Une interprétation des ordres héréditaires dans les algèbres simples centrales à involution comme les anneaux des jauges discrètes

Joachim Verstraete

Boursier de Wallonie-Bruxelles International
Chercheur postdoctoral au Laboratoire de mathématiques de Lens

Séminaire d'algèbre et de logique de Mons, 26 février 2021

Plan

1. Le dictionnaire ordres-jauges
2. Ordres et jauges sous involution

Corps F.

Valuation discrète $|\cdot|$ sur F.

Pour exposé, supposons $\operatorname{char} \overline{\mathcal{O}_{|\cdot|}} = 0$.

A algèbre semi-simple $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ sur F

($A_i = M_{r_i}(D_i)$ simple
avec D_i algèbre à division sur F)

1. $\|\cdot\|$ est une $|\cdot|$-valuation d'espace vectoriel
   - $\|x\| = 0 \iff x = 0$
   - $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$
   - $\|x\alpha\| = \|x\||\alpha|$, pour $\alpha \in F$.
2. $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative
   - $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
   - $\|1\| = 1$.
3. $\|\cdot\|$ est sans défaut par rapport à $|\cdot|$:

$$[\mathsf{gr}(A) : \mathsf{gr}(F)] = [A : F].$$

4. La $\mathsf{gr}(F)$-algèbre graduée $\mathsf{gr}(A)$ est *graduée semisimple.*

$\Lambda \subset A$ est un $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire si

1. Λ est un sous-$\mathcal{O}_{|.|}$-module,
2. Λ est un sous-anneau (avec la même unité),
3. Λ est de type fini sur $\mathcal{O}_{|.|}$ et engendre A sur F,
4. (Hér.) tout idéal (gauche/droite) de Λ est un Λ-module projectif.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads] \\ I \arrow[ur, dashed, "\exists"] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Théorème (Dictionnaire ordres-jauges I)

$$\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-}\textit{ordres héréditaires de } A\right\} = \left\{\textit{Anneaux des } |\cdot|\text{-}\textit{jauges sur } A\right\}$$

- $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ *est* $\mathcal{O}_{|\cdot|}$-*ordre héréditaire*

  $$\operatorname{rad}\mathcal{O}_{\|\cdot\|} = \mathfrak{m}_{\|\cdot\|}.$$

- *Pour tout* $\mathcal{O}_{|\cdot|}$-*ordre héréditaire* Λ ,

  $$\Lambda = \mathcal{O}_{\|\cdot\|}$$

  pour une certaine $\|\cdot\|$.

Non unicité de la jauge : un exemple

Soit $g > 1$ tel quel $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Soit $1 < k < g$.

$A = M_2(F)$.

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathfrak{m}_{|\cdot|} \\ \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathcal{O}_{|\cdot|} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$ $\qquad$ $\mathcal{O}_{|\cdot|}$-ordre héréditaire.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_k = \max \begin{Bmatrix} |m_{11}| & |m_{12}|k \\ |m_{21}|k^{-1} & |m_{22}| \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{O}_{\|\cdot\|_k} = \Lambda$ pour tout $1 < k < g$ puisque $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

$|m_{21}|k^{-1} \leq 1 \iff |m_{21}| \leq k \iff |m_{21}| \leq 1 \qquad g^{-1} \quad k^{-1} \qquad 1 \quad k \qquad g.$

Les jauges sur mesure : définition

A algèbre graduée simple sur un corps gradué F.

Théorème de représentation (type Wedderburn) : $\mathsf{A} \simeq \mathsf{End}_{\mathsf{D}}\mathsf{V}$.
Notation : $\mathbb{R}_{\mathsf{D}} = \{r \in \mathbb{R} \,|\, \mathsf{D}_r \neq 0\}$.

$\nu(\mathsf{A}) = |\mathbb{R}_{\mathsf{V}} : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}|$ $\qquad$ $\tau(\mathsf{A}) = |\mathbb{R}_{\mathsf{A}} : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}|$.

$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \times \cdots \times \mathsf{A}_l$ algèbre graduée semisimple sur un corps gradué F.
$\nu(\mathsf{A}) = \nu(\mathsf{A}_1) + \cdots + \nu(\mathsf{A}_l)$.
$\tau(\mathsf{A}) = \tau(\mathsf{A}_1) + \cdots + \tau(\mathsf{A}_l)$.

Lemme

- $\tau(\mathsf{A}) \geq \nu(\mathsf{A})$.
- $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *$|\cdot|$-jauges sur A avec* $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{O}_{\|\cdot\|_2} \implies$

$$\nu(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|_1}(A)) = \nu(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|_2}(A)).$$

$\|\cdot\|$ est une $|\cdot|$-jauge sur mesure si $\tau(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|}(A)) = \nu(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|}(A))$.

Théorème (Dictionnaire ordres-jauges II)

1. $$\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-}\mathit{ordres\ héréditaires\ de}\ A\right\} = \{\mathit{Anneaux\ des}\ |\cdot|\text{-}\mathit{jauges\ sur}\ A\}$$

2. $$\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-}\mathit{ordres\ héréditaires}\ \Lambda\ \mathit{de}\ A\right\} \xleftrightarrow{1:1} \{\ |\cdot|\text{-}\mathit{jauges\ sur\ mesure}\ \mu\}$$

$$\mathit{Si}\ f\colon A \xrightarrow{\sim} B, \qquad \mathit{alors} \qquad \mu_{f(\Lambda)} = \mu_\Lambda \circ f^{-1}.$$

Soit $g > 1$ tel quel $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

$A = M_2(F)$.

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathfrak{m}_v \\ \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathcal{O}_{|\cdot|} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$ $\mathcal{O}_{|\cdot|}$-ordre héréditaire.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_{\sqrt{g}} = \max \begin{Bmatrix} |m_{11}| & |m_{12}|\sqrt{g} \\ |m_{21}|\sqrt{g}^{-1} & |m_{22}| \end{Bmatrix}$$

$\|\cdot\|_{\sqrt{g}}$ est la $|\cdot|$-jauge sur mesure associée à Λ.

Se base sur : F. Bruhat & J. Tits (1984).

- Sur $M_r(D)$ quand D admet une valuation discrete $|\cdot|$
  "normes d'opérateurs" $\leftrightsquigarrow$ $\mathcal{O}_{|\cdot|_{|Z(D)}}$-ordres héréditaires.
  Correspondance "normes radiques" $\leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{|\cdot|_{|Z(D)}}$-ordres héréditaires.

Idée preuve :

(1) Lorsque F est complet et A simple centrale sur F,
jauges sur mesures = normes radiques.
Alors, comme dans ce cas : jauges = "normes d'opérateurs",
Théorème se déduit essentiellement de B.&T.

(2) Cas général : se ramener à (1) par extension des scalaires au complété de F et propriétés des jauges et ordres héréditaires.

Pourquoi s'intéresser aux involutions ?

Weil :

Algèbres simples centrales et Algèbres à involution

=

analogues naturels

(Lié aux groupes classiques)

Exemple : notion d'anisotropie : $M_r(D)$ anisotrope si $r = 1$.

! Suggère l'intérêt de voir comment les théorèmes pour les algèbres simples centrales peuvent s'adapter aux algèbres à involution.

Dans mon cas :

$\mathcal{O}_{|.|}$-ordres héréditaires $\rightsquigarrow$ σ-stable $\mathcal{O}_{|.|}$-ordres héréditaires.

$|\cdot|$-jauges $\rightsquigarrow$ σ-invariant $|\cdot|$-jauges.

Adaptation marche (dictionnaire ordres-jauges) : en application des $|\cdot|$-jauges sur mesure.

Autre observation :

A simple centrale sur F

Si $A \otimes_F \hat{F}_{|.|}$ à division (anisotrope), alors unique $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire dans A.

Si $A \otimes_F \hat{F}_{|.|}$ isotrope : plusieurs ordres héréditaires dans A.

S'adapte aussi à l'aide des jauges, (et donc du dictionnaire ordres-jauges).

B algèbre simple sur F σ involution F-linéaire.

- $\sigma(\sigma(x)) = x$
- $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$
- $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$
- $\sigma(x\alpha) = \sigma(x)\alpha$ pour tout $\alpha \in F$.

$$\implies F \simeq F \cdot 1_B \subset Z(B,\sigma) = \{x \in Z(B) \,|\, \sigma(x) = x\}.$$

(B,σ) Algèbre simple centrale à involution si $F = \{x \in Z(B) \,|\, \sigma(x) = x\}$.

(B,σ) anisotrope $\sigma(x)x = 0 \implies x = 0$.

Extension des scalaires : $B \otimes_F \hat{F}_{|\cdot|}$ pas nec. simple

$$B \otimes_F \hat{F}_{|\cdot|} \text{ simple} \iff |\cdot| \text{ s'étend de manière unique à } Z(B).$$

$\mathbb{Q}$ avec valuation 5-adique $|\cdot|_5$:

$$\left|5^z \frac{p}{q}\right|_5 = e^{-z}, \qquad p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ non divisibles par 5.}$$

$B = M_2(\mathbb{Q})$.

$\sigma\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & 3\,m_{21} \\ 3^{-1}\,m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$ anisotrope car

$$\sigma(m)m = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} m_{11}^2 + 3m_{21}^2 = 0 \\ m_{22}^2 + 3^{-1}m_{12}^2 = 0 \\ m_{11}m_{12} + 3m_{21}m_{22} = 0 \\ 3^{-1}m_{11}m_{12} + 3m_{21}m_{22} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow m_{ij} = 0.$$

$F = \mathbb{Q}$ avec valuation 5-adique $|\cdot|_5$.

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ avec (l'unique extension de) la valuation 5-adique $|\cdot|_5$:

$$\left|x+\sqrt{3}y\right|_5 = \max\left\{|x|_5, |y|_5\right\}, \qquad x, y \in \mathbb{Q} \quad (\text{car } \left|\sqrt{3}\right|_5 = 1).$$

$$\overline{x+\sqrt{3}y} = x - \sqrt{3}y.$$

$B = M_2\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right)$.

$$\sigma\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{m_{11}} & 5\,\overline{m_{21}} \\ 5^{-1}\,\overline{m_{12}} & \overline{m_{22}} \end{pmatrix} \qquad \text{involution anisotrope.}$$

(B, σ) simple centrale à involution avec $F \neq Z(B)$.

$\mathbb{Q}$ avec valuation 5-adique $|\cdot|_5$.

$D = (-1, 3)_{\mathbb{Q}}$ algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ à division.

Pour $1, i, j, k$ base standard de D telle que

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = 3 \qquad \text{et} \qquad ij = k = -ji \qquad :$$

$\sigma(\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3) = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 - k\alpha_3$ anisotrope.

Théorème, Partie 1 : Dictionnaire ordres-jauges avec involutions

Théorème (Partie 1)

(B, σ) *algèbre simple centrale à involution.*

- *La* $|\cdot|$*-jauge sur mesure associée à un* $\mathcal{O}_{|\cdot|}$*-ordre héréditaire stable sous l'involution est invariante sous l'involution.*
- *CSQ* 1 *:* $\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-ordres hér. stables de } B\right\} = \{\text{Ann. des } |\cdot|\text{-jauges invar. de } B\}$
- *CSQ* 2 *:* $\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-ordres hér. stables}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \{\,|\cdot|\text{-jauges inv. sur mesure}\}$

Soit $g > 1$ tel quel $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ $\quad \pi \in F$ tq $|\pi| = g^{-1}$. $\quad \mathfrak{m} = \pi\mathcal{O}$.

$A = M_2(F)$.

$$\sigma \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \pi m_{21} \\ \pi^{-1} m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$$

$\mathcal{O}$-ordre héréditaire et $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_{g^{1/3}} = \max \begin{Bmatrix} |m_{11}| & |m_{12}| g^{1/3} \\ |m_{21}| g^{-1/3} & |m_{22}| \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{O}_{\|\cdot\|_{g^{1/3}}} = \Lambda$.

mais $\left\| \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{g^{1/3}} = g^{-\frac{2}{3}}$ et $\left\| \sigma \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{g^{1/3}} = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{g^{1/3}} = g^{-\frac{1}{3}}$.

Soit $g > 1$ tel quel $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Soit $1 < k < g$.

$A = M_2(F)$.

$\sigma \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$.

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$ $\mathcal{O}$-ordre héréditaire et $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$.

$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_k = \max \begin{Bmatrix} |m_{11}| & |m_{12}|k \\ |m_{21}|k^{-1} & |m_{22}| \end{Bmatrix}$.

$\mathcal{O}_{\|\cdot\|_k} = \Lambda$ pour tout $1 < k < g$ $\|\sigma(m)\|_k = \|m\|_k$.

Théorème (Partie 2) (cas particulier)

Supposons $|\cdot|$ s'étends univoquement à $Z(B)$.
(Cas général dans ma thèse).

$\exists$ un $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire stable sous σ. [Scharlau 1974].

Cond. Équiv. :

1. Il existe une unique $|\cdot|$-jauge $\|\cdot\|$ invariante sous σ.
2. Il existe un unique $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire stable sous σ.
3. $\sigma \otimes \mathrm{id}_{\hat{F}_{|\cdot|}}$ est une involution anisotrope sur $B \otimes_F \hat{F}_{|\cdot|}$.
4. Il existe un $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire Λ stable sous σ qui satisfait pour tout $x \in \Lambda$:

$$\sigma(x)x \in \operatorname{rad}\Lambda \implies x \in \operatorname{rad}\Lambda.$$

Alors $\Lambda = \mathcal{O}_{\|\cdot\|}$.

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ avec valuation 5-adique $|\cdot|_5$. $\quad (\pi = 5^{-1})$

$B = M_2\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)\right)$.

$\sigma\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{m_{11}} & 5\,\overline{m_{21}} \\ 5^{-1}\,\overline{m_{12}} & \overline{m_{22}} \end{pmatrix}$ reste anisotrope sur $\mathbb{Q}_{|\cdot|_5}\left(\sqrt{3}\right)$.

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$ unique $\mathcal{O}$-ordre héreditaire invariant

PAS maximal.

$\left\|\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\right\|_{\sqrt{g}} = \max\begin{Bmatrix} |m_{11}|_5 & |m_{12}|_5\sqrt{g} \\ |m_{21}|_5\sqrt{g}^{-1} & |m_{22}|_5 \end{Bmatrix}$. jauge sur mesure

unique $|\cdot|_5$-jauge invariante.

$\mathbb{Q}$ avec valuation 5-adique $|\cdot|_5$.

$D = (-1, 3)_{\mathbb{Q}}$ algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ à division.

$$\sigma(\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3) = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 - k\alpha_3$$

reste anisotrope sur $\mathbb{Q}_{|\cdot|_5}$.

$\mathbb{Q}_{|\cdot|_5}$ avec valuation 5-adique $|\cdot|_5$, complété de $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}_{|\cdot|_5} \ni i$ tq $i^2 = -1$.

$$\|\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3\| = \|\alpha_0 + i\alpha_1 + j(\alpha_2 - i\alpha_3)\| =$$

$$= \max\left\{ \begin{array}{cc} |\alpha_0 + i\alpha_1|_5 & |\alpha_2 + i\alpha_3|_5 \\ |\alpha_2 - i\alpha_3|_5 & |\alpha_0 - i\alpha_1|_5 \end{array} \right\}.$$

$(|j|_5 = |\sqrt{3}|_5 = 1)$. unique $|\cdot|_5$-jauge invariante.

Récapitulatif

- Pour une F-algèbre semi-simple :
  - $\{$ anneau des $|\cdot|$-jauges $\} = \left\{ \mathcal{O}_{|.|}\text{-ordres héréditaires} \right\}$;
  - Correspondance entre les $|\cdot|$-gauges *sur mesure* et $\mathcal{O}_{|.|}$-ordres héréditaires.
- Pour une algèbre simple centrale à *involution* :
  - $\{$ anneaux des $|\cdot|$-jauges *invar.*$\} = \left\{ \mathcal{O}_{|.|}\text{-ordres hér. } \textit{stables} \right\}$;
  - Correspondance entre les $|\cdot|$-jauges sur mesure *invariantes* et $\mathcal{O}_{|.|}$-ordres héréditaires *stables* ;
  - Propriété d'unicité de l'$\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire *stable* $\iff$ (B, σ) vérifie une certaine propriété d'anisotropie en $|\cdot|$.