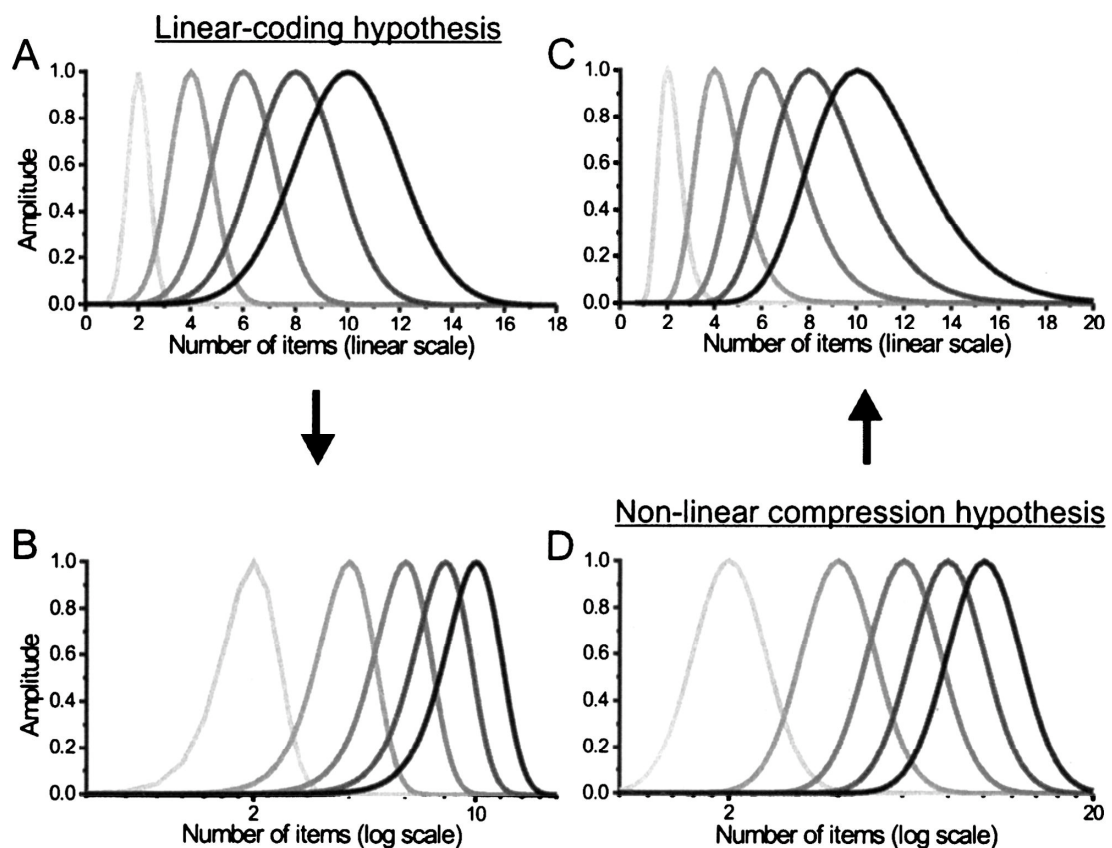


Figure 1-3. (A et B) Hypothèse d'une représentation linéaire. (A) Les représentations numériques mentales consistent en des distributions symétriques normales sur une échelle linéaire. La largeur des distributions augmente proportionnellement à l'augmentation de la magnitude (variabilité scalaire). (B) Ces distributions deviennent asymétriques (pentes moins abruptes vers les petits nombres) si elles sont représentées sur une échelle logarithmique. (C et D) Hypothèse d'une compression non-linéaire. (D) Les représentations numériques mentales consistent en des distributions normales de largeur constante sur une échelle comprimée. (C) Les distributions deviennent asymétriques si elles sont représentées sur une échelle linéaire, avec des pentes moins abruptes vers les grands nombres (D'après Nieder & Miller, 2003).

2.3 Le modèle de réseau neuronal

Dehaene et Changeux (1993) ont inséré la ligne numérique mentale, comme détecteur de numérosité, au sein d'un réseau neuronal. Ce réseau comporte quatre couches : (1) la carte rétinienne, (2) la carte de localisation, (3) le codage par sommation et (4) les détecteurs de numérosité (codage positionnel) (Fig. 1-4). La carte de localisation représente les objets selon leur localisation indépendamment de leur taille (processus de normalisation de la taille). Cette carte projette sur une couche qui somme l'activation de la carte de localisation (codage par sommation), cette activation étant proportionnelle à la numérosité. Chaque unité de cette couche a un seuil propre d'activation et est activée quand ce seuil est dépassé. Les propriétés de l'étape de codage par sommation apparaissent lorsqu'un réseau est entraîné par rétropropagation à donner la numérosité à partir de la carte de localisation (Verguts et Fias, 2004). Le substrat neuronal de cette étape a été localisé au niveau du cortex pariétal supérieur postérieur chez l'être humain dans une étude fMRI (Santens, Roggeman, Fias, & Verguts, 2010) et au niveau de l'aire intrapariétale latérale chez le singe macaque au moyen de l'enregistrement électrophysiologique intracellulaire (Roitman, Brannon, & Platt, 2007). Enfin, la couche de codage par sommation projette sur les détecteurs de numérosité (codage positionnel). Ces détecteurs sont activés si l'unité de sommation correspondante est activée et si les unités représentant les numérosités supérieures ne sont pas activées.

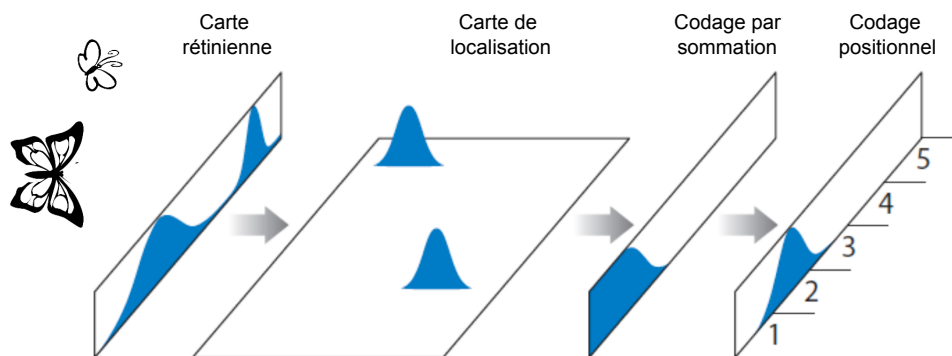


Figure 1-4. Structure du réseau neuronal. La localisation est codée indépendamment de la taille des objets au niveau de la carte de localisation. Les activations de cette carte sont ensuite sommées (codage par sommation). La quantité d'activation reflète la numérosité présentée. Enfin, la ligne numérique mentale qui répond sélectivement aux numérosités (codage par position) est activée (Adapté de Nieder & Dehaene, 2009).

Ce modèle est en quelque sorte un modèle hybride. La ligne numérique mentale qui correspond à l'étape de codage par position est précédée d'une étape de codage par sommation qui fonctionne de manière similaire à un accumulateur. Néanmoins, comme le souligne Brannon (2005), l'étape de codage par sommation du modèle de Dehaene et Changeux (1993) diffère du mode de comptage préverbal suggéré par Gallistel et Gelman (1992) dans le modèle de l'accumulateur. Premièrement, le modèle de Dehaene et Changeux postule que la numérosité est perçue parallèlement alors que le mode de comptage préverbal est sériel. Deuxièmement, contrairement au modèle de Dehaene et Changeux, le modèle de l'accumulateur prévoit une représentation commune aux quantités discrètes et continues.

3 Le rôle du symbole dans le traitement numérique

Les êtres humains partagent avec les espèces animales des capacités préverbales de traitement numérique. Ils sont également dotés de la faculté de langage qui leur permet de symboliser les nombres. Les numéraux verbaux et arabes sont des symboles puisque leur sens est attribué de manière arbitraire et conventionnelle. Leur apparence physique ne donne aucune information sur les nombres qu'ils représentent. Quel impact la symbolisation a-t-elle eu sur les représentations numériques mentales? ⁵ Nous examinerons d'abord les différences de performances comportementales lors du traitement numérique non symbolique et symbolique chez l'adulte. Nous aborderons ensuite l'impact de la symbolisation sur les représentations numériques mentales en présentant le modèle de Verguts et Fias (2004). Enfin, le modèle du Triple Code de Dehaene (1992) sera présenté car, outre la représentation préverbale abordée précédemment, ce modèle intègre des représentations dépendantes du langage auxquelles sont associés des traitements spécifiques.

⁵ Nous limiterons notre discussion à l'impact de la symbolisation sur le traitement de la magnitude (p.ex., Gelman & Butterworth, 2005; Gelman & Gallistel, 2000). Le rôle du langage dans l'acquisition du concept de nombre défini au sens de Wiese (2003, 2007) ne sera pas discuté. Celle-ci définit les nombres comme des outils cognitifs dont la fonction est d'identifier trois propriétés empiriques : la cardinalité (p.ex., cinq bus), l'ordinalité (p.ex., le cinquième bus) et l'identité (p.ex., le bus n°5).

3.1 Ancrage du traitement numérique symbolique dans le système préverbal de représentation numérique

Buckley et Gilman (1974) ont montré que la comparaison de deux numéraux arabes était associée à des effets de distance et de taille. Ceci suggère que le traitement numérique symbolique repose sur notre système préverbal de représentation de la magnitude. Néanmoins, les effets de distance et de taille observés lors de ce traitement étaient plus faibles que les effets observés lors de la comparaison de deux collections d'objets, ce qui indique un impact de la symbolisation sur les représentations numériques mentales.

Selon Roggeman, Verguts et Fias (2007), le codage de la magnitude pourrait différer qualitativement pour les numéraux arabes et les numérosités (du moins pour les nombres de 1 à 4). Ces auteurs ont montré que, lorsque la dénomination de collections de points était au préalable amorcée par la présentation d'une collection de points, les réponses étaient plus rapides pour les collections inférieures ou égales à la collection présentée en amorce. Cet effet suggère un codage par sommation: le traitement d'une numérosité serait associé à l'activation du segment de la ligne numérique qui inclut la numérosité traitée et les numérosités inférieures (Fig. 1-5). Par contre, lorsque la dénomination de chiffres était amorcée par la présentation d'un chiffre, les réponses étaient plus rapides pour le même chiffre (priming de répétition) et dans une moindre mesure pour les chiffres proches du chiffre présenté en amorce (priming de distance). Ces effets sont en faveur d'un codage positionnel pour les chiffres: le traitement d'un chiffre serait associé à l'activation de la position correspondant à celui-ci ainsi qu'à l'activation des positions adjacentes. L'activation serait maximale au niveau de la position correspondant au chiffre traité et diminuerait avec l'augmentation de la distance par rapport à ce chiffre (Fig. 1-5). Les relations entre ces deux codages restent toutefois à préciser. En effet, le codage par sommation pourrait être suivi du codage positionnel lors du traitement non symbolique, comme le prévoit le modèle de Dehaene et Changeux (1993) et le modèle de Verguts et Fias (2004). En faveur de cette hypothèse, Nieder, Freedman et Miller (2002) ont identifié des neurones répondant préférentiellement à une numérosité donnée (codage de la position) chez le singe.

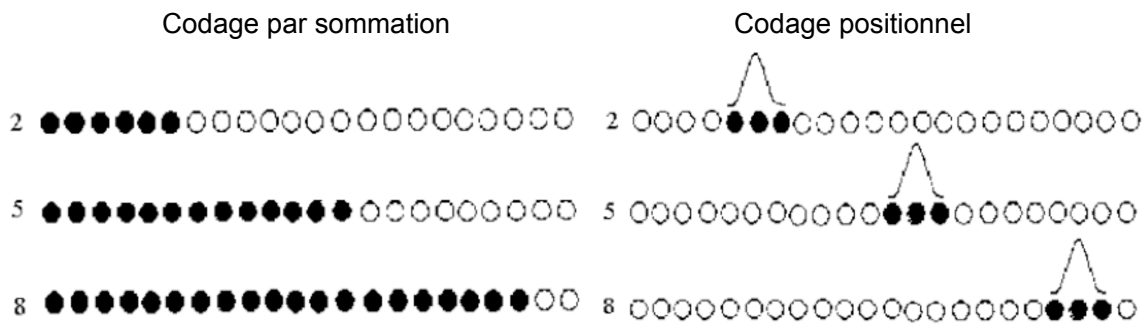


Figure 1-5. Représentation schématique du codage par sommation (gauche) et du codage positionnel (à droite) (D'après Roggeman, Verguts, & Fias, 2007).

3.2 Impact de la symbolisation sur les représentations numériques mentales

Verguts et Fias (2004) ont réalisé une simulation informatique de l'apprentissage du traitement numérique symbolique pour les petits nombres (1 à 5). Ces auteurs ont repris le modèle qu'ils ont proposé pour le traitement numérique non symbolique. Ils ont ajouté une étape de codage symbolique où chaque symbole était associé à un nœud de manière arbitraire (Fig. 1-6). Ces symboles activaient la ligne numérique suite à un apprentissage au cours duquel les numerosités étaient présentées en association avec les symboles correspondants. Le modèle a donc appris à associer de manière préférentielle un nœud au niveau de la ligne numérique à un nœud au niveau du codage symbolique. Néanmoins, la ligne numérique n'était pas activée de la même manière lors du traitement symbolique et non symbolique. Premièrement, la largeur des distributions d'activation était plus étroite pour le traitement symbolique, en raison de l'acquisition indirecte de la propriété de filtre. Cette propriété de la voie non symbolique a été en effet acquise par la voie symbolique lors de l'activation conjointe de ces voies au cours de l'apprentissage. Cette diminution de la largeur des distributions d'activation expliquerait la réduction de l'effet de distance. Par ailleurs, la largeur des distributions n'augmentait pas avec la taille numérique, ce qui pourrait expliquer la réduction de l'effet de taille. La symbolisation pourrait donc avoir un impact sur la représentation approximative des nombres, rendant cette dernière moins approximative lorsqu'elle est activée à partir de symboles.

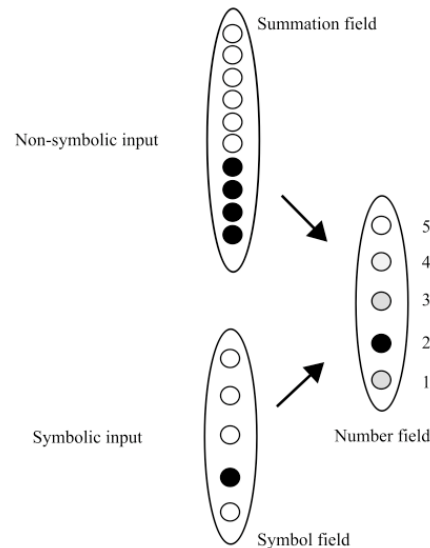


Figure 1-6. Extension du réseau neuronal au traitement symbolique. La voie de traitement symbolique comporte une étape de codage symbolique où chaque symbole est attribué arbitrairement à un nœud. La voie symbolique et la voie non symbolique activent une position sur la ligne numérique (D'après Verguts & Fias, 2004).

Santens, Roggeman, Fias et Verguts (2010) ont apporté des données fMRI en faveur de ce modèle. Une analyse de connectivité a montré que les traitements numériques symbolique et non symbolique activaient une représentation commune qui est sélective à la numérosité et qui est sous-tendue par le sillon intrapariétal. Cette représentation serait activée par différentes voies : le chemin préférentiel du traitement non symbolique passe par une aire du cortex pariétal supérieur dont l'activité est proportionnelle à la numérosité (codage par sommation) alors que le chemin préférentiel du traitement symbolique n'inclut pas le passage par cette aire.

Verguts, Fias et Stevens (2005) ont entraîné leur modèle de traitement numérique symbolique à trois tâches symboliques impliquant des petits nombres (comparaison numérique, dénomination et jugement de parité sur des numéraux arabes de 1 à 15). Ce modèle postulait une représentation linéaire, issue d'un codage positionnel, avec une variabilité fixe. Cette représentation était exacte dans le sens où la distance entre deux nombres était conservée. Lors de l'entraînement, les numéraux étaient présentés selon leur fréquence dans la vie quotidienne. Au terme de celui-ci, les performances du modèle étaient en accord avec les données empiriques de la littérature, notamment par l'émergence d'un effet de distance et de taille pour la comparaison numérique. Dans ce modèle, l'effet de taille en

comparaison symbolique ne provenait pas de la représentation de la magnitude, mais d'un appariement non linéaire entre la ligne numérique mentale et l'output spécifique à la comparaison numérique. Cet appariement serait déterminé par la fréquence des nombres dans la vie quotidienne. Ces auteurs ont donc montré qu'il n'était pas nécessaire de postuler une variabilité scalaire ou une compression logarithmique pour expliquer l'effet de taille en comparaison numérique symbolique sur des petits nombres. Pour les grands nombres, les auteurs ont précisé que la représentation activée à partir de symboles pourrait être bruitée en raison de leur faible fréquence (ce qui ralentit l'adaptation des connexions entre la ligne numérique et l'output spécifique à la tâche) et la compression de l'échelle au-delà de l'intervalle des petits nombres. Les auteurs ont également fait l'hypothèse d'un traitement exact des numéraux à plusieurs chiffres (qui représentent donc des grands nombres), au moyen d'un processus de décomposition qui permet de bénéficier de la représentation exacte des petits nombres.

3.3 Le modèle du triple code

Au-delà de son impact sur les propriétés des représentations numériques mentales, la symbolisation a permis de dépasser les limites de nos capacités numériques préverbaux. Le langage est un système de représentation symbolique où une numérosité n et les numérosités adjacentes $n - 1$ et $n + 1$ se distinguent catégoriquement. Il permettrait donc de représenter et de manipuler des numérosités de manière exacte. En faveur de cette hypothèse, Pica, Lemer, Izard et Dehaene (2004) ont constaté que les Mundurukús ne parvenaient pas à réaliser une tâche de soustraction exacte. La langue parlée par cette population indigène du Brésil comporte un lexique restreint de numéraux verbaux (jusqu'à cinq) utilisés de manière approximative et non organisés en séquence de comptage. Les Mundurukús avaient les mêmes performances que des participants français dans des tâches de comparaison et d'addition approximatives de collections. Par contre, leurs performances dans une tâche de soustraction exacte de collections dépendaient fortement de la taille du premier opérant, alors que cet effet était mineur chez les participants français. Les Mundurukús se seraient donc basés sur une représentation approximative du nombre pour réaliser cette tâche, probablement car ils ne pouvaient pas réaliser un traitement exact. L'absence d'une séquence organisée et étendue de mots nombres dans leur culture pourrait être à l'origine de cette incapacité.

La symbolisation permet également d'exprimer et de manipuler de grandes quantités, de stocker des fait arithmétiques (additions et multiplications simples) en mémoire à long terme et de développer l'arithmétique. C'est pourquoi, outre la représentation analogique de la magnitude qui est indépendante du langage, Dehaene (1992) prévoit un code verbal auditif et un code arabe visuel qui sont mobilisés par l'être humain en vue notamment d'un traitement exact (Fig. 1-7). Des voies de transcodage relient ces différentes représentations. Par exemple, la voie de transcodage du code visuel arabe au code verbal permet d'activer le numéral verbal qui correspond à un numéral arabe. A chaque code sont associées des opérations spécifiques. L'estimation, la comparaison et le calcul approximatif seraient sous-tendus par le code analogique alors que le code verbal sous-tendrait la reconnaissance et la production de numéraux verbaux ainsi que les faits arithmétiques. Le code visuel supporterait la reconnaissance et la production de numéraux arabes, les opérations sur des nombres à plusieurs chiffres et le jugement de parité.

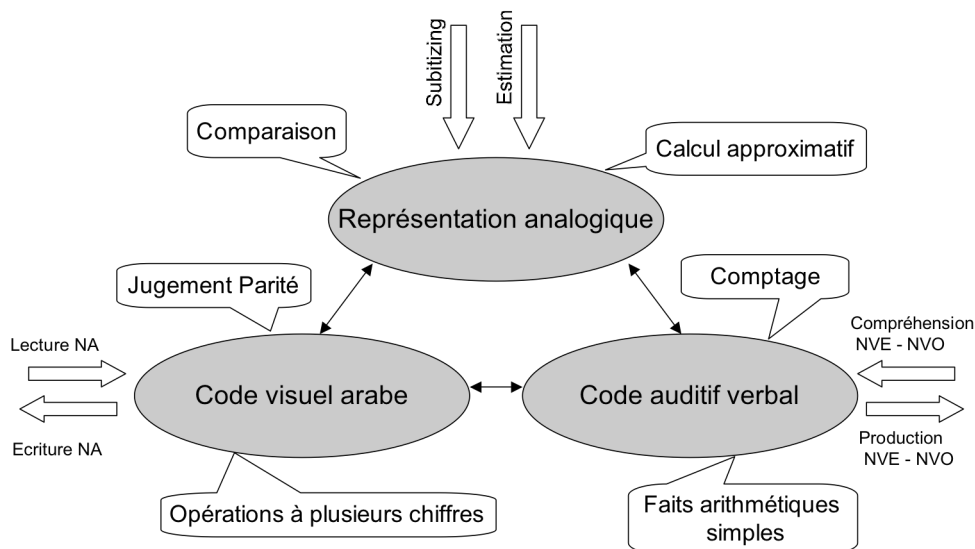


Figure 1-7. Modèle du Triple Code de Dehaene (1992). Les trois codes sont représentés dans les bulles grisées. Les flèches représentent les processus de traitement des inputs et des outputs (NA = Numéral Arabe, NVE = Numéral Verbal Ecrit, NVO = Numéral Verbal Oral). Les opérations spécifiques à chaque représentation sont mentionnées dans les bulles blanches.

4 Au-delà des numéraux à un seul chiffre

Les études précédentes se sont principalement consacrées au traitement et à la représentation de la magnitude de numéraux à un seul chiffre. Le système numéral arabe permet néanmoins de représenter des magnitudes en dehors de l'intervalle 1 à 9. Il combine un lexique restreint (de 1 à 9 et 0) et un système de position en base 10. La magnitude d'un numéral arabe s'obtient par la somme des valeurs attribuées à ses éléments qui sont elles-mêmes déterminées par leur position (p.ex., $572 = < 5 * 10^2 > + < 7 * 10^1 > + < 2 * 10^0 >$). Comment sont traités ces numéraux? Une représentation intégrée de leur magnitude est-elle activée? Au contraire, la structure en base 10 est-elle conservée au sein de la représentation? Nous synthétiserons brièvement les principaux résultats relatifs à ces questions car ils seront éclairants pour la question de la représentation mentale de la magnitude des fractions, celles-ci représentant une magnitude par la relation numérique de deux numéraux.

La représentation mentale de la magnitude de numéraux à deux chiffres a fait l'objet de plusieurs hypothèses. Selon l'hypothèse d'une *représentation holistique*, la magnitude d'un numéral à deux chiffres est représentée mentalement comme une entité intégrée qui ne conserve pas la structure en base 10 (Dehaene, Dupoux, & Mehler, 1990; Hinrichs, Yurko, & Hu, 1981; Reynvoet & Brysbaert, 1999). En faveur de cette hypothèse, Dehaene et al. ont montré que des adultes comparaient plus lentement 61 et 55 que 68 à 55. Cet effet de distance numérique indique que la magnitude des unités a été traitée bien que le traitement des dizaines aurait suffi pour donner une réponse correcte. De plus, l'effet d'amorçage sémantique⁶ dans une tâche de dénomination ou de jugement de parité était similaire, que l'amorce et la cible appartiennent aux mêmes dizaines (p.ex., 7 amorce 9) ou à des dizaines différentes (p.ex., 11 amorce 9) (Reynvoet & Brysbaert, 1999).

⁶ L'effet d'amorçage numérique réfère à des réponses plus rapides lorsque la cible est précédée d'une amorce proche numériquement (p.ex., 9 amorcé par 8) que lorsqu'elle est précédée d'une amorce distante numériquement (p.ex., 9 amorcé par 6). Cet amorçage est dit sémantique car l'effet de distance indique un accès à la représentation numérique mentale: la présentation de l'amorce entraîne l'activation de la représentation numérique correspondante ainsi que l'activation de la représentation des nombres proches numériquement. Cet effet d'amorçage s'observe que l'amorçage soit masqué ou non (Koechlin, Naccache, Block, & Dehaene, 1999).

L'hypothèse d'une représentation purement holistique s'est néanmoins avérée insuffisante pour expliquer l'effet de compatibilité entre les dizaines et les unités. Les adultes comparaient plus lentement 47 et 62 que 42 et 57, bien que la distance entre les deux nombres soit égale dans les deux paires (Nuerk, Weger, & Willmes, 2001). Dans la première paire, la comparaison des dizaines et la comparaison des unités mènent à des réponses différentes (paire avec incompatibilité dizaines – unités: $4 < 6$ mais $7 > 2$) alors que ces comparaisons mènent à une même réponse dans la deuxième paire (paire avec compatibilité dizaines – unités : $4 < 5$ et $2 < 7$). Cet effet de compatibilité suggère une décomposition des nombres à deux chiffres lors de leur comparaison. Cet effet a été répliqué dans plusieurs études (voir Wood, Nuerk, & Willmes, 2006 pour les corrélats neuro-anatomiques; Nuerk, Kaufmann, Zoppoth, & Willmes, 2004 pour des données développementales). Malgré l'effet de compatibilité dizaines - unités, la distance numérique entre les nombres restait le prédicteur le plus puissant, ce qui a amené Nuerk et Willmes (2005) à proposer un *modèle hybride*. Selon ce modèle, les nombres entiers, les dizaines et les unités sont comparés parallèlement (voir aussi Moeller, Fischer, Nuerk, & Willmes, 2008) et de manière interactive. Le poids des connexions entre le module de comparaison numérique et l'output serait plus important pour les dizaines que pour les unités, ce qui permettrait une réponse correcte en cas d'incompatibilité de la réponse aux unités et aux dizaines.

Le modèle hybride a été récemment remis en question par Verguts et de Moor (2005). Selon ces auteurs, l'effet de distance globale observé par Nuerk et al. (2001) pourrait refléter un effet de la distance entre les dizaines (ces deux variables étant fortement corrélées). Verguts et de Moor défendent l'hypothèse d'une *pure décomposition* sans traitement de la magnitude globale du nombre. La comparaison numérique se ferait au moyen de connexions établies en mémoire à long terme entre la ligne numérique mentale et les unités spécifiques à la comparaison numérique au niveau de l'output (p.ex., « gauche plus grand », « droit plus grand »). La décomposition du nombre permettrait d'utiliser les connexions qui sont les plus efficaces, c'est-à-dire les connexions établies pour les petits nombres (de 1 à 10). Les connexions établies pour les grands nombres seraient moins efficaces en raison de leur faible fréquence dans la vie quotidienne et mèneraient donc à une probabilité plus importante d'erreurs. Leur hypothèse est soutenue empiriquement par l'observation d'un effet de la distance entre les valeurs holistiques (qui équivaut à la distance entre les unités) lors de la comparaison de nombres partageant la même dizaine (p.ex., 34 _ 38) et une absence d'effet de la distance entre les valeurs holistiques lorsque la distance entre les dizaines est fixée à 1

(p.ex., 64 _ 72). Ces résultats sont bien en défaveur de l'hypothèse holistique qui prédit un effet de distance dans les deux cas.

Les résultats de Verguts et de Moor (2005) n'excluent néanmoins pas la possibilité d'une représentation holistique lorsque les deux nombres à comparer ne sont pas présentés simultanément. Selon Zhang et Wang (2005), le traitement holistique serait impliqué dès qu'un des nombres est stocké en mémoire de travail et que la comparaison s'effectue par conséquent entre une représentation interne et une représentation externe. Ces auteurs ont rapporté des données en faveur d'un traitement parallèle des unités et des dizaines lors de la présentation simultanée des nombres à comparer (traitement de deux représentations externes). Par contre, lorsque les deux nombres à comparer étaient présentés de manière séquentielle (traitement d'une représentation interne et d'une représentation externe), les performances reflétaient davantage un traitement holistique. Ces résultats sont en accord avec les études ayant utilisé une présentation simultanée (Nuerk et al., 2001; Verguts & de Moor, 2005) et les études ayant utilisé un standard (Dehaene et al., 1990) ou une présentation séquentielle des nombres à comparer (Reynvoet & Brysbaert, 1999). L'effet du type de présentation a été répliqué par Zhou, Chen, Chen et Dong (2008) lors d'une tâche de jugement de similitude numérique (même – différent).

En résumé, le traitement de la magnitude des numéraux à deux chiffres impliquerait un processus de décomposition. La magnitude relative des dizaines et des unités serait traitée parallèlement. L'activation d'une représentation holistique pourrait également se produire soit parallèlement au traitement des dizaines et des unités soit lors du stockage du numéral en mémoire de travail. Notons qu'un traitement hybride a également été proposé pour les nombres à trois chiffres (Korvorst & Damian, 2008) alors qu'un traitement séquentiel de la magnitude des chiffres a été suggéré pour les nombres à 4 chiffres et plus (Poltrock & Schwartz, 1984).

5 Conclusions

Le traitement de nombres naturels est associé à des effets de distance et de taille qui se combinent en un effet de rapport. Ces signatures comportementales suggèrent une représentation approximative de la magnitude des nombres sous la forme d'un continuum. L'observation de ces effets chez l'animal, le nouveau-né et l'adulte indique que cette représentation approximative est indépendante du langage. Elle est également abstraite car ces effets sont observés pour du matériel non symbolique et symbolique, quelle que soit la modalité de présentation (auditive vs. visuelle) ou la notation (verbale ou arabe). Le traitement de la magnitude de symboles numériques s'appuierait donc sur les représentations numériques préverbaux. Un accès automatique à ces représentations à partir des symboles se développerait au cours des apprentissages symboliques.

Les modèles qui ont été proposés pour expliquer ces effets diffèrent sur plusieurs points. Premièrement, le modèle de l'accumulateur (Gallistel & Gelman, 1992, 2000) est un système de codage de sommation alors que le modèle de la ligne numérique mentale est un système de codage positionnel (Dehaene, 1992), lui-même précédé par un système de codage de sommation dans le modèle de réseau neuronal (Dehaene & Changeux, 1993; Verguts & Fias, 2004). Deuxièmement, les représentations mentales de la magnitude ont une variabilité scalaire sur une échelle linéaire dans le modèle de l'accumulateur alors qu'elles ont une variabilité constante sur une échelle logarithmique dans le modèle de la ligne numérique mentale. Troisièmement, l'accès à la représentation mentale de la magnitude d'un symbole se fait par une procédure apprise d'appariement entre les symboles et un codage par sommation dans le modèle de l'accumulateur, et directement entre les symboles et un codage positionnel dans le modèle de réseau neuronal (Verguts & Fias, 2004). Dans ce dernier modèle, les propriétés de la représentation varient selon qu'elle soit activée à partir d'un input symbolique ou non symbolique, avec un gain de précision pour le symbolique. Quatrièmement, le modèle de l'accumulateur postule une représentation commune aux magnitudes discrètes et continues, alors que le modèle de la ligne numérique mentale a été formulé pour expliquer les données issues du traitement des nombres naturels. Enfin, le modèle de l'accumulateur postule un isomorphisme entre les magnitudes mentales et les nombres réels, ce qui théoriquement permettrait la représentation mentale des nombres rationnels. Néanmoins, aucun mécanisme

permettant cette représentation n'a été spécifié à ce jour, le mode de comptage préverbal n'étant pas approprié ou suffisant pour des nombres non ordonnés discrètement.

L'étude du traitement de numéraux à deux chiffres pose la question du traitement de la magnitude sous une nouvelle forme: est-ce que la magnitude globale de ces nombres est activée (représentation holistique) ou est-ce que chaque chiffre est traité séparément (décomposition)? Les résultats présentés dans ce chapitre montrent que la réponse à cette question n'est pas simple et que des aspects expérimentaux (p.ex., présentation simultanée vs. séquentielle des nombres à comparer) pourraient influencer le type de traitement. La magnitude relative des dizaines et des unités serait traitée probablement en parallèle. La représentation de la valeur holistique pourrait être également activée dans certains contextes expérimentaux. Les mêmes questions se poseront pour le traitement de la magnitude des rapports symboliques (les fractions). Ce chapitre d'introduction à la cognition numérique s'est limité à l'étude des nombres naturels qui sont ordonnés de manière discrète. Le chapitre suivant portera sur le traitement et la représentation de rapports de deux nombres naturels.

Chapitre 2: Traitement cognitif des rapports

Les rapports de nombres naturels permettent de représenter les nombres rationnels. Ils permettent de représenter des magnitudes inférieures à l'unité (p.ex., $3/4$, $1/3$, $1/21$, $16/32$) et d'introduire une continuité en s'intercalant entre deux nombres naturels successifs (p.ex., $6/4$, $13/11$, $23/12$ entre 1 et 2). Si un grand nombre d'études ont exploré la représentation mentale de la magnitude des nombres ordonnés discrètement (les nombres naturels), les études portant sur la représentation mentale de la magnitude des rapports sont rares. Nous commencerons ce chapitre par un aperçu des études sur le traitement de rapports non symboliques chez l'animal et l'être humain aux différents stades du développement (nouveau-né, enfant et adulte). La plupart de ces études se sont focalisées sur la capacité de traiter des rapports, sans tester la nature de la représentation mentale de la magnitude des rapports. Nous présenterons ensuite très brièvement la littérature sur l'apprentissage des rapports symboliques (les fractions) et les difficultés qui y sont associées. Enfin, nous aborderons la question de la représentation mentale de la magnitude des rapports symboliques en présentant l'étude de Bonato, Fabbri, Umiltà et Zorzi (2007) qui était la seule étude publiée sur cette question au début de nos recherches empiriques.

1. Traitement cognitif de la magnitude de rapports non symboliques

La capacité de traitement de rapports non symboliques a fait l'objet de recherches de longue date en psychologie du développement (p.ex., Piaget & Inhelder, 1962) et en psychologie du comportement animal (p.ex., Harper, 1982). Ces recherches ont eu recours à des rapports de numérosités (p.ex., rapport entre deux collections d'objets, rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles), à des rapports de dimensions continues (ex., rapport entre deux longueurs, rapport entre deux surfaces) ou à des rapports combinant une quantité discrète et une quantité continue (p.ex., rapport entre le nombre de récompenses et une durée). En référence au sens commun qui associe le mot *nombre* aux nombres naturels, nous parlerons de *rapports numériques* dans le premier cas et de *rapports non numériques* dans le second cas. Les rapports de dernier type seront appelés *rapports mixtes* puisqu'ils combinent des magnitudes de nature différente. Nous avons étendu notre exposé aux rapports non numériques et aux rapports mixtes afin de considérer la question de la spécificité du traitement des rapports numériques. La similitude de certains résultats pour

les différents types de rapports justifie de considérer leur traitement conjointement. Néanmoins nous rencontrerons deux limites dans la littérature. Premièrement, peu d'études ont comparé directement les performances obtenues sur des rapports numériques et celles obtenues sur des rapports non numériques. Deuxièmement, une seule étude a testé le traitement de rapports numériques en contrôlant les variables continues.

1.1. Données chez l'animal

En 1990, Gallistel a fait la revue des études réalisées jusque-là sur le traitement de rapports chez l'animal. Ces études portaient sur des rapports mixtes. Divers groupes d'animaux (rats, pigeons, poissons, mésanges, ou canards) ont été placés dans des situations où ils devaient poser un choix entre deux sources de nourriture. Ces sources différaient quant au taux attendu de récompense (rapport entre le nombre d'aliments et une durée, par exemple 4 morceaux de pain par minute). Dès la première minute, les animaux d'un groupe se répartissaient entre les deux sources de nourriture selon le taux relatif de récompense. La rapidité de l'ajustement du comportement indiquait que celui-ci s'opérait sur base du taux observé de délivrance des aliments. Cet ajustement n'aurait pas pu se faire sur base de la quantité de nourriture obtenue par l'animal puisque tous les animaux n'avaient pas encore eu le temps d'avoir un morceau de pain et aucun d'entre eux n'avait eu le temps d'obtenir un morceau à chaque source de nourriture.

Par exemple, une volée de canards se répartissait entre deux expérimentateurs proportionnellement à la fréquence relative à laquelle l'expérimentateur jetait des morceaux de pain (Harper, 1982). Si les deux expérimentateurs jetaient un morceau de pain de 2 grammes toutes les 5 secondes, le nombre de canards s'alimentant chez chaque expérimentateur était en moyenne identique. Par contre, si un des expérimentateurs jetait un morceau toutes les 10 secondes, le nombre de canards s'approchant de celui-ci correspondait à la moitié du nombre de canards s'approchant de l'autre expérimentateur. Si la taille des morceaux de pain était manipulée, les canards corrigeaient leur comportement après 6 minutes en tenant compte de cette nouvelle variable. L'ajustement du comportement indique que les canards se représentaient le nombre de morceaux, le laps de temps écoulé et la taille des morceaux et combinaient ces variables au moyen d'opérations (multiplication du rapport entre le nombre de morceaux et le temps écoulé par la taille des morceaux). Selon Gallistel,

Gelman et Cordes (2006), la combinaison de magnitudes discrètes et continues par des opérations arithmétiques est possible grâce un système de représentation mentale qui est commun aux deux types de quantité. Ces auteurs font donc implicitement l'hypothèse d'une représentation mentale des rapports mixtes chez l'animal au moyen des représentations mentales de la magnitude qui seraient approximatives et continues.

Selon Gallistel (1990), la représentation mentale de magnitudes discrètes et continues sous un format commun qui permet l'application d'opérations arithmétiques permet d'adopter un comportement adaptatif. Ainsi, la répartition des individus d'un groupe (ou du temps consacré par un individu) entre deux sources de nourriture proportionnellement au taux relatif de délivrance permet de ne pas épuiser ces sources. Si les animaux recherchaient la nourriture uniquement dans la parcelle qui en fournit le plus, ils y seraient nombreux et la taille de chaque part serait petite. Dans ce cas, l'évolution aurait privilégié les animaux « exceptionnels » qui auraient été vers les sources de nourriture moins abondantes.

Récemment, Vallentin et Nieder (2008) ont montré que des singes rhésus pouvaient discriminer des rapports non numériques. La tâche était de mémoriser un rapport de longueur entre deux lignes et de choisir ensuite parmi deux stimuli celui qui présentait le même rapport (Fig. 2-1A). Après entraînement, les singes pouvaient discriminer de nouveaux rapports (3/8 et 5/8) avec une précision comparable à la précision observée pour les rapports entraînés (1/4, 2/4, 3/4 et 4/4). Au moyen de l'enregistrement électrophysiologique intracellulaire, les auteurs ont identifié, dans le cortex préfrontal latéral, des neurones qui répondaient préférentiellement à un rapport donné (indépendamment de la longueur de chaque ligne) (Fig. 2-1B). Leur activité était maximale pour le rapport préférentiel et décroissait avec l'augmentation de la distance entre ce rapport et le rapport à traiter (propriété de filtre). Ces réponses neuronales semblaient déterminer le comportement: moins les réponses neuronales se superposaient, plus les performances en discrimination de deux rapports s'amélioraient. De plus, en cas d'erreur, l'activité neuronale pour le rapport préférentiel était significativement réduite. Selon Vallentin et Nieder, il n'est pas exclu que d'autres régions cérébrales envoient des informations relatives aux rapports vers le cortex préfrontal latéral. En effet, une réponse du sillon intrapariétal latéral a été observée lorsque des singes rhésus devaient poser un choix entre deux réponses sur base de leur probabilité d'apporter une récompense (Yang & Shadlen, 2007). Une probabilité est un rapport numérique entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles (p.ex. $1/6 = 1$ essai sur 6 est associé à une récompense).

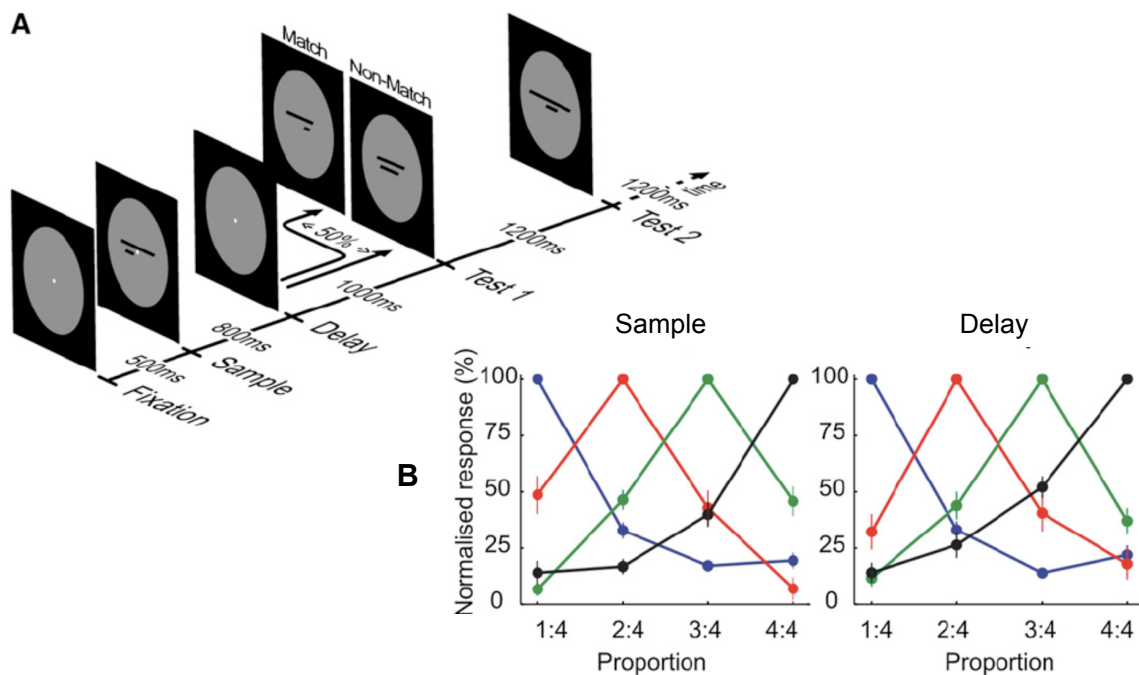


Figure 2-1. (A) Schéma de la tâche d'appariement différé de rapports de longueurs utilisée par Vallentin et Nieder (2008). Le singe devait appuyer sur un levier pour commencer un essai. Un modèle était présenté et, après un délai, un stimulus test. Si celui-ci était apparié au modèle en termes de rapport, le singe devait lâcher le levier. Dans le cas contraire, il devait maintenir le levier jusqu'à la présentation du deuxième stimulus test qui était toujours proportionnel au modèle. (B) Moyennes des réponses neuronales préférentielles du cortex préfrontal pendant la présentation du modèle (gauche) et pendant le délai (droite).

En résumé, les études chez l'animal indiquent une capacité de traitement de rapports non numériques (rapports de longueurs), de rapports numériques (probabilité) et de rapports mixtes (rapport entre un nombre de récompenses et une durée) dans des situations de laboratoire (p.ex., Vallentin & Nieder, 2008) et dans des situations naturelles (p.ex., Harper, 1982). Cette capacité serait donc indépendante du langage. Des neurones localisés au niveau du cortex préfrontal latéral répondent de manière préférentielle à un rapport non numérique donné et présentent donc la même propriété de filtre que les neurones répondant préférentiellement aux numérosités (Nieder, Freedman, & Miller, 2002 ; Nieder & Miller, 2003). Cette observation ouvre la question d'un système de représentation commun pour les numérosités et les rapports non numériques, et a fortiori pour les rapports en général (non numériques, numériques et mixtes).

1.2. Données chez le nouveau-né

La seule étude sur le traitement de rapports chez le nouveau-né a eu recours à des rapports numériques. McCrink et Wynn (2007) ont montré la capacité de l'enfant de 6 mois de détecter un changement de rapport dans un paradigme d'habituation, ce qui est en faveur d'une capacité préverbale de traitement des rapports. Les auteurs ont manipulé le rapport numérique entre une collection de Pacmen jaunes et une collection de bonbons bleus. Les variables continues étaient contrôlées afin d'éviter un jugement de rapport de surface ou de périmètre. Pendant la phase d'habituation, le rapport entre les deux collections restait constant (p.ex., 3/12, 12/48, 7/28, 6/24, 9/36 pour le rapport '1 item pour 4') alors que le nombre d'éléments de chaque collection variait d'un essai à un autre. Lorsque la diminution des temps de fixation visuelle indiquait une habituation au rapport numérique, quatre stimuli test étaient présentés (Fig. 2-2). Deux stimuli présentaient le rapport familier et deux stimuli un nouveau rapport. La présentation du nouveau rapport provoquait une augmentation des temps de fixation visuelle lorsque ce rapport était suffisamment distant du rapport familier. Ainsi, les enfants pouvaient discriminer 1/4 de 1/2 – des rapports entretenant eux-mêmes un rapport de 1/2- mais échouaient à discriminer 1/3 de 1/2 – des rapports entretenant eux-mêmes un rapport de 2/3. La même limite avait déjà été mise en évidence pour la discrimination de numérosités chez l'enfant du même âge. Par exemple, les enfants pouvaient discriminer des numérosités entretenant un rapport de 1/2 (8 sons vs. 16 sons) mais échouaient à détecter un changement de numérosité si leur rapport était de 2/3 (8 sons vs. 12 sons) (Lipton & Spelke, 2003). Selon les auteurs, cette similitude suggère que le traitement de numérosités et le traitement de rapports numériques sont sous-tendus par un même système.

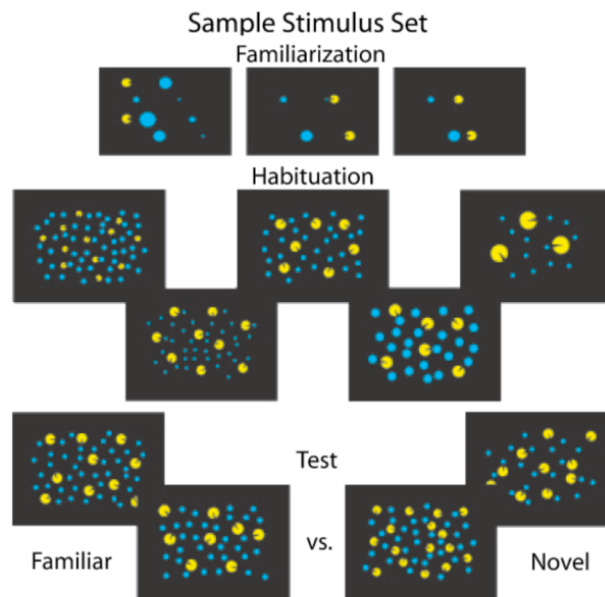


Figure 2-2. Design utilisé par McCrink et Wynn (2007) et exemples de stimuli pour la condition où les rapports entretenaient eux-mêmes un rapport de $1/2$ ($1/4$ vs. $1/2$). Lors de la phase de familiarisation, les enfants voyaient des PacMen jaunes manger des bonbons bleus. Ensuite, l'enfant était habitué au rapport '1 Pacman pour 4 bonbons' ($1/4$). Lors de la phase test, le rapport $1/4$ était présenté comme rapport familier et le rapport $1/2$ comme nouveau rapport.

1.3. Données chez l'enfant de 3 à 11 ans

Plusieurs études ont apporté des données en faveur d'une capacité de traitement des rapports non numériques chez l'enfant, la plupart d'entre elles ayant été réalisées auprès d'enfants relativement jeunes (de 3 à 8 ans). Mix, Levine et Huttenlocher (1999) ont testé la capacité des enfants de 3 à 7 ans à représenter mentalement le résultat d'une transformation d'une quantité fractionnée. L'expérimentateur utilisait un disque constitué de quarts dont le découpage n'était pas visible pour l'enfant. Un quart, la moitié, trois quarts ou la totalité du disque était présenté à l'enfant (Fig. 2-3). Ce stimulus était ensuite masqué par un écran et l'expérimentateur ajoutait ou retirait une portion de disque. L'enfant devait choisir l'image correspondant au résultat parmi quatre images représentant le quart, la moitié, trois quarts ou la totalité d'un disque. Ce dernier disque n'avait pas la même taille que le disque présenté initialement afin d'éviter un choix sur base de la surface absolue de la portion de disque. Les performances étaient supérieures au hasard à partir de 4 ans. Afin de comparer ces performances aux performances sur des numérosités, les auteurs ont utilisé une tâche similaire impliquant les numérosités 1 à 4. Les performances étaient supérieures au hasard dès 3 ans,

suggérant un décalage d'un an entre les performances aux deux tâches. Néanmoins, l'amélioration des performances avec l'augmentation de l'âge des enfants était parallèle pour les rapports et pour les numérosités. Si les problèmes impliquaient des rapports inférieurs et supérieurs à l'unité (p.ex., $3/4 + 3/4 = 6/4$), les performances étaient supérieures au hasard à partir de 6 ans. Notons que la tâche utilisée par Mix et al. ne garantit pas que les enfants aient traité des rapports.

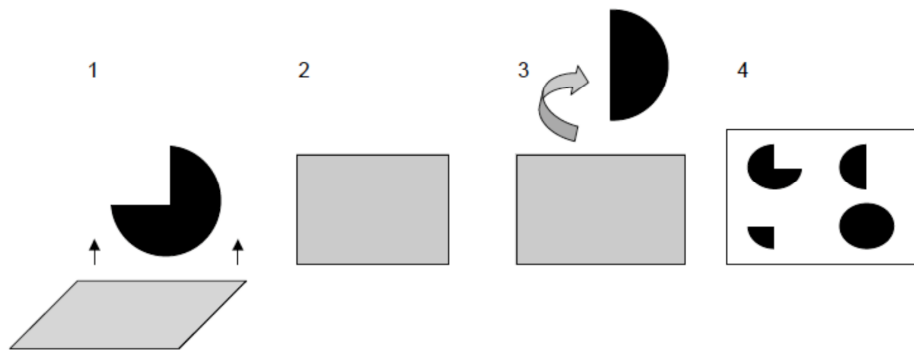


Figure 2-3. Schéma de la tâche utilisée par Mix, Levine et Huttenlocher (1999). (1) Le quart, la moitié, les trois quarts ou la totalité d'un disque était présenté à l'enfant. (2) Un écran masquait le stimulus. (3) L'expérimentateur retirait ou ajoutait une portion de disque. (4) L'enfant devait choisir, parmi quatre images, l'image correspondant au résultat de l'opération.

Sophian (2000) a mis en évidence des capacités d'appariement de stimuli sur base de rapports non numériques chez des enfants de 4 et 5 ans. Les performances étaient supérieures au hasard pour des rapports de longueurs au sein d'une forme géométrique (Fig. 2-4 A) ou en l'absence de forme géométrique (Fig. 2-4 B), ainsi que pour des rapports de surfaces, que la configuration soit identique (Fig. 2-4 C) ou modifiée (Fig. 2-4 D). Selon Sophian, la perception des relations entre des dimensions continues au sein des objets et la comparaison de ces relations entre les objets pourraient constituer une base intuitive à l'élaboration du concept de rapport.

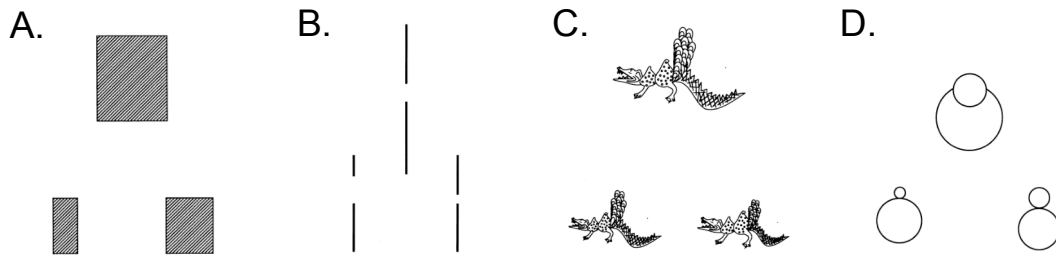


Figure 2-4. Exemple de stimuli utilisés par Sophian (2000) dans une tâche d'appariement sur base du rapport (A) entre la hauteur et la largeur d'une forme géométrique, (B) entre deux longueurs sans information liée à la forme, (C) entre la surface de la tête d'un animal et la surface de sa queue sans changement de configuration, et (D) entre la surface de deux disques avec changement de configuration.

Dehaene, Izard, Pica et Spelke (2006) ont testé la capacité des enfants Mundurukús⁷ à traiter des rapports non numériques dans une étude visant à explorer le traitement géométrique non symbolique. Les enfants étaient âgés de 5 à 12 ans (l'âge moyen était égal à 7 ans et 9 mois). Ils devaient détecter une image déviante parmi six images. La propriété géométrique qui était commune à cinq images et qui était violée par la sixième n'était pas spécifiée dans la consigne. Les enfants devaient l'inférer. Une des propriétés évaluées était la proportionnalité : cinq images présentaient un rapport constant entre deux segments de ligne alors que la sixième présentait un rapport déviant. Les performances étaient supérieures au hasard indiquant la capacité des enfants Mundurukús de traiter des rapports non numériques. Les enfants ont également réussi des épreuves évaluant la connaissance d'autres propriétés géométriques (p.ex., nature symétrique des figures, formes géométriques, distance), ainsi qu'une épreuve de localisation d'un objet sur base d'une carte dans laquelle le raisonnement proportionnel a pu intervenir (principe de l'échelle). Ces données montrent que les enfants Mundurukús ont des capacités de traitement de rapports non numériques, et plus largement ont une connaissance conceptuelle des propriétés géométriques, bien qu'ils n'aient pas reçu un enseignement systématique, qu'ils n'aient pas fait l'expérience d'instruments de mesure ou de cartes, et qu'ils ne disposent pas d'un langage géométrique élaboré.

⁷ Pour rappel, les Mundurukús sont une population indigène d'Amazonie qui habitent dans des villages éparpillés et isolés. Ils ont suivi peu ou pas d'enseignement scolaire et disposent d'un langage peu élaboré au niveau des termes arithmétiques, géométriques ou spatiaux. Ils ne disposent ni de lattes ni de cartes ni de compas.

Selon Duffy, Huttenlocher et Levine (2005), l'encodage de rapports non numériques pourrait servir de base perceptuelle au développement de la capacité de mesurer. Ces auteurs ont en effet montré que des enfants de 4 ans encodaient toujours la longueur d'un objet par rapport à la longueur de son contenant. Ils ont présenté à des enfants de 4 et 8 ans des chevilles en bois dans des boîtes. Les enfants devaient choisir, parmi deux chevilles, la cheville qui s'appariait en longueur à une cheville modèle. Dans la condition contrôle, les boîtes contenant la cheville modèle et les deux choix ne variaient pas en taille. Par conséquent, la cheville qui avait la même longueur que la cheville modèle entretenait également le même rapport à sa boîte que le rapport de la cheville modèle à sa boîte (Fig. 2-5). Dans les conditions expérimentales, la boîte de la cheville modèle n'avait pas la même taille que la boîte des chevilles à comparer au modèle. Parmi les deux choix, une cheville avait la même longueur absolue que la cheville modèle (réponse correcte). L'autre cheville entretenait la même relation à sa boîte que la cheville modèle (distracteur proportionnel) dans la première condition expérimentale et n'entretenait pas la même relation à sa boîte que la cheville modèle (distracteur neutre) dans la seconde condition expérimentale. Les enfants de 4 ans avaient des performances supérieures au hasard dans la condition contrôle. Par contre, leurs performances étaient inférieures au hasard dans la condition avec un distracteur proportionnel (biais vers ce distracteur) et étaient au niveau du hasard dans la condition avec un distracteur neutre. Ces résultats suggèrent que les enfants de 4 ans encodent toujours la longueur d'un objet par rapport à un standard disponible perceptivement et qu'ils se basent sur ce rapport pour poser leur jugement. Par ailleurs, les enfants de 8 ans avaient des performances supérieures au hasard quelle que soit la condition. Ces performances indiquent leur capacité d'imposer un standard mental de taille constante et d'ignorer la relation d'un objet à un standard perceptuel afin d'encoder une longueur.

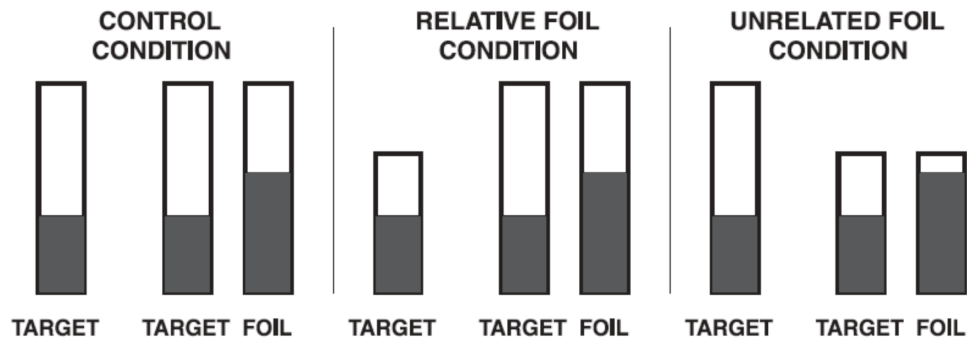


Figure 2-5. Représentation schématique des trois conditions utilisées par Duffy, Huttenlocher et Levine (2005). La zone grisée représente une cheville et le cadre l’entourant la boîte. L’enfant devait choisir, parmi deux stimuli, la cheville qui s’appariait en longueur à la cheville modèle. Dans la condition contrôle, la boîte avait la même taille pour le stimulus modèle et les deux choix. Dans les conditions expérimentales, la taille de la boîte variait entre le stimulus modèle et les deux choix. Le distracteur était apparié au stimulus modèle sur le rapport de taille entre la cheville et la boîte (distracteur proportionnel) ou n’entretenait pas le même rapport (distracteur neutre).

Les études précédentes ont montré la capacité de comparer des rapports non numériques pour des stimuli de même nature. Dans les tâches proposées, les enfants avaient la possibilité de recourir à un traitement perceptif (p.ex., zoom, reconnaissance d’une configuration géométrique, rotation mentale) étant donné la similitude des stimuli à comparer. Des capacités émergentes de raisonnement proportionnel par analogie ont été mises en évidence chez des enfants de 3 et 4 ans dans une tâche plus abstraite qui impliquait des objets de nature différente (Singer-Freeman & Goswami, 2001). L’expérimentateur retirait une proportion de son référent (une pizza coupée en 8 ou une boîte de 8 bonbons) et demandait de faire de même à l’enfant pour son référent (respectivement une boîte de 4 bonbons ou une pizza coupée en 4) (Fig. 2-6). L’enfant devait retirer $1/4$, $2/4$ et $3/4$ par analogie à $2/8$, $4/8$ et $6/8$. Les performances étaient supérieures au hasard dans quatre des six conditions (3 rapports x 2 référents) et ne différaient pas en fonction du référent de l’enfant (pizza vs. boîte de bonbons). Notons qu’il est impossible de déterminer si les enfants ont traité des rapports numériques et/ou des rapports non numériques, puisque la pizza était discrétisée en parts et la taille des bonbons ne variait pas (covariation entre le nombre et la surface cumulée).

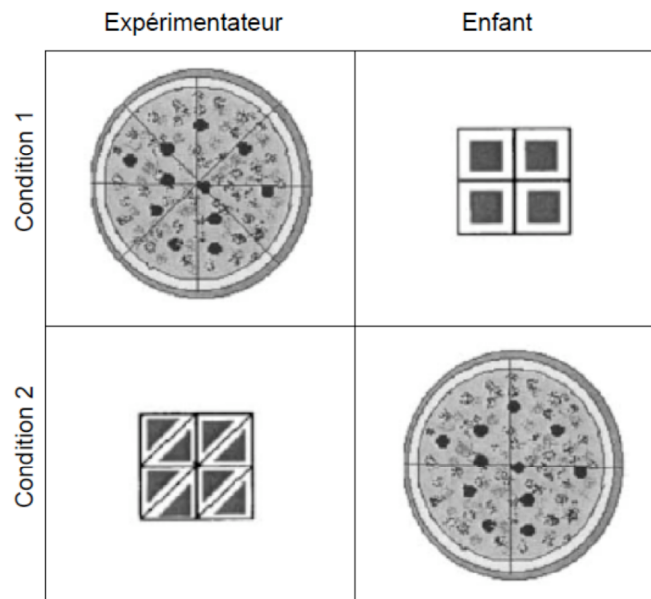


Figure 2-6. Stimuli utilisés par Singer-Freeman et Goswami (2001) dans une tâche de raisonnement proportionnel où l'expérimentateur et l'enfant disposaient de matériel distinct (boîte de bonbons ou pizza) et d'un nombre initial différent de parties (8 pour l'expérimentateur vs. 4 pour l'enfant).

Le traitement de rapports numériques a été étudié chez des enfants plus âgés (de 6 à 11 ans), principalement dans des tâches de jugement de probabilité. En 1962, Piaget et Inhelder avaient conclu que le raisonnement proportionnel apparaissait vers 11 ans. Ils avaient tiré cette conclusion à partir des performances dans une tâche qui consistait à juger la probabilité de tirer une bille bleue parmi un ensemble de billes bleues et roses. Cette conclusion est aujourd'hui remise en question par les capacités de traitement de rapports discutées jusqu'ici. En outre, la consigne utilisée par Piaget et Inhelder faisait uniquement référence aux cas favorables (« *Quelle est la boîte qui te donne le plus de chance de tirer une bille bleue ?* »), ce qui a pu favoriser un traitement du nombre de cas favorables sans prise en compte du rapport. Spinillo (2002) a proposé la même tâche à des enfants de 7 et 8 ans en utilisant une consigne qui faisait référence de manière égale aux cas favorables (billes bleues), aux cas défavorables (billes roses) et aux cas possibles (billes bleues et roses) : « *Voici trois cartes qui représentent des collections de billes bleues et roses. Chaque carte donne un degré différent de chance de tirer une bille bleue. Tu dois les ordonner en fonction du degré de chance de tirer une bille bleue. Le nombre de billes bleues et le nombre de billes roses, ainsi que le nombre total de billes, ont la même importance parce qu'ils indiquent le degré de chance de tirer une bille*

bleue. Commence par me dire le nombre de billes bleues, le nombre de billes roses et le nombre total de billes pour chaque carte. » Les justifications verbales des enfants ont permis d'explorer s'ils traitaient spontanément le rapport entre les parties (le nombre de cas favorables sur le nombre de cas défavorables) ou le rapport entre la partie et le tout (le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles). Les enfants de 8 ans réalisaient cette tâche sur base de la quantité relative des billes bleues et des billes roses (rapport entre les parties). Leurs performances n'étaient pas affectées par la congruence des cas favorables: elles étaient identiques, que la collection avec la plus grande probabilité de tirer une bille bleue soit la collection avec le plus de billes bleues (essais congruents ; par exemple, une collection avec 9 billes bleues sur 12 à comparer à une collection avec 2 billes bleues sur 8) ou soit la collection avec le moins de billes bleues (essais incongruents; par exemple, une collection avec 6 billes bleues sur 8 à comparer à une collection avec 8 billes bleues sur 16). Par contre, les enfants de 7 ans basaient leur choix sur la quantité absolue de billes bleues. L'attention accordée à la formulation de la consigne a donc permis de mettre en évidence des capacités de raisonnement proportionnel abstrait impliquant des quantités discrètes chez des enfants de 8 ans.

Jeong, Levine et Huttenlocher (2007) ont directement comparé les performances des enfants sur des rapports numériques et des rapports non numériques. Ces auteurs ont proposé un jeu à des enfants coréens de 6, 8 et 10 ans. Le principe du jeu était d'abord expliqué à l'enfant: un autocollant était gagné chaque fois qu'une flèche placée au milieu d'un plateau de jeu pointait vers une partie grisée à la fin de sa rotation. Ensuite, deux plateaux de jeu étaient présentés à l'enfant qui devait choisir le plateau avec lequel il préférerait jouer. Dans la condition continue, les plateaux de jeu étaient composés d'une partie grise et d'une partie blanche (Fig. 2-7A). Dans les conditions discrètes, les plateaux étaient composés de plusieurs parties grises et blanches, celles-ci étant mélangées (condition discrète non adjacente, Fig. 2-7C) ou non (condition discrète adjacente, Fig. 2-7B). Le plateau de jeu avec la plus grande probabilité de gagner était composé du plus grand nombre de parties grises (essais congruents; par exemple, un plateau avec 5 parties grises sur 8 à comparer à un plateau avec 2 parties grise sur 6) ou du plus petit nombre de parties grises (essais incongruents ; par exemple, un plateau avec 4 parties grises sur 5 à comparer à un plateau avec 5 parties grises sur 10). Les performances étaient supérieures au hasard dès 6 ans pour la condition continue. Par contre, pour les conditions discrètes, les performances étaient inférieures au hasard chez les enfants de 6 ans, que le nombre de parties grises fût congruent ou non avec la magnitude

du rapport. Chez les enfants de 8 et 10 ans, les performances étaient supérieures au hasard dans les conditions congruente et incongruente pour les essais où les rapports étaient relativement distants numériquement. Par contre, elles restaient inférieures au hasard pour les essais avec des rapports proches numériquement dans la condition incongruente. Ces résultats montrent de meilleures performances pour les rapports non numériques que pour les rapports numériques chez l'enfant d'âge scolaire. Le matériel discret activerait une stratégie de comptage des parties favorables sans prise en compte du rapport. Néanmoins, les enfants de 8 ans parviendraient à baser leur décision sur la magnitude des rapports si leur distance est suffisante. Dans l'étude de Spinillo (2002), les enfants de 8 ans n'étaient pas sensibles à la congruence des cas favorables. Cette différence de résultats peut s'expliquer par la distance entre les rapports utilisés : ces distances étaient plus grandes dans l'étude de Spinillo que dans l'étude de Jeong et collaborateurs.

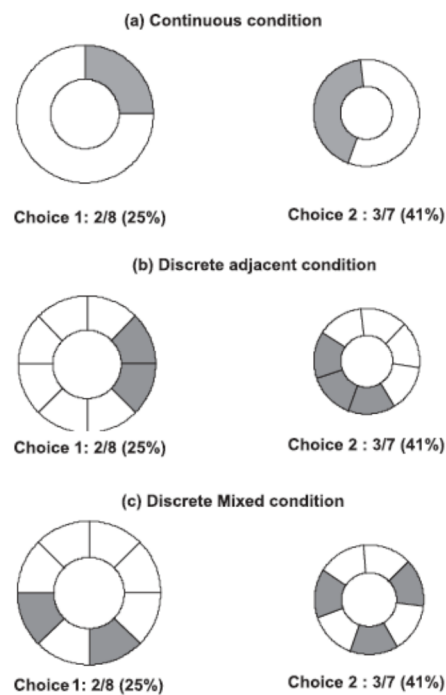


Figure 2-7. Exemples de stimuli utilisés par Jeong, Levine et Huttenlocher (2007) dans une tâche de jugement de probabilité sur du matériel (a) continu, (b) discret adjacent, et (c) discret non adjacent.

La difficulté observée pour les rapports numériques ne serait pas causée par une difficulté de se représenter un rapport entre entités discrètes mais plutôt par une tendance à appairer des quantités absolues quand la tâche le permet. Boyer, Levine et Huttenlocher (2008) ont demandé à des enfants âgés de 6 à 10 ans de choisir, parmi deux stimuli, le stimulus qui était apparié à un modèle en termes de rapport (Fig. 2-8). Une détérioration des performances était observée quand le modèle et les choix impliquaient des entités discrètes et permettaient par conséquent un appariement sur base du nombre de parties. Dès que la tâche impliquait un rapport non numérique (modèle, choix, ou les deux), les enfants réalisaient correctement la tâche. Les enfants auraient donc une tendance à généraliser les routines de comptage aux problèmes de raisonnement proportionnel quand la tâche le permet.

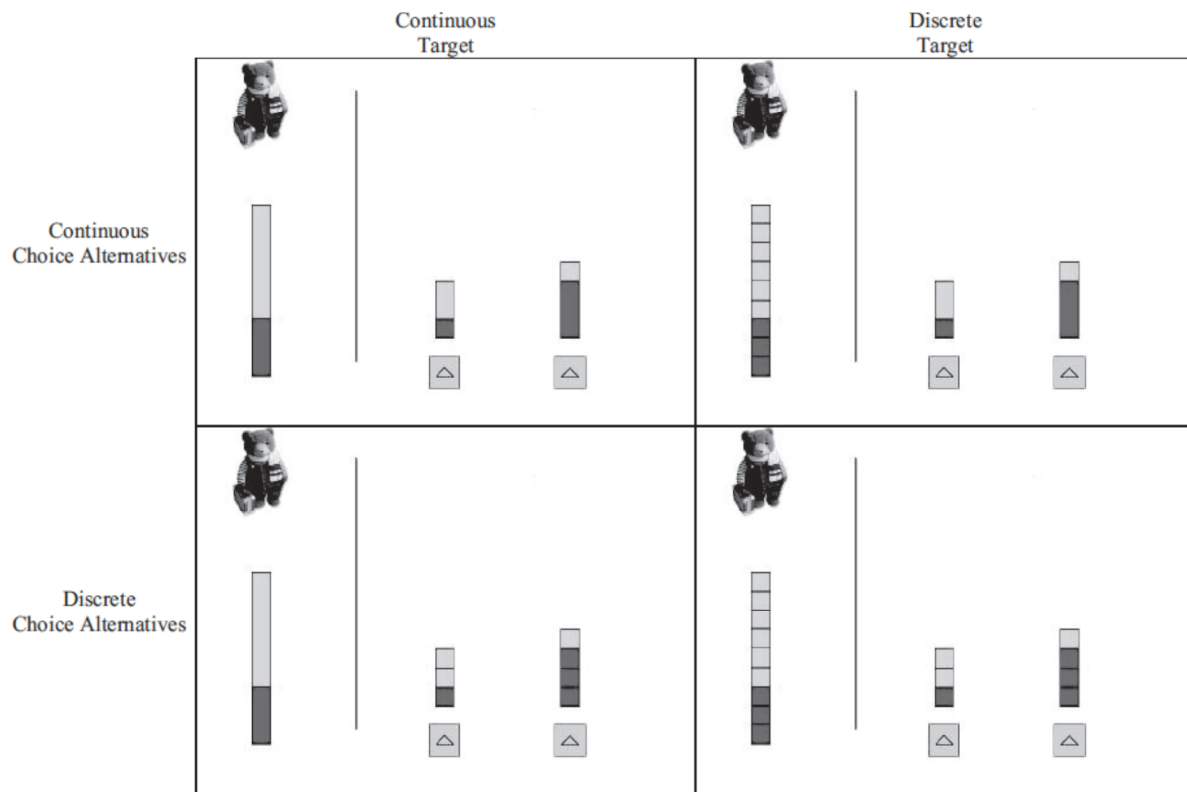


Figure 2-8. Schéma des conditions utilisées par Boyer, Levine et Huttenlocher (2008). L'enfant devait sélectionner, parmi deux choix, le stimulus apparié au modèle en termes de rapport. Le modèle et les choix étaient présentés de manière discrète ou continue.

Les capacités précoces de traitement de rapports numériques qui ont été mises en évidence par McCrink et Wynn (2007) contrastent avec les difficultés de l'enfant d'âge scolaire à traiter ces rapports. Ce contraste est d'autant plus frappant que McCrink et Wynn ont contrôlé les rapports non numériques qui covariaient avec les rapports numériques et que ce contrôle n'a pas été réalisé dans les études chez l'enfant d'âge scolaire. Il est par conséquent étonnant d'observer que des nouveau-nés parviennent à extraire un rapport numérique sans s'appuyer sur les variables continues alors que les enfants d'âge scolaire utilisent des stratégies de comptage plutôt que de bénéficier de la covariation entre les variables perceptives continues et la numérosité. Les enfants d'âge scolaire pourraient recourir plus fréquemment à des stratégies inappropriées de comptage, car ils ont suivi un enseignement systématique du comptage et des nombres naturels. Par ailleurs, les tâches utilisées pour évaluer leur capacité de traitement des rapports numériques pourraient également être propices à ces stratégies : elles permettaient le plus souvent un appariement numérique d'une des parties et le comptage était possible en raison du nombre d'items et du temps de présentation.

Le traitement de rapports implique un traitement de relations multiplicatives. Les relations multiplicatives réfèrent à la multiplication et la division alors que les relations additives renvoient à l'addition et la soustraction selon la terminologie utilisée par Vergnaud (1983). Barth, Baron, Spelke et Carey (2009) ont montré que des enfants de 6 et 7 ans pouvaient appliquer de telles transformations à des quantités discrètes. Suite à l'observation de la transformation de quantités en leur moitié, les enfants pouvaient se représenter la moitié d'une collection de points et comparer celle-ci à une troisième quantité (voir Fig. 2-9 pour une description de la tâche). L'effet de rapport indiquait que cette opération avait été réalisée sur des magnitudes mentales approximatives. La capacité de transformation des magnitudes mentales s'étend donc des opérations additives (p.ex., Barth, Beckmann, & Spelke, 2008; Barth, LaMont, Lipton, Dehaene, Kanwisher, & Spelke, 2006; McCrink & Wynn, 2004) aux opérations multiplicatives. Cette capacité pourrait jouer un rôle dans le traitement de rapports numériques.

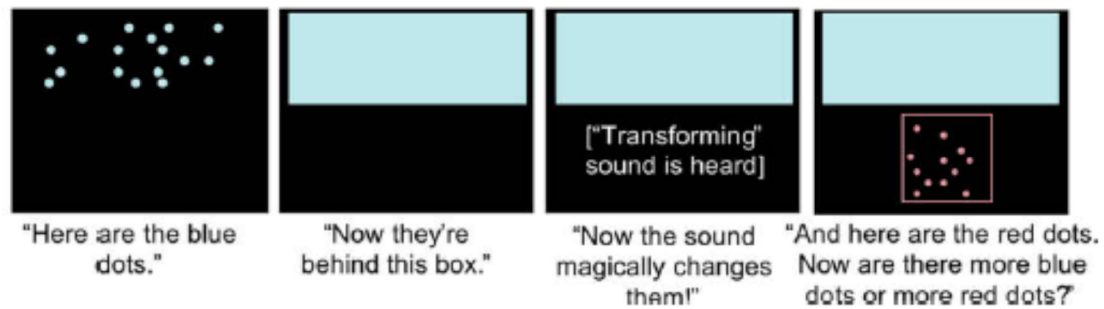


Figure 2-9. Schéma de la tâche utilisée par Barth, Baron, Spelke et Carey (2009). Une collection de points bleus était présentée à l'enfant et était ensuite cachée. Un son qui avait été précédemment associé à l'action de prendre la moitié était émis. L'enfant devait alors se représenter mentalement la moitié de la collection de points bleus. Enfin, une collection de points rouges apparaissait. L'enfant devait la comparer à la collection transformée de points bleus.

La capacité d'opérer une transformation multiplicative pourrait être néanmoins limitée chez des enfants plus jeunes. Sophian, Garyantes et Chang (1997) ont demandé à des enfants de 5 et 7 ans de choisir parmi deux situations de partage laquelle serait associée à une plus grande part pour chacun. Les enfants de 5 ans répondaient au niveau du hasard alors que les enfants de 7 ans réalisaient correctement la tâche. Néanmoins, si des démonstrations de situations de partage étaient faites devant les enfants de 5 ans, certains d'entre eux parvenaient à réaliser la tâche, suggérant une compréhension émergente de la relation inverse entre le dividende et le diviseur.

En résumé, les enfants d'âge scolaire montrent une capacité de traitement de rapports non numériques. Les données sur le traitement de rapports numériques sont moins claires. L'absence de contrôle des variables continues covariant avec le nombre d'éléments ne permet pas de s'assurer que l'enfant se base sur un rapport de numérosités. Quand les performances suggèrent l'utilisation de stratégies de comptage et donc un traitement du nombre d'éléments, elles montrent également l'absence de traitement du rapport entre deux collections. Le traitement des rapports numériques serait donc entravé chez l'enfant d'âge scolaire par l'utilisation inappropriée de stratégie de comptage (comptage d'une des parties du rapport), du moins lorsque la tâche le permet et la consigne met l'accent sur une des parties du rapport. La question de la capacité de traiter des rapports numériques dans des tâches ne permettant pas un appariement sur base du nombre d'éléments d'une des collections reste ouverte chez

l'enfant d'âge scolaire, même si l'observation d'une telle capacité chez le nouveau-né est en faveur de celle-ci chez l'enfant d'âge scolaire. La capacité d'appliquer des transformations multiplicatives à des collections d'items pourraient contribuer à la capacité de traitement de rapports numériques.

1.4. Données chez l'adulte

Selon Jacob et Nieder (2009b), les rapports numériques et non numériques seraient représentés automatiquement chez l'adulte sous forme d'un continuum analogique dans les régions cérébrales classiquement activées lors du traitement de la numérosité. Pour le démontrer, ces auteurs ont eu recours à un paradigme d'adaptation fMRI. La phase d'adaptation consistait en la présentation de stimuli de rapport constant. Lors de la phase test, des stimuli présentant un nouveau rapport étaient présentés (Fig. 2-10). Les rapports impliquaient des dimensions continues (rapports de longueur entre deux lignes) ou discrètes (rapports de numérosité entre deux collections de points). La présentation d'un rapport déviant était associée à une augmentation du signal BOLD au niveau du cortex pariétal et préfrontal bilatéral, avec un effet maximal autour du sillon intrapariétal antérieur. Cette augmentation dépendait de la distance numérique entre le rapport familier et le rapport déviant. Le réseau d'aires activées était similaire pour les rapports numériques et les rapports non numériques, suggérant une représentation abstraite des rapports. Néanmoins, la relation entre le changement d'intensité du signal BOLD et la distance numérique était plus forte pour les rapports numériques que pour les rapports de longueurs. Ce résultat est, selon les auteurs, en faveur d'une représentation plus précise pour les rapports numériques que pour les rapports non numériques. Notons cependant que le rapport numérique covariait toujours avec le rapport des surfaces cumulées des points puisque la taille des points ne variait pas au sein d'un stimulus. Jacob et Nieder ont enfin présenté aux mêmes participants une condition avec déviation des stimuli en termes de numérosité afin d'examiner les régions communes au traitement de numérosités et de rapports. Les variables perceptives continues ont été contrôlées de telle manière que l'effet du stimulus déviant ne soit lié qu'à la numérosité. Dans les trois conditions (rapports de longueurs, rapports de numérosités et numérosités), le sillon intrapariétal avec dominance droite ainsi que les régions préfrontales et précentrales avec dominance droite montraient une modulation du signal BOLD par la distance numérique.

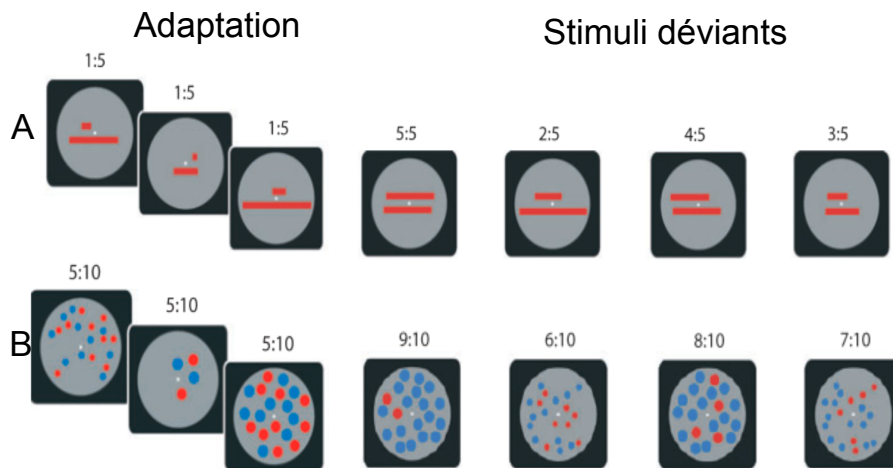


Figure 2-10. Stimuli utilisés par Jacob et Nieder (2009b). (A) Dans la condition continue, le rapport de longueur des deux lignes est 1/5 pendant l'adaptation. Les rapports déviants étaient 5/5, 2/5, 4/5 et 3/5. (B) Dans la condition discrète, le rapport entre le nombre de points bleus et le nombre total de points est 5/10 pendant l'adaptation. Les rapports déviants étaient 9/10, 6/10, 8/10 et 7/10.

1.5. Conclusions

Les études citées mettent en évidence des capacités de représentation mentale de la magnitude de rapports entre dimensions continues, discrètes ou les deux types de dimension. Ces capacités seraient indépendantes du langage car elles sont observées chez l'animal et chez le nouveau-né (du moins pour les rapports numériques). La capacité de traitement de rapports non numériques a été mise en évidence de manière convaincante chez l'animal, l'enfant d'âge préscolaire et scolaire ainsi que l'adulte. Par contre, la capacité de traitement de rapports numériques doit être davantage testée en contrôlant la covariation entre le rapport numérique et le rapport de dimensions continues, les dimensions continues covariant elles-mêmes avec la numérosité. En effet, la seule étude qui a réalisé ce contrôle et qui permet de conclure à une capacité de représentation de rapports numériques est l'étude réalisée chez l'enfant de 6 mois par McCrink et Wynn (2007). L'absence de contrôle dans les autres études n'empêche cependant pas de conclure que le traitement des rapports numériques est entravé chez l'enfant d'âge scolaire par l'utilisation inappropriée du comptage d'un des composants du rapport, du moins lorsque la tâche le permet et lorsque la consigne met l'accent sur un composant particulier du rapport.

Les données actuelles semblent suggérer une représentation commune (ou un format de représentation commun) aux numérosités, aux rapports non numériques et aux rapports numériques. D'une part, l'étude de McCrink et Wynn (2007) met en évidence la même limite lors de la discrimination de rapports numériques et la discrimination de numérosités. Les bébés de 6 mois discriminent deux numérosités ou deux rapports entretenant eux-mêmes un rapport de 1/2 mais échouent lorsque le rapport des éléments à discriminer est de 2/3. D'autre part, chez l'animal, la même propriété de filtre caractérise les neurones répondant préférentiellement aux rapports non numériques (Vallentin & Nieder, 2008) et les neurones répondant préférentiellement aux numérosités (Nieder, Freedman, & Miller, 2002 ; Nieder & Miller, 2003). Le lien entre la représentation mentale des rapports numériques et la représentation mentale des rapports non numériques reste à explorer en contrôlant les variables continues pour les rapports numériques.

2. L'apprentissage des fractions et ses obstacles

La plupart des études chez l'enfant se sont penchées sur l'apprentissage conceptuel et procédural des fractions ainsi que sur les obstacles qui y étaient associés. Les auteurs s'accordent pour affirmer qu'une des plus grandes sources de difficultés est l'interférence des connaissances numériques antérieures (p.ex., Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; English & Halford, 1995; Grégoire & Meert, 2005; Hartnett & Gelman, 1998; Mack, 1993; Sophian, 1996; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Les enfants tendent en effet à appliquer aux fractions leurs connaissances relatives au comptage et aux nombres naturels. Ce biais, appelé *biais des nombres naturels* par Ni et Zhou (2005), mène à des erreurs ou des mauvaises conceptions car le cadre conceptuel construit lors de l'apprentissage des nombres naturels ne se généralise pas à celui des nombres rationnels exprimés sous forme de fractions (voir Tableau 2-1). Par exemple, les enfants acceptent difficilement que la multiplication de deux fractions résulte en une fraction plus petite que les opérants, ou que la division d'une fraction par une autre mène à une fraction plus grande que les opérants (English & Halford, 1995). Beaucoup de jeunes enfants considèrent la fraction comme deux nombres naturels indépendants au début de leur apprentissage (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Ils affirment alors que la plus grande fraction est composée des plus grands nombres (biais des naturels) ou des plus petits nombres (surcorrection du biais).

Tableau 2-1. Cadre conceptuel acquis lors de l'apprentissage des nombres naturels et cadre à acquérir lors de l'apprentissage des nombres rationnels exprimés sous forme de fractions (inspiré de Grégoire & Meert, 2005 et Stafylidou & Vosniadou, 2004)

Éléments	Nombres naturels	Nombres rationnels
Notation symbolique	Numéraux avec une structure en base 10	Paires de numéraux entretenant une relation multiplicative et séparés par une barre de fraction
Magnitude	Un nombre naturel réfère à une seule quantité.	Un nombre rationnel réfère à une seule relation numérique qui est commune à une infinité de paires de quantités (notion de rapports équivalents).
Ordre	Déterminé par la séquence de comptage	Déterminé par la relation numérique
	Prédécesseur et successeur unique	Densité (infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels)
Relation à l'unité	1 est le plus petit nombre	Infiniment petit
Addition & soustraction	Supportées par la séquence de comptage	Recherche d'un dénominateur commun
Multiplication & division	Le produit est toujours plus grand que les opérands. Le quotient est toujours plus petit que le dividende.	Le produit de deux fractions peut être inférieur aux opérands. Le quotient de deux fractions peut être plus grand que les opérands.

L'enfant doit donc surmonter le biais des nombres naturels et restructurer ses connaissances numériques. La construction d'une représentation conceptuelle claire et structurée est néanmoins difficile étant donné le caractère plurivoque des fractions (voir Encadré 3) (English & Halford, 1995; Grégoire & Meert, 2005). L'enfant maîtriserait successivement la notion d'opérateur de fractionnement, de rapport et enfin de mesure (Meert & Grégoire, en préparation). L'enrichissement de la compréhension conceptuelle des fractions et la lenteur de celui-ci se reflètent dans les trois cadres d'interprétation de la valeur numérique de la fraction mis en évidence par Stafylidou et Vosniadou (2004) chez des élèves de 10 à 16 ans. Le premier cadre reflète une mauvaise compréhension des fractions. L'élève traite le numérateur et le dénominateur indépendamment (p.ex., « $1/2 < 1/4$ car $2 < 4$ »; « $1/2$ est la plus petite fraction que je puisse imaginer car elle est composée de petits nombres ») et considère que l'unité est toujours plus petite ou toujours plus grande que les fractions (p.ex., « 1 est plus petit que $2/3$ et $5/4$ »). Dans le deuxième cadre, la compréhension des fractions est

limitée à la partie d'un tout. L'élève considère qu'une fraction est toujours plus petite que l'unité et que sa valeur augmente plus le numérateur s'approche du dénominateur (p.ex., « *la plus grande fraction que je puisse imaginer est 9/10* »). Dans le troisième cadre qui est proche du concept mathématique de fraction, l'élève considère la relation entre le numérateur et le dénominateur. La fraction peut être plus petite, égale ou plus grande que l'unité. Les réponses reflétant le premier cadre d'interprétation diminuent avec l'âge alors que les réponses reflétant le deuxième cadre et le troisième cadre augmentent. Néanmoins, seul 55% des élèves de 16 ans sont classés dans le troisième cadre, ce qui montre la lenteur et la complexité de l'apprentissage conceptuel des fractions (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Encadré 3. Les différentes conceptions de la fraction.

- La fraction comme *opérateur de fractionnement* est la première conception rencontrée par l'élève et est historiquement la plus ancienne. Elle correspond à l'action de partage d'une quantité continue ou d'une collection d'objets en un nombre de parts ou de collections égales dans le cas des fractions unitaires (p.ex., prendre un quart de tarte ou un quart des candidats). Une opération multiplicative est également réalisée dans le cas des fractions non unitaires (p.ex., prendre trois quarts de tarte). Cette conception de la fraction implique la notion de partage équitable.
- La fraction comme *grandeur fractionnée* réfère au résultat du fractionnement (p.ex., trois quarts de tarte). Elle implique la notion d'inclusion de la partie dans le tout.
- La fraction comme *rapport* réfère à la relation numérique entre deux grandeurs (p.ex., 2cl d'eau pour 1 cl de jus, 2 professeurs pour 44 élèves) ou entre la partie et le tout (p.ex., 1 fille sur 12). L'enfant découvre qu'une même relation numérique peut être représentée par une infinité de fractions équivalentes. La notion de rapport intervient dans les pourcentages (p.ex., 5%), les probabilités (p.ex., 1 chance sur 2 de gagner) et les échelles (p.ex., 1cm sur la carte correspond à 30 000 cm sur le terrain).
- La fraction comme *mesure* introduit l'enfant à la fonction de représentation d'un nombre et est donc plus abstraite. Le dénominateur est identifié au diviseur et la barre de fraction à l'opération de division. L'enfant prend conscience que des nombres s'intercalent entre les naturels et qu'il y a une infinité de nombres entre deux nombres (densité). L'enfant découvre également le calcul sur les fractions et le transcodage sous forme de nombres décimaux.

Le nombre de dimensions à traiter peut également constituer une source de difficultés lors de la manipulation des fractions (English & Halford, 1995). En effet, l'enfant dispose de capacités limitées en mémoire de travail. Or la charge en mémoire de travail lors du traitement de fractions est relativement lourde. En effet, contrairement aux nombres naturels pour lesquels la magnitude d'un chiffre est associée à sa position relative, la magnitude d'une fraction ne peut être déterminée qu'en traitant la relation entre le dénominateur et le numérateur. Par conséquent, la comparaison de deux fractions implique le traitement d'une relation de second ordre (relation entre deux rapports qui représentent une relation entre deux nombres) alors que la comparaison de deux nombres naturels implique une relation de premier ordre. Dans l'étude de Hecht, Close et Santisi (2003), nous observons d'ailleurs une corrélation positive modérée entre l'empan de comptage d'enfants de 10 et 11 ans et leurs performances en comparaison de fractions.

Enfin, le manque de transparence des fractions verbales a été considéré comme une source de difficultés (Miura, Okamoto, Vlahovic-Stetic, Kim, & Hye Han, 1999). Néanmoins, cette hypothèse est remise en question par l'étude de Paik et Mix (2003). Ces auteurs ont demandé à des enfants coréens et anglais, âgés de 6 et 7 ans, et n'ayant pas encore suivi un enseignement systématique des fractions, d'apparier une fraction verbale à une représentation graphique. La notion de rapport entre la partie et le tout est explicitement incluse dans la langue coréenne, contrairement à la langue anglaise. Ainsi le mot nombre coréen et anglais correspondant à un quart se traduisent respectivement par « de quatre parties, une » et « un quart ». La transparence ne semble pas suffisante pour surmonter le biais des nombres naturels car les deux échantillons ont des performances au niveau du hasard en présence d'un distracteur sémantique (p.ex., l'enfant apparie « un quart » à une barre avec 1 partie hachurée et 4 parties non hachurées). Lorsque ce distracteur est absent, les deux échantillons ont des performances supérieures au hasard. Ce résultat indique que, malgré l'absence de référence à la partie, les enfants anglais ont une certaine compréhension des fractions avant leur apprentissage systématique. Globalement, les enfants coréens gardent de meilleures performances que les enfants anglais. Cependant, les auteurs montrent que cette différence ne serait pas liée à la transparence linguistique (l'expression coréenne n'étant pas aussi transparente qu'attendue pour les enfants coréens), mais à d'autres facteurs culturels (p.ex., temps consacré aux mathématiques).

En résumé, l'apprentissage des fractions est lent et graduel. Le biais des nombres naturels, le caractère plurivoque des fractions et le nombre de dimensions à traiter contribuent à la complexité de cet apprentissage. La littérature sur l'apprentissage des fractions ne s'est pas intéressée à la capacité de représenter mentalement la magnitude d'un rapport non symbolique ni au lien entre cette capacité et les capacités de traitement de rapports symboliques (fractions). Or la littérature sur le traitement des rapports non symboliques suggèrent que le biais des nombres naturels n'est pas spécifique aux rapports symboliques. Des stratégies inappropriées de comptage ont également été mises en évidence chez des enfants d'âge scolaire lors du traitement de rapports numériques non symboliques (voir Jeong et al., 2007 et Boyer et al., 2008). Par ailleurs, nous pourrions émettre l'hypothèse selon laquelle le traitement de la magnitude des fractions pourrait s'ancrer dans les capacités de traitement de rapports non symboliques (a minima de rapports numériques).

3. Traitement cognitif de la magnitude des fractions

Si les difficultés d'apprentissage des fractions et la représentation mentale de la magnitude des nombres naturels ont fait l'objet d'un grand nombre de recherches, ce n'est que très récemment que la représentation mentale de la magnitude des fractions a été étudiée. Notre système de représentation de la magnitude est-il capable de représenter la magnitude d'une fraction, cette fraction représentant symboliquement un rapport de deux nombres naturels? Gallistel et Gelman (2000) ont fait implicitement l'hypothèse d'une telle capacité car, selon ces auteurs, l'organisation des magnitudes mentales sous forme de continuum ne devrait pas limiter la représentation mentale de la magnitude des nombres aux nombres naturels ordonnés discrètement. La capacité de traitement de rapports observée jusque-là chez l'animal semblait en faveur de cette hypothèse. Néanmoins, la représentation mentale d'un nombre est générée par un mécanisme de comptage préverbal dans le modèle de l'accumulateur proposé par Gallistel et Gelman (1992, 2000). Or ce mécanisme, en raison de sa nature discrète, ne permettrait pas de générer la représentation mentale d'une fraction (Hartnett & Gelman, 1998). D'autres auteurs ont suggéré que la représentation de la magnitude des fractions dépasserait les limites de nos systèmes préverbaux de traitement numérique ⁸ (p.ex., Butterworth, 2001, 2007 ; Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004). Selon Butterworth (2001,

⁸ En plus du système de représentation approximative, nous partagerions avec les animaux un système de représentation exacte d'un petit nombre d'objets individuels (limité à 4 objets) (voir Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004 pour une revue)

2007), les difficultés d'apprentissage des fractions seraient en faveur d'une limitation de notre système de traitement numérique à la représentation et la manipulation des nombres naturels.

Lors de l'élaboration de notre projet de recherches doctorales, aucune étude n'avait testé directement la capacité de notre système numérique approximatif à soutenir la représentation mentale de la magnitude des fractions. Les premiers résultats parus dans la littérature lors de la réalisation de nos recherches empiriques ont été interprétés en défaveur d'une telle capacité. Ces résultats provenaient de quatre expériences menées par Bonato, Fabbri, Umiltà et Zorzi (2007) afin de tester l'effet de distance et l'effet SNARC lors de la comparaison numérique de fractions à un standard. Dans une première expérience, des étudiants en psychologie et des étudiants en physique ou en sciences de l'ingénieur ont comparé des fractions unitaires (de $1/1$ à $1/9$) au standard $1/5$. Les temps de réponse variaient avec la distance entre les dénominateurs, indiquant une comparaison directe des dénominateurs sans accès à la magnitude des fractions. L'effet SNARC était également en faveur d'une comparaison directe des dénominateurs: les réponses étaient plus rapides à gauche pour les fractions avec un dénominateur plus petit que 5 ($1/2$, $1/3$, $1/4$) et plus rapides à droite pour les fractions avec un dénominateur supérieur à 5 ($1/6$, $1/7$, $1/8$, $1/9$). Cet effet est opposé à l'effet attendu en cas d'accès à la magnitude de la fraction. Ces effets ne variaient pas avec l'échantillon de participants, indiquant une absence d'activation de la magnitude des fractions y compris chez des participants supposés relativement experts dans le traitement des fractions.

Dans une deuxième expérience, Bonato et al. (2007) ont demandé à des étudiants en psychologie de comparer les fractions unitaires utilisées dans la première expérience au standard 0.2 afin de tester si l'utilisation de deux écritures (fractionnaire et décimale) favorisait un accès à la magnitude des fractions. Les temps de réponse étaient prédits par la distance entre les dénominateurs après la transformation supposée du standard en une fraction unitaire (0.2 transformé en $1/5$). Les participants auraient donc transformé le standard en une fraction unitaire au début de l'expérience afin de comparer directement les dénominateurs.

Dans une troisième expérience, Bonato et al. (2007) ont présenté des fractions dont les numérateurs (de 1 à 9) et les dénominateurs (de 4 à 6) variaient afin de tester la représentation activée lorsque le traitement des deux composants était nécessaire à la réalisation correcte de la tâche. Ces fractions étaient inférieures à l'unité (fractions propres; p.ex., $2/4$, $5/6$) ou supérieures à l'unité (fractions impropres; p.ex., $7/6$, $5/4$). Elles devaient être comparées au standard 1. L'effet de la distance entre le numérateur de la fraction et le numérateur du standard après sa transformation supposée en $5/5$ était le meilleur prédicteur des temps de réponse⁹, suggérant une comparaison directe des numérateurs après transformation du standard.

Enfin, dans une dernière expérience, ces auteurs ont mélangé les stimuli utilisés dans la première expérience (fractions unitaires de $1/1$ à $1/9$) et une partie des stimuli utilisés dans la troisième expérience (fractions propres et impropres avec un dénominateur égal 5) en gardant leur standard respectif ($1/5$ et 1). Le changement de standard d'un essai à un autre devait, selon les auteurs, entraver l'utilisation de stratégies componentielles car un changement de stratégie d'un essai à un autre serait coûteux. Les participants n'étaient pas informés de l'association entre chaque type de fraction et le standard. A chaque essai, une couleur leur indiquait à quel standard la fraction présentée devait être comparée. Les participants ont été divisés en deux groupes sur base de leur performance à un questionnaire (comparaisons numériques de fractions et opérations sur des fractions). Les résultats ont montré un effet de la congruence des réponses aux deux standards : les essais où la fraction était plus petite (ou plus grande) que les deux standards étaient réalisés plus rapidement que ceux où la fraction était plus grande qu'un des standards et plus petite que l'autre. Cet effet a amené les auteurs à analyser les effets uniquement sur les essais congruents pour s'assurer une comparaison au standard désiré. Pour la comparaison des fractions unitaires ($1/1$ à $1/9$) au standard $1/5$, les temps de réponse variaient avec la distance entre les dénominateurs. Pour la comparaison des fractions $x/5$ au standard 1, les temps de réponse dépendaient de la distance entre le numérateur de la fraction et le standard 1. Ce dernier résultat est, selon nous, surprenant car toutes les fractions qui étaient comparées au standard 1 avaient un numérateur plus grand que

⁹ Notons que la distance entre la fraction et le standard 1, ainsi que la distance entre le dénominateur et le numérateur de la fraction, prédisaient également les temps de réponse. Cependant, ces prédicteurs expliquaient un moindre pourcentage de variance (respectivement $R^2 = .49$ et $R^2 = .54$) que la distance entre les numérateurs après transformation du standard en $5/5$ ($R^2 = .89$). Les auteurs ont uniquement pris en compte ce pourcentage de variance expliquée sans tester la différence entre ces corrélations ni la contribution relative de ces distances dans une régression multiple.

1. Par conséquent, la comparaison du numérateur des fractions au standard 1 ne permettait pas de déterminer si la fraction était plus petite ou plus grande que le standard. Les effets de distance ne variaient pas entre les deux groupes constitués à partir des performances au questionnaire, indiquant selon les auteurs une absence de modulation des effets en fonction du niveau d'expertise des participants.

Sur base de ces résultats, Bonato et al. (2007) ont conclu à une persistance du biais des naturels chez l'adulte. Ce biais se refléterait dans l'utilisation de stratégies componentielles qui permettent d'éviter d'accéder à la magnitude des fractions. Selon ces auteurs, ce biais serait même en défaveur d'une capacité de représenter mentalement la valeur holistique d'une fraction. Ces conclusions ont séduit un certain nombre de chercheurs car elles semblaient en accord avec les difficultés d'apprentissage des fractions et le biais des nombres naturels chez l'enfant. D'autres auteurs avaient déjà proposé l'hypothèse selon laquelle la représentation de la magnitude des nombres appartenant à des ensembles plus larges que celui des naturels dépasserait les limites de notre système préverbal dédié au traitement numérique (Butterworth, 2001, 2007 ; Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004 ; Gallistel & Gelman, 1992 ; Hartnett & Gelman, 1998 ; Wynn, 1998).

Néanmoins, les efforts des auteurs à complexifier la tâche afin de forcer un accès à la magnitude de la fraction n'ont peut-être pas été suffisants. En effet, la régularité des stimuli peut avoir encouragé l'utilisation de stratégies componentielles. Le standard était une fraction partageant toujours le même composant avec les fractions présentées (p.ex., le numérateur 1 pour les fractions de $1/1$ à $1/9$ comparées au standard $1/5$) ou pouvait être transformé pour qu'il en soit ainsi (p.ex., transformation de 1 en $5/5$ et de 0.2 en $1/5$). Lorsque les dénominateurs et les numérateurs variaient simultanément (Expérience 3), l'intervalle des dénominateurs restait fort restreint (de 4 à 6), ce qui a pu amener les participants à assimiler les fractions avec un dénominateur égal à 4 ou 6 à des fractions avec un dénominateur égal à 5. Cette hypothèse est en accord avec l'effet de la distance entre le numérateur de la fraction et le numérateur du standard après sa transformation en une fraction avec un dénominateur égal à 5 (1 transformé en $5/5$). Par ailleurs, l'utilisation du standard 1 rendait l'accès à la magnitude de la fraction non nécessaire. En effet, la comparaison du numérateur au dénominateur, guidée par nos connaissances conceptuelles (p.ex., la fraction est plus petite que 1 si le numérateur est plus petit que le dénominateur), suffisait pour réaliser correctement la tâche. Par conséquent, la question de la représentation de la magnitude des fractions restait

ouverte. De plus, l'hypothèse d'une capacité de représentation de la magnitude des fractions nous semblait tout à fait plausible en regard de la capacité du nouveau-né de traiter des rapports numériques non symboliques.

4. Conclusions générales

Les recherches sur le traitement de rapports non symboliques chez l'animal, le nouveau-né, l'enfant d'âge préscolaire et scolaire, et l'adulte mettent en évidence des capacités préverbaux de représentation de la magnitude des rapports, probablement héritées de l'évolution, qui partagent les mêmes signatures et substrats neuronaux que les capacités préverbaux de traitement de la numérosité. Ces rapports impliquent des quantités discrètes (rapports de deux collections d'items), des quantités continues (p.ex., rapports de longueurs) ou la combinaison de ces deux types de quantité (p.ex., rapport entre le nombre d'aliments et le temps de recherche de nourriture à une source donnée).

Les capacités de traitement des rapports non symboliques contrastent avec la littérature sur les fractions, qui ne fait d'ailleurs pas référence à ces capacités. L'apprentissage des fractions est lent et graduel. Le biais des nombres naturels, le caractère plurivoque des fractions et le nombre de dimensions à traiter sont probablement les sources majeures de difficultés. Bien que la capacité de représentation mentale de la magnitude des fractions pourrait en partie éclairer la complexité de l'apprentissage des fractions, cette représentation n'a été que très récemment explorée. La première étude publiée a montré une absence d'accès à la magnitude des fractions et l'utilisation de stratégies componentielles lors de la comparaison de fractions à un standard par des adultes (Bonato et al., 2007). Selon les auteurs de cette étude, l'utilisation de stratégies componentielles dans différents contextes expérimentaux serait en défaveur d'une capacité de représentation de la magnitude des fractions par notre système de traitement numérique. Elle serait par contre en accord avec les difficultés d'apprentissage et le biais des nombres naturels observés chez l'enfant. Les limites de cette étude ainsi que les capacités de traitement de rapports non symboliques nous ont conduits à reconsidérer les premières conclusions parues dans la littérature sur la représentation mentale de la magnitude des fractions.

Empirical part

Introduction

Our research aimed to investigate the processing of the magnitude of fractions in children and adults. It was motivated by the lack of studies about the mental processes and representations involved in this processing. Better insight into these issues would also be relevant for understanding the obstacles to the learning of fractions. More precisely, our research aimed to test four experimental issues: (1) Are adults and school-age children able to represent the holistic value of a fraction mentally? In what contexts do they utilise this ability? (2) Is the magnitude of the components also processed and does this componential processing interfere with the processing of the fraction magnitude? (3) Is the processing of fractions more complex than the processing of non-symbolic ratios? Do the properties of the holistic representation differ between fractions and non-symbolic ratios? (4) Is the mental representation of the holistic value of a fraction accessed by activating the mental representation of the magnitude of its components and processing their numerical relation (indirect access)?

The first issue is about the ability of adults and school-age children to represent the holistic value of a fraction mentally. The magnitude of a fraction is holistic because it cannot be reduced to the magnitude of its components and it involves taking into account the numerical relation between the components. Bonato, Fabbri, Umiltà and Zorzi (2007) published the first study on this issue. In a magnitude comparison task they showed that adults compared the fraction components directly, without processing their numerical relation. They interpreted their results as evidence that adults could not represent the magnitude of fractions mentally. This conclusion quickly appealed to a lot of researchers due to its apparent convergence with the educational and developmental-sciences literature on the learning of fractions. This literature emphasises that fractions are counterintuitive, and that the acquisition of the fraction concept is impeded by a whole-number bias.

Nevertheless, we felt that Bonato et al.'s (2007) interpretation could not account for the processing of magnitude of fractions in all experimental conditions. Their stimuli were so regular that the direct comparison of the components was efficient in terms of accuracy and speed. Relying on a representation of the magnitude of fractions would probably have been more costly in terms of mental resources and time than componential strategies. In other

words, Bonato et al.'s experiments gave few opportunities for participants to demonstrate that they could access a mental representation of the holistic value of fractions. We investigated this issue further in three separate studies.

Study 1 examined whether adults can represent the holistic value of fractions mentally and use these representations in experimental conditions that are less regular than those employed by Bonato et al. (2007). In a first experiment, adults compared the numerical value of fractions with common denominators (e.g., $\frac{3}{8}$ and $\frac{7}{8}$) and with common numerators (e.g., $\frac{2}{7}$ and $\frac{2}{3}$) when these were mixed in the same task. The denominators and the numerators varied considerably throughout the task. In a second experiment, fillers were added to investigate the impact of the context on the processing of fraction magnitudes. These fillers were pairs of fractions without common components (e.g., $\frac{5}{12}$ and $\frac{4}{7}$). They were expected to enhance access to the holistic representation due to the absence of any common components. This absence should prevent the participants from using their conceptual knowledge about the congruity of the components (e.g., when the denominators are the same, the larger fraction always has the larger numerator) to determine an efficient componential strategy. We hypothesised that the fillers would also enhance access to the holistic representation for experimental pairs, as most of the pairs were in fact fillers, and so only holistic processing was efficient in terms of accuracy for the whole task. The numerical distance effect was used as an index of the cognitive processing of the magnitude of fractions. The response times should vary according to the distance between the magnitude of the fractions if adults were relying on a mental representation of the holistic value of the fractions. By contrast, if the adults were using componential strategies, the response times should vary according to the distance between one of the sets of components. Componential strategies refer to direct comparison of the numerators (e.g., comparing 6 and 7 when the fractions to be compared were $\frac{6}{11}$ and $\frac{7}{11}$) or the denominators (e.g., comparing 6 and 7 for $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{7}$).

Study 2 explored the cognitive processing of the magnitude of fractions in children of different ages who were learning about fractions. Despite the great interest in children's difficulties with fractions, this area had not been previously studied. Ten- and twelve-year-olds performed a numerical comparison task on fractions with common denominators or common numerators. The numerical distance effect was used to test whether these children used componential strategies or an holistic representation. The experimental design was the same as that of the first experiment (without fillers) in Study 1.

Study 3 tested the processing of the magnitude of fractions with no common components during their numerical comparison by adults. Fractions with no common components were only used as fillers in Study 1. However in this study, several dimensions of these stimuli were controlled. Furthermore, the impact of the context on processing was tested: in the first context, the congruence of the components was held constant, while in the second it varied from one trial to another trial.

The second issue was explored in Study 1 and Study 2. Is the magnitude of the components also processed and does this componential processing interfere with the processing of the fraction magnitude? We hypothesised that children and adults who have already overcome the conceptual obstacles (i.e., a whole-number bias) and who are processing fraction magnitudes may have to manage interference from the component magnitudes (i.e., a Stroop-like phenomenon). This issue was investigated in adults (Study 1) and in school-age children (Study 2), at the same time as the first issue. Interference from the component magnitude was tested by contrasting performance on fractions with common denominators (e.g., $3/7$ and $5/7$) with that on fractions with common numerators (e.g., $2/3$ and $2/5$). In the first case, the component magnitude is congruent with the fraction magnitude ($3/7 < 5/7$ and $3 < 5$) whereas in the second it is incongruent ($2/3 > 2/5$ but $3 < 5$). If the magnitude of the denominators interferes with the processing of the magnitude of fractions, performance should be poorer on fractions with common numerators (such as $2/3$ and $2/5$) than on fractions with common denominators (such as $3/7$ and $5/7$). Only data from children and adults who performed relatively well on the task involving fractions with common components was analysed in this way, so that the Stroop-like phenomenon was investigated apart from a whole number bias at the conceptual level.

Studies 1 and 2 also employed a priming paradigm to investigate the control of this interference. If the processing of the natural numbers in the denominators is inhibited during the correct comparison of fractions with common numerators (e.g., $2/3$ and $2/5$), the processing of these fractions should negatively prime the processing of the subsequent natural numbers. We manipulated the specificity of the priming to identify the stage at which the inhibition operated. The natural numbers were either the same as the previous denominators (specific priming) or different (unspecific priming). If inhibition operates on the denominator

selected as the large one (i.e., on the cognitive response), the negative priming should be specific. If inhibition operates on the comparison of the denominators (i.e., on the process of selection of the larger denominator), it should be unspecific. In Study 1, the negative priming effect was assessed relative to the effect of the priming by fractions with common denominators (crossed design). In Study 2, the negative priming effect was assessed relative to a baseline (i.e., priming by non-numerical symbols). If a significant unspecific negative priming effect is shown, this baseline should allow us to rule out an alternative interpretation to inhibition (i.e., task switching).

These first three studies showed that adults and school-age children are able to represent the holistic value of a fraction mentally. They also suggested that the cognitive processing of the fraction magnitude (holistic representation or componential strategies) depends on the experimental conditions, at least in adults. These studies encouraged us to aim for a deeper insight into the mental representation of the fraction magnitude. Study 4 was designed to investigate the third and the fourth issues.

The third issue concerned the specificity of the fraction processing. Is it more complex than the processing of non-symbolic ratios? Do the properties of the holistic representation differ between fractions and non-symbolic ratios? We expected that performance would be poorer for fractions than for non-symbolic ratios due to the contrast between the early ability to process non-symbolic ratios (see McCrink & Wynn, 2007) and the acknowledged difficulty of learning and processing fractions (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; English & Halford, 1995; Grégoire & Meert, 2005; Mack, 1993; Sophian, 1996; Stafylidou & Vosniadou, 2004). If the relative complexity of fractions is due to the presence of symbols, performance should be poorer for fractions than for non-symbolic ratios, irrespective of whether their components are discrete or continuous. If this complexity is due to the discrete nature of the components, performance on fractions should not differ from that on non-symbolic numerical ratios (e.g., the ratios of collections of dots). However, both these formats should lead to poorer performance than for non-numerical ratios (e.g., the ratios between surface areas).

The fourth issue concerns access to holistic mental representations. Investigating this issue requires to consider that the same approximate magnitude (e.g., ~ 0.25) can be represented by an infinite number of fractions (e.g., $1/4$, $2/8$, $2/9$, $3/12$, $7/29$) and that some of them cannot be reduced by an exact simplification procedure. We hypothesised that the mental representation

of the holistic value is activated from the mental representation of the magnitude of the components and the processing of their numerical ratio. The variability of the mental representation of the fraction magnitude should then depend on the variability of the mental representation of the component magnitudes, which in turn depends on the numerical size of the components.

In order to test these issues, Study 4 used a task which tapped into the representation of magnitude and which could be performed correctly only by processing the holistic value of the ratio. Adults were asked to perform a magnitude-estimation task on fractions, non-symbolic numerical ratios (the ratios between collections of dots) and non-numerical ratios (the ratios between surface areas). The numerical size of the components was manipulated by keeping the magnitude of the ratio approximately constant (e.g., $2/5$, $3/8$, $11/28$ for ~ 0.40). In this innovative experiment, the effects of the format and of the numerical size of the components on the variability and the accuracy of the estimates were tested. At odds with our hypothesis about the complexity of the processing of the fraction magnitude, the results suggest that the mental representation of the holistic value is less variable and more accurate for fractions than for non-symbolic ratios. Furthermore, the mental representation of the magnitude of the numerical ratio seems to depend on the numerical size of the components. This supports an indirect-access hypothesis.

General Discussion

General discussion

At the beginning of our research, numerical-cognition studies of the mental processes and representations involved in processing the magnitude of fractions were lacking. Furthermore, in the field of educational and developmental psychology, studies on fractions mainly focused on the difficulties faced by children during the learning of fractions. We felt that educational work would benefit from knowledge of the cognitive processing of fraction magnitudes. Accordingly, our main objective was to investigate this processing in children and adults. More precisely, our research focused on four experimental issues: (1) Are adults and school-age children able to represent the holistic value of a fraction mentally? In what contexts do they utilise this ability? (2) Is the magnitude of the components also processed and does this componential processing interfere with the processing of the fraction magnitude? (3) Is the processing of fractions more complex than the processing of non-symbolic ratios? Do the properties of the holistic representation differ between fractions and non-symbolic ratios? (4) Is the mental representation of the holistic value of a fraction accessed by activating the mental representation of the magnitude of its components and processing their numerical relation (indirect access)?

1 Overview of the findings

1.1 **First experimental issue: Are adults and school-age children able to represent the holistic value of a fraction mentally? In what contexts do they utilise this ability?**

1.1.1 *Overview of the findings in adults (Studies 1 & 3)*

We carried out two studies of adults in order to test their ability to represent the holistic value of fractions mentally. We took the fact that strategic aspects of the task might influence the processing of fraction magnitudes into account. Bonato, Fabbri, Umiltà and Zorzi (2007) failed to show this ability in a magnitude-comparison task, but their results do not rule out the possibility that it exists. Their experimental design favoured the use of componential strategies. The target fractions were compared to a fixed fraction that always had one component the same as the target fraction, or to a fixed decimal number that could easily be transformed into such a fraction. Accordingly, the task could be performed correctly by using

a single componential strategy that could be identified on the basis of conceptual knowledge (e.g., when the numerators are common, the larger fraction always has the smaller denominator). In such a context, adults used a componential strategy, probably because this strategy used less time and mental resources than processing the fraction magnitude.

In our studies, we created more varied contexts than Bonato et al. (2007) by: (1) avoiding the use of a fixed standard; (2) presenting a large range of numerators and denominators; and (3) mixing pairs of fractions with common denominators and with common numerators so that no one componential strategy was sufficient to compare all the pairs correctly (Study 1), or by presenting fractions without any common components so that the congruence of the components could not be identified on the basis of conceptual knowledge (Study 3). Numerical distance effects were tested to see whether the participants accessed the mental representation of the holistic value of fractions (holistic representation), or whether they processed the magnitude of individual components without accessing the mental representation of the fraction magnitude (componential strategies). Our studies showed that the mental representation of the fraction magnitude was activated in such contexts.

In the first experiment in Study 1, adults compared fractions with common numerators (x/a and x/b) and fractions with common denominators (a/x and b/x). The results showed that they accessed the holistic representations for fractions with common numerators: the response times varied with the distance between these fractions. By contrast, the response times varied with the distance between the numerators for fractions with common denominators, indicating the use of a componential strategy. Adults can be thus flexible, and use several strategies in the same task: they can compare the magnitude of the fractions or the numerators according to the type of pair. In the second experiment in Study 1, fillers (i.e., pairs of fractions without common components) were introduced into the task in order to encourage the processing of holistic values for all the pairs. However this manipulation failed to induce a comparison of the holistic values for fractions with common denominators. The distance effects shown in the first experiment was also evident in the second one. This might be explained by the existence of a strong association between direct comparison of the numerators and the presence of common denominators. This association may have been created by frequent use of the common-denominator-search procedure (which just aims to compare the numerators directly) during the school years.

In Study 3, adults were asked to compare fractions without any common components (e.g., $5/7$ and $2/9$). The processing of the fraction magnitude was tested in four between-participant conditions. The denominator magnitude could be congruent or incongruent with the fraction magnitude in the experimental pairs, and the congruence of the components could be constant (no fillers) or variable (with fillers) in the task. The results showed that holistic representations were being accessed in all four conditions: response times varied with the distance between the fractions. This accords with Schneider and Siegler's (2010) recent results, which showed an effect of the distance between the fractions during the comparison of fractions to a standard ($3/5$) which had no common component with the target fractions.

In our studies, careful attention was paid to methodological aspects. The distance effects were analysed in a way that allowed us to take into account the inter-dependence of observations (due the repeated measures across participants and across items) (linear mixed models in Study 3), or that reduced the risk of type II errors (regression on the median response times computed across participants in Study 1). Moreover, possible suppression and redundancy effects produced by partial collinearity between the numerical distances were checked in the statistical analyses (Studies 1 and 3) and were minimised as much as possible by the selection of the stimuli (Study 3). Finally, the stimuli were carefully created in order to avoid the uncontrolled use of strategies such as simplification, the search for a common denominator, and transformation into decimal numbers.

Our results have enabled us to challenge Bonato et al.'s (2007) first conclusion, by showing that adults can mentally represent the magnitude of fractions in an approximate way. This challenge is strengthened by the coherence of the estimates of the magnitude of fractions in Study 4. In addition, we showed that the mental numerical representation activated in an estimation task on fractions could also be used in a comparison task. The subjective distance between the fractions to be compared was computed from the means and standard deviations in the estimation task. This distance was the best predictor of the response times when fractions without any common components were being compared, suggesting that the same approximate mental representation of the fraction magnitude was activated in both tasks.

Kallai and Tzelgov (2009) extended our knowledge of the intentional processing of fraction magnitudes by identifying the conditions that promoted access to the holistic representation (see Table 1 for a summary of the studies on this issue). In engineering students¹, the magnitude of fractions was activated (1) by the comparison of familiar fractions ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $2/3$, and $3/4$), (2) by the comparison of familiar fractions to natural numbers, and (3) by the comparison of proper fractions (smaller than 1) or improper fractions (larger than 1) to natural numbers. For the comparison of two familiar fractions, response times depended on the distance between these fractions. Pairs were made up of fractions with common numerators (e.g., $1/2$ and $1/4$), with common denominators (e.g., $1/3$ and $2/3$), or without any common component (e.g., $1/4$ and $2/3$). This design means that it is unclear whether the mental representation of the fraction magnitude was activated because of the diversity of pairs, or because of the familiarity of fractions. Nevertheless, when these fractions were compared to a natural number (from 0 to 4), the response times varied with the distance between the fraction and the natural number. This definitely supports the existence of holistic representations of familiar fractions in engineering students, and suggests that the mental representations of fractions and natural numbers are organised along the same continuum. Finally, when the participants compared proper (e.g., $3/4$) or improper (e.g., $5/4$) fractions to natural numbers (from 1 to 8), Kallai and Tzelgov argued that the students first compared the denominator and the numerator (i.e., used a componential strategy), and only when they realised that the fraction was improper did they estimate its magnitude (which could be larger or smaller than the natural numbers). They reached this conclusion because comparing a proper fraction to a natural number (e.g., $7/8$ and 2) took less time than comparing an improper fraction to a natural number (e.g., $9/4$ and 2). Comparing an improper fraction to a natural number took a similar time whether the natural number was larger (e.g. 2 and $8/6$) or smaller (1 and $6/2$) than the fraction. It is worth noting that distance effects were not explored in this task.

¹ Kallai and Tzelgov (2009) studied engineering students because they thought it quite likely that engineering students would possess the ability to represent the magnitude of fractions mentally.

Table 1. Studies on the processing of the magnitude of fractions in numerical comparison tasks

Stimuli	Results	Sample	Reference
<i>Unit fractions (numerator = 1, from 1/2 to 1/9)</i>			
1/x, standard 1/5	Effect of the distance between the denominators + SNARC effect for the denominators	Adults ^{1,2}	Bonato et al., 2007
1/x, standard 0.2	Effect of the distance between the denominators after the transformation of 0.2 into 1/5	Adults ²	Bonato et al., 2007
1/x, 1/y	Effect of the distance between the denominators	Adults ^{1,2}	Kallai & Tzelgov, 2009
1/x, N (1 to 9)	Effect of the distance between a generalised fraction and the natural number Effect of the congruence of the denominator	Adults ^{1,2}	Kallai & Tzelgov, 2009
<i>Non-unit fractions (numerator > 1)</i>			
a/x, b/x x/a, x/b	Effect of the distance between the numerators for a/x and b/x Effect of the distance between the fractions for x/a and x/b Effect of the specific negative priming of natural numbers by x/a and x/b	Adults ²	Meert et al., 2009
a/x, b/x x/a, x/b	Effect of the distance between the fractions for both x/a and x/b, and a/x and b/x Effect of the congruence of the components Effect of the non-specific negative priming of natural numbers by x/a and x/b	10- & 12- year olds	Meert et al., 2010a
a/x, b/y	Effect of the distance between the fractions	Adults ²	Meert et al., 2010b
a/x, standard b/y	Effect of the distance between the fractions	Adults ^{3,4}	Schneider & Siegler, 2010
<i>Familiar fractions (1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/4)</i>			
a/x, b/x x/a, x/b a/x, b/y	Effect of the distance between the fractions	Adults ¹	Kallai & Tzelgov, 2009
a/x, N (0 to 4)	Effect of the distance between the fraction and the natural number	Adults ¹	Kallai & Tzelgov, 2009
<i>Proper fractions (< 1) and improper fractions (> 1)</i>			
a/x, standard 1	Effect of the distance between the numerators after the transformation of 1 into 5/5	Adults ²	Bonato et al., 2007
a/x, N (1,2,4,6,8)	Faster responses for proper fractions than for improper fractions, which suggests that the participants compared the denominator and the numerator for all fractions and that they processed the holistic value only for improper fractions	Adults ¹	Kallai & Tzelgov, 2009
a/x, b/x x/a, x/b a/x, b/y	Effect of the distance between the fractions on the activation within the intra-parietal sulcus Behavioural and fMRI data suggesting componential strategies	Adults	Ischebeck et al., 2009

Note: N = natural number; a/x and b/x = fractions with common denominators; x/a and x/b = fractions with common numerators; a/x and b/y = fractions without any common components. ¹ Students of engineering, physics or IT; ² students of psychology or behavioural sciences; ³ students from a selective university with high mathematics-achievement test scores; ⁴ students from a community college with open admissions

Behavioural data suggesting that adults access holistic numerical representations during the intentional processing of fraction magnitudes have recently been supported by fMRI data. Ischebeck, Schocke and Delazer (2009) reported a relationship between the activation of the right intra-parietal sulcus and the distance between the fractions being compared. Pairs were made up of proper or improper fractions, with or without common components. However, the participants in this study probably also used componential strategies. Both the distance between the fractions and the distance between their components influenced the behavioural data. Additionally, the complexity of the componential strategy needed for each type of pair modulated the behavioural data and the large-scale activation of different areas of the brain ².

Kallai and Tzelgov (2009) have expanded our knowledge of the repertoire of strategies available in magnitude-comparison tasks on fractions. They showed that the activation of a holistic representation and the use of componential strategies are not the only ways of processing the magnitude of fractions: adults can also associate all fractions with a constant value called a generalised fraction. For instance, when adults compared proper fractions (from $1/2$ to $1/9$) to natural numbers (from 1 to 9), the response times depended on the distance between a constant value below 1 and the natural number. This distance effect indicates that the participants associated a constant value below 1 with all proper fractions, and that this generalised fraction and the natural numbers were represented on the same mental continuum.

² Methodological issues mean that these results must be treated with caution. Ischebeck et al. (2009) used four types of pairs and hypothesized a specific componential strategy for each type. They assumed that these componential strategies varied in complexity. Performance would be modulated by this complexity if the participants used these strategies. However, the four types of pairs were not matched for the distance between the fractions, the congruence of the components, or the possibility of simplification. Moreover, the criteria for the complexity of the componential strategy were far from clear: Ischebeck et al. sometimes referred to the number of processing stages, sometimes to the conceptual congruence, and sometimes to the numerical congruence. Furthermore, the distance between the components was sometimes manipulated for the numerators and sometimes for the denominators, without distinction in the subsequent analyses. Finally, the analysis of the distance effects was made without distinguishing between pairs of proper and improper fractions.

In summary, these results indicate that adults can represent the magnitude of fractions mentally, but that they mix the use of such a representation with componential strategies and the use of a generalised fraction. The relative demands of each strategy and its efficiency in each situation seem to determine the processing of the magnitude of fractions. For several numerical tasks (e.g., arithmetic problem solving, approximate quantification), it has been suggested that the participants have several strategies available and that they try to choose the fastest and most accurate one (e.g., LeFevre, Bisanz, Daley, Buffone, Greenham, & Sadesky, 1996; LeFevre, Sadesky, & Bisanz, 1996; Lemaire & Arnaud, 2004; Siegler, 1999). Activating a holistic representation may be more time- and resource-consuming than using a componential strategy, which could in turn be more demanding than relying on a generalised fraction. Adults may thus associate fractions with a constant value below 1 when they are comparing proper fractions to natural numbers (see Kallai & Tzelgov, 2009), due to its efficiency in this task. For the comparison of fractions, when a componential strategy (based on conceptual knowledge and the regularity of the stimuli) is efficient, adults select it (see Bonato et al., 2007). They only activate the mental representation of the magnitude of fractions when a componential strategy is not efficient for all the pairs or cannot be identified using conceptual knowledge (see Studies 1 & 3; see also Schneider & Siegler, 2010).

In addition to the experimental context, the strategy used also seems to depend on characteristics of the fractions. For instance, the mental representation of the holistic value of familiar fractions can be accessed even when a generalised fraction would have been efficient (see Kallai & Tzelgov, 2009). By contrast, the presence of common denominators seems to encourage the direct comparison of the numerators even when this componential strategy is not efficient for all the pairs (see Study 1).

Individual factors could also determine the type of processing. Several studies of adults have contrasted the performance of groups expected to differ in their knowledge of fractions. Schneider and Siegler (2010) showed, in a magnitude-comparison task, a stronger effect of the distance between fractions for students from a very selective university (with high mathematics-achievement test scores) than for students from a community college with open admission. The students at the selective university were also faster and more accurate than those at the community college. However no significant differences were found between the performance of students of psychology or behavioural

sciences (the “low” skilled sample) and students of physics, engineering or IT (the “high” skilled sample) (Bonato et al., 2007; Kallai & Tzelgov, 2009). This might be explained by: (1) the fact that all the participants were university students who had successfully completed their secondary schooling; (2) the lack of any information on the extent to which the groups actually differed in their level of conceptual knowledge, procedural knowledge and/or experience with fractions. Furthermore, the strategy selected may depend on age: comparison of the results of Study 1 and Study 2 (below) shows that children do not process fractions in the same way as adults.

1.1.2 Overview of the findings in children (Study 2)

To the best of our knowledge, Study 2 represents the first attempt to test the mental representation of fraction magnitudes in children who were able to correctly compare fractions with common components (51% of the initial sample of 10-year-olds and 81% of the 12-year-olds). The same design was used as for the adults in the first experiment in Study 1. The children were asked to compare fractions with common denominators, and fractions with common numerators. For both types of pairs in both age groups, performance depended on the distance between the fractions. This suggests that pre-teen children are able to represent the magnitude of symbolic ratios in an approximate way. This ability could be rooted in the early ability to process non-symbolic numerical ratios (McCrink & Wynn, 2007), and perhaps in the early ability to process non-numerical ratios (Duffy, Huttenlocher, & Levine, 2005; Mix, Levine, & Huttenlocher, 1999; Sophian, 2000). This needs to be investigated further. Our results do not eliminate the hypothesis that learning fractions is complex, since our participants were 10- and 12-year-olds who had been selected for their good performance. However, the source of difficulties should be explored in the light of these children’s ability to represent fraction magnitudes mentally.

Children and adults processed fraction magnitudes differently in the same task. Whereas children processed the holistic value of fractions for all pairs, adults used this strategy for one type of pair and a componential strategy for the other type. The children seemed to be less flexible in their use of strategies: their repertoire might be limited, their choice of available strategies less efficient, or the execution of several strategies less efficient (see Siegler, 1999). These strategic aspects should be investigated developmentally. This could be a new avenue for exploring the difficulties children have in processing fractions.

1.2 Second experimental issue: Is the magnitude of the components also processed and does this componential processing interfere with the processing of the fraction magnitude?

In a magnitude-comparison task, the relative magnitude of the denominators and the numerators can be congruent or incongruent with the relative magnitude of the fractions. Studies 1 and 2 tested the effect of the congruence of the components in adults and school-age children. Participants' performance on fractions with common denominators (congruent trials) and on fractions with common numerators (incongruent trials) was compared. Both adults and 10- and 12-year-old children performed worse on incongruent trials than on congruent ones. This difference may be due to the magnitude of the denominators interfering with the magnitude of the fractions. In children, an alternative interpretation in terms of the type of processing can be ruled out, since the distance effect indicates that, for both types of pair, children access the mental representation of the magnitude of the fractions. By contrast, this alternative interpretation may be valid for adults, whose processing of the two types of pair was different (direct comparison of the numerators for fractions with common denominators and accessing the holistic representation for fractions with common numerators). Nevertheless, the priming data summarised below confirms the interpretation in terms of a congruence effect. Kallai and Tzelgov (2009) also showed that the congruence of the denominator during the numerical comparison of unit fractions to natural numbers (from 1 to 9) had an effect: performance was poorer for incongruent than for congruent trials. In the congruent trials, both the denominator and the fraction were smaller than the natural number (e.g., $1/3 < 5$ and $3 < 5$). In the incongruent trials, the denominator was larger than the natural number whereas the fraction was smaller than the natural number (e.g., $1/7 < 5$ but $7 > 5$).

A priming paradigm was used in Studies 1 and 2 to test whether the processing of the denominators was inhibited during the correct comparison of fractions. The comparison of fractions with common denominators and fractions with common numerators primed the comparison of natural numbers. These natural numbers were similar to the previous denominators or numerators (specific priming) or different from all the fraction components (unspecific priming). In children, a negative priming effect was shown in both the specific and the unspecific priming by fractions with common numerators, relative to a control priming condition (priming by non-numerical stimuli). This suggests that the comparison of denominators was inhibited. In adults, the negative priming effect only occurred with specific priming, suggesting that inhibition operated later, on the cognitive response selected by the comparison of the denominators (Fig. 1). This difference between children and adults could be linked to the difference in the processing of the fraction magnitudes. In adults, inhibition could only occur after the direct comparison of the components for fractions with common numerators, because they were processing fractions with common denominators componentially in the same task.

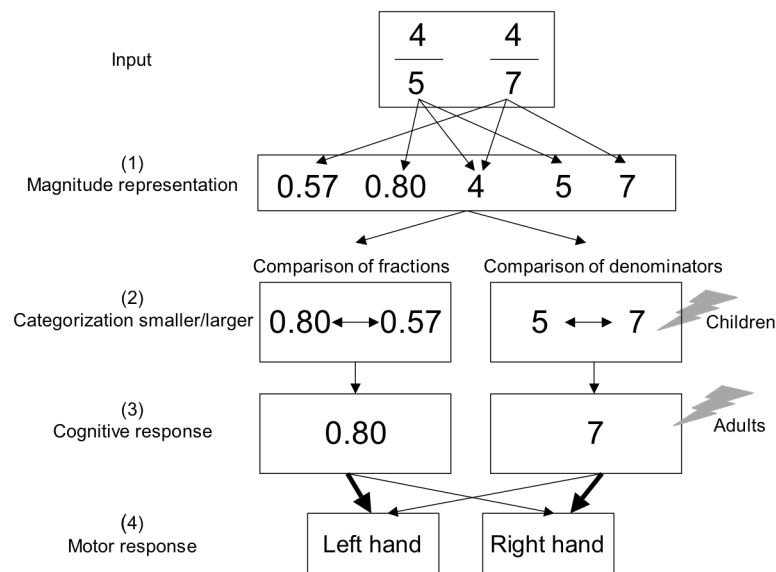


Figure 1. Locus of inhibition (indicated by lightning) during the numerical comparison of fractions with common numerators. (1) The mental representation of the magnitude of the components and of the magnitude of the fractions is activated (the issue of access to these representations will be discussed below). (2) The relative magnitude is processed for both the fractions and the denominators; inhibition occurs at this stage in children. (3) The larger number is selected; inhibition occurs at this stage in adults. (4) The motor response matched to the larger number is activated.

In Studies 1 and 3, performance was poorer when the congruence of the components varied from one trial to another (conditions with fillers) than when it was constant (conditions without fillers). This was true even when the effect of the distance between the fractions indicated that the participants had compared the magnitude of the fractions in both contexts. The effect of variability of the congruence of the components indicated that the relative magnitudes of the components were being processed, and that the processing of the fraction magnitude was hybrid (i.e., both access to the holistic representation and comparison of the components³ were used).

In summary, it appears that the relative magnitude of the components is processed during the comparison of the holistic value of fractions (i.e., hybrid processing occurs). Since the relative magnitude of the components may be incongruent with the relative magnitude of the fractions, the processing of the relative magnitude of the components may interfere with the processing of the relative magnitude of the fractions. Inhibition allows this interference to be controlled. Accordingly, in addition to the acquisition of the concept of a fraction suffering from interference by knowledge of natural numbers (what Ni and Zhou (2005) called a whole number bias), children also have to manage interference by the magnitude of the components with the processing of the magnitude of the fractions (Stroop-like phenomenon). Further research should specify and distinguish these two sources of difficulties in order to improve our understanding of children's difficulties in learning and processing fractions.

³ Fractions with common components were added as fillers in Study 3, which might have induced componential strategies for some trials. This hypothesis is partly supported by a significant effect of the distance between the numerators on the response times for both the experimental and filler pairs in one of the conditions with fillers.

1.3 Third experimental issue: Is the processing of fractions more complex than the processing of non-symbolic ratios? Do the properties of the holistic representation differ between fractions and non-symbolic ratios?

In Study 4 we set out to investigate the specificity of the processing of fraction magnitudes. Fractions are symbolic ratios between two discrete magnitudes. The impact of the symbolic notation and of the discreteness of the components was tested for the first time in our study. We compared adults' performance on symbolic ratios (fractions), non-symbolic numerical ratios (collections of dots) and non-numerical ratios (surface areas) directly. The participants were presented with ratios in each format and asked to produce a non-numerical ratio equivalent to the input ratio by filling up a virtual glass using a potentiometer. We found that their estimates of fractions were less variable and closer to the actual magnitude than the estimates of non-symbolic ratios. This result is at odds with the hypothesis that the symbolic notation impedes the processing of the ratio magnitude in adults. However it is consistent with the hypothesis (originally developed for natural numbers) that the approximate mental representation of numbers is more precise for symbols than for collections (Verguts & Fias, 2004). The human ability to represent numbers by symbols may lead to more precise mental numerical representations.

Children were recently tested with the same experimental design in order to explore the age at which the symbolic notation allows a more precise representation to be activated (Meert, Grégoire, & Noël, in preparation). Preliminary data show that the 11-year-olds' estimates were less variable for fractions with small components (< 5) than for non-symbolic ratios. However, with large components (from 21 to 29) the estimates deviated more from the actual magnitude for fractions than for non-symbolic ratios. Performance on non-symbolic ratios did not differ between children and adults, but performance on fractions did. These results indicate that, at the age of 11, the gain in accuracy due to the symbolic notation is limited to fractions with small components (the most familiar ones), and that the improvement in the processing of ratios between 11 years of age and adulthood occurs mainly in symbolic ratios. Substantial experience with symbolic notation is necessary to achieve a gain in accuracy. The absence of differences between children and adults in estimating non-symbolic ratios is consistent with the pre-verbal ability shown by McCrink & Wynn (2007) on numerical ratios, and that on non-numerical ratios

demonstrated by children before they receive systematic instruction (Duffy et al., 2005; Mix et al., 1999; Sophian, 2000).

Turning to discreteness, adults' estimates of non-symbolic numerical ratios were as variable and as close to the actual magnitude as their estimates of non-numerical ratios. The only exception was a gain in accuracy for numerical ratios when the dot collections were in the subitising range. The same level of performance for both types of ratios is not consistent with the hypothesis that representing the magnitude of a part/whole ratio is more complex when the components are discrete than when they are continuous. This hypothesis was suggested on the basis of the difficulties school-age children have in processing non-symbolic numerical ratios (see Jeong, Levine & Huttenlocher, 2007; Ni & Zhou, 2005), and on the evidence for adults' use of componential strategies for processing symbolic numerical ratios (see Bonato et al., 2007; Kallai & Tzelgov, 2009).

The absence of behavioural differences between the numerical and non-numerical non-symbolic ratios contrasts with fMRI data from adults recorded by Jacob and Nieder (2009b). They used an adaptation design to investigate the processing of ratios of lengths and ratios of collections⁴, and found that, in both formats, the blood oxygen level-dependent (BOLD) signal recovery depended on the numerical distance between the adapted ratio and the deviant ratio. This suggests that populations of neurons are tuned to particular proportions. This distance effect was stronger for ratios of collections than for ratios of lengths, which might indicate greater neuronal discrimination for ratios of collections. The discrepancy between Jacob and Nieder's results and those of our Study 4 may indicate that the population of neurons Jacob and Nieder identified is not the only one contributing to the behaviour we explored in our experiment. This hypothesis is plausible since these studies used different tasks. Whereas Jacob and Nieder used a passive viewing task, we used an active estimation task that required a response in a specific format. Furthermore, this response modality was more similar to ratios of surface areas than to ratios of collections. This means that we cannot rule out the suggestion that ratios of collections are represented more accurately than ratios of surface areas. Finally, the comparison of performance in the two formats is hindered by the fact that the processing of the ratio magnitude could differ between numerical and non-numerical ratios (see below).

⁴ Their stimuli were not controlled for the covariation of the numerical ratio with the ratio of the total surface areas of the dots.

In summary, symbolic notation seems to allow adults to activate a more precise representation of ratio magnitudes. The discreteness of the components does not appear to impede the processing of the ratio magnitude, as the same level of performance was shown for numerical and non-numerical ratios in our experiment. Further research should test whether the magnitude representation is the same for fractions, non-symbolic numerical ratios and non-numerical ratios. This issue will be discussed further below, when we present the theoretical implications of our research.

1.4 Fourth experimental issue: Is the mental representation of the holistic value of a fraction accessed by activating the mental representation of the magnitude of its components and processing their numerical relation (indirect access)?

In our research, we hypothesised that the mental representation of the fraction magnitude could be accessed by activating the approximate mental representation of the magnitude of the components and by processing their multiplicative relation (division and/or multiplication). An approximate magnitude (e.g., ~ 0.25) can be represented by an infinite number of fractions (e.g., $1/4$, $2/8$, $2/9$, $3/12$, $7/29$), some of which cannot be reduced by an exact simplification procedure. The indirect access would explain how the mental representation of the approximate magnitude (e.g., ~ 0.25) is activated from any of its many representations. Study 4 produced data consistent with the indirect-access hypothesis, although further research still needs to be carried out to develop our understanding of access to the magnitude of ratios. In the magnitude-estimation task, the numerical size of the components was manipulated while keeping the magnitude of the fractions approximately constant. The results show that the size of the components influenced the variability and the accuracy of the estimates. The mental representation of a magnitude (e.g., ~ 0.25) became more variable as the numerical size of the components increased (e.g., $1/4$, $2/9$ and $7/29$), suggesting indirect access through the transformation of the magnitude of the components.

The numerical size of the components also influenced the variability and the accuracy of the estimates of non-symbolic numerical ratios (collections of dots). This result suggests that symbolic and non-symbolic ratios involving discrete quantities are processed in the same way. By contrast, the size of the components did not influence the estimates of non-numerical ratios (surface areas), suggesting that the magnitude processing differed for numerical and non-numerical ratios.

The ability to apply multiplicative transformations to the approximate number representations could be involved in the processing of the magnitudes of numerical ratios. This ability has been shown in children for non-symbolic stimuli. Children are able to represent half of a collection mentally (Barth, Baron, Spelke, & Carey, 2009), or to multiply a collection by two, four, or two and a half ($5/2$) (McCrink & Spelke, 2010), before comparing the result to a third collection. Their performance demonstrates the critical ratio signature of the approximate number system. The effect of the numerical size of the operands has not been tested for approximate division and multiplication, but has been explored for approximate addition and subtraction. The size of the operands was the main source of variability in adults' production of an estimated sum or difference (Cordes, Gallistel, Gelman, & Latham, 2007; see also Barth, La Mont, Lipton, Dehaene, Kanwisher, & Spelke, 2006; McCrink, Dehaene, & Dehaene-Lambertz, 2007). Furthermore, studies on approximate multiplication and division have not identified the mechanism by which the operation is performed. This issue will be discussed in Section 2 on theoretical implications, in the framework of the mental number line model and the accumulator model.

Our results do not rule out that possibility that the mental representation of ratio magnitudes can be accessed directly by a learned mapping procedure. This direct access could occur for familiar fractions. Familiar fractions probably are those with very small components that occur frequently in everyday life ($1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, and $3/4$). For these fractions, the effect of the numerical size of the components could persist because direct mapping would be acquired by repeated indirect access. In other words, the mental representation could be activated in a direct way that retains the imprint of the indirect access. This issue should be tested by using more sensitive measures, such as response times, during the processing of familiar and unfamiliar fractions. In Study 4, the effect of the size of the components was not limited to the difference between familiar and

unfamiliar fractions. This indicates that this effect is not explained simply by the degree of familiarity of the fractions; it occurs for unfamiliar fractions as well. The estimates were less variable and more accurate for ratios such as $2/7$ and $7/9$ (ratios with medium-sized components) than for ratios such as $7/23$ and $16/21$ (with large components).

Study 4 aimed to test the approximate mental numerical representation activated by fractions made up of components of varying numerical size. With that aim, we presented adults with irreducible fractions representing approximately the same magnitude. These fractions were presented in a task requiring approximate processing. These methodological choices limit the generalisability of our conclusions. The simplification procedure is extensively trained during school lessons on fractions, so that fractions are processed using the smallest possible components. In a task that involves reducible fractions and that focuses on the accuracy of the response, children and adults probably use this procedure before accessing the mental magnitude representation.

Finally, the results of Study 4 allowed us to further specify the influence of the magnitude of the components in the magnitude-comparison task. A subjective distance was computed from the results of the magnitude-estimation task for each of the fractions to be compared. This distance, which took into account the variability of the estimates, was the best predictor of response times for the comparison of fractions without common components. This result supports the idea that the mental representation activated in the comparison task was analogue, approximate, and dependent on the magnitude of the fraction components. The processing of the magnitude of the components could be involved in the activation of the mental representation of the fraction magnitude. In parallel to the processing of the multiplicative relation of the components within each fraction, the components would be compared between the fractions (inter-fraction componential processing), and this might create interference.

2 Theoretical implications

In this section we will first consider the hypothesis that the mental representation of the magnitude of fractions is automatically activated. Then we will suggest a mechanism that could generate the magnitude of fractions from the magnitude of their components in the framework of the mental number line and accumulator models. Finally, possible sources of the whole number bias will be discussed in the light of the current data.

2.1 Intentional vs. automatic access to the mental representation of the magnitude of fractions

Our research has only tested intentional processing of fraction magnitudes. We have suggested that adults possess several strategies for comparing fractions digitally and that they choose the strategy that is fastest and most accurate in the experimental context. Accessing the magnitude of fractions is one of these strategies. Although it enables the task to be performed correctly in every context, adults prefer to use alternative strategies in some contexts. This suggests that the activation of the mental representation of the fraction magnitude could be relatively resource-demanding.

At first sight, this analysis is not consistent with the hypothesis that fraction magnitudes are processed automatically. However it does not rule out the automatic-processing hypothesis, in that intentional processing could be “contaminated” by explicit knowledge derived from mathematics classes. Mathematics lessons do not encourage an approximate sense of the magnitude of fractions, but focus on the exact processing of fraction components, using methods such as the common-denominator search procedure and cross-product computation. These rely on previous verbal knowledge of counting and natural numbers. The hypothesis that the processing of the fraction magnitude is automatic needs to be tested directly. Two variants can be suggested. The mental representation of the fraction magnitude could be automatically retrieved from symbols. Alternatively, the algorithm that approximates the ratio could be automated. Whereas the first hypothesis restricts the automatic processing to familiar fractions, the second does not.

Data on this issue have recently been published, but they are not sufficient to draw firm conclusions. Kallai and Tzelgov (2009) found evidence of automatic activation only for the mental representation of a generalised fraction (i.e., a constant value smaller than 1). This representation was probably activated by the structure of the fraction, as it occurred when a fraction was compared to a natural number on the basis of their physical size on a screen. By contrast, the numerical value of fractions did not interfere with the processing of their physical size when the task was performed on unit fractions (i.e., fractions with numerator 1; e.g., $1/5$ and $1/3$), on fractions with common components (e.g., $4/8$ and $4/6$, or $2/6$ and $4/6$), and even on familiar fractions (e.g., $1/4$ and $2/3$). Familiar fractions are the best candidates for automatic retrieval of the mental representation of the fraction magnitude from symbols. However, the processing of the physical size could be too fast for the fraction magnitude to have any chance of interfering with it. We suggest testing whether the magnitude of fractions can interfere with the processing of their physical size, taking into account the possibility that access to the magnitude of fractions is slower than the processing of the physical size. This could be done by presenting the fractions first in the same size, and then differing in size (see Mussolin, 2002). Alternatively, we could test whether the magnitude of the fractions interferes with the processing of the magnitude of the components, by first presenting the fractions and then colouring the components to be compared.

Jacob and Nieder (2009a) interpreted fMRI data from an adaptation design as evidence of the automatic processing of the numerical value of fractions. During the adaptation phase, adults were shown Arabic fractions representing approximately the same magnitude (e.g., $1/6$, $2/11$, $3/19$). Next, a fraction representing another magnitude was presented either in the Arabic notation (within-notation condition) or in the verbal notation (cross-notation condition). The participants were only asked to attend to the features of the visual display. During the adaptation phase, the BOLD signal mainly decreased in the anterior intra-parietal sulcus. However deviant fractions led to an increase in this signal that depended on the numerical distance between the deviant fraction and the previously habituated fractions. This distance effect was not modulated by the condition. The areas activated within the anterior parietal sulcus partially match the areas dedicated to the processing of natural numbers (see Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003). These fMRI data suggest that the magnitude of fractions is represented by an abstract analogue continuum. Jacob and Nieder drew stronger conclusions by claiming that their data indicated that there is a

common mental representation for fractions and for natural numbers, and that fraction magnitudes are processed automatically. We do not find this conclusion convincing, because the absence of any specific instruction may have not prevented the participants from processing the magnitude of the fractions intentionally. This hypothesis is plausible because each fraction was presented for 500 ms and the inter-stimulus interval was quite long (1200 ms), making the processing of their magnitude possible. Furthermore, participants might pay attention to the magnitude, as all the functions of a fraction (as a splitting operator, a fragmented magnitude, a numerical relation, or a rational number) are linked to the magnitude.

2.2 Extension of the models of mental magnitude representation to ratios

Study 4 produced data suggesting that access to the mental representation of the magnitude of numerical ratios was indirect. The results suggest that the magnitude is represented on a continuum, after the mental representation of the magnitude of their components has been transformed. In other words, the magnitude of numerical ratios is computed internally. How can current models of mental representations of magnitude be extended to include the ability to represent ratio magnitudes in an approximate way? What mechanism could generate the mental representation of the ratio magnitude from the mental representation of the magnitude of the components?

So far, no model has specified this mechanism, probably because most researchers have assumed that processing ratios is beyond the scope of the approximate number system (see, for example, Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004; Wynn, 1998). Gelman and her colleagues (Gallistel & Gelman, 1992; Hartnett & Gelman, 1998) stressed the mismatch between the pre-verbal counting mechanism and fractions. However, in the accumulator model, using pre-verbal counting allows a mental numerical representation to be generated from a collection of discrete items. On its own, this mechanism is insufficient to produce a mental representation from a numerical relation between two discrete magnitudes. Gallistel and Gelman (2000) argued that the mental representation of magnitudes along a continuum allows the magnitude of real numbers to be represented mentally, but they did not suggest a mechanism for this. Since we now have data which suggests that adults and children can access approximate mental representations of the magnitude of fractions, we should

examine the question of the mechanism in the framework of the compressed number line and accumulator models.

2.2.1 The compressed number line model

The most popular model of numerical cognition assumes that the mental numerical representations are organised along a continuum (the mental number line) with a logarithmic compression (Dehaene, 1992). This model explains the numerical-distance effect by the overlap of representations, and the size effect by the compression of large numbers. The variability of the representation is assumed to be constant across magnitudes. What transformation could be applied to the logarithm of the objective magnitudes of the components to get the mental representation of the magnitude of a ratio? That's easy: subtraction of the mental magnitudes activated by the numerator and by the denominator would result in the mental magnitude of their ratio, as the difference between the logarithms of two values equal the logarithm of their ratio [$\text{Log}(a/b) = \text{Log}(a) - \text{Log}(b)$]. For instance, the mental magnitude of $2/5$ could be generated by the subtraction of the mental magnitudes of 2 and 5 [$\text{Log}(2/5) = \text{Log}(2) - \text{Log}(5)$] (see Figure 2). This implies an extension of the number line to the left of the mental representation of 1 to include the mental magnitudes of ratios smaller than 1 which result from the subtraction of the mental magnitudes of the components.

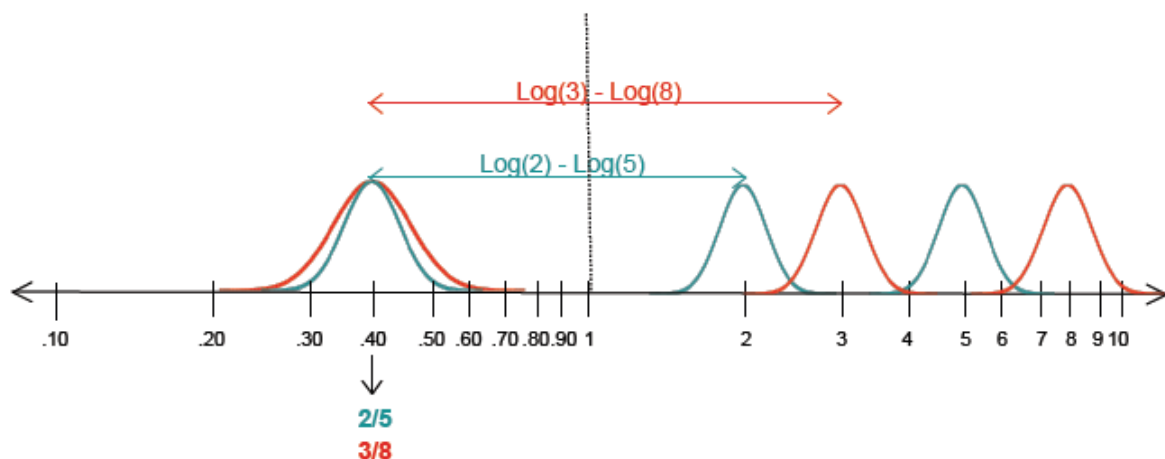


Figure 2. Extension of the compressed mental number line to the representation of ratio magnitudes. Each component activates the representation of its magnitude on the mental number line. The subtraction of these representations leads to the representation of the magnitude of their ratio. For a given magnitude, the representation is fuzzier for ratios of large components (e.g., $3/8$) than for ratios of small components (e.g., $2/5$), due to the compression of the line towards large components.

In this model, the mental representations of the magnitudes between 0 and 1 would be compressed towards 1 (Fig. 2). The representations of the ratios close to 1 would overlap more than the representations of the ratios close to 0, making the discrimination of larger ratios more difficult than discrimination of smaller ones. For a given objective distance, the subjective distance would be smaller for ratios close to 1 than for ratios close to 0. For instance, the subjective distance would be larger between $1/4$ and $2/4$ than between $2/4$ and $3/4$, although the objective distance is 0.25 in both cases. The results of our study did not indicate that any such compression had occurred. Study 4 showed that the variability of the estimates was lower for ratios close to 0 and 1 than for ratios around 0.5. This effect could be due to the modality of the response (filling up a virtual glass, so producing a non-numerical ratio), rather than nature of the mental magnitude representation. The low variability of ratios close to 0 and 1 was probably due to the landmarks (the bottom and the top of the virtual glass) which are inherent to the task of producing a part/whole ratio. This type of effect has already been shown in a task where participants were asked to place an Arabic number on a number line with 0 at the left and 100 or 1000 at the right (Siegler & Booth, 2005; Siegler & Opfer, 2003). The participants processed the number line as a whole and then adopted proportional reasoning to place the number (for example, they might divide the number line into quartiles, leading to lower variability around these landmarks).

Dehaene (2003) reported that Nieder and Miller (2003) had shown that the behavioural and neural tuning curves were asymmetric when plotted on a linear scale. This supports the idea of a compressed number line. In attempting to apply these results to ratios, we have re-examined the data reported by Nieder and his colleagues. Their studies on fractions (Jacob & Nieder, 2009a) and non-symbolic ratios (Jacob & Nieder, 2009b) in human adults always used deviant ratios of a greater magnitude than the previously habituated ratio, making it impossible to judge the asymmetry. This issue should be put to the empirical test.

An additional assumption is needed to explain the effect of the size of the components. The same approximate magnitude would be activated for $3/8$ and $11/28$, but the representation would be “fuzzier” for $11/28$ than for $3/8$. So, whereas the variability of the representation is assumed to be constant across the absolute magnitudes in the mental number line model, we have to assume that the variability of the representation of the relative magnitudes varies with the magnitude of the components. Accordingly, at least two factors contribute to the variability of the representation of the ratio magnitude: the magnitude of the components and the magnitude of the ratio. The relative contribution of each source should be tested.

The extended compressed number line model has the advantage of postulating a simple mechanism to generate a magnitude from any ratio of two discrete magnitudes. This model can explain the processing of the magnitude of numerical ratios, no matter whether these ratios are symbolic (i.e., fractions) or non-symbolic (i.e., the ratios of collections). Direct access to the mental numerical representation of the ratio magnitude can be also hypothesised for familiar fractions. Until recently, there had been little empirical support for the hypothesis of a mental magnitude system that is common to the processing of natural numbers and numerical ratios. Kallai and Tzelgov (2009) found an effect of the numerical distance between a familiar fraction and a natural number during numerical comparisons. Jacob and Nieder (2009b) demonstrated considerable overlap of the cerebral areas dedicated to the processing of numerosities and that of numerical ratios in humans. The similarity of the effects for natural numbers and for numerical ratios – the distance effect on the behavioural performance, and neuronal activities – suggests at least a common coding scheme (Jacob & Nieder, 2009a, 2009b).

Nevertheless, the compressed number line has some difficulty in explaining performance on approximate addition and subtraction. Dehaene and his colleagues suggested that approximate addition and subtraction could be analogous to moving spatial attention along the mental number line (Dehaene, 2007; Hubbard, Piazza, Pinel, & Dehaene, 2005; Knops, Viarouge, & Dehaene, 2009; McCrink et al., 2007). The locus of activation would be shifted rightwards for addition and leftwards for subtraction. In other words, the mental representation of the magnitude would be dynamic and updated to lead to the sum or the difference between the operands. However, the mechanism by which addition and subtraction are computed is unknown. Adding or subtracting the mental

representations on such a compressed mental number line is equivalent to multiplying or dividing the magnitudes [$\text{Log}(a) + \text{Log}(b) = \text{Log}(a*b)$ and $\text{Log}(a) - \text{Log}(b) = \text{Log}(a/b)$]. To get round this, Dehaene and his colleagues have suggested that the compression is “undone” before the transformation is applied to the magnitude of the operands. This hypothesis implies that processing the magnitude of a ratio is less complex than adding or subtracting. However, the decompression hypothesis is challenged by empirical data. Like the processing of the magnitude of the ratio, the mental representation of a sum or a difference depends on the numerical size of the operands (Barth et al., 2006; Cordes et al., 2007; McCrink et al., 2007). This effect cannot be explained by logarithmic compression if this compression is undone before performing the operation.

2.2.2 *The accumulator model*

The origin of the variability of the magnitude representation is still debated. This leads us to consider the extension of the accumulator model to the representation of ratios. According to this model, the mental magnitude representation increases linearly with the objective magnitude (linear scale), as does its variability (scalar variability). What mechanism could generate the magnitude of a ratio from the magnitude of the components in such a model? Tentatively, we suggest that the magnitude of each component could be accessed and superimposed, since the whole includes the part in the case of a part/whole judgment. A process of normalisation of the size of the whole, and a rescaling of the size of the part according to that of the whole, would allow the ratios to be ordered according to their magnitude and then judged according to their relative magnitude (Fig. 3). The variability of the representation would then depend on the magnitude of the components.

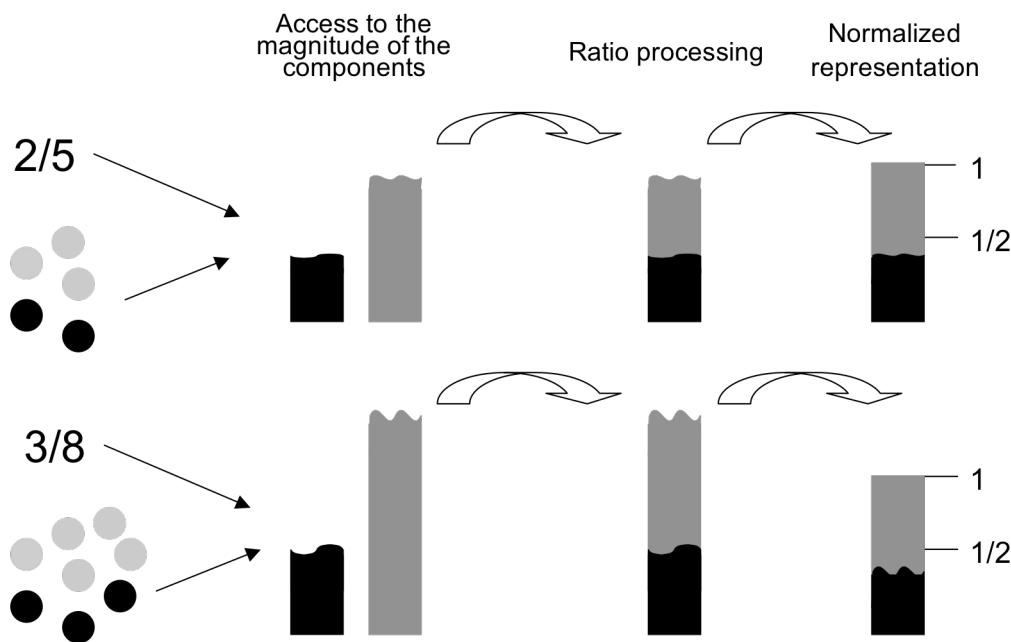


Figure 3. Extension of the accumulator model to the processing of the magnitude of ratios. Processing the magnitude of fractions and non-symbolic numerical ratios involves first accessing the mental magnitude of each component, followed by the processing of their ratio, and finally the normalisation of the size of the whole and a rescaling of the size of the part according to that of the whole. The variability of the representation of the ratio magnitudes depends on the numerical size of the components.

In the accumulator model, the mental magnitudes represent both discrete and continuous magnitudes. Our data did not allow us to conclude that the same representation of magnitudes is used for numerical ratios (fractions and the ratios of collections of dots) and non-numerical ratios (the ratios of surface areas). Indeed, the processing of numerical and non-numerical ratios differed in that the size of the components only had an effect on numerical ratios. The participants might have used perceptive strategies for non-numerical ratios (possibly due to the greater stimulus/response compatibility) without activating an approximate magnitude representation. Alternatively, they might have labelled the non-numerical ratios by familiar fractions (fractions with small components) and thereby activated the mental numerical representation from these symbolic ratios. Further research should test this issue by using a design forcing the participants to access a semantic representation. The question of whether numerical and non-numerical ratios share a common mental numerical representation would thus join the debateable issues of a

common representation for numerosities and continuous magnitude, such as space, time, surface area, and length (e.g., Feigenson, 2007; Walsh, 2003). Jacob and Nieder (2009b) showed a filter property for both ratios of collections (numerical) and ratios of lengths (non-numerical), and a strong overlap between the regions of the brain dedicated to the processing of these ratios, which in turn overlapped considerably with the regions dedicated to the processing of numerosities. These results suggest that numerical and non-numerical ratios have a common coding scheme.

2.3 The whole-number bias

Most studies of children have analysed the obstacles to the learning of fractions. The main source of difficulties seems to be the whole-number bias: children tend to apply their knowledge of counting and natural numbers to fractions (Ni & Zhou, 2005). Two hypotheses have been put forward to explain this bias. According to the innate-constraint hypothesis, the mechanism that generates the mental numerical representation is not appropriate for numerical ratios. Hartnett and Gelman (1998) suggested this, on the basis of the accumulator model in which the numerical mental representations are generated by a pre-verbal counting mechanism, restricting these representations to natural numbers. Children would try to assimilate fractions to this mechanism. According to the symbolic-constraint hypothesis, the whole number bias is specific to symbolic ratios due to the use of the same symbols to represent the natural numbers and fraction components (e.g., Mix et al., 1999). The innate-constraint hypothesis is, however, inconsistent with infants' ability to process non-symbolic numerical ratios (McCrink & Wynn, 2007). In the previous section, we have made suggestions about the mechanisms that would allow a magnitude to be generated from the numerical relation between two discrete components. The symbolic-constraint hypothesis is challenged by the fact that the whole-number bias is not specific to fractions. School-age children also use counting strategies during the processing of non-symbolic ratios (e.g. Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Jeong et al., 2007).

None of these hypotheses is thus supported by the current data. The whole-number bias seems to appear in children experiencing school instruction, but is not specific to symbolic ratios. In our opinion, the whole-number bias could have several different sources; these should be tested and distinguished in further research. This distinction could be also useful for professionals who provide support for children with mathematical learning difficulties. First, the use of counting and natural-number knowledge when dealing with fractions could be due to a lack of conceptual knowledge about ratios. This hypothesis might hold for young children, when the pre-verbal sense of ratio is insufficient to perform the task correctly. Second, children may use the knowledge which has been reinforced by systematic instruction, even when they have some conceptual knowledge of ratios. Children usually encounter the systematic learning of fractions at an age at which counting and natural-number knowledge are predominant and access to the magnitude of the numerals is automatic. In addition, systematic instruction in fractions mainly focuses on the procedures for exact computation (common-denominator search and cross-product computation), perhaps intending to rely on natural-number knowledge. Third, despite having a good understanding of ratios, children may fail to control interference from the processing of the components of the fraction, due to poor inhibition control (see the data on the congruence effect and priming in Study 2).

The whole number bias has led to underestimates of children's ability to approximate the magnitude of numerical ratios. Relying on this ability, rather than focusing on the fraction components, could help children to learn the symbolic notation of ratios. In addition, using non-numerical ratios could be helpful in teaching the concept of ratios, because of their insensitivity to interference from natural numbers and counting. Systematic instruction could benefit from using these approaches.

The whole number bias is not specific to symbolic notations. Nevertheless, the symbolisation of ratios is not without repercussions. Although children as young as 9 are able to process the magnitude of fractions in an estimation task (Meert, Grégoire, & Noël, in preparation), some experience with symbolic notation is probably necessary to avoid difficulties at the initial stages, and then to improve in accuracy to an adult level (Study 4).

2.4 Conclusions

Currently, there is no convincing evidence in favour of the automatic processing of fraction magnitudes. The hypothesis of automatic processing should be put to empirical test by investigating whether the magnitude of fractions interferes with the processing of another dimension when the speed of each processing is taken into account. Furthermore, the mechanism by which the mental representation of the fraction magnitude is activated should be investigated. Two suggestions have been made to extend the current models. In the compressed number line model, the mental representation could be activated by the subtraction of the mental representation of the magnitude of the components. In that case, the variability of the mental representations should increase with the magnitude of the components, but also with the magnitude of the ratios (due to their compression toward 1). In addition, processing the magnitude of fractions would be less complex than adding or subtracting two operands, due to the logarithmic compression. In the accumulator model, we have suggested a process of normalisation of the size of the whole and a rescaling of the size of the part according to that of the whole. This model would predict that addition and subtraction would be less complex than the processing of the ratio magnitude due to the additional stage of normalisation for the processing of the ratio magnitude. This model also predicts a common representation for numerical and non-numerical ratios. Finally, we have emphasised that the whole-number bias cannot be due to an inability to represent ratio magnitudes in the mental magnitude system, or to the symbolic notation of fractions. It could have several other causes: insufficient conceptual knowledge for some tasks; a tendency to use the knowledge emphasised in systematic instruction; or poor inhibitory control of interference from the components.

3 Limits and perspectives

In this last section, we will discuss the limits of our methodological choices and will suggest possibilities of improvements. The implication of these choices for the generalisation our conclusions will be underlined. The topic of this discussion will successively be the comparison distance effect, the magnitude comparison task, the measure of the interference effect, the negative priming paradigm, the estimation task and the characteristics of the stimuli.

3.1 Inferring the cognitive processing of the fraction magnitude from the comparison distance effect

Our first three studies used the comparison distance effect to infer the intentional processing of the fraction magnitude (componential strategies vs. holistic representation). This method has two limitations. First, the analysis of the distance effects is impeded by the partial collinearity of the distances. This makes the relative contribution of each distance difficult to test statistically. In order to reduce this problem, in Study 3 we selected pairs of fractions so that the correlations between the distances were minimised. Second, the comparison distance effect can be interpreted in two ways. It could be explained by the properties of the mental number representations (e.g., Dehaene, 1992; Gallistel & Gelman, 1992). Alternatively, it could be due to a non-linear mapping between these representations and the output specific to the magnitude-comparison task (i.e. “left larger” or “right larger”) (Van Opstal, Gevers, De Moor, & Verguts, 2008; see also Verguts, Stevens, & Fias, 2005). This non-linear mapping was obtained when a computational system was trained to compare Arabic numerals according to their frequency in everyday life⁵. The generalisation of this interpretation to fractions has still to be tested. The frequency of fractions needs to be listed, and the system to be trained to compare them, in order to see whether any non-linear mapping is evident. Even if the effect of the distance between the fractions does not reflect the properties of the magnitude representation, it may at least indicate that the comparison involved the holistic value of the fractions.

The magnitude representation could be better tested by the priming distance effect (see for instance Reynvoet, De Smedt, & Van den Bussche, 2009). Designing an experiment to test this effect in a numerical comparison task on fractions could be a challenge. It would involve simultaneously manipulating and controlling the numerous distances between the prime and the probe. Alternatively, the priming distance effect might be investigated by other tasks, such as a naming task (Reynvoet, Brysbaert, & Fias, 2002; Reynvoet &

⁵ After training, large numbers on the left input layer had strong connections with the left-larger output whereas large numbers on the right input layer had weak connections with this output. These connections showed a monotonic increase or decrease. For instance, the combined activation going to the left-larger output node was greater if the model compared 9 (on the left) and 2 (on the right) than if it compared 9 (on the left) and 5 (on the right). The combined activation was larger because the connection strength between 2 and the left-larger output node was greater than that between 5 and this node. Therefore, the activation of the correct output node increased as the distance between the numbers increased.

Brysbaert, 2004). The prime might be masked to avoid the monitoring of the semantic relations between the prime and the probe and the subsequent development of expectations as to what the target might be (Neely, 1991). Nevertheless, this method might not elucidate the mental representation of the fraction magnitudes, given the absence of convincing evidence in favour of an automatic activation of this representation.

3.2 Numerical comparison task and strategic aspects

The numerical comparison task appeared to be a good choice to study the processing of the fraction magnitude. At the time we designed our first study, there was no evidence in favour of a mental representation of the fraction magnitude. Accordingly, we wanted to first investigate intentional processing. Nevertheless, this task is favourable to the development of strategies: the processing of the fraction magnitudes depends on the experimental conditions. It had been suggested that people have several strategies available for some processes (e.g., arithmetic problem solving, approximate quantification), and would usually choose the quickest and most accurate one (e.g., LeFevre, Bisanz, et al., 1996; LeFevre, Sadesky, & Bisanz, 1996; Lemaire & Arnaud, 2004; Siegler, 1999). This hypothesis also applies to the processing of fraction magnitudes. If the context had not been taken into account, wrong conclusions might have been drawn about people's ability to represent the holistic values of fractions mentally. Although Bonato et al. (2007) did not show that fractions were processed holistically, this does not mean that such processing never occurs in any conditions. In our studies, we chose conditions expected to encourage the processing of the holistic value of fractions, because our aim was to test whether adults and children were able to do this processing. We also attempted to reduce the variability of the processing, both between and within the participants, by carefully constructing the stimuli, in order to avoid undesirable variability (which could have masked the effect of our experimental variables). We used irreducible fractions, without denominators which were multiples of each other, and without denominators equal to 10, to avoid simplification, the search for a common denominator, or transformation into decimal numbers.

Despite our efforts to control the strategy used by the participants, it remains possible that a single participant used different methods of processing from one trial to another, and that different participants used different processing for the same trials. For instance, we have shown that children and adults did not use the same processing in the same context (Studies 1 and 2). Whereas children compared the holistic value of the fractions for both types of pairs with common components, adults used this strategy for one type of pairs and a componential strategy for the other type. Further research should investigate the strategic aspects of the processing of the fraction magnitude (strategy repertoire, adaptive choice, and execution efficiency), their development with age, and the factors that influence them. Factors linked to the stimuli (e.g., familiar or unfamiliar fractions, the size of the components), the experimental context (e.g., task, regularity of the stimuli), or the participant (e.g., age, level of conceptual knowledge, experience with numbers, capacity for flexibility) could influence the processing of the fraction magnitudes.

We have frequently suggested that verbal reports can be used in order to assess participants' repertoire of strategies and how often they used each one. We interviewed the participants informally after the experiment. These interviews showed that the participants found it difficult to verbalise how they performed the task (e.g., *"I just know that this fraction is the larger one"*), had a tendency to report a mathematical justification (e.g., *"I learnt that, when the numerators are common, the larger fraction has the smaller denominator"*), and that their verbal reports did not always correspond to the behavioural data. This could be explained by a failure to report processes that are not accessible to introspection, and/or by the method of interview. Future research should interview participants after each trial, perhaps by asking them to choose a strategy from a list of all possible strategies. This method has the limitation that it could in itself affect the processing of the magnitude of fractions. The frequency and efficiency of each strategy could be assessed by a choice/no choice design (Lemaire & Arnaud, 2004). In the no-choice condition, the participants are asked to use a given method of processing, in order to assess its speed and accuracy. In the choice condition, they could use whatever method they chose. This condition assesses the frequency of each strategy and the factors that influence the choice among the available strategies.

3.3 Interference from the magnitude of the components in a magnitude-comparison task

We tested the impact of the congruence of the components on the processing of fraction magnitudes by comparing performance on fractions with common denominators (congruent trials) and fractions with common numerators (incongruent trials). The issue of congruence is specific to the comparison task, where the fractions, the denominators and the numerators can all be compared. The congruence effect could be further investigated by testing its modulation by the numerical distance between the components when the distance between the fractions is kept constant. The event-related potential technique could allow us to identify the temporal course of the processing of fractions and to confirm the level of processing at which interference and inhibition occur (see Szűcs & Soltész, 2007). Finally, the relation between the processing of fractions and the processing of the relative magnitude of a given component (sequential and parallel processing) could be investigated by the eye-fixation pattern recorded by eye tracking. Are the components within a fraction (vertical intra-fraction processing) processed before the components between the fractions (horizontal inter-fraction processing)? Or do participants look for componential strategy before accessing the fraction magnitude? Or do these processes occur in parallel?

3.4 Improving the negative-priming design

The design of our priming procedure could be improved by matching the priming conditions so as to restrict the analysis to trials with the same motor response to the prime and to probe. In Studies 1 and 2, every pair of fractions and every pair of natural numbers required the same motor response in the four priming conditions. The congruence of the motor response between the prime and the probe was controlled in each priming condition, independently of the other conditions. For instance, a given probe could have the same motor response as the prime in the specific-priming condition and the opposite motor response in the unspecific-priming condition. This means that the motor-response priming could have contaminated the priming effect. Furthermore, the participants might have monitored the semantic relation between the prime and the probe, and have developed expectancies because the prime was not masked. The use of a masked prime seemed inappropriate because there was no evidence of automatic processing of the fraction magnitude. This issue is currently still being debated.

3.5 Inferring the properties of the mental magnitude representation from the properties of the estimates produced by the participants

The design of Study 4 had advantages, as well as some limitations, for the investigation of the properties of the numerical mental representation. Adults were asked to produce a ratio equivalent to the input ratio by rotating a potentiometer. This implies the following stages: (1) activating the mental magnitude representation of the input ratio, (2) comparing this representation to the ratio in the glass, and (3) adjusting the response to match the mental representation if the rotation of the potentiometer had not been stopped when the desired magnitude was reached. The response was a ratio of surface areas (i.e., the ratio between the area occupied by virtual water and the total surface area of a 2-D virtual glass). This format was chosen because of possible problems with the alternatives: the production of symbolic ratios might have been restricted to familiar fractions; and the production of a non-symbolic numerical ratio (e.g., blacken a proportion of the dots in a collection) would have implied the use of several sizes for the whole collection according to the parity of the whole in the input (for instance, presenting a whole collection of five dots in input and a collection of four dots in output would have added inaccuracy, independent of the participant's representation). The production of a ratio of surface areas with a fixed whole area and a high range of possible responses (254 levels in the virtual glass) appeared to be the best alternative.

Nevertheless, the response format had two limitations. First, despite our efforts to avoid direct perceptive matching, it was more compatible with the non-numerical ratios presented in the input (rectangles) than with the numerical ratios (fractions and collections of dots). It is not easy to find the best response format. We could compare performance on non-symbolic ratios (numerical and non-numerical) by asking participants to produce a fraction, or point to a position on a number line. We could also add a condition with a ratio of surface areas as the input and a ratio of collections as the output. But none of these alternatives yields the same degree of compatibility between the stimulus and the response for all formats. Second, the restriction of responses to the size of the virtual glass probably prevented the effect of the magnitude of the ratios from being assessed. This effect should be estimated in a magnitude-comparison task on symbolic and non-symbolic ratios by keeping the distance between the ratios constant while increasing their magnitudes. We could also investigate the acuity of the representation according to the format by testing the

threshold of discrimination. For non-symbolic formats, an articulatory-suppression task could be used to ensure that the participants do not symbolise the input. However, using a double task entails the risk of a deterioration in performance, due to the additional load in working memory. We feel that the processing of the ratio magnitude is resources-consuming (due to the manipulation of several magnitudes) enough, as it is.

The sources of the variability of the mental representation of the fraction magnitude should be further investigated by comparing the variability of the estimates of this magnitude (e.g., $11/23$) to the variability of the estimates of each component (e.g., 11 and 23). This baseline could also help us to understand the absence of a component-size effect for the estimation of the ratios of surface areas. Finally, a better understanding of approximate multiplication and division would also be beneficial to our understanding of the mental representation of the fraction magnitudes. Is performance on “6 divided by 2” and “6 multiplied by 2” affected by the operands as the estimation of $2/6$ is affected by the components? Is it more difficult to approximate a product or a quotient than to approximate a sum or a difference?

3.6 Our conclusions might not apply to all fractions

Our research did not test the processing of fraction magnitudes according to their degree of familiarity. Familiar fractions are probably those with small components that occur frequently in everyday life ($1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, and $3/4$). Learned mapping may allow direct access to their magnitudes. A more sensitive measure, such as response times or event-related potentials, is needed to test this hypothesis. We chose to avoid reducible fractions (e.g., $2/4$), fractions with denominators equal to 10 (e.g., $2/10$) and fractions with denominators which were multiples of each other (e.g., $1/4$ and $1/8$) to avoid simplification, transformation into decimal numbers, and the search for a common denominator. We controlled our stimuli in this way because it is very likely that adults would have used these procedures for such fractions, whereas they would have used an approximate numerical representation for others. The possibilities of exact computation (by creating fractions with the same denominator, transforming fractions into decimal numbers, applying cross-multiplication, dividing the numerator by the denominator, dividing 1 by the denominator and then multiplying by the numerator) are limited by the number of arithmetical facts useful for the processing of fractions. The learned association

between a fraction and a decimal number is probably restricted to the familiar fractions (i.e., $1/2 = .50$, $1/4 = .25$, $1/3 = .33$, $2/3 = .67$ and $3/4 = 0.75$). Division of a dividend by a larger divisor (e.g., $7 \div 8 = 0.87$ or $(1 \div 8) * 7 = 0.87$ for $7/8$) or the associated multiplication (e.g., $0.87 * 8 = 7$ for $7/8$) would not be stored as arithmetical facts, with few exceptions. The exact computation would therefore involve additional steps: (1) multiplying the dividend by ten in order to perform the division on a dividend larger than the divisor; and (2) dividing the quotient by 10. This could make exact computation more demanding than using the approximate sense of ratio.

4 Conclusions

Our studies have produced evidence of the ability of school-age children and adults to represent the magnitude of fractions in an approximate way. Fraction magnitudes seem to be represented via the mental representation of the magnitude of the components, and the processing of their multiplicative relationship (indirect access). The magnitude appears to be processed in the same way for fractions and for non-symbolic numerical ratios, but the specificity of fraction processing in adults consists of an increase in precision due to the symbolic notation. Indirect access to fractions benefits from the learned mapping procedure between numerals and their mental numerical representations and, accordingly, from a reduction in the variability of these representations due to the symbolic notation.

Activating the mental representation of fraction magnitudes could be relatively time- and resource-consuming in compared to alternative strategies that are available for some tasks. These include, for adults, processing the components without considering the multiplicative relation within a fraction (componential strategy), and associating fractions with a constant value (a generalised fraction). Only when these strategies do not allow the task to be performed correctly, do adults activate the mental representation of the fraction magnitude. For instance, they process the holistic value of fractions when they are asked to produce a non-numerical ratio equivalent to a fraction. In magnitude-comparison tasks, they compare the holistic values when they cannot identify an efficient componential strategy on the basis of their conceptual knowledge (due to the absence of common components), or when they have to use several componential strategies. The only exception seems to be pairs of fractions with common denominators, for which adults always compare the numerators. The direct comparison of numerators may be strongly

associated with the presence of common denominators due to the frequent use of the common-denominator-search procedure during their time at school.

When children and adults access the magnitude of fractions in a magnitude-comparison task, the magnitudes of the components of the fractions are also compared. This can interfere with the processing of the fraction magnitudes if the relative magnitude of the components is incongruent with that of the fractions. This occurs for fractions with common numerators. The processing of the relative magnitude of these fractions requires the processing of the relative magnitude of the denominators (or the response activated by this processing) to be inhibited. This interference could be challenging for some children, who have already overcome the whole number bias at the conceptual level, but who have poor inhibition abilities.

Our results extend the evidence for the ability to represent ratio magnitudes to symbolic ratios. They challenge the initial conclusions of numerical cognition, that the mental representation of fraction magnitudes is not supported by the approximate magnitude system. Our research has bridged two streams of research that have been separate for a long time: studies of the ability of animals, infants and school-age children to process non-symbolic ratios; and studies of the processing and learning of fractions. Future research should investigate whether the early ability to process non-symbolic ratios is a factor in the development of the later ability to process symbolic ratios, and whether the mental magnitude representation is the same for numerical and non-numerical ratios.

References

References

- Ansari, D., Donlan, C., & Smith, A. K. (2007). Typical and atypical development of visual estimation abilities. *Cortex*, 43, 758-768.
- Baayen, R. H. (2008). *Analyzing linguistic data. A practical introduction to statistics using R*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Baayen, R. H., Davidson, D. J., & Bates, D. M. (2008). Mixed-effects modeling with crossed random effects for subjects and items. *Journal of Memory and Language*, 59, 387-556.
- Barth, H., Baron, A., Spelke, E., & Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 441 - 454.
- Barth, H., Beckmann, L., & Spelke, E. S. (2008). Nonsymbolic, approximate arithmetic in children: Abstract addition prior to instruction. *Developmental Psychology*, 44, 1466-1477.
- Barth, H., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86, 201-221.
- Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition*, 98, 199-222.
- Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Paris: Seuil.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the national council of teachers in mathematics* (pp. 296-333). New York, NY: Simon and Schuster Macmillan.
- Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33, 1410-1419.
- Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, 44, 1478-1490.
- Brannon, E. M. (2005). What animals know about numbers. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 85-107). New York, NY: Psychology Press.
- Brown, H., & Prescott, R. (1999). *Applied mixed models in medicine*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

References

- Buckley, P. B., & Gilman, C. B. (1974). Comparison of digits and dot patterns. *Journal of Experimental Psychology*, 103, 1131 - 1136.
- Butterworth, B. (2001). Statistics: What seems natural? *Science*, 292, 853-855.
- Butterworth, B. (2007). Why frequencies are natural. *Behavioral and Brain Sciences*, 30(03), 259-260.
- Campbell, J. I. D., & Alberts, N. M. (2009). Operation-specific effects of numerical surface form on arithmetic strategy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 35, 999-1011.
- Cohen Kadosh, R., Brodsky, W., Levin, M., & Henik, A. (2008). Mental representation: What can pitch tell us about the distance effect? *Cortex*, 44, 470-477.
- Cohen Kadosh, R., Lammertyn, J., & Izard, V. (2008). Are numbers special? An overview of chronometric, neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in Neurobiology*, 84, 132-147.
- Cordes, S., Gallistel, C. R., Gelman, R., & Latham, P. (2007). Nonverbal arithmetic in humans: Light from noise. *Perception & Psychophysics*, 69, 1185-1203.
- Daurignac, E., Houdé, O., & Jouvent, R. (2006). Negative priming in a numerical piaget-like task as evidenced by ERP. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 18, 730-736.
- Dehaene, S. (1989). The psychophysics of numerical comparison - a reexamination of apparently incompatible data. *Perception & Psychophysics*, 45, 557-566.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Dehaene, S. (2003). The neural basis of the Weber-Fechner law: a logarithmic mental number line. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 145-147.
- Dehaene, S. (2007). Symbols and quantities in parietal cortex: Elements of a mathematical theory of number representation and manipulation. In P. Haggard, Y. Rossetti & M. Kawato (Eds.), *Attention & Performance. Sensori-motor foundations of higher cognition* (Vol. XXII, pp. 527-574). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Dehaene, S., & Akhavein, R. (1995). Attention, automaticity, and levels of representation in number processing. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 21, 314-326.
- Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371-396.
- Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities - a neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5, 390-407.

- Dehaene, S., Dehaene-Lambertz, G., & Cohen, L. (1998). Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trends in Neurosciences*, 21, 355-361.
- Dehaene, S., Dupoux, E., & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16, 626-641.
- Dehaene, S., Izard, V., Pica, P., & Spelke, E. (2006). Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science*, 311, 381-384.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- Duffy, S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2005). It is all relative: How young children encode extent. *Journal of Cognition and Development*, 6, 51-63.
- Duncan, E. M., & McFarland, C. E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance and semantic congruity in comparative judgments: An additive-factors analysis. *Memory & Cognition*, 8, 612-622.
- English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Feigenson, L. (2007). The equality of quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, 11, 185-187.
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8, 307-314.
- Fias, W., Lammertyn, J., Reynvoet, B., Dupont, P., & Orban, G. A. (2003). Parietal representation of symbolic and nonsymbolic magnitude. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 15, 47-56.
- Fias, W., Lauwereyns, J., & Lammertyn, J. (2001). Irrelevant digits affect feature-based attention depending on the overlap of neural circuits. *Cognitive Brain Research*, 12, 415-423.
- Field, A. (2005). *Discovering statistics using SPSS*. London: Sage.
- Fischer, M. H. (2003). Spatial representations in number processing - evidence from a pointing task. *Visual Cognition*, 10, 493-508
- Fischer, M. H., Castel, A. D., Dodd, M. D., & Pratt, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature Neuroscience*, 6, 555-556.
- Fischer, M. H., & Rottmann, J. (2005). Do negative numbers have a place on the mental number line? *Psychology Science*, 47, 22-32.
- Fischer, M. H., Warlop, N., Hill, R. L., & Fias, W. (2004). Oculomotor bias induced by number perception. *Experimental Psychology*, 51, 91-97.

References

- Flombaum, J. I., Junge, J. A., & Hauser, M. D. (2005). Rhesus monkeys (*Macaca mulatta*) spontaneously compute addition operations over large numbers. *Cognition*, 97, 315-325.
- Gallistel, C. R. (1990). *The organization of learning*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74.
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: from reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences*, 4, 59-65.
- Gallistel, C. R., Gelman, R., & Cordes, S. (2006). The cultural and evolutionary history of the real numbers. In P. Jaisson & S. C. Levinson (Eds.), *Evolution and culture: A Fyssen Foundation symposium*. (Vol. XVII, pp. 247-274). Cambridge, MA: MIT Press.
- Ganor-Stern, D., & Tzelgov, J. (2008). Negative numbers are generated in the mind. *Experimental Psychology*, 55, 157-163.
- Gelman, R., & Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related? *Trends in Cognitive Sciences*, 9, 6-10.
- Gevers, W., & Lammertyn, J. (2005). The hunt for SNARC. *Psychology Science*, 47(1), 10-21.
- Gevers, W., Reynvoet, B., & Fias, W. (2003). The mental representation of ordinal sequences is spatially organized. *Cognition*, 87, B87-B95.
- Gevers, W., Reynvoet, B., & Fias, W. (2004). The mental representation of ordinal sequences is spatially organised: Evidence from days of the week. *Cortex*, 40, 171-172.
- Grégoire, J., & Meert, G. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels et ses obstacles. In M. P. Noël (Ed.), *La dyscalculie. Trouble du développement numérique chez l'enfant*. (pp. 223-251). Marseille: Solal.
- Hair, J. F., Anderson, R. E., Tatham, R. L., & Black, W. C. (1998). *Multivariate data analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Harper, D. G. C. (1982). Competitive foraging in mallards: "Ideal free" ducks. *Animal Behaviour*, 30, 575-584.
- Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, 8, 341-374.
- Hecht, S. A., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86, 277-302.

- Hinrichs, J. V., Yurko, D. S., & Hu, J. M. (1981). Two-digit number comparison: Use of place information. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 7, 890-901.
- Houdé, O. (2000). Inhibition and cognitive development: object, number, categorization, and reasoning. *Cognitive Development*, 15, 63-73.
- Houdé, O., & Guichart, E. (2001). Negative priming effect after inhibition of number/length interference in a Piaget-like task. *Developmental Science*, 4, 119-123.
- Howell, D. C. (1998). *Méthodes statistiques en sciences humaines* [Statistical methods for Psychology] (M. Rogier, Trans.). Bruxelles: De Boeck. (Original work published 1997).
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6, 435-448.
- Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris: Laffont.
- Imbo, I., & Vandierendonck, A. (2008). Effects of problem size, operation, and working-memory span on simple-arithmetic strategies: differences between children and adults? *Psychological Research*, 72, 331-346.
- Ischebeck, A. K., Schocke, M., & Delazer, M. (2009). The processing and representation of fractions within the brain. An fMRI investigation. *NeuroImage*, 47 (Suppl. 1), S89-S89.
- Jacob, S. N., & Nieder, A. (2009a). Notation-independent representation of fractions in the human parietal cortex. *The Journal of Neuroscience*, 29, 4652-4657.
- Jacob, S. N., & Nieder, A. (2009b). Tuning to non-symbolic proportions in the human frontoparietal cortex. *European Journal of Neuroscience*, 30, 1432-1442.
- Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development*, 8, 237 - 256.
- Judd, C. M., & McClelland, G. H. (1989). *Data analysis: A model comparison approach*. San Diego, CA: Harcourt, Brace, Jovanovich.
- Kallai, A. Y., & Tzelgov, J. (2009). A generalized fraction: An entity smaller than one on the mental number line. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 35, 1845-1864.

References

- Knops, A., Viarouge, A., & Dehaene, S. (2009). Dynamic representations underlying symbolic and nonsymbolic calculation: Evidence from the operational momentum effect. *Attention Perception & Psychophysics*, *71*, 803-821.
- Koechlin, E., Naccache, L., Block, E., & Dehaene, S. (1999). Primed numbers: Exploring the modularity of numerical representations with masked and unmasked semantic priming. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *25*, 1882-1905.
- Korvorst, M., & Damian, M. F. (2008). The differential influence of decades and units on multidigit number comparison. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *61*, 1250-1264.
- LeFevre, J. A., Bisanz, J., Daley, K. E., Buffone, L., Greenham, S. L., & Sadesky, G. S. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General*, *125*, 284-306.
- LeFevre, J. A., Sadesky, G. S., & Bisanz, J. (1996). Selection of procedures in mental addition: Reassessing the problem size effect in adults. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *22*, 216-230.
- Lemaire, P., & Arnaud, L. (2004). Le calcul mental et la question des stratégies. In M. Pesenti & X. Seron (Eds.), *La cognition numérique* (pp. 161-187). Paris: Lavoisier.
- Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14*, 396-401.
- Lorch, R. F., & Myers, J. L. (1990). Regression analyses of repeated measures data in cognitive research. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *16*, 149-157.
- Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 85-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McCrink, K., Dehaene, S., & Dehaene-Lambertz, G. (2007). Moving along the number line: Operational momentum in nonsymbolic arithmetic. *Perception & Psychophysics*, *69*, 1324-1333.
- McCrink, K., & Spelke, E. S. (2010) Core multiplication in childhood. *Cognition*, *116*, 204-216.
- McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, *15*, 776-781.

- McCrink, K., & Wynn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science*, 18, 740-745.
- Meck, W. H., & Church, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 9, 320-334.
- Meert, G. & Grégoire, J. *The development of the conceptual understanding of fractions*. Manuscript in preparation.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2009). Rational numbers: Componential versus holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62, 1598-1616.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010a). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, 244-259.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010b). Comparing 5/7 and 2/9: Adults can do it by accessing the magnitude of the whole fractions. *Acta Psychologica*, 135, 284-292.
- Meert, G., Grégoire, J., Seron, X., & Noël, M. P. *The mental representation of the magnitude of symbolic and non-symbolic ratios in adults*. Manuscript submitted for publication.
- Meert, G., Noël, M.P., & Grégoire, J. *The mental representation of the magnitude of symbolic and non-symbolic ratios in 9- and 11-year-olds*. Manuscript in preparation
- Miura, I. T., Okamoto, Y., Vlahovic-Stetic, V., Kim, C. C., & Han, J. H. (1999). Language supports for children's understanding of numerical fractions: Cross-national comparisons. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 356-365.
- Mix, K. S., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, 35, 164-174.
- Moeller, K., Fischer, M. H., Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2008). Sequential or parallel decomposed processing of two-digit numbers? Evidence from eye-tracking. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62, 323 - 334.
- Moeller, K., Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2009). Internal number magnitude representation is not holistic, either. *European Journal of Cognitive Psychology*, 21, 672-685.
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519-1520.
- Mussolin, C. (2002). *L'automatisme de l'accès à la représentation numérique chez l'enfant*. Unpublished master thesis, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.

References

- Mussolin, C., & Noël, M. P. (2007). The nonintentional processing of Arabic numbers in children. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, 29, 225-234.
- Neely, J. H. (1991). Semantic priming effects in visual word recognition: A selective review of current findings and theories. In D. Besner & G. W. Humphreys (Eds.), *Basic processes in reading: Visual word recognition*. (pp. 264-336). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40, 27-52.
- Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185-208.
- Nieder, A., Freedman, D. J., & Miller, E. K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, 297, 1708-1711.
- Nieder, A., & Miller, E. K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, 37, 149-157.
- Noël, M. P., Rousselle, L., & Mussolin, C. (2005). Magnitude representation in children: Its development and dysfunction. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 179-195). New York, NY: Psychology Press.
- Norusis, M. J. (2008). *SPSS 16.0 Advanced statistical procedures companion*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Nuerk, H. C., Iversen, W., & Willmes, K. (2004). Notational modulation of the SNARC and the MARC (linguistic markedness of response codes) effect. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology A: Human Experimental Psychology*, 57, 835-863.
- Nuerk, H. C., Kaufmann, L., Zoppoth, S., & Willmes, K. (2004). On the development of the mental number line: More, less, or never holistic with increasing age? *Developmental Psychology*, 40, 1199-1211.
- Nuerk, H. C., Weger, U., & Willmes, K. (2001). Decade breaks in the mental number line? Putting the tens and units back in different bins. *Cognition*, 82, B25-B33.
- Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2005). On the magnitude representations of two-digit numbers. *Psychology Science*, 47, 52-72.
- Paik, J. H., & Mix, K. S. (2003). U.S. and Korean children's comprehension of fraction names: A reexamination of cross-national differences. *Child Development*, 74, 144-154.

- Pavese, A., & Umiltà, C. (1998). Symbolic distance between numerosity and identity modulates Stroop interference. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 24, 1535-1545.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1962). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.
- Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, 306, 499-503.
- Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron*, 41, 983-993.
- Pollock, S. E., & Schwartz, D. R. (1984). Comparative judgments of multidigit numbers. *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory and Cognition*, 10, 32-45.
- Quené, H., & van den Bergh, H. (2008). Examples of mixed-effects modeling with crossed random effects and with binomial data. *Journal of Memory and Language*, 59, 413-425.
- Ratinckx, E., Brysbaert, M., & Fias, W. (2005). Naming two-digit Arabic numerals: Evidence from masked priming studies. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 31, 1150-1163.
- Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, 83, 274-278.
- Reynvoet, B., & Brysbaert, M. (1999). Single-digit and two-digit Arabic numerals address the same semantic number line. *Cognition*, 72, 191-201.
- Reynvoet, B., & Brysbaert, M. (2004). Cross-notation number priming investigated at different stimulus onset asynchronies in parity and naming tasks. *Experimental Psychology*, 51, 81-90.
- Reynvoet, B., Brysbaert, M., & Fias, W. (2002). Semantic priming in number naming. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology A: Human Experimental Psychology*, 55, 1127-1139.
- Reynvoet, B., De Smedt, B., & Van den Bussche, E. (2009). Children's representation of symbolic magnitude: The development of the priming distance effect. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 480-489.
- Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D., Rose, D., McCarron, M. C., Globa, C. A., & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93, 224-238.

References

- Roggeman, C., Verguts, T., & Fias, W. (2007). Priming reveals differential coding of symbolic and non-symbolic quantities. *Cognition*, 105, 380-394.
- Roitman, J. D., Brannon, E. M., & Platt, M. L. (2007). Monotonic coding of numerosity in macaque lateral intraparietal area. *PLoS Biology*, 5, 1672-1682.
- Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles: Didier Hatier.
- Rubinsten, O., Henik, A., Berger, A., & Shahar-Shalev, S. (2002). The development of internal representations of magnitude and their association with Arabic numerals. *Journal of Experimental Child Psychology*, 81, 74-92.
- Santens, S., Roggeman, C., Fias, W., & Verguts, T. (2010). Number processing pathways in human parietal cortex. *Cerebral Cortex*, 20, 77-88.
- Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 36, 1227-1238.
- Shaki, S., & Petrusic, W.M. (2005). On the mental representation of negative numbers: Context-dependent SNARC effects with comparative judgments. *Psychonomic Bulletin and Review*, 12, 931-937.
- Siegler, R. S. (1999). Strategic development. *Trends in Cognitive Sciences*, 3, 430 - 435.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation. A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 197-212). New York, NY: Psychology Press.
- Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, 237-243.
- Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16, 811-829.
- Sophian, C. (1996). *Children's numbers*. Boulder, CO: Westview Press.
- Sophian, C. (2000). Perceptions of proportionality in young children: Matching spatial ratios. *Cognition*, 75, 145-170.
- Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C. (1997). When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, 33, 731-744.
- Spinillo, A. G. (2002). Children's use of part-part comparisons to estimate probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21, 357-369.

- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.
- Szucs, D., & Soltesz, F. (2007). Event-related potentials dissociate facilitation and interference effects in the numerical Stroop paradigm. *Neuropsychologia, 45*, 3190-3202.
- Tipper, S. P. (1985). The negative priming effect - Inhibitory priming by ignored objects. *Quarterly Journal of Experimental Psychology A: Human Experimental Psychology, 37*, 571-590.
- Tipper, S. P. (2001). Does negative priming reflect inhibitory mechanisms? A review and integration of conflicting views. *Quarterly Journal of Experimental Psychology A: Human Experimental Psychology, 54*, 321-343.
- Tzelgov, J., & Henik, A. (1991). Suppression situations in psychological research: Definitions, implications, and applications. *Psychological Bulletin, 109*, 524-536.
- Vallentin, D., & Nieder, A. (2008). Behavioral and prefrontal representation of spatial proportions in the monkey. *Current Biology, 18*, 1420-1425.
- Van den Noortgate, W., & Onghena, P. (2006). Analysing repeated measures data in cognitive research: A comment on regression coefficient analyses. *European Journal of Cognitive Psychology, 18*, 937-952.
- Van Opstal, F., Gevers, W., De Moor, W., & Verguts, T. (2008). Dissecting the symbolic distance effect: Comparison and priming effects in numerical and nonnumerical orders. *Psychonomic Bulletin & Review, 15*, 419-425.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.
- Verguts, T., & de Moor, W. (2005). Two-digit comparison: Decomposed, holistic, or hybrid? *Experimental Psychology, 52*, 195-200.
- Verguts, T., & Fias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: A neural model. *Journal of Cognitive Neuroscience, 16*, 1493-1504.
- Verguts, T., Fias, W., & Stevens, M. (2005). A model of exact small-number representation. *Psychonomic Bulletin & Review, 12*, 66-80.
- Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Sciences, 7*, 483-488.
- Whalen, J., Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1999). Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science, 10*, 130-137.

References

- Wiese, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: The role of language. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 385-390.
- Wiese, H. (2007). The co-evolution of number concepts and counting words. *Lingua*, 117, 758-772.
- Wood, G., Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2006). Neural representations of two-digit numbers: A parametric fMRI study. *Neuroimage*, 29, 358-367.
- Wynn, K. (1998). Numerical competence in infants. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 3-25). New York, NY: Psychology Press.
- Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74, B1-B11.
- Yang, T., & Shadlen, M. N. (2007). Probabilistic reasoning by neurons. *Nature*, 447, 1075-1080.
- Zebian, S. (2005). Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the reverse SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers. *Journal of Cognition and Culture*, 5, 165-190.
- Zhang, J., & Wang, H. (2005). The effect of external representations on numeric tasks. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology A: Human Experimental Psychology*, 817-838.
- Zhou, X. L., Chen, C. S., Chen, L., & Dong, Q. (2008). Holistic or compositional representation of two-digit numbers? Evidence from the distance, magnitude, and SNARC effects in a number-matching task. *Cognition*, 106, 1525-1536.