

Mécanique statistique hors d'équilibre de systèmes déterministes non-hyperboliques

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en sciences par

François Huveneers

Faculté des sciences

Université catholique de Louvain

septembre 2010

Président du jury	:	Y. Félix
Directeur de thèse	:	J. Bricmont
Membres du jury	:	A. Kupiainen
		J.-P. Conze
		S. Olla
		J.-P. Antoine
		P. Ruelle

Remerciements

C'est fort chaleureusement que je souhaite, au premier chef, remercier le Professeur J. Bricmont, sous la direction duquel ces quatre années de thèse furent pour moi, aussi agréables qu'instructives. Mon travail n'aurait pu aboutir sans ses encouragements constants. Qu'il puisse, je l'espère, trouver dans cette dissertation des reflets de quelques aptitudes qu'il aura su me transmettre.

Le Professeur A. Kupiainen mérite, lui aussi, des remerciements tout particuliers : pour ses invitations répétées en Finlande, certainement, et pour nous avoir déniché, à O. Ajanki et moi-même, le sujet de la deuxième partie de cette thèse ; mais aussi pour quelques grosses épines hors du pied, alors que nous séchions sur d'insolubles problèmes... Il a ainsi participé de façon cruciale à l'élaboration de nos résultats.

Je suis très sensible à l'honneur que me font les Professeurs J.-P. Conze et S. Olla de prendre part à mon jury. Au premier de ceux-ci, je ne puis cacher la joie avec laquelle je reçus son invitation au séminaire de Rennes il y a deux ans, alors que je publiais mes tout premiers résultats ; et au second, celle de venir travailler à Paris d'ici peu.

Que le Président Y. Félix, ainsi que les Professeurs J.-P. Antoine et P. Ruelle se trouvent tous trois remerciés de la patience avec laquelle ils daigneront poursuivre leur lecture.

Il me tient ensuite fort à cœur d'exprimer ma gratitude à mon collègue O. Ajanki pour sa précieuse collaboration : tous les résultats neufs de la seconde partie sont le fruit de notre œuvre commune. J'ose croire que certains de nos échanges, un peu vifs, ne le retiendront pas de s'associer encore à moi pour quelque travail futur.

Nous avons par ailleurs bénéficié de plusieurs conversations instructives, avec notamment W. De Roeck, M. Jara, C. Liverani, J. Lukkarinen, M. Pakkanen, A. Raugi, et L. Saloff-Coste, auxquels je suis reconnaissant.

Enfin, plusieurs de mes collègues de l'Institut de Mathématique et de Physique, ont singulièrement contribué à me rendre la vie plus agréable et plus facile ; je les en remercie cordialement.

Le désordre moléculaire ?

La mécanique statistique s'assigne pour tâche de relier les propriétés microscopiques et macroscopiques de la matière ; sa démarche se fonde sur la conviction que tous les phénomènes observables s'expliquent, en dernière analyse, par les lois qui régissent l'évolution de ses plus petites entités : les molécules, puis les atomes et les particules élémentaires. En particulier, la mécanique statistique *hors d'équilibre* s'efforce d'expliquer des phénomènes proprement *dynamiques* qui mettent en jeu un grand nombre d'atomes.

Avant de passer à des exemples, nous souhaiterions d'ores et déjà préciser une de nos hypothèses de travail. On sait, qu'en réalité, seule la physique quantique rend correctement compte du comportement du monde microscopique. Néanmoins, dans toute cette thèse, nous supposerons valides les lois de la mécanique classique à toute échelle d'observation. Il nous semble que, ce faisant, on pourra aborder les vrais problèmes qui se posent, dans un cadre conceptuel raisonnablement simple.

Ceci posé, présentons deux phénomènes physiques de la vie courante, qu'on souhaiterait comprendre sur base du mouvement des atomes ; la présente dissertation est divisée en deux parties, et nous nous pencherons successivement sur des systèmes inspirés par chacun d'eux. Prenons, comme premier cas, la fumée d'une cigarette qui se disperse dans une pièce, et, après un certain temps, s'y répartit uniformément. Les observations nous enseignent que ce processus est irréversible. Il nous incombe dès lors de décrire l'évolution temporelle des particules de fumée dans l'air, pour expliquer le phénomène de *diffusion* observé.

En second lieu, plaçons-nous dans un local muni d'un radiateur. D'un côté, l'air se réchauffe à son contact, mais d'un autre se refroidit, car l'isolation des murs n'est pas parfaite. Un flux de chaleur s'installe, dont l'intensité dépend bien sûr de certaines caractéristiques du local, comme sa taille ou l'épaisseur de ses murs. Ici encore, c'est un processus dynamique qui est en cause et dont on veut rendre compte : le *transfert* d'énergie entre deux systèmes à températures différentes.

Le traitement de ces deux cas devrait, pense-t-on, se réduire en fin de compte à une analyse suffisamment fine des solutions des équations de Hamilton, pour des conditions initiales "typiques". Mais, comme une quantité de matière, même petite à l'échelle macroscopique, est facilement constituée de plus de $n = 10^{20}$ atomes, la résolution explicite de ces équations semble en général complètement hors

de portée.

Voyons alors comment Boltzmann envisagea de traiter les phénomènes hors d'équilibre. Prenons pour cela l'exemple d'un gaz composé de n particules ponctuelles, confinées dans un volume fini. Pour décrire ce gaz d'un point de vue macroscopique, on peut diviser l'espace des positions et vitesses accessibles aux atomes, en cellules, dites mésoscopiques, qui sont très petites pour nous, mais encore très grandes du point de vue microscopique. Il est amplement satisfaisant, à notre échelle, de pouvoir rendre compte de l'évolution, au cours du temps, du nombre d'atomes dans chaque cellule, c'est-à-dire de la *distribution macroscopique*, ou empirique, des positions et des vitesses des constituants du gaz. Notons que le support de cette distribution est compris dans l'espace de dimension 6 seulement, alors que l'espace des phases du gaz tout entier est lui de dimension $6n$.

A elle seule, l'adoption d'un tel point de vue n'arrange rien, car, en dernière analyse, la distribution macroscopique dépend des conditions initiales par le biais des équations de Hamilton, que l'on aurait donc à résoudre. Mais Boltzmann introduisit une hypothèse statistique, l'hypothèse de *chaos moléculaire*, qui se trouva remarquablement fructueuse. Dans le gaz, comme les molécules s'entrechoquent sans cesse, elles finissent par se déplacer en tous sens. Dès lors, quand une collision entre deux particules se produit, il est raisonnable de supposer que leurs vitesses sont statistiquement indépendantes l'une de l'autre. A l'aide de cette supposition simplificatrice, Boltzmann fut à même de dériver une équation *autonome* pour la distribution macroscopique des positions et vitesses, et, dans une certaine mesure, de rendre compte de l'irréversibilité observée à l'échelle macroscopique. Nous ne discutons pas ici davantage, ni les implications, ni les difficultés, liées à la résolution de l'équation de Boltzmann.

Dans la suite, nous utiliserons l'expression *désordre moléculaire* pour désigner un concept plus large, mais peut-être hélas un peu plus vague, que celui de chaos moléculaire. Sous l'hypothèse de Boltzmann, se cache, nous semble-t-il, l'intuition suivante : la dynamique d'un gaz est telle, qu'assez rapidement, l'état du système et les conditions initiales ne seraient pratiquement plus corrélées, comme si celui-ci avait évolué suivant une dynamique pratiquement aléatoire. C'est cette disparition rapide des corrélations temporelles que l'on a baptisée du nom de désordre moléculaire. L'Ansatz de Boltzmann en apparaît comme un cas particulier : les vitesses de deux molécules qui se heurtent sont en général corrélées, en raison de leur histoire commune, mais on admet que cela n'a aucune influence pratique. Notons au passage, pour éviter de possibles confusions, que l'hypothèse d'indépendance statistique des distributions des vitesses, n'est en rien une hypothèse d'absence d'interaction entre particules.

Le chaos ou le désordre moléculaire constitue une supposition qui touche à la dynamique elle-même. Elle demande donc à être justifiée ; c'est une vaste tâche, qui, plus d'un siècle après Boltzmann, reste inachevée. On sait déjà qu'on ne peut espérer la valider en dehors de certaines limites. Ainsi, si on laisse un nombre fini de particules évoluer indéfiniment, des contradictions apparaissent entre l'évolution

irréversible prédite par Boltzmann, et l'éternel retour démontré par Poincaré ! Mais revenons plutôt à nos exemples de fumée de cigarette et de transmission de chaleur au sein d'un local, pour approcher la question de façon plus tangible.

1. Gaz de particules indépendantes. Le problème de la diffusion d'un gaz a pu être résolu pour un cas simple, dans la limite où le nombre de particules est infini. Un métal conducteur d'électricité se compose d'atomes électriquement neutres, qui plongent dans une mer d'électrons libres. Lorentz imagina un modèle simple de métal : il admit d'une part que ces électrons libres ricochent contre les atomes, sans toutefois leur communiquer de mouvement, vu le très inégal rapport de masses, et d'autre part qu'entre eux, il n'y a pratiquement jamais de chocs, tant ils sont petits. On obtient donc un gaz de particules indépendantes qui rebondissent contre des cibles fixes. Dans ce cas, la réduction du nombre de degrés de liberté opérée par Boltzmann devient évidente, mais il reste à voir si, par des chocs répétés, les électrons perdent mémoire de leur passé pour évoluer comme une marche aléatoire, ou si au contraire, la dynamique déterministe à des effets à long terme qui contraignent leur évolution.

La réponse s'avère dépendre de la géométrie des obstacles. Dans un plan, on sait que, s'ils sont disposés de façon régulière et qu'ils sont ronds, les trajectoires évolueront, à une échelle adéquate, comme des mouvements browniens [8]. Par contre certains arrangements d'obstacles carrés produisent des corrélations qui subsistent beaucoup trop longtemps pour que les trajectoires puissent se disperser aléatoirement. Les obstacles ronds engendrent des dynamiques *hyperboliques*, qui sont relativement bien comprises, et pour lesquelles de nombreux résultats sont engrangés. Le cas de dynamiques non-hyperboliques, par contre, demande encore à être investigué davantage.

Dans la première partie de la thèse, on analysera un exemple très simple de dynamique non-hyperbolique à temps discret. Imaginons un cylindre vertical, que divise en deux un plan qui passe par son axe. A chaque étape, une particule à la surface du cylindre monte ou descend d'une unité de longueur selon qu'elle se trouve dans la première ou la seconde partie, puis tourne vers la droite d'un certain angle constant, incommensurable avec la circonférence. En moyenne, les particules ont autant de chances d'aller vers le haut ou vers le bas, et, dans l'hypothèse du désordre moléculaire, la probabilité de l'une ou l'autre de ces alternatives devrait peu dépendre du passé, de sorte qu'on obtiendrait grosso modo une marche aléatoire symétrique. Mais on s'aperçoit assez vite que les choses ne se passent pas du tout comme ça, car une rotation irrationnelle est une application en quelque sorte trop régulière.

Nous découvrirons par contre un fait surprenant : si l'on n'observait pas le système à chaque étape, mais qu'entre deux observations, on le laissait évoluer sur des durées de plus en plus longues, on verrait que les trajectoires seraient finalement quand même celles d'une marche aléatoire ! Plus précisément, pour un angle de rotation irrationnel quelconque, nous énoncerons et démontrerons un théorème de la limite centrale non dégénéré, par passage à une sous-suite de temps adéquate. Ensuite si l'angle de rotation est de type constant, nous établirons un théorème de croissance linéaire de la variance pour

une sous-suite d'instants exponentiellement croissante. Cette sous-suite est optimale, en ce sens où le résultat devient faux pour des sous-suites qui croissent moins vite. Ce théorème est amélioré en un théorème de la limite centrale.

A l'origine, l'idée de nos théorèmes provient d'une analogie observée, de façon un peu inattendue, entre le comportement de dynamiques hyperboliques bien connues, et celles de sous-suites convenables engendrées par des rotations. Cela dit, pour produire des démonstrations, on utilise une méthode très concrète et proche de l'intuition : on remplace l'analyse spectrale de l'opérateur de transfert (voir section 1.2 §2) par une étude directe des corrélations temporelles. Au passage, on démontre un théorème de la limite centrale abstrait, adapté à l'étude de systèmes déterministes, qui suppose seulement des décroissances des corrélations à deux et trois points. Mais, en fin de compte, tous nos résultats sont rendus possibles par l'usage de représentations explicites des quantités à étudier en séries de Fourier. Les résultats neufs de cette partie ont été publiés dans [27].

2. La loi de Fourier. Revenons maintenant à la transmission de la chaleur. La question est beaucoup plus délicate, et pour l'instant, attend encore une réponse complètement satisfaisante. Nous renvoyons au chapitre 3 pour une introduction plus détaillée au sujet. C'est à Fourier que revient l'honneur d'avoir découvert la loi qui régit le transport de chaleur. Une fois n'est pas coutume, une supposition simple fut à l'origine de beaux progrès, et de beaux problèmes. Quand, dans la matière, la température est partout la même, il n'y a aucun de flux de chaleur. Si, par contre, un faible gradient de température apparaît, il supposa, énonçant de ce fait la loi qui porte aujourd'hui son nom, que le flux serait proportionnel à ce gradient.

L'objectif est de dériver la loi de Fourier à partir de la seule mécanique hamiltonienne, en observant la matière à des échelles spatiales et temporelles adéquates. On cherche ici à comprendre le transfert de l'énergie dans la matière, et, comme ce sont précisément les interactions entre atomes proches qui en sont responsables, il n'est plus question cette fois d'envisager un cas simple de particules qui évoluent indépendamment les unes des autres. Or, on s'est fait l'idée que, précisément, c'est une forme de désordre moléculaire qui permettrait d'expliquer la loi de Fourier (voir le modèle de la section 3.1). Dès lors, on est ici confronté au problème de l'hypothèse de Boltzmann dans toute sa généralité. Les recherches furent entreprises dans deux directions opposées : le très chaotique d'une part, et l'intégrable ou le presque intégrable d'autre part.

Du côté du très chaotique, plusieurs auteurs tentèrent de construire des modèles pour lesquels l'interaction était réduite au minimum nécessaire, de sorte à se rapprocher le plus possible du cas bien maîtrisé des particules indépendantes. Certains d'entre eux (voir p. ex. [18]) envisagèrent une variante du gaz de Lorentz, décrit plus haut, dans laquelle les obstacles fixes s'animent quand même d'un mouvement de rotation lors d'un choc, de sorte à assurer une dispersion de l'énergie. Dans une autre variante (voir p. ex. [22]), les électrons ne sont plus supposés ponctuels, et la configuration des

atomes est tellement dense qu'ils se retrouvent coincés dans des petites cellules. On admet de plus qu'il y en a exactement un dans chacune d'elles. Les électrons de cellules voisines interagissent, mais très rarement, de sorte qu'une sorte d'équilibre local puisse, espère-t-on, être garanti. Mais, même dans ces modèles ad hoc, on n'a pu produire une démonstration rigoureuse de la loi de Fourier.

D'un autre côté, les systèmes intégrables à n corps constituent de rares exemples où les équations du mouvement se résolvent "explicitement". L'hypothèse de désordre moléculaire n'est sans doute pas justifiée dans ces cas, mais en revanche, de nombreux calculs peuvent être menés à bien. On peut modéliser un solide cristallin par un ensemble de masses, disposées régulièrement dans l'espace, et couplées entre voisines par un potentiel. Quand ce dernier est quadratique, les équations de Hamilton sont linéaires, et peuvent être résolues à la main. Or, lorsque toutes les masses sont égales, la loi de Fourier se trouve violée : le flux d'énergie est alors proportionnel à la seule différence entre les températures imposées à deux bords opposés, et non au gradient engendré [42]. On a donc visiblement besoin d'un peu plus de désordre pour démontrer la loi de Fourier...

Cela dit, il restait encore une autre petite fenêtre à ouvrir. Les impuretés au sein d'un cristal altèrent sa conductivité thermique. Pour modéliser un solide impur, on peut considérer un ensemble de masses inégales couplées par des potentiels différents. Alors, même quand toutes les interactions sont harmoniques, des phénomènes intéressants apparaissent. Bien que la dynamique soit toujours intégrable, au sens où le mouvement peut encore s'écrire comme une superposition de modes propres, l'analyse qualitative des solutions des équations de Hamilton n'est plus évidente. En fait ces modes sont très spéciaux, et engendrent un comportement tout à fait différent de celui du solide à masses égales. On a donc introduit une certaine dose de "désordre", tout en conservant un système intégrable, très avantageux d'un point de vue technique.

Dans la deuxième partie de la thèse, on analyse ce système, connu sous le nom de *chaîne harmonique désordonnée*. On suppose alors que les masses sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, mais que les constantes de couplage sont toutes identiques. On s'est restreint au cas unidimensionnel, sujet de nombreux travaux qui remontent jusqu'à la fin des années soixante, et pour lequel le comportement asymptotique de la conductivité thermique a fait l'objet de plusieurs conjectures, généralement admises mais non-démonstrées.

Ainsi, dans le modèle de Casher et Lebowitz [10], une décroissance en $n^{-3/2}$ du flux d'énergie, où n représente le nombre d'atomes, était depuis longtemps acceptée de tous. Mais il était bien connu que l'exposant $3/2$ dépendait fortement des conditions aux bords : Verheggen [46] a en effet démontré une décroissance en $n^{-1/2}$ seulement dans le modèle de Rubin et Greer [43], qui ne se distingue du précédent que par les conditions aux frontières. Beaucoup plus récemment, Dhar [15], couplant la chaîne à des bains thermiques variés, a établi par des arguments heuristiques et des simulations numériques, qu'une décroissance en $n^{-\alpha}$ serait envisageable, pour une large gamme de valeurs du paramètre $\alpha > 0$. A

vrai dire, si l'on exprime le courant en termes des modes propres, et qu'on analyse tous les facteurs susceptibles d'influencer sa décroissance asymptotique, on s'aperçoit que tous ces exposants trouvent une explication systématique (voir les développements heuristiques de la section 4.5).

Mais notre apport véritable est de nature mathématique. Depuis les travaux d'O'Connor [39], il est connu que les modes propres dont la fréquence est d'ordre 1 ont une contribution au courant qui décroît exponentiellement avec le nombre d'atomes. Le comportement des modes de basse fréquence, par contre, demandait encore à être étudié rigoureusement, pour pouvoir établir des estimations asymptotiques du flux d'énergie. Or c'est précisément ce que nous avons fait.

Nous avons obtenu plusieurs résultats techniques sur des produits de matrices aléatoires qui permettent en particulier de démontrer la dépendance en $n^{-3/2}$ de Casher et Lebowitz, de prouver certains des exposants α pour des cas particuliers de Dhar, et de retrouver, de façon peut-être plus naturelle, la décroissance en $n^{-1/2}$ de Rubin et Greer. Nos résultats sont uniquement valides dans la limite où les fréquences tendent vers zéro, et exploitent le fait que, dans ce cas, le système désordonné est bien approché par un système ordonné, dont l'analyse est élémentaire. Tous les résultats neufs de cette partie ont été obtenus en collaboration avec O. Ajanki, de l'université d'Helsinki, et, pour l'essentiel, sont parus dans [2].

Première partie

Diffusion pour des sous-suites engendrées par des rotations

1 – Gaz de particules indépendantes

Nous abordons ici l'étude asymptotique d'un ensemble de particules indépendantes et identiques. Soit un système dynamique déterministe, lisse et de dimension finie. Si, initialement, on regarde un seul point de l'espace de phase, alors, on observera simplement qu'il se déplace le long d'une trajectoire du système. En revanche, si on part d'un petit nuage de conditions initiales, on peut envisager plusieurs évolutions possibles ; en particulier, il y a des cas où le nuage est diffusé dans tout l'espace.

D'un point de vue physique, ce nuage correspond à un ensemble de particules identiques sans interactions, qui diffèrent seulement par leur position initiale. L'espace de phase dont il a été question est bien l'espace d'une seule d'entre elles. Du point de vue mathématique, il est commode de considérer directement une infinité de particules, qui admettent une distribution initiale donnée. On remplace alors les conditions initiales par une mesure de probabilité initiale, et on étudie en fait l'évolution de cette mesure sous le flot du système.

1. Le gaz de Lorentz. Le gaz de Lorentz constitue un remarquable exemple où on a pu démontrer la diffusion de mesures initiales suffisamment étalées. Dans ce modèle, des particules ponctuelles se déplacent librement dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ à une vitesse de norme 1, sauf lorsqu'elles rencontrent le bord du domaine, où elles rebondissent alors de façon élastique. Le domaine D se décrit comme suit. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, et soit $\Theta = \{kv_1 + lv_2 : k, l \in \mathbb{Z}\}$. Soit aussi $r > 0$. On pose

$$D = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{x \in \Theta} B(x, r). \quad (1.1)$$

On suppose d'une part que les obstacles, c'est-à-dire les disques $B(x, r)$ ($x \in \Theta$), ne se recoupent pas, et, d'autre part, qu'il existe une longueur $d > 0$ telle que D ne contienne aucun segment de droite de longueur supérieure à d (propriété d'horizon fini). L'état d'une particule est caractérisé par sa position $x \in D$, et l'angle $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de son vecteur vitesse par rapport à l'horizontale, puisque la norme de la vitesse vaut 1. L'espace de phase est donc l'ensemble $D \times \mathbb{T}$.

Le résultat de diffusion, obtenu par Bunimovich et Sinai [8], peut s'exprimer comme suit. Soit une mesure de probabilité P sur $D \times \mathbb{T}$, qui admette une densité $\rho \in C^1(D \times \mathbb{T})$, et dont le support soit compris dans le parallélogramme $\{sv_1 + tv_2 : 0 \leq s, t \leq 1\}$. Désignons par $X_t(x, \theta)$ la position au temps

$t \geq 0$ d'une particule de conditions initiales (x, θ) . La suite $(X_t)_{t \geq 0}$ est donc une suite de vecteurs aléatoires sur l'espace de probabilité $(D \times \mathbb{T}, \mu)$. Alors, quand $t \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{t}} X_t \xrightarrow{D} \mathcal{N}, \quad (1.2)$$

où $\mathcal{N}$ est une distribution gaussienne non-dégénérée sur $\mathbb{R}^2$. Ici, $\xrightarrow{D}$ indique une convergence en distribution : la distribution de $\frac{1}{\sqrt{t}} X_t$ tend vaguement vers $\mathcal{N}$ lorsque $t \rightarrow \infty$, ce qui veut dire encore que, pour toute fonction continue $u \in C(\mathbb{R}^2)$ à support compact, $E(u \circ \frac{1}{\sqrt{t}} X_t) \rightarrow \int u d\mathcal{N}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans [8] toujours, ce résultat, qui est un théorème de la limite centrale, est même amélioré en un principe d'invariance [5].

La démonstration fait intervenir de façon cruciale certaines caractéristiques géométriques du domaine D . D'une part, les obstacles forment un réseau périodique, ce qui garantit son homogénéité. On évite par exemple que les particules ne se concentrent dans certaines régions de l'espace. D'autre part, le domaine D est strictement concave, parce que les obstacles sont des disques. Ce second fait assure une importante dispersion des trajectoires, et permet en fait à l'hypothèse de désordre moléculaire d'être vérifiée. On dit que le système est *hyperbolique*, ou encore *chaotique*. Nous préciserons le sens de ces termes plus loin, dans un contexte un peu plus restreint.

Notre objectif est, au sens large, de voir quels phénomènes on peut observer pour une dynamique qui ne serait plus hyperbolique, mais parabolique ; en termes simples, ce qui se passe quand les disques sont remplacés par des carrés. Une situation de ce genre a déjà été envisagée par les Ehrenfest (voir [45]) en 1911. Dans leur modèle, des obstacles carrés sont répartis au hasard dans le plan, mais ont toujours une diagonale parallèle à l'horizontale. Au début, la vitesse de toutes les particules est horizontale, de sorte qu'après des chocs successifs avec les obstacles carrés, les vitesses seront toujours verticales ou horizontales. En fait, on s'aperçoit facilement que, pour certaines distributions périodiques des carrés, les trajectoires horizontales et verticales seront elles-mêmes beaucoup trop régulières pour être librement diffusée dans l'espace. Le caractère déterministe de la dynamique semble ici beaucoup plus contraignant.

2. Produits croisés. Comme les modèles de gaz que nous venons de présenter sont en fait d'une étude assez délicate, nous considérerons une classe de modèles plus simples, dits en *produits croisés*, que nous décrivons à présent. Nous pourrions mettre à jour certaines différences, mais aussi des analogies, entre une dynamique hyperbolique et non-hyperbolique.

Soit un ensemble X , et soit une application $f : X \rightarrow X$. Étant donné ensuite une fonction $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, on considère un système dynamique sur le "cylindre" $X \times \mathbb{R}$, défini par l'application

$$F : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (f(x), y + \psi(x)). \quad (1.3)$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on définit implicitement une fonction $S_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$F^n(x, y) = (f^n(x), y + S_n(x)). \quad (1.4)$$

Explicitement, on a donc $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ f^k(x). \quad (1.5)$$

Maintenant, si X est muni d'une mesure de probabilité P , et si les fonctions S_n sont P -mesurables pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut considérer $(S_n)_{n \geq 0}$ comme une suite de variables aléatoires sur l'espace de probabilité (X, P) , et étudier ses propriétés statistiques.

3. Plan. Le reste de cette première partie est organisé comme suit. Dans la première section de ce chapitre, nous dressons une liste de quelques théorèmes probabilistes qu'on peut espérer démontrer pour certaines dynamiques déterministes. La section 1.2 contient un aperçu de la théorie des applications dilatantes de l'intervalle, applications typiquement hyperboliques, pour lesquelles de nombreux résultats sont connus. A la section 1.3, enfin, on considère une suite de variables aléatoires engendrées par une rotation irrationnelle du cercle, qui est un des exemples les plus simples d'application ergodique non-hyperbolique.

Le lecteur qui s'intéresserait seulement aux résultats qui nous sont dus, peut se contenter de la proposition 3, à la section 1.2 §5, et des trois propositions de la section 1.3 §5. Cela dit, on donne à la section 1.3 §3, des renseignements cruciaux pour comprendre les démonstrations. Enfin, à la section 1.3 §6 et §7, on a posé quelques questions et avancé quelques idées pour aller plus loin. Toutes les démonstrations longues ou techniques sont reportées au chapitre suivant.

1.1 Quelques théorèmes probabilistes

Pour le modèle de Lorentz, on a vu que la suite $(\frac{1}{\sqrt{t}}X_t)$ satisfaisait à un théorème de la limite centrale non dégénéré. C'est une façon d'exprimer que le processus (X_t) est diffusif, ou encore que les trajectoires de ce processus sont essentiellement aléatoires. Bien que, dans la suite, le théorème de la limite centrale sera le seul dont on se préoccupera vraiment, on a pensé bon d'indiquer ici, en suivant partiellement [25], quelques résultats probabilistes que l'on peut établir, dans certains cas, pour la suite (S_n) définie en (1.5). Ces cas, typiquement, sont ceux où la dynamique f est hyperbolique ; nous y reviendrons à la section suivante.

On s'est limité à des théorèmes qui décrivent l'allure de la distribution de (S_n) . Ensuite, tous, hormis peut-être le premier, expriment en fin de compte cette même idée, qu'à une certaine échelle, la distribution de (S_n) est approximativement gaussienne ; mais ce fait peut se caractériser de façons

variées. Enfin, nos énoncés sont donnés à titre d'exemple, et on peut en imaginer de nombreuses variantes.

Commençons par préciser un peu le cadre établi au paragraphe précédent. Supposons que la dynamique f laisse invariante une mesure de probabilité P . Ceci signifie que f est P -mesurable et que, pour tout ensemble P -mesurable $A \subset X$, la relation

$$P(f^{-1}(A)) = P(A) \quad (1.6)$$

est satisfaite. Nous prendrons (X, P) comme espace de probabilité.

On suppose de plus que $\psi \in L^1(X, P)$. On observe alors que les variables $\psi \circ f^k$ ($k \in \mathbb{N}$) sont équidistribuées, et, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a donc

$$E(\psi \circ f^k) = E(\psi). \quad (1.7)$$

Quitte à remplacer ψ par $\psi - E(\psi)$, on peut supposer $E(\psi) = 0$, ce que nous ferons dans la suite. On a la liste d'énoncés suivante.

1. Loi forte des grands nombres. On dit que (S_n) satisfait à la forte loi des grands nombres si la suite $\frac{1}{n}S_n$ converge P -presque partout, ou presque sûrement, vers $E(\psi) = 0$. Quand f est P -ergodique, c'est une conséquence du théorème ergodique de Birkhoff.
2. Croissance linéaire de la variance. A partir d'ici, nous supposons que $\psi \in L^2(X, P)$. On dit que le processus (S_n) est diffusif au sens de la variance, s'il existe un nombre $\sigma > 0$ tel que

$$\frac{1}{n}E(S_n^2) \rightarrow \sigma^2 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

C'est un résultat probabiliste essentiel : la caractéristique première d'un mouvement aléatoire est de parcourir en un temps n une distance d'ordre $\sqrt{n}$. Par la suite, nous supposons (1.8) satisfaite. De plus, quitte, à remplacer ψ par ψ/σ , on peut supposer $\sigma^2 = 1$, ce que nous ferons.

3. Grandes déviations. On regroupe sous ce terme un ensemble de résultats qui caractérisent le centrage de (S_n) autour de sa moyenne. Par exemple, on dit que l'inégalité d'Azuma est satisfaite s'il existe des constantes $C < +\infty$ et $c > 0$ telles que, pour tout $a > 0$ on ait

$$P(|S_n| \geq a) \leq C e^{-\frac{ca^2}{n}}. \quad (1.9)$$

D'une façon, en un sens, plus générale, (S_n) sera dite satisfaire à un principe de grandes déviations pour le taux $I \geq 0$, si pour tout $a > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{1}{n}|S_n| \geq a\right) = -I(a). \quad (1.10)$$

4. Théorème de la limite centrale. La suite (S_n) satisfait à ce théorème si

$$\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

où $N(0, 1)$ désigne une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance 1. La suite (S_n) satisfait à des estimations de Berry-Esseen si, de plus il existe une constante $C < +\infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on ait

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq a\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (1.12)$$

5. Théorème de la limite locale. La suite (S_n) satisfait à un théorème de la limite locale, si, pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\sqrt{n} P(S_n \in I + a\sqrt{n}) \rightarrow \frac{m_L(I) e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.13)$$

6. Estimations gaussiennes. La suite (S_n) satisfait à des estimations gaussiennes, s'il existe deux constantes $C < +\infty$ et $c > 0$ telles que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on ait

$$\frac{c}{\sqrt{n}} \int_{I \cap B(0, cn)} e^{-\frac{cx^2}{2}} dx \leq P(S_n \in I) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \int_I e^{-\frac{cx^2}{2}} dx. \quad (1.14)$$

Remarquons que les deux derniers théorèmes ne sont pas vrais, sans quelque adaptation, pour une marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$.

1.2 Le cas des applications dilatantes de l'intervalle

Dans cette section, nous supposons que la dynamique est donnée par une application $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ qui est dilatante par morceaux, c'est-à-dire de classe C^2 et telle que $|\partial f| \geq c$ pour un certain $c > 1$, tout ceci sauf sur un ensemble fini. Il est bien connu [29] qu'il existe au moins une mesure de probabilité P absolument continue par rapport à Lebesgue et invariante sous f , et qu'en fait cette mesure est unique pour peu que f ait une orbite dense.

C'est un exemple typique de dynamique hyperbolique. Le théorème ergodique de Birkhoff, et le fait que $|\partial f| \geq c > 1$ sauf sur un ensemble fini, garantit que, pour P -presque tout $x \in \mathbb{T}$, la limite suivante existe, et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |\partial f^n(x)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |\partial f(f^k(x))| = \gamma(x) \geq \ln c > 0. \quad (1.15)$$

Le nombre $\gamma(x)$ est appelé exposant de Lyapunov pour la condition initiale x . L'existence d'un exposant de Lyapunov positif peut servir de définition d'une dynamique hyperbolique.

Dans la suite de cette section, nous prendrons $(\mathbb{T}, P)$ comme espace de probabilité, où P est invariante sous f . Cela dit, nous nous intéresserons principalement au cas particulier où

$$f_d : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, x \mapsto 2x \pmod{1}. \quad (1.16)$$

Ici, l'indice d signifie que cette application *double* les angles. On vérifie que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure de probabilité invariante sous f_d qui soit absolument continue par rapport à Lebesgue. Donc, quand $f = f_d$, l'espace de probabilité est $(\mathbb{T}, m_L)$.

Nous verrons d'abord un exemple simple de fonction ψ pour laquelle l'étude de (S_n) est rendue complètement élémentaire, quand $f = f_d$. Puis, nous définirons l'opérateur de transfert associé à f_d , et en donnerons quelques propriétés assez immédiates. Ceci nous permettra de voir comment obtenir un théorème de la limite centrale non dégénéré pour une fonction ψ plus générale. Pour finir, nous verrons ce qu'il advient lorsqu'on munit $\mathbb{T}$ d'une autre mesure de probabilité que la mesure invariante.

Il est clair que nous ne décrivons ici qu'un cas particulier d'une théorie bien établie. On peut consulter par exemple l'article de Hofbauer et Keller [29], ou l'ouvrage plus récent de Baladi [4]. Mais nous procédons d'une façon peut-être un peu atypique : on part d'inégalités de décroissance des corrélations, desquelles on déduit le comportement linéaire de la variance et le théorème de la limite centrale. En fait, c'est exactement la même approche qui sera utilisée pour démontrer les résultats de la section suivante, où la dynamique f est une rotation. Ainsi, c'est pour souligner l'analogie avec ce cas, et attirer en quelque sorte l'attention sur l'efficacité de cette méthode, que nous avons inclus ici quelques développements qui auraient pu sembler superflus. Il est à remarquer que, récemment, Stenlund [44] est parti d'un point de vue similaire : il a montré comment un contrôle de certaines corrélations permettait de (re)démontrer des résultats probabilistes non-triviaux pour des systèmes déterministes.

1. Un exemple. Soit, pour cet exemple, la fonction $\psi_* : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\psi_*(x) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2, \quad \psi_*(x) = -1 \quad \text{si} \quad 1/2 \leq x < 1. \quad (1.17)$$

On a donc

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_*(2^k x). \quad (1.18)$$

Pour $n \in \mathbb{N}_0$, les fonctions

$$\psi_{*n}(\cdot) := \psi_*(2^n \cdot) \quad (1.19)$$

portent le nom de fonctions de *Rademacher*. On vérifie facilement que la suite $(\psi_{*n})_{n \geq 1}$ constitue une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur l'espace $(\mathbb{T}, m_L)$. En fait (S_n) n'est autre que la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$! Il en vient que les théorèmes 1 à 4 du dernier paragraphe de la section précédente sont immédiatement vérifiés. Les deux derniers théorèmes doivent être un peu adaptés pour tenir compte du caractère discret de S_n ($n \in \mathbb{N}_0$). Le 5^e théorème est vérifié si on remplace m_L par la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$; le 6^e est vérifié si on remplace les intégrales sur $x \in \mathbb{R}$ par des sommes sur $x \in \mathbb{Z}$.

2. L'opérateur de transfert. Commençons par deux définitions classiques. Si $u \in L^1(\mathbb{T})$, on définit

$$\text{Var}(u) = \sup \left\{ \int_0^1 u \partial v \, dx : v \in C^1(\mathbb{T}), \|v\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (1.20)$$

On définit aussi l'ensemble

$$\text{BV}(\mathbb{T}) := \{u \in L^1(\mathbb{T}) : \text{Var}(u) < \infty\}. \quad (1.21)$$

On note que, si $u \in C^1(\mathbb{T})$, alors $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$, et $\text{Var}(u) = \int_0^1 |\partial u| dx$.

Si f_d est donnée par (1.16), on définit un opérateur T sur $C^0(\mathbb{T})$ par la relation

$$Tu(x) = u \circ f_d(x) = u(2x), \quad (1.22)$$

et on l'appelle l'opérateur de transfert associé à f_d . On définit son adjoint T^* par rapport à la mesure de Lebesgue, comme un opérateur sur les mesures finies, tel que

$$T^*\mu(u) = \mu(Tu), \quad (1.23)$$

pour toute mesure finie μ et toute fonction continue u . Explicitement, si μ admet une densité ρ , on a

$$T^*\rho(x) = \sum_{y: f(y)=x} \frac{\rho(y)}{|\partial f(y)|} = \frac{1}{2} \left(\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(\frac{x+1}{2}\right) \right). \quad (1.24)$$

Lemme 1. *Si $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$, alors*

$$\text{Var}(T^n u) = 2^n \text{Var}(u) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (1.25)$$

Si de plus u est de moyenne nulle, alors

$$\|T^{*n}u\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \text{Var}(u) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (1.26)$$

Démonstration. Si $u \in C^1(\mathbb{T})$, l'égalité (1.25) se vérifie immédiatement par changement de variables. Si on a seulement $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$, on trouve une suite $(u_n) \subset C^1(\mathbb{T})$ qui converge m_L -p.p. vers u et telle que $\text{Var}(u_n) \rightarrow \text{Var}(u)$. L'égalité (1.25) est donc prouvée. Pour démontrer (1.26), on observe que

$$T^{*n}u(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} u\left(\frac{x+j}{2^n}\right).$$

En vertu du lemme 7 du chapitre suivant, et puisque $\int_{\mathbb{T}} u dx = 0$, la somme qui apparaît dans cette dernière égalité est bornée, en valeur absolue, par $\text{Var}(u)$. $\square$

3. Décroissance des corrélations. Soit une suite $(X_k)_{k \geq 0}$ de variables aléatoires. On peut essayer de quantifier de plusieurs façons le défaut d'indépendance des variables de cette suite. On parle de *décroissance exponentielle des corrélations de deux points* s'il existe des constantes $C < +\infty$ et $c > 0$ telles que pour tout $k, l \in \mathbb{N}$ on ait

$$|\mathbb{E}(X_k X_l) - \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l)| \leq C e^{-c|k-l|}. \quad (1.27)$$

On peut obtenir comme suit une version plus forte de ces inégalités. Si $k \in \mathbb{N}$, désignons par $\mathcal{F}_k$ la tribu engendrée par les variables $X_0, \dots, X_k$. On parle de *décroissance exponentielle des corrélations d'un point et du passé* s'il existe des constantes $C < +\infty$ et $c > 0$ telles que pour tout $k, l \in \mathbb{N}$ on ait

$$|\mathbb{E}(X_l | \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(X_l)| \leq C e^{-c(l-k)}, \quad l > k. \quad (1.28)$$

Bien sûr, on peut généraliser ces notions à plus de deux points. Par exemple, on aura une décroissance exponentielle de deux points et du passé s'il existe des constantes $C < +\infty$ et $c > 0$ telles que pour tout $k, l, m \in \mathbb{N}$ on ait

$$|\mathbb{E}(X_m X_l | \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(X_m X_l)| \leq C e^{-c(l-k)}, \quad m \geq l > k. \quad (1.29)$$

D'une part, l'inégalité (1.26) nous permet d'établir des sortes d'inégalités de décroissance exponentielle par rapport au passé pour la suite $(\psi \circ f_d^k)$, lorsque $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$: si on remplace la tribu $\mathcal{F}_k$ par l'ensemble des fonctions u telles que $\text{Var}(u) \leq 2^k$, on voit que (1.30) et (1.31) ci-dessous jouent respectivement le rôle de (1.28) et (1.29). D'autre part, l'inégalité (1.25) nous montre qu'il est effectivement raisonnable de substituer à $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des fonctions u telles que $\text{Var}(u) \leq 2^k$.

Lemme 2. *Soit $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$, et soit $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$ de moyenne nulle. Alors, pour tout $l, m \in \mathbb{N}$,*

$$|\mathbb{E}(u \cdot \psi \circ f_d^l)| \leq \frac{1}{2^l} \text{Var}(u) \mathbb{E}(|\psi|), \quad (1.30)$$

$$|\mathbb{E}(u \cdot \psi \circ f_d^l \cdot \psi \circ f_d^m)| \leq \frac{1}{2^l} \text{Var}(u) \|\psi\|_\infty \mathbb{E}(|\psi|), \quad m \geq l. \quad (1.31)$$

Démonstration. La borne (1.30) suit de la propriété (1.26) et du fait que u est d'intégrale nulle :

$$|\mathbb{E}(u \cdot \psi \circ f_d^l)| = \left| \int_{\mathbb{T}} u \cdot T^l \psi \, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{T}} T^{*l} u \cdot \psi \, dx \right| \leq \|T^{*l} u\|_\infty \|\psi\|_1 \leq \frac{1}{2^l} \text{Var}(u) \|\psi\|_1.$$

On procède pour (1.31) de manière analogue, et on utilise de plus que $\|T\|_{\infty \rightarrow \infty} = 1$:

$$|\mathbb{E}(u \cdot \psi \circ f_d^l \cdot \psi \circ f_d^m)| = \left| \int_{\mathbb{T}} u \cdot (\psi \circ f_d^l \cdot \psi \circ f_d^{m-l}) \, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{T}} T^{*l} u \cdot \psi \cdot T^{m-l} \psi \, dx \right| \leq \frac{1}{2^l} \text{Var}(u) \|\psi\|_\infty \|\psi\|_1.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

4. Croissance linéaire de la variance. Le comportement linéaire de la variance est assuré par une décroissance rapide des corrélations de deux points.

Proposition 1. *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{P})$. S'il existe des constantes $C < +\infty$ et $c > 0$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}(\psi \cdot \psi \circ f^k) \leq C e^{-ck}, \quad (1.32)$$

alors, pour $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n^2) \rightarrow \sigma^2 := \mathbb{E}(\psi^2) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\psi \cdot \psi \circ f^k) < +\infty. \quad (1.33)$$

De plus, pour que $\sigma^2 > 0$, il faut et il suffit que la suite (S_n) ne soit pas bornée dans $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{P})$.

Démonstration. Comme la mesure P est invariante sous f , on établit par un calcul direct que

$$\begin{aligned} E(S_n^2) &= \|S_n\|_2^2 = n \int_{\mathbb{T}} \psi^2 P(dx) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{T}} \psi \cdot \psi \circ f^j(x) P(dx) \\ &= n E(\psi^2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k E(\psi \cdot \psi \circ f^j) \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse (1.32), la somme $\sum_{j=1}^k E(\psi \cdot \psi \circ f^j)$ converge pour $k \rightarrow \infty$, et l'on a en fait

$$\sum_{j=1}^k E(\psi \cdot \psi \circ f^j) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\psi \cdot \psi \circ f^j) + \mathcal{O}(e^{-ck}).$$

Dès lors,

$$E(S_n^2) = n \left(E(\psi^2) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} E(\psi \cdot \psi \circ f^j) \right) + \mathcal{O}(1). \quad (1.34)$$

Ceci montre la première partie de la proposition. Ensuite, il est clair que, si la suite (S_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{T}, P)$, alors $\sigma^2 = 0$. Réciproquement, si $\sigma^2 = 0$, il suit de (1.34) que (S_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{T}, P)$. $\square$

De cette proposition et de l'inégalité (1.30) du lemme 2, on déduit immédiatement le

Corollaire 1. *Soit la suite (S_n) pour $f = f_d$, et $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle. Si (S_n) n'est pas bornée dans $L^2(\mathbb{T}, m_L)$, alors $\frac{1}{n} E(S_n^2)$ converge vers un nombre strictement positif quand $n \rightarrow \infty$.*

Il serait bien entendu intéressant de savoir quand la suite (S_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{T}, P)$. Le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans Herman [28], p.183, permet parfois de répondre partiellement à cette question.

Lemme 3. *La suite (S_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{T}, P)$ si et seulement si il existe une fonction $u \in L^2(\mathbb{T}, P)$ telle que $u \circ f - u = \psi$.*

Nous allons utiliser le lemme 3 pour montrer que, pour $f = f_d$ et $\psi \in BV(\mathbb{T})$, la suite (S_n) n'est pas "généralement" bornée dans $L^2(\mathbb{T}, dx)$. Il est clair tout d'abord que l'équation $u \circ f_d - u = \psi$ admettra une solution u seulement si $\int_{\mathbb{T}} \psi dx = 0$. En effet, pour tout $u \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\int_{\mathbb{T}} (u(2x) - u(x)) dx = 0$. Nous posons

$$\mathcal{S} = \{\psi \in BV(\mathbb{T}) : \exists u \in L^2(\mathbb{T}) : u \circ f_d - u = \psi\} \quad (1.35)$$

Donnons encore quelques notations et définitions. D'abord, on munit l'espace $BV(\mathbb{T})$ de la norme $\|\cdot\|_{BV} := \text{Var}(\cdot) + \|\cdot\|_1$. Ensuite, on pose

$$BV_0(\mathbb{T}) = \{u \in BV(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} u dx = 0\}. \quad (1.36)$$

Enfin, considérons un espace vectoriel E , et $E' \subset E$ un sous-espace vectoriel. L'espace vectoriel quotient E/E' s'obtient en identifiant tous les points de E dont la différence est un élément de E' . La *codimension* de E' se définit comme la dimension de E/E' .

Proposition 2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble défini par (1.35), et soit $\mathcal{S}^c$ son complémentaire dans $BV_0(\mathbb{T})$.

1) L'espace $\mathcal{S}$ est de codimension infinie dans $BV_0(\mathbb{T})$.

2) L'ensemble $\mathcal{S}^c$ contient un ouvert dense dans $BV_0(\mathbb{T})$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_{BV}$.

Remarque. La démonstration, qui est reportée au chapitre suivant, montre que la proposition reste vraie si on remplace $BV(\mathbb{T})$ par $C^k(\mathbb{T})$ ($k \geq 1$), muni par exemple de sa topologie naturelle.

5. Le théorème de la limite centrale Nous allons déduire un théorème de la limite centrale pour (S_n) de la proposition 3 ci-dessous, qui sera surtout utile plus tard pour démontrer nos résultats sur les rotations. Sa démonstration figure dans le chapitre suivant. Soit cette fois P une quelconque mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$. Nous prenons $(\mathbb{T}, P)$ comme espace de probabilité.

Proposition 3. Soit une suite $(X_{j,k})_{j,k \geq 1} \subset BV(\mathbb{T})$ de variables aléatoires de moyenne nulle. Soit $Y_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$. Soit aussi une suite $(c_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{N}_0$ telle que, pour un certain $\rho > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on ait

$$c_{k+1} \geq e^{2\rho} c_k. \quad (1.37)$$

Supposons qu'il existe des constantes $C, \epsilon > 0$ telles que

1. pour tout $j, k \in \mathbb{N}_0$, $\|X_{j,k}\|_\infty \leq C$ et $\text{Var}(X_{j,k}) \leq C c_k$,

2. pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$, pour tout $\phi \in BV(\mathbb{T})$ de moyenne nulle, tout $j \in \mathbb{N}_0$, et tout $t \geq s \geq 1$,

$$|\mathbb{E}(\phi \cdot X_{j,s})| \leq C \text{Var}(\phi) \frac{s^\beta}{c_s}, \quad (1.38)$$

$$|\mathbb{E}(\phi \cdot X_{j,s} \cdot X_{j,t})| \leq C \text{Var}(\phi) \frac{s^\beta}{c_s}, \quad (1.39)$$

3. $\epsilon \leq \sigma_n^2 \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, où $\sigma_n^2 := \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_n^2)$.

Alors, quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{Y_n}{\sqrt{\mathbb{E}(Y_n^2)}} = \frac{Y_n}{\sigma_n \sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarque. A la lecture de la démonstration, on constate que la vitesse de convergence ne dépend que des paramètres C, β, ϵ et ρ . Concrètement, ceci signifie que, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle compact, la convergence vers 0 de la différence

$$P(Y_n/\sigma_n \sqrt{n} \in I) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I e^{x^2/2} dx$$

est entièrement contrôlée par ces paramètres.

Corollaire 2. Soit la suite (S_n) pour l'application $f = f_d$, et pour une fonction $\psi \in BV(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n^2)$. Si la suite (S_n) n'est pas bornée dans $L^2(\mathbb{T})$, alors $S_n/\sigma_n \sqrt{n} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$.

Démonstration. Nous allons appliquer la proposition 3 à la suite $X_{j,k} := \psi \circ f_d^k$, $j, k \in \mathbb{N}_0$. On a donc $S_n = Y_n$. Nous posons $c_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. L'hypothèse 1. est satisfaite en vertu de (1.25). Le lemme 2 assure que l'hypothèse 2. est satisfaite pour $\beta = 0$. Enfin, le corollaire 1 montre que l'hypothèse 3. est satisfaite également. $\square$

6. Le choix de la mesure de probabilité. Des paragraphes précédents, il apparaît qu'il est commode de choisir comme mesure de probabilité une mesure invariante sous la dynamique f . Mais en fait, l'étude de (S_n) sur un espace de probabilité $(\mathbb{T}, \mathbf{P})$, où $\mathbf{P}$ est une quelconque mesure à variation bornée, se ramène dans bien des cas à l'étude de cette suite par rapport aux mesures à variation bornée, invariantes sous f .

Voyons ceci dans plus de détails pour le cas où $f = f_d$. Le fait fondamental est que toute mesure de probabilité $\mathbf{P}$, de densité ρ à variation bornée, tend exponentiellement vers la mesure de Lebesgue. En effet, on déduit de (1.26) que

$$\|\mathbf{T}^{*n}\rho - 1\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \text{Var}(\rho). \quad (1.40)$$

On établit alors par exemple ceci.

Proposition 4. *Soit $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ à variation bornée. La distribution de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ sur l'espace de probabilité $(\mathbb{T}, \mathbf{P})$ converge vaguement vers la distribution de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ sur $(\mathbb{T}, m_L)$.*

Démonstration. Soit $\tilde{S}_n := \sum_{k=\lfloor n^{1/4} \rfloor}^n \psi \circ f^k$ ($n \in \mathbb{N}$). Puisque

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|S_n - \tilde{S}_n\|_\infty \leq \frac{\|\psi\|_\infty}{n^{1/4}} \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$, on peut étudier la distribution de $\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{S}_n$ au lieu de celle de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$. Soit $\rho \in \text{BV}(\mathbb{T})$ la densité de $\mathbf{P}$. Il suffit de voir que, pour n'importe quelle fonction continue u à support compact sur $\mathbb{R}$, on a

$$\Delta_n := \int_{\mathbb{T}} \left(u \circ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{S}_n \right) \cdot \rho - u \circ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{S}_n \right) \right) dx \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. Or, d'après (1.40), on a

$$|\Delta_n| = \left| \int_{\mathbb{T}} u \circ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{n-\lfloor n^{1/4} \rfloor} \right) \cdot (\mathbf{T}^{*\lfloor n^{1/4} \rfloor} \rho - 1) dx \right| \leq \|u\|_\infty \frac{\text{Var}(\rho)}{2^{\lfloor n^{1/4} \rfloor}} \rightarrow 0.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

1.3 Le cas des rotations du cercle

Notations. les conventions suivantes valent pour toute cette section.

1. Les fractions p/q sont supposées irréductibles, c'est-à-dire que q ne divise pas p .
2. On désigne par α un nombre irrationnel; on écrit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. La suite (a_n) est la suite des quotients partiels de α , et (p_n/q_n) celle de ses réduites. Voir le §1 pour des définitions.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. A partir d'ici, on prendra pour f une rotation irrationnelle f_α :

$$f_\alpha(x) = x + \alpha.$$

Soit aussi $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle. Donc, pour $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $x \in \mathbb{T}$, on a explicitement

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi(x + k\alpha). \quad (1.41)$$

La mesure de Lebesgue est l'unique mesure de probabilité invariante sous f_α . On prend $(\mathbb{T}, m_L)$ comme espace de probabilité.

Dans les §1 et §2, nous donnons quelques éléments de théorie de l'approximation *diophantienne*, c'est-à-dire de l'approximation de α par des nombres rationnels. On introduit en particulier les fractions continues. Puis, au §3, on verra comment s'en servir pour comprendre la distribution de (S_n) définie par (1.41). On note T_α l'opérateur de transfert associé à f_α . On a $T_\alpha u(x) = u(x + \alpha)$. On calcule immédiatement que $T_\alpha^* = T_{-\alpha}$. Comme l'opérateur $T_{-\alpha}$ préserve la norme $\|\cdot\|_\infty$, une inégalité du type (1.26), qui avait joué un rôle crucial à la section précédente, ne peut certainement plus être satisfaite pour l'opérateur T_α^* . Néanmoins, à la lecture du §3, on comprendra, nous l'espérons, pourquoi on s'attend encore à des décroissances des corrélations par passage à des sous-suites adéquates.

Nous mentionnons au §4 quelques résultats connus sur (S_n) . Cette suite a déjà été largement étudiée. Citons les ouvrages de Kuipers et Niederreiter [31], de Drmota et Tichy [16], l'article d'Adamczewski [1], ainsi que la fascinante caverne d'Ali Baba de Herman [28], de laquelle proviennent plusieurs éléments de ce chapitre. Nos résultats sont finalement exposés au §5. Le §6 contient des questions ouvertes, et le §7 la description d'un modèle plus "physique" que celui des produits croisés, dans lequel, toutefois, il n'est peut-être pas entièrement déraisonnable de penser qu'on retrouve des comportements analogues à ceux de (S_n) . Ce dernier paragraphe est purement spéculatif.

1. Nombre irrationnels et fractions continues. Nous utiliserons quelques résultats élémentaires de la théorie de l'approximation diophantienne. Comme, dans ce paragraphe et le suivant, nous abordons un sujet très classique, nous ne donnerons pratiquement aucune démonstration. On trouvera de nombreux renseignements dans les chapitres 10 et 11 de Hardy et Wright [26], ainsi qu'au chapitre 5 de Herman [28] ; pour la théorie des fractions continues on peut consulter le traité de Lang [33].

Un nombre α est *irrationnel* si l'équation $q\alpha - p = 0$ n'admet aucune solution pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_0$. Le principe de Dirichlet [28] affirme que, de façon équivalente, un nombre α est irrationnel si et seulement si l'inéquation $0 \leq |q\alpha - p| < 1/q$ admet une infinité de solutions pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_0$. Si un nombre rationnel p/q résout $0 < |\alpha - p/q| < 1/q^2$, on dit que p/q est une *approximation rationnelle* de α .

La théorie des fractions continues fournit un algorithme pour trouver les approximations rationnelles d'un nombre $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. La suite $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{N}$ des *quotients partiels* de α se définit par induction. On écrit $\alpha = [\alpha] + \bar{\alpha}$, et on pose $a_0 := [\alpha]$ et $\alpha_1 = 1/\bar{\alpha}$. Puis, pour $n \geq 1$, on pose $a_n = [\alpha_n]$ et $\alpha_{n+1} = 1/\bar{\alpha}_n$. Ainsi, tous les quotients partiels, sauf peut-être a_0 sont strictement positifs.

Les quotients partiels de α permettent de définir la suite $(p_n/q_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{Q}$ de ses *réduites*. On pose

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + 1, & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{aligned} \tag{1.42}$$

Il est facile de vérifier que les suites (p_n) et (q_n) croissent au moins exponentiellement avec n . On démontre que les réduites sont des fractions irréductibles. Le résultat fondamental de la théorie s'énonce comme suit : pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} \leq |q_n \alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n}. \tag{1.43}$$

Ainsi les réduites sont des approximations rationnelles de α .

2. Classes de nombres irrationnels Nous poursuivons ici notre étude sommaire de l'approximation diophantienne. On a vu que les nombres irrationnels se distinguaient par l'existence d'une infinité de solutions à l'inéquation $0 < |q\alpha - p| < 1/q$, pour $q \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{Z}$. On peut créer des sous-ensembles de nombres irrationnels à l'aide d'autres inégalités similaires.

Introduisons un peu de terminologie. On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est un nombre de *Liouville* si, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, l'inégalité $|q\alpha - p| < 1/q^n$ admet une infinité de solutions. Sinon, on dit que α est *diophantien*. On montre que tout nombre diophantien est un nombre diophantien de type (C, β) , c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ et un nombre $\beta \geq 0$ tels que pour tout $q \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $|q\alpha - p| > C/q^{1+\beta}$. Un nombre diophantien est du type de *Roth* si, pour tout $\beta > 0$, il existe une constante $C(\beta) > 0$ telle que α soit diophantien de type $(C(\beta), \beta)$. Enfin un nombre est de type *constant* s'il est diophantien de type $(C, 0)$ pour une certaine constante $C > 0$.

Etant donné ces définitions, on peut essayer de trouver des nombres d'un certain type. Liouville a montré que, si α était un nombre irrationnel, racine d'un polynôme de degré $2 + \beta$ à coefficients entiers, alors α était diophantien de type (C, β) pour une certaine constante $C > 0$. Ces nombres sont appelés *algébriques*, et Roth, améliorant en partie le résultat de Liouville, a prouvé que tous les nombres algébriques sont en fait du type de Roth. Il reste que le théorème de Liouville montre que les équations du second degré nous fournissent des nombres de type constant.

Mais un moyen très efficace de produire des nombres d'un type voulu consiste à utiliser la théorie des fractions continues. Montrons ceci sur deux exemples. Seul le deuxième servira dans la suite.

Proposition 5. *Il existe des nombres de Liouville.*

Démonstration. On montre que toute suite $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{N}$, telle que $a_n > 0$ pour $n > 0$, est une suite de quotients partiels d'un et un seul nombre irrationnel α . Il suffit donc de construire une suite (a_n) de quotients partiels. Pour ce faire, nous aurons besoin de fabriquer simultanément une suite auxiliaire, qui est en fait la suite des numérateurs des réduites de α . On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $q_0 = q_1 = 1$. Puis, pour $n \geq 2$, on pose

$$a_n = 2^{q_{n-1}}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Soit alors α le nombre représenté par les quotients (a_n) , et soit (p_n/q_n) la suite des réduites de α . L'inégalité fondamentale (1.43) implique

$$|q_n \alpha - p_n| \leq \frac{1}{2^{q_n} q_n}, \quad n \geq 2.$$

Le nombre α est donc un nombre de Liouville. $\square$

Lemme 4. *Un nombre irrationnel est de type constant si et seulement si sa suite de quotients partiels est bornée.*

Démonstration. Si α est de type constant, on trouve une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{C}{q_n} \leq |q_n \alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}},$$

où la seconde inégalité n'est autre que (1.43). Donc $q_{n+1} \leq q_n/C$. D'après (1.42), ceci implique $a_{n+1} \leq 1/C$ pour $n \geq 1$.

Réciproquement, si on sait que la suite (a_n) est bornée, il résulte de (1.43), que, pour une certaine constante $C > 0$, on aura $|q_n \alpha - p_n| \geq C/q_n$. Or il est connu que, si l'inégalité $|q\alpha - p| > 1/2q$ est vérifiée pour $q \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{Z}$, alors p/q est une réduite de α [26]. Il vient de cela que α est de type constant pour la constante $\min\{1/2, C\}$. $\square$

Enfin se pose la question de l'abondance des nombres d'une certaine classe. Nous ne donnons ici qu'un petit renseignement à ce sujet : les nombres de type constants ne forment qu'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, alors que les nombres de Roth forment un ensemble de mesure de Lebesgue pleine. Ceci implique en particulier que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle.

3. L'inégalité de Denjoy-Koksma et le système d'Ostrowski. Mettons à présent de côté les questions d'approximation diophantienne pour voir comment la théorie des fractions continues peut aider à comprendre la suite (S_n) . Si q est le dénominateur d'une réduite de α , alors la rotation $T_{\overline{q\alpha}}$ est une rotation d'au plus $1/q$. Mais on a plus : les points $0, \overline{\alpha}, \dots, \overline{(q-1)\alpha}$ sont répartis assez uniformément sur le cercle. Plus précisément, on a le

Lemme 5. *Soit p/q une approximation rationnelle de α , et soit $k \in \{0, \dots, q-1\}$. Il y a un et un seul élément de l'ensemble $\{0, \overline{\alpha}, \dots, \overline{(q-1)\alpha}\}$ dans l'intervalle $[k/q, (k+1)/q]$.*

Pour la démonstration, on peut consulter Herman [28] p.64, ou le chapitre suivant, dans lequel nous montrons en fait un peu plus. Ce lemme permet d'établir un cas particulier de *l'inégalité de Denjoy-Koksma* :

Proposition 6. *Soit p/q une approximation rationnelle de α , et soit une fonction $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle. Alors*

$$\|S_q\|_\infty \leq \text{Var}(\psi). \quad (1.44)$$

La démonstration figure dans Herman [28] p.73. On peut aussi se référer au chapitre suivant où nous montrons un résultat plus précis pour la fonction ψ_* définie par (1.17).

L'inégalité de Denjoy-Koksma entraîne que, si $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$, on n'aura pas de théorème de la limite centrale pour (S_n) . Néanmoins, on peut s'intéresser à des sous-suites $(S_{n_j})_j$, pour des entiers n_j qui se tiennent à distance respectable des dénominateurs des réduites de α . En fait, l'inégalité de Denjoy-Koksma suggère une décomposition particulière de la somme (S_n) . Pour la décrire, nous nous servirons du système de *numérotation d'Ostrowski*.

Soit un entier $r \geq 1$. On trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $q_n \leq r \leq q_{n+1}$. On décompose alors r de façon unique sous la forme

$$r = b_n q_n + \cdots + b_0 q_0, \quad (1.45)$$

où les $b_k \in \mathbb{N}$ ($0 \leq k \leq n$) sont définis par récurrence. Soit d'abord b_n le plus grand entier tel que $b_n q_n$ soit inférieur ou égal à r . Ensuite, pour $j \in (1, \dots, n)$, on définit b_{n-j} comme le plus grand entier tel que $b_n q_n + \cdots + b_{n-j} q_{n-j}$ soit inférieur ou égal à r . On observe que $b_k \leq a_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n$, puisque

$$b_k q_k \leq b_k q_k + \cdots + b_0 q_0 \leq q_{k+1} \leq a_{k+1} q_k.$$

A la décomposition (1.45) de r , on associe la décomposition suivante de S_r . Pour alléger, posons $r_{-1} = 0$, et écrivons $r_k = b_k q_k + \cdots + b_0 q_0$ pour $0 \leq k \leq n$. On vérifie que, si $a, b \in \mathbb{N}$, alors

$$S_{a+b} = S_a + T_{a\alpha} S_b.$$

Dès lors, par une application récursive de cette identité, on trouve

$$S_r = \sum_{k=0}^n T_{r_{k-1}\alpha} S_{b_k q_k} := \sum_{k=0}^n X_k(r). \quad (1.46)$$

Si la suite (b_k) est bornée, comme c'est le cas si α est de type constant, d'après le lemme 4, alors il découle de l'inégalité de Denjoy-Koksma (1.44), que les variables $X_k(r)$ sont bornées. Par ailleurs, il arrive que la variation des variables $X_k(r)$ augmente exponentiellement avec k ; voir par exemple la démonstration du lemme 10, pour la fonction ψ_* . Ceci nous permettra de démontrer des inégalités de décroissance exponentielle des corrélations pour ces variables. C'est en fait là l'idée fondamentale pour démontrer nos résultats.

4. Quelques résultats connus sur (S_n) . On a vu que d'après (1.44), lorsque $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$, (S_n) admettait une sous-suite bornée dans $L^\infty(\mathbb{T})$, et donc dans $L^2(\mathbb{T})$. Mais il y a aussi de nombreux cas où la suite (S_n) est tout simplement bornée dans $L^2(\mathbb{T})$. En fait, le lemme 3 et sa démonstration restent valables ici : la suite (S_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si l'équation $u \circ f_\alpha - u = \psi$ admet une solution $u \in L^2(\mathbb{T})$. Or, alors que pour les applications dilatantes, cette équation cohomologique ne se résolvait pas généralement, on a ici de nombreux théorèmes qui garantissent l'existence de solutions dans des cas variés (voir par exemple Herman [28]). A titre d'exemple, mentionnons la proposition suivante, dont la preuve est reportée au prochain chapitre.

Proposition 7. *Un nombre $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est diophantien si et seulement si, pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle, il existe $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ solution de l'équation $u \circ f_\alpha - u = \psi$.*

En fait, pour obtenir une suite (S_n) non bornée, on doit considérer soit une fonction ψ pas trop régulière, soit un nombre α pas trop diophantien. Nous optons pour la première solution. Nous travaillerons en fait avec la fonction ψ_* définie par (1.17). La démonstration du lemme suivant sera, elle aussi, donnée au prochain chapitre.

Lemme 6. *Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et si $\psi = \psi_*$, alors la suite (S_n) n'est pas bornée dans $L^2(\mathbb{T})$.*

Terminons ce paragraphe en mentionnant quelques résultats probabilistes connus sur (S_n) . Burton et Denker [9] (voir aussi [14]) ont montré qu'on pouvait trouver une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $S_n/\|S_n\|_2$ converge en distribution vers une gaussienne de variance 1. Ensuite, entre autres résultats, Liardet et Volný ont prouvé ([36], théorèmes 1 et 2) que, si $r \geq 0$, il existait un nombre irrationnel α et une suite (d_n) de réels strictement positifs tels que, pour toute fonction ψ dans un ensemble G_δ dense de $C^r(\mathbb{T})$, la suite des distributions de la suite $(d_n S_n)$ formait un ensemble dense dans l'espace de toutes les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$! Enfin, citons un beau résultat de Kesten [30]. Soit $(S_n \equiv S_n(x, \alpha))_n$ une suite de variables aléatoires sur $(\mathbb{T}^2, m_L)$ pour la fonction ψ_* définie par (1.17). Soit $\mathcal{C}$ la distribution de Cauchy, c'est-à-dire l'unique distribution de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui admette la densité $\rho(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Alors, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{2 \log n} S_n \xrightarrow{D} \mathcal{C}.$$

5. Théorèmes de la limite centrale pour des sous-suites de (S_n) . Nous en venons à présent au coeur du sujet : nous énonçons le théorème de la limite centrale pour certaines sous suite de (S_n) . Toutes les démonstrations se trouvent au chapitre suivant. Voici le premier résultat :

Proposition 8. *Considérons la suite (S_n) pour la fonction $\psi = \psi_*$ définie par (1.17). Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Il existe une suite croissante $(n_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{N}$ telle que $S_{n_j}/\sqrt{j} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$.*

Ce résultat est assez faible dans la mesure où la suite (n_j) reste indéterminée. Il nous semble

néanmoins intéressant, car la preuve est simple, et on peut facilement voir le lien avec l'exemple du §1 de la section précédente. Indiquons ici l'idée de la démonstration.

On commence par obtenir une petite amélioration de l'inégalité de Denjoy-Koksma : on trouve une sous-suite infinie $(\tilde{p}_n/\tilde{q}_n)_{n \geq 0}$ de la suite des réduites de α telle que, si p/q appartient à cette sous-suite, S_q ne prenne en fait que les valeurs ± 1 (lemme 10). On montre ensuite que $S_{\tilde{q}_n}$ devient de plus en plus oscillante quand $n \rightarrow \infty$ (lemme 12). En d'autres termes, la suite de fonctions $(S_{\tilde{q}_n})$ ressemble un peu à la suite des fonctions de Rademacher définie par (1.19), et les variables $S_{\tilde{q}_n}$ et $S_{\tilde{q}_m}$ deviennent asymptotiquement indépendantes lorsque $|m - n| \rightarrow \infty$. Il suffit alors de poser $n_j = \tilde{q}_0 + \dots + \tilde{q}_{j-1}$ où, éventuellement, on aura encore pris une sous-suite de $(\tilde{p}_n/\tilde{q}_n)$ de sorte à ce que l'écart entre $\tilde{q}_{n+1}$ et $\tilde{q}_n$ soit aussi grand que l'on veut, et donc que $S_{\tilde{q}_n}$ et $S_{\tilde{q}_{n+1}}$ soient suffisamment indépendantes. En fait, on a défini n_j par sa décomposition d'Ostrowski, et on peut donc considérer la décomposition associée de S_{n_j} . On voit que c'est une somme de variables asymptotiquement indépendantes, et on obtient le théorème de la limite centrale.

Venons-en aux résultats suivants. A partir d'ici, nous considérerons exclusivement un nombre α de type constant. D'après le lemme 4, la suite de ses quotient partiels est bornée, et la suite (q_n) des dénominateurs de ses réduites a donc une croissance exponentielle. Définissons une suite $(Z_n)_{n \geq 0} \subset \text{BV}(\mathbb{T})$ comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$, Z_n est le premier élément de la suite finie $(S_m)_{0 \leq m \leq n}$ tel que

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = \max_{0 \leq m \leq n} \mathbb{E}(S_m^2). \quad (1.47)$$

Le première proposition concerne la croissance de la variance.

Proposition 9. *Soit α un nombre de type constant.*

1. *Si $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$ est d'intégrale nulle, et si $(S_{n_j})_{j \geq 1}$ est une sous suite de (S_n) telle que $\mathbb{E}(S_{n_j}^2) \geq Cj$, pour une certaine constante $C > 0$, alors (n_j) croît au moins exponentiellement.*
2. *Si $\psi = \psi_*$, définie par (1.17), alors il existe des constantes $C, c > 0$ telles que, si $q_j \leq n < q_{j+1}$ ($j \in \mathbb{N}$), on a*

$$c j \leq \mathbb{E}(Z_n^2) \leq C j$$

La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur l'usage des séries de Fourier. On a ensuite un théorème de la limite centrale.

Proposition 10. *Si α est un nombre de type constant, et si $\psi = \psi_*$, définie par (1.17), alors*

$$\frac{Z_n}{\sqrt{\mathbb{E}(Z_n^2)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1).$$

On suit, pour démontrer cette proposition, dans le fond la même idée que pour démontrer la proposition 8. Mais on a besoin d'estimations plus quantitatives. En particulier, on doit évaluer des décroissances de corrélations, nécessaires pour utiliser la proposition 3.

6. Quelques questions. Nous énonçons cinq questions ouvertes relatives aux propositions qui viennent d'être énoncées.

1. Que peut-on dire si on choisit une mesure de probabilité P , à variation bornée par exemple, autre que la mesure de Lebesgue ? La mesure m_L est l'unique mesure de probabilité invariante sous f_α , pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Pour les applications dilatantes, on avait une convergence exponentielle des mesures à variation bornée vers la mesure invariante, quand celle-ci est unique. Mais ici, on aura seulement une convergence au sens de la loi forte des grands nombres : si P admet une densité $\rho \in L^1(\mathbb{T})$, alors, d'après le théorème ergodique de Birkhoff, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^{*k} \rho \rightarrow 1, \quad m_L - \text{p.p.}$$

Ceci ne suffit plus si on veut démontrer un résultat général du genre de la proposition 4.

Cela dit, si on regarde le problème d'un point de vue plus concret, on s'aperçoit qu'on devrait pouvoir étendre nos résultats à une mesure P de variation bornée, sans modifier fondamentalement la méthode. Effectivement, il y a principalement deux points techniques à analyser. D'abord, on doit voir comment évolue la variance de (S_n) . Comme on procède ici par série de Fourier, on aurait maintenant à considérer la série du produit $S_n^2 \rho$, où les coefficients de S_n sont explicites. Il est vraisemblable que ceci ne ferait que compliquer les calculs. Ensuite on doit établir des inégalités de décroissance des corrélations (1.38) et (1.39). Mais on voit qu'on est ici amené à considérer la fonction $\phi \rho$ au lieu de la seule fonction ϕ , ce qui ne devrait pas induire de difficulté particulière.

2. Qu'obtient-on si on prend une fonction ψ autre que ψ_* ? On a seulement utilisé le choix $\psi = \psi_*$ pour montrer la borne supérieure sur $E(Z_n^2)$ dans la partie 2. de la proposition 9. Il résulte de la preuve que bien d'autres choix sont possibles. Il est clair toutefois, au vu de la proposition 3, que ψ ne peut être un *cocycle*, c'est-à-dire ne peut se décomposer en $\psi = u \circ f_\alpha - u$, pour $u \in L^2(\mathbb{T})$.

3. Dans les propositions 9 et 10, on demande que α soit du type constant. C'est une limitation importante puisque ce genre de nombres forment un ensemble de m_L -mesure nulle. Il serait intéressant de voir si nos propositions ne se généralisent pas à un ensemble de mesure pleine, l'ensemble des nombres de Roth par exemple. En ce qui concerne la croissance de la variance, on peut s'attendre à devoir modifier la proposition 9, car les nombres de Roth sont mieux approchés par les rationnels, ce qui introduit des *petits diviseurs* plus divergents dans la série de Fourier de (S_n) . Pour le théorème de la limite centrale, une difficulté aussi apparaît : comme la suite des quotients partiels n'est plus bornée, les variables $X_k(r)$ de la décomposition (1.46) ne sont plus forcément bornées. Ceci, néanmoins, semble être seulement une difficulté technique qui ne paraît pas insurmontable.

4. Peut-on obtenir pour (Z_n) , ou pour des sous-suites de (S_n) , d'autres résultats probabilistes que le théorème de la limite centrale non dégénéré ? Qu'en est-il en particulier des théorèmes de notre liste de la section 1.1 § 3 ? Il est assez vraisemblable que les inégalités de décroissances (1.38) et (1.39) qui

ont permis d'obtenir le théorème de la limite centrale, permettront aussi d'obtenir certains résultats de grandes déviations comme le théorème d'Azuma. Des théorèmes plus pointus comme la limite locale ou les estimations gaussiennes seraient par contre sans doute fort techniques.

5. Que reste-t-il de nos résultats si on se place maintenant sur le tore $\mathbb{T}^d$, où $d \geq 2$? Ici notre approche s'effondre, car elle se base sur l'usage des fractions continues et de l'inégalité de Denjoy-Koksma. Or, d'une part, on n'a pas, en dimension supérieure ou égale à 2, une théorie de l'approximation diophantienne aussi bien maîtrisée qu'en une dimension et, d'autre part, Yoccoz [47] a montré que l'inégalité de Denjoy-Koksma ne se généralisait pas aux fonctions sur le tore de dimension 2.

Mais il reste, qu'en fin de compte, toutes nos démonstrations sont rendues possibles par l'analyse de Fourier qui se généralise bien sûr à toutes dimensions. Il ne serait en fait pas tout à fait étonnant de trouver une fonction ψ lisse, telle que la variance de S_n croisse linéairement, et peut-être telle que S_n satisfasse à un théorème de la limite centrale. Bien-sûr cette fonction serait sans doute ad hoc, et on ne s'attend pas à trouver des propriétés générales de décroissances des corrélations sans passer à une sous-suite. Ce sujet demanderait une investigation plus approfondie.

7. Un gaz dans un zigzag ? Nous revenons, en fin de compte, à la question initiale de ce chapitre : quel est le comportement statistique d'un gaz de Lorentz pour des obstacles à bords carrés ? Nous présentons ici le modèle du *gaz dans un zigzag*, qui ne se distingue du modèle de Lorentz que par la forme du domaine D où se meuvent les particules. Décrivons ce domaine. Soit une fonction $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 1, définie par les relations

$$Q(x) = x \quad \text{si } 0 \leq x < 1/2, \quad Q(x) = 1 - x \quad \text{si } 1/2 \leq x < 1.$$

On pose alors

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q(x) < y < Q(x) + \frac{1}{8}\}.$$

Une particule est entièrement caractérisée par sa position initiale, et par l'angle que fait son vecteur vitesse avec l'horizontale à l'instant initial. On rencontre deux cas extrêmes. Si la vitesse initiale est horizontale, la particule aura une trajectoire en escalier, mais le mouvement sera balistique, dans le sens où, après un temps t , la particule se sera déplacée d'une distance proportionnelle à t . Si, par contre, l'angle est de $\pm 45^\circ$, la particule restera éternellement bloquée dans une petite portion finie du domaine D .

Il devient beaucoup plus difficile de se représenter à vue de nez ce qui se passe pour un angle initial quelconque. On s'attend à ce que, pour des valeurs bien particulières, les particules aient encore des trajectoires balistiques avec des vitesses variées, alors que pour d'autres, les trajectoires seraient confinées dans des parties finies de D . Mais, pour un angle pris au hasard, on prévoit plutôt un mouvement oscillant, ni balistique ni borné. En fait, il est fort vraisemblable que les trajectoires des particules dans le zigzag dépendent de façon cruciale de la nature arithmétique de l'angle initial, et l'on

peut suspecter une assez forte ressemblance entre ces dernières et les réalisations de (S_n) . Dès lors, il y aurait peut-être quelque espoir de transposer les résultats obtenus pour le modèle en produit croisés à celui des particules dans un zigzag, qui constitue déjà un exemple de gaz de Lorentz dans un domaine à bords carrés !

2 – Démonstrations

Nous démontrons ici les lemmes et propositions du chapitre précédent qui demandent encore à être établis. Si $\xi \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\widehat{u}(\xi)$ le coefficient de Fourier d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{T})$. On déduit directement de la définition (1.21) que, si $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$, alors

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq \frac{\text{Var}(u)}{2\pi|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{Z}_0. \quad (2.1)$$

Une autre propriété utile de $\text{BV}(\mathbb{T})$ est la suivante : si $u, v \in \text{BV}(\mathbb{T})$, alors

$$\text{Var}(uv) \leq \|u\|_\infty \text{Var}(v) + \|v\|_\infty \text{Var}(u). \quad (2.2)$$

Tout au long de ce chapitre, α désigne un nombre irrationnel, (a_n) la suite de ses quotients partiels, et (p_n/q_n) la suite de ses réduites.

2.1 Lemme 7 et démonstration de la proposition 2

Lemme 7. *Si $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$ et si $\int_0^1 u \, dx = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} u(x + k/n) \right| \leq \text{Var}(u). \quad (2.3)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}_0$ et soit $x \in \mathbb{T}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} u(x + k/n) = \sum_{k=0}^{n-1} u(x + k/n) - n \int_{\mathbb{T}} u \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u(x + k/n) - n \int_{x+k/n}^{x+(k+1)/n} u \, dx \right).$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$, soit alors $x_k \in [x + k/n, x + (k+1)/n]$ tel que

$$\left| u(x + k/n) - n \int_{x+k/n}^{x+(k+1)/n} u \, dx \right| \leq |u(x + k/n) - u(x_k)|.$$

Alors

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} u(x + k/n) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |u(x + k/n) - u(x_k)| \leq \text{Var}(u),$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Démonstration de la proposition 2. Soit $\psi \in \mathcal{S}$. Nous allons d'abord montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^k \xi) = 0, \quad \xi \text{ impair.} \quad (2.4)$$

Soit $u \in L^2(\mathbb{T})$ tel que $u(2x) - u(x) = \psi(x)$ m_L -p.p. Intégrons cette équation par rapport à la mesure $\int_{\mathbb{T}} \cdot e^{-2i\pi\xi x} dx$, $\xi \in \mathbb{Z}$. Comme $\int u(2x)e^{-2i\pi\xi x} dx = 0$ si ξ est un nombre impair, on trouve que

$$\begin{aligned} \widehat{u}(2\xi) &= \widehat{u}(\xi) - \widehat{\psi}(2\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{u}(\xi) &= -\widehat{\psi}(\xi), \quad \xi \text{ impair.} \end{aligned}$$

Prenons alors un nombre impair ξ et exprimons $\widehat{u}(2^n \xi)$ en terme des coefficients de Fourier de ψ . Par une application récursive de la première des relations qui précèdent, puis par l'application de la seconde, on obtient

$$\widehat{u}(2^n \xi) = -\sum_{k=0}^n \widehat{\psi}(2^k \xi), \quad \xi \text{ impair}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Il découle de (2.1) que la série $\sum_{k=0}^n \widehat{\psi}(2^k \xi)$ converge. Mais, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $\widehat{u}(2^n \xi) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, ce qui établit la contrainte (2.4).

Montrons alors la première partie de la proposition. Soient les fonctions $e_{\xi}(x) := e^{2i\pi\xi x}$, $\xi \in \mathbb{Z}$. Il résulte de (2.4) que, si une fonction u est de la forme

$$u = \alpha_1 e_{\xi_1} + \cdots + \alpha_n e_{\xi_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, et où $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont des nombres impairs, alors $u \in \mathcal{S}^c$. Ceci démontre la première partie de la proposition.

Montrons ensuite la seconde partie. D'après (2.4), l'ensemble

$$\mathcal{R} := \{\psi \in \text{BV}_0 : \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^k) \neq 0\}$$

est compris dans $\mathcal{S}^c$. Nous allons montrer que c'est un ouvert dense de $\text{BV}_0(\mathbb{T})$. Il est clair que $\mathcal{R}$ est dense car, si $u \in \mathcal{S}$, on prend $v \in \mathcal{R}$, et on voit que, pour tout $\epsilon > 0$, $u + \epsilon v \in \mathcal{R}$ peut être rendu arbitrairement proche de u . Montrons donc que $\mathcal{R}$ est ouvert. Soit $\psi \in \mathcal{R}$, et soit $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^k) =: a \neq 0$. Soit aussi $\phi \in \text{BV}_0(\mathbb{T})$ tel que $\|\psi - \phi\|_{\text{BV}} \leq \epsilon$, pour un certain $\epsilon > 0$. On a, en utilisant (2.1),

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\phi}(2^k) \right| \geq |a| - \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{(\phi - \psi)}(2^k)| \geq |a| - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{Var}(\phi - \psi)}{2\pi \cdot 2^k} \geq |a| - \epsilon/\pi.$$

On voit donc que toute boule centrée en ψ de rayon $\epsilon < \pi|a|$ est comprise dans $\mathcal{R}$. $\square$

2.2 Démonstration de la proposition 3

Démonstration de la Proposition 3. Pour simplifier les notations, on considérera seulement le cas où $X_{jk} = X_{lk}$ pour tout $j, l, k \in \mathbb{N}_0$, et on écrira $X_k := X_{1,k}$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Les hypothèses ne mettent en jeu

que des estimations indépendantes de l'indice j de X_{jk} ($j, k \in \mathbb{N}_0$), et le cas général s'obtient donc par une adaptation immédiate de la présente démonstration. Nous commençons par un lemme.

Lemme 8. *Sous les hypothèses de la proposition 3, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$,*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=m}^{m+n} X_k\right)^4 \leq C(n \ln(n+m))^2.$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=m}^{m+n} X_k\right)^4 = \sum_{m \leq s, t, u, v \leq m+n} \mathbb{E}(X_s X_t X_u X_v) \leq 4! \sum_{m \leq s \leq t \leq u \leq v \leq m+n} |\mathbb{E}(X_s X_t X_u X_v)|. \quad (2.6)$$

Jusqu'à la fin de la démonstration, nous supposons que $m \leq s \leq t \leq u \leq v \leq m+n$. On définit

$$S_{stuv} = |\mathbb{E}(X_s X_t X_u X_v)| \quad \text{et} \quad S_{tu} = \sum_{s,v} S_{stuv}. \quad (2.7)$$

D'après l'hypothèse 1. de la proposition 3, $S_{stuv} \lesssim 1$. Obtenons deux autres bornes sur cette quantité. En vertu de (2.2) et de l'hypothèse 1. de la proposition 3, on a

$$\text{Var}(X_s X_t X_u) \lesssim c_s + c_t + c_u \lesssim c_u.$$

Il découle alors de (1.38) et (1.37) que

$$S_{stuv} = |\mathbb{E}(X_s X_t X_u) \cdot X_v| \lesssim \frac{c_u}{c_v} v^\beta \lesssim e^{-2\rho(v-u)} v^\beta, \quad (2.8)$$

puis, de (1.39), (1.38) et (1.37), que

$$\begin{aligned} S_{stuv} &\leq |\mathbb{E}(X_s X_t - \mathbb{E}X_s X_t) \cdot X_u X_v| + |\mathbb{E}(X_s X_t)| |\mathbb{E}(X_u X_v)| \\ &\lesssim \frac{c_t}{c_u} u^\beta + \frac{c_s}{c_t} t^\beta \lesssim e^{-2\rho(u-t)} u^\beta + e^{-2\rho(t-s)} t^\beta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Posons $\kappa = (\beta/\rho) \ln(n+m)$. On suppose que $\kappa \geq 1$. Les inégalités (2.8) et (2.9) impliquent respectivement

$$S_{stuv} \lesssim e^{-\rho(v-u)} \quad \text{si} \quad v - u \geq \kappa, \quad (2.10)$$

$$S_{stuv} \lesssim e^{-\rho(u-t)} + e^{-\rho(t-s)} \quad \text{si} \quad u - t \geq \kappa \quad \text{et} \quad t - s \geq \kappa. \quad (2.11)$$

Estimons maintenant S_{tu} , défini par (2.7), pour t et u fixés. Considérons d'abord le cas où $u - t < \kappa$. A l'aide de (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} S_{tu} &= \sum_{s, v: v-u < \kappa} S_{stuv} + \sum_{s, v: v-u \geq \kappa} S_{stuv} \\ &\lesssim \sum_{s, v: v-u < \kappa} 1 + \sum_{s, v: v-u \geq \kappa} e^{-\rho(v-u)} \lesssim \sum_{k < \kappa, s} 1 + \sum_{k \geq \kappa, s} e^{-\rho k} \lesssim n\kappa + n \lesssim n\kappa, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où l'on a posé $v - u = k$ après la seconde inégalité. Considérons ensuite le cas où $u - t \geq \kappa$, et pour cela écrivons la décomposition $S_{tu} = S_{tu}(1) + S_{tu}(2) + S_{tu}(3)$, dont les trois termes seront définis un à un. D'abord, comme pour (2.12), on a

$$S_{tu}(1) := \sum_{s,v: u-t \leq v-u} S_{stuv} \lesssim \sum_{s,v: u-t \leq v-u} e^{-\rho(v-u)} \lesssim ne^{-\rho(u-t)}. \quad (2.13)$$

Ensuite, si $v - u < u - t \leq t - s$, on utilise (2.11) pour obtenir $S_{stuv} \lesssim e^{-\rho(u-t)}$, et ainsi

$$S_{tu}(2) := \sum_{s,v: v-u < u-t \leq t-s} S_{stuv} \lesssim e^{-\rho(u-t)} \sum_{k < u-t, s} 1 \lesssim n(u-t)e^{-\rho(u-t)}. \quad (2.14)$$

Finalement, posons $B = \{(s, v) : v - u < u - t, t - s < u - t\}$. Pour au plus κ^2 éléments $(s, v) \in B$, on a $v - u < \kappa$ et $t - s < \kappa$, et donc seulement l'estimation $S_{stuv} \lesssim 1$. Mais, pour tous les autres, $S_{stuv} \lesssim \min\{e^{-\rho(v-u)}, e^{-\rho(t-s)}\}$ en vertu de (2.10) et (2.11) (pour utiliser (2.11), on se sert du fait que $t - s < u - t$). Dès lors,

$$S_{tu}(3) := \sum_{s,v \in B} S_{stuv} \lesssim \kappa^2 + \sum_{j,k \geq 0} \min\{e^{-\rho j}, e^{-\rho k}\} \lesssim \kappa^2 + 1 \lesssim \kappa^2. \quad (2.15)$$

En fin de compte, il suit de (2.6 - 2.7) et (2.12 - 2.15) que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=m}^{m+n} X_k \right)^4 \lesssim \sum_{t,u: u-t < \kappa} n\kappa + \sum_{t,u} \left(ne^{-\rho(u-t)} + n(u-t)e^{-\rho(u-t)} + \kappa^2 \right).$$

Comme $\kappa = (\beta/\rho) \ln(n+m)$, ceci implique le résultat. $\square$

A présent, comme dans [8], définissons des variables macroscopiques qui deviennent de moins en moins corrélées quand $n \rightarrow \infty$. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in]0, 1[$ tels que $\gamma_1 > \gamma_2 + 1/2$ (donc $\gamma_2 < 1/2$). Si $n \in \mathbb{N}_0$, posons $n_1 = \lfloor n^{\gamma_1} \rfloor$ et $n_2 = \lfloor n^{\gamma_2} \rfloor$. Dans la suite, nous supposons n assez grand pour que $n_2 \geq 1$. On écrit $S_n = \sum_{k=1}^{p(n)} (Y_{n,k} + Z_{n,k})$ où $p(n)$ est le plus petit entier tel que $p(n)(n_1 + n_2) \geq n$, et où

$$Y_{n,k} = X_{(k-1)(n_1+n_2)+1} + \cdots + X_{(k-1)(n_1+n_2)+n_1}, \quad (2.16)$$

$$Z_{n,k} = X_{(k-1)(n_1+n_2)+n_1+1} + \cdots + X_{k(n_1+n_2)} \quad (2.17)$$

si $1 \leq k \leq p(n) - 1$ (pour $k = p(n)$ la définition est la même mais on pose 0 au lieu de X_j lorsque $j > n$). Observons que $p(n)/n^{1-\gamma_1} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, nombre traité comme une constante dans toutes nos estimations à venir. Pour $n \geq 1$, on définit

$$J_n(\lambda) = \mathbb{E} \left(e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}\sigma_n} S_n} \right), \quad (2.18)$$

et, pour $1 \leq k \leq p(n)$,

$$I_{n,k}(\lambda) = \mathbb{E} \left(e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}\sigma_n} (Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,k})} \right). \quad (2.19)$$

On pose aussi $I_{n,0}(\lambda) = 1$. D'après l'hypothèse 3. et (2.17),

$$|J_n(\lambda) - I_{n,p(n)}(\lambda)| \leq \left\| \frac{\lambda}{\sqrt{n}\sigma_n} \sum_{k=1}^{p(n)} Z_{n,k} \right\|_{\infty} \lesssim \frac{p(n)n_2}{\sqrt{n}} \lesssim n^{-(\gamma_1 - (\gamma_2 + 1/2))}. \quad (2.20)$$

Lemme 9. *Sous les hypothèses de la proposition 3, et si $1 \leq k \leq p(n)$, on a*

$$I_{n,k}(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2n\sigma_n^2} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2)\right) I_{n,(k-1)}(\lambda) + r_{n,k}(\lambda)$$

$$\text{où } |r_{n,k}(\lambda)| \lesssim n^{\beta+1} e^{-2\rho n_2} + n^{-\frac{3}{2}(1-\gamma_1)} \ln^{3/2} n.$$

Démonstration. Considérons seulement le cas le plus difficile où $k \geq 2$. De plus, pour alléger les formules, supposons que $\sigma_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. D'après l'hypothèse 3., ceci ne modifie en rien nos estimations.

On a

$$I_{n,k}(\lambda) = \mathbb{E} \left(\left(1 + i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} Y_{n,k} - \frac{\lambda^2}{2n} Y_{n,k}^2 + \mathcal{O} \left(\frac{|Y_{n,k}|^3}{n^{3/2}} \right) \right) e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \right). \quad (2.21)$$

Si $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et si $u \in \text{BV}(\mathbb{T})$, alors $\text{Var}(g \circ u) \leq \|\partial_x g\|_\infty \text{Var}(u)$. D'après (1.37), $c_1 + \dots + c_n \lesssim c_n$. Ainsi, en vertu de (2.16) et de l'hypothèse 1., on a

$$\text{Var} \left(e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \right) \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}} c_{(k-2)(n_1+n_2)+n_1}. \quad (2.22)$$

Dès lors, utilisant (2.16), (1.38), (2.22) et (1.37), on trouve d'abord que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left(Y_{n,k} e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \right) \right| &\leq \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n_1} \left| \mathbb{E} \left(e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \cdot X_{(k-1)(n_1+n_2)+j} \right) \right| \\ &\lesssim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_1} \frac{c_{(k-2)(n_1+n_2)+n_1}}{c_{(k-1)(n_1+n_2)+j}} ((k-1)(n_1+n_2)+j)^\beta \\ &\lesssim \frac{1}{n} n_1 e^{-2\rho n_2} n^\beta \lesssim n^\beta e^{-2\rho n_2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ensuite, se servant de (1.39) au lieu (1.38), et observant que ni $Y_{n,k}^2$ ni $e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})}$ ne sont en général de moyenne nulle, on obtient

$$\left| \frac{\lambda^2}{2n} \mathbb{E} \left(Y_{n,k}^2 e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \right) - \frac{\lambda^2}{2n} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2) \mathbb{E} \left(e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \right) \right| \lesssim n^{\beta+1} e^{-2\rho n_2}. \quad (2.24)$$

Il découle finalement du lemme 8 et de (2.16) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{3/2}} \left| \mathbb{E} \left(|Y_{n,k}|^3 e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,(k-1)})} \right) \right| &\lesssim \frac{1}{n^{3/2}} \mathbb{E}(|Y_{n,k}|^3) \leq \frac{1}{n^{3/2}} \mathbb{E}^{3/4}(Y_{n,k}^4) \lesssim \frac{1}{n^{3/2}} (n_1 \ln n)^{3/2} \\ &\lesssim n^{-\frac{3}{2}(1-\gamma_1)} \ln^{3/2} n. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le résultat s'obtient en insérant les estimations (2.23) à (2.25) dans (2.21). $\square$

Pour démontrer la proposition 3, il suffit de prouver que $J_n(\lambda) \rightarrow e^{-\lambda^2/2}$ as $n \rightarrow \infty$. Pour n assez grand, on a $|1 - (\lambda^2/2n) \mathbb{E}(Y_{n,k}^2)| \leq 1$. Donc, de (2.20) et d'une application récursive du lemme 9, il ressort que

$$\begin{aligned} &\left| J_n(\lambda) - \left(1 - \frac{\lambda^2}{2n\sigma_n^2} \mathbb{E}(Y_{n,p(n)}^2) \right) \dots \left(1 - \frac{\lambda^2}{2n\sigma_n^2} \mathbb{E}(Y_{n,1}^2) \right) \right| \\ &\lesssim p(n) (n^{\beta+1} e^{-2\rho n_2} + n^{-\frac{3}{2}(1-\gamma_1)} \ln^{3/2} n) + n^{-(\gamma_1 - (\gamma_2 + 1/2))}. \end{aligned}$$

Comme $p(n)/n^{1-\gamma_1} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Il suffit donc de prouver que

$$\ln \prod_{k=1}^{p(n)} \left(1 - (\lambda^2/2n) \mathbb{E}(Y_{n,k}) \right) \rightarrow -\frac{\lambda^2}{2}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. L'hypothèse 3. entraîne que

$$\ln \prod_{k=1}^{p(n)} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2n\sigma_n^2} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2) \right) = -\frac{\lambda^2}{2n\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}^2(Y_{n,k}^2)\right).$$

Tout d'abord, le lemme 8 et (2.16) impliquent

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}^2(Y_{n,k}^2) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}(Y_{n,k}^4) \lesssim \frac{1}{n^2} p(n) n_1^2 \ln^2 n \lesssim \frac{1}{n^2} n^{1-\gamma_1} n^{2\gamma_1} \ln^2 n \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. Ensuite

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{p(n)} Y_{n,k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2) + 2 \sum_{j=2}^{p(n)} \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{E}(Y_{n,j} Y_{n,k}).$$

D'après (2.16) et l'hypothèse 1., $\text{Var}(Y_{n,k}) \lesssim c_{(k-1)(n_1+n_2)+n_1}$. Dès lors, par (2.16), (1.38) et (1.37), il ressort comme pour (2.23) que, si $1 \leq k < j \leq p(n)$,

$$|\mathbb{E}(Y_{n,j} Y_{n,k})| \leq \sum_{l=1}^{n_1} |\mathbb{E}(Y_{n,k} X_{(j-1)(n_1+n_2)+n_1})| \lesssim n^\beta e^{-2\rho n_2}.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2) - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{p(n)} Y_{n,k}\right)^2 \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. Par (2.17),

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{p(n)} Z_{n,k}\right)^2 \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{p(n)} Z_{n,k} \right\|_\infty \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. Dès lors

$$\frac{1}{n\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbb{E}(Y_{n,k}^2) - \frac{1}{n\sigma_n^2} \mathbb{E}(S_n^2) \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. On conclut à l'aide de l'hypothèse 3. $\square$

2.3 Démonstration du lemme 5 et d'un cas particulier de la proposition 6

Nous donnons ici, en suivant Herman [28] p.64, quelques informations sur certaines sous-suite finies de $(\overline{n\alpha})$. En particulier, avec les notations qui seront introduites, l'inégalité (2.28) démontre le lemme 5. On dit qu'une fraction irréductible p/q est une approximation rationnelle de $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pour la constante

$0 < \beta < 1$ si l'inégalité $|\alpha - p/q| < \beta/q^2$ est satisfaite. On note que $\{\overline{j \cdot p/q}\}_{0 \leq j \leq q-1} = \{j/q\}_{0 \leq j \leq q-1}$, car p/q est irréductible. On pose également $\{\overline{j\alpha}\}_{0 \leq j \leq q-1} = \{\alpha_j\}_{0 \leq j \leq q-1}$, où $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{q-1} < 1$.

Si $\alpha > p/q$, on a $k\alpha - kp/q < k\beta/q^2 < 1/q$ si $1 \leq k \leq q-1$. Dès lors, si $0 \leq j \leq q-1$, il existe $l(j) \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \alpha_j - l(j)/q \leq 1/q$. Mais la suite $\{\alpha_j\}_{0 \leq j \leq q-1}$ est ordonnée, et donc $l(j) = j$. Par conséquent, on peut écrire

$$0 = \alpha_0 < \frac{1}{q} < \alpha_1 < \frac{2}{q} < \alpha_2 < \dots < \frac{q-1}{q} < \alpha_{q-1} < 1. \quad (2.26)$$

Pareillement, si $\alpha < p/q$, on obtient

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \frac{1}{q} < \alpha_2 < \frac{2}{q} < \dots < \alpha_{q-1} < \frac{q-1}{q} < 1. \quad (2.27)$$

Dans un cas comme dans l'autre, on conclut que

$$|\alpha_j - j/q| < \beta/q \quad (0 \leq j \leq q-1). \quad (2.28)$$

Nous en venons à présent à un lemme qui améliore légèrement l'inégalité de Denjoy-Kosma (1.44) lorsque $\psi = \psi_*$, définie par (1.17).

Lemme 10. *Soit $\psi = \psi_*$ donnée par (1.17). Soit p/q une approximation rationnelle de $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pour la constante $\beta \leq 1/2$, où q est impair. Alors S_q ne prend que les valeurs ± 1 .*

Démonstration. Soit $\phi = \sum_{k=0}^{q-1} T_{kp/q} \psi_* = \sum_{k=0}^{q-1} T_{k/q} \psi_*$. On a $\phi(x) = \psi_*(qx)$. Ceci découle du fait que $T_{1/q} \phi = \phi$ et que

$$\phi|_{[0,1/q[} = (q-1)/2 + (T_{(q-1)/2} \psi)|_{[0,1/q[} - (q-1)/2 = (T_{(q-1)/2} \psi)|_{[0,1/q[}.$$

Ecrivons $\{\overline{j\alpha}\}_{0 \leq j \leq q-1} = \{\alpha_j\}_{0 \leq j \leq q-1}$, où $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{q-1} < 1$. On a

$$S_q = \sum_{k=0}^{q-1} T_{k\alpha} \psi_* = \sum_{k=1}^{q-1} (T_{\alpha_k} - T_{k/q}) \psi_* + \phi.$$

Or, si $\alpha > p/q$, on a, d'après (2.26) et pour $0 \leq k \leq q-1$,

$$(T_{\alpha_k} - T_{k/q}) \psi_*(x) = \begin{cases} +2 & \text{si } x \in [1 - \alpha_k, 1 - k/q[, \\ -2 & \text{si } x \in [1/2 - \alpha_k, 1/2 - k/q[\pmod{1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, si $\alpha < p/q$, on a, en vertu de (2.27) et pour $0 \leq k \leq q-1$,

$$(T_{\alpha_k} - T_{k/q}) \psi_*(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \in [1 - k/q, 1 - \alpha_k[, \\ +2 & \text{si } x \in [1/2 - k/q, 1/2 - \alpha_k[\pmod{1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons à présent S_q . Pour fixer les idées, considérons le cas $\alpha > p/q$. Si $0 \leq j \leq q-1$, on a

$$\begin{aligned} y_q|_{[j/q, (j+1)/q[} &= \sum_{k=1}^{q-1} (T_{\alpha_k} - T_{k/q})\psi|_{[j/q, (j+1)/q[} + \phi|_{[j/q, (j+1)/q[} \\ &= (2\chi_{[\frac{j+1}{q} - \delta_1(j), \frac{j+1}{q}[} - 2\chi_{[\frac{j}{q} + \frac{1}{2q} - \delta_2(j), \frac{j}{q} + \frac{1}{2q}[}) + (\chi_{[\frac{j}{q}, \frac{j}{q} + \frac{1}{2q}[} - \chi_{[\frac{j}{q} + \frac{1}{2q}, \frac{j+1}{q}[}), \end{aligned}$$

où, par (2.28), on a $0 \leq \delta_1(j), \delta_2(j) < 1/2q$. $\square$

2.4 Démonstration de la proposition 7 et du lemme 6

Commençons par observer que, si $u \in L^1(\mathbb{T})$ résout l'équation $u \circ f_\alpha - u = \psi$, pour une certaine fonction $\psi \in L^1(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle, alors ses coefficients de Fourier sont liés à ceux de ψ par la relation

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{\psi}(\xi)}{e^{2i\pi\xi\alpha} - 1}, \quad \xi \in \mathbb{Z}_0. \quad (2.29)$$

En revanche, le coefficient $\hat{u}(0)$ est indéterminé. Les inégalités suivantes se révéleront utiles, et seront, par la suite, quelquefois tacitement utilisées. Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$4|x|_{\mathbb{T}} \leq |1 - e^{2i\pi x}| \leq 2\pi|x|_{\mathbb{T}}, \quad (2.30)$$

$$|x + y|_{\mathbb{T}} \leq |x|_{\mathbb{T}} + |y|_{\mathbb{T}}, \quad (2.31)$$

$$|1 - e^{2i\pi(x+y)}| \leq |1 - e^{2i\pi x}| + |1 - e^{2i\pi y}|. \quad (2.32)$$

Il découle de cette dernière inégalité que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$|1 - e^{2i\pi mx}| \leq |m| |1 - e^{2i\pi x}|. \quad (2.33)$$

De plus, pour $n \geq 1$, on a $|q_n\alpha - p_n| = |q_n\alpha|_{\mathbb{T}}$ ([28] p.63).

Une suite $(x_k) \subset \mathbb{R}$ est à *décroissance rapide* si, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^r x_r| < +\infty$. La suite $(\hat{u}(\xi))$ des coefficients de Fourier d'une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ est à décroissance rapide ; toute suite à décroissance rapide est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de $C^\infty(\mathbb{T})$.

Démonstration de la proposition 7. Nous suivons Ghys [23]. Supposons tout d'abord que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ soit un nombre diophantien. Il existe des nombres $C > 0$ et $\beta < +\infty$ tels que l'inégalité $|e^{2i\pi\xi\alpha} - 1| \geq C/|\xi|^\beta$ soit validée pour tout $\xi \in \mathbb{Z}_0$. Les coefficients de Fourier d'une solution u sont donnés par (2.29) pour $\xi \in \mathbb{Z}_0$. On vérifie que la suite $(\hat{u}(\xi))_\xi$ est à décroissance rapide quel que soit $\hat{u}(0)$, et définit donc une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{T})$: pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{\xi \in \mathbb{Z}_0} |\xi^r \hat{u}(\xi)| \lesssim \sup_{\xi \in \mathbb{Z}_0} |\xi^{r+1+\beta} \hat{u}(\xi)| < +\infty.$$

Supposons ensuite que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ soit de Liouville. Par un procédé diagonal de Cantor, on construit une suite croissante $(s_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{N}_0$ telle que $|e^{2i\pi s_n \alpha} - 1| < 1/s_n^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Considérons ensuite

une fonction ψ dont les coefficients de Fourier sont donnés comme suit : $\hat{\psi}(\xi) = \xi(e^{2i\pi\xi\alpha} - 1)$ si $\xi \in (s_n)$, et $\hat{\psi}(\xi) = 0$ sinon. La suite $(\hat{\psi}(\xi))$ est à décroissance rapide : si $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{\xi \in \mathbb{Z}_0} |\xi^r \hat{u}(\xi)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n^r \hat{u}(s_n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n^r / s_n^{n-1}| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n^{r+1-n}| < \infty.$$

A présent, raisonnons par l'absurde. Les coefficients de Fourier d'une solution $u \in L^1(\mathbb{T})$ à l'équation $u \circ f_\alpha - u = \psi$ étant donnés par (2.29) pour $\xi \neq 0$, on aurait en particulier $\hat{u}(\xi) = \xi$ pour $\xi \in (s_n)$. Mais alors $u \notin L^1(\mathbb{T})$. $\square$

Le lemme suivant servira à démontrer le lemme 6 et la proposition 8.

Lemme 11. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et soit $n \geq 0$.*

1. *Des fractions p_n/q_n et p_{n+1}/q_{n+1} , une au moins satisfait $|\alpha - p/q| < 1/2q^2$.*
2. *Si q_n est pair, alors q_{n+1} est impair.*
3. *Si q_n et q_{n+2} sont pairs, alors $|\alpha - p_{n+1}/q_{n+1}| < 1/2q_{n+1}^2$.*
4. *De quatre convergentes successives, une au moins a un dénominateur impair et satisfait $|\alpha - p/q| < 1/2q^2$.*

Démonstration. Pour 1., voir [26] p.152. Démontrons 2. par l'absurde. Supposons avoir trouvé un plus petit $j \in \mathbb{N}$ tel que q_j et q_{j+1} soient pairs. On a $j \geq 1$ et donc $q_{j+1} = a_{j+1}q_j + q_{j-1}$. Comme q_{j-1} est impair et q_j pair, q_{j+1} serait impair également. Démontrons alors 3. D'après 2., q_{n+1} est impair, et, par ailleurs, $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$. Le nombre a_{n+2} doit être pair, et donc $a_{n+2} \geq 2$. Le résultat découle alors de (1.43). Finalement, 4. s'obtient par la considération de toutes les possibilités. $\square$

On établit par calcul que les coefficients de Fourier de ψ_* sont donnés par

$$\widehat{\psi_*}(\xi) = \begin{cases} -2i/\pi\xi & \text{pour } \xi \text{ impair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.34)$$

Démonstration du lemme 6. D'après le lemme 3, il suffit de voir qu'on ne trouve aucune fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $u \circ f_\alpha - u = \psi_*$. Or, on conclut à l'aide de 2.29 et 2.34 que le coefficient de Fourier $\hat{u}(\xi)$ de u devrait satisfaire

$$\hat{u}(\xi) = \frac{-2i}{\pi\xi(e^{2i\pi\xi\alpha} - 1)}$$

lorsque ξ est impair. Cela dit, en vertu du point 2. du lemme 11, une infinité de nombre impairs ξ sont en fait le dénominateur d'une réduite de α . Mais alors, pour ces nombres-là, $|\xi\alpha|_{\mathbb{T}} \leq 1/|\xi|$. Dès lors, on n'aurait même pas $\hat{u}(\xi) \rightarrow 0$ pour $\xi \rightarrow \infty$. $\square$

2.5 Démonstration de la proposition 8

Pour $\psi \in L^1(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle, on a l'expression explicite des coefficients de Fourier de S_n que voici :

$$\widehat{S_n}(\xi) = \frac{1 - e^{2i\pi n\xi\alpha}}{1 - e^{2i\pi\xi\alpha}} \hat{\psi}(\xi), \quad (n \in \mathbb{N}_0, \xi \in \mathbb{Z}_0). \quad (2.35)$$

Lemme 12. Si $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$ est d'intégrale nulle, on a $S_{q_n} \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{T})$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. D'après l'inégalité de Denjoy-Koksma (1.44), $\|S_{q_n}\|_2 \leq \|S_{q_n}\|_\infty \leq \text{Var}(\psi)$. Il suffit donc de vérifier que, si $\xi \in \mathbb{Z}_0$, $\widehat{S_{q_n}}(k) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Or (2.35) et (2.1) permettent d'écrire que

$$|\widehat{S_{q_n}}(\xi)| \leq \frac{\text{Var}(\psi)}{2\pi|\xi|} \frac{1}{|1 - e^{2i\pi\xi\alpha}|} |1 - e^{2i\pi q_n \xi \alpha}|$$

si $\xi \in \mathbb{Z}_0$. Pour finir, on déduit de (2.33) que

$$|1 - e^{2i\pi q_n \xi \alpha}| \leq |\xi| \cdot |1 - e^{2i\pi q_n \alpha}| \leq 2\pi|\xi| |q_n \alpha|_{\mathbb{T}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Démonstration de la proposition 8. Il suit du point 4. du lemme 11 qu'on trouve une sous-suite $(p'_j/q'_j)_{j \geq 0} \subset (p_n/q_n)$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, q'_j soit impair et $|\alpha - p'_j/q'_j| < 1/2q_j'^2$. De plus, notons ici qu'une fois $q'_0, \dots, q'_j$ fixés, q'_{j+1} peut être choisi arbitrairement grand ($j \in \mathbb{N}$). La suite (n_j) est alors définie comme ceci : $n_j = q'_0 + \dots + q'_j$, pour $j \in \mathbb{N}_0$. On décompose ensuite S_{n_j} comme dans (1.46) :

$$S_{n_j} = \sum_{k=0}^j T_{n_{k-1}\alpha} S_{q'_k} := \sum_{k=0}^j X_k, \quad (2.36)$$

où on a posé $n_{-1} = 0$. En vertu du lemme 10, $X_k^2 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit alors une suite $(\delta_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}_0^+$ telle que $\sum_{j=1}^k \delta_j / \sqrt{k} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. On peut supposer que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, et pour tout $\gamma \in [-1, 1]$, on a

$$\mathbb{E}(X_k \exp(i\gamma(X_0 + \dots + X_{k-1}))) \leq \delta_k. \quad (2.37)$$

En effet, on trouve $m(k) \in \mathbb{N}_0$, indépendant de γ , et une partition finie de l'intervalle $[0, 1]$ en sous-intervalles I_j ($1 \leq j \leq m(k)$), telle que la fonction $\exp(i\gamma(X_0 + \dots + X_{k-1}))$ soit constante sur chaque I_j ($1 \leq j \leq m(k)$). Or, si on a choisi q'_k assez grand, après que $q'_0, \dots, q'_{k-1}$ ont été fixés, le lemme 12 entraîne que $|\mathbb{E}(\chi_{I_j} X_k)| \leq \delta_k/m(k)$ pour $1 \leq j \leq m(k)$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $k, j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\exp\left(i\frac{\lambda}{\sqrt{j}}(X_0 + \dots + X_k)\right) = \exp\left(i\frac{\lambda}{\sqrt{j}}(X_0 + \dots + X_{k-1})\right) \left(1 + i\frac{\lambda}{\sqrt{j}}X_k - \frac{\lambda^2}{2j} + \mathcal{O}\frac{|\lambda|^3}{j^{3/2}}\right). \quad (2.38)$$

Pour $j \in \mathbb{N}_0$ assez grand, on a $|\lambda/\sqrt{j}| \leq 1$ et $|1 - \frac{\lambda^2}{2j}| \leq 1$. Dès lors, par une application récursive de (2.38) et par (2.37), on obtient

$$\left| \mathbb{E}\left(\exp\left(i\frac{\lambda}{\sqrt{j}}(X_0 + \dots + X_j)\right)\right) - \left(1 - \frac{\lambda^2}{2j}\right)^j \right| \leq \frac{|\lambda|}{\sqrt{j}} \sum_{k=1}^j \delta_k + \mathcal{O}\frac{|\lambda|^3}{\sqrt{j}}.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E} \exp\left(i\frac{\lambda}{\sqrt{j}} S_{n_j}\right) \rightarrow e^{-\lambda^2/2}$ quand $j \rightarrow \infty$. $\square$

2.6 Démonstration de la proposition 9

A partir d'ici, nous supposons que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est de type constant. On a vu au lemme 4 que les deux propriétés suivantes sont alors satisfaites :

$$|q\alpha - p| \gtrsim \frac{1}{|q|}, \quad \forall q \in \mathbb{Z}_0, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (2.39)$$

$$a_n \leq a, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

pour un certain $a \geq 1$. Cette dernière inégalité implique

$$q_{n+1} \leq (a+1)q_n \quad \text{et} \quad p_{n+1} \leq (a+1)p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.41)$$

Pour $n \geq 2$, ceci entraîne que

$$q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1} \geq \left(1 + \frac{1}{a+1}\right)q_n \quad (2.42)$$

et la suite (q_n) croît donc exponentiellement. On en déduit en particulier le

Lemme 13. *Si α est de type constant, alors $\forall p \in \mathbb{N}, \exists c_0 \in \mathbb{N} : (\forall c \in \mathbb{N} : c \geq c_0), \forall n \in \mathbb{N}, q_{cn} \geq q_n^p$.*

En s'inspirant de Bricmont et al. [7], on définit les ensembles

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{j \in \mathbb{N}_0 : 1/q_1 \leq |1 - e^{2i\pi j\alpha}|\}, \\ \Gamma_n &= \{j \in \mathbb{N}_0 : 1/q_n \leq |1 - e^{2i\pi j\alpha}| < 1/q_{n-1}\} \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (2.43)$$

On a $\mathbb{N}_0 = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n$ et $\Gamma_m \cap \Gamma_n = \emptyset$ si $m \neq n$.

Lemme 14. *Soit α un nombre de type constant. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$j \in \Gamma_m \Rightarrow j \geq Cq_m \quad \text{et} \quad j, k \in \bigcup_{n \geq m} \Gamma_n \Rightarrow |k - j| \geq Cq_m. \quad (2.44)$$

Démonstration. Si $j \in \Gamma_m$, $|1 - e^{2i\pi j\alpha}| < 1/q_{m-1}$. D'après (2.39) et puis parce que $j \in \Gamma_m$, on a $1/|j| \lesssim |j\alpha|_{\mathbb{T}} \lesssim 1/q_{m-1}$. Il suit de (2.40) que $q_{m-1} \gtrsim q_m$, et donc $|j| \gtrsim q_m$. Ensuite, si $j, k \in \bigcup_{n \geq m} \Gamma_n$, on obtient, à l'aide de (2.32),

$$|1 - e^{2i\pi(k-j)\alpha}| \leq |1 - e^{2i\pi k\alpha}| + |1 - e^{2i\pi j\alpha}| \leq \frac{2}{q_{m-1}}.$$

La deuxième partie de (2.44) s'obtient alors comme la première. $\square$

Cela dit, on est maintenant à même de démontrer la proposition 9. Nous commençons par le

Lemme 15. *Soit α un nombre de type constant, et soit une fonction $\psi \in \text{BV}(\mathbb{T})$ d'intégrale nulle. Il existe une constante $C < +\infty$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq m \leq n$, on ait $E(S_m^2) \leq Cn$.*

Démonstration. D'après le lemme 13, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $q_{cn} \geq q_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Partant de (2.35), on calcule que

$$\mathbb{E}(S_m^2) = \|S_m\|_2^2 \leq \frac{\text{Var}^2(\psi)}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{q_{cn}-1} \frac{1}{k^2} \frac{|1 - e^{2i\pi mk\alpha}|^2}{|1 - e^{2i\pi k\alpha}|^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k \geq q_{cn}} \frac{\text{Var}^2(S_m)}{k^2}. \quad (2.45)$$

Comme $S_m = \sum_{j=0}^{m-1} T_{j\alpha}\psi$ ($m \geq 1$), on a $\text{Var}(S_m) \leq \text{Var}(\psi)m \leq \text{Var}(\psi)q_n$, et le second terme du membre de droite de (2.45) est donc borné par une constante. Les ensembles Γ_r sont définis par (2.43) pour $r \in \mathbb{N}_0$. D'après (2.42) et (2.44), il existe une constante $s \in \mathbb{N}$ telle que, si $j \in \Gamma_{r+s}$, alors $j > q_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}_0$. Dès lors

$$\sum_{k=1}^{q_{cn}-1} \frac{1}{k^2} \frac{|1 - e^{2i\pi mk\alpha}|^2}{|1 - e^{2i\pi k\alpha}|^2} \leq \sum_{r=1}^{cn+s} \sum_{k \in \Gamma_r} \frac{2}{k^2 |1 - e^{2i\pi k\alpha}|^2} \leq \sum_{r=1}^{cn+s} \sum_{k \in \Gamma_r} \frac{2q_r^2}{k^2} \lesssim \sum_{r=1}^{cn+s} \sum_{u \geq 1} \frac{q_r^2}{u^2 q_r^2} \lesssim n.$$

où l'avant-dernière inégalité s'obtient à l'aide des deux relations de (2.44). $\square$

Démonstration la proposition 9. Le point 1. est en fait une conséquence du lemme 15. Effectivement, raisonnons par l'absurde, et imaginons une suite (n_j) telle que $\mathbb{E}(S_{n_j}^2) \gtrsim j$, qui ne croisse même pas exponentiellement. Mais alors on trouverait une suite (k_j) qui ne croît même pas linéairement telle que $n_j \leq q_{k_j}$. D'après le lemme 15, on aurait alors $\mathbb{E}(S_{n_j}^2) \lesssim k_j$, ce qui est une contradiction.

La borne supérieure du point 2. découle évidemment aussi du lemme 15. Il reste à montrer la borne inférieure. Soit $\delta > 0$. En vertu de (2.42), il existe $l \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $q_n/q_{n+l} \leq \delta$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_n/q_{n+kl} \leq \delta^k$. Maintenant, construisons une suite $(t_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{N}$ comme suit. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, $t_n = 0$ sauf dans les cas suivants. Si $n = 4kl$ pour un certain $k \in \mathbb{N}_0$, alors, par le point 4. du lemme 11, il existe $m \in \{n, \dots, n+3\}$ tel que q_m soit impair et que $q_m|q_m\alpha|_{\mathbb{T}} < 1/2$; on pose alors $t_m = q_m$, et on prend le plus petit m s'il y a plusieurs possibilités.

Fixons $n \geq 1$. Comme $q_0 + \dots + q_n \leq q_{n+3}$, on a $t_1 + \dots + t_n \leq q_{n+3}$. Dès lors, si $r = t_1 + \dots + t_n$, on a $\mathbb{E}(Z_{s_{n+3}}^2) \geq \mathbb{E}(Z_{q_{n+3}}^2) \geq \mathbb{E}(S_r^2)$. Mais, d'après (2.35), (2.34) et (1.43), on trouve que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_r^2) = \|S_r\|_2^2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{k \geq 1, \text{ impair}} \frac{1}{k^2} \frac{|1 - e^{2i\pi rk\alpha}|^2}{|1 - e^{2i\pi k\alpha}|^2} \geq \frac{8}{\pi^2} \sum_{1 \leq u \leq n : q_u \text{ impair}} \frac{1}{q_u^2} \frac{|1 - e^{2i\pi r q_u \alpha}|^2}{|1 - e^{2i\pi q_u \alpha}|^2} \\ &\gtrsim \sum_{1 \leq u \leq n : q_u \text{ impair}} |1 - e^{2i\pi r q_u \alpha}|^2 \gtrsim \sum_{u=1}^n |rt_u \alpha|_{\mathbb{T}}^2. \end{aligned}$$

Soit $u \in \{1, \dots, n\}$ tel que $t_u \neq 0$, et donc en fait tel que $t_u = q_u$. On écrit $rt_u \alpha = t_u^2 \alpha + \tau$, où

$$\tau = (t_1 + \dots + t_{u-1})t_u \alpha + t_u(t_{u+1}\alpha + \dots + t_n \alpha).$$

D'après (2.31), on a

$$|\tau|_{\mathbb{T}} \leq (t_1 + \dots + t_{u-1})|t_u \alpha|_{\mathbb{T}} + t_u(|t_{u+1}\alpha|_{\mathbb{T}} + \dots + |t_n \alpha|_{\mathbb{T}}).$$

Convenons que $1/t_n = 0$ quand $t_n = 0$. On a

$$|\tau|_{\mathbb{T}} \leq \frac{t_1}{q_u} + \dots + \frac{t_{u-1}}{q_u} + \frac{q_u}{t_{u+1}} + \dots + \frac{q_u}{t_n} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k. \quad (2.46)$$

Ainsi, prenant δ assez petit, et donc l assez grand, $|\tau|_{\mathbb{T}}$ peut être rendu arbitrairement petit.

Si $p \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathbb{R}$ et si $p|x|_{\mathbb{T}} \leq 1/2$, alors $|px|_{\mathbb{T}} = p|x|_{\mathbb{T}}$. Donc, si a est donné par (2.40), on a, en vertu de (1.43), et puisque $t_u|t_u\alpha|_{\mathbb{T}} < 1/2$ par construction, que

$$|t_u^2\alpha|_{\mathbb{T}} = q_u|q_u\alpha|_{\mathbb{T}} \geq \frac{q_u}{q_u + q_{u+1}} \geq \frac{1}{3a}.$$

Il en vient que $|rt_u\alpha|_{\mathbb{T}}^2 \gtrsim 1$, et donc que $E(S_r^2) \gtrsim n/l$. $\square$

2.7 Démonstration de la proposition 10

Démonstration de la proposition 10. Soit une suite $(s_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{N}$ telle que $q_n \leq s_n < q_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons démontrer, à l'aide de la proposition 3, que $Z_{s_n}/E(Z_{s_n}^2) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$ quand $n \rightarrow \infty$. Que ceci entraîne en fait la même convergence pour $Z_n/E(Z_n^2)$ vient de ce que toutes nos estimations sont indépendantes du choix de la suite (s_n) . Cela suffit d'après la remarque qui suit l'énoncé de la proposition 3.

Si $n \in \mathbb{N}$, on trouve $r_n \mathbb{N}_0$ tel que $r_n \leq s_n$ et $Z_{s_n} = S_{r_n}$. On décompose r_n suivant le système d'Ostrowski 1.45 :

$$r_n = b_n(r_n)q_n + \cdots + b_0(r_n)q_0. \quad (2.47)$$

Comme il est possible que $r_n < q_j$ pour un certain $j \leq n$, les coefficients $b_k(r_n)$ pourraient ne pas être définis au delà de $k = j$; on les pose alors tout simplement égaux à 0. Cela dit, décomposons S_{r_n} comme dans (1.46) :

$$S_{r_n} = \sum_{k=0}^n T_{t_{k-1}(r_n)\alpha} S_{b_k(r_n)q_k} := \sum_{k=0}^n X_{n,k}, \quad (2.48)$$

où $t_k(r_n) = b_k(r_n)q_k + \cdots + b_0(r_n)q_0$.

Nous allons montrer que les hypothèses de la proposition 3 sont satisfaites pour $Y_n = S_{r_n}$ et $(c_k) = (q_k)$. D'après (2.42), l'hypothèse (1.37) est vérifiée. L'hypothèse 1. est satisfaite également. En effet, soient $k, n \in \mathbb{N}$, et soit a le nombre défini par (2.40). D'abord, puisque $b_k(r_n) \leq a$, l'inégalité de Denjoy-Koksma (1.44) implique $\|X_{n,k}\|_{\infty} \leq a \text{Var}(\psi_*)$. Ensuite, $\text{Var}(X_{n,k}) \leq \text{Var}(\psi_*) a q_k$. L'hypothèse 2. est vérifiée en vertu du lemme 16 ci-dessous. Enfin, la proposition 9 montre que l'hypothèse 3. est satisfaite elle aussi. $\square$

Lemme 16. *Il existe $C, \beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute fonction $\phi \in \text{BV}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ de moyenne nulle, pour $l \in \mathbb{N}_0$ et pour $t \geq s \geq 1$,*

$$|E(\phi \cdot X_{l,s})| \leq C \text{Var}(\phi) \frac{s^{\beta}}{q_s}, \quad |E(\phi \cdot X_{l,s} \cdot X_{l,t})| \leq C \text{Var}(\phi) \frac{s^{\beta}}{q_s}. \quad (2.49)$$

Démonstration. Les deux inégalités se démontrent de la même manière, mais la première est plus simple, et on ne démontrera donc que la seconde. On considère comme des constantes des nombres qui

dépendent de α et de ψ . Soit $l \geq 1$ et $t \geq s \geq 1$. Posons

$$g = X_{l,s} \quad \text{et} \quad h = X_{l,t}.$$

Soit $\phi \in \text{BV}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. On a $|\hat{\phi}(k)| \leq \text{Var}(\phi)/2\pi|k|$ si $k \in \mathbb{Z}_0$, et $\hat{\phi}(0) = 0$ par hypothèse. Simplifions tout d'abord le problème de deux façons.

Premièrement, d'après le lemme 13, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $q_{cn} \geq q_n^4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $P : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ le projecteur défini par $Pu(x) = \sum_{k \leq q_{ct}} \hat{u}(k)e^{2i\pi kx}$. Soit $Q = \text{Id} - P$. On a $\|Qg\|_2 \lesssim 1/q_t$ et $\|Qh\|_2 \lesssim 1/q_t$; en effet, puisque l'hypothèse 1. de la proposition 3 est satisfaite avec $(c_k) = (q_k)$, on a par exemple

$$\|Qh\|_2^2 \leq \frac{\text{Var}^2(h)}{4\pi^2} \sum_{k:|k| \geq q_{ct}} \frac{1}{k^2} \lesssim \frac{q_t^2}{q_{ct}} \lesssim \frac{1}{q_t^2}. \quad (2.50)$$

Mais

$$|\mathbb{E}(\phi g h)| \leq |\mathbb{E}(\phi P g P h)| + \mathbb{E}|\phi Q g P h| + \mathbb{E}|\phi g Q h|.$$

Comme ϕ est de moyenne nulle, $\|\phi\|_\infty \leq \text{Var}(\phi)$. D'après l'hypothèse 1. de la proposition 3 et (2.50), on a

$$\mathbb{E}|\phi g Q h| \leq \|\phi\|_\infty \|g\|_\infty \|Qh\|_2 \lesssim \text{Var}(\phi) \frac{1}{q_t},$$

et, parce que $\|Ph\|_2 \leq \|h\|_2 \leq \|h\|_\infty$, on trouve de même que

$$\mathbb{E}|\phi Q g P h| \leq \|\phi\|_\infty \|Qg\|_2 \|Ph\|_2 \lesssim \text{Var}(\phi) \frac{1}{q_t}.$$

Dès lors, il suffit d'estimer $|\mathbb{E}(\phi P g P h)|$ au lieu de $|\mathbb{E}(\phi g h)|$.

Ensuite, montrons que, si $t \geq c's$ pour un certain $c' \in \mathbb{N}$, alors la première inégalité (2.49) implique la seconde (la démonstration de la première n'utilise évidemment pas ce fait). Si $u, v \in \text{BV}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, on a $\text{Var}(uv) \leq \|u\|_\infty \text{Var}(v) + \|v\|_\infty \text{Var}(u)$. Dès lors, utilisant encore le fait que $\|\phi\|_\infty \leq \text{Var}(\phi)$, l'hypothèse 1. de la proposition 3, et la première inégalité (2.49), on trouve que

$$|\mathbb{E}((\phi g) h)| \lesssim (\|g\|_\infty \text{Var}(\phi) + \text{Var}(\phi) \text{Var}(h)) \frac{t^\beta}{q_t} \lesssim \frac{\text{Var}(\phi)}{q_s} \left(\frac{q_s t^\beta}{q_t} + \frac{q_s^2 t^\beta}{q_t} \right).$$

D'après le lemme 13, il existe $c' \in \mathbb{N}$ tel que $q_{c'n} \geq q_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, si $t \geq c's$, on peut écrire $t = c's + u$ avec $u \geq 0$, et ainsi, se servant de (2.42), obtenir

$$\frac{q_s t^\beta}{q_t} + \frac{q_s^2 t^\beta}{q_t} \leq \frac{2q_{c's}(c's + u)^\beta}{q_{c's+u}} \lesssim \frac{(c's + u)^\beta}{e^{2\rho u}} \lesssim c'^\beta s^\beta \frac{(1 + u/cs)^\beta}{e^{2\rho u}} \lesssim s^\beta.$$

Venons-en à présent à la démonstration proprement dite, et supposons $t < c's$. Il suit de quelques manipulations algébriques que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\phi P g P h)| &= \left| \sum_{j,k:|j|,|k| \leq q_{ct}} \hat{g}(j) \hat{h}(-k) \hat{\phi}(k-j) \right| \\ &\leq \frac{4\text{Var}(\phi)}{2\pi} \sum_{1 \leq j, k \leq q_{ct}, k \neq j} |\hat{g}(j)| \cdot |\hat{h}(k)| \cdot \frac{1}{|k-j|} + \frac{\text{Var}(\phi)}{2\pi} \sum_{1 \leq k \leq q_{ct}} \frac{|\hat{g}(k)| \cdot |\hat{h}(k)|}{k} \\ &=: \frac{\text{Var}(\phi)}{2\pi} (4S_1 + S_2). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Bornons la somme S_1 donnée par (2.51). Les ensembles Γ_n ($n \geq 1$) sont définis par (2.43). En vertu de (2.44) et (2.42), il existe une constante $w \geq 0$ telle que, si $j \in \Gamma_{m+w}$, alors $j > q_m$ ($m \geq 1$), et donc

$$S_1 = \sum_{1 \leq m, n \leq ct+w} \sum_{\substack{j \in \Gamma_m, j \leq q_{ct} \\ k \in \Gamma_n, k \leq q_{ct}, k \neq j}} |\hat{g}(j)| \cdot |\hat{h}(k)| \cdot \frac{1}{|k-j|} =: \sum_{1 \leq m, n \leq ct+w} S(m, n). \quad (2.52)$$

Fixons $m, n \in \{1, \dots, ct+w\}$ et estimons $S(m, n)$. Prenons d'abord le cas où $m \leq n$. D'après (2.48), (2.35), (2.33), (2.40) et (2.43), on a

$$|\hat{g}(j)| = |\widehat{X_{l,s}}(j)| \leq \frac{|1 - e^{2i\pi b_s(l)q_s j \alpha}|}{|1 - e^{2i\pi j \alpha}|} \frac{\text{Var}(\psi)}{2\pi j} \leq \frac{dj \cdot |1 - e^{2i\pi q_s \alpha}|}{1/q_m} \frac{\text{Var}(\psi)}{2\pi j} \lesssim \frac{q_m}{q_s}. \quad (2.53)$$

Puis, d'après (2.48), (2.35), le fait que $|1 - e^{2i\pi x}| \leq 2$ for all $x \in \mathbb{R}$, et (2.43), on a

$$|\hat{h}(k)| = |\widehat{X_{l,t}}(k)| \leq \frac{|1 - e^{2i\pi b_t(l)q_t k \alpha}|}{|1 - e^{2i\pi k \alpha}|} \frac{\text{Var}(\psi)}{2\pi k} \lesssim \frac{q_n}{k}. \quad (2.54)$$

Ainsi, il résulte de (2.52), (2.53) et (2.54), et ensuite de (2.44), que

$$\begin{aligned} S(m, n) &\lesssim \frac{q_m q_n}{q_s} \sum_{\substack{j \in \Gamma_m, j \leq q_{ct} \\ k \in \Gamma_n, k \leq q_{ct}, k \neq j}} \frac{1}{k|k-j|} \lesssim \frac{q_m q_n}{q_s} \sum_{k \in \Gamma_n, k \leq q_{ct}} \frac{1}{k} \sum_{j \in \Gamma_m, j \leq q_{ct}, j \neq k} \frac{1}{|k-j|} \\ &\lesssim \frac{q_m q_n}{q_s} \left(\frac{1}{q_n} \sum_{1 \leq u \leq q_{ct}} \frac{1}{u} \right) \cdot \left(\frac{1}{q_m} \sum_{1 \leq u \leq q_{ct}} \frac{1}{u} \right) \lesssim \frac{1}{q_s} \ln^2 q_{ct}. \end{aligned}$$

Le cas $m \geq n$ est analogue : on utilise les estimations $|\hat{g}(j)| \lesssim q_m/j$ et $|\hat{h}(k)| \lesssim q_n/q_t$, pour obtenir $S(m, n) \lesssim \ln^2(q_{ct})/q_t$. Par conséquent, $S_1 \lesssim (ct+w)^2(\ln^2 q_{ct})/q_s$.

La somme S_2 est bornée de la même façon ; on trouve $S_2 \lesssim (ct+w)(\ln q_{ct})/q_s$. Pour obtenir le résultat, on utilise finalement l'inégalité $q_{ct} \leq (2a)^{ct}$, où a est donné par (2.40), et on prend $\beta = 4$. $\square$

Deuxième partie

Flux de chaleur dans une chaîne harmonique désordonnée

3 – La loi de Fourier

La loi de Fourier affirme que, dans la matière, le flux d'énergie J est proportionnel au gradient de température T :

$$J = -\kappa \nabla T. \quad (3.1)$$

Le coefficient κ porte le nom de conductivité thermique, et est généralement lui-même une fonction de la température. Cette loi phénoménologique est bien vérifiée expérimentalement dans des situations variées, mais n'est pas encore très bien comprise théoriquement.

1. Une dérivation heuristique. Essayons, en suivant Bonetto et al. [6], de dériver la loi de Fourier (3.1) sous des hypothèses très simplificatrices. Imaginons un gaz, comme de l'air, contenu dans un long cylindre horizontal, fermé à ses extrémités. Ce cylindre est fait dans un matériau isolant, sauf aux bords, qui sont conducteurs. L'extrémité gauche est plongée dans la mer, alors que l'extrémité droite se trouve dans un four. On dit que la mer et le four sont des *réservoirs* ou des *sources* de chaleur. On s'attend à ce que le gaz dans le cylindre transmette la chaleur du four à la mer.

Voyons comment ça se passe. Le gaz est décrit par la distribution des positions et des vitesses des molécules qui le constituent, au sujet de laquelle il sera nécessaire de formuler certaines hypothèses pour aboutir à des conclusions. Fondamentalement, on suppose que le gaz se trouve dans un état de désordre moléculaire : les molécules vont en tout sens et s'entrechoquent de manière aléatoire.

On obtient la distribution des vitesses en fonction de la température à l'aide de l'*hypothèse d'équilibre thermique local* : suite à de nombreuses collisions, les particules du gaz sont à l'équilibre thermique avec les particules environnantes. Supposons que la température ne dépende que de la position x selon l'axe du cylindre. On considère que la vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule située en x est distribuée selon la statistique de Maxwell-Boltzmann pour la température $T(x)$:

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{m^{3/2}}{(2\pi k_B T(x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T(x)}\right).$$

En particulier, l'énergie cinétique moyenne d'une particule vaut $\frac{3}{2}k_B T(x)$. En ce sens, la température, est donc proportionnelle à l'énergie cinétique des particules.

Regardons maintenant les collisions d'un peu plus près. Lors d'un choc élastique, l'énergie cinétique de deux particules, disons 1 et 2, est partiellement échangée :

$$\begin{aligned} E_{cin}(1) &\rightarrow \alpha E_{cin}(1) + (1 - \alpha) E_{cin}(2), \\ E_{cin}(2) &\rightarrow \alpha E_{cin}(2) + (1 - \alpha) E_{cin}(1), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ dépend de l'angle d'impact lors de la collision. On admet que cet angle est aléatoire et uniformément distribué. Si on modélise les particules par des sphères dures, un calcul livre qu'en moyenne $\alpha = 1/2$. On voit donc que, par le biais de collisions typiques, l'énergie se comporte comme la distribution d'une marche aléatoire symétrique. Désignons encore par λ le libre parcours moyen, c'est-à-dire, pour nous, la distance horizontale moyenne qu'une particule parcourt entre deux chocs, et par τ le temps libre moyen, c'est-à-dire, le temps moyen entre deux chocs. Lors d'un choc moyen entre une particule 1 initialement située en x et une particule 2 initialement en $x + \lambda$, (3.2) devient donc

$$\begin{aligned} E_{cin}(x) &\rightarrow \frac{1}{2} E_{cin}(x) + \frac{1}{2} E_{cin}(x + \lambda), \\ E_{cin}(x + \lambda) &\rightarrow \frac{1}{2} E_{cin}(x) + \frac{1}{2} E_{cin}(x + \lambda). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cela dit, le flux d'énergie $J(x)$ au travers d'une section perpendiculaire au cylindre située en x , se définit comme la quantité d'énergie transférée, suite à des collisions, de gauche à droite de x , par unité de temps et de surface. On suppose d'ailleurs que tout transfert d'énergie est dû à des collisions, ignorant de possibles phénomènes de convection au sein du gaz. Pour simplifier encore, on admet aussi que, lors de n'importe quel choc, on se trouve toujours dans la situation moyenne. En particulier, aux unités près, on ne fait pas de différence entre température et énergie cinétique. De la seconde ligne de (3.3), il découle que

$$J(x) \sim \frac{1}{2\tau} (E_{cin}(x) + E_{cin}(x + \lambda)) - \frac{1}{\tau} E_{cin}(x + \lambda) \sim -\frac{\lambda}{2\sqrt{3}\tau} \partial_x E_{cin}(x),$$

où $E_{cin}(x)$ désigne ici l'énergie cinétique par unité de volume au point x . Comme en fait $\lambda/\tau \sim \sqrt{E_{cin}(x)}$, on trouve bien une loi de la forme

$$J(x) = -\kappa(E_{cin}(x)) \partial_x E_{cin}(x). \quad (3.4)$$

On déduit de la conservation de l'énergie que $\partial_x J + \partial_t E_{cin} = 0$. L'équation de la chaleur s'obtient de cette relation et de la loi de Fourier (3.4) :

$$\partial_t T = \partial_x (\kappa(T) \partial_x T). \quad (3.5)$$

Désignons par L la longueur du cylindre. Après un temps assez long, la température atteint un profil stationnaire, que l'on trouve être linéaire si on admet que le coefficient κ est à peu près constant. On déduit alors de (3.4), que le courant J lui-même est constant :

$$J = -\kappa \frac{T_{four} - T_{mer}}{L}. \quad (3.6)$$

Le flux est donc inversement proportionnel à la longueur du cylindre. Dans la suite, c'est en fait à cette propriété-là que nous ferons allusion quand nous parlerons de loi de Fourier. On rencontre une loi du même genre en électricité : l'intensité du courant dans un fil est proportionnelle à la différence de potentiel aux extrémités, et inversement proportionnelle à la longueur du fil, vu comme une résistance. Montrer la loi de Fourier, c'est donc montrer que la matière agit comme une résistance, au passage de l'énergie cinétique.

2. Chaînes harmoniques désordonnées. Nous venons de donner, sous des hypothèses très difficiles à vérifier, une dérivation heuristique de la loi de Fourier dans le cas d'un gaz. Dans la suite, nous considérerons plutôt des solides, et en particulier des solides unidimensionnels modélisés par des chaînes de masses couplées entre plus proches voisines. Le hamiltonien d'une telle chaîne est défini par (3.21) ci-dessous. Peierls [40], s'inspirant de la démarche de Boltzmann, a montré que des interactions anharmoniques entre les atomes étaient vraisemblablement nécessaires pour que la loi de Fourier soit valide dans un cristal. Ce genre d'interactions, censées introduire une certaine dose de "désordre", devraient assurer une diffusion de l'énergie. Par ailleurs, on sait, depuis les travaux de Rieder et al. [42], que la loi de Fourier est violée dans un solide cristallin harmonique : le flux de chaleur ne dépend pas de la longueur du conducteur, mais seulement de la différence de température entre les sources chaude et froide ! Ce solide est décrit par le hamiltonien (4.18) ci-dessous, quand toutes les masses sont égales.

La considération de potentiels anharmoniques, cependant, pose de grosses difficultés techniques : on ne sait généralement pas dire grand chose sur un grand système d'équations différentielles non-linéaires. Cela dit, la présence d'impuretés dans un cristal peut aussi contribuer à la diffusion de l'énergie. C'est ainsi qu'on fut amené à considérer la conductivité de *chaînes harmoniques désordonnées*, dans lesquelles les interactions sont harmoniques, mais où les masses des atomes ne sont pas identiques. Ces chaînes constituent l'objet de notre étude.

Dans le cas le plus simple, le seul d'ailleurs sur lequel nous nous pencherons, les masses sont considérées comme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Par ailleurs, dans ce travail, les constantes de raideur des ressorts qui couplent les masses, seront toutes supposées identiques, alors qu'on aurait pu envisager d'en faire également des variables aléatoires, pour obtenir en fait une situation nouvelle, non réductible à la précédente.

Il s'avère que la loi de Fourier (3.6) sera généralement violée dans les chaînes harmoniques désordonnées. Soit n le nombre d'atomes d'une chaîne. Imaginons que, pour un certain $\alpha \geq 0$, le courant J obéisse à une loi du type

$$J \sim \frac{T_n - T_1}{n^\alpha}, \quad (3.7)$$

où T_1 est la température du réservoir couplé à la masse 1, et T_n celle du réservoir couplée à la masse n . Si $\alpha < 1$, on a un super-conducteur. C'est en particulier le cas de la chaîne ordonnée pour laquelle

$\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, on retrouve la loi de Fourier, et, enfin, si $\alpha > 1$, on est en présence d'un super-isolant. On peut bien sûr songer à d'autres lois encore : nous verrons par exemple un cas où $J \leq C e^{-cn}$, pour certaines constantes $C < +\infty$ et $c > 0$.

Il convient de réaliser deux aspects importants du problème des chaînes harmoniques désordonnées. D'abord il se trouve que la conductivité de la chaîne dépend de la modélisation des réservoirs de chaleur. Autrement dit, l'exposant α qui apparaît dans (3.7) ne refléterait pas une caractéristique de la chaîne seule, et sa détermination pourrait sembler d'un intérêt moyen. Mais, quand nous connaissons la raison de ce phénomène étrange, nous comprendrons que cette sensibilité particulière de la chaîne à des excitations variées, rend justement très bien compte de ses caractéristiques intrinsèques. C'est la nature de ses modes propres qui est à l'origine de cet état des choses.

Une seconde caractéristique qui affecte la conductivité de la chaîne est sa dimension. De manière générale, les systèmes unidimensionnels peuvent se comporter fort différemment de leurs analogues à deux ou trois dimensions. En l'occurrence, un récent travail de Chaudhuri et al. [11] montre, par des arguments heuristiques et des simulations numériques, que les chaînes harmoniques désordonnées se comportent de façon tout autre en dimensions supérieures. En particulier, une conductivité normale ($\alpha = 1$) est conjecturée en trois dimensions ! Hélas, l'adaptation des méthodes utilisées en une dimension est loin d'être évidente, et peut-être impossible.

3. Plan. Dressons à présent un plan du reste de ce chapitre et des suivants. Dans la section 3.1 nous présentons un petit modèle très schématique d'un solide, où les atomes suivent une loi d'évolution stochastique. La loi de Fourier s'y démontre. L'objectif est de voir, plus clairement peut-être que dans notre dérivation de (3.6), comment l'hypothèse de désordre moléculaire conduit à un profil linéaire des températures et à une relation de type (3.6) pour le courant. Dans la section 3.2, nous donnons des renseignements généraux sur la modélisation d'un solide par une chaîne unidimensionnelle d'oscillateurs. Nous verrons une façon de modéliser l'interaction entre la chaîne et les réservoirs, puis comment on peut définir le courant d'énergie.

L'étude des chaînes harmoniques désordonnées proprement dite est abordée au chapitre 4. Nous y énonçons nos résultats, et tâchons d'exposer de façon systématique ce qui nous semble constituer l'essentiel des connaissances sur le sujet. En particulier, nous proposons un schéma d'explication des différentes valeurs de conductivité observées, basé sur l'analyse des modes propres. Le chapitre 5 rassemble des résultats techniques sur des matrices aléatoires, utiles à notre étude. Nous nous en servons au dernier chapitre pour démontrer un théorème annoncé au chapitre 4.

3.1 La loi de Fourier pour un modèle stochastique

La dérivation heuristique de la loi de Fourier présentée ci-dessus fait intervenir de nombreuses hypothèses. Afin de clarifier un peu la situation, nous allons considérer un modèle très schématique de solide unidimensionnel ; on dérivera la loi (3.6) dans un sens bien précis, et sous l'unique hypothèse de collisions élastiques aléatoires entre particules voisines. Comme, en une dimension, une collision correspond simplement à un échange des moments, l'hypothèse de désordre moléculaire est donc présente dans notre modèle sous forme de chocs aléatoires.

De surcroît, la loi de Fourier nous semble devenir ici une question de bon sens. Il est certes bien naturel de supposer que le profil des températures tend à devenir linéaire, car à force d'échanges, l'énergie n'a aucune raison de s'accumuler ci ou là. Mais dans ce cas, la différence de température entre deux atomes voisins est de $1/n$, et, comme le flux est justement proportionnel aux échanges d'énergie entre voisins, il doit être lui-même inversement proportionnel à n .

1. Le modèle. Soit un solide unidimensionnel constitué de n atomes, ou particules. On décompose l'intervalle $[0, 1[$ en n sous-intervalles de longueur identique, et on considère que chacun de ces sous-intervalles est occupé par une et une seule particule. Celles-ci se déplacent librement dans leur boîte, jusqu'à rencontrer un bord, contre lequel elles rebondissent de façon parfaitement élastique. Quand les particules sont, comme ici, contraintes par un potentiel extérieur à ne pas trop s'éloigner de leur position initiale, on dit qu'elles sont *ancrées* (*pinned*). L'impulsion totale du solide isolé n'est alors pas conservée.

De plus, ces particules interagissent avec leur plus proches voisines, par le biais de collisions élastiques aléatoires. L'énergie totale du solide isolé est donc, quant à elle, conservée. La première particule est également en contact avec un réservoir thermique froid, constitué de particules au repos, alors que la dernière est en contact avec un réservoir chaud, constitué lui de particules de vitesse unité.

Voyons ceci plus précisément. Soit $N = (N_k(t) : 0 \leq k \leq n, t \geq 0)$ une suite de $n + 1$ processus de Poisson indépendants, de constante $\gamma > 0$. Soit $0 \leq k \leq n$, et soit dN_k l'accroissement du processus N_k . On peut se représenter dN_k comme une succession de mesures de Dirac, séparées aléatoirement, et on écrit

$$N_k(t) = \int_0^t dN_k(s). \quad (3.8)$$

Mais, pour $t \geq 0$ fixé, il sera aussi commode de penser que $dN_k(t)$ est une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité γdt , et 0 avec probabilité $1 - \gamma dt$.

Cela dit, définissons une suite $e := (e_k)_{1 \leq k \leq n}$, où e_k désigne l'énergie cinétique de la particule k . Des conditions initiales $e(0)$ étant données, on demande que, pour $1 \leq k \leq n$ et $t \geq 0$,

$$e_k(t+dt) = (1 - dN_{k-1}(t+dt) - dN_k(t+dt)) e_k(t) + dN_{k-1}(t+dt) e_{k-1}(t) + dN_k(t+dt) e_{k+1}(t), \quad (3.9)$$

où on a posé

$$e_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad e_{n+1}(t) = 1 \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (3.10)$$

Dès lors, presque sûrement, on aura tout le temps $e_k \in \{0, 1\}$, pour $1 \leq k \leq n$. Dans l'équation (3.9), on a écrit $dN(t + dt)$ et non $dN(t)$, pour souligner l'indépendance de $dN(t + dt)$ par rapport à $e(t)$. Mais (3.9) peut aussi écrire sous une forme plus classique :

$$de_k = (e_{k-1} - e_k) dN_{k-1} + (e_{k+1} - e_k) dN_k. \quad (3.11)$$

2. Convergence vers une mesure stationnaire. Soit l'espace des états $X = \{0, 1\}^n$ de toutes les suites binaires à n éléments. On peut considérer e comme un processus de Markov sur X dont l'évolution est dictée par (3.9). Dans ce paragraphe, nous verrons, sans toutefois fournir de démonstration formelle, que, pour toute condition initiale, la distribution du processus $e(t)$ converge exponentiellement vers une unique mesure *stationnaire*, ou *invariante*, définie par la condition (3.12) ci-dessous, mais il convient de noter que le taux de convergence dépend de n d'une façon que nous n'avons hélas pas déterminée.

Précisons quelques notations et définitions. On désigne par P la distribution de probabilité des processus de Poisson N , et par E la moyenne sur leurs réalisations. Soit μ une mesure de probabilité sur X . On aura seulement à considérer des processus qui dépendent de N au travers de e ; on écrira P_μ et E_μ pour signaler que μ est la distribution initiale de e . Une mesure de probabilité ν est stationnaire sous e si, pour tout ensemble $B \subset X$, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$P_\nu(e(t) \in B) = \nu(B). \quad (3.12)$$

Si ν est la mesure stationnaire, on écrira aussi P_∞ et E_∞ au lieu de P_ν et E_ν .

Soit $\tau > 0$. Si une distribution initiale μ est donnée, $(e(k\tau))_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur X . Nous pouvons énoncer une version du théorème de *Doeblin* relative à cette chaîne. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité ρ sur X , et un nombre $0 < \alpha \leq 1$, tels que, pour tout $x, y \in X$,

$$P_{\delta_x}(e(\tau) \in \{y\}) \geq \alpha \rho(\{y\}) \quad (3.13)$$

Alors, d'après ce théorème, il existe une unique mesure de probabilité invariante ν sous $(e(k\tau))$. De plus, pour toute mesure de probabilité μ sur X , et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{x \in X} |P_\mu(e(k\tau) \in \{x\}) - \nu(\{x\})| \leq 2(1 - \alpha)^k. \quad (3.14)$$

Vérifions que l'hypothèse (3.13) est satisfaite si, par exemple, on prend pour ρ la mesure uniforme sur X . Voyons en fait que $P_{\delta_x}(e(\tau) \in \{y\}) > 0$ pour tout $x, y \in X$. On passe d'un état à un autre par une suite finie de permutations de plus proches voisins. Comme X est un ensemble fini, le nombre de permutations nécessaires est borné uniformément, disons par $\kappa \in \mathbb{N}_0$. Mais, dans un intervalle de temps τ/κ , il y a une probabilité non nulle de réaliser une et une seule permutation voulue.

On peut enfin voir que ν ne dépend pas de τ , et que c'est donc bien l'unique mesure invariante du processus e . En effet, soit ν_1 la mesure invariante associée au temps τ_1 , et soit ν_2 la mesure associée au temps τ_2 . Supposons $\tau_2 > \tau_1$ et écrivons $\tau_2 := \tau_1 + \tau'$. Si $k \in \mathbb{N}_0$, désignons par $\nu_{2,k}$ la mesure telle que $\nu_{2,k}(B) = P_{\nu_2}(e(k\tau') \in B)$ pour tout $B \subset X$. Alors, d'après (3.14), pour tout $B \subset X$, on a

$$\nu_2(B) = P_{\nu_2}(e(k\tau_1 + k\tau') \in B) = P_{\nu_{2,k}}(e(k\tau_1) \in B) \rightarrow \nu_1(B),$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. Donc $\nu_1 = \nu_2$.

3. Profil linéaire des températures et loi de Fourier en moyenne. On déduit de (3.9) que, pour toute mesure de probabilité μ sur X , et pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{d}{dt} E_\mu(e_k(t)) = -\gamma (2E_\mu(e_k(t)) - E_\mu(e_{k-1}(t)) - E_\mu(e_{k+1}(t))). \quad (3.15)$$

En particulier, dans la mesure stationnaire, on aura $\frac{d}{dt} E_\infty(e_k(t)) = 0$, et donc

$$E_\infty(e_k) = \frac{1}{2} (E_\infty(e_{k-1}) + E_\infty(e_{k+1})). \quad (3.16)$$

Puisque $E_\infty(e_0) = 0$ et $E_\infty(e_{n+1}) = 1$, on a forcément

$$E_\infty(e_k) = \frac{k}{n+1}, \quad 0 \leq k \leq n+1. \quad (3.17)$$

Soit $0 \leq k \leq n$, et soient $t \geq 0$ et $s > 0$. Nous allons à présent définir le *flux d'énergie* $J_{k,k+1}(t, s)$ de la particule k vers la particule $k+1$, évalué sur l'intervalle de temps $[t, t+s]$. Soit la suite $(t_j)_{1 \leq j \leq m(s)}$, où $t < t_1 < \dots < t_{m(s)} < t+s$, des instants auxquels la particule k échange son énergie avec la particule $k+1$. On définit

$$J_{k,k+1}(t, s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{m(s)} (e_{k+1}(t_j) - e_k(t_j)), \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{s} \int_t^{t+s} (e_{k+1}(\tau) - e_k(\tau)) dN(\tau + d\tau). \quad (3.19)$$

où, dans la première expression, la différence $(e_{k+1}(t_j) - e_k(t_j))$ est évaluée juste avant la collision. On établit alors que $E_\infty(J_{k,k+1}(t, s))$ ne dépend ni de t ni de s , puisqu'en fait, d'après (3.17), on a

$$E_\infty(J_{k,k+1}(t, s)) = \frac{1}{s} \int_t^{t+s} \gamma (E_\infty(e_{k+1}) - E_\infty(e_k)) d\tau = \frac{\gamma}{n+1}. \quad (3.20)$$

L'équation (3.17) montre que la température atteint un profil linéaire, alors que l'équation (3.20) exprime, qu'après un temps suffisamment long, la loi de Fourier est satisfaite.

4. Remarques. Les relations (3.17) et (3.20) ne mettent en jeu que l'énergie et le courant *moyens*. Dans un jargon hérité de la métallurgie, on dit que ces relations sont de type *annealed*, valables pour de

l'acier *recuit*, qui a refroidi lentement, et dont les propriétés seraient donc assez homogènes, et proches de leurs moyennes.

On souhaiterait des résultats plus précis, et, idéalement, voir que, dans la mesure stationnaire, le profil de température est *presque sûrement* linéaire, et que la loi de Fourier, elle aussi, est vérifiée presque sûrement. On dit encore d'un résultat presque sûr, c'est-à-dire valide pour presque toute réalisation, qu'il est de type *quenched*, par référence cette fois à l'acier trempé, qui s'est brusquement figé dans un état donné.

Pour parvenir à ce genre de conclusions plus fines, on doit regarder le solide d'un point de vue *macroscopique*, ou du moins *mésoscopique*. Ainsi, en ce qui concerne le profil de température, la convergence presque sûre à l'échelle microscopique est impossible puisque, pour $0 \leq k \leq n+1$, les variables e_k ne prennent que les valeurs 0 ou 1. On peut par contre définir des blocs de particules proches, et analyser le comportement de la température moyenne de ce bloc. Ici, toutefois, il ne s'agit plus d'une moyenne sur les réalisations du système, mais de la moyenne des températures des particules du bloc, pour une réalisation donnée. Un profil de température presque sûrement linéaire est alors envisageable dans la limite où $n \rightarrow \infty$, et pour des blocs macroscopiques de taille ϵn , où $\epsilon > 0$ est fixé et indépendant de n .¹

En ce qui concerne la loi de Fourier, il faut mesurer le courant sur un intervalle de temps s suffisamment long. Les résultats de convergence exponentielle à l'équilibre du §2 permettraient alors de montrer que les réalisations de $J(t, s)$ se resserrent autour de leur moyenne pour $s \rightarrow \infty$. Il serait évidemment intéressant de connaître, dans la limite où $n \rightarrow \infty$, l'ordre de grandeur de s qui assure une convergence presque sûre du courant.

3.2 Chaînes unidimensionnelles

Nous entamons ici l'étude des chaînes unidimensionnelles d'oscillateurs couplés. Nous présentons deux éléments importants pour la suite. D'abord, nous verrons au §2 une façon de modéliser l'interaction entre la chaîne et un réservoir de chaleur, dans laquelle on aboutit en fait à une équation de Langevin. Ensuite, au §3, nous définirons le courant d'énergie à travers la chaîne.

1. La chaîne isolée. Soient des masses $m_k \in \mathbb{R}_{0+}$ ($1 \leq k \leq n$), et soient des potentiels $U_k, V_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($0 \leq k \leq n$), bornés inférieurement. On suppose que chacun de ces potentiels soit nul, soit tend vers l'infini à l'infini. Les masses forment une chaîne unidimensionnelle, dont le hamiltonien est donné par

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2m_k} + \sum_{k=1}^{n+1} U_k(q_k - q_{k-1}) + \sum_{k=1}^n V_k(q_k). \quad (3.21)$$

1. On a en fait montré rigoureusement une convergence en probabilité. La démonstration n'est pas reproduite ici.

Ici, q_k représente la position de la particule k , et p_k son impulsion. On voit que les potentiels U_k assurent une interaction entre les masses voisines, alors que les potentiels V_k sont des potentiels d'ancrage ou de confinement.

Pour que H soit complètement défini, on doit encore spécifier les conditions aux bords de la chaîne, c'est-à-dire assigner des valeurs à q_0 et q_{n+1} . Une possibilité, que nous choisissons pour cette section, est d'imposer $q_0 = q_1$ et $q_{n+1} = q_n$; on peut alors évidemment poser $U_1 = U_{n+1} = 0$. Si $V_k = 0$ pour $1 \leq k \leq n$, la chaîne est tout à fait *libre*. Si seuls $V_1, V_n \neq 0$, la chaîne est *fixée* à ses extrémités. On pourrait, dans ce cas, réécrire les choses un peu différemment : poser $q_0 = 0$ et $q_{n+1} = 0$, puis $U_1 = V_1$ et $U_{n+1} = V_n$, et, cela fait, redéfinir $V_k = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. Par ailleurs, on peut aussi considérer des conditions aux bords *périodiques* : $q_0 = q_n$ et $q_{n+1} = q_1$. Nous n'analyserons pas ce cas dans ce texte.

Quoi qu'il en soit, une fois fixées des conditions initiales $(q_1(0), \dots, q_n(0), p_1(0), \dots, p_n(0))$, le mouvement de la chaîne est déterminé par les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= m_k^{-1} p_k, \quad 1 \leq k \leq n, \\ \dot{p}_k &= \partial U_{k+1}(q_{k+1} - q_k) - \partial U_k(q_k - q_{k-1}) - \partial V_k(q_k), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

2. La chaîne couplée à des réservoirs thermiques. Nous allons voir ici comment se décrit l'évolution d'une particule de masse m , soumise d'une part à une force F qui dépend du temps, et d'autre part plongée dans un gaz de particules beaucoup plus légères qu'elle; on trouvera dans Dürr et al. [17] une version rigoureuse des développements présentés ci-dessous. On suppose que le gaz est à l'équilibre à température T , et que la masse m subit des chocs aléatoires et élastiques des particules du gaz. En revanche, on admet que les propriétés du gaz ne sont pas modifiées par le mouvement de la masse m . Pour simplifier, on considère une dynamique unidimensionnelle.

Soit m' la masse des particules du gaz. Soit v la vitesse de la particule de masse m , et soit v' celle d'une particule m' . Imaginons qu'un choc entre m et m' se produise dans le petit intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. On a

$$v(t + \Delta t) - v(t) = \frac{2m'}{m + m'}(v'(t) - v(t)) + \frac{1}{m}F(t)\Delta t, \quad (3.23)$$

$$v'(t + \Delta t) - v'(t) = \frac{2m}{m + m'}(v(t) - v'(t)). \quad (3.24)$$

On suppose que v' est une variable aléatoire distribué selon la statistique de Maxwell-Boltzmann, pour une température T . Donc la densité est donnée par

$$\rho(v') = \sqrt{\frac{m'}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m'v'^2}{2k_B T}\right) \quad (3.25)$$

Si on écrit $\zeta(t) = \sqrt{\frac{k_B T}{m'}}$ $v'(t)$, on a $E(\zeta^2(t)) = 1$. Posons aussi $p = mv$. Si $m' \ll m$, on peut faire l'approximation $\frac{2m'}{m + m'} \simeq \frac{2m'}{m}$, et (3.23) devient

$$p(t + \Delta t) - p(t) = \sqrt{4m'k_B T} \zeta(t) - \frac{2m'}{m\Delta t} p(t)\Delta t + F(t)\Delta t. \quad (3.26)$$

Posons

$$\gamma := \frac{2m'}{m\Delta t}. \quad (3.27)$$

Si la masse m a les dimensions d'un objet macroscopique, et que Δt est l'intervalle de temps entre deux collisions avec le gaz, le paramètre γ aura généralement des dimensions macroscopiques, et rend compte de la viscosité des fluides. L'équation (3.26) devient

$$p(t + \Delta t) - p(t) = \sqrt{2\gamma m k_B T} \cdot \sqrt{\Delta t} \zeta(t) - \gamma p(t) \Delta t + F(t) \Delta t. \quad (3.28)$$

On peut enfin considérer $\sqrt{\Delta t} \zeta(t)$ comme un bruit blanc, et réécrire cette dernière relation sous la forme d'une équation différentielle stochastique de *Langevin* :

$$dp(t) = F(t) dt - \gamma p(t) dt + \sqrt{2m\gamma k_B T} dW(t), \quad (3.29)$$

où W est un mouvement brownien. Dans cette dernière équation, on remarque que le coefficient de frottement visqueux γ et la variance du bruit $2m\gamma k_B T$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. La forme particulière de la relation qui les unit et qu'on a dérivée ici, de façon un peu heuristique, est un exemple de théorème de *fluctuation-dissipation*.

Soient W_1, W_n deux mouvements browniens indépendants. Si on suppose que la particule de masse m_1 est en contact avec un réservoir à température T_1 et de constante de viscosité γ , et si m_n est en contact avec un réservoir de température T_n et de même constante de viscosité γ , les équations de Hamilton (3.22) sont modifiées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dq_k &= m_k^{-1} p_k dt, \quad 1 \leq k \leq n, \\ dp_k &= \left(\partial U_{k+1}(q_{k+1} - q_k) - \partial U_k(q_k - q_{k-1}) - \partial V_k(q_k) \right) dt \\ &\quad + (\delta_{k,1} + \delta_{k,n}) \left(-\gamma p_k dt + \sigma_k dW_k \right), \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (3.30)$$

où nous avons posé $\sigma_k = \sqrt{2m_k \gamma T_k}$ pour $k = 1, n$.

3. Flux de chaleur. Dans ce paragraphe, nous définissons le *flux de chaleur stationnaire moyen* J au travers d'une chaîne dont l'évolution des atomes est donnée par (3.30). Notre définition suppose que la chaîne atteint une mesure stationnaire après un temps assez long. Cette hypothèse, qui n'est pas évidente, est vérifiée dans le modèle de Casher et Lebowitz que nous étudierons au chapitre suivant. Soit $1 \leq k \leq n$. Appliquant la formule d'Itô, on déduit de (3.30) que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_k} dp_k^2 &= \frac{p_k}{m_k} \partial U_{k+1}(q_{k+1} - q_k) dt - \frac{p_k}{m_k} \partial U_k(q_k - q_{k-1}) dt - \frac{p_k}{m_k} \partial V_k(q_k) dt \\ &\quad + (\delta_{k,1} + \delta_{k,n}) \left(\frac{p_k}{m_k} (-\gamma p_k dt + \sigma_k dW) + \frac{\sigma_k^2}{2m_k} dt \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

On définit alors l'énergie cinétique transférée $E_{k,j}$ de la particule k ($1 \leq k \leq n$) vers un site j , qui sera soit une particule voisine si $j = k + 1$ ou $j = k - 1$, soit un point d'ancrage si $j = s$ (pour "sol"), soit

enfin un réservoir si $j = r$. On pose

$$dE_{k,k+1} = \frac{p_k}{m_k} \partial U_{k+1}(q_{k+1} - q_k) dt \quad (3.32)$$

$$dE_{k,k-1} = -\frac{p_k}{m_k} \partial U_k(q_k - q_{k-1}) dt \quad (3.33)$$

$$dE_{k,s} = -\frac{p_k}{m_k} \partial V_k(q_k) dt \quad (3.34)$$

$$dE_{k,r} = (\delta_{k,1} + \delta_{k,n}) \left(\frac{p_k}{m_k} (-\gamma p_k dt + \sigma_k dW) + \frac{\sigma_k^2}{2m_k} dt \right). \quad (3.35)$$

Il serait alors naturel de définir le courant $J_{k,j}$ comme la dérivée temporelle de $E_{k,j}$. On se heurte toutefois à certaines difficultés. D'une part, comme (3.30) est une équation stochastique, cette dérivée ne sera pas généralement bien définie. D'autre part, comme l'énergie cinétique n'est pas une quantité conservée, le courant ainsi défini n'aurait pas forcément les propriétés d'un courant. Par exemple, en général, on aurait $J_{k,k+1} + J_{k+1,k} \neq 0$; pour le voir il suffit de prendre l'exemple de deux particules qui s'attirent mais s'éloignent l'une de l'autre, chacune ralentissant. Ces problèmes disparaissent si on considère le courant moyen en régime stationnaire.

Nous ajoutons maintenant l'hypothèse que les solutions des équations (3.30) atteignent une distribution stationnaire, par rapport à laquelle la moyenne se note E_∞ . De plus, nous supposons que les observables p_k^2 , $V_k(q_k)$ ($1 \leq k \leq n$) et $U_k(q_k - q_{k-1})$ ($1 \leq k \leq n+1$), qui interviennent dans l'expression du hamiltonien (3.21), sont absolument intégrables par rapport à cette distribution. Pour $1 \leq k \leq n$ et $j = k-1, k+1, s, r$, on définit le *flux d'énergie cinétique moyen* $J_{k,j}$ par

$$J_{k,j} := \frac{dE_\infty(E_{k,j})}{dt} \quad (3.36)$$

On aura donc

$$J_{k,k+1} = \frac{1}{m_k} E_\infty(p_k \partial U_{k+1}(q_{k+1} - q_k)) \quad (3.37)$$

$$J_{k,k-1} = \frac{-1}{m_k} E_\infty(p_k \partial U_k(q_k - q_{k-1})) \quad (3.38)$$

$$J_{k,s} = \frac{-1}{m_k} E_\infty(p_k \partial V_k(q_k)) \quad (3.39)$$

$$J_{k,r} = \gamma (\delta_{k,1} + \delta_{k,n}) \left(T_k - \frac{E_\infty(p_k^2)}{m_k} \right) \quad (3.40)$$

Le lemme 17 ci-dessous montre qu'à l'état stationnaire, on peut bien parler du flux moyen d'énergie J à travers la chaîne, qui peut être défini par

$$J = \gamma \left(\frac{E_\infty(p_1^2)}{m_1} - T_1 \right), \quad (3.41)$$

où l'on a choisi un signe tel que, pour $T_n > T_1$, on aura vraisemblablement $J > 0$.

Lemme 17. *On a les égalités*

$$\begin{aligned} J_{1,0} &= J_{n,n+1} = J_{k,s} = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \\ J_{k+1,k} &= J_{1,r}, \quad J_{k,k+1} = J_{n,r}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ J_{1,r} + J_{n,r} &= 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Démonstration. On trouve de nombreuses relations pour les courants en exprimant que les moyennes par rapport à la mesure stationnaire n'évoluent pas au cours du temps. Nous en utiliserons trois. Premièrement, intégrant (3.31) par rapport à la mesure stationnaire et utilisant (3.37) à (3.40), on trouve que

$$0 = \frac{d}{dt} E_{\infty}(p_k^2/2m_k) = J_{k,k+1} + J_{k,k-1} + J_{k,s} + J_{k,r}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3.43}$$

Deuxièmement, on peut écrire une équation d'évolution pour $p_k^2/2m_k + V_k(q_k)$, l'intégrer par rapport à la mesure stationnaire, utiliser (3.37) à (3.40), et trouver

$$0 = \frac{d}{dt} E_{\infty}(p_k^2/2m_k + V_k(q_k)) = J_{k,k+1} + J_{k,k-1} + J_{k,r}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3.44}$$

Troisièmement, on écrit une équation d'évolution pour $p_k^2/2m_k + U_{k+1}(q_{k+1} - q_k)$, on se sert de (3.37) à (3.40), et on obtient

$$0 = \frac{d}{dt} E_{\infty}(p_k^2/2m_k + U_{k+1}(q_{k+1} - q_k)) = J_{k,k-1} + J_{k,s} + J_{k,r} - J_{k+1,k}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{3.45}$$

Cela dit, $J_{1,0} = J_{n,n+1} = 0$ puisque, par définition, $U_1 = U_{n+1} = 0$. Ensuite, combinant (3.43) et (3.44), on voit que $J_{k,s} = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. De cela il découle que les membres de droite de (3.43) et (3.45) sont une somme de deux termes seulement. En les comparant pour k fixé, on établit que $J_{k,k+1} = -J_{k+1,k}$, lorsque $1 \leq k \leq n-1$. Utilisant cette information, on voit que (3.43) implique $J_{1,r} = J_{k+1,k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, et $J_{1,r} + J_{n,r} = 0$. On a alors aussi $J_{k,k+1} = J_{n,r}$ pour $1 \leq k \leq n-1$. $\square$

4 – Chaîne harmonique désordonnée

Les chaînes harmoniques désordonnées ont été introduites au §2 de l'introduction du chapitre 3. Ce chapitre-ci s'articule comme suit. La section 4.1 est abstraite, et ne trouve son sens qu'à la lecture du reste ; on y définit quelques objets mathématiques, et on énonce le théorème 1, qui constitue le résultat principal de cette deuxième partie de la thèse. Les chaînes harmoniques désordonnées sont introduites à la section 4.2. Suit une description relativement détaillée de leurs modes propres. A la section 4.3, on suppose une chaîne dont les extrémités sont soumises à un frottement visqueux ; l'objectif est de fournir quelques résultats techniques à usage ultérieur. Le modèle de conduction de Casher et Lebowitz [10], ainsi qu'une variante de celui de Rubin et Greer [43], sont étudiés à la section 4.4. Enfin, à la section 4.5, on tente de rendre compte de la conductivité des chaînes harmoniques désordonnées à l'aide des caractéristiques de leurs modes propres. Ces développements ne sont pas rigoureux, mais, nous semble-t-il, “expliquent” le mécanisme de conduction.

Partout où cela n'introduisait aucune complication, nous avons inclus la possibilité d'un ancrage ($\mu > 0$ dans le hamiltonien (4.18) ci-dessous), car a priori cette configuration est tout aussi intéressante que les autres. Mais, comme nous l'expliquerons brièvement à la section 4.2 §6, le traitement mathématique de ce cas se révèle plus simple, et en fait, en ce qui le concerne, notre approche n'apporterait rien par rapport à la théorie classique bien établie. Dès lors, nous avons simplement posé $\mu = 0$ dès que de trop longs développements seraient devenus nécessaires.

4.1 Préambule mathématique et théorème fondamental

Nous définissons d'abord par récurrence deux suites numériques fondamentales, $D \subset \mathbb{C}$ et $\xi \subset \mathbb{C}$. Ensuite, nous les considérons comme des réalisations de processus stochastiques, et énonçons le théorème 1 ; il apparaîtra, dans les sections 4.4 et 4.5, qu'on peut en tirer des informations sur le comportement asymptotique des chaînes harmoniques désordonnées.

1. Les suites D et ξ . Soient $\mu, \omega \geq 0$. Soit une suite de nombres $(m_k)_{k \geq 1} \subset [m_-, m_+]$, où $0 < m_- \leq m_+ < +\infty$. Soit $v = (v_0, v_{-1}) \in \mathbb{C}^2$. Soit alors $D \equiv D(v) := (D_n(v))_{n \geq -1} \subset \mathbb{C}$ une suite définie par

$$\begin{aligned} D_n(v) &= (2 + \mu - \omega^2 m_n) D_{n-1}(v) - D_{n-2}(v), \quad n \geq 1, \\ D_0(v) &= v_0, \\ D_{-1}(v) &= v_{-1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

La suite D est linéaire, au sens où, pour tous $u, v \in \mathbb{C}^2$, et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$D(\alpha u + \beta v) = \alpha D(u) + \beta D(v). \tag{4.2}$$

La relation de récurrence (4.1) s'exprime aussi sous forme matricielle. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 + \mu - \omega^2 m_k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on a alors

$$\begin{pmatrix} D_n(v) \\ D_{n-1}(v) \end{pmatrix} = A_n \dots A_1 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_{-1} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

et en fait

$$Q_n := A_n \dots A_1 = \begin{pmatrix} D_n(e^1) & D_n(e^2) \\ D_{n-1}(e^1) & D_{n-1}(e^2) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

où $e^1 := (1, 0)$ et $e^2 := (0, 1)$. Notons que, comme $\det(A_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, forcément $\det(Q_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, et donc

$$D_n(e^1) D_{n-1}(e^2) - D_{n-1}(e^1) D_n(e^2) = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.6}$$

Ensuite, pour tout $m \in [m_-, m_+]$, on définit l'application

$$F_m : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, x \mapsto 2 + \mu - m\omega^2 - \frac{1}{x}. \tag{4.7}$$

On note que, quel que soit $m \in [m_-, m_+]$, $F_m(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$. Soit $x \in \overline{\mathbb{C}}$. La suite $\xi \equiv \xi^x := (\xi_n^x)_{n \geq 0} \subset \overline{\mathbb{C}}$ est alors définie comme ceci :

$$\begin{aligned} \xi_n^x &= F_{m_n}(\xi_{n-1}^x), \quad n \geq 1, \\ \xi_0^x &= x. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pour $n \in \mathbb{N}_0$, ξ_n peut être vu comme le quotient D_n/D_{n-1} . Plus précisément, si $v_0 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} D_n(v) &= \xi_n^x \dots \xi_1^x v_0, \quad x = v_0/v_{-1}, \quad \text{si } v_0 \neq 0, \\ D_n(v) &= \xi_n^x \dots \xi_1^x v_0 v_{-1}, \quad x = v_0/v_{-1}, \quad \text{si } v_0 = 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec la convention $\infty \cdot 0 = -1$.

2. Résultat fondamental. Supposons maintenant que la suite (m_k) soit une réalisation d'un processus stochastique (M_k) , où, pour $k \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires M_k sont indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $[m_-, m_+]$. Désignons par τ_m la densité de probabilité des M_k , $k \in \mathbb{N}_0$; on admet que $\tau_m \in C^1([m_-, m_+])$. Nous notons par $\mathbf{P}$ la distribution du processus (M_k) , et par $\mathbf{E}$ la moyenne par rapport à cette mesure. Le processus D , ainsi que les suites de matrices (A_k) et (Q_n) , deviennent aléatoires; la suite ξ devient une chaîne de Markov sur $\overline{\mathbb{C}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Si $x, y \in \mathbb{C}^n$, on écrit

$$\langle x|y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n; \quad (4.10)$$

ce n est donc *pas* un produit hermitien. Soit

$$S_n(\omega) := \frac{\omega^2}{|\langle u(\omega)|Q_n(\omega)v(\omega) \rangle|^2}, \quad (4.11)$$

où la matrice Q_n est définie par (4.5) et où $u, v \in \mathbb{C}^2$. Deux cas se révéleront intéressants : soit

$$u = (1, i\lambda M_n \omega - 1), \quad v = (1, 1 - i\lambda M_1 \omega), \quad (4.12)$$

soit

$$u = (1, i\lambda M_n \omega), \quad v = (1, -i\lambda M_1 \omega), \quad (4.13)$$

où $\lambda > 0$.

Théorème 1. *Posons $\mu = 0$. Si u et v sont donnés par (4.12), alors il existe des constantes $C_1, C_2 < +\infty$, et $c > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $\omega \geq 0$,*

$$\mathbf{E}(S_n(\omega)) \leq C_1 \chi_{[0,2]}(\omega) e^{-cn\omega^2} + C_1 \chi_{]2,\infty[}(\omega) \omega^{-cn}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E}(S_n(\omega)) \geq C_2 \quad \text{si} \quad 1/\sqrt{2n} \leq \omega \leq 1/\sqrt{n}. \quad (4.15)$$

Si u et v sont donnés par (4.13), alors il existe des constantes $C_1, C_2 < +\infty$, et $c > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $\omega \geq 0$,

$$\mathbf{E}(S_n(\omega)) \leq C_1 \chi_{[0,2]}(\omega) \max\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}, \omega^2\right) e^{-cn\omega^2} + C_1 \chi_{]2,\infty[}(\omega) \omega^{-cn}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E}(S_n(\omega)) \geq C_2 \omega^2 \quad \text{si} \quad 1/\sqrt{2n} \leq \omega \leq 1/\sqrt{n}. \quad (4.17)$$

De plus, toutes les constantes dépendent seulement de la densité de probabilité τ_m et du paramètre λ qui apparaît dans (4.12) et (4.13).

Les inégalités (4.14) et (4.15) ont été, essentiellement, obtenues par Verheggen [46]. En s'appuyant sur des résultats partiels de O'Connor [39], et sur une heuristique développée par Dhar [15], Ajanki et moi-même [2] avons démontré les estimations (4.16) et (4.17). Une démonstration erronée de (4.17) était parue dans [10]. Une preuve complète du théorème 1 sera fournie dans cette thèse : au chapitre suivant, seront exposés les principaux résultats techniques neufs nécessaires à la démonstration, laquelle est reportée au dernier chapitre.

4.2 La chaîne isolée

Dans cette section, nous étudions une chaîne harmonique désordonnée isolée, dans le sens où son énergie totale est conservée. Il est intéressant d'observer que les solutions des équations du mouvement s'écrivent comme une somme de modes propres ; ceci est détaillé au §3. Au §5, nous donnons une description complète des modes propres quand les masses sont toutes égales. Mais, comme nous le verrons au §6, pour une chaîne désordonnée typique, on assiste à un phénomène particulier : les modes de basses fréquences restent *étendus*, alors que ceux de hautes fréquences se *localisent*. Ce fait, duquel nous n'avons malheureusement pas encore de démonstration rigoureuse, est fondamental pour la compréhension de la conductivité thermique.

1. Le hamiltonien. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Soit une suite de masses $(m_k)_{1 \leq k \leq n}$. On suppose l'existence de nombres $m_- > 0$ et $m_+ < +\infty$ tels que $m_- \leq m_k \leq m_+$ pour $1 \leq k \leq n$. Ces masses sont couplées entre plus proches voisines par des ressorts identiques de constante $\kappa > 0$, et éventuellement couplées au sol par des ressorts de constante $\mu \geq 0$. Le hamiltonien $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ de la chaîne est donné par

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{m_k} + \frac{\kappa}{2} \sum_{k=1}^{n+1} (q_k - q_{k-1})^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^n q_k^2, \quad (4.18)$$

où q_k représente la position de la masse k par rapport à sa position d'équilibre, et p_k son impulsion ($1 \leq k \leq n$). Quand $\mu > 0$, toutes les particules sont ancrées. Par ailleurs, on peut sans perte de généralité supposer $\kappa = 1$, ce que nous ferons dorénavant

Pour que ce hamiltonien soit complètement défini, on doit spécifier les conditions aux bords. Nous considérerons seulement deux cas :

1. les deux extrémités de la chaîne sont libres : $q_0 = q_1$ et $q_{n+1} = q_n$,
2. les deux extrémités de la chaîne sont fixées : $q_0 = q_{n+1} = 0$.

En fait, cette distinction importe seulement quand $\mu = 0$, car sinon les extrémités sont de toute façon fixées.

2. Les équations du mouvement. Le mouvement de la chaîne isolée est régi par les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= m_k^{-1} p_k, & 1 \leq k \leq n, \\ \dot{p}_k &= q_{k-1} - (2 + \mu)q_k + q_{k+1}, & 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (4.19)$$

qui admettent une unique solution quand sont fixées les conditions initiales $q_1(0), \dots, q_n(0)$ et $p_1(0), \dots, p_n(0)$.

Bien sûr, on peut de façon équivalente écrire l'équation de Newton

$$m_k \ddot{q}_k = q_{k-1} - (2 + \mu)q_k + q_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.20)$$

Il est commode d'utiliser une notation plus compacte. Tout d'abord écrivons

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (4.21)$$

Définissons aussi la matrice des masses $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, par

$$M_{j,k} = m_j \delta_{j,k}, \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad (4.22)$$

et la matrice de potentiel $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dont la forme varie selon le choix des conditions aux bords :

$$\begin{aligned} \Phi_{k,j} &= (2 + \mu - \delta_{k,1} - \delta_{k,n}) \delta_{k,j} - \delta_{k,j-1} - \delta_{k,j+1} & \text{si } q_0 = q_1 \text{ et } q_n = q_{n+1}, \\ \Phi_{k,j} &= (2 + \mu) \delta_{k,j} - \delta_{k,j-1} - \delta_{k,j+1} & \text{si } q_0 = q_{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$1 \leq j, k \leq n$. Enfin, on définit une matrice $R_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ par

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\Phi & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

L'intérêt de l'indice 0 dans R_0 apparaîtra à la section 4.3, quand nous généraliserons la définition de cette matrice.

Grâce à ces nouvelles notations, les équations du mouvement prennent une forme plus simple. L'équation de Hamilton (4.19) devient

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}p, \\ \dot{p} &= -\Phi q, \end{aligned} \quad (4.25)$$

voire même

$$\dot{x} = R_0 x. \quad (4.26)$$

L'équation de Newton s'écrit quant à elle

$$M\ddot{q} = -\Phi q. \quad (4.27)$$

3. Modes propres. La recherche de solutions de l'équation de Newton (4.27) du type $q(t) = q e^{i\omega t}$, où $q \in \mathbb{C}^n$ est indépendant du temps, et où $\omega \in \mathbb{C}$, conduit à étudier l'équation

$$\omega^2 M q = \Phi q, \quad (4.28)$$

dans laquelle ω^2 et q sont les inconnues. La résolution de (4.28) se ramène évidemment à la détermination des valeurs et vecteurs propres de la matrice $M^{-1}\Phi$. Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On définit un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_M := \langle M \cdot | \cdot \rangle = \langle \cdot | M \cdot \rangle. \quad (4.29)$$

L'opérateur $M^{-1}\Phi$ est auto-adjoint pour ce produit :

$$\langle M^{-1}\Phi u | v \rangle_M = \langle \Phi u | v \rangle = \langle u | \Phi v \rangle = \langle u | M^{-1}\Phi v \rangle_M.$$

Dès lors, les valeurs propres de $M^{-1}\Phi$ sont réelles, et il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $M^{-1}\Phi$, orthonormée pour le produit $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$.

On appelle *mode propre* de la chaîne, un vecteur non nul $q \in \mathbb{R}^n$ qui résout (4.28) pour un certain $\omega^2 \in \mathbb{R}$. Nous convenons que la première composante d'un mode propre n'est jamais négative. On démontrera à la fin du paragraphe suivant, quand nous disposerons de formules plus explicites pour les modes et fréquences propres, que

$$\frac{\mu}{m_+} \leq \omega^2 < \frac{4 + \mu}{m_-}, \quad (4.30)$$

et aussi que, lorsque $\mu = 0$, zéro est une fréquence propre si et seulement si les conditions aux bords sont libres. Dès lors $\omega := \sqrt{\omega^2} \in \mathbb{R}_+$; c'est la *fréquence propre* associée au mode q . À partir d'ici, nous désignons par $(q^k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour le produit $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$, qui est constituée de modes propres; nous désignons par $(\omega_k)_{1 \leq k \leq n}$ la suite des fréquences propres associées. Nous convenons qu'elles sont rangées par ordre croissant.

Les solutions des équations de Hamilton (4.25) s'expriment en fonction des conditions initiales et des modes propres. Soit un mode propre q de fréquence ω . Si $\omega \neq 0$, on vérifie que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$q(t) = (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)q, \quad p(t) = (-\alpha \omega \sin \omega t + \beta \omega \cos \omega t)Mq$$

résolvent les équations de Hamilton pour les conditions initiales $q(0) = \alpha q$ et $p(0) = \beta \omega Mq$. Si, par contre, $\omega = 0$, alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ce sont cette fois les fonctions

$$q(t) = (\alpha + \beta t)q, \quad p(t) = \beta Mq$$

qui résolvent les équations de Hamilton pour les conditions initiales $q(0) = \alpha q$ et $p(0) = \beta Mq$.

Dès lors la solution des équations de Hamilton pour les conditions initiales $(q(0), p(0))$ prend la forme

$$q(t) = \sum_{k=1}^n \left(\langle q(0) | q^k \rangle_M \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \langle p(0) | q^k \rangle_{\text{Id}} \sin \omega_k t \right) q^k, \quad (4.31)$$

$$p(t) = \sum_{k=1}^n \left(-\omega_k \langle q(0) | q^k \rangle_M \sin \omega_k t + \langle p(0) | q^k \rangle_{\text{Id}} \cos \omega_k t \right) Mq^k, \quad (4.32)$$

où l'on convient que $\frac{\sin \omega t}{\omega} \equiv t$ lorsque $\omega = 0$.

4. Calcul des modes propres. Voyons comment calculer les modes et fréquences propres. De la définition (4.23) de la matrice Φ , on déduit que $q = (q_j)_{1 \leq j \leq n}$ est un mode propre de fréquence ω si et seulement si on a

$$q_{j+1} = (2 + \mu - m_j \omega^2)q_j - q_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.33)$$

où les valeurs de q_0 et q_{n+1} sont fixées par les conditions aux bords. On voit vite que $q_1 \neq 0$, sans quoi q serait nul. On a

$$q_{j+1} = D_j(q_1 e^1 + q_0 e^2), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.34)$$

où la suite $(D_k(v))$ est définie par (4.1), ou encore

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ q_j \end{pmatrix} = Q_j \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.35)$$

où les matrices (Q_k) sont définies par (4.5). La valeur de q_{n+1} impose des conditions implicites pour que ω soit une fréquence propre : il découle de (4.34) que

$$\begin{aligned} D_n(e^1) &= 0 & \text{si } q_0 = q_{n+1} &= 0, \\ D_n(e^1 + e^2) &= D_{n-1}(e^1 + e^2) & \text{si } q_0 = q_1 \text{ et } q_n &= q_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Il nous reste à fournir une

Démonstration de (4.30) et de l'affirmation qui la suit. Supposons tout d'abord que $\omega^2 < \mu/m_+$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $m \in [m_-, m_+]$, on ait

$$2 + \mu - \omega^2 m \geq 2 + \epsilon.$$

Dans ce cas, on établit par récurrence que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, la suite ξ^x définie par (4.8) est telle que $\xi_n^x \geq 1 + \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}_0$. Il découle alors de (4.9) que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$

$$D_n(v) \geq (1 + \epsilon)D_{n-1}(v)$$

pour $v = e^1$ ou $v = e^1 + e^2$. Dès lors (4.36) ne peut être satisfaite dans ce cas.

Supposons ensuite $\omega^2 = 0$, et donc $\mu = 0$. La valeur des masses n'a plus d'importance, et les composantes du mode propre associé sont donnés par (4.44) ci-dessous. On vérifie immédiatement qu'alors, ω est une fréquence propre si et seulement si les conditions aux bords sont libres.

Supposons enfin que $\omega^2 m_- \geq 4 + \mu$. Cette fois, la relation

$$2 + \mu - \omega^2 m \leq -2$$

est vérifiée pour tout $m \in [m_-, m_+]$, et on vérifie que maintenant $\xi_n^x \leq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ si $x \geq 1$. Ceci, de nouveau, entraîne que (4.36) ne pourra être satisfaite. $\square$

5. Modes propres de la chaîne ordonnée. Quand toutes les masses sont égales, on peut donner les modes et fréquences propres très explicitement : il suffit de diagonaliser les matrices A_k , qui sont toutes identiques, $k \in \mathbb{N}_0$. Désignons par m la valeur commune des masses m_k , $1 \leq k \leq n$. Si

$$\frac{\mu}{m} < \omega^2 < \frac{4 + \mu}{m}, \quad (4.37)$$

cette matrice a deux valeurs propres distinctes, λ_+ et λ_- , données par

$$\lambda_{\pm} = \frac{2 + \mu - m\omega^2 \pm i\sqrt{4 - (2 + \mu - m\omega^2)^2}}{2} =: e^{i\pi\theta}, \quad (4.38)$$

où $\vartheta \equiv \vartheta(\omega)$ est donné par

$$\vartheta(\omega) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{4 - (2 + \mu - m\omega^2)^2}}{2 + \mu - m\omega^2}\right), \quad \text{si } 2 + \mu - m\omega^2 > 0, \quad (4.39)$$

$$\vartheta(\omega) = 1/2, \quad \text{si } 2 + \mu - m\omega^2 = 0, \quad (4.40)$$

$$\vartheta(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{4 - (2 + \mu - m\omega^2)^2}}{2 + \mu - m\omega^2}\right), \quad \text{si } 2 + \mu - m\omega^2 < 0. \quad (4.41)$$

Si par contre $\omega^2 = \mu/m$, il n'y a qu'une seule valeur propre, égale à 1. Posant, dans ce cas, $\vartheta(\mu/m) = 0$, cette valeur propre s'écrit encore $e^{i\vartheta(\mu/m)}$. Notons au passage que, dans la limite où $\omega \rightarrow 0$, et si $\mu = 0$, on a

$$\vartheta(\omega) = \frac{\sqrt{m}\omega}{\pi} + \mathcal{O}(\omega^3). \quad (4.42)$$

Si la condition (4.37) est satisfaite, $\vartheta(\omega) \neq 0$. Le calcul des vecteurs propres de A_k , $k \in \mathbb{N}_0$, permet alors d'expliciter Q_j dans (4.35), et de trouver que

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ q_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \pi \vartheta} \begin{pmatrix} \sin \pi(j+1)\vartheta & -\sin \pi j \vartheta \\ \sin \pi j \vartheta & -\sin \pi(j-1)\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.43)$$

Si par contre $\omega^2 = \mu/m$, on trouve sans peine que, d'après (4.35),

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+1 & -j \\ j & -(j-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.44)$$

Venons-en aux fréquences propres, qui dépendent des conditions aux bords. Deux cas sont donc à distinguer. D'abord, quand $q_{n+1} = q_n$ et $q_0 = q_1$, on déduit de (4.43) que

$$\sin \pi(n+1)\vartheta - 2 \sin \pi n \vartheta + \sin \pi(n-1)\vartheta = 0,$$

ce qui donne, implicitement, la valeur de $n-1$ fréquences propres : $\vartheta(\omega) = j/n$, $1 \leq j \leq n-1$. Comme il ressort de (4.44) que $\omega = \sqrt{\mu/m}$ est encore une fréquence propre, elles sont donc, en fin de compte, toutes données par

$$\vartheta(\omega) = \frac{j}{n}, \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (4.45)$$

Considérons ensuite le cas où $q_{n+1} = q_0 = 0$. On déduit cette fois-ci de (4.43) que $\sin \pi(n+1)\vartheta = 0$, d'où l'on tire immédiatement une relation implicite pour toutes les fréquences propres :

$$\vartheta(\omega) = \frac{j}{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.46)$$

On peut à présent explicitement décrire le vecteur propre q normalisé, c'est-à-dire tel que

$$|q|^2 = q_1^2 + \cdots + q_n^2 = 1,$$

associé à une fréquence propre ω . Notons d'abord deux règles de somme. Si ϑ est donné par (4.45) pour un certain $1 \leq j \leq n-1$, alors

$$\sum_{j=1}^n (\sin \pi j \vartheta - \sin \pi(j-1)\vartheta)^2 = n(1 - \cos \pi \vartheta) = 2n \sin^2 \frac{\pi \vartheta}{2}.$$

Ensuite, si ϑ est donné par (4.46) pour un certain $1 \leq j \leq n$, alors

$$\sum_{j=1}^n \sin^2 \pi j \vartheta = \frac{n+1}{2}.$$

Dès lors, quand $q_{n+1} = q_n$ et $q_0 = q_1$, et si $\omega^2 > \mu/m$, il résulte de (4.43) que

$$q_j = \frac{\sin \pi j \vartheta - \sin \pi (j-1) \vartheta}{\sqrt{2n} \sin \frac{\pi \vartheta}{2}}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.47)$$

Lorsque $q_{n+1} = q_n$ et $q_0 = q_1$, et que $\omega^2 = \mu/m$, il suit de (4.44) que

$$q_j = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.48)$$

Enfin, si $q_0 = q_{n+1} = 0$, il découle de (4.43) que

$$q_j = \frac{\sqrt{2} \sin \pi j \vartheta}{\sqrt{n+1}}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.49)$$

6. Modes propres de la chaîne désordonnée. La description des modes et fréquences propres de la chaîne désordonnée est un problème qui, à notre connaissance, demande encore à être traité rigoureusement¹. Supposons que la suite finie de masses $(m_k)_{1 \leq k \leq n}$ soit une réalisation du processus $(M_k)_{1 \leq k \leq n}$, introduit à la section 4.1 §2. Au vu de (4.35) et (4.36), l'étude de la distribution des modes propres se ramène à celle des matrices aléatoires Q_k , $1 \leq k \leq n$. Le point de vue sans doute le plus simple à adopter consiste à choisir d'abord $\omega \in \mathbb{R}_+$, satisfaisant (4.30), puis à imposer que ω soit une fréquence propre. On est ainsi conduit à étudier la distribution des matrices Q_k , $1 \leq k \leq n$, sous la contrainte (4.36).

Pour simplifier, considérons uniquement le cas de conditions aux bords fixes, pour lesquelles $q_0 = q_{n+1} = 0$, car alors seul le processus $D(e^1)$ entre en jeu ; on obtiendrait des conclusions analogues avec des conditions aux bords libres. Prenons $\omega \in]0, \omega_0]$, où $\omega_0 > 0$ est assez petit pour rendre valide ce qui va suivre ; le cas de fréquences supérieures n'est que plus simple à traiter. Supposons aussi que $\mu = 0$; à la fin, nous dirons un mot du cas $\mu > 0$.

Soit $1 \leq k \leq n$. Il nous paraît nécessaire d'introduire ici quelques informations plus techniques, qui seront démontrées au prochain chapitre. Le corollaire 4 de la proposition 14 affirme que

$$D_k(e^1) \sim \Gamma_k^\vartheta \frac{\sin \pi X_k^\vartheta}{\omega}. \quad (4.50)$$

Dans cette expression, Γ_k^ϑ est un processus aléatoire strictement positif qui, typiquement, est d'ordre $e^{ck\omega^2}$, pour une certaine constante $c > 0$. Le processus X_k^ϑ , quant à lui, est une chaîne de Markov, image sur le cercle $\mathbb{T}$ de la chaîne ξ^∞ ; en fait

$$X_k^\vartheta = X_{k-1}^\vartheta(\omega) + \vartheta + \frac{\omega}{\pi} (M_{k-1} - E(M_1)) \sin^2 \pi X_{k-1}^\vartheta + \mathcal{O}(\omega^2), \quad X_0^\vartheta = \vartheta. \quad (4.51)$$

1. Kunz et Souillard [32] ont donné une méthode intéressante pour déterminer la distribution des vecteurs propres mais, pour autant que nous sachions, elle n'a jamais été appliquée aux chaînes harmoniques désordonnées de taille finie.

Donc

$$X_k^\vartheta = (k+1)\vartheta + \omega Z_k + \mathcal{O}(\omega^2 k),$$

où Z_k est une martingale dont les accroissements sont d'ordre 1 (considérant pour cela X_k^ϑ comme un processus sur $\mathbb{R}$). Il est intéressant de comparer (4.50) au résultat obtenu pour des masses égales : d'après (4.43) et compte tenu de (4.42), on a, dans ce cas,

$$D_k(e_1) \sim \frac{\sin \pi(k+1)\vartheta}{\omega}, \quad (4.52)$$

et donc $\Gamma_k^\vartheta = 1$ et $X_k^\vartheta = (k+1)\vartheta$.

On constate ainsi que deux cas extrêmes sont à distinguer. D'une part, si $\omega^2 k \rightarrow 0$, le facteur Γ_k^ϑ est typiquement d'ordre 1, et X_k^ϑ diffère de $(k+1)\vartheta$ seulement par des fluctuations qui sont $\mathcal{O}(\omega\sqrt{k} + \omega^2 k)$. Le présence de désordre devient donc négligeable dans cette limite. D'autre part, si $\omega^2 k \rightarrow +\infty$, le facteur Γ_k^ϑ se met à croître exponentiellement, et la chaîne X_k^ϑ se répartit uniformément sur le cercle. Ici le désordre modifie complètement le comportement de $D_k(e^1)$.

De cette distinction résulte l'apparition de deux catégories de modes propres typiques. D'un côté, si $\omega^2 n \leq 1$, on s'attend à des modes étendus, qui ressemblent aux modes de la chaîne ordonnée. D'un autre côté, et pour des motifs que nous fournirons partiellement ci-après, on prévoit au contraire une localisation exponentielle si $\omega^2 n > 1$: pour un mode normalisé, on suppose qu'il existe un entier $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ et des constantes $C < +\infty$ et $c > 0$, tels que, pour $1 \leq k \leq n$, on ait

$$|q_k| \leq C e^{-c\omega^2 |k-k_0|}. \quad (4.53)$$

Pour comprendre cette dernière formule, il faut se souvenir que le processus $(D_k(e^1))_{1 \leq k \leq n}$ est soumis à la contrainte (4.36), selon laquelle $D_n = 0$ pour des conditions aux bords fixes. On se forge alors une image du type suivant, qui mériterait certainement d'être affinée : tant que, pour parler grossièrement, $k \leq n/2$, la composante q_k n'est pas influencée par cette contrainte, de sorte que les composantes du mode propre commencent par augmenter exponentiellement ; mais ensuite, lorsque $k > n/2$, les composantes se remettent à décroître pour qu'en fin de compte $D_n(e^1) = 0$. Imposant $|q|^2 = 1$, on trouve (4.53) avec $k_0 = n/2$.

Comme convenu, disons un mot du cas $\mu > 0$. Les conclusions de l'analyse précédente restent en fait valide, et, comme $\omega^2 \geq \mu/m_+$ d'après (4.30), tous les modes, typiquement, sont alors exponentiellement localisés pour n assez grand. Or, du point de vue mathématique, c'est la zone de transition, présente lorsque $\mu = 0$, qui rend l'analyse des chaînes harmoniques délicates. C'est la raison pour laquelle, dans cette thèse, nous nous concentrons sur le cas $\mu = 0$.

4.3 La chaîne soumise à un frottement aux bords

Nous considérons ici, à des fins ultérieures, le cas où les masses m_1 et m_n sont soumises à un frottement visqueux, de coefficient $\lambda > 0$. Soit une matrice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont toutes les entrées sont nulles, hormis $\Lambda_{1,1}$ et $\Lambda_{n,n}$, qui chacune valent λ . On modifie comme ceci les équations de Hamilton (4.25) :

$$\begin{aligned} M\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\Phi q - \Lambda p. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Les conditions initiales sont quelconques. Les mêmes équations de Hamilton, écrites sous la forme (4.26), deviennent quant à elles :

$$\dot{x} = R_\lambda x, \quad (4.55)$$

où la matrice R_λ définie par

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\Phi & -\Lambda \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

généralise la matrice R_0 définie par (4.24).

1. La matrice $Y(\omega)$. Des équations de Hamilton (4.54), on tire bien entendu l'équation de Newton

$$M\ddot{q} = -\Phi q - \Lambda M\dot{q}. \quad (4.57)$$

La recherche de solutions du type $qe^{i\omega t}$, où $q \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur indépendant du temps, et où $\omega \in \mathbb{C}$, conduit à se pencher sur l'équation $Y(\omega)q = 0$, d'inconnues ω et q , et dans laquelle on a posé

$$Y(\omega) = \Phi + i\omega\Lambda M - \omega^2 M. \quad (4.58)$$

Comme nous n'en n'aurons pas l'usage, nous n'investiguerons pas directement les solutions en modes propres de l'équation de Newton. En revanche, la matrice Y joue un grand rôle dans la suite, et nous allons en donner quelques propriétés.

Lemme 18. *Soit la matrice Y définie par (4.58).*

1. *Un nombre complexe $i\omega$ est valeur propre de R_λ si et seulement s'il existe un vecteur $q \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y(\omega)q = 0$.*
2. *Supposons que, pour un nombre $\omega \in \mathbb{C}$ et un vecteur non nul $q \in \mathbb{C}^n$, on ait $Y(\omega)q = 0$. Alors, soit $\omega = 0$, soit $\Im(\omega) > 0$. De plus $\omega = 0$ est possible si et seulement si $\mu = 0$ et $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$; dans ce cas q est proportionnel au vecteur $(1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Démontrons le point 1. Soit tout d'abord $i\omega$ une valeur propre de R_λ , et soit $x = (q, p)$ un vecteur propre correspondant. D'après la définition (4.56) de R_λ , cela revient à dire que

$$p = i\omega Mq, \quad \Phi q + \Lambda p = -i\omega p. \quad (4.59)$$

Dès lors $q \neq 0$, sans quoi x serait nul. De plus, (4.59) entraîne $Y(\omega)q = 0$. Supposons ensuite avoir $Y(\omega)q = 0$, pour un certain $\omega \in \mathbb{C}$ et un vecteur non nul $q \in \mathbb{C}^n$. Posant $p = i\omega Mq$, on constate que les relations (4.59) sont vérifiées, ce qui signifie que $i\omega$ est une valeur propre de R_λ .

Démontrons le point 2. Commençons par observer qu'il est impossible que $q_1 = q_n = 0$. Dans ce cas en effet, la relation $Y(\omega)q = 0$ ne serait autre que (4.28), et, d'après ce que nous avons vu à la section 4.2 §3, q_1 ne pourrait alors être nul. Cela dit, l'équation $Y(\omega)q = 0$ implique la relation scalaire

$$\langle q^* | \Phi q \rangle + i\omega \langle q^* | \Lambda M q \rangle - \omega^2 \langle q^* | M q \rangle =: \alpha + i\beta\omega - \gamma\omega^2 = 0, \quad (4.60)$$

où $\beta, \gamma > 0$, et où $\alpha \in \mathbb{R}$ puisque la matrice Φ est auto-adjointe. Dès lors, les solutions de (4.60) s'écrivent

$$\omega_{\pm} = \frac{i\beta \pm \sqrt{4\gamma\alpha - \beta^2}}{2\gamma} \quad (4.61)$$

Si $4\gamma\alpha \geq \beta^2$, alors $\Im(\omega_{\pm}) = \beta/2\gamma > 0$. Si par contre, $4\gamma\alpha < \beta^2$, alors ω est imaginaire pur, et, dans ce cas $\Im(\omega_{\pm}) = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma\alpha})/2\gamma \geq 0$. Enfin, quand $\omega = 0$, l'équation $Y(\omega)q = 0$ devient simplement $\Phi q = 0$. La dernière partie du second point du lemme se vérifie alors directement de la définition (4.23) de Φ . $\square$

Nous aurons à inverser la matrice Y . Pour les valeurs de ω qui la rendent inversible, on a

$$(Y^{-1})_{k,l}(\omega) = \frac{\det(Y^{k,l})(\omega)}{\det(Y)(\omega)}, \quad 1 \leq k, l \leq n \quad (4.62)$$

où la matrice $Y^{k,l} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ est obtenue de Y en lui ôtant la k^e ligne et la l^e colonne. De la définition (4.58) de Y , on déduit que $\det(Y)$ est un polynôme en ω ; la fonction Y^{-1} est donc une fraction rationnelle. De plus, du lemme qui précède, nous savons que tout pôle, soit se trouve en zéro, soit en un point dont la partie imaginaire strictement positive; en particulier, $Y^{-1}(\omega)$ est définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}_0$.

Les résultats des deux sections suivantes nécessitent en fait seulement le calcul de l'entrée $(Y^{-1})_{1,n}$.

Lemme 19. *Soit $\omega \in \mathbb{R}_0$. Alors*

$$(Y^{-1})_{1,n}(\omega) = \frac{1}{\langle u(\omega) | Q_n(\omega) v(\omega) \rangle}, \quad (4.63)$$

où les vecteurs u et v sont donnés par (4.12) si $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$, et par (4.13) si $q_0 = q_{n+1}$.

Démonstration. Posons $k = 1$ et $l = n$ dans (4.62). De la définition (4.23) de la matrice Φ , on déduit tout de suite que

$$(-1)^{n+1} \det(Y^{1,n}) = 1. \quad (4.64)$$

Ensuite, pour $1 \leq k \leq n$, désignons par $Y^{(k)} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ la matrice obtenue de Y en gardant seulement les k premières lignes et colonnes. Après avoir posé $Y^{(0)} = 1$ et $Y^{(-1)} = 0$, la règle de calcul du déterminant livre que

$$\det(Y^{(k)}) = (2 + \mu - m_k \omega^2 + (\delta_{k,1} + \delta_{k,n})(i\omega \lambda m_k - 1)) \cdot \det(Y^{(k-1)}) - \det(Y^{(k-2)}), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.65)$$

si $q_0 = q_{q_1}$ et $q_n = q_{n+1}$; et que

$$\det(Y^{(k)}) = (2 + \mu - m_k \omega^2 + (\delta_{k,1} + \delta_{k,n}) i \omega \lambda m_k) \cdot \det(Y^{(k-1)}) - \det(Y^{(k-2)}), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.66)$$

si $q_0 = q_{n+1} = 0$. Quand $k \neq 1$ et $k \neq n$, on reconnaît dans (4.65) et (4.66) la relation de récurrence (4.1). Ainsi, lorsque $q_1 = q_{n+1} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \det(Y) &= \det(Y^{(n)}) \\ &= (1, 0) \begin{pmatrix} 2 - m_n \omega^2 + i \omega \lambda m_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_{n-1} \dots A_2 \begin{pmatrix} 2 - m_1 \omega^2 + i \omega \lambda m_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & i \omega \lambda m_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n \dots A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i \omega \lambda m_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1, i \omega \lambda m_n) Q_n \begin{pmatrix} 1 \\ -i \omega \lambda m_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

où on a posé $\mu = 0$ pour alléger un peu les expressions. De façon analogue, si $q_0 = q_{q_1}$ et $q_n = q_{n+1}$, alors

$$\det(Y) = (1, i \omega \lambda m_n - 1) Q_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \omega \lambda m_1 \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

et le lemme est établi. $\square$

2. Propriété des solutions des équations de Hamilton. La solution des équations de Hamilton (4.55) s'écrit

$$x(t) = e^{R_\lambda t} x(0).$$

Lemme 20. *Il existe deux constantes, $C_n < +\infty$ et $c_n > 0$, qui dépendent de n , telles que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ et tout $t \geq 0$, on ait*

$$|e^{R_\lambda t} x_0 - x_\infty| \leq C_n e^{-c_n t} |x_0|, \quad (4.69)$$

où $x_\infty = (q_\infty, p_\infty) \in \mathbb{R}^{2n}$. On a $p_\infty = 0$. Si $\mu = 0$ et si $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$, alors q_∞ est proportionnel à $(1, \dots, 1)$; sinon, $q_\infty = 0$.

Démonstration. Soit $x(t) = (q(t), p(t)) = e^{R_0 t} x_0$, la solution de (4.55) à l'instant $t \geq 0$ pour la condition initiale x_0 . Soit $1 \leq k \leq n$. La composante q_k s'écrit comme une somme de fonctions du type $\phi_k e^{i\omega \cdot}$, où ϕ_k est un polynôme et où $i\omega$ est une valeur propre de R_λ . Dans le cas où $\mu > 0$, et dans celui où $q_0 = q_{n+1} = 0$, l'énoncé suit immédiatement du point 2. du lemme 18. Si par contre, $\mu = 0$ et $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$, montrons que, si $\omega = 0$, alors le polynôme ϕ_k correspondant n'est qu'une constante. Toujours

d'après le lemme 18, on en déduira que l'énoncé est vrai pour un vecteur x_∞ du type $x_\infty = (q_\infty, 0)$, et il resterait donc à voir que q_∞ est proportionnel à $(1, \dots, 1)$. Mais, si ϕ_k est constant, c'est que la multiplicité algébrique de la valeur propre nulle vaut 1, et on vérifie à la main que tout vecteur propre correspondant est proportionnel à $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Etablissons donc que le polynôme ϕ_k est indépendant du temps. Si on évalue le hamiltonien H défini par (4.18) le long de la trajectoire (q, p) , on trouve que

$$\partial_t H = -\lambda(p_1^2/m_1 + p_n^2/m_n) \leq 0. \quad (4.70)$$

L'énergie H reste donc bornée. On en déduit que ϕ_k est linéaire : $\phi_k(\cdot) = \alpha_k \cdot + \beta_k$, où $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. En effet, sinon, le terme p_k^2 qui apparaît dans l'expression de H , ne serait pas borné. Puis, à cause des termes $(q_k - q_{k-1})^2$ et $(q_{k+1} - q_k)^2$ dans l'expression de H , on voit que le coefficient α_k ne dépend pas de k . Mais, de (4.70), il découle que $\alpha_1 = 0$, sinon H deviendrait négatif. Dès lors ϕ_k est constant. $\square$

4.4 Les modèles de Casher, Lebowitz, Rubin et Greer

Dans cette section, les équations de Hamilton (4.25) sont modifiées de façon à connecter la masse m_1 à un réservoir à température $T_1 > 0$, et m_n à un réservoir à température $T_n > 0$. On obtient un cas particulier de (3.30) :

$$\begin{aligned} dq &= M^{-1} p dt, \\ dp &= -\Phi q dt - \Lambda p dt + \sigma dW_*, \end{aligned} \quad (4.71)$$

avec

$$\sigma dW_* = (\sigma_1 W_1, 0, \dots, 0, \sigma_n W_n), \quad (4.72)$$

où W_1 et W_n sont deux mouvements browniens indépendants, et où $\sigma_k = \sqrt{2\lambda T_k m_k}$ pour $k = 1, n$. Les conditions initiales sont quelconques. La première étude détaillée de ce modèle fut entreprise par Casher et Lebowitz [10] dans le cas de conditions aux bords fixes, et la matière essentielle de cette section leur est due. Rubin et Greer [43] considérèrent le cas de conditions aux bords libres, mais modélisèrent les réservoirs, non par des équations de Langevin, mais par des chaînes harmoniques ordonnées infinies. Ce dernier point se révèle n'être qu'un détail, car, si on considère la dynamique (4.71) pour des conditions aux bords libres, on obtient pour le courant d'énergie au travers de la chaîne une expression qui, à des détails près, présente les mêmes caractéristiques.

1. Le courant. Comme le symbole E désigne déjà l'intégrale par rapport aux masses, nous utiliserons $\langle \cdot \rangle$ pour la moyenne sur les réalisations des processus W_1 et W_n . A la section 3.2 §3, nous avons donné une définition du courant d'énergie dans une chaîne unidimensionnelle, qui supposait l'existence d'une mesure stationnaire, par rapport à laquelle des observables comme l'énergie cinétique ou potentielle sont

intégrables. Mais nous laissons ici de côté la vérification de ces conditions, pour suivre une démarche très légèrement différente et plus pratique.

Distinguons deux cas. D'abord, si $\mu > 0$ ou si $q_0 = q_{n+1} = 0$, désignons par $x = (q, p)$ la solution des équations d'évolution (4.71). D'une part, on déduit de ces mêmes équations que les quantités $\langle x_j x_k \rangle$ ($1 \leq j, k \leq 2n$) résolvent un système d'équations linéaires ordinaires à coefficients constants, et, d'autre part, on observe que ces quantités seules entrent en ligne de compte dans les développements de la section 3.2 §3. Il suffit donc de montrer l'existence des limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_j(t) x_k(t) \rangle, \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (4.73)$$

Ensuite, si $\mu = 0$ et si $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$, la situation est presque identique, mais il convient cette fois de considérer le vecteur $x' = (\Delta q, p)$, où $\Delta q = (q_2 - q_1, \dots, q_n - q_{n-1})$, au lieu du vecteur x . En effet, on pourrait vérifier que dans ce cas, une quantité comme $\langle q_1^2(t) \rangle$ diverge lorsque $t \rightarrow \infty$. Nous donnerons, dans un instant, un mot d'explication sur cette affirmation, et verrons pourquoi la question est résolue en prenant Δq au lieu de q . Dans tous les cas de figure, le courant J_n au travers de la chaîne est défini conformément à (3.41), par

$$J_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \left(\frac{\langle p_1^2(t) \rangle}{m_1} - T_1 \right). \quad (4.74)$$

Il nous reste donc à établir l'existence de limites de certaines corrélations. Posons $\sigma dW_{**} := (0, \sigma dW_*)$. Quelles que soient les conditions aux bords, la solution $x = (q, p)$ de (4.71) s'écrit

$$x(t) = e^{R_\lambda t} x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)R_\lambda} \sigma dW_{**}(\tau), \quad t \geq 0. \quad (4.75)$$

Dès lors, pour $t \geq 0$ et pour $1 \leq j \leq 2n$, on a

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{2n} (e^{R_\lambda t})_{j,k} x_k(0) + \int_0^t (e^{(t-\tau)R_\lambda})_{j,n+1} \sigma_1 dW_1(\tau) + \int_0^t (e^{(t-\tau)R_\lambda})_{j,2n} \sigma_n dW_n(\tau). \quad (4.76)$$

Restreignons-nous alors au cas où $\mu > 0$ et à celui où $q_0 = q_{n+1} = 0$. D'après le lemme 20, tous les noyaux $(e^{R_\lambda t})_{j,k}$ ($1 \leq j, k \leq n$) décroissent exponentiellement quand $t \rightarrow \infty$. On déduit alors de (4.76) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_j(t) x_k(t) \rangle = \sigma_1^2 \int_0^\infty (e^{R_\lambda t})_{j,n+1} (e^{R_\lambda t})_{k,n+1} dt + \sigma_n^2 \int_0^\infty (e^{R_\lambda t})_{j,2n} (e^{R_\lambda t})_{k,2n} dt. \quad (4.77)$$

Dans le cas où $\mu = 0$ et $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$, si $1 \leq j, k \leq n$, les noyaux qui apparaissent dans (4.77) ne décroissent vraisemblablement pas exponentiellement, auquel cas les intégrales divergent. Mais le lemme 20 nous apprend aussi que ce problème disparaît si l'on remplace q par Δq , car le vecteur q_∞ qui apparaît dans ce lemme est proportionnel à $(1, \dots, 1)$.

2. Une expression explicite du courant. Enonçons le résultat essentiel de cette section.

Proposition 11. *On a*

$$J_n = \frac{2\lambda^2 m_1 m_n}{\pi} (T_n - T_1) \int_0^\infty S_n(\omega) d\omega \quad (4.78)$$

où les vecteurs u et v , qui apparaissent dans la définition (4.11) de S_n , sont donnés par (4.12) lorsque $q_0 = q_1$ et que $q_n = q_{n+1}$, et par (4.13) lorsque $q_0 = q_{n+1} = 0$.

Quand $\mu = 0$, il résulte de cette proposition et du théorème 1 que

$$E(J_n) \sim \frac{1}{n^{1/2}} \quad (4.79)$$

si $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$; et que

$$E(J_n) \sim \frac{1}{n^{3/2}} \quad (4.80)$$

si $q_0 = q_{n+1} = 0$.

Démonstration de la proposition 11. Posant $j = k = n + 1$ dans (4.77), on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = 2\lambda T_1 m_1 \int_0^\infty (e^{R_\lambda t})_{n+1, n+1}^2 dt + 2\lambda T_n m_n \int_0^\infty (e^{R_\lambda t})_{n+1, 2n}^2 dt, \quad (4.81)$$

puisque $\sigma_k^2 = 2\lambda T_k m_k$ pour $k = 1, n$. Analysons la première de ces intégrales. Désignons par (q', p') la solution des équations d'évolution (4.54) pour les conditions initiales $q'(0) = 0$ et $p'(0) = (1, 0, \dots, 0)$.

On a $p'_1(t) = (e^{R_\lambda t})_{n+1, n+1}$, et donc

$$\int_0^\infty (e^{R_\lambda t})_{n+1, n+1}^2 dt = \|p'_1\|_2^2. \quad (4.82)$$

Par ailleurs, l'équation (4.54) entraîne que p' satisfait à l'équation différentielle

$$M\ddot{p}' + \Lambda M\dot{p}' + \Phi p' = 0, \quad (4.83)$$

pour les conditions initiales $p'(0) = (1, 0, \dots, 0)$ et $\dot{p}'(0) = -\Lambda p'(0)$. Intégrant (4.83) par rapport à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \cdot e^{-i\omega t}$, où $\omega \in \mathbb{R}$, en tenant compte de ces conditions initiales, on trouve que

$$Y(\omega) \hat{p}'_1(\omega) = \frac{i\omega M p'(0)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.84)$$

d'où, par application de la formule de Plancherel, il ressort que

$$\|p'_1\|_2^2 = \frac{m_1^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,1}|^2(\omega) d\omega. \quad (4.85)$$

Analysant la second intégrale qui figure dans (4.81) d'une façon analogue, il vient que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = \frac{\lambda T_1 m_1^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,1}|^2(\omega) d\omega + \frac{\lambda T_n m_n m_1^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,n}|^2(\omega) d\omega \quad (4.86)$$

Le lemme 21 ci-dessous affirme que le courant est nul lorsque $T_1 = T_n$, ce qui, au vu de la définition (4.74) de J_n , signifie qu'en pareil cas, $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = T_1 m_1$. Egalant alors les températures dans (4.86), on trouve la relation

$$T_1 m_1 = \frac{\lambda T_1 m_1^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,1}|^2(\omega) d\omega + \frac{\lambda T_1 m_n m_1^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,n}|^2(\omega) d\omega$$

On injecte alors cette formule dans (4.86) pour éliminer le terme en $(Y^{-1})_{1,1}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = T_1 m_1 - \frac{\lambda T_1 m_n m_1^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,n}|^2(\omega) d\omega + \frac{\lambda T_n m_n m_1^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,n}|^2(\omega) d\omega,$$

D'après la définition (4.74), il apparaît alors que

$$J_n = \frac{\lambda^2 m_1 m_n}{\pi} (T_n - T_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{1,n}|^2(\omega) d\omega. \quad (4.87)$$

De la définition (4.58) de Y , il ressort que $Y^*(\omega) = Y(-\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, où Y^* représente la complexe conjuguée de Y , et non l'adjointe. Dès lors $Y^{-1*}(\omega) = Y^{-1}(-\omega)$, ce qui entraîne que l'intégrand de (4.87) est symétrique. Pour finir, il suffit d'appliquer le lemme 19. $\square$

Lemme 21. *Si $T_1 = T_n$, alors $J_n = 0$.*

Démonstration. Soit $T := T_1 = T_n$. Il suffit de montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = T m_1$. Or $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle$ est donné par (4.86), dont la réécriture

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = \frac{T m_1^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 (Y^{-1}(\omega) M \Lambda Y^{-1}(-\omega))_{1,1} d\omega \quad (4.88)$$

suit de ce que $Y^*(\omega) = Y(-\omega)$, et donc $Y^{-1*}(\omega) = Y^{-1}(-\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, où l'astérisque désigne le complexe conjugué. Mais

$$\omega \Lambda M = \Im(Y)(\omega) = \frac{Y(\omega) - Y(-\omega)}{2i},$$

ce qui fait que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p_1^2(t) \rangle = -\frac{T m_1^2}{\pi} \Im \int_{-\infty}^{+\infty} \omega (Y^{-1}(\omega))_{1,1} d\omega. \quad (4.89)$$

La fonction complexe $\omega \mapsto \omega (Y^{-1}(\omega))_{1,1}$ est méromorphe et ses pôles, en nombre fini, sont tels que $\Im(\omega) < 0$ d'après le lemme 18. En effet, $\omega = 0$ est exclu car le membre de droite de (4.89) est la transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide. L'intégrale qui figure dans (4.89) peut donc être évaluée à l'aide de la formule de Cauchy. Soit $r > 0$ et soient les chemins $\zeta_r, \eta_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, définis par

$$\zeta_r(t) = 2r(t - 1/2), \quad \eta_r(t) = r e^{-i\pi t}.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega (Y^{-1}(\omega))_{1,1} d\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\zeta_r} \omega (Y^{-1}(\omega))_{1,1} d\omega = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\eta_r} \omega (Y^{-1}(\omega))_{1,1} d\omega. \quad (4.90)$$

Cette dernière limite se calcule explicitement. Posons $\omega = r e^{-i\pi t}$ dans la définition (4.58) de Y pour trouver que

$$Y^{-1}(r e^{-i\pi t}) = -(\text{Id} - \frac{i e^{i\pi t}}{r} \Lambda - \frac{e^{2i\pi t}}{r^2} M^{-1} \Phi)^{-1} \frac{e^{2i\pi t}}{r^2} M^{-1} = -(\text{Id} + \mathcal{O}(1/r)) \frac{e^{2i\pi t}}{r^2} M^{-1}$$

quand $r \rightarrow \infty$. Dès lors

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\eta_r} \omega (Y^{-1}(\omega))_{1,1} d\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 r e^{-i\pi t} \cdot \frac{e^{2i\pi t}}{m_1 r^2} \cdot r i \pi e^{-i\pi t} dt = \frac{i\pi}{m_1}.$$

L'énoncé est finalement démontré en insérant ce dernier résultat dans (4.90), puis (4.90) dans (4.88).

$\square$

4.5 Conduction et modes propres

Pour finir ce chapitre, nous souhaiterions comprendre comment la nature des modes propres, et en particulier leur localisation, explique la conductivité de la chaîne. On trouvera des développements d'un goût similaire dans Lepri et al. [34][35]. Si une force extérieure quelconque est appliquée à une extrémité de la chaîne, elle activera généralement tous ses modes propres. Considérons alors une situation typique : à la section 4.2 §6, nous avons vu qu'il convenait de classer ces modes en deux catégories, selon que $\omega^2 n \leq 1$ ou $\omega^2 n > 1$, où ω désigne la fréquence correspondante. Si $\omega^2 n \leq 1$, le mode est étendu, et il transmet donc l'impulsion immédiatement à toute la chaîne : c'est un conducteur parfait. Si par contre $\omega^2 n > 1$, l'impulsion restera localisée, comme le mode lui-même, qui cette fois est un parfait isolant. Cette vision est bien sûr une caricature, puisque en réalité le passage des modes conducteurs aux modes isolants se fait en douceur.

Ceci nous permet déjà de comprendre l'essentiel. Voyons trois cas. Premièrement, dans la configuration très atypique d'une chaîne ordonnée, tous les modes restent étendus, et tous, donc, sont super-conducteurs ; ainsi il n'y a aucune décroissance du courant d'énergie J_n [42]. Ensuite, pour une chaîne désordonnée ancrée typique ($\mu > 0$), toutes les fréquences propres satisfont $\omega^2 n > 1$ et tous les modes sont exponentiellement localisés, de sorte que $E(J_n) \leq C e^{-cn}$, pour certaines constantes $C < +\infty$ et $c > 0$. Nous ne pensons pas que cela ait jamais été démontré en détail, car cet exercice ne présenterait fort probablement qu'un intérêt très moyen. Enfin, lorsque $\mu = 0$ et que la chaîne est désordonnée, les $\sqrt{n}$ premiers modes transmettent parfaitement l'impulsion, alors que les autres n'apportent au courant qu'une contribution négligeable. Ainsi la proportion de modes propres conducteurs décroît quand n croît : elle est de $1/\sqrt{n}$. En l'absence d'ancrage, c'est là le phénomène fondamental responsable de la décroissance du courant dans les chaînes harmoniques désordonnées.

A partir d'ici, posons $\mu = 0$. La détermination exacte de la décroissance de J_n nécessite la prise en compte d'autres facteurs. Quand on regarde l'équation (4.71), on découvre trois éléments susceptibles d'entrer en ligne de compte. Premièrement, la matrice Φ dépend des *conditions aux bords*, qui peuvent donc aussi influencer la nature des solutions de (4.71). Or justement, les composantes extrêmes des modes propres de basses fréquences, q_1 et q_n , sont assez sensibles à ces conditions. Dans l'approximation des masses égales, on a, d'après (4.47), (4.48), et compte tenu de (4.42), $q_1 \sim q_n \sim 1/\sqrt{n}$ pour des conditions aux bords libres, alors que, d'après (4.49) et (4.42), on a $q_1 \sim q_n \sim \omega/\sqrt{n}$ pour des conditions aux bords fixes. De cela il résulte que la transmission de l'impulsion est plus faible dans le second cas, d'une façon que nous quantifierons plus tard. Ceci s'explique d'un point de vue physique : une force extérieure qui agit sur la première ou la dernière masse, lui communique plus difficilement de l'impulsion si celle-ci est fixée au bord.

Cela dit, pour établir (4.71), nous avons modélisé les réservoirs thermiques par des équations de Langevin, mais ce n'est pas l'unique possibilité. Ainsi, Dhar [15] considère une situation plus générale

où le bruit blanc σdW_* est remplacé par un processus stochastique relativement quelconque. Le terme de dissipation $-\Lambda p$ doit alors lui aussi être modifié, et devient en fait un opérateur intégral qui agit sur p , de sorte à valider le théorème de fluctuation-dissipation². Quoi qu'il en soit, la modélisation des réservoirs implique un terme de *fluctuation* et un terme de *dissipation*, qui, tous deux, affectent la conductivité thermique. L'influence du premier est relativement simple à comprendre. Nous avons jusqu'ici supposé des forces extérieures qui activaient équitablement tous les modes. En fait, comme nous le verrons, intégrer sur des bruits blancs revient à considérer que la chaîne est mise en mouvement à une extrémité par un choc de type delta de Dirac, qui effectivement ne privilégie aucun mode. Mais, si l'on songe par exemple à une force extérieure d'intégrale nulle, les basses fréquences seront défavorisées. On comprend ainsi que certains processus stochastiques puissent se concentrer sur les hautes ou basses fréquences, modifiant éventuellement la conductivité.

La façon dont, finalement, le terme de dissipation affecte la valeur du courant, est quant à lui un peu plus difficile à cerner. D'un point de vue physique, c'est bien sûr ce terme qui garantit la convergence vers un état d'équilibre, empêchant l'énergie cinétique de croître indéfiniment. Mais, d'un point de vue mathématique, on sait depuis la section 4.3 que la présence d'un frottement visqueux confère aux fréquences propres une partie imaginaire positive, ce qui garantit une atténuation exponentielle au cours du temps des oscillations des modes correspondants. Or, comme le montre la formule (4.75), la solution de l'équation de Langevin (4.71) s'exprime comme une intégrale sur le temps d'une combinaison linéaire de modes propres. Ainsi, le terme de dissipation détermine-t-il en quelque sorte le temps d'intégration. Mais le point est que le taux d'atténuation de l'amplitude d'un mode propre, c'est-à-dire la partie imaginaire de sa fréquence propre, dépend elle-même de n et des conditions aux bords, affectant finalement la conductivité thermique d'une façon quelque peu indirecte.

Nous consacrons le reste de cette section à justifier les propos tenus ci-dessus, sans toutefois généralement parvenir à des énoncés et des démonstrations rigoureuses. Au §1, nous commencerons par démontrer que la détermination du courant J_n est tout à fait équivalente à un problème plus simple : évaluer l'énergie cinétique K_n de la masse m_n intégrée au cours du temps, pour une chaîne freinée aux deux extrémités comme dans (4.54), et dont la masse m_1 subit une force extérieure f . Ceci nous permettra déjà d'élucider la question la dépendance du courant par rapport au type de force extérieure. Au §2, on annule le coefficient de frottement λ mais on garde la force f , et on analyse une quantité, similaire à K_n et nommée L_n , définie cette fois comme la moyenne temporelle de l'énergie cinétique de la masse m_n . On obtient une formule explicite et exacte de L_n en termes des modes propres, qui est utilisée au §3 pour en obtenir une estimation, basée quant à elle sur la description non rigoureuse de ces modes donnée plus haut. Notre explication de la dépendance du courant par rapport aux conditions aux bords pourra ainsi être explicitée.

2. Par la présence de cet opérateur intégral, l'évolution des variables q et p n'est alors plus markovienne.

Ensuite, pour autant que l'on admette que, sur des temps courts et pour des basses fréquences, la présence du frottement visqueux ne modifie pas fondamentalement l'allure des solutions des équations du mouvement, on est amené à penser que K_n ne diffère de L_n que d'un facteur correspondant à une période d'intégration effective. On analyse cette question au §4. On montre le rapport qui existe entre frottement visqueux, temps d'intégration et conditions aux bords. De plus, on relie les estimations de K_n , qui sont rigoureuses, à celles de L_n , ce qui valide en quelque sorte tout le scénario, développé plus haut, dans lequel les modes propres jouent le rôle principal.

1. Un modèle de conduction équivalent. Soit une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont le support est un intervalle compact de $\mathbb{R}_+$; elle représente une force extérieure qui agit sur la masse m_1 . On l'inclut comme ceci dans les équations de Hamilton (4.54) :

$$\begin{aligned} M\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\Phi q - \Lambda p + f_*, \end{aligned} \tag{4.91}$$

où $f_* := (f, 0, \dots, 0)$. On pose $q(0) = 0$ et $p(0) = 0$. L'énergie cinétique de la masse m_n , intégrée au cours du temps, s'écrit

$$K_n := \int_0^\infty p_n^2(t) dt. \tag{4.92}$$

Montrons que la détermination du comportement asymptotique de cette quantité est équivalente celle du courant J_n .

Proposition 12. *On a*

$$K_n = m_1^2 \int_0^\infty S_n(\omega) \cdot |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \tag{4.93}$$

où les vecteurs u et v sont donnés par (4.12) lorsque $q_0 = q_1$ et que $q_n = q_{n+1}$, et par (4.13) lorsque $q_0 = q_n$.

Posons $\mu = 0$. Si $\widehat{f}(\omega) \sim 1$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, on retrouve bien sûr les estimations $E(K_n) \sim 1/n^{1/2}$ pour les conditions aux bords libres, et $E(K_n) \sim 1/n^{3/2}$ pour les conditions aux bords fixes. Si par contre, pour un certain $\alpha \geq 0$, on a $\widehat{f}(\omega) \sim \omega^\alpha$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, on trouvera $E(K_n) \sim 1/n^{(\alpha+1)/2}$ pour les conditions aux bords libres, et $E(K_n) \sim 1/n^{(\alpha+3)/2}$ pour les conditions aux bords fixes.

Démonstration de la proposition 12. Des équations de Hamilton (4.91), on tire une équation différentielle pour l'impulsion :

$$M\ddot{p} + \Lambda M\dot{p} + \Phi p = M\dot{f}_*, \tag{4.94}$$

de laquelle on prend la transformée de Fourier pour trouver que

$$Y(\omega) \widehat{p}(\omega) = M \widehat{f}_*(\omega), \tag{4.95}$$

d'après la définition (4.58) de la matrice Y . De la définition (4.92) de K_n , et de la formule de Plancherel, il résulte alors que

$$K_n = m_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |(Y^{-1})_{n,1}(\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega. \tag{4.96}$$

La conclusion suit du lemme 19. $\square$

2. Le même modèle en l'absence de frottement. Soit f comme au paragraphe précédent. On annule à présent le coefficient de frottement, et ce sont cette fois les équations de Hamilton (4.25) que l'on modifie, pour inclure la force extérieure f :

$$\begin{aligned} M\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\Phi q + f_*. \end{aligned} \quad (4.97)$$

où $f_* := (f, 0, \dots, 0)$. On choisit $(q(0), p(0)) = (0, 0)$ comme conditions initiales. Définissons aussi une quantité L_n , similaire à K_n :

$$L_n := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_n^2(t) dt. \quad (4.98)$$

Dans ce paragraphe, nous allons établir une expression exacte pour L_n en termes des modes propres de la chaîne.

Ecrites sous la forme (4.26), les équations de Hamilton dans lesquelles on inclut une force extérieure f , deviennent

$$\dot{x} = R_0 x + f_{**},$$

où $f_{**} = (0, f_*)$. La formule de Duhamel permet d'en exprimer la solution :

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)R_0} f_{**}(\tau) d\tau. \quad (4.99)$$

Or, $e^{(t-\tau)R_0} f_{**}(\tau)$ représente la solution des équations de Hamilton (4.26) de la chaîne isolée à l'instant $t - \tau$, pour la condition initiale $f_{**}(\tau)$. Soit la projection

$$P : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n : x = (q, p) \mapsto p. \quad (4.100)$$

Il découle de (4.32) que

$$P e^{(t-\tau)R_0} f_{**}(\tau) = \sum_{k=1}^n \langle f_*(\tau) | q^k \rangle \cos \omega_k(t - \tau) \cdot M q^k$$

Dès lors, insérant cette formule dans (4.99), on trouve que la solution p de (4.97) pour des conditions initiales nulles, s'écrit

$$p(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \langle f_*(\tau) | q^k \rangle \cos \omega_k(t - \tau) d\tau \cdot M q^k. \quad (4.101)$$

En particulier, ceci entraîne que

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^n \left(\langle \widehat{f}_*(\omega_k) | q^k \rangle e^{i\omega_k t} + \langle \widehat{f}_*(-\omega_k) | q^k \rangle e^{-i\omega_k t} \right) \langle q^k | e^n \rangle_M \quad \text{si } t \geq \max \text{supp}(f). \quad (4.102)$$

Les valeurs de t inférieures à $\max \text{supp}(f)$ n'entrent pas en ligne de compte dans l'évaluation de L_n , défini par (4.98). Dès lors, en supposant qu'aucune des fréquences propres n'est dégénérée, on obtient

$$\begin{aligned} L_n &= \pi \sum_{k=1}^n \langle \widehat{f}_*(\omega_k) | q^k \rangle \langle \widehat{f}_*(-\omega_k) | q^k \rangle \langle q^k | e^n \rangle_M^2 \\ &= \pi m_n^2 \sum_{k=1}^n (q_1^k)^2 (q_n^k)^2 |\widehat{f}(\omega_k)|^2. \end{aligned} \quad (4.103)$$

3. Heuristique de l'estimation de L_n . A présent, énonçons, puis justifions, trois conjectures relatives à la décroissance asymptotique de L_n , pour une réalisation typique des masses, et une force extérieure f raisonnable³ :

1. si $\mu > 0$,

$$L_n \lesssim e^{-cn}; \quad (4.104)$$

2. si $\mu = 0$ et si $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$,

$$L_n \sim \frac{1}{n} \int_0^{1/\sqrt{n}} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.105)$$

et donc, si $|\widehat{f}(\omega)| \sim 1$ lorsque $w \rightarrow 0$,

$$L_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}; \quad (4.106)$$

3. si $\mu = 0$ et si $q_0 = q_{n+1} = 0$,

$$L_n \sim \frac{1}{n} \int_0^{1/\sqrt{n}} \omega^4 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.107)$$

et donc, si $|\widehat{f}(\omega)| \sim 1$ lorsque $w \rightarrow 0$,

$$L_n \sim \frac{1}{n^{7/2}}. \quad (4.108)$$

Dans les expressions qui précèdent, c désigne une constante strictement positive.

Basons-nous sur l'image intuitive des modes propres typiques d'une chaîne désordonnée de la section 4.2 §6. Soit $1 \leq k \leq n$. D'abord, lorsque $\omega_k^2 n \leq 1$, et donc lorsque $\mu = 0$ pour n assez grand, on ne tient pas compte du fait que les masses sont inégales. D'après (4.45) et (4.46), le nombre de modes propres satisfaisant à cette condition est d'ordre $\sqrt{n}$ quand $\mu = 0$. Si $q_0 = q_1$ et $q_n = q_{n+1}$, il découle de (4.47) ou (4.48), et de (4.45) et (4.42), que

$$(q_1^k)^2 \sim (q_n^k)^2 \sim \frac{1}{n}, \quad \omega_k^2 n \leq 1. \quad (4.109)$$

Si, par contre, $q_0 = q_{n+1} = 0$, il découle de (4.49), (4.46) et (4.42), que

$$(q_1^k)^2 \sim (q_n^k)^2 \sim \frac{\omega_k^2}{n}, \quad \omega_k^2 n \leq 1. \quad (4.110)$$

3. On exclut par exemple le cas extrême où $\widehat{f}$ décroît exponentiellement vers 0 quand $\omega \rightarrow 0$.

Ensuite, lorsque $\omega_k^2 n > 1$, le mode q^k est exponentiellement localisé, et il faut alors ajouter un facteur $e^{-c\omega_k^2 n}$ dans les membres de droite de (4.109) et (4.110), où $c > 0$.

Pour obtenir nos conjectures, on n'a plus qu'à introduire ces informations dans (4.103). A titre d'exemple, dérivons (4.105). A l'aide de (4.109), ainsi que de (4.45) et (4.42), on établit que

$$\begin{aligned} L_n &\sim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n |\widehat{f}(\omega_k)|^2 e^{-2c\omega_k^2 n} \sim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n |\widehat{f}(k/n)|^2 e^{-2c(k/n)^2 n} \\ &\sim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} |\widehat{f}(k/n)|^2 \sim \frac{1}{n} \int_0^{1/\sqrt{n}} \phi(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Ceci montre (4.105).

4. Comparaison entre K_n et L_n . Posons $\mu = 0$. Le comportement asymptotique de L_n prédit par (4.106) ou (4.108) est plus petit, d'un facteur $1/n$ pour les conditions aux bords libres, et d'un facteur $1/n^2$ pour les conditions aux bords fixes, que le comportement (4.79) ou (4.80) de K_n . Le lemme 20 montre que l'introduction d'un frottement visqueux dans les équations de Hamilton (4.91) garantit la décroissance exponentielle de l'impulsion au cours du temps. Mais ce frottement ne touche de façon directe que les deux masses extrêmes, et il est vraisemblable que le taux de décroissance de l'impulsion diminue quand n augmente. Dès lors, dans K_n , on intègre en réalité sur des temps de plus en plus longs quand n croît, ce qui explique en fait les écarts d'avec les prédictions relatives à L_n .

Voyons ceci d'une façon plus quantitative, mais non toutefois rigoureuse. Il est raisonnable de supposer une relation du type

$$K_n \sim \mathcal{T}_n \cdot L_n, \quad (4.111)$$

où $\mathcal{T}_n$ représente une période, dont nous devons déterminer la dépendance par rapport à n . En présence d'un frottement visqueux, la solution des équations de Hamilton (4.91) s'écrit encore comme une somme de modes propres, mais les fréquences propres non-nulles ont à présent une partie imaginaire strictement positive. Du lemme 20, nous savons que le mode propre de fréquence nulle ne contribue pas à l'impulsion. Conjeturons que les autres modes propres se comportent comme dans le cas où le frottement est nul. En particulier, nous supposons que seuls les $\sqrt{n}$ premiers modes, dont les fréquences sont telles que $|\omega|^2 n \leq 1$, entrent en ligne de compte dans l'évaluation de K_n , et que ces modes de basses fréquences sont toujours approximativement donnés par les relations (4.47) et (4.49), selon le type de conditions aux bords. Alors, la période $\mathcal{T}_n$ serait inversement proportionnelle aux parties imaginaires de leurs fréquences propres.

Or, dans la preuve du lemme 20, il est apparu qu'une fréquence propre ω était donnée par (4.61), d'où, compte tenu de (4.60), il ressort que

$$\Im(\omega) \leq \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\lambda(m_1|q_1|^2 + m_n|q_n|^2)}{\langle q^* | Mq \rangle},$$

où q est le mode propre correspondant. Pour des conditions aux bords libres, les composantes de q sont données par (4.47), d'où $\Im(\omega) \sim \frac{1}{n}$, et donc $\mathcal{T}_n \sim n$. Pour des conditions aux bords fixes, (4.49) montre par contre que $\Im(\omega) \sim \frac{\omega^2}{n} \lesssim \frac{1}{n^2}$, et en fait $\Im(\omega) \sim \frac{1}{n^2}$ pour la moitié des modes au moins, d'où il vient que $\mathcal{T}_n \sim n^2$. Injectant ces valeurs dans (4.111), on retrouve bien, dans les deux cas, un accord entre les estimations de K_n et de L_n .

5 – Results on the matrices Q_n

The proof of theorem 1 rests on a good understanding of the distribution of the matrices Q_n , and thus essentially of the product $\xi_n \dots \xi_1$, as $n \rightarrow \infty$. We here provide all the needed probabilistic results about it. Before starting, we point out two fundamental facts concerning this product : the existence of a strictly positive *Lyapunov* exponent, and a special *cancellation* phenomenon. We also introduce some notations. Then, in Section 5.1, we recall some classical inequalities about martingales. When the parameter ω , appearing in the definition of ξ , is larger than some strictly positive constant, good probabilistic estimates can be obtained by applying the nowadays classical theory on products of independent random matrices, as it was first observed by O'Connor [39]. We handle this case in Section 5.2, where we get a slightly better result than O'Connor, since his bound in $e^{-c\sqrt{n}}$ is now replaced by a bound in e^{-cn} (see Proposition 13).

The three last sections are concerned with the harder case $\omega \rightarrow 0$, and represent the really new material of this chapter. Because of their technical nature, we cannot give now more than a vague account of their content. The principal result of Section 5.3 is described in Proposition 14 and Corollary 4, where one obtains a very explicit representation of $\xi_n \dots \xi_1$, suited to study this product in the limit $\omega \rightarrow 0$. The derivation of these results rests almost exclusively on elementary algebra. Next, in Section 5.4, one shows that, in a particular circumstance of interest for us, the effect of the Lyapunov exponent beats the one of fluctuations. Finally, optimal pointwise bounds on the density of a Markov chain X , involved in Proposition 14 and Corollary 4, are stated and shown in Section 5.5.

For the whole chapter, we let the pinning parameter μ be equal to zero.

1. A Lyapunov exponent and a cancellation. To study the product $\xi_n \dots \xi_1$ in the limit $n \rightarrow \infty$, it sounds natural to try the following approach : first write the identity

$$\xi_1 \dots \xi_n = \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln \xi_k \right),$$

then further decompose the sum in the exponent as $\sum_{k=1}^n \ln \xi_k = n\gamma + Z_n$, where

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\ln \xi_k), \quad \text{and} \quad Z_n := \sum_{k=1}^n \ln \xi_k - n\gamma.$$

The mean γ is often referred to as the Lyapunov exponent associated to the process ξ . It is known since Furstenberg's work [21] that $\gamma > 0$ for some class of processes, to which ξ belongs (see [39] and references therein). Proposition 14 together with Lemma 26 below constitute actually a new proof, but only valid when $\omega \rightarrow 0$. On the other hand, a good conceptual explanation is, in our view, to be found in Guivarc'h [24].

Next, one has to deal with the fluctuations Z_n . This seems uneasy since ξ_k can approach 0 and ∞ arbitrarily closely¹, so that the increments $\ln \xi_k$ are unbounded. However, some trick that we now will explain, allows us to avoid this problem. Let us define two functions $\alpha, \beta : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ by the relations

$$\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in [-1, 1] \\ x/|x| & \text{if } |x| > 1 \end{cases}, \quad \beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [-1, 1] \\ 1/|x| & \text{if } |x| > 1 \end{cases}. \quad (5.1)$$

Clearly, the identity $x = \alpha(x)/\beta(x)$ holds for every $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Let $n \in \mathbb{N}_0$, let $x \in \overline{\mathbb{R}}_0$, and let us write

$$\prod_{k=1}^n \xi_k^x = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha(\xi_k^x)}{\beta(\xi_k^x)} = \frac{\alpha(\xi_n^x)}{\beta(\xi_1^x)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha(\xi_k^x)}{\beta(\xi_{k+1}^x)}.$$

Now, it is easily checked that there exist two constants $0 < C_1 \leq C_2 < +\infty$ such that for every $x \in \overline{\mathbb{R}}$ and for every $m \in [m_-, m_+]$, the bounds

$$C_1 \leq \frac{\alpha(x)}{\beta(F_m(x))} = \frac{\alpha(x)}{\beta(2 - m\omega^2 - 1/x)} \leq C_2.$$

hold, where F_m is defined as in (4.7). Moreover, one can take C_1 and C_2 independent of ω as long as ω remains bounded; and this is the only case of interest for us, since when ω is large enough, one sees easily that $|\xi_n \dots \xi_1|$ grows exponentially in a deterministic way. Therefore, one finds some function $\phi \in L^\infty(\mathbb{R} \times [m_-, m_+])$ such that

$$\prod_{k=1}^n \xi_k^x = \frac{\alpha(\xi_n^x)}{\beta(\xi_1^x)} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \phi(\xi_k^x, m_{k+1})\right).$$

The exponent in the right hand side of this last expression is a sum of bounded increments, and is therefore easier to analyze. The procedure just described can actually be implemented in many ways. In Section 5.2, we will see a classical implementation, which can also be obtained starting from the Iwasawa decomposition (see e.g. [39] or [41]), whereas in Section 5.3, we will combine it with a special change of variables, which simplifies the matters when $\omega \rightarrow 0$.

2. Notations. It will prove very convenient to perform two changes of variables related to the material introduced in Section 4.1. Let $\omega \geq 0$, and let $M = (M_k)$ be the sequence of random variables defined at the beginning of Section 4.1 §2. Let $n \in \mathbb{N}_0$, and set

$$B_n = \frac{M_n - \mathbb{E}(M_n)}{\mathbb{E}(M_n)}, \quad (5.2)$$

$$w = \frac{\sqrt{\mathbb{E}(M_1)} \omega}{\pi}. \quad (5.3)$$

1. In fact, it can even reach them, but with probability zero.

One has thus $\mathbb{E}(B_n) = 0$. Let τ be the probability density of $B_n : \tau \in C^1([b_-, b_+])$, and there exist two numbers $-1 < b_- \leq b_+ < +\infty$ such that $\text{supp}(\tau) \subset [b_-, b_+]$. One writes $B = (B_k)$.

From now, and except otherwise stated, one always will use the variables B and w , so that the letters ω and M may have in the sequel completely new meanings. So, (4.1) now reads

$$D_n(v) = (2 - \pi^2 w^2(1 + B_n))D_{n-1}(v) + D_{n-2}(v). \quad (5.4)$$

whereas the matrix A_n becomes

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 - \pi^2 w^2(1 + B_n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Moreover, with a slight abuse of notation, the evolution of the chain ξ^x , $x \in \overline{\mathbb{C}}$, will now be written

$$\xi_n^x = F_{B_n}(\xi_{n-1}^x), \quad n \geq 1, \quad (5.6)$$

where

$$F_{B_n}(x) = 2 - \pi^2 w^2(1 + B_k) - \frac{1}{x}, \quad x \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (5.7)$$

5.1 Martingales

A *filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ is a sequence of σ -algebras such that $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ for every $n \in \mathbb{N}$. A sequence of random variables $M = (M_n)_{n \geq 0}$ is said to be *adapted* to $\mathcal{F}$ if M_n is $\mathcal{F}_n$ -mesurable for every $n \in \mathbb{N}$. Then, the sequence M is a *martingale* with respect to the filtration $\mathcal{F}$ if

1. the sequence M is adapted to $\mathcal{F}$,
2. the random variables M_n are absolutely integrable for every $n \in \mathbb{N}$,
3. $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$ for every $n \in \mathbb{N}$.

The behavior of martingales has much in common with that of sums of independent random variables. The following lemma and its corollary are originally due to Freedman [20] and Azuma [3]; equation (5.11) is often referred as Azuma's inequality.

Lemma 22. *Let $(M_n)_{n \geq 0}$ be a martingale with respect to the filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Define a process $(V_n)_{n \geq 0}$ by setting $V_0 = 0$ and*

$$V_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}], \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.8)$$

Suppose that there exists a constant $c > 0$ and a sequence $(v_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ such that $|M_n - M_{n-1}| \leq c$ and $V_n \leq v_n$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Then for any $t \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}_0$, one has

$$\mathbb{E} e^{tM_n} \leq \begin{cases} e^{\kappa_c(t)v_n}, & (\text{Freedman's bound}), \\ e^{\frac{t^2}{2}c^2n}, & (\text{Azuma's bound}), \end{cases} \quad (5.9)$$

where

$$0 \leq \kappa_c(t) := \frac{e^{ct} - 1 - ct}{c^2} \leq \frac{t^2}{2} + \frac{c}{6} e^{c|t|} |t|^3. \quad (5.10)$$

Corollary 3. *Suppose that the martingale (M_n) satisfies the hypothesis of Lemma 22. Then for any $n \in \mathbb{N}_0$ and $r \geq 0$, one has*

$$\mathbb{P}(|M_n| \geq r) \leq 2e^{-\frac{r^2}{2c^2n}}. \quad (5.11)$$

Proof of Lemma 22. The proof is rather directly adapted from Freedman's paper [20]. One may suppose that $t > 0$; indeed the result is trivial for $t = 0$, and the case $t < 0$ can be obtained by replacing (M_n) by $(-M_n)$.

Let us start with Freedman's bound. Let $g : \mathbb{R}_{0+} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function defined by the formula $g(x) = (e^x - 1 - x)/x^2$. Let $y \in \mathbb{R}$ be such that $|y| \leq 1$. By definition we have

$$e^{ty} = 1 + ty + (ty)^2 g(ty).$$

It is not too difficult to see that g is an increasing function. Therefore, $g(ty) \leq g(t)$, and thus

$$e^{ty} \leq 1 + ty + y^2 t^2 g(t) = 1 + ty + y^2 (e^t - 1 - t) \equiv 1 + ty + y^2 \kappa_1(t). \quad (5.12)$$

Suppose now that Y is a random variable such that $|Y| \leq 1$ and $\mathbb{E}(Y) = 0$. Setting $y = Y$ in (5.12) and taking expectation yields

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq \mathbb{E}(1 + tY + \kappa_1(t)Y^2) = 1 + \kappa_1(t)\mathbb{E}(Y^2) \leq e^{\kappa_1(t)\mathbb{E}(Y^2)}. \quad (5.13)$$

Let then $i \in \mathbb{N}_0$, and set $Y_i := (M_i - M_{i-1})/c$, so that $|Y_i| \leq 1$ and $\mathbb{E}(Y_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$. Since $\kappa_c(t) = c^{-2}\kappa_1(tc)$, one has $\kappa_c(t)(M_i - M_{i-1})^2 = \kappa_1(ct)Y_i^2$, and the estimate (5.13) implies that

$$\mathbb{E}\left(e^{t(M_i - M_{i-1}) - \kappa_c(t)\mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})^2|\mathcal{F}_{i-1}]}\middle|\mathcal{F}_{i-1}\right) = e^{-\kappa_1(ct)\mathbb{E}[Y_i^2|\mathcal{F}_{i-1}]} \mathbb{E}(e^{ctY_i}|\mathcal{F}_{i-1}) \leq 1. \quad (5.14)$$

Now, since the random variable V_i defined by (5.8) satisfies the pointwise bound $V_i \leq v_i$, an iterative use of (5.14) gives Freedman's bound :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{tM_n} &\leq e^{\kappa_c(t)v_n} \mathbb{E} e^{tM_n - \kappa_c(t)V_n} \\ &= e^{\kappa_c(t)v_n} \mathbb{E} \left\{ e^{tM_{n-1} - \kappa_c(t)V_{n-1}} \mathbb{E}\left(e^{t(M_n - M_{n-1}) - \kappa_c(t)\mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}]}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) \right\} \\ &\leq e^{\kappa_c(t)v_n} \mathbb{E} e^{tM_{n-1} - \kappa_c(t)V_{n-1}} \leq \dots \leq e^{\kappa_c(t)v_n}. \end{aligned}$$

Finally, to show the last inequality in (5.10), it is equivalent to establish that

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{|x|^3}{6} e^x$$

for every x in $\mathbb{R}$. But this follows directly from Lagrange's rest term for Taylor series.

The proof of Azuma's bound proceeds in a very similar way. Let still $y \in \mathbb{R}$ be such that $|y| \leq 1$. First, one uses the convexity of the exponential function to get a bound

$$e^{ty} = e^{\frac{1+y}{2}t + \frac{1-y}{2}(-t)} \leq \frac{1+y}{2}e^t + \frac{1-y}{2}e^{-t} = \cosh t + y \sinh t \leq e^{t^2/2} + y \sinh t,$$

Using this instead of (5.12) in the first inequality of (5.13) yields the bound $\mathbb{E}(e^{tY}) \leq e^{\frac{1}{2}t^2}$, and consequently $\mathbb{E}(e^{t(M_i - M_{i-1})} | \mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(e^{(ct)Y_i} | \mathcal{F}_{i-1}) \leq e^{(ct)^2/2}$ for every $i \in \mathbb{N}_0$. Using this iteratively yields

$$\mathbb{E}(e^{tM_n}) = \mathbb{E}\{e^{tM_{n-1}} \mathbb{E}(e^{t(M_n - M_{n-1})} | \mathcal{F}_{n-1})\} = e^{t^2 c^2/2} \mathbb{E}(e^{tM_{n-1}}) \leq \dots \leq e^{t^2 c^2 n/2}.$$

This finishes the proof. $\square$

Proof of Corollary 3. Markov's inequality implies that

$$\mathbb{P}(|M_n| \geq r) = \mathbb{P}(M_n \geq r) + \mathbb{P}(-M_n \geq r) \leq e^{-tr} \mathbb{E}(e^{tM_n}) + e^{-tr} \mathbb{E}(e^{-tM_n})$$

for every $t \geq 0$. The proof follows then from Azuma's bound (5.9) with $t = r/(c^2 n)$. $\square$

5.2 High frequencies

Let $w_0 > 0$. Let us consider the change of variables $\mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \tan(\pi x)$. Let $\theta := (\theta_k)_{k \geq 0}$ be the Markov chain on $\mathbb{T}$ such that $\tan \pi \theta_k = \xi_k^\infty$ for every $k \in \mathbb{N}$, and for every realization of the process B . Therefore

$$\begin{aligned} \theta_n &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(2 - \pi^2 w^2 (1 + B_n) - \frac{1}{\tan \pi \theta_{n-1}} \right), \quad n \geq 1, \\ \theta_0 &= 1/2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

For every $n \in \mathbb{N}_0$, let us write

$$D_n(e^1) = \prod_{k=1}^n \xi_k^\infty = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi \theta_k}{\cos \pi \theta_k} = \sin \pi \theta_n \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi \theta_{k-1}}{\cos \pi \theta_k} := \sin \pi \theta_n \cdot t_n. \tag{5.16}$$

For $n \geq 2$, one observes also that

$$D_{n-1}(e^1) = \sin \pi \theta_{n-1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \pi \theta_{k-1}}{\cos \pi \theta_k} = \cos \pi \theta_n \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi \theta_{k-1}}{\cos \pi \theta_k} = \cos \pi \theta_n \cdot t_n, \tag{5.17}$$

independently of the value of B_n . Now, for $k \in \mathbb{N}_0$, one computes with the help of (5.15), that

$$\frac{\sin \pi \theta_{k-1}}{\cos \pi \theta_k} = e^{\phi(\theta_{k-1}, B_k)}$$

where $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}, [b_-, b_+])$ is defined by the relation

$$e^{\phi(x, b)} := \sqrt{\sin^2 \pi x + ((2 - \pi^2 w^2 (1 + b)) \sin \pi x - \cos \pi x)^2}. \tag{5.18}$$

Therefore

$$t_n = \exp \left(\sum_{k=1}^n \phi(\theta_{k-1}, B_k) \right). \quad (5.19)$$

The goal of this section is to prove

Proposition 13. *Let $w_1 \geq w_0 > 0$. There exist constants $C < +\infty$ and $c, c' > 0$ such that, for every $n \in \mathbb{N}_0$, and for every $w \in [w_0, w_1]$,*

$$\mathbb{P}(t_n^2 \leq e^{cn}) \leq C e^{-c'n}. \quad (5.20)$$

Proof. Let $w \in [w_0, w_1]$. Let T be the transfer operator of the Markov chain θ defined by (5.15); the operator $T : C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$ is defined by the relation

$$Tu(x) = \mathbb{E}(u \circ \theta_1^x).$$

Clearly $T1 = 1$ and $\|T\|_{\infty \rightarrow \infty} = 1$. A measure μ on $\mathbb{T}$ is said to be invariant under T if $\mu(Tu) = \mu(u)$ for every $u \in C(\mathbb{T})$. O'Connor [39] has checked that there exists a unique invariant measure ν under T , and that there exist two constants $C < +\infty$ and $c > 0$ such that, for every $u \in C(\mathbb{T})$, and for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T^n u - \nu(u)\|_{\infty} \leq C e^{-cn} \|u\|_{\infty}. \quad (5.21)$$

Although he did not show this explicitly, one can check with some work, using for example Doeblin's condition, that C and c can be taken independent of $w \in [w_0, w_1]$.

Let us give some definitions. First, let the function ϕ be defined by (5.18), and let $\gamma \in \mathbb{R}$ be defined by

$$\gamma := \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}(\phi(y, B)) \nu(dy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^k \mathbb{E}(\phi(x, B)),$$

where this last limit is independent of $x \in \mathbb{T}$. O'Connor [39] has shown that $\gamma > 0$. Second, there exists a unique function $\psi \in C(\mathbb{T})$ solving

$$T\psi - \psi = \mathbb{E}(\phi) - \gamma, \quad \nu(\psi) = 0.$$

Indeed, ψ is explicitly given by

$$\psi = - \sum_{k=0}^{\infty} T^k (\mathbb{E}(\phi) - \gamma)$$

Since ϕ is continuous with respect to w , and since the constants C and c in (5.21) are independent of $w \in [w_0, w_1]$, the number γ and the function ψ are both continuous with respect to the parameter w .

Let now $n \in \mathbb{N}_0$, and let us write

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \phi(\theta_{k-1}, B_k) &= \sum_{k=1}^n \left(\phi(\theta_{k-1}, B_k) - \int \phi(\theta_{k-1}, b) \tau(b) db \right) + \sum_{k=1}^n \int \phi(\theta_{k-1}, b) \tau(b) db \\ &=: Z_{1,n} + n\gamma + \sum_{k=1}^n T\psi(\theta_{k-1}) - \psi(\theta_{k-1}), \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \psi(\theta_{k-1}) - T\psi(\theta_{k-1}) &= \psi(\theta_n) - \psi(\theta_0) + \sum_{k=1}^n T\psi(\theta_{k-1}) - \psi(\theta_k) \\ &=: \psi(\theta_n) - \psi(\theta_0) + Z_{2,n}, \end{aligned}$$

which constitutes a classical decomposition. Combining these two last equations, one gets

$$\sum_{k=1}^n \phi(\theta_{k-1}, B_k) = n\gamma + Z_n + R_n, \quad (5.22)$$

where $(Z_k)_{k \geq 1} := (Z_{1,k} + Z_{2,k})_{k \geq 1}$ is a martingale, since both $(Z_{1,k})_{k \geq 1}$ and $(Z_{2,k})_{k \geq 1}$ are martingales with respect to the same filtration $(\mathcal{F}_k = \sigma(B_1, \dots, B_k))_{k \geq 1}$, and where R_n is some bounded rest term. But it follows from Azuma's inequality (5.11) that

$$P(n\gamma + Z_n + R_n \leq n\gamma/2) \lesssim e^{-cn}.$$

By (5.19), and since γ , ϕ and ψ are continuous with respect to w , this implies the result. $\square$

5.3 Representation of the matrix elements

The present section is divided into three parts. In a first paragraph, one constructs a change of variables $g : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, and one defines a Markov chain X on $\mathbb{T}$ as the pre-image of ξ by g ; so $g(X_k) = \xi_k$ for every $k \in \mathbb{N}$. This change of variables had been obtained in a relatively similar way by Matsuda and Ishii [37]. In a second paragraph, one obtains a new representation of the process $D(v)$ defined by (4.1), in terms of the chain X , described in Proposition 14 and Corollary 4. Finally, in a third paragraph, a technical lemma is proven, which gives some information on the joint distribution of $D(e^1)$ and $D(e^2)$.

For the whole section, one let $w_0 > 0$ be small enough to make all the results valid.

1. A change of variables. Let us describe the construction and some properties of the change of variables g . To every matrix $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, one may associate a *Möbius* transform $\mathcal{M}_A : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ such that

$$\mathcal{M}_A(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{if } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

The association $A \mapsto \mathcal{M}_A$ preserves the matrix multiplication :

$$\mathcal{M}_A \circ \mathcal{M}_B = \mathcal{M}_{AB}, \quad A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad (5.23)$$

so that $(\mathcal{M}_A)^{-1} = \mathcal{M}_{A^{-1}}$ whenever either side of the equality exists.

Let us then observe that, for every $b \in [b_-, b_+]$, the map F_b defined by (4.7) is the Möbius transform associated the matrix $A \equiv A_b$ defined by (4.3), so that $F_b = \mathcal{M}_{A_b}$. Let us now take $b = E(B_1)$, and let us diagonalize the matrix $A_{E(B_1)}$: one writes $A_{E(B_1)} = G\Lambda G^{-1}$. This implies that

$$\mathcal{M}_{A_{E(B_1)}} = \mathcal{M}_G \circ \mathcal{M}_\Lambda \circ \mathcal{M}_{G^{-1}}.$$

Now, since both eigenvalues of $A_{E(B_1)}$ lie on the unit circle, $\mathcal{M}_\Lambda(z) = e^{2i\pi\vartheta}z$ for some $\vartheta \in \mathbb{R}$. It follows that circles in the complex plane centered at the origin, constitute the set of invariant curves under $\mathcal{M}_\Lambda$; therefore, when restricted to one of them, $\mathcal{M}_\Lambda$ can be represented as a rotation $R_\vartheta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, x \mapsto x + \vartheta$. Since, on the other hand, $F_{E(B_1)} = \mathcal{M}_{A_{E(B_1)}}$ maps $\overline{\mathbb{R}}$ to itself, and since $\mathcal{M}_G^{-1}$ has consequently to map $\overline{\mathbb{R}}$ to a curve invariant under $\mathcal{M}_\Lambda$, it follows that the restriction of $\mathcal{M}_G^{-1}$ to $\overline{\mathbb{R}}$ can be represented as a map $g : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. From this, one concludes that, for every $x \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$F_{E(B_1)}(x) = g \circ R_\vartheta \circ g^{-1}(x).$$

Now the point is that, although the map $g^{-1} \circ F_b \circ g$ is no longer a rotation when $b \neq E(B_1)$, it is still very close to it. As a result, it turns out that the process X , such that $g(X_k) = \xi_k$ for every $k \in \mathbb{N}$, is much easier to analyze than the process ξ in the limit $\omega \rightarrow 0$.

These claims are made more precise in the rest of this paragraph. We first give two lemmas describing the change of variable g . We then introduce in more details the process X . The proofs of these lemmas boils down to simple computations, and are deferred to the end of the paragraph.

Lemma 23. *Let $w \in]0, w_0]$. There exists a coordinate transformation $g : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that*

$$(g^{-1} \circ \mathcal{M}_{E(A_1)} \circ g)(x) = x + \vartheta \quad (x \in \mathbb{T}), \quad (5.24)$$

where A_1 is the matrix defined by (4.3), and where

$$\vartheta \equiv \vartheta(w) = \frac{1}{\pi} \arccos \left[1 - \frac{\pi^2 w^2}{2} \right] = w + \mathcal{O}(w^3). \quad (5.25)$$

The function g and its inverse g^{-1} are given by

$$g(x) = (\mathcal{M}_G \circ E^{-1})(x) = \frac{\tan \pi x}{\cos \pi \vartheta \tan \pi x + \sin \pi \vartheta} \quad (5.26)$$

$$g^{-1}(\xi) = (E \circ \mathcal{M}_{G^{-1}})(\xi) = \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{(\sin \pi \vartheta) \xi}{(\cos \pi \vartheta) \xi - 1} \right], \quad (5.27)$$

where $E : \partial D := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \rightarrow \mathbb{T}$ is the bijection $e^{i\phi} \mapsto \frac{\phi}{2\pi}$, and the columns of G consists of eigenvectors of $E(A_l)$.

Lemma 24. *Let $w \in [0, w_0]$ and let $g : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ be the coordinate transformation (5.26). Then for any $b \in [b_-, b_+]$ the function*

$$f_b := g \circ \mathcal{M}_A \circ g^{-1} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \text{where } A \equiv A_b := \begin{bmatrix} 2 - \pi^2 w^2(1+b) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

is a bijection, that can be written as

$$f_b(x) = x + \vartheta + \Phi(x, b) \quad (5.29a)$$

$$f_b^{-1}(y) = y - \vartheta + \Phi(y - \vartheta, -b), \quad (5.29b)$$

where the constant $\vartheta = w + \mathcal{O}(w^3)$ is given in (5.25), and where the smooth function $\Phi : \mathbb{T} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{T}$ is specified by

$$\Phi(x, b) = \frac{1}{\pi} \arctan \left\{ \frac{(\pi w/2)[1 - \cos(2\pi x)] b}{\sqrt{1 - (\pi w/2)^2} - (\pi w/2) \sin(2\pi x) b} \right\} \quad (5.30a)$$

$$= \sin^2(\pi x) \left[wb + w^2 b^2 (\pi/2) \sin(2\pi x) + w^3 b R_3(w, x, b) \right]. \quad (5.30b)$$

The remainder term $R_3 : [0, w_0] \times \mathbb{T} \times [b_-, b_+]$ is a smooth and bounded function.

The main properties of $f_b(x)$ are best seen by expanding it into the power series with respect to w .

Indeed, by using (5.25), (5.29a) and (5.30) one gets :

$$f_b(x) = x + w + w\phi(x)b + w^2\psi(x)b^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad (5.31a)$$

$$\phi(x) = \sin^2 \pi x, \quad (5.31b)$$

$$\psi(x) = \pi \sin^3 \pi x \cos \pi x. \quad (5.31c)$$

Let now $x \in \mathbb{T}$. One can now explicitly define the Markov process $X^x = (X_n^x)_{n \geq 0}$ on $\mathbb{T}$, pre-image by g of the process ξ^x :

$$\begin{aligned} X_n^x &= f_{B_n}(X_{n-1}^x), \quad n \geq 1 \\ X_0^x &= x \end{aligned} \quad (5.32)$$

For $k \in \mathbb{N}_0$, let $\Delta X_k := X_k - X_{k-1}$. From the expansion (5.31), together with $E(B_1) = 0$ and $B_1 \geq b_- > -1$, the following qualitative properties of the process X emerge :

1. Uniform monotonicity : $0 < (1 + b_-)w + \mathcal{O}(w^2) \leq \Delta X_k \leq (1 + b_+)w + \mathcal{O}(w^2)$,
2. $\mathcal{O}(w^1)$ -martingale property up to a constant rotation : $E[\Delta X_k - w | X_{k-1} = x] = X_{k-1} + \mathcal{O}(w^2)$ for every $x \in \mathbb{T}$,
3. Uniform diffusion outside any neighborhood of zero : there are constants $\alpha(\varepsilon), \beta > 0$ such that $E[(\Delta X_k - w)^2 | X_{k-1} = x] \in [\alpha(\varepsilon)w^2, \beta w^2]$ as long as $|x|_{\mathbb{T}} \geq \varepsilon$.

Proof of Lemma 23. Diagonalizing, we get $E(A_l) = G\Lambda G^{-1}$ where

$$\Lambda = \begin{bmatrix} e^{i\pi\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\vartheta} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-i\pi\vartheta} & -e^{i\pi\vartheta} \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{2i \sin \pi\vartheta} \begin{bmatrix} e^{i\pi\vartheta} & -1 \\ e^{-i\pi\vartheta} & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

and where ϑ is given in (5.25). From (5.33) we see that $\mathcal{M}_{G^{-1}}(\overline{\mathbb{R}}) = \partial D$. Since the matrix G is invertible, the property (5.23) implies that the associated Möbius transformation is also invertible. In particular, the restrictions $\mathcal{M}_G|_{\partial D}$ and $\mathcal{M}_G^{-1}|_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}_{G^{-1}}|_{\overline{\mathbb{R}}}$ are bijections mapping ∂D into $\overline{\mathbb{R}}$ and $\overline{\mathbb{R}}$ into ∂D , respectively. Using these observations we identify the coordinate transformation $g : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ and its inverse $g^{-1} : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{T}$ by regrouping terms as follows :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{E(A_l)} &= \mathcal{M}_G \circ \mathcal{M}_\Lambda \circ \mathcal{M}_{G^{-1}} \\ &= (\mathcal{M}_G \circ E^{-1}) \circ (E \circ \mathcal{M}_\Lambda \circ E^{-1}) \circ (E \circ \mathcal{M}_G^{-1}) \\ &= g \circ \lambda \circ g^{-1}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

where λ is the rotation on the right hand side of (5.24).

In order to derive (5.26) and (5.27) the easiest way is to first solve g^{-1} using $E(z/z^*) = 2E(z) = \pi^{-1} \arctan[\Im(z)/\Re(z)]$:

$$x = g^{-1}(\xi) \equiv E\left(\frac{e^{i\pi\vartheta}\xi - 1}{e^{-i\pi\vartheta}\xi - 1}\right) = \pi^{-1} \arctan\left[\frac{\xi \sin(\pi\vartheta)}{\xi \cos(\pi\vartheta) - 1}\right].$$

The formula for g follows now by simply inverting the above function. $\square$

Proof of Lemma 24. Using (5.23), one gets

$$f_b \equiv g^{-1} \circ \mathcal{M}_A \circ g = E \circ \mathcal{M}_{G^{-1}AG} \circ E^{-1},$$

where

$$G^{-1}AG = \begin{bmatrix} (1+i\delta)e^{i\pi\vartheta} & -i\delta e^{i\pi\vartheta} \\ i\delta e^{-i\pi\vartheta} & (1-i\delta)e^{-i\pi\vartheta} \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

and

$$\delta = \frac{\pi^2 w^2 b}{2 \sin \pi \vartheta} = \frac{(\pi w/2)b}{\sqrt{1 - (\pi w/2)^2}} = (\pi w/2)b + \mathcal{O}(w^3 b), \quad (5.36)$$

where the second equality follows from (5.25). Therefore

$$\mathcal{M}_{G^{-1}AG}(e^{i\phi}) = e^{i(\phi+2\pi\vartheta)} \frac{1+i\delta(1-e^{-i\phi})}{1-i\delta(1-e^{i\phi})} =: \exp[i(\phi+2\pi\vartheta+2\tilde{\Phi}(\phi,\delta))],$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\phi,\delta) &= \arg[1+i\delta(1-e^{-i\phi})] = \arctan\left[\frac{1-\cos\phi}{1-\delta\sin\phi}\delta\right] \\ &= (1-\cos\phi)\delta + (1-\cos\phi)\sin\phi\delta^2 + \mathcal{O}((1-\cos\phi)\delta^3). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituting $\phi = 2\pi x$, and using the middle expression in (5.36) in place of δ , we obtain (5.30a); (5.30b) is then obtained by a Taylor expansion. The proof of (5.29b) is carried out in a similar way. $\square$

2. Representation of $D(v)$. Let $n \in \mathbb{N}_0$. The representation of $D_n(e^1)$ given by Proposition 14 below, is to be compared with the more classical decomposition $D_n(e^1) = \sin \pi \theta_n \cdot t_n$ given in (5.16). Here, according to (5.19) and (5.22), $t_n > 0$ might further be written as

$$t_n = e^{n\gamma + Z_n + R_n},$$

where $\gamma > 0$, where $(Z_k)_{k \geq 1}$ a martingale of bounded increments, and where R_n is a bounded rest term. In the proof of Proposition 13, one did only show the existence of such a decomposition, but, remarkably, Raugi [41] has been able to compute the increments of the martingale (Z_k) explicitly, up to the knowledge of the invariant measure of the chain ξ . His result constitutes therefore a possible alternative to the use of Proposition 14, but we believe this last one to be more straightforward, as log

as the limit $w \rightarrow 0$ is taken. Moreover, it shows that the cancellation procedure explained at the very beginning of this chapter can take various forms, some of them being more adapted to certain specific situations.

Proposition 14. *Let $v = (v_0, v_{-1}) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ be such that $v_0 \neq 0$. There exists a constant $w_0 > 0$ such that for any $w \in]0, w_0]$, and for any $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$D_n(v) = v_0 \cdot \Gamma_n^x \cdot \frac{\sin \pi X_n^x}{\sin \pi [x + \Phi(x, B_1)]} \quad \text{with} \quad x = g^{-1}(v_0/v_{-1}), \quad (5.38)$$

where $D_n(v)$ is defined by (4.1). Here, the amplitude $\Gamma_n^x > 0$ has an exponential representation :

$$\Gamma_n^x = \exp \left[w \sum_{l=1}^n s(X_{l-1}^x) B_l + w^2 \sum_{l=1}^n r(X_{l-1}^x) B_l^2 + \mathcal{O}(w^3 n) \right], \quad (5.39)$$

where the smooth functions $r, s : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ are specified by

$$s(x) = -\frac{\pi}{2} \sin 2\pi x, \quad (5.40a)$$

$$r(x) = \frac{\pi^2}{4} (\cos^2 2\pi x - \cos 2\pi x) \geq 0. \quad (5.40b)$$

Proof. Let $l \in \mathbb{N}_0$. Let us write $D_n := D_l(v)$, $X_n := X_l^x$ and $\xi_l := \xi_l^{g(x)}$. Let us remind that, by (4.9), $D_l = \xi_l \dots \xi_1 v_0$, and that X_l is the pre-image of ξ_l by g . So, using (5.26), one gets

$$\xi_l = g \circ X_l = \mathcal{M}_G \circ E^{-1}(X_l) = \mathcal{M}_G(e^{i2\pi X_l}). \quad (5.41)$$

Next, using (5.33) to write out the Möbius transform, one obtains

$$\mathcal{M}_G(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} - 1}{e^{i(\phi - \pi\vartheta)} - e^{i\pi\vartheta}} = \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\sin(\frac{\phi}{2} - \pi\vartheta)}.$$

By combining this with (5.41), reorganizing the resulting product and then using (5.29a) to write f in terms of Φ yields

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{v_0} &= \frac{\xi_n \xi_{n-1} \dots \xi_1 v_0}{v_0} = \prod_{l=1}^n \frac{\sin \pi X_l}{\sin \pi (X_l - \vartheta)} = \frac{\sin \pi X_n}{\sin \pi (X_1 - \vartheta)} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{\sin \pi X_l}{\sin \pi (X_{l+1} - \vartheta)} \\ &= \frac{\sin \pi X_n}{\sin \pi [x + \Phi(x, B_1)]} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{\sin \pi X_l}{\sin \pi [X_l + \Phi(X_l, B_{l+1})]}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Here the possible extreme values $\xi_k \in \{0, \infty\}$ do not cause problems because, when $\xi_0 = v_0/v_{-1} \neq 0$, (4.8) implies that

$$\mathbb{P}(\xi_k \in \{0, \infty\} \text{ for some } k \in \mathbb{N} | \xi_0 \neq 0) = 0.$$

We must now show that the product of sin ratios in (5.42) equals the exponent Γ_n^x . Since, the terms in the product are all similar let us consider only one such factor. From (5.30b) one sees that $\Phi(x, b) =$

$\mathcal{O}(w)$. This suggests expressing the denominators on the last line of (5.42) as power series of $\pi\Phi(x, b)$ around zero :

$$\begin{aligned}\sin \pi(x + \Phi(x, b)) &= \sin \pi x \cos \pi\Phi(x, b) + \cos \pi x \sin \pi\Phi(x, b) \\ &= \sin \pi x \left\{ 1 - \frac{1}{2}\pi^2\Phi^2(x, b) \right\} + \pi\Phi(x, b) \cos \pi x + \mathcal{O}(\Phi^3(x, b)).\end{aligned}\tag{5.43}$$

The expression (5.30b) also shows that $\Phi^k(x, b)/\sin \pi x = \mathcal{O}(w^k)$ for $k \geq 1/2$. Thus using (5.43) to rewrite the denominators in (5.42) and then dividing the numerator and the denominator by $\sin \pi x$ yields the expression for geometric sum of variable $q = -\pi\Phi(x, b) \cot \pi x + \frac{\pi^2}{2}\Phi^2(x, b) + \mathcal{O}(w^3) = \mathcal{O}(w)$. Expanding this geometric sum gives the first line of

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi x}{\sin \pi(x + \Phi(x, b))} &= 1 - \pi\Phi(x, b) \cot \pi x + \frac{\pi^2}{2}\Phi^2(x, b) + \pi^2\Phi^2(x, b) \cot^2 \pi x + \mathcal{O}(w^3) \\ &= 1 - w \frac{\pi}{2} \sin 2\pi x b + w^2 \frac{\pi^2}{8} (1 - \cos 2\pi x)^2 b^2 + \mathcal{O}(w^3),\end{aligned}$$

while the last line follows from (5.30b) and trigonometric double angle formulae. By using $1 + z = \exp \circ \ln(1 + z) = \exp \left[z - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]$, with $|z| \leq Cw_0$, for the last expression we get

$$\frac{\sin \pi x}{\sin \pi(x + \Phi(x, b))} = \exp \left[-w(\pi/2) \sin 2\pi x b + w^2(\pi/2)^2 (\cos^2 2\pi x - \cos 2\pi x) b^2 + \mathcal{O}(w^3) \right].$$

Identifying functions s and r on the right side and then applying this bound term by term for the product in (5.42) yields the expression on the right side of (5.39). $\square$

Corollary 4. *There is a constant $w_0 > 0$ such that for every $w \in]0, w_0]$, and for every $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$D_n(e_1) = \Gamma_n^\vartheta \cdot \frac{\sin \pi X_n^\vartheta}{\sin \pi[\vartheta + \Phi(\vartheta, B_1)]} \sim w^{-1} \Gamma_n^\vartheta \cdot \sin \pi X_n^\vartheta, \tag{5.44a}$$

$$D_n(e_2) = \Gamma_n^0 \cdot \frac{\sin \pi X_n^0}{\sin \pi[\vartheta + \Phi(\vartheta, B_2)]} \sim w^{-1} \Gamma_n^0 \cdot \sin \pi X_n^0. \tag{5.44b}$$

Proof. By (5.27) we get $g^{-1}(\xi_0) = g^{-1}(1/0) = \vartheta$ and thus (5.44a) follows directly from Proposition 14. In order to prove (5.44b) one can not directly apply the proposition since the first component of e_2 is zero. However, from (4.1) one sees that $(D_1(e_2), D_0(e_2)) = (-1, 0) = -e_1$ and that $D_n(-v) = -D_n(v)$. Thus, by defining $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ by $\theta\omega = (b_2, b_3, \dots)$ for $\omega = (b_1, b_2, \dots)$ and denoting the associated pullback θ_* on random variables Z by $\theta_*Z(\omega) = Z(\theta\omega)$, one can write

$$D_n(e_2) = -\theta_*D_{n-1}(e^1) = \theta_*\Gamma_{n-1}^\vartheta \cdot \frac{\sin \pi \theta_*X_{n-1}^\vartheta}{\sin \pi[\vartheta + \Phi(\vartheta, \theta_*B_1)]}, \tag{5.45}$$

where, by (5.39),

$$\theta_*\Gamma_{n-1}^\vartheta = \exp \left[w \sum_{l=1}^{n-1} s(\theta_*X_{l-1}^\vartheta) \theta_*B_l + w^2 \sum_{l=1}^{n-1} r(\theta_*X_{l-1}^\vartheta) (\theta_*B_l)^2 + \mathcal{O}(w^3n) \right]. \tag{5.46}$$

Now, since $\Phi(0, b) = 0$, it follows that $X_1^0 = f_{B_1}(0) = \vartheta + \Phi(0, B_1) = \vartheta = \theta_*X_0^\vartheta$ regardless of the value of B_1 . But (X_n^0) and $(\theta_*X_{n-1}^\vartheta)$ also satisfy the same recursion relations, and therefore $\theta_*X_n^\vartheta = X_{n+1}^0$,

$n \in \mathbb{N}$. Also, by definition $\theta_* B_l(\omega) = b_{l+1} = B_{l+1}(\omega)$. Thus we may replace $\theta_* X_{l-1}^\vartheta$ with X_l^0 and write $\theta_* B_l = B_{l+1}$ in (5.45) and (5.46). Moreover, if we also reindex the sums in (5.46) we obtain an exponential representation for $\theta_* \Gamma_{n-1}$ that is up to missing first terms $ws(X_0^0)B_1$ and $w^2r(X_0^0)B_1^2$ equal to Γ_n^0 . However, these missing terms are both zero due to the ‘‘coincidence’’ $s(0) = r(0) = 0$, and thus we get $\theta_* \Gamma_{n-1} = \Gamma_n^0$. This proves (5.44b). $\square$

3. Joint behavior. To show the lower bound (4.17), concerning the fixed boundaries conditions, we will need to consider the distribution of the four processes (X_n^ϑ) , (X_n^0) , (Γ_n^ϑ) , and (Γ_n^0) altogether. Since $X_0^\vartheta - X_0^0 = \vartheta \sim w$, one can consider X_n^0 and Γ_n^0 as perturbations of X_n^ϑ and Γ_n^ϑ , respectively. This simple idea allows one to prove the next lemma. Let $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1} = (\sigma(B_1, \dots, B_n))_{n \geq 1}$.

Lemma 25. *Let $x \in \mathbb{R}$, and let us consider X^x , as real valued processes. There exists $w_0 > 0$ such that, for all $n \in \mathbb{N}_0$ and every $w \in]0, w_0]$, one has*

$$X_n^\vartheta - X_n^0 = w e^{M_n + L_n + \mathcal{O}(w^2 n)} \quad (5.47)$$

$$\Gamma_n^0 / \Gamma_n^\vartheta = e^{K_n + \mathcal{O}(w + w^2 n)}, \quad (5.48)$$

where $(M_n)_{n \geq 0}$, $(L_n)_{n \geq 0}$, $(K_n)_{n \geq 0}$ are $\mathbb{R}$ -valued $\mathcal{F}$ -martingales such that $M_0 = L_0 = K_0 = 0$ and that,

$$M_n - M_{n-1} = w \phi'(X_{n-1}^\vartheta) B_n \quad (5.49)$$

$$L_n - L_{n-1} = w^2 e^{M_{n-1} + L_{n-1} + \mathcal{O}(w^2 n)} H_{n-1} B_n \quad (5.50)$$

$$K_n - K_{n-1} = w^2 e^{M_{n-1} + L_{n-1} + \mathcal{O}(w^2 n)} U_{n-1} B_n \quad (5.51)$$

when $n \geq 1$. The processes $(H_n)_{n \geq 0}$ and $(U_n)_{n \geq 0}$ are $\mathcal{F}$ -adapted. Moreover, there exists a constant $C \leq \infty$ such that

$$|H_n|, |U_n|, w^{-1}|L_n - L_{n-1}|, w^{-1}|K_n - K_{n-1}| \leq C \quad (5.52)$$

for every $n \in \mathbb{N}_0$.

Proof. From (5.30b) and (5.31b) one sees that $\Phi(x, b) = w\phi(x)b + w^2 R_2(x, b)$ where R_2 is a smooth and bounded function. Using (5.29a) we get

$$\begin{aligned} f_b(x) - f_b(x - z) &= z + \Phi(x, b) - \Phi(x - z, b) \\ &= \left\{ 1 + w \frac{\phi(x) - \phi(x - z)}{z} b + w^2 \frac{R_2(x, b) - R_2(x - z, b)}{z} \right\} z, \end{aligned} \quad (5.53)$$

for any $z \in \mathbb{R}$. By the mean value theorem there are function $\zeta_1(x, z), \zeta_2(x, z, b) \in [x - z, x]$ such that for any $x \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$ and $b \in [b_-, b_+]$ we have

$$\begin{aligned} f_b(x) - f_b(x - z) &= \left\{ 1 + w\phi'(x)b - wz \frac{1}{2} \phi''(\zeta_1(x, z))b + w^2 \partial_x R_2(\zeta_2(x, z, b), b) \right\} z \\ &= \exp \left[w\phi'(x)b - wz \frac{1}{2} \phi'' \circ \zeta_1(x, z)b + \mathcal{O}(w^2) \right] z. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Now, set

$$\Theta_n := (X_n^\vartheta - X_n^0)/w \quad \text{and} \quad H_n := -\frac{1}{2}\phi'' \circ \zeta_1(X_n^\vartheta, w\Theta_n), \quad (5.55)$$

Then (5.54) and (5.32) yield

$$\begin{aligned} \Theta_n &= \frac{1}{w} \{f_{B_n}(X_{n-1}^\vartheta) - f_{B_n}(X_{n-1}^\vartheta - w\Theta_{n-1})\} \\ &= \exp \left[w\phi'(X_{n-1}^\vartheta)B_n - w^2\Theta_{n-1} \frac{1}{2}\phi'' \circ \zeta_1(X_{n-1}^\vartheta, w\Theta_{n-1})B_n + \mathcal{O}(w^2) \right] \cdot \Theta_{n-1} \\ &= \exp \left[w \sum_{j=1}^n \phi'(X_{j-1}^\vartheta)B_j + w^2 \sum_{j=1}^n \Theta_{j-1} H_{j-1} B_j + \mathcal{O}(w^2 n) \right] \cdot \Theta_0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

By using (5.49) and (5.50) we identify the two sums inside the exponent in (5.56) as M_n and L_n , respectively. Together with $\Theta_0 = (X_0^\vartheta - X_0^0)/w = \vartheta/w = 1 + \mathcal{O}(w^2)$ this gives $\Theta_n = e^{M_n + L_n + \mathcal{O}(w^2 n)}$ and by the definition (5.55) this equals (5.47). Moreover, $w^{-1}\Delta L_{n+1} = w\Theta_n H_n B_{n+1}$, where using (5.54), (5.55) and the definition of ζ_1 we get

$$w\Theta_n H_n = \frac{\phi(X_n^\vartheta) - \phi(X_n^0)}{X_n^\vartheta - X_n^0} - \phi'(X_n^\vartheta) =: \phi'(\zeta_0) - \phi'(X_n^\vartheta),$$

for some $\zeta_0 \in [X_n^0, X_n^\vartheta]$, and therefore $w^{-1}|\Delta L_{n+1}| \leq 2\|\phi'\|_\infty \cdot \max\{-b_-, b_+\} =: C$.

In order to prove (5.48) we use again the mean value theorem to write

$$s(X_n^0) = s(X_n^\vartheta - w\Theta_n) = s(X_n^\vartheta) - w\Theta_n \cdot s' \circ \zeta_3(X_n^\vartheta, w\Theta_n), \quad (5.57)$$

where $X_n^\vartheta - w\Theta_n \leq \zeta_3(X_n^\vartheta, w\Theta_n) \leq X_n^\vartheta$. Using this in (5.39) yields

$$\begin{aligned} \Gamma_n^0 &= \exp \left[w \sum_{l=1}^n s(X_{l-1}^0)B_l + \mathcal{O}(w^2 n) \right] \\ &= \exp \left[w \sum_{l=1}^n s(X_{l-1}^\vartheta)B_l - w^2 \sum_{l=1}^n \Theta_{l-1} \cdot s' \circ \zeta_3(X_{l-1}^\vartheta, w\Theta_{l-1})B_l + \mathcal{O}(w^2 n) \right] \\ &=: \Gamma_n^\vartheta e^{K_n + \mathcal{O}(w + w^2 n)}. \end{aligned}$$

Above, we have identified $U_n = -s' \circ \zeta_3(X_n^\vartheta, w\Theta_n)$ in (5.51). Finally, by equation (5.57) $w^{-1}\Delta K_{n+1} = w\Theta_n U_n B_{n+1} = [s(X_n^0) - s(X_n^\vartheta)] B_{n+1}$. Since s is a bounded function (5.40a) this implies $w^{-1}|\Delta K_n| \leq C$. $\square$

5.4 Expectation of $1/\Gamma_n$

Let $x \in \mathbb{T}$, and let $n \in \mathbb{N}_0$. The random variable Γ_n^x is defined by (5.39) :

$$\Gamma_n^x = \exp \left[w \sum_{l=1}^n s(X_{l-1}^x)B_l + w^2 \sum_{l=1}^n r(X_{l-1}^x)B_l^2 + \mathcal{O}(w^3 n) \right] := \exp(wS_n + w^2 R_n + \mathcal{O}(w^3 n)),$$

where the functions s and r are given by (5.40). The process $(S_k)_{k \geq 1}$ form a martingale, and so S_n is typically of order $\sqrt{n}$. Instead, typical values of R_n are of order n , since $r \geq 0$. Therefore, one expects typical realizations of Γ_n^x to grow like e^{cw^2n} , and so typical realization of $1/\Gamma_n^x$ to decay like e^{-cnw^2} , for some $c > 0$. It is not obvious, however, that $\mathbb{E}(1/\Gamma_n^x)$ decays the same way, since $\mathbb{E}(e^{-wS_n}) \sim e^{c'nw^2}$ for some $c' > 0$, and fluctuations due to S_n have thus to be taken into account. The goal of this section is to establish this fact :

Proposition 15. *There exists some $w_0 > 0$, and constants $C \equiv C(w_0) < +\infty$ and $c \equiv c(w_0) > 0$ such that, for every $n \in \mathbb{N}_0$, one has*

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} \mathbb{E}(1/\Gamma_n^x) \leq C e^{-cw^2n} \quad \text{when } w \in]0, w_0]. \quad (5.58)$$

The proof of this proposition relies ultimately on the fact that, for any $k \in \mathbb{N}$ and any $x \in \mathbb{T}$, the set $\{X_{k+j}^x(w) : j = 1, \dots, \lfloor 1/w \rfloor\}$ typically samples $\mathbb{T}$ evenly. Indeed, from the definition (5.32) of X , and from (5.31), one sees that

$$\mathbb{P}(X_{k+l}^x \in A | X_k = y) = \mathbb{P}(X_l^y \in A) = \mathbb{P}\left(x + wl + w \sum_{j=1}^l \phi(X_{j-1}^y) B_j + \mathcal{O}(w^2 l) \in A\right),$$

for any $y \in \mathbb{T}$, for any measurable set $A \subset \mathbb{T}$, and for any $l \in \mathbb{N}$. When $l \leq \lfloor 1/w \rfloor$, then typically $w \sum_{j=1}^l \phi(X_{j-1}^y) B_j + \mathcal{O}(w^2 l) \lesssim w^{1/2}$, and so, if A is e.g. a sufficiently large interval, the time spent in A by the process X^x after $\lfloor 1/w \rfloor$ steps, is well approximated by the length of A . This argument is made rigorous in the proof of Lemma 26.

The proof of Proposition 15 consists then of two steps. First, Lemma 26 is used to show that $\frac{w^2}{n} R_n$ can be replaced by the deterministic exponent

$$\gamma(w) := \mathbb{E}(B_1^2) \cdot \int_{\mathbb{T}} r(x) dx \cdot w^2 = \frac{\pi^2 \mathbb{E}(B_1^2)}{8} w^2,$$

without introducing too large errors in $\mathbb{E}(1/\Gamma_n)$ provided that $wn \rightarrow \infty$. The number $\gamma(w)$ corresponds actually to the *Lyapunov exponent* of the matrices Q_n in the limit $w \rightarrow 0$, as first computed by Matsuda and Ishii [37]. Secondly, Freedman's bound (5.9) is used to obtain a sharp bound of the type $\mathbb{E}(e^{-wS_n}) \lesssim e^{c'w^2n}$. It then just turns out that c' is smaller than $\gamma(w)/w^2$, so that Proposition 15 is ultimately due to a lucky numerical coincidence.

Lemma 26. *There exists a constant $C > 0$ such that, for every $w > 0$ small enough and for every $u \in C^1(\mathbb{T})$,*

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} \mathbb{E} \left| w \sum_{j=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} u(X_j^x) - \int_{\mathbb{T}} u(y) dy \right| \leq C \|\partial_x u\|_{\infty} w^{1/2}. \quad (5.59)$$

Proof. Let $x \in \mathbb{T}$, and let $j \in \{1, \dots, \lfloor 1/w \rfloor\}$. Let $I_j := [x + w(j-1), x + wj[$, and let $\tilde{x}_j \in I_j$ be such that $\int_{I_j} u(x) dx = w u(\tilde{x}_j)$. So

$$\mathbb{E} \left| w \sum_{j=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} u(X_j^x) - \int_{\mathbb{T}} u(y) dy \right| = \mathbb{E} \left| w \sum_{j=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} [u(X_j^x) - u(\tilde{x}_j)] \right| \leq \|\partial_x u\|_{\infty} w \sum_{j=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} \mathbb{E} |X_j^x - \tilde{x}_j|. \quad (5.60)$$

Then, since $j \leq \lfloor 1/w \rfloor$, it follows from definitions (5.32) and (5.31), that $X_j^x - \tilde{x}_j = w^{1/2} M_j + \mathcal{O}(w)$, with $M_j = w^{1/2} \sum_{i=1}^j \phi(X_{i-1}^x) B_i$. Therefore, Azuma's bound (5.9) implies that

$$\mathbb{E} |X_j^x - \tilde{x}_j| = w^{1/2} \mathbb{E} |M_j| + \mathcal{O}(w) \leq w^{1/2} e^{\frac{w}{2} C j} + \mathcal{O}(w) \lesssim w^{1/2}, \quad (5.61)$$

where $C = \max(-b_-, b_+) \|\phi\|_{\infty}$. Inserting (5.61) in (5.60) finishes the proof. $\square$

Proof of Proposition 15. Let us first slightly simplify the problem. Any sum of k terms in the exponent in (5.39) is bounded from below by a negative constant, as long as $kw \lesssim 1$. Therefore it is enough to show the bound $\mathbb{E}(1/\Gamma_n^x) \lesssim e^{-cw^2 n}$ for any $n \in \mathbb{N}_0$ such that $n = \lfloor 1/w \rfloor m$ for some $m \in \mathbb{N}_0$, and one will further assume this to be the case. Moreover, let us fix some $x \in \mathbb{T}$, and denote X_n^x and Γ_n^x by X_n and Γ_n respectively. One can check that none of the estimates below depends on x .

We then begin the proof itself by decomposing the second sum in the exponent of (5.39) as follows

$$w^2 \sum_{i=1}^n r(X_{i-1}) B_i^2 = w \sum_{k=1}^m w \sum_{i=(k-1)\lfloor 1/w \rfloor + 1}^{k\lfloor 1/w \rfloor} r(X_{i-1}) B_i^2 = w \sum_{k=1}^m (Z_k + \gamma(X_{(k-1)\lfloor 1/w \rfloor})), \quad (5.62)$$

where

$$Z_k := w \sum_{i=(k-1)\lfloor 1/w \rfloor + 1}^{k\lfloor 1/w \rfloor} r(X_{i-1}) B_i^2 - \gamma(X_{(k-1)\lfloor 1/w \rfloor}), \quad (5.63a)$$

$$\gamma(y) := \mathbb{E} \left\{ w \sum_{i=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} r(X_{i-1}^y) B_i^2 \right\}. \quad (5.63b)$$

for any $y \in \mathbb{T}$. The motivation behind the decomposition is twofold. First, by Lemma 26 and because $\mathbb{E}(r(X_{i-1}) B_i^2) = \mathbb{E}(B^2) \mathbb{E}(r(X_{i-1}))$ for any $i \in \mathbb{N}_0$, one has

$$\gamma(y) = \mathbb{E}(B^2) \mathbb{E} \left\{ w \sum_{i=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} r(X_{i-1}^y) \right\} \geq \mathbb{E}(B^2) \int_{\mathbb{T}} r(z) dz - \beta_0 w^{1/2} =: \tilde{\gamma}_-, \quad (5.64)$$

where $\beta_0 > 0$ is a finite constant that does not depend on y . Secondly, $(Z_k)_{k \geq 1}$ constitutes a sequence of bounded martingale increments in the sparse filtration $(\mathcal{F}'_k)_{k \geq 1}$, where

$$\mathcal{F}'_k := \mathcal{F}_{k\lfloor 1/w \rfloor} = \sigma(B_1, B_2, \dots, B_{k\lfloor 1/w \rfloor}).$$

Let $k \in \mathbb{N}_0$. The boundedness of Z_k is obvious as it is an average of $\lfloor 1/w \rfloor$ uniformly bounded increments, while the martingale property holds, since X is Markov :

$$\mathbb{E} \left(w \sum_{i=(k-1)\lfloor 1/w \rfloor + 1}^{k\lfloor 1/w \rfloor} r(X_{i-1}) B_i^2 \middle| \mathcal{F}'_{k-1} \right) (\omega) = \mathbb{E} \left\{ w \sum_{i=1}^{\lfloor 1/w \rfloor} r(X_{i-1}^{X_{(k-1)\lfloor 1/w \rfloor}(\omega)}) B_i^2 \right\} = \gamma(X_{(k-1)\lfloor 1/w \rfloor}(\omega)),$$

for a.e. $\omega \in \Omega^2$.

Using now (5.64) in (5.62), one gets the bound

$$\mathbb{E}(1/\Gamma_n) \leq e^{-\gamma_- w^2 n} \mathbb{E} \exp \left[-w \sum_{i=1}^n s(X_{i-1}) B_i - w \sum_{k=1}^m Z_k \right], \quad \text{with } \gamma_- := \tilde{\gamma}_- + \mathcal{O}(w), \quad (5.65)$$

where the $\mathcal{O}(w^3 n)$ -term inside the exponent (5.39) of Γ_n has been also absorbed into the constant γ_- .

To continue, let us then apply Hölder's inequality, to get

$$\mathbb{E}(1/\Gamma_n) \leq e^{-\gamma_- w^2 n} \left\{ \mathbb{E} \exp \left[-pw \sum_{i=1}^n s(X_{i-1}) B_i \right] \right\}^{1/p} \left\{ \mathbb{E} \exp \left[-p'w \sum_{k=1}^m Z_k \right] \right\}^{1/p'}, \quad (5.66)$$

where $p, p' \geq 1$ and $1/p + 1/p' = 1$. We can now bound both of these expectations with the help of Lemma 22. Azuma's exponential bound (5.9) is sufficient for the second factor :

$$\left\{ \mathbb{E} \exp \left[-p'w \sum_{k=1}^m Z_k \right] \right\}^{1/p'} \leq \left\{ \exp \left[\frac{(-p'w)^2}{2} Cnw \right] \right\}^{1/p'} \leq e^{\beta_2 p' w^3 n}, \quad (5.67)$$

for some constants $C, \beta_2 < +\infty$. In order to handle the first expectation of (5.66), we note first that the martingale $(M_i)_{i \geq 0}$ defined by $M_0 = 0$ and $M_i = \sum_{k=1}^i s(X_{k-1}) B_k$ for $i \in \mathbb{N}_0$ has bounded increments. Next, since $\mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}(B^2) \cdot s^2(X_{i-1})$ for every $i \in \mathbb{N}_0$, we see that for sufficiently small $\varepsilon > 0$:

$$V_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}(B^2) \sum_{i=1}^n s^2(X_{i-1}) \leq (1 - \varepsilon) \mathbb{E}(B^2) \|s\|_\infty^2 n.$$

Indeed, because $X_i - X_{i-1} \sim w$ for every $i \in \mathbb{N}_0$, because s is continuous and because $s(0) = 0$, one concludes that there exists some $\varepsilon > 0$ such that

$$|\{0 \leq i \leq n-1 : |s^2(X_i)| \leq \|s\|_\infty^2 / 2\}| \geq 2\varepsilon n.$$

Applying then Freedman's bound (5.9) with $v_n := \mathbb{E}(B^2)(1 - \varepsilon) \|s\|_\infty^2 n$ and $|M_i - M_{i-1}| \leq C_M =: c$ yields

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbb{E} \exp \left[(-wp) \sum_{i=1}^n s(X_{i-1}) B_i \right] \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \exp \left[\kappa_{C_M} (-wp) \mathbb{E}(B^2) (1 - \varepsilon) \|s\|_\infty^2 n \right] \right\}^{1/p} \\ &\leq e^{\frac{1}{2} p w^2 (1 - \varepsilon) \mathbb{E}(B^2) \|s\|_\infty^2 n + \beta_1 p^2 w^3 n}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

for some constant $\beta_1 < +\infty$.

Inserting (5.68) and (5.67) along with the estimate (5.64) for γ_- into (5.66) results into the final bound

$$\mathbb{E}(1/\Gamma_n) \leq e^{-\mathbb{E}(B^2) \left\{ \int_{\mathbb{T}} r(y) dy - p(1 - \varepsilon) \frac{\|s\|_\infty^2}{2} \right\} w^2 n + \beta_0 w^{5/2} n + \beta_1 p^2 w^3 n + \beta_2 p' w^3 n + C w^3 n}, \quad (5.69)$$

2. So here ω is not at all related the variable ω in the previous chapter

for some $C < +\infty$. Here the term inside curly brackets would disappear if $p = 1, \epsilon = 0$ because $\int_{\mathbb{T}} r(y) dy = \|s\|_{\infty}^2/2 = \pi^2/8$. However, since $\epsilon > 0$, we can take $p > 1$ such that it remains positive. Moreover, by taking w_0 sufficiently small the last three terms, regardless of the size of p' or $\beta_1, \beta_2, \beta_3, C$, can be made arbitrary small compared to the first part. $\square$

5.5 Potential theory

This section is devoted to the statement and the proof of Proposition 16 below. The derivation of the inequalities (5.70a) and (5.70b) constitutes a relatively classical problem in potential theory for Markov chains. However, it does not seem possible to apply classical results (see [12] and [13]), since the chain X is neither reversible, nor uniformly diffusive. In particular, little appears to be known on lower bounds of the type (5.70b) for non-reversible Markov chains. Results for Markov chains on a lattice [38], or for differential equations in non-divergence form [19], do not adapt straightforwardly (and maybe not at all) to our case. Instead, since we consider only the case $w \rightarrow 0$, it has been possible to treat the left hand side of (5.70a) and (5.70b) as a perturbation of quantities that can be computed explicitly. We are then able to handle both of these bounds with a single method.

Proposition 16. *Let $\kappa > 0$, and let $h \in C^1(\mathbb{T})$. There exist $K, K', w_0 > 0$ such that, for every $w \in]0, w_0]$, for every function $u \in L^1(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$, for every $x \in \mathbb{R}$, and for every $n \in \mathbb{N}$, one has*

$$\mathbb{E}(e^{w \sum_{k=1}^n h(X_{k-1}^x) B_k} u(X_n^x)) \leq \frac{K}{w\sqrt{n}} \int_{\mathbb{T}} u(y) dy \quad (wn \geq \kappa, w^2n \leq 1), \quad (5.70a)$$

$$\mathbb{E}(e^{w \sum_{k=1}^n h(X_{k-1}^x) B_k} u(X_n^x)) \geq K' \int_{\mathbb{T}} u(y) dy \quad (1/2 \leq w^2n \leq 1). \quad (5.70b)$$

The content of Proposition 16 is twofold. First, it describes the approach to equilibrium of the chain X . To see this, let us consider the case $h = 0$, and let us take some subset $A \subset \mathbb{T}$. Equation (5.70a) implies that $\mathbb{P}(X_n^x \in A) \lesssim \max\{1/(w\sqrt{n}), 1\} \text{Leb}(A)$ when $wn \geq \kappa$, whereas (5.70a) and (5.70b) imply that $\mathbb{P}(X_n^x \in A) \sim \text{Leb}(A)$ when $w^2n \geq 1/2$. This is obvious when $w^2n \leq 1$. But, if $w^2n > 1$, one can write $n = n_1 + n_2$ such that $\lceil n_2 w^2 \rceil = 1$, and

$$\mathbb{E}u(X_n^x) = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}(u(X_n^x) | X_{n_1}^x = y) \mathbb{P}(X_{n_1}^x \in dy).$$

The result follows since, if $y \in \mathbb{T}$, one has by definition $\mathbb{E}[u(X_n^x) | X_{n_1}^x = y] = \mathbb{E}u(X_{n_2}^y)$, and then $\mathbb{E}u(X_{n_2}^y) \sim \|u\|_1$ by (5.70).

Secondly, Proposition 16 asserts that the result obtained for $h = 0$ is not destroyed when some specific perturbation is added ($h \neq 0$). If $h \neq 0$ but if $u = 1$, results (5.70a) and (5.70b) are trivial. Indeed, by Azuma's inequality (5.11), one finds some $C > 0$ such that, for every $n \in \mathbb{N}$ and for every $a > 0$, one has

$$\mathbb{P}\left(e^{-a} \leq e^{w \sum_{k=1}^n h(X_{k-1}^x) B_k} \leq e^a\right) \geq 1 - 2e^{-\frac{Ca^2}{w^2n}}.$$

So, in general, one sees that the rare events where $e^{w \sum_{k=1}^n h(X_{k-1}^x) B_k}$ is very large or very close to zero may essentially be neglected.

Let now turn to the proof of Proposition 16. In the sequel, one assumes that $\kappa > 0$ and $h \in C^1(\mathbb{T})$ are given, $w \in]0, w_0]$, where w_0 is small enough to make all our assertions valid; all the constants introduced below may depend on κ and h and w_0 . We will also make use of the following notation : for $A \subset \mathbb{T}$ and $1 \leq p \leq \infty$ we set

$$L_A^p(\mathbb{T}) := \{u \in L^p(\mathbb{T}) : \text{supp}(u) \subset A\}.$$

Let us introduce a continuous operator T on $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, by setting

$$Tu(x) := \mathbb{E}[(1 + wh(x)B)(u \circ f_B)(x)] = \int_{b_-}^{b_+} (u \circ f_b)(x) (1 + wh(x)b) \tau(b) db. \quad (5.71)$$

Since $\mathbb{E}(B) = \int b \tau(b) db = 0$, one has $T1 = 1$ and $\|T\|_{\infty \rightarrow \infty} = 1$. Moreover, for w small enough, the operator T maps positive functions to positive functions, and may thus be seen as the transition operator of some Markov chain on the circle. But, for every $b \in [b_-, b_+]$ and every $x \in \mathbb{T}$, one has

$$e^{wh(x)b} = (1 + wh(x)b) \cdot e^{\mathcal{O}(w^2)}.$$

Therefore, for every $u \in L^1(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$, for every $n \in \mathbb{N}$ satisfying $w^2 n \leq 1$, and for almost every $x \in \mathbb{T}$, one has

$$T^n u(x) \sim \mathbb{E}(e^{w \sum_{k=1}^n h(X_{k-1}^x) B_k} u(X_n^x)). \quad (5.72)$$

Let $y \in \mathbb{T}$. The proof of Proposition 16 rests on the fact that, when T^n acts on a function $u \in L_{B(y, w^2)}^1(\mathbb{T})$, it can be well approximated by an operator $S_{y,n}$ which can be explicitly studied. In order to define $S_{y,n}$, let us first introduce the convolution operator T_y on $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, by setting

$$T_y u(x) := \int (u \circ g_b)(x, y) (1 + wh(y)b) \tau(b) db, \quad (5.73)$$

where

$$g_b(x, y) := x + \vartheta + \Phi(y, b) = x + w + w\phi(y)b + w^2\psi(y)b^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad (5.74)$$

with Φ defined as in (5.30), and ϕ and ψ defined as in (5.31b) and (5.31c). Then, one sets $S_{y,0} := \text{Id}$, and defines each $n \in \mathbb{N}$

$$S_{y,n} := T_{y-nw} \cdots T_{y-w}. \quad (5.75a)$$

$$R_y := T - T_y. \quad (5.75b)$$

The core of our approximation scheme is described by equation (5.101) below, but let us now describe it heuristically. Let $z \in \mathbb{T}$, and let $u \in L_{B(z, w^2)}^1(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$. The support of $u \circ f_b$ should be

centered at $z - w$, and so $g_b(\cdot, z - w)$ is likely to be the best approximation of f_b , among all the maps $g_b(\cdot, y)$ ($y \in \mathbb{T}$). Therefore, one can think of T_z as one of the best approximations of T among all the operators T_y ($y \in \mathbb{T}$). One writes

$$T^n u = T^{n-1} R_{z-w} u + T^{n-1} T_{z-w} u, \quad (5.76)$$

where R_{z-w} is defined by (5.75b). The first term in the right hand side of (5.76) can be bounded by means of our estimates on R_y ($y \in \mathbb{T}$), in Lemmas 28 or 29 below. One is thus left with the second term. From the definition (5.73) of T_y ($y \in \mathbb{T}$), the function $T_{z-w} u$ will be approximately centered at $z - w$. One now approximates T by T_{z-2w} and one obtains

$$T^{n-1} T_{z-w} u = T^{n-2} R_{z-2w} T_{z-w} u + T^{n-2} T_{z-2w} T_{z-w} u.$$

Again, one is left with the second term. But, continuing that way, one finally needs to handle the term $TT_{z-(n-1)w} \dots T_{z-w} u$, and one arrives to

$$TT_{z-(n-1)w} \dots T_z u = R_{z-nw} T_{z-(n-2)w} \dots T_{z-w} u + T_{z-nw} \dots T_{z-w} u, \quad (5.77)$$

By the definition (5.75a), one has $T_{z-nw} \dots T_{z-w} u = S_{z,n} u$. So, this time, the second term in (5.77) can be bounded from above and below by some explicit estimates contained in Lemma 27 below. By means of Lemmas 28 and 29, one thus needs to show that the sum of the terms containing an operator of the form R_y ($y \in \mathbb{T}$) do not destroy the estimate on $S_{z,n} u$.

The rest of the section is organized as follows. In Lemma 27, one obtains some bounds on the functions $S_{y,n} u$ for $u \in L^1_{B(y,w^2)}(\mathbb{T})$. These bounds show in some sense that, when $\|u\|_1 = 1$, $S_{y,n} u$ has a shape very similar to a Gaussian of variance nw^2 centered at y . The proof turns out to be a straightforward computation, since the operators T_y are diagonal in Fourier space. Next, Lemmas 28 and 29 give us bounds on R_y . Lemma 29 is actually not crucial, and needs only to be used when $n < 8$, since then the function $S_{y,n} u$ may not be smooth enough for Lemma 28 to be applied. Some easy results about the localization of the functions $T^n u$ and $S_{y,n} u$, for $u \in L^1_{B(y,Cw)}(\mathbb{T})$, are then given in Lemma 30. Finally, the proof of Proposition 16 is given.

Let us notice that, in Lemma 27, and consequently in the proof of Proposition 16, one has to distinguish between the case where $y \sim 0$, and the case where y is away from 0. This comes from the lack of diffusivity of the chain X around 0.

1. Preliminary lemmas. The proof of the following lemma is deferred to §3, at the end of this section, since it is lengthy but conceptually easy.

Lemma 27. *Let $\epsilon > 0$. There exists $K > 0$ such that, for every $n \in \mathbb{N}$ satisfying $8 \leq n \leq w^{-2}$, for*

every $y \in \mathbb{T} - B(0, \epsilon)$, and for every $u \in L^1_{B(y, w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$, one has $S_{y,n}u \in C^2(\mathbb{T})$ and, for every $x \in \mathbb{T}$,

$$|\partial_x^l S_{y,n}u(x)| \leq \frac{K\|u\|_1}{(w\sqrt{n})^{(l+1)}}, \quad l = 0, 1, 2, \quad (5.78a)$$

$$|\sin^k \pi(x + wn - y) \cdot \partial_x^k S_{y,n}u(x)| \leq \frac{K\|u\|_1}{w\sqrt{n}}, \quad k = 1, 2. \quad (5.78b)$$

Moreover, when ϵ is small enough, there exists $K'(\epsilon) > 0$, with $K'(\epsilon) \rightarrow \infty$ as $\epsilon \rightarrow 0$, such that, for every $n \in \mathbb{N}$ satisfying $\epsilon \leq w^2n \leq 2\epsilon$, for every $x, y \in \mathbb{T}$, and for every $u \in L^1_{B(y, w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$,

$$|S_{y,n}u(x)| \geq K'(\epsilon)\|u\|_1 \quad \text{when} \quad |x + nw - y|_{\mathbb{T}} \leq 10\epsilon. \quad (5.79)$$

Lemma 28. *There exists $K > 0$ such that, for every $u \in C^2(\mathbb{T})$ and every $y \in \mathbb{T}$, one has*

$$\begin{aligned} \|R_y u\|_\infty \leq & Kw^2 \left\{ \|\sin \pi(\cdot - y - w) \cdot u'\|_\infty + w\|u'\|_\infty \right. \\ & \left. + \|\sin^2 \pi(\cdot - y - w) \cdot u''\|_\infty + w\|u''\|_\infty \right\}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Proof. One takes some $u \in C^2(\mathbb{T})$, and one fixes $x, y \in \mathbb{T}$. From the definitions (5.71) and (5.73), one has

$$\begin{aligned} R_y u(x) &\equiv (T - T_y)u(x) = \int ((u \circ f_b)(x) - (u \circ g_b)(x, y)) (1 + wh(x)b) \tau(b) db \\ &\quad + w(h(x) - h(y)) \int (u \circ g_b)(x, y) b \tau(b) db \\ &=: A_1 + A_2. \end{aligned}$$

It is enough to bound $|A_1|$ and $|A_2|$ by the right hand side of (5.80).

Let us first bound $|A_1|$. By the mean value theorem, and the definitions (5.31) and (5.74) of f_b and g_b , one has

$$(u \circ f_b)(x) - (u \circ g_b)(x, y) = u'(x + w + \xi_1) \left(w[\phi(x) - \phi(y)]b + w^2[\psi(x) - \psi(y)]b^2 + \mathcal{O}(w^3) \right),$$

where $\xi_1 \equiv \xi_1(b)$ is such that

$$|\xi_1| \leq w|\phi(x) - \phi(y)| + \mathcal{O}(w^2). \quad (5.81)$$

By the mean value theorem again, one has

$$u'(x + w + \xi_1) = u'(x + w) + u''(x + w + \xi_2)\xi_1,$$

where $\xi_2 \equiv \xi_2(b)$ is such that $|\xi_2| \leq |\xi_1|$.

Therefore, setting $\tilde{\tau}(b) = (1 + wh(x)b) \tau(b)$, one can write A_1 as

$$\begin{aligned} A_1 &= u'(x + w) \int \left(w[\phi(x) - \phi(y)]b + w^2[\psi(x) - \psi(y)]b^2 + \mathcal{O}(w^3) \right) \tilde{\tau}(b) db \\ &\quad + \int u''(x + w + \xi_2(b)) \xi_1(b) (w[\phi(x) - \phi(y)]b + \mathcal{O}(w^2)) \tilde{\tau}(b) db. \end{aligned}$$

One has

$$|\phi(x) - \phi(y)| \lesssim |\sin \pi(x - y)| \quad \text{and} \quad |\psi(x) - \psi(y)| \lesssim |\sin \pi(x - y)|.$$

So, taking into account the bound (5.81) and the fact that $\int b\tau(b)db = 0$, one gets

$$\begin{aligned} |A_1| &\lesssim w^2 |u'(x + w)| |\sin \pi(x - y)| + w^3 \|u'\|_\infty \\ &\quad + w^2 \int |u''(x + w + \xi_2(b))| \sin^2 \pi(x - y) \tilde{\tau}(b) db + w^3 \|u''\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.82)$$

But one has $\sin^2 \pi(x - y) \leq \sin^2 \pi(x + \xi_2 - y) + \mathcal{O}(w)$. So, inserting this last bound in (5.82), one sees that $|A_1|$ is bounded by the right hand side of (5.80).

Let us then bound $|A_2|$. By the mean value theorem and the definition (5.74) of g_b , one writes

$$(u \circ g_b)(x, y) = u(x + w) + u'(x + w + \xi) \mathcal{O}(w),$$

where $\xi \equiv \xi(b) = \mathcal{O}(w)$. Therefore, taking into account that $\int b\tau(b)db = 0$ and that $|h(x) - h(y)| \lesssim |\sin \pi(x - y)|$, one obtains

$$\begin{aligned} |A_2| &\lesssim w^2 \int |\sin \pi(x - y)| \cdot |u'(x + w + \xi(b))| \cdot |b| \tau(b) db \\ &\lesssim w^2 (\|\sin \pi(\text{Id} - y - w) \cdot u'\|_\infty + w \|u'\|_\infty). \end{aligned}$$

This finishes the proof. $\square$

Lemma 29. *Let $K, \epsilon > 0$. Let $y \in \mathbb{T}$ be such that $|y|_{\mathbb{T}} \geq \epsilon$. Then there exists $K' > 0$ such that, for every $u \in L^1_{B(y, Kw)}(\mathbb{T})$, one has*

$$\|R_y u\|_1 \leq K' w \|u\|_1. \quad (5.83)$$

Moreover $Tu \in L^\infty(\mathbb{T})$, and one has

$$\|Tu\|_\infty \leq K' w^{-1} \|u\|_1. \quad (5.84)$$

Proof. The constants introduced in this proof may depend on K and ϵ . Let $u \in L^1_{B(y, Kw)}(\mathbb{T})$. One writes

$$Tu(x) = \int_{B(y, Kw)} t(x, z) u(z) dz \quad \text{and} \quad T_y u(x) = \int_{B(y, Kw)} t_y(x, z) u(z) dz, \quad (5.85)$$

where the functions t and t_y are obtained by performing a change of variables in the definitions (5.71) and (5.73) of T and T_y . Setting $F_x(b) := f_b(x)$ and $G_x(b) := g_b(x, y)$, where f_b and g_b are defined in (5.31) and (5.74), one obtains

$$\begin{aligned} t(x, z) &= (1 + wh(x)F_x^{-1}(z)) \tau(F_x^{-1}(z)) \partial_z F_x^{-1}(z), \\ t_y(x, z) &= (1 + wh(y)G_x^{-1}(z)) \tau(G_x^{-1}(z)) \partial_z G_x^{-1}(z). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Let $z \in B(y, Kw)$ be given. Let us see that $t(\cdot, z)$ and $t_y(\cdot, z)$ are well defined functions. The support of $t(\cdot, z)$ (respectively of $t_y(\cdot, z)$) is the support of $(\tau \circ F_{(\cdot)}^{-1})(z)$ (resp. of $(\tau \circ G_{(\cdot)}^{-1})(z)$). The support of $(\tau \circ F_{(\cdot)}^{-1})(z)$ is made of all the x such that

$$b_- \leq F_x^{-1}(z) \leq b_+ \Leftrightarrow f_{b_-}(x) \leq z \leq f_{b_+}(x) \Leftrightarrow f_{b_+}^{-1}(z) \leq x \leq f_{b_-}^{-1}(z).$$

One obtains a similar relation for the support of $(\tau \circ G_{(\cdot)}^{-1})(z)$ and one gets therefore

$$\text{supp}(t(\cdot, z)), \text{supp}(t_y(\cdot, z)) \subset B(z, Cw) \subset B(y, C'w).$$

The hypothesis $|y|_{\mathbb{T}} \geq \epsilon$ ensures that the maps F_x and G_x are invertible when $x \in B(y, C'w)$, and actually that

$$\partial_b F_x(b) \gtrsim w \quad \text{and} \quad \partial_b G_x(b) \gtrsim w. \quad (5.87)$$

This shows in particular that $t(\cdot, z)$ and $t_y(\cdot, z)$ are bounded functions.

Let us now show (5.83). Taking (5.86) into account, one has, from the definition (5.75b) of R_y ,

$$\|R_y u\|_1 \leq \int_{B(y, Kw)} |u(z)| dz \int_{B(y, C'w)} |t(x, z) - t_y(x, z)| dx. \quad (5.88)$$

It is therefore enough to show that, for every $z \in B(y, Kw)$, one has

$$\int_{B(y, C'w)} |t(x, z) - t_y(x, z)| dx = \mathcal{O}(w). \quad (5.89)$$

Let us take some $z \in B(y, Kw)$ and some $x \in B(y, C'w)$. Since $b_- \leq F_x^{-1}(z)$, $G_x^{-1}(z) \leq b_+$, since τ is bounded, and since (5.87) holds, one finds, starting from (5.86), that

$$|t(x, z) - t_y(x, z)| \lesssim |\partial_z F_x^{-1}(z) - \partial_z G_x^{-1}(z)| + w^{-1} |\tau(F_x^{-1}(z)) - \tau(G_x^{-1}(z))| + C. \quad (5.90)$$

For every $b \in [b_-, b_+]$, one has $\partial_b F_x(b) = w\phi(x) + \mathcal{O}(w^2)$ and $\partial_b G_x(b) = w\phi(y) + \mathcal{O}(w^2)$. Therefore

$$\begin{aligned} |\partial_z F_x^{-1}(z) - \partial_z G_x^{-1}(z)| &\leq \left| \frac{1}{w\phi(x) + \mathcal{O}(w^2)} - \frac{1}{w\phi(y) + \mathcal{O}(w^2)} \right| \\ &\lesssim w^{-1} |\phi(y) - \phi(x) + \mathcal{O}(w)| \lesssim 1, \end{aligned} \quad (5.91)$$

since $|y - x| = \mathcal{O}(w)$. Inserting thus (5.91) in (5.90), and then (5.90) in (5.89), one finds

$$\begin{aligned} \int_{B(y, Cw)} |t(x, z) - t_y(x, z)| dx &\lesssim w^{-1} \int_{B(y, Cw)} |\tau(F_x^{-1}(z)) - \tau(G_x^{-1}(z))| dx + \mathcal{O}(w) \\ &=: w^{-1} I + \mathcal{O}(w). \end{aligned} \quad (5.92)$$

It remains thus to show that $I = \mathcal{O}(w^2)$. For this, let us define

$$D_1 := \{x \in \mathbb{T} : b_- \leq F_x^{-1}(z) \leq b_+\}, \quad \text{and} \quad D_2 := \{x \in \mathbb{T} : b_- \leq G_x^{-1}(z) \leq b_+\}.$$

One writes

$$I = \int_{D_1 \cap D_2} (\dots) + \int_{(D_1 \cap D_2)^c} (\dots) =: I_1 + I_2.$$

First, when $x \in D_1 \cap D_2$, one uses the fact that $\tau \in C^1([b_-, b_+])$, that

$$|F_x^{-1}(z) - G_x^{-1}(z)| = \left| \frac{z - x - w}{w\phi(x)} - \frac{z - x - w}{w\phi(y)} + \mathcal{O}(w) \right| = \mathcal{O}(w),$$

since $|z - x - w| = \mathcal{O}(w)$ and $|\phi(y) - \phi(x)| = \mathcal{O}(w)$, and that $\text{Leb}(D_1 \cap D_2) = \mathcal{O}(w)$, to conclude that $I_1 = \mathcal{O}(w^2)$. Next, when $x \in (D_1 \cap D_2)^c$, one has $t(x, z) = t_y(x, z) = 0$, except on $D_1 \Delta D_2$. But, for every $b \in [b_-, b_+]$, one has $|f_b(x) - g_b(x, y)| = \mathcal{O}(w^2)$, since $|x - y| = \mathcal{O}(w)$. So, one has $\text{Leb}(D_1 \Delta D_2) = \mathcal{O}(w^2)$, and thus $I_2 = \mathcal{O}(w^2)$.

Let us finally show (5.84). From (5.85), one has that $|Tu(x)| \leq \sup_{z \in B(y, Kw)} |t(x, z)|$. The relations (5.86) and (5.87) allow us to obtain the result. $\square$

In order to prove the next lemma, we introduce the adjoint T^* of T with respect to the Lebesgue measure. This operator is defined on $L^p(\mathbb{T})$ ($1 \leq p \leq \infty$) and is such that, for every $u \in L^p(\mathbb{T})$ and every $v \in L^{p'}(\mathbb{T})$, with $1/p + 1/p' = 1$, one has

$$\int_{\mathbb{T}} v T^* u \, dx = \int_{\mathbb{T}} u T v \, dx. \quad (5.93)$$

From the definition (5.71) of T , one concludes that

$$T^* u(x) = \int_{b_-}^{b_+} (u \circ f_b^{-1})(x) [1 + w(h \circ f_b^{-1})(x)b] \partial_x f_b^{-1}(x) \tau(b) db. \quad (5.94)$$

Therefore, when $u \geq 0$, one has

$$T^* u(x) \geq e^{-\mathcal{O}(w)} \int (u \circ f_b^{-1})(x) \tau(b) db. \quad (5.95)$$

For $z \in \mathbb{R}$, let us define the chain $Y = (Y_n^z : n \in \mathbb{N}_0)$ by $Y_0^z := z$ and

$$Y_n^z := f_{B_n}^{-1}(Y_{n-1}^z) = Y_{n-1}^z - w - w\phi(Y_{n-1}^z)B_n + \mathcal{O}(w^2). \quad (5.96)$$

Lemma 30. *Let $K > 0$. There exist $K_2 \geq K_1 > 0$ such that, for every $n \in \mathbb{N}$, for every $y \in \mathbb{T}$, and for every $u \in L_{B(y, Kw)}^1(\mathbb{T})$, one has*

$$\text{supp}(T^n u), \text{supp}(S_{y,n} u) \subset [y - K_2 wn, y - K_1 wn]. \quad (5.97)$$

Moreover, for every $R > 0$ large enough, there exists $K' > 0$ such that, for every $n \in \mathbb{N}$ satisfying $wn \leq 1$, for every $y \in \mathbb{T}$, and for every $u \in L_{B(y, w)}^1(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$, one has

$$\int_{B(y-nw, R\sqrt{w})} T^n u(z) dz \geq K' \|u\|_1. \quad (5.98)$$

Proof. Let us first show (5.97). Let us consider the case of $T^n u$; the case of $S_{y,n} u$ is strictly analogous. From the definition (5.71), one sees that

$$\text{supp}(T^n u) \subset [f_{b_+}^{-n}(y - Kw/2), f_{b_-}^{-n}(y + Kw/2)].$$

This implies the result, since, by the definition (5.31) of f_b , one has, for every $x \in \mathbb{T}$ and every $b \in [b_-, b_+]$,

$$(1 + b_-)w - \mathcal{O}(w^2) \leq x - f_b^{-1}(x) \leq (1 + b_+)w + \mathcal{O}(w^2).$$

Let us then show (5.98). Let $u \in L^1_{B(y,w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$, let $R > 0$, and let $n \in \mathbb{N}$ be such that $nw \leq 1$. From the definition (5.93) of the adjoint T^* , one has

$$\int_{B(y-nw, R\sqrt{w})} T^n u(z) dz = \int_{B(y,w)} T^{*n} \chi_{B(y-nw, R\sqrt{w})}(z) u(z) dz.$$

It is therefore enough to show that, for every $z \in B(y, w)$, one has $T^{*n} \chi_{B(y-nw, R\sqrt{w})}(z) \gtrsim 1$, if R is large enough. But, since $wn \leq 1$, (5.95) implies that

$$\begin{aligned} T^{*n} \chi_{B(y-nw, R\sqrt{w})}(z) &\gtrsim \mathbf{E}((\chi_{B(y-nw, R\sqrt{w})} \circ f_{B_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{B_1}^{-1})(z)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(|Y_n^z - (y - nw)| \geq R\sqrt{w}), \end{aligned} \quad (5.99)$$

where Y is defined in (5.96). Therefore, since $|z - y| = \mathcal{O}(w)$ and since $w^2 n = \mathcal{O}(w)$, one obtains, from the definition (5.96) of Y , and from Azuma's inequality (5.11), that

$$\mathbf{P}(|Y_n^z - (y - nw)| \geq R\sqrt{w}) = \mathbf{P}\left(\left|w \sum_{k=1}^n \phi(Y_{k-1}^z) + \mathcal{O}(w)\right| \geq R\sqrt{w}\right) \leq 2e^{-\frac{cR^2}{nw}}. \quad (5.100)$$

The proof is finished by taking R large enough, and inserting (5.100) in (5.99). $\square$

2. Proof of Proposition 16. Let $n \geq 9$ be such that $nw^2 \leq 1$. Let us make three observations. First, by (5.72), it is enough to show the proposition with $\mathbf{E}_x(e^{w \sum_{k=1}^n h(X_{k-1}) B_k} u(X_n))$ replaced by $T^n u(x)$ in (5.70a) and (5.70b).

Second, it is enough to prove the proposition for functions in $L^1_{B(y,w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$ for every $y \in \mathbb{T}$. So, throughout the proof, one assumes that $y \in \mathbb{T}$ is given, and the symbol v denotes a function in $L^1_{B(y,w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$.

Third, it is enough to show (5.70b) for some n' satisfying $w^2 n' \leq 1/2$. Indeed, let us now assume that (5.70b) is shown for this n' , and let n be such that $1/2 \leq w^2 n \leq 1$. From the definition (5.71), one sees that, if $u_1 \geq u_2$, one has $Tu_1 \geq Tu_2$. So, one writes $n = n' + n''$ and, for every $u \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, one gets $T^n u(x) = T^{n''} T^{n'} u \gtrsim \|u\|_1 T^{n''} 1 \sim \|u\|_1$, where the fact that $T^{n''} 1 \sim 1$ directly follows from the definition (5.71) of T , Azuma's bound (5.9), and the hypothesis $w^2 n \leq 1$.

The proof is now divided into three steps, but the core is entirely contained in the first one.

Step 1 : approximating T^n by $S_{y,n}$: One here shows the bounds (5.70a) and (5.70b) under two particular assumptions :

1. One supposes that $|y|_{\mathbb{T}} \geq \epsilon_1$, for some $\epsilon_1 > 0$. The constants introduced below may depend on ϵ_1 .
2. Only for (5.70b), one assumes that n is such that $\epsilon_2 \leq n \leq 2\epsilon_2$ and that $|x + nw - y|_{\mathbb{T}} \leq 10\epsilon_2$ for some $\epsilon_2 > 0$ small enough.

By the definition (5.75a) of $S_{y,n}$, one can write

$$\begin{aligned} T^n v &= S_{y,n} v + \sum_{k=1}^8 T^{n-k} R_{y-kw} S_{y,k-1} v + \sum_{k=9}^{n-1} T^{n-k} R_{y-kw} S_{y,k-1} v \\ &=: S_{y,n} v + Q_1 + Q_2. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Let us bound $\|Q_1\|_{\infty}$. Let $k \in \mathbb{N}$ be such that $1 \leq k \leq 8$. By (5.97), one has

$$\text{supp}(R_{y-kw} S_{y,k-1} v) \subset B(y, Cw). \quad (5.102)$$

Remembering that $\|T\|_{\infty \rightarrow \infty} = 1$, one uses (5.83) and (5.84) to obtain that

$$\begin{aligned} \|Q_1\|_{\infty} &\leq \sum_{k=1}^8 \|T^{9-k} R_{y-kw} S_{y,k-1} v\|_{\infty} \lesssim w^{-1} \sum_{k=1}^8 \|R_{y-kw} S_{y,k-1} v\|_1 \\ &\lesssim \sum_{k=0}^7 \|S_{y,k-1} v\|_1 \lesssim \|v\|_1, \end{aligned} \quad (5.103)$$

where, for the last inequality, one has used the fact that $\|T_y\|_{1 \rightarrow 1} = 1$ for every $y \in \mathbb{T}$.

Let us bound $\|Q_2\|_{\infty}$. By Lemma 28 and estimates (5.78b) and (5.78a) in Lemma 27, one has, for $8 \leq k \leq w^{-2}$,

$$\|T^{n-k} R_{y-kw} S_{y,k-1} v\|_{\infty} \leq \|R_{y-kw} S_{y,k-1} v\|_{\infty} \lesssim w^2 \left\{ \frac{1}{w\sqrt{k}} + \frac{w}{w^2 k} + \frac{1}{w\sqrt{k}} + \frac{w}{w^3 k^{3/2}} \right\} \cdot \|v\|_1.$$

Therefore, since $w^2 n \leq 1$ by hypothesis, one gets

$$\|Q_2\|_{\infty} \lesssim (w\sqrt{n} + w \log n + C) \|v\|_1 \lesssim \|v\|_1. \quad (5.104)$$

So, from (5.101), (5.103) and (5.104), one has

$$\|T^n v - S_{y,n} v\|_{\infty} \leq C \|v\|_1,$$

where the constant C is independent of ϵ_2 . Therefore, in the particular case considered, (5.70a) follows from (5.78a) with $l = 0$, and (5.70b) follows from (5.79), if ϵ_2 has been chosen small enough.

Step 2 : proof of (5.70a) : By Step 1, (5.70a) is known to hold when $|y|_{\mathbb{T}} \geq \epsilon_1$, and one may now assume that $|y|_{\mathbb{T}} < \epsilon_1$. Moreover, one has still the freedom to take ϵ_1 as small as we want. One now uses the hypothesis $nw \geq \kappa$. Let $m \in \mathbb{N}$ be such that $mw = \epsilon'$, for some $\epsilon' \in]0, c/2]$. If ϵ_1 is small enough, it follows from (5.97) that one can chose ϵ' such that $\text{supp}(T^m u) \cap B(0, \epsilon_1) = \emptyset$. But the particular case considered in Step 1 implies that (5.70a) is valid for any function in $L^1_{\mathbb{T}-B(0, \epsilon_1)}(\mathbb{T})$, and thus one has

$$T^n v(x) = T^{n-m} T^m v(x) \lesssim \frac{\|T^m v\|_1}{w\sqrt{n-m}} \lesssim \frac{\|v\|_1}{w\sqrt{n}},$$

where the last inequality follows from the fact that $\|T\|_{1 \rightarrow 1} \leq e^{\mathcal{O}(w)}$, as can be seen from the definition (5.71).

Step 3 : proof of (5.70b) : One first will establish (5.70b) for n such that $n = \lfloor \epsilon_2 w^{-2} \rfloor$, and for x such that $|x + nw - y|_{\mathbb{T}} \leq 10\epsilon_2$. By Step 1, it is now enough to consider the case $|y|_{\mathbb{T}} < \epsilon_1$. Let now $m = \lfloor \frac{1}{2} w^{-1} \rfloor$, and let $R > 0$. If R is taken large enough, it follows from (5.98), and from the particular case of (5.70b) already established in Step 1, that

$$T^n v(x) \geq T^{n-m}(\chi_{B(y-mw, R\sqrt{w})} T^m v)(x) \gtrsim \int_{B(y-mw, R\sqrt{w})} T^m v(z) dz \gtrsim \|v\|_1.$$

One finally needs to get rid of the assumption $|x + nw - y|_{\mathbb{T}} \leq 10\epsilon_2$. One uses a classical technique [13]. One shows (5.70b) for $n = kq$, with $k \geq 1/18\epsilon_2$, and q such that $q = \lfloor \epsilon_2 w^{-2} \rfloor$. One already knows that

$$T^q v \gtrsim \chi_{B(y-qw, 10\epsilon_2)} \|v\|_1. \quad (5.105)$$

But one now will show that, for every $z \in \mathbb{T}$, and for every $s \in [\epsilon_2, 1]$, one has

$$T^q \chi_{B(z, s)} \gtrsim \epsilon_2 \chi_{B(z-qw, s+9\epsilon_2)}. \quad (5.106)$$

This will imply the result :

$$\begin{aligned} T^n v &= T^{kq} v \gtrsim T^{(k-1)q} \chi_{B(y-qw, 10\epsilon_2)} \|v\|_1 \\ &\gtrsim \dots \gtrsim \epsilon_2^{k-1} \chi_{B(y-kqw, (10+9(k-1))\epsilon_2)} \|v\|_1 \gtrsim \epsilon_2^{k-1} \|v\|_1. \end{aligned}$$

Let us thus show (5.106). Let $z \in \mathbb{T}$ and $s \in [\epsilon_2, 1]$. Let us write $T^q u(x) = \int t_q(x, z') u(z') dz'$ for any $u \in L^1(\mathbb{T})$. Relation (5.105) implies in fact that $t_q(x, \cdot) \gtrsim \chi_{B(x+qw, 10\epsilon_2)}(\cdot)$ (which may be formally checked by taking $u(x) = \delta(y - x)$). Therefore

$$\begin{aligned} T^q \chi_{B(z, s)}(x) &\gtrsim \int \chi_{B(x+qw, 10\epsilon_2)}(z') \cdot \chi_{B(z, s)}(z') dz' \\ &\gtrsim \epsilon_2 \chi_{B(z, s+9\epsilon_2)}(x + qw) = \epsilon_2 \chi_{B(z-qw, s+9\epsilon_2)}(x). \end{aligned}$$

This finishes the proof. $\square$

3. Proof of Lemma 27. Let us start with some conventions and definitions. First, for $k \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{T}$ we define :

$$y_k := y - kw, \quad \alpha_k := \phi(y_k), \quad \gamma_k := h(y_k).$$

Next, for $\epsilon > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$, one defines

$$H(\epsilon, n_0) := \{(y, n) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} : |y|_{\mathbb{T}} \geq \epsilon, n \geq n_0, w^2 n \geq \epsilon\}.$$

The operators T_{y_k} ($k \in \mathbb{N}$) are diagonal in Fourier space : for every $\xi \in \mathbb{Z}$, one has

$$\widehat{(T_{y_k} u)}(\xi) = e^{i2\pi w \xi} \lambda_k(w\xi) \cdot \hat{u}(\xi), \quad (5.107)$$

where λ_k is a function on $\mathbb{R}$ defined by

$$\begin{aligned} \lambda_k(z) &:= \int e^{i2\pi z w^{-1}(\vartheta - w + \Phi(y_k, b))} (1 + w\gamma_k b) \tau(b) db \\ &= \int e^{i2\pi z(\alpha_k b + \mathcal{O}(w))} (1 + w\gamma_k b) \tau(b) db. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Let $y \in \mathbb{T}$, let $u \in L^1_{B(y, w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$, and let $v \in L^1_{B(0, w^2)}(\mathbb{T}; \mathbb{R}_+)$ be such that

$$v(x) = u(x + y). \quad (5.109)$$

One writes

$$S_{y, n} u(x) = T_{y_n} \cdots T_{y_1} v(x - y) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi \xi(x + nw - y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi). \quad (5.110)$$

where Λ_n is a function on $\mathbb{R}$ defined by

$$\Lambda_n(\xi) := \prod_{j=1}^n \lambda_j(\xi w) \quad (n \geq 1). \quad (5.111)$$

But, if $(y, n) \in H(\epsilon, 8)$ for some $\epsilon > 0$, the right hand side of (5.110) represents actually a C^2 -function. This follows directly from (5.116) with $l = 0$ in Lemma 31 below, and the fact that $|\hat{v}(\xi)| \leq \|v\|_1$ for every $\xi \in \mathbb{Z}$.

Lemma 31. *Let $\epsilon > 0$. There exist $K, K', \epsilon' > 0$ such that, for every $(y, n) \in H(\epsilon, 1)$, and for every $\xi \in \mathbb{R}$ satisfying $|\xi w| \leq \epsilon'$, one has*

$$e^{-Knw^2\xi^2} \leq |\Lambda_n(\xi)| \leq e^{-K'nw^2\xi^2}, \quad (5.112)$$

$$|\Lambda'_n(\xi)| \leq Knw^2(1 + |\xi|)e^{-K'nw^2\xi^2}, \quad (5.113)$$

$$|\Lambda''_n(\xi)| \leq Knw^2(1 + nw^2 + nw^2\xi^2)e^{-K'nw^2\xi^2}, \quad (5.114)$$

$$|\arg(\Lambda_n(\xi))| \leq Knw^2(|\xi| + w|\xi|^3). \quad (5.115)$$

For every $\epsilon' > 0$, there exist $K, K' > 0$ such that, for every $(y, n) \in H(\epsilon, 1)$, and for every $\xi \in \mathbb{Z}$ satisfying $|\xi w| > \epsilon'$, one has

$$|\partial_\xi^l \Lambda_n(\xi)| \leq \frac{K(wn)^l}{(1 + K'|\xi w|)^{n/2}}, \quad l = 0, 1, 2. \quad (5.116)$$

Proof. The constants introduced in this proof may depend on ϵ . For the whole proof, one sets $z = \xi w$. Before starting, let us make two observations. First, one has $|\alpha_k| \lesssim 1$ and $|\gamma_k| \lesssim 1$ for every

$k \in \mathbb{N}_0$. Secondly, for every $(y, n) \in H(\epsilon, 1)$, there exists an integer $m \geq n/2$ independent of y , and a subsequence

$$\{k_j\} \equiv \{k_j : 1 \leq j \leq m\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.117)$$

such that $|\alpha_{k_j}| \gtrsim 1$.

Let us first prove the formulas (5.112) up to (5.115). One takes $(y, n) \in H(\epsilon, 1)$. A Taylor expansion in (5.108), taking into account that $\int \tau(b)db = 1$ and $\int b\tau(b)db = \mathbf{E}(B) = 0$, gives

$$\lambda_k(z) = 1 + i\mathcal{O}(w|z|) - \frac{(2\pi)^2}{2}z^2\alpha_k^2\mathbf{E}(B^2) + \mathcal{O}(wz^2) + i\mathcal{O}(|z|^3) + \mathcal{O}(z^4),$$

as $z \rightarrow 0$. Therefore, one has

$$|\lambda_k(z)| = e^{-\frac{(2\pi)^2}{2}z^2\alpha_k^2\mathbf{E}(B^2) + \mathcal{O}(z^2w + |z|^3)}, \quad (5.118)$$

$$|\arg(\lambda_k(z))| = \mathcal{O}(|z|w + |z|^3), \quad (5.119)$$

as $z \rightarrow 0$. Similarly, a Taylor expansion in (5.108) gives

$$|\partial_z \lambda_k(z)| = \mathcal{O}(w + |z|), \quad (5.120)$$

$$|\partial_z^2 \lambda_k(z)| = \mathcal{O}(1), \quad (5.121)$$

as $z \rightarrow 0$.

First, by (5.118) with $z = \xi w$, and by the definition (5.111) of Λ_n , one obtains

$$|\Lambda_n(\xi)| = \exp \left[-\frac{1}{2}(\xi w)^2 \mathbf{E}(B^2) \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \mathcal{O}(n(\xi w)^2(|\xi w| + w)) \right] \quad \text{as } \xi w \rightarrow 0.$$

This shows (5.112), taking into account the two observations at the beginning of this proof. Next, with $z = \xi w$, one has

$$\partial_\xi \Lambda_n(\xi) = w \sum_{j=1}^n \partial_z \lambda_j(z) \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \lambda_k(z), \quad (5.122)$$

$$\partial_\xi^2 \Lambda_n(\xi) = w^2 \sum_{j=1}^n \left(\partial_z^2 \lambda_j(z) \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \lambda_k(z) + \partial_z \lambda_j(z) \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \partial_z \lambda_k(z) \prod_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq j, k}} \lambda_l(z) \right). \quad (5.123)$$

One then obtains (5.113) and (5.114), by using these last formulas together with (5.120), (5.121), and the fact that $|\lambda_k(z)| \leq 1$ for every $k \in \mathbb{N}$ and every $z \in \mathbb{R}$, which follows from the definition (5.108). Finally, (5.115) directly follows from (5.119).

Let us now show (5.116). Let $\epsilon' > 0$, and let $(y, n) \in H(\epsilon, 1)$. The constants introduced below may depend on ϵ' . One proceeds in two steps.

First, one shows (5.116) for $|z| = |\xi w| \in [\epsilon', 1/\epsilon']$. It is actually enough to show that

$$|\lambda_k(z)| \leq 1 - \epsilon_1 \quad (5.124)$$

for some $\epsilon_1 > 0$ and for every $k \in \{k_j\}$, with $\{k_j\}$ as defined in (5.117). Indeed, from the definition (5.108), one has $|\lambda_k(z)| \leq 1$ and $|\partial_z^l \lambda_k(z)| \lesssim 1$ for $l = 1, 2$, for every $k \in \mathbb{N}$ and every $z \in \mathbb{R}$. So, inserting (5.124) in (5.111), (5.122) or (5.123), respectively for $l = 0$, $l = 1$ or $l = 2$, will imply

$$|\partial_\xi^l \Lambda_n(\xi)| \lesssim (wn)^l (1 - \epsilon_1)^{\frac{n}{2} - 2},$$

which is equivalent to (5.116) when $\epsilon' \leq |\xi w| < 1/\epsilon'$.

So let us show (5.124). By continuity of τ , one finds an interval J on which $\tau \geq \epsilon_2$ for some $\epsilon_2 > 0$.

One has

$$\int_J e^{iz(\alpha_k b + \mathcal{O}(w))} (1 + w\gamma_k b) \tau(b) db = \int_J e^{iz\alpha_k b} \tau(b) db + \mathcal{O}(w),$$

and, for some $\epsilon_3 > 0$,

$$\left| \int_J e^{iz\alpha_k b} \tau(b) db \right| \leq (1 - \epsilon_3) \int_J \tau(b) db.$$

Therefore

$$|\lambda_k(z)| \leq (1 - \epsilon_3) \int_J \tau(b) db + \int_{J^c} \tau(b) db + \mathcal{O}(w) = 1 - \epsilon_3 \int_J \tau(b) db + \mathcal{O}(w) \leq 1 - \epsilon_2 \epsilon_3 \text{Leb}(J) + \mathcal{O}(w).$$

One thus may take $\epsilon_1 = \frac{1}{2} \epsilon_2 \epsilon_3 \text{Leb}(J)$.

Next, one shows (5.116) for $|z| = |\xi w| \geq 1/\epsilon'$. Here, it is enough to show that, for some $C > 0$, one has

$$|\partial_z^l \lambda_k(z)| \leq C/|z|, \quad (5.125)$$

for $l = 0, 1, 2$, and for every $k \in \{k_j\}$. Indeed, if ϵ' has been taken small enough, one finds some $C' > 0$ such that $C/|z| \leq 1/(1 + C'|z|)$, when $|z| \geq 1/\epsilon'$. So, inserting now (5.125) in (5.111), (5.122) or (5.123), respectively for $l = 0$, $l = 1$ or $l = 2$, one will obtain (5.116) for $|\xi w| \geq 1/\epsilon'$.

So let us show (5.125). It follows from (5.108) that $\partial_z^l \lambda_k(z)$ can be written under the form $\partial_z^l \lambda_k(z) = \int e^{iz\mu(b)} \rho_l(b) db$. An integration by parts gives

$$\partial_z^l \lambda_k(z) = \frac{1}{z} \frac{e^{iz\mu(b)\rho(b)}}{i\partial_b \mu(b)} \Big|_{b_-}^{b_+} - \frac{1}{z} \int_{b_-}^{b_+} e^{iz\mu(b)} \partial_b \left(\frac{\rho(b)}{i\partial_b \mu(b)} \right) db.$$

Here, one has $\rho_l \in C^1([b_-, b_+])$, since $\tau \in C^1([b_-, b_+])$, and $|\partial_b^j \rho(b)| \lesssim 1$ for $j = 0, 1$. Moreover, one checks from the definition (5.30) of Φ that $|\partial_b \mu(b)| \gtrsim 1$ and $|\partial_b^2 \mu(b)| \lesssim 1$. This finishes the proof. $\square$

One now let $(y, n) \in H(\epsilon, 8)$. The constants introduced below depend on y only through ϵ . *Proof of (5.78a).*

By (5.110), (5.112) and (5.116) (with $l = 0$), there exists $\epsilon' > 0$ such that,

$$\begin{aligned}
|\partial_x^l S_{y,n} u(x)| &\leq (2\pi)^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} |\xi|^l |\Lambda_n(\xi)| \|u\|_1 \\
&\lesssim \|u\|_1 \sum_{\xi: |\xi w| \leq \epsilon'} |\xi|^l e^{-Cn(\xi w)^2} + \|u\|_1 \sum_{\xi: |\xi w| > \epsilon'} \frac{|\xi|^l}{(1 + C|\xi w|)^{\frac{n}{2}}} \\
&\lesssim \frac{\|u\|_1}{w^{l+1}} \int_0^\infty y^l e^{-Cny^2} dy + \frac{\|u\|_1}{w^{l+1}} \int_{\epsilon'}^\infty \frac{y^l dy}{(1 + Cy)^{\frac{n}{2}}} \\
&=: \frac{\|u\|_1}{w^{l+1}} (I_1 + I_2).
\end{aligned}$$

But one has $I_1 \lesssim n^{-(l+1)/2}$, and

$$I_2 \leq \frac{1}{C^l} \int_{\epsilon'}^\infty \frac{dy}{(1 + Cy)^{\frac{n}{2}-l}} \leq \frac{1}{C^{l+1}(\frac{n}{2} - l - 1)(1 + C\epsilon')^{\frac{n}{2}-l-1}} \lesssim e^{-C(\epsilon')n}. \quad (5.126)$$

This finishes the proof. $\square$

Proof (5.78b). We will only consider the case $k = 2$; the case $k = 1$ can be handled similarly, and turns out to be easier. To simplify the notations, one writes

$$A := \sin^2 \pi(x + nw - y) \cdot \partial_x^2 S_{y,n} u(x).$$

We recall that the function v defined in (5.109) satisfies $v(x) = u(x + y)$. One has $\sin^2 z = \frac{1}{4}(2 - e^{i2z} - e^{-i2z})$, and thus, by (5.110), one has

$$\begin{aligned}
A &= -\pi^2 \left\{ 2 - e^{i2\pi(x+nw-y)} - e^{-i2\pi(x+nw-y)} \right\} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \xi^2 e^{i2\pi\xi(x+wn-y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi) \\
&= -\pi^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi\xi(x+wn-y)} \left\{ 2\xi^2 \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi) - (\xi - 1)^2 \Lambda_n(\xi - 1) \hat{v}(\xi - 1) \right. \\
&\quad \left. - (\xi + 1)^2 \Lambda_n(\xi + 1) \hat{v}(\xi + 1) \right\}.
\end{aligned} \quad (5.127)$$

Since

$$|\hat{v}(\xi) - \hat{v}(\xi - 1)| \leq \int_{B(0, w^2)} |v(x)| |1 - e^{i2\pi x}| dx \lesssim w^2 \|u\|_1,$$

for every $\xi \in \mathbb{Z}$, one has, for every $\epsilon' > 0$,

$$\begin{aligned}
|A| &\lesssim \|u\|_1 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \left| 2\xi^2 \Lambda_n(\xi) - (\xi - 1)^2 \Lambda_n(\xi - 1) - (\xi + 1)^2 \Lambda_n(\xi + 1) \right| + (\xi w)^2 |\Lambda_n(\xi)| \\
&\lesssim \|u\|_1 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \left\{ \xi^2 |2\Lambda_n(\xi) - \Lambda_n(\xi - 1) - \Lambda_n(\xi + 1)| \right. \\
&\quad \left. + |\xi| \cdot |\Lambda_n(\xi - 1) - \Lambda_n(\xi + 1)| + (1 + (\xi w)^2) |\Lambda_n(\xi)| \right\} \\
&\lesssim \|u\|_1 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \left\{ \xi^2 |\Lambda_n''(\xi_1(\xi))| + |\xi| \cdot |\Lambda_n'(\xi_2(\xi))| + (1 + (\xi w)^2) |\Lambda_n(\xi)| \right\} \\
&= \|u\|_1 \sum_{\xi: |\xi w| \leq \epsilon'} (\dots) + \sum_{\xi: |\xi w| > \epsilon'} (\dots) =: \|u\|_1 (I_1 + I_2).
\end{aligned} \quad (5.128)$$

The numbers $\xi_1(\xi)$ and $\xi_2(\xi)$ in (5.128) are obtained by a Taylor expansion and satisfy $|\xi_1(\xi) - \xi| \leq 2$ and $|\xi_2(\xi) - \xi| \leq 2$.

If ϵ' is taken small enough, then, by (5.112), (5.113) and (5.114), and because $nw^2 \leq 1$ by hypothesis, one has

$$I_1 \lesssim \int_0^\infty \{1 + (\xi w \sqrt{n})^2 + (\xi w \sqrt{n})^4\} e^{-C(\sqrt{n}w\xi)^2} d\xi \lesssim \frac{1}{w\sqrt{n}}. \quad (5.129)$$

By (5.116), one gets as for (5.126),

$$I_2 \lesssim \sum_{|\xi|w \geq \epsilon'} \frac{(\xi wn)^2 + \xi wn + 1}{(1 + C\xi w)^{\frac{n}{2}}} \lesssim \frac{1}{w} \int_{\epsilon'}^\infty \frac{((yn)^2 + yn + 1)dy}{(1 + Cy)^{\frac{n}{2}}} \lesssim \frac{1}{w} e^{-C'n}. \quad (5.130)$$

Inserting (5.129) and (5.130) in (5.128) gives the result. $\square$

Proof of (5.79). Let $\epsilon > 0$ be as small as we want. One takes $x, y \in \mathbb{T}$ such that $|x + nw - y|_{\mathbb{T}} \leq 10\epsilon$. The constants introduced below do not depend on ϵ . We recall that the function v defined in (5.109) satisfies $v(x) = u(x + y)$. Starting from (5.110), one obtains

$$S_{y,n}u(x) \geq \sum_{\xi: |\xi| \leq \epsilon^{-2/3}} e^{2i\pi\xi(x+nw-y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi) - \sum_{\xi: |\xi| > \epsilon^{-2/3}} |\Lambda_n(\xi)| \|u\|_1. \quad (5.131)$$

On the one hand, mimicking the proof of (5.78a) with $l = 0$, and taking the hypothesis $nw^2 \geq \epsilon$ into account, one finds, for some $\epsilon' > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{\xi: |\xi| > \epsilon^{-2/3}} |\Lambda_n(\xi)| &\lesssim \frac{1}{w} \int_{\epsilon^{-2/3}w}^{\epsilon'} e^{-Cny^2} dy + \frac{1}{w} \int_{\epsilon'}^\infty \frac{dy}{(1 + Cy)^{\frac{n}{2}}} \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon^{-1/6}}^\infty e^{-Cz^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-C'(\epsilon')n} \lesssim e^{-C''\epsilon^{-1/3}}, \end{aligned} \quad (5.132)$$

where, to get rid of the term $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-C'(\epsilon')n}$, one has used the hypothesis $nw^2 \geq \epsilon$, which implies $n \geq \epsilon^{-1/3}$ when w is small enough.

On the other hand, $\Lambda_n(-\xi) = \Lambda_n^*(\xi)$ by (5.111), $\hat{v}(-\xi) = \hat{v}^*(\xi)$ since u is real, and $\hat{v}(0) = \|u\|_1$ since $u \geq 0$. Therefore

$$\begin{aligned} &\sum_{\xi: |\xi| \leq \epsilon^{-2/3}} e^{2i\pi\xi(x+nw-y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi) \\ &= \|u\|_1 + 2 \sum_{1 \leq \xi \leq \epsilon^{-2/3}} |\Lambda_n(\xi)| |\hat{v}(\xi)| \cos \arg[e^{2i\pi\xi(x+nw-y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi)]. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Since $v \in L^1_{B(0,w^2)}(\mathbb{T})$, one has $\arg(\hat{v}(\xi)) \lesssim |\xi|w^2$ for every $\xi \in \mathbb{Z}$. So, by (5.115) and the hypothesis $|x + nw - y|_{\mathbb{T}} \leq 10\epsilon$, one obtains

$$|\arg(e^{2i\pi\xi(x+nw-y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi))| \lesssim \epsilon\xi \lesssim \epsilon^{1/3}, \quad (5.134)$$

when $1 \leq \xi \leq \epsilon^{-2/3}$. But, if $1 \leq \xi \leq \epsilon^{-2/3}$, one has

$$|\hat{v}(\xi)| \geq \int v(x) dx - \int_{B(0,w^2)} |v(x)| |e^{-i2\pi\xi x} - 1| dx \geq (1 - C\xi w^2) \|u\|_1 \geq \frac{1}{2} \|u\|_1, \quad (5.135)$$

and, by (5.112), one has $|\Lambda_n(\xi)| \geq e^{-Cnw^2\xi^2} \geq e^{-C\epsilon\xi^2}$, since $nw^2 \geq \epsilon$. Therefore, using this last estimate, (5.134) and (5.135) in (5.133) gives

$$\sum_{\xi: |\xi| \leq \epsilon^{-2/3}} e^{2i\pi\xi(x+nw-y)} \Lambda_n(\xi) \hat{v}(\xi) \gtrsim \sum_{|\xi| \leq \epsilon^{-2/3}} e^{-C'\epsilon\xi^2} \|v\|_1, \quad (5.136)$$

if ϵ is small enough.

Therefore, inserting (5.132) and (5.136) in (5.131), one gets

$$S_{y,n}u(x) \geq \|u\|_1 \left(C_1 \sum_{|\xi| \leq \epsilon^{-2/3}} e^{-C'\epsilon\xi^2} - C_2 e^{-C''\epsilon^{-1/3}} \right),$$

and this tends to ∞ as $\epsilon \rightarrow 0$. $\square$

6 – Proof of Theorem 1

Let $n \in \mathbb{N}_0$, let $w > 0$, and let $S_n \equiv S_n(w)$ be defined by (4.11), where w is related to the original variable ω by (5.3).¹ Definition (4.11) depends on the value of two vectors, u and v . In the sequel, if they are given by (4.12), one still will denote S_n as S_n , but, if they are given by (4.13), S_n will be written S'_n . The proof of Theorem 1 is then organized as follows. In Section 6.1, practical bounds on S_n and S'_n are obtained. Let then $w_0 > 0$. One shows in Section 6.2 that the bounds (4.14) and (4.16) are valid for any $w \geq w_0$, with constants depending on w_0 . The next sections are concerned with the case $w < w_0$, where w_0 is taken small enough in order to make valid all the result of Chapter 5 : both bounds (4.14) and (4.15) on S_n are shown in Section 6.3, the lower bound (4.17) on S'_n is shown in Section 6.4, and finally the upper bound (4.16) on S'_n is shown in Section 6.5.

6.1 First bounds on S_n and S'_n

The goal of this section is to derive the bounds (6.1) and (6.2) bellow. To this end, it still proves useful to exceptionally use the old variables ω and M , instead of w and B , related to each other by (5.2) and (5.3). Let us first consider the case where the vectors u and v appearing in the definition of S_n are given by (4.12). In that case, one obtains

$$\begin{aligned}
 |\langle u(\omega) | Q_n(\omega) v(\omega) \rangle|^2 &= (D_n(e^1 + e^2) - D_{n-1}(e^1 + e^2) + \omega^2 \lambda^2 M_1 M_n D_{n-1}(e^2))^2 \\
 &\quad + \omega^2 \lambda^2 (M_n D_{n-1}(e^1 + e^2) + M_1 (D_n(e^2) - D_{n-1}(e^2)))^2 \\
 &= (D_n(e^1 + e^2) - D_{n-1}(e^1 + e^2))^2 + \omega^4 \lambda^4 M_1^2 M_n^2 D_{n-1}^2(e^2) \\
 &\quad + 2\omega^2 \lambda^2 M_1 M_n D_{n-1}(e^2) (D_n(e^1 + e^2) - D_{n-1}(e^1 + e^2)) \\
 &\quad + \omega^2 \lambda^2 (M_n^2 D_{n-1}^2(e^1 + e^2) + M_1^2 (D_n(e^2) - D_{n-1}(e^2))^2) \\
 &\quad + 2\omega^2 \lambda^2 M_1 M_n D_{n-1}(e^1 + e^2) (D_n(e^2) - D_{n-1}(e^2)).
 \end{aligned}$$

Remembering then that $D_k(e^1 + e^2) = D_k(e^1) + D_k(e^2)$ for every $k \in \mathbb{N}$, and using the identity (4.6), one realizes that the sum of the two lines starting by a factor 2, is just equal to $2\omega^2 \lambda^2 M_1 M_n$. Therefore,

1. So we slightly abuse notations, since $S_n(w)$ actually means $S_n \circ f(w)$. Here $f(w) = \pi w / \sqrt{E(M_1)}$, where M_1 is defined at the beginning of Section 4.1 §2.

since the masses are bounded from below by some constant $m_- > 0$, and since $\lambda \sim 1$, it follows from definition (4.11) that

$$S_n \sim \frac{1}{1 + w^{-2}(D_n(e^1 + e^2) - D_{n-1}(e^1 + e^2))^2 + D_{n-1}^2(e^1 + e^2) + (D_n(e^2) - D_{n-1}(e^2))^2 + w^2 D_{n-1}^2(e^2)}. \quad (6.1)$$

Next, when u and v are given by (4.13), one has

$$\begin{aligned} |\langle u(\omega) | Q_n(\omega) v(\omega) \rangle|^2 &= (D_n(e^1) + \omega^2 \lambda^2 M_1 M_n D_{n-1}(e^1))^2 + \omega^2 \lambda^2 (M_1 D_n(e^2) - M_n D_{n-1}(e^1))^2 \\ &= D_n^2(e^1) + \omega^4 \lambda^4 M_1^2 M_n^2 D_{n-1}^2(e^2) + 2\omega^2 M_1 M_n D_n(e^1) D_{n-1}(e^2) \\ &\quad + \omega^2 \lambda^2 M_1^2 D_n^2(e^2) + \omega^2 \lambda^2 M_n^2 D_{n-1}^2(e^1) - 2\omega^2 \lambda^2 M_1 M_n D_n(e^2) D_{n-1}(e^1). \end{aligned}$$

Again, the sum of the two terms starting with a factor 2 just equals $2\omega^2 \lambda^2 M_1 M_n$, so that

$$S'_n \sim \frac{1}{1 + w^{-2} D_n^2(e^1) + D_{n-1}^2(e^1) + D_n^2(e^2) + w^2 D_{n-1}^2(e^2)}. \quad (6.2)$$

6.2 High frequencies

In this section, we prove Theorem 1 with the extra requirement that $w \geq w_0$, for constants depending on w_0 . Before starting, let us make the following observation : from the definition (4.1), one sees that $D_n(e^2)$ does not actually depend on B_1 , and that

$$-D_n(e^2; B_1, \dots, B_n) = D_{n-1}(e^1; B_2, \dots, B_n). \quad (6.3)$$

First of all, starting from Definition (4.8), one establishes inductively that, independently of the realization of the process B , $|\xi_k^\infty| \geq \pi(1+b_-)w^2 - 3 \geq 2$ for every $k \in \mathbb{N}_0$ if $\pi^2(1+b_-)w^2 \geq 5$. Therefore

$$D_n(e^1) \geq ((1+b_-)w^2 - 3)^n \gtrsim w^{cn} \quad (6.4)$$

for some $c > 0$. But, from (6.1), it follows that $S_n \lesssim D_n^{-2}(e^2)$, whereas (6.2) implies that $S'_n \lesssim D_{n-1}^{-2}(e^1)$. Because of (6.3), Theorem 1 is thus already shown when the constraint $\pi^2(1+b_-)w^2 \geq 5$ is satisfied.

It remains thus to show that

$$\mathbb{E}(S_n), \mathbb{E}(S'_n) \lesssim e^{-cn} \quad (6.5)$$

for every w such that $w \geq w_0$ and that $\pi^2(1+b_-)w^2 < 5$, and for constants which depend on w_0 . Let us start with S_n . It follows from (6.1), where one keeps only the two last terms in the denominator, from (6.3), and then from (5.16) and (5.17) as far as the second inequality below is concerned, that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}) &\lesssim \mathbb{E} \left(1 + (D_n(e^1) - D_{n-1}(e^1))^2 + w^2 D_{n-1}^2(e^1) \right)^{-1} \\ &\lesssim \mathbb{E} \left(1 + ((\sin \theta_n - \cos \theta_n)^2 + w^2 \cos^2 \theta_n) t_n^2 \right)^{-1} \\ &\lesssim \mathbb{E} (1 + t_n^2)^{-1}. \end{aligned}$$

But, for $c > 0$ small enough, Proposition 13 implies that there exists some $c' > 0$ such that

$$\mathbb{E} \frac{1}{1+t_n^2} \lesssim e^{-cn} + \mathbb{P}(t_n^2 \leq e^{cn}) \lesssim e^{-c'n}.$$

This shows thus (6.5). Let us now treat S' . This time, it follows from (6.2), in which one drops out the two last terms, and then from (5.16) and (5.17), that

$$\mathbb{E}(S'_n) \lesssim \mathbb{E} \frac{1}{1+w^{-2}D_n^2(e^1) + D_{n-1}^2(e^1)} \lesssim \mathbb{E} \frac{1}{1+(w^{-2}\sin^2\theta_n + \cos^2\theta_n)t_n^2} \lesssim \mathbb{E} \frac{1}{1+t_n^2},$$

and the proof is finished in the same way.

6.3 Bounds on S_n

One here establishes the bounds (4.14) and (4.15) relative to S_n , and, by the previous section, one may suppose that $w \in]0, w_0]$. Proposition 14 applied with $x = a := 1/2 + \mathcal{O}(w)$ gives the estimate $D_n(e^1 + e^2) \sim \Gamma_n^a \sin \pi X_n^a$, whereas Corollary 4 claims that $D_n(e^2) \sim w^{-1} \Gamma_n^0 \sin \pi X_n^0$. Inserting these bounds in (6.1), and noticing from definition (5.39) that $\Gamma_{n-1}^x = \Gamma_n^x e^{\mathcal{O}(w)}$ for every $x \in \mathbb{T}$ and every realization of the process B , one obtains

$$S_n \sim \frac{1}{1 + (\Gamma_n^a)^2 \left(w^{-2} (\sin \pi X_n^a - e^{\mathcal{O}(w)} \sin \pi X_{n-1}^a)^2 + \sin^2 \pi X_n^a \right) + (\Gamma_n^0)^2 \left(w^{-2} (\sin \pi X_n^a - e^{\mathcal{O}(w)} \sin \pi X_{n-1}^a)^2 + \sin \pi X_n^0 \right)}.$$

Let then $x \in \mathbb{T}$. Since $X_n^x - X_{n-1}^x \sim w$ by (5.32) and (5.31), one has

$$\sin \pi X_n^x - e^{\mathcal{O}(w)} \sin \pi X_{n-1}^x = \phi(w) \cos \pi X_{n-1}^x + \mathcal{O}(w) \sin \pi X_{n-1}^x \quad (6.6)$$

where actually $\phi(w) \equiv \phi(w, X_{n-1}^x, B_n)$ is such that $\phi(w)/w \sim 1$. Therefore

$$w^{-2} (\sin \pi X_n^x - e^{\mathcal{O}(w)} \sin \pi X_{n-1}^x)^2 + \sin^2 \pi X_n^x \sim 1,$$

and thus

$$\frac{1}{1 + (\Gamma_n^a)^2 + (\Gamma_n^0)^2} \lesssim S_n(w) \lesssim \frac{1}{1 + (\Gamma_n^0)^2} \leq \frac{1}{2\Gamma_n^0}. \quad (6.7)$$

Proposition 15 guaranties that $\mathbb{E}(1/\Gamma_n^0) \lesssim e^{-cnw^2}$ for some $c > 0$, and therefore $\mathbb{E}(S_n) \lesssim e^{-cnw^2}$, which shows the result (4.14). Next, let us suppose that $nw^2 \lesssim 1$. Applying Jensen's inequality in (6.7) yields

$$S_n \gtrsim \frac{1}{1 + \mathbb{E}(\Gamma_n^a)^2 + \mathbb{E}(\Gamma_n^0)^2}.$$

It follows from its definition (5.39) that, for every $x \in \mathbb{T}$, $(\Gamma_n^x)^2 = e^{wM_n} e^{\mathcal{O}(w^2n)} = e^{wM_n} e^{\mathcal{O}(1)}$, where $(M_n)_{n \geq 1}$ is a martingale of bounded increments. So Azuma's bound (5.9) implies thus that $\mathbb{E}(\Gamma_n^x)^2 \lesssim 1$. One concludes that $\mathbb{E}(S_n(w)) \gtrsim 1$ as long as $w^2n \lesssim 1$, which implies the result (4.15).

6.4 Lower bound on S'_n

In [10] p. 1710, Casher and Lebowitz derive the lower bound $E(J_n) \gtrsim (T_1 - T_n)n^{-3/2}$, which is roughly speaking equivalent to our lower bound (4.17) on S'_n . However, their argument is erroneous. Indeed, it is based on the following estimate on $D_n(e_1)$ ($K_{1,n}$ in their notation) :

$$E(D_n(e_1)^2) \sim e^{Cnw^2} \quad \text{as } w \rightarrow 0. \quad (6.8)$$

This bound is obtained by computing the eigenvalues of a 4×4 matrix F , defined in [10] p. 1710. But this estimate cannot hold. Indeed, we know for example, from Corollary 4 of Proposition 16, that $E(D_{1,n}^2) \sim w^{-2}$ when $w^2n \sim 1$. Although the computation of the eigenvalues of F is correct, the authors do not take into account the fact that a w -dependent change of variables is needed to obtain a correct estimate on $E(D_n(e_1)^2)$.

In order to establish the result (4.17), let us start by a lemma. Let (L_n) and (K_n) be the processes defined in Lemma 25.

Lemma 32. *For every $\alpha > 0$, there exists $C(\alpha) > 0$, such that, for every $a > 0$, and every $n \in \mathbb{N}$ satisfying $w^2n \leq 1$, one has*

$$P(|K_n| \geq a), P(|L_n| \geq a) \leq C(\alpha) w^\alpha. \quad (6.9)$$

Proof. Let $n \in \mathbb{N}_0$ be such that $w^2n \leq 1$. Let the σ -algebra $\mathcal{F}_n$ be defined by $\mathcal{F}_n := \sigma(B_1, \dots, B_n)$. Let (M_k) be the process defined in Lemma 25, and let $(A_k)_{k \geq 0}$ be such that

$$A_k := e^{M_k + L_k + \mathcal{O}(w^2k)} \quad (6.10)$$

for every $k \in \mathbb{N}$, and that M_k is $\mathcal{F}_k$ -measurable for every $k \in \mathbb{N}_0$. From the expressions (5.50) and (5.51), both K_n and L_n are of the form

$$R_n := w^2 \sum_{j=1}^n A_{j-1} V_{j-1} B_j,$$

where V_j is $\mathcal{F}_j$ -measurable for every $j \in \mathbb{N}_0$, and satisfies $|V_j| \lesssim 1$ for every $j \in \mathbb{N}$.

Let $a > 0$. One writes

$$\begin{aligned} P(R_n \geq a) &= P\left(w^{3/2} \sum_{j=1}^n w^{1/2} A_{j-1} V_{j-1} B_j \geq a, \max_{1 \leq j \leq n} w^{1/2} A_{j-1} \leq 1\right) \\ &\quad + P\left(w^{3/2} \sum_{j=1}^n w^{1/2} A_{j-1} V_{j-1} B_j \geq a, \max_{1 \leq j \leq n} w^{1/2} A_{j-1} > 1\right). \end{aligned}$$

Let us now define a process $(\tilde{A}_k)_{k \geq 0}$ by setting $\tilde{A}_k := A_k \cdot \chi_{[0,1]}(w^{1/2} A_k)$ for every $k \in \mathbb{N}$. One has

$$P(R_n \geq a) \leq P\left(w^{3/2} \sum_{j=1}^n w^{1/2} \tilde{A}_{j-1} V_{j-1} B_j \geq a\right) + \sum_{j=1}^n P(w^{1/2} A_{j-1} > 1). \quad (6.11)$$

First, by Azuma's inequality (5.11), and since $w^2 n \leq 1$, one has

$$\mathbb{P}\left(w^{3/2} \sum_{j=1}^n w^{1/2} \tilde{A}_{j-1} V_{j-1} B_j \geq a\right) \leq 2e^{-c a^2 / w^3 n} \leq e^{-c a^2 w^{-1}}, \quad (6.12)$$

for some constant $c > 0$. Next, if $k \in \mathbb{N}_0$, it follows from (5.49) and (5.52) that both processes (M_k) and (L_k) are martingales, with increments uniformly bounded by $\mathcal{O}(w)$. Therefore, starting from Definition (6.10), and applying again Azuma's inequality, one gets, for $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w^{1/2} A_{j-1} > 1) &= \mathbb{P}(M_{j-1} + L_{j-1} + \mathcal{O}(w^2 n) > 2^{-1} \log(1/w)) \\ &\lesssim \exp\left(-\frac{c \log^2(1/w)}{(j-1)w^2}\right) \leq \exp(-c' \log^2(1/w)) \end{aligned}$$

for some $c, c' > 0$. Therefore $\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(w^{1/2} A_{j-1} > 1) \lesssim w^{-2} e^{-c \log^2(1/w)}$ for some $c > 0$. The proof is finished by inserting this last bound, as well as (6.12), in (6.11). $\square$

One now can prove (4.17). Let $1/2 \leq w^2 n \leq 1$. Corollary 4 applied to (6.2) allows us to write that

$$S'_n \gtrsim \left\{ 1 + \frac{(\Gamma_n^\vartheta \sin X_n^\vartheta)^2}{w^4} + \frac{(\Gamma_{n-1}^\vartheta \sin X_{n-1}^\vartheta)^2}{w^2} + \frac{(\Gamma_n^0 \sin X_n^0)^2}{w^2} + (\Gamma_{n-1}^0 \sin X_{n-1}^0)^2 \right\}^{-1}. \quad (6.13)$$

Let us take some $R, c > 1$. The constants introduced below may depend on R and c . Let us observe that, by (5.32) and (5.31), one has $|X_{n-1}|_{\mathbb{T}} \lesssim w$ provided $|X_n|_{\mathbb{T}} \lesssim w^2$, and that, from the definition (5.39), one has $\Gamma_{n-1} \in [0, 2R]$ when $\Gamma_n \in [0, R]$. It follows therefore from (6.13) that

$$\mathbb{E}(S'_n) \gtrsim \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, \Gamma_n^\vartheta \leq R, |X_n^0|_{\mathbb{T}} \leq cw, \Gamma_n^0 \leq cR). \quad (6.14)$$

We now uses Lemma 25. First, by (5.47), one has

$$\chi_{B(cw)}(X_n^0) \geq \chi_{[0, R]}(e^{M_n}) \cdot \chi_{B(0, 1)}(L_n) \cdot \chi_{B(0, w^2)}(X_n^\vartheta), \quad (6.15)$$

provided c is large enough. Secondly, by (5.48), one has

$$\chi_{[0, cR]}(\Gamma_n^0) \geq \chi_{B(0, 1)}(K_n) \cdot \chi_{[0, R]}(\Gamma_n^\vartheta), \quad (6.16)$$

again, provided c is large enough. Using then (6.15) and (6.16) in (6.14), one obtains

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S'_n) &\gtrsim \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, \Gamma_n^\vartheta \leq R, e^{M_n} \leq R, |L_n| \leq 1, |K_n| \leq 1) \\ &\geq \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, |L_n| \leq 1, |K_n| \leq 1) \\ &\quad - \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, \Gamma_n^\vartheta > R) - \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, e^{M_n} > R) \\ &\geq \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2) - \mathbb{P}(|L_n| > 1) - \mathbb{P}(|K_n| > 1) \\ &\quad - \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, \Gamma_n^\vartheta > R) - \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2, e^{M_n} > R). \end{aligned}$$

Applying then Markov's inequality to the two last terms, one gets

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S'_n) &\gtrsim \mathbb{P}(|X_n^\vartheta|_{\mathbb{T}} \leq w^2) - \mathbb{P}(|L_n| > 1) - \mathbb{P}(|K_n| > 1) \\ &\quad - \frac{1}{R} \mathbb{E} \left[\chi_{B(0, w^2)}(X_n^\vartheta) \cdot \Gamma_n^\vartheta \right] - \frac{1}{R} \mathbb{E} \left[\chi_{B(0, w^2)}(X_n^\vartheta) \cdot e^{M_n} \right]. \end{aligned}$$

Proposition 16 and Lemma 32 allow then to conclude that $\mathbb{E}(S'_n) \gtrsim w^2$ if R is chosen large enough. This finishes the proof.

6.5 Upper bound on S'_n

Let us finally show (4.16). By the results of Section 6.2, one may assume that $w \in]0, w_0]$. Dropping out the three last terms in the denominator of (6.2) and applying Corollary 4, one finds that

$$S'_n \lesssim \frac{1}{1 + w^{-2} D_n^2(e_1)} \lesssim h(\Gamma_n^\vartheta \sin \pi X_n^\vartheta) \quad \text{with} \quad h(r) = \frac{1}{1 + w^{-4} r^2}. \quad (6.17)$$

Let us still distinguish two cases. Let $c > 0$, and let first $w \in]0, c/n]$. It directly follows from Definition (5.39) that $\Gamma_n^\vartheta \sim 1$ in this case. Moreover, if c has been taken small enough, one concludes from (5.32) and (5.31) that

$$wn \lesssim X_n \leq \frac{1}{2} wn \leq \frac{1}{2}. \quad (6.18)$$

But, from (6.17), the bound $S'_n \lesssim w^2$ is satisfied if $w^2 \lesssim \sin^2 \pi X_n^\vartheta$. But this is obvious by (6.18), and the result (4.16) is thus shown in this case.

Let us next suppose that $w \in [c/n, w_0[$. Let $m := \min\{n, \lfloor w^{-2} \rfloor\}$. One writes

$$\mathbb{E}(S'_n) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}(j_n(w) | X_{n-m}^\vartheta = x, \Gamma_{n-m}^\vartheta = a) \mathbb{P}(X_{n-m}^\vartheta \in dx, \Gamma_{n-m}^\vartheta \in da). \quad (6.19)$$

To simplify notations, set $\mathbb{E}(\cdot | x, a) := \mathbb{E}(\cdot | X_{n-m}^\vartheta = x, \Gamma_{n-m}^\vartheta = a)$. If $x \in \mathbb{T}$ and $a \in \mathbb{R}$ are given, it follows from (6.17) that

$$\mathbb{E}(S'_n | x, a) \lesssim \mathbb{E}h(a \Gamma_m^x \sin \pi X_m^x), \quad (6.20)$$

since, by the definition (5.39), one may write $\Gamma_n^\vartheta = \prod_{l=1}^n g(X_{l-1}^\vartheta, B_l) = \Gamma_{n-m}^\vartheta \prod_{l=n-m+1}^n g(X_{l-1}^\vartheta, B_l)$, for some function g . Because $h(r) \leq 1$ and $h(r) \leq w^4 r^{-2}$ for every $r \in \mathbb{R}$, one has, for every event A , the bound

$$h(a \Gamma_m^x \sin \pi X_m^x) \leq 1_A + 1_{A^c} \cdot w^4 \cdot (a \Gamma_m^x \sin \pi X_m^x)^{-2}. \quad (6.21)$$

So, taking $1_A = \chi_{[0,1]}(w^{-4} a^2 \sin^2 \pi X_m^x)$, and using (6.21) in (6.20) one obtains

$$\mathbb{E}(S'_n | x, a) \lesssim \mathbb{E} \left\{ \chi_{[0,1]}(w^{-4} a^2 \sin^2 \pi X_m^x) + \chi_{[1,\infty[}(w^{-4} a^2 \sin^2 \pi X_m^x) \cdot w^4 \cdot (a \Gamma_m^x \sin \pi X_m^x)^{-2} \right\}.$$

Therefore, Proposition 16 implies

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S'_n|x, a) &\lesssim \frac{1}{w\sqrt{m}} \int_{\mathbb{T}} \{\chi_{[0,1]}(w^{-4}a \sin^2 \pi y) + \chi_{]1,\infty[}(w^{-4}a \sin^2 \pi y) w^4 a^{-2} \sin^{-2} \pi y\} dy \\
&\lesssim \frac{1}{w\sqrt{m}} \int_{\mathbb{T}} \frac{dy}{1 + w^{-4}a^2 \sin^2 \pi y} \lesssim \frac{1}{w\sqrt{m}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dy}{1 + (w^{-2}ay)^2} \\
&\leq \frac{w^2 a^{-1}}{w\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1 + z^2} \lesssim \frac{w}{\sqrt{m}} a^{-1},
\end{aligned}$$

where one has used the change of variables $z = w^{-2}ay$ to get the third line. One now inserts this last bound in (6.19). Applying Proposition 15, one gets

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S'_n) &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} \frac{w}{\sqrt{m}} a^{-1} \mathbb{P}(X_{n-m}^\vartheta \in dx, \Gamma_{n-m}^\vartheta \in da) \\
&= \frac{w}{\sqrt{m}} \mathbb{E}(1/\Gamma_{n-m}^\vartheta) \lesssim \frac{w}{\sqrt{m}} e^{-\alpha w^2(n-m)} \lesssim \max\left\{\frac{w}{\sqrt{n}}, w^2\right\} e^{-\alpha w^2 n},
\end{aligned}$$

which is the claim.

Notations

Ensembles numériques

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Si $\mathbb{K}$ est un des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors on pose $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K} - \{0\}$. On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_{0+} =]0, +\infty[$. De même, on définit $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} - \mathbb{R}_{0+}$ et $\mathbb{R}_{0-} = \mathbb{R} - \mathbb{R}_+$. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où ∞ désigne le point à l'infini du plan complexe. On désigne par $i = \sqrt{-1}$ l'unité imaginaire. Le complexe conjugué d'un nombre $z = x + iy \in \mathbb{C}$ s'écrit $z^* = x - iy$.

Vecteurs

Soit $n \in \mathbb{N}_0$. On numérote par un indice supérieur les éléments d'une base de $\mathbb{C}^n$. En particulier, on désigne par $(e^k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sur le corps $\mathbb{C}$. On numérote par un indice inférieur les composantes d'un vecteur par rapport à la base canonique. Ainsi, si $x \in \mathbb{C}^n$, on a $x = x_1 e^1 + \dots + x_n e^n$. On note $x^* = x_1^* e^1 + \dots + x_n^* e^n$. Soit aussi $y \in \mathbb{C}^n$. On note $\langle x|y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Le produit hermitien de x et y s'écrit donc $\langle x^*|y \rangle$.

Mesure

1. On désigne par m_L la mesure de Lebesgue, et par P une mesure de probabilité.
2. Si (X, P) est un espace de probabilité et si $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, on note $E(u) = \int_X u \, dP$.
3. Soit μ une mesure positive sur un espace X . Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mu)$, ou tout simplement $L^p(X)$, désigne l'ensemble des applications u , μ -mesurable sur X , et telles que u^p est sommable. On note $\|u\|_p = (\int_X |u|^p \, d\mu)^{1/p}$. Si μ est de probabilité, on peut donc aussi écrire $\|u\|_p = E^{1/p}(|u|^p)$.
4. Soit μ une mesure positive sur un espace X . L'espace $L^\infty(X, \mu)$, ou simplement $L^\infty(X)$, désigne l'ensemble des applications essentiellement bornées sur X . Le supremum essentiel d'une application $u \in L^\infty(X, \mu)$ se note $\|u\|_\infty$.
5. Soit $1 \leq p, q \leq \infty$. Soit A un opérateur continu de $L^p(X, \mu)$ dans $L^q(Y, \nu)$. On note

$$\|A\|_{p \rightarrow q} = \sup\{\|Au\|_q : u \in L^p(X) : \|u\|_p \leq 1\}.$$

Fonctions continues et dérivables

Soit un intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On désigne par $C([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, $C^k([a, b])$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, k fois continûment différentiables sur $]a, b[$, et telles que les dérivées jusqu'à l'ordre k soient uniformément bornées sur $]a, b[$. La dérivée d'une fonction u par rapport à une variable x se note généralement $\partial_x u$ ou simplement ∂u ; si la variable est le temps t , on utilise encore du/dt ou $\dot{u}$.

Périodicité

Si $x \in \mathbb{R}$, on a l'unique décomposition $x = [x] + \bar{x}$, où $[x] \in \mathbb{Z}$, et $\bar{x} \in [0, 1[$. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$|x|_{\mathbb{T}} = \inf\{|x - p| : p \in \mathbb{Z}\}$$

On identifie les fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ aux fonctions sur $\mathbb{T}$. De même, une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $g(x) = x + u(x)$, où u est 1-périodique, s'identifie à une fonction de $\mathbb{T}$ dans lui-même.

Espace de Fourier

Pour $\xi \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}(\xi)$ d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{T}, m_L)$ se définit par la relation

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{T}} u(x) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

La série de Fourier de u s'écrit, au moins formellement, comme

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(\xi) e^{2i\pi\xi x}.$$

Pour $w \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\hat{u}(w)$ d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R}, m_L)$ se définit par la relation

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-iwx} dx.$$

L'intégrale de Fourier de u s'écrit, au moins formellement, comme

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(w) e^{iwx} dw.$$

Constantes

Voici quelques symboles dont nous nous servirons pour alléger certains passages. Les lettres C , C' , C_1 , etc., sont utilisées pour désigner des constantes, desquelles la valeur peut varier d'un endroit à l'autre. Si C dépend de certains paramètres qui apparaissent dans l'énoncé, nous le spécifierons généralement. On écrit encore $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ pour $a \leq Cb$. La notation $a \sim b$ signifie que $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$.

Bibliographie

- [1] B. Adamczewski, *Répartition des suites $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ et substitutions*, Acta Arithmetica, **112**, 1-22 (2004).
- [2] O. Ajanki, F. Huveneers, *Rigorous scaling law for the heat current in disordered harmonic chain*, to appear in Communication in Mathematical Physics, arXiv :1003.1076v1, 1-38 (2010).
- [3] K. Azuma, *Weighted sums of certain dependent random variables*, Tohoku Mathematical Journal, **19** (3), 357-367 (1967).
- [4] V. Baladi, *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, **16**, World Scientific (2000).
- [5] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley (1968).
- [6] F. Bonetto, J.L. Lebowitz, L. Rey-Bellet, *Fourier's law : a challenge to theorists*, pp. 128-150 in *Mathematical physics 2000*, edited by A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble and B. Zegarlinsky, Imperial College Press (2000).
- [7] J. Bricmont, K. Gawedzki, A. Kupiainen, *KAM Theorem and Quantum Field Theory*, Communications in Mathematical Physics, **201** (3), 699-727 (1999).
- [8] L.A. Bunimovich, Ya.G. Sinai, *Statistical properties of Lorentz gas with a periodic configuration of scatterers*, Communication in Mathematical Physics, **72**, 479-497 (1981).
- [9] R. Burton, M. Denker, *On the central limit theorem for dynamical systems*, Transactions of the American Mathematical Society, **302** (2), 715-726 (1987).
- [10] A. Casher, J.L. Lebowitz, *Heat Flow in Regular and Disordered Harmonic Chains*, Journal of Mathematical Physics, **12** (8), 1701-1711 (1971).
- [11] A. Chaudhuri, A. Kundu, D. Roy, A. Dhar, J. L. Lebowitz, H. Spohn, *Heat transport and phonon localization in mass-disordered harmonic crystals*, arXiv :0902.3350v3, 1-30 (2009).
- [12] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, *Puissances d'un opérateur régularisant*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B, **26** (3), 419-436 (1990).
- [13] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, *Minoration pour les chaînes de Markov unidimensionnelles*, Probability Theory and Related Fields, **97**, 423-431 (1993).

- [14] T. De La Rue, S. Ladouceur, G. Peskir, M. Weber, *On the Central Limit Theorem for Aperiodic Dynamical Systems and Applications*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **57**, 140-159 (1997).
- [15] A. Dhar, *Heat Conduction in the Disordered Harmonic Chain Revisited*, Physical Review Letters, **86** (26), 5882-5885 (2001).
- [16] M. Drmota, R.F. Tichy, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, **1651**, Springer (1997).
- [17] D. Dürr, S. Goldstein, J. L. Lebowitz, *A Mechanical Model of Brownian Motion*, Communications in Mathematical Physics, **78** (4), 507-530 (1981).
- [18] J.-P. Eckmann, P. Jacquet, *Controllability for chains of dynamical scatterers*, Nonlinearity, **20**, 1601-1617 (2007).
- [19] L. Escaurazia, *Bounds for the fundamental solution of elliptic and parabolic equations in nondivergence form*, Communications in Partial Differential Equations, **25** (5-6), 821-845 (2000).
- [20] D.A. Freedman, *On tail probabilities for martingales*, Annals of Probability, **3** (1), 100-118 (1975).
- [21] H. Furstenberg, *Noncommuting Random Products*, Transactions of the American Mathematical Society, **108** (3), 377-428 (1963).
- [22] P. Gaspard, T. Gilbert, *Heat Conduction and Fourier's Law by Consecutive Local Mixing and Thermalization*, Physical Review Letters, **101** (2), 020601 (2008).
- [23] E. Ghys, *Résonances et petits diviseurs*,
<http://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/articles/kolmogorov.pdf>.
- [24] Y. Guivarc'h, *Quelques propriétés asymptotiques de matrices aléatoires*, pp. 178-250 in *Ecole d'Ete de Probabilités de Saint-Flour VIII-1978*, Lecture Notes in Mathematics, **774**, Springer (1980).
- [25] Y. Guivarc'h, J. Hardy, *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B, **24** (1), 73-98 (1988).
- [26] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th edition, Clarendon Press (1960).
- [27] F. Huveneers, *Subdiffusive behavior generated by irrational rotations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **29**, 1217-1233 (2009).
- [28] M.R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., **49**, 5-233 (1979).
- [29] F. Hofbauer, G. Keller, *Ergodic Properties of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations*, Mathematische Zeitschrift, **180**, 119-140 (1982).

- [30] H. Kesten, *Uniform distribution mod 1*, Annals of Mathematics, **71** (3), 445-471 (1960).
- [31] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley (1974).
- [32] H. Kunz, B. Souillard, *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires*, Communications in Mathematical Physics, **78** (2), 201-246 (1980).
- [33] S. Lang, *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley (1966).
- [34] S. Lepri, R. Livi, A. Politi, *Thermal conduction in classical low-dimensional lattices*, Physical Reports, **377** (1), 1-80 (2003).
- [35] S. Lepri, R. Livi, A. Politi, *Anomalous heat conduction*, pp. 293-322 in *Anomalous Transport : Foundations and Applications*, edited by R. Klages, G. Radons and I. M. Sokolov, Wiley (2008).
- [36] P. Liardet, D. Volný, *Sums of continuous and differentiable functions in dynamical systems*, Israel Journal of Mathematics, **98**, 29-60 (1997).
- [37] H. Matsuda, K. Ishii, *Localization of Normal Modes and Energy Transport in the Disordered Harmonic Chain*, Supplement of the Progress of theoretical physics, **45**, 56-86 (1970).
- [38] S. Mustapha, *Gaussian estimates for spacially inhomogeneous random walks on Z^d* , Annals of Probability, **34** (1), 264-283 (2006).
- [39] A.J. O'Connor, *A central limit theorem for the disordered harmonic chain*, Communications in Mathematical Physics, **45** (1), 63-77 (1975).
- [40] R.E. Peierls, *Quantum Theory of Solids*, Clarendon Press (1955).
- [41] A. Raugi, *Théorème ergodique multiplicatif. Produits de matrices aléatoires indépendantes*, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 1-40 (1997).
- [42] Z. Rieder, J.L. Lebowitz, E.H. Lieb, *Properties of Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State*, Journal of Mathematical Physics, **8** (5), 1073-1078 (1967).
- [43] R.J. Rubin, W.L. Greer, *Abnormal Lattice Thermal Conductivity of a One-Dimensional, Harmonic Isotopically Disordered Crystal*, Journal of Mathematical Physics, **12** (8), 1686-1701 (1971).
- [44] M. Stenlund, *A strong pair correlation bound implies the CLT for Sinai Billiards*, arXiv :0908.0027v1, 1-13 (2009).
- [45] C. J. Thompson, *Mathematical Statistical Mechanics*, Princeton University press (1972).
- [46] T. Verheggen, *Transmission Coefficient and Heat Conduction of a Harmonic Chain with Random Masses : Asymptotic Estimates on Products of Random Matrices*, Communication in Mathematical Physics, **68**, 69-82 (1979).
- [47] J.-C. Yoccoz, *Sur la disparition de propriétés de type Denjoy-Koksma en dimension 2*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A-B, **291** (13), 655-658 (1980).

Table des matières

Remerciements	3
Le désordre moléculaire ?	5
I Diffusion pour des sous-suites engendrées par des rotations	11
1 Gaz de particules indépendantes	13
1.1 Quelques théorèmes probabilistes	15
1.2 Le cas des applications dilatantes de l'intervalle	17
1.3 Le cas des rotations du cercle	23
2 Démonstrations	33
2.1 Lemme 7 et démonstration de la proposition 2	33
2.2 Démonstration de la proposition 3	34
2.3 Démonstration du lemme 5 et d'un cas particulier de la proposition 6	38
2.4 Démonstration de la proposition 7 et du lemme 6	40
2.5 Démonstration de la proposition 8	41
2.6 Démonstration de la proposition 9	43
2.7 Démonstration de la proposition 10	45
II Flux de chaleur dans une chaîne harmonique désordonnée	49
3 La loi de Fourier	51
3.1 La loi de Fourier pour un modèle stochastique	55
3.2 Chaînes unidimensionnelles	58
4 Chaîne harmonique désordonnée	63
4.1 Préambule mathématique et théorème fondamental	63

4.2	La chaîne isolée	66
4.3	La chaîne soumise à un frottement aux bords	73
4.4	Les modèles de Casher, Lebowitz, Rubin et Greer	76
4.5	Conduction et modes propres	80
5	Results on the matrices Q_n	87
5.1	Martingales	89
5.2	High frequencies	91
5.3	Representation of the matrix elements	93
5.4	Expectation of $1/\Gamma_n$	100
5.5	Potential theory	104
6	Proof of Theorem 1	120
6.1	First bounds on S_n and S'_n	120
6.2	High frequencies	121
6.3	Bounds on S_n	122
6.4	Lower bound on S'_n	123
6.5	Upper bound on S'_n	125
	Notations	128
	Bibliographie	130