

SIGLE

Université Catholique de Louvain

Faculté des Sciences Appliquées

Modélisation hydrodynamique tridimensionnelle de la circulation générale estivale de la région du Détroit de Bering

Dissertation présentée par **Eric DELEERSNIJDER**

en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences Appliquées

Année Académique 1991 – 1992
(soutenance: 3 mars 1992)



Composition du Jury:

Co-promoteurs: M. DEVILLE (Président)
J. NIHOUL

Lecteurs: J.-P. ANTOINE
A. BERGER
B. MANOHA
G. PICHOT
J.-C. SALOMON

The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work.

John von Neumann

On the 15th of August 1728 we arrived in the latitude of 67°18' and I judged that we had clearly and fully carried out the instructions given by his Imperial Majesty of glorious and ever deserving memory, because the land no longer extended to the north. Neither from the Chukchi coast nor to the eastward could any extension of the land be observed.

Fleet-Captain Vitus Bering

Remerciements

Je dois une reconnaissance toute particulière au Professeur Nihoul dont l'enseignement et les recherches m'ont guidé et dont le soutien a permis la réalisation de cette thèse de doctorat.

Le Professeur Berger m'a fortement encouragé à terminer cette thèse et m'a accueilli dans l'Institut qu'il dirige. Je lui en suis très reconnaissant.

Le Professeur Deville, avec qui j'ai eu des discussions du plus haut intérêt, les Professeurs Antoine et Salomon, ainsi que les Docteurs Manoha et Pichot m'ont fait l'honneur de juger ce texte. Je les en remercie.

J'ai eu des contacts enrichissants avec nombre de collègues. Parmi eux, je tiens à citer Jean-Marie Beckers, Pierre Brasseur, Salim Djenidi, François Ronday et Fabian Waleffe.

Anne Mouchet a traité les données éoliennes, qui ont été fournies par Carol Pease. Jacques Haus a mis à ma disposition des figures provenant du modèle variationnel inverse que Pierre Brasseur et lui ont développé. Etienne Everbecq a réalisé tous les scattérogrammes présentés ici et Françoise Delchambre m'a apporté, sur le "terrain", une assistance très précieuse. Toutes ces personnes m'ont grandement aidé et je leur en sais gré.

Ma gratitude va également au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique, qui m'a confié deux mandats d'Aspirant.

L'expérience et les conseils des participants au programme ISHTAR (Inner SHelf Transfer And Recycling) m'ont été très utiles. ISHTAR était financé par la National Science Foundation des Etats Unis.

Le Service Général d'Informatique de l'Université de Liège a fait beaucoup d'efforts pour me permettre d'utiliser au mieux le matériel disponible.

Finalement, je remercie mes parents qui m'ont toujours apporté toute l'aide et tout le soutien possibles.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Chapitre I: Introduction	1
Chapitre II: Modèle mathématique d'une mer continentale	9
1. Introduction	9
2. Eco-hydrodynamique des mers continentales	11
3. Equations de bilan	13
4. Variabilité marine	15
5. Equations pour les processus à la méso-échelle	16
6. Fermeture turbulente	19
Chapitre III: Modèle numérique	23
1. Introduction	23
2. Systèmes de coordonnées	23
3. Coordonnée σ	27
4. Précision numérique en coordonnée σ	31
5. Lissage de la bathymétrie	34
6. Diffusion horizontale	37
7. Conditions aux limites: fonctions de paroi de fond	40
8. Conditions aux limites: flux de surface	43
9. Dynamique de l'énergie cinétique turbulente	45
10. Conditions aux limites: frontières latérales	47
11. Schéma numérique	50
11.1. Grille numérique	52
11.2. Technique du "volume fini"	53
11.3. Conservation de la masse	55
11.4. Ondes de Poincaré	55
11.5. Flux d'advection	57
11.6. Diffusion	59
11.7. Production/destruction	59
11.8. Organisation des calculs	61
11.9. Discussion	61

Chapitre IV: Océanographie physique de la région du Déroit de Bering	63
1. Introduction	63
2. Circulation générale	65
3. Modèles hydrodynamiques	69
4. Masses d'eau	79
5. Upwelling et production primaire	82
6. Conclusion	87
Chapitre V: Conception d'une simulation numérique tridimensionnelle	91
1. Introduction	91
2. Grille numérique et bathymétrie	91
3. Modélisation de la circulation générale tridimensionnelle	95
4. Modélisation d'une situation typique	98
5. Conclusion	101
Chapitre VI: Résultats: description et interprétation	103
1. Introduction	103
2. Notations	105
3. Vitesse horizontale	105
3.1. Vitesse moyenne	105
3.2. Déviation de vitesse	105
3.3. Comparaison avec les mesures	110
3.4. Vitesse géostrophique	115
3.5. Vitesse d'Ekman	121
3.6. Mise à l'échelle de la déviation de vitesse	124
3.7. Tension de fond	125
4. Vitesse verticale	128
5. Vitesse d'upsloping	129
6. Vitesse d'upwelling	132
6.1. Vitesse verticale dans l'espace σ	132
6.2. Bruit numérique (I)	133
6.3. Visualisation des zones d'upwelling	136
6.4. Mouvements verticaux à proximité des frontières en mer ouverte	140
6.5. Upwellings côtiers	141
6.6. Mécanisme des upwellings	143
6.7. Bruit numérique (II)	151
6.8. Comparaison avec les mesures	151
7. Quantités turbulentes	151
8. Température	156

9. Eco-hydrodynamique	159
10. Conclusion	159
Chapitre VII: Conclusion	163
Annexe I: Modèle mathématique en coordonnée σ	165
Annexe II: Contrôle géostrophique	167
Annexe III: Mélange et upwelling	169
Annexe IV: Pycnocline et moyennes climatiques	171
Annexe V: Comportement asymptotique ($t \rightarrow \infty$) du modèle 3D	175
1. Introduction	175
2. Préliminaires	176
3. Modèle bidimensionnel	176
4. Modèle tridimensionnel	178
4.1. Fermeture turbulente	178
4.2. Champ de vitesse horizontale	179
4.3. Champ de poussée	179
4.4. Interprétation	181
4.5 Remarque concernant les mers profondes ou les océans	181
Références	183

Chapitre 1: Introduction

Le présent travail a été réalisé dans le cadre du programme américain ISHTAR¹ dont l'objectif est l'étude éco-hydrodynamique² de la mer baignant la région du Détroit de Bering (Figure 1).

Plusieurs raisons ont incité la mise sur pied du programme ISHTAR.

Tout d'abord, le Détroit de Bering est le seul passage maritime entre l'Océan Pacifique et l'Océan Arctique. Donc, la matière, la quantité de mouvement ou l'énergie qu'échangent ces océans doit transiter par le Détroit de Bering, qui occupe ainsi une position privilégiée entre le Pacifique et l'Arctique.

Ensuite, les Mers de Bering et de Chukchi, bien qu'encore peu polluées, sont maintenant menacées par l'expansion économique rapide de l'Alaska — dont l'impulsion vient des exploitations pétrolières. Par conséquent, le site choisi offre la possibilité d'étudier, depuis le début, le processus de dégradation d'une mer continentale sous l'action des activités de l'Homme. On peut aussi espérer que l'étude conduira à des décisions adéquates en matière de gestion et de protection des Mers de Bering et de Chukchi.

Enfin, il faut souligner l'exceptionnelle productivité de l'écosystème de la région du Détroit de Bering. Durant tout l'été, la production primaire³ s'y maintient à des valeurs très élevées, que l'absence seule de couverture de glace ne suffit pas à expliquer. Le taux de production de carbone organique peut atteindre 1 à 10 grammes par mètre carré et par jour. Dans une mer continentale, une production primaire aussi active n'est généralement possible que si des fleuves ou des déversements artificiels apportent en permanence une quantité suffisante de matières nutritives. Or, dans la mer que nous allons étudier, il semble bien que les courants marins eux-mêmes maintiennent une concentration élevée de sels nutritifs dans la couche euphotique⁴.

Les temps caractéristiques d'évolution des écosystèmes marins sont d'au moins quelques jours. Puisque l'on désire étudier l'influence des courants sur l'écosystème du domaine d'intérêt, il semble logique de s'intéresser aux processus hydrodynamiques dont les échelles de temps sont comparables, c'est-à-dire la "circulation générale" (Figure 2).

¹ ISHTAR = Inner Shelf Transfer And Recycling.

² éco-hydrodynamique = écologique et hydrodynamique.

³ production primaire = transformation de matière minérale en matière organique; la base de ce processus est la photosynthèse, qui est assurée par les végétaux.

⁴ couche euphotique = couche adjacente à la surface de la mer où l'énergie lumineuse disponible permet une production nette positive de matière organique.

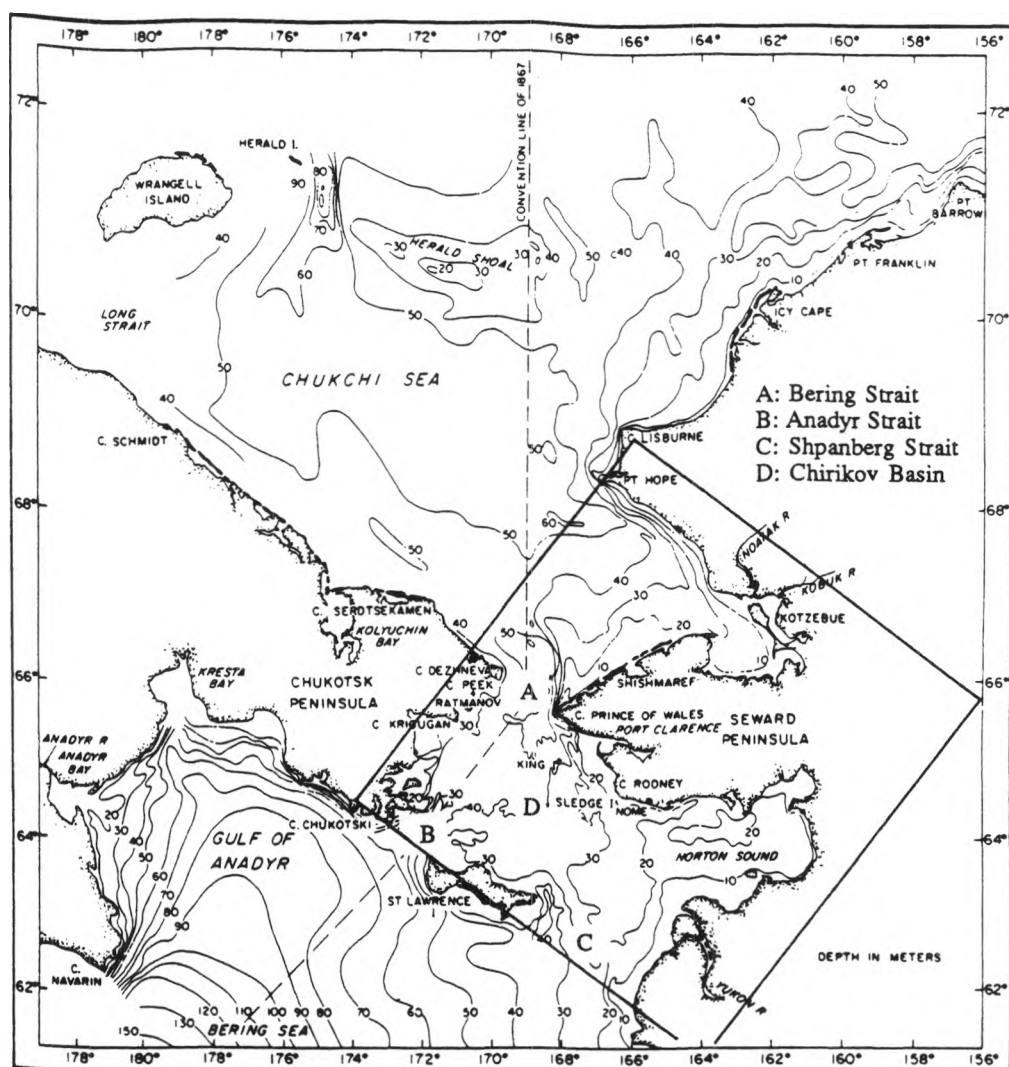


Figure 1. Bathymétrie des Mers de Bering et de Chukchi. Ce sont des mers continentales, et donc des mers peu profondes par rapport aux océans.

L'eau du Courant d'Anadyr (Figure 2), qui constitue la principale contribution au flux traversant le Détroit de Bering, présente généralement une thermocline⁵ très marquée. Par conséquent, la couche de surface est, du point de vue du mélange turbulent vertical, isolée de la couche de fond. Les substances nutritives qui se trouvaient dans la couche euphotique sont consommées par la production primaire s'effectuant en amont du Golfe d'Anadyr (Figure 3a). A proximité du fond, la quantité de lumière est insuffisante pour autoriser la photosynthèse, ce qui explique, partiellement, la plus grande concentration en sels nutritifs mesurée dans cette zone (Figure 3b). Dans le Détroit d'Anadyr, des substances nutritives sont constamment injectées dans la couche euphotique (Figure 3a), permettant ainsi le développement du phytoplancton dans le Bassin de Chirikov et dans la Mer de Chukchi

⁵ thermocline = région où le gradient vertical de température est très grand; la thermocline est généralement une région de grande variation de la masse volumique (pycnocline), ce qui inhibe fortement la turbulence.

(Figure 4). Dans ces endroits, la concentration en phytoplancton est très élevée, ce qui assure la richesse des niveaux supérieurs de la chaîne alimentaire — zooplancton, poissons, cétacés, ...



Figure 2. Schéma de circulation générale sur le plateau continental de la Mer de Bering. Les points d'interrogation indiquent des caractéristiques hypothétiques.

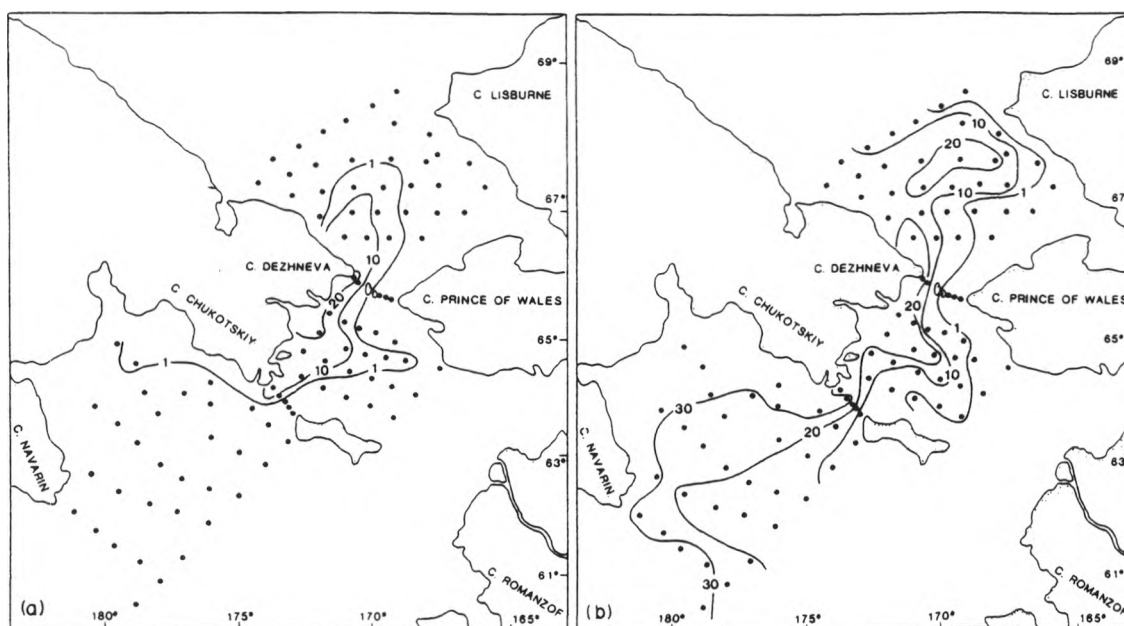


Figure 3. Concentration en nitrate (μ at-g NO_3 / litre) à proximité de la surface (a) et du fond (b) en août 1988 (d'après WALSH *et al.*, 1989b).

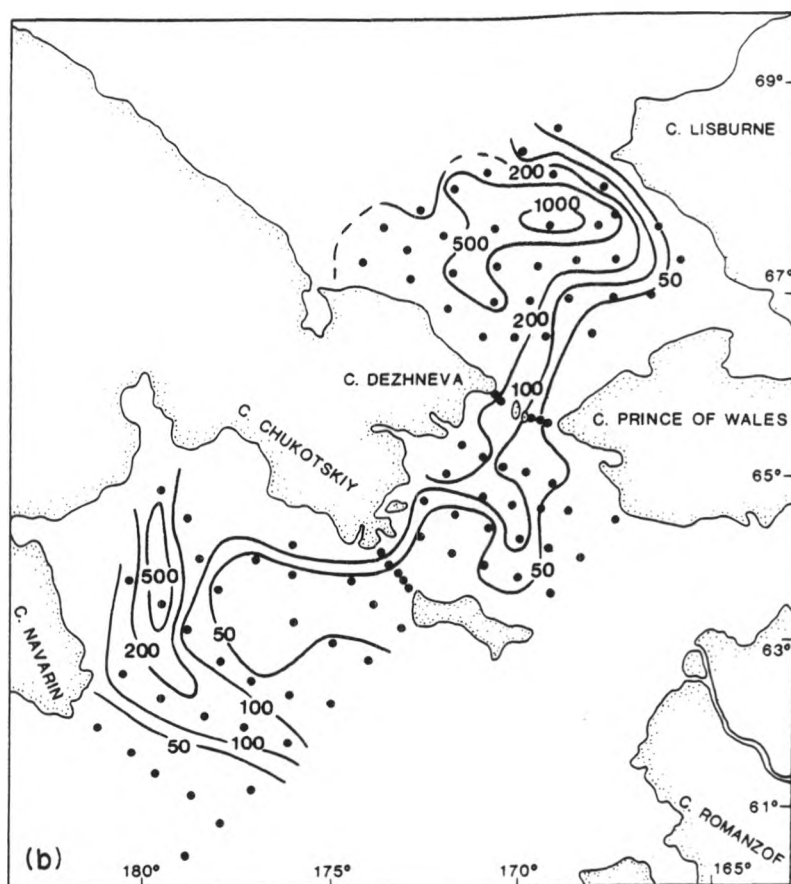


Figure 4. Intégrale sur la hauteur de la colonne d'eau de la concentration en chlorophylle ($10^{-6} \text{ kg m}^{-2}$) en août 1988 (d'après WALSH *et al.*, 1989b).

Les mesures *in situ* et les photographies des satellites (Figure 5) indiquent qu'un panache d'eau froide se maintient dans le Détroit d'Anadyr et dans une partie du Bassin de Chirikov.

De cette description, on conclut que, à proximité du Détroit d'Anadyr, des processus hydrodynamiques tendent à homogénéiser la colonne d'eau, conduisant ainsi à l'apparition d'eau froide à la surface de la mer et à l'injection de substances nutritives dans la couche euphotique.

Dans la région du Détroit de Bering, la circulation générale est nettement plus intense que dans la plupart des mers continentales — comme la Mer du Nord. En effet, le flux mensuel traversant le Détroit de Bering est de l'ordre de $10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Il y correspond des vitesses horizontales de plusieurs décimètres par seconde si bien que le temps de résidence de l'eau dans le domaine d'intérêt ne dépasse guère un mois. On peut alors considérer que tous les organismes vivant dans la région étudiée font partie d'un seul écosystème, dont la source première de matières nutritives se situe dans les environs du Détroit d'Anadyr et dont l'étendue horizontale est exceptionnellement grande puisqu'elle avoisine 500 kilomètres.

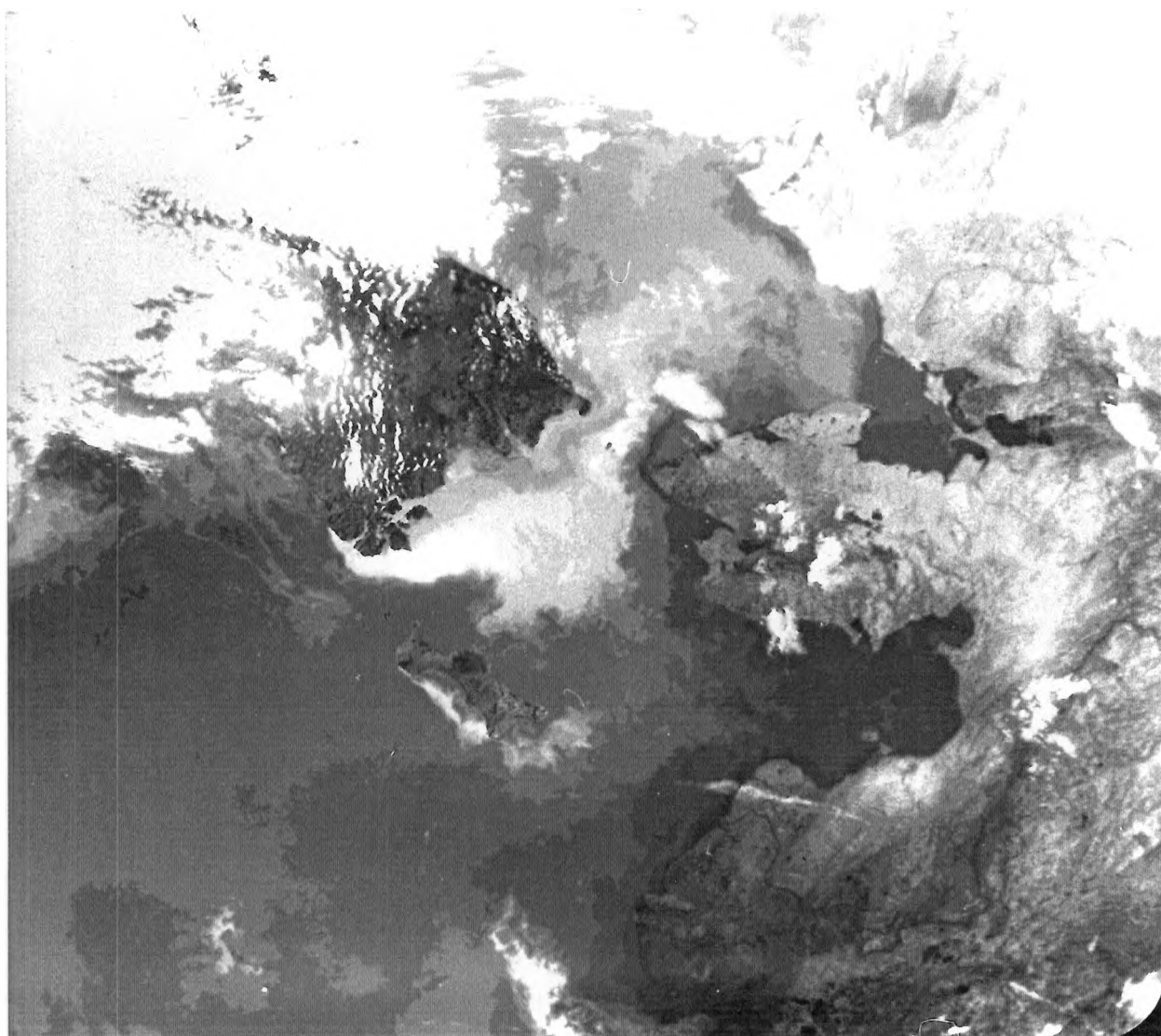


Figure 5. Température de surface de la mer reconstituée à partir de données satellitaires acquises dans l'infrarouge le 27 août 1987. Plus le gris est clair, plus l'eau est froide. On notera la présence de nuages, surtout dans la partie supérieure de la figure — Sibérie et Mer de Chukchi.

Pour bien comprendre l'écosystème du domaine d'intérêt, il faut donc avoir une connaissance précise de l'hydrodynamique de la région et, en particulier, des flux verticaux — advectifs et diffusifs — agissant à proximité du Déroit d'Anadyr. Malheureusement, aucun instrument ne permet — à un coût raisonnable — la mesure *in situ* des flux verticaux. Donc, seul un modèle hydrodynamique permettrait de quantifier ces flux verticaux qui jouent un rôle crucial dans la dynamique de l'écosystème auquel ISHTAR s'intéresse.

L'objectif de ce travail est la conception d'un modèle hydrodynamique tridimensionnel et l'application de ce modèle à l'étude de la circulation générale estivale dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR.

Pour atteindre le but fixé, on commence par établir un modèle mathématique général des phénomènes se déroulant à la méso-échelle⁶ dans les mers peu profondes (Chapitre II). Dans le Chapitre III, on décrit une méthode numérique de résolution des équations du modèle. Ensuite, on résume l'état des connaissances de l'océanographie physique du domaine d'intérêt (Chapitre IV). On fixe alors (Chapitre V) les conditions d'utilisation du modèle ainsi qu'une technique permettant son application à la représentation de la circulation générale — tâche pour laquelle il n'est pas initialement conçu. Enfin, dans le Chapitre VI, on montre que les résultats obtenus se comparent favorablement avec les données disponibles et on tente de dégager une explication générale de l'hydrodynamique de la région du Déroit de Bering. On mentionne aussi que d'autres ont introduit avec succès nos résultats hydrodynamiques dans un modèle écologique.

La modélisation des flux verticaux et du panache d'eau froide naissant dans le déroit d'Anadyr constitue l'originalité principale de ce travail. De plus, la description d'un mécanisme d'upwelling⁷ induit par la tension de fond est aussi un résultat inédit.

⁶ méso-échelle = échelle de temps des phénomènes comme les marées ou les tempêtes; la méso-échelle est habituellement considérée comme l'échelle temporelle immédiatement inférieure à celle de la circulation générale.

⁷ upwelling = remontée d'eau; par opposition: downwelling = descente d'eau.

Chapitre II: Modèle mathématique d'une mer continentale

1. Introduction

La croûte terrestre se compose de deux parties distinctes: les continents et les océans, ces derniers représentant environ 70% de la superficie de notre planète. Cependant, 16% environ des continents, soit $\approx 27 \times 10^6 \text{ km}^2$, sont immergés (EISMA, 1988): ce sont les plateaux continentaux, qui sont recouverts par les mers continentales (Figure 1).

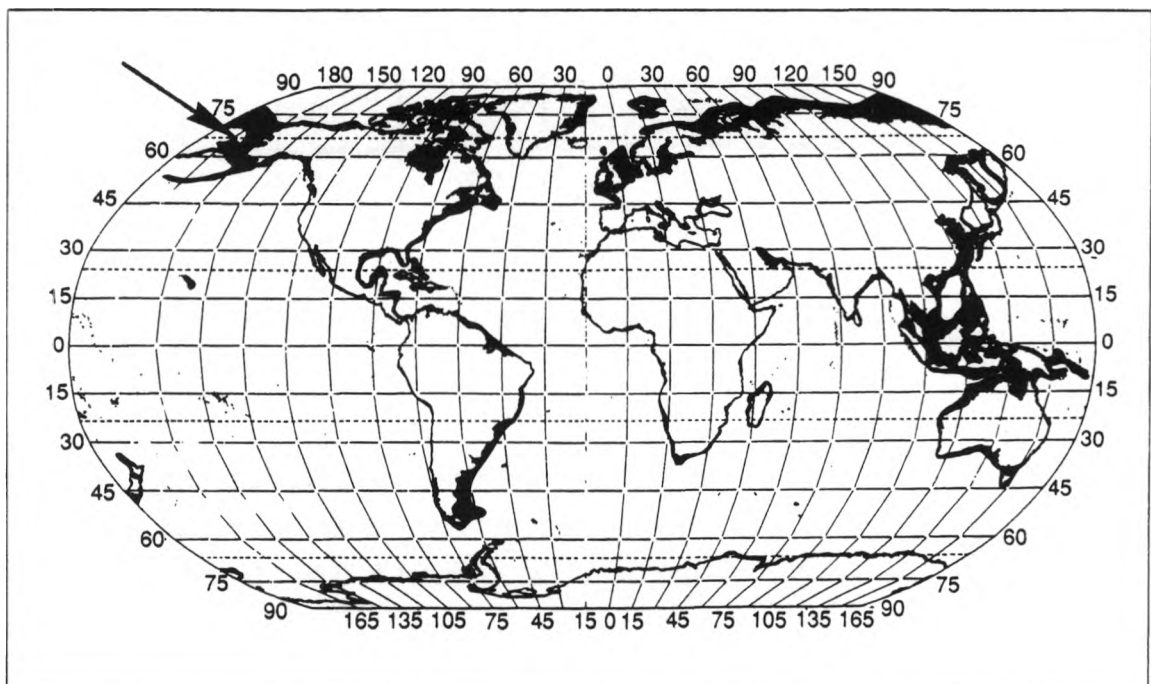


Figure 1. Distribution des plateaux continentaux: les zones noires correspondent à une profondeur inférieure à 150 m (d'après POSTMA et ZIJLSTRA, 1988a). La flèche indique la position du domaine d'intérêt de ce travail.

Typiquement, un plateau continental descend, en pente douce — pente $\approx 10^{-3}$ — depuis la côte jusqu'au talus continental, où la profondeur de la mer s'accroît rapidement, avec une pente de l'ordre de 10^{-1} . Le talus continental marque la séparation géologique entre la croûte terrestre continentale et la croûte océanique.

La profondeur des mers continentales ne dépasse généralement pas 100 à 200 m, alors que celle des océans est de l'ordre de 5000 m. Par conséquent, si les mers continentales couvrent 7.5% des étendues marines, elles ne représentent que 0.15% de leur volume (POSTMA, 1988). Il ne faut cependant pas croire que les mers continentales sont d'une importance négligeable. En effet, la biomasse par unité de surface des mers peu profondes dépasse nettement celle des océans (Table 1). C'est pourquoi 90% de la nourriture humaine d'origine marine provient des mers continentales (POSTMA et ZIJLSTRA, 1988b). Mais, d'un autre côté, l'Homme y déverse, directement ou via les fleuves, de grandes quantités de métaux lourds, d'engrais, de pesticides, d'isotopes radioactifs et autres substances dommageables, qui finissent par causer des perturbations écologiques importantes.

domaine	surface %	biomasse moyen. (matière sèche) $10^{-3} \text{ kg m}^{-2}$	biomasse totale (matière sèche) 10^9 kg	masse totale de chlorophylle 10^9 kg
océans	92	3	1008	10
mers continentales	7.4	10	270	5
autres: récifs, estuaires, ...	0.6	1200	2600	3
totaux	100	10.7	3878	18

Table 1. Répartition de la biomasse végétale marine (d'après WHITTLE (1977) et SHARP (1988)).

Faut-il alors interdire tout rejet? Bien que l'on mette actuellement l'accent sur la nécessité d'utiliser des technologies dites "propres", il est évident que l'on ne peut espérer interdire tous les rejets avant un certain temps. Donc, le réalisme commande de continuer à "gérer la mer", c'est-à-dire tenter d'établir un compromis entre les avantages qu'offrent les capacités de recyclage de la mer en tant que dépotoir et les dangers immédiats, ou à plus long terme, qu'implique une trop grande dégradation de celle-ci.

La gestion de la mer n'est pas un problème simple. Pour gérer la mer, il faut comprendre et prévoir des phénomènes nombreux et complexes interagissant non-linéairement. A l'évidence, le seul outil capable d'aborder cette tâche est le modèle mathématique.

Il faut déterminer l'envergure du modèle (NIHOUL et DJENIDI, 1987), c'est-à-dire fixer le nombre de variables indépendantes, la dimension dans l'espace physique, et le nombre de variables d'état, ou variables dépendantes, c'est-à-dire la dimension dans l'espace d'état. Idéalement, un modèle marin doit être instationnaire et tridimensionnel. Quant aux variables d'état, on les choisit en fonction des objectifs du modèle. On doit certainement disposer d'un module permettant de représenter le transport et la dispersion de divers polluants. Pour estimer leur impact, il faut mettre au point un module écologique, qui représente l'évolution de la biomasse. Le module hydrodynamique calcule des variables comme la vitesse horizontale, la vitesse verticale, la température, la salinité, les diffusivités turbulentes, ...

L'hydrodynamique influence, parfois de façon déterminante, tous les autres processus marins qui, en retour, ne la modifient que fort peu. Donc, tous les compartiments du modèle, quelle que soit leur sophistication et leur interdépendance, doivent être couplés à un module hydrodynamique.

2. Eco-hydrodynamique des mers continentales

Le développement d'un modèle hydrodynamique constitue le but de ce travail. Ce modèle ne se justifie généralement que s'il est placé en amont d'autres modules. Pour mieux le comprendre, on va brièvement esquisser les mécanismes de base des écosystèmes des mers continentales, en insistant sur l'impact écologique des processus hydrodynamiques comme les courants, la stratification, les upwellings ...

La source de la matière organique est la production primaire, c'est-à-dire la transformation de matière minérale en matière organique. Cette transformation débute par la photosynthèse. La matière organique produite par les végétaux est la base de la chaîne trophique (Figure 2). Il est donc légitime de focaliser notre discussion sur la production primaire. Examinons les facteurs qui la favorisent ou l'inhibent.

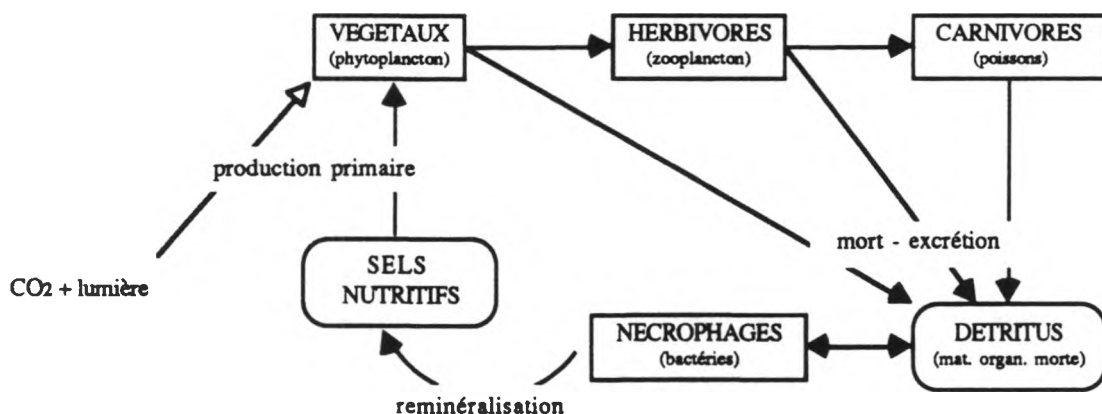


Figure 2. Schéma simple des flux de matière et d'énergie dans un écosystème marin.

La production primaire exige du CO_2 , de la lumière et des sels nutritifs dissous (nitrates, phosphates, ...). C'est la quantité disponible du moins abondant de ces éléments qui contrôle l'activité photosynthétique. De plus, la température influence la vitesse des réactions chimiques conduisant à la synthèse de matière organique. D'autre part, certains polluants, comme les hydrocarbures chlorés, peuvent freiner et même arrêter la photosynthèse (WALSH, 1988).

Dans la mer, le dioxyde de carbone ne manque pas: il ne contrôle donc en aucune façon la production de matière organique.

Le taux d'activité photosynthétique augmente avec l'intensité lumineuse. La production nette de carbone organique dépend de la différence entre production par photosynthèse et perte par respiration — qui produit du CO_2 et consomme de l'oxygène. En-dessous d'un certain seuil d'énergie lumineuse, les végétaux perdent globalement plus de carbone qu'ils n'en produisent et ne peuvent donc se maintenir en vie dans ces conditions. L'intensité lumineuse diminuant rapidement avec la profondeur (IVANOFF, 1977), la production primaire nette n'est positive que dans une couche — appelée couche euphotique — adjacente à la surface de la mer et dont l'épaisseur varie, selon la transparence de l'eau, de quelques mètres à quelques dizaines de mètres (WALSH, 1988).

On pourrait en conclure que la quantité de matière organique produite dans une région marine donnée ne dépend pas du volume d'eau mais plutôt de la surface du domaine considéré. Cependant, la productivité par unité de surface des mers continentales dépasse d'un facteur 3 à 15 celle des océans (WHITTLE, 1977). C'est donc l'abondance relative des substances nutritives qui distingue les mers continentales des océans.

Pour que la photosynthèse puisse se produire, les substances nutritives doivent être présentes dans la couche euphotique, c'est-à-dire dans une région jouxtant la surface de la mer. D'autre part, les matières mortes ont tendance à couler de sorte que leur recyclage en sels minéraux se déroule plutôt en-dessous de la couche euphotique. Par conséquent, la matière organique reminéralisée par les nécrophages ne peut alimenter la production primaire que si elle est ramenée dans la couche euphotique. Deux processus hydrodynamiques s'en chargent: la diffusion turbulente et l'advection verticale (upwelling).

Dans une mer peu profonde, l'intensité des courants est telle que toute la colonne d'eau peut être mélangée. Il existe cependant des cas où subsiste une pycnocline — parfois, il y en a même plusieurs —, c'est-à-dire une mince couche où la stratification est très forte et inhibe la turbulence. Une pycnocline est donc une barrière à la diffusion turbulente: déterminer sa présence ou son absence est capital.

L'advection verticale agit sur la position de la pycnocline: elle peut la faire descendre, la faire monter ou la supprimer, si elle atteint le fond ou la surface de la mer.

Les upwellings peuvent aussi transporter les substances nutritives vers la couche euphotique.

Dans une mer continentale, la diffusion turbulente et les upwellings s'avèrent généralement plus efficaces que dans les océans. D'autre part, les fleuves ou les canaux d'évacuation des eaux usées rejettent dans les régions côtières d'importantes quantités de substances nutritives d'origine naturelle ou humaine — produits de lessive, engrais ...

On comprend maintenant les raisons de la grande productivité des mers continentales et donc de leur importance écologique.

On l'a déjà dit, ce travail se concentre sur les aspects hydrodynamiques. Le lecteur est cependant invité à se souvenir, à la lumière de cette brève discussion, du rôle écologique des processus hydrodynamiques.

3. Equations de bilan

On s'intéresse à des phénomènes marins dont les échelles spatiales et temporelles sont telles que la mécanique des milieux continus s'applique. Tenant compte des particularités des écoulements marins, on peut cependant simplifier les équations générales régissant l'évolution des milieux continus.

La plupart des forces ou accélérations agissant dans la mer sont si faibles que, dans la direction de la pesanteur, on peut considérer que la mer obéit à peu près à l'équilibre hydrostatique,

$$\frac{\partial p}{\partial x_v} \mathbf{e}_v \approx -\rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

où p , ρ et $\mathbf{g}$ désignent, respectivement, la pression, la masse volumique et l'accélération de la pesanteur; x_v est la coordonnée verticale associée au vecteur vertical unitaire $\mathbf{e}_v = -\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$.

La profondeur d'une mer continentale ne dépassant pas 100 à 200 m, (1) implique que dans l'équation d'état de l'eau de mer (UNESCO, 1981) la pression peut être fixée à une valeur constante — la pression atmosphérique de référence, $p_{\text{atm},0}$, par exemple. Pour la plupart des applications, l'équation d'état se réduit alors à une relation du type

$$\rho = \rho(T, S), \quad (2)$$

T et S représentant la température et la salinité — concentration en sels dissous. La gamme de variation de T et S est telle que ρ est toujours très proche d'une valeur de référence constante, ρ_0 . On décide de ne pas représenter les ondes acoustiques, auxquelles correspondent des modifications petites mais rapides de ρ . De toutes façons, les ondes acoustiques véhiculent une partie infime de l'énergie totale des mouvements marins. On peut donc faire l'approximation de Boussinesq, c'est-à-dire négliger les variations de ρ dans tous les termes des équations, sauf dans la force de pesanteur.

Les deux termes de (1) sont très nettement supérieurs à tous les autres termes de l'équation de quantité de mouvement verticale. Or, dans un modèle numérique, il est rarement sain de conserver deux termes dominants dont la somme est largement inférieure à chacun des termes (GARY, 1973; HANEY, 1991; DELEERSNIJDER et BECKERS, 1991). Pour remédier à cet inconvénient, on introduit des variables représentant la différence par rapport à un état de référence en équilibre hydrostatique:

$$\mathbf{b} = b \mathbf{e}_v = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \mathbf{g} = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g \mathbf{e}_v, \quad (3)$$

$$q = \frac{p - p_0}{\rho_0} \quad (4)$$

où

$$p_0 = -\rho_0 g x_v + p_{\text{atm},0} \quad (5)$$

Ci-dessus, on appelle “poussée” la variable b et on suppose que la coordonnée x_v s'annule au niveau de référence de la surface de la mer.

Dans un référentiel lié à la Terre — et tournant avec elle —, on peut maintenant écrire les équations de base de l'hydrodynamique des mers peu profondes (BATCHELOR, 1967; NIHOUL, 1980). Ces équations expriment le bilan de masse (6), de quantité de mouvement (7), d'énergie interne (8) et de sel (9):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla q + \mathbf{b} + \nabla \cdot (2 \mathbf{v} \mathbf{D}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} T) = \frac{-\nabla \cdot \mathbf{q}^S}{\rho_0 c} + \frac{2\mathbf{v}}{c} \mathbf{D} : \mathbf{D} + \nabla \cdot (\lambda^T \nabla T), \quad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} S) = \nabla \cdot (\lambda^S \nabla S), \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad (10)$$

le tenseur mesurant le taux de déformation du fluide, et

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (11)$$

($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) étant les vecteurs de la base orthonormée choisie — auxquels sont associées les coordonnées (x_1, x_2, x_3). Ci-dessus, $\mathbf{v}$ dénote la vitesse relative par rapport à la Terre, dont le vecteur rotation est $\boldsymbol{\Omega}$ ($|\boldsymbol{\Omega}| \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). De plus, si $\mathbf{g}_g$ désigne l'accélération de la pesanteur purement due à la gravitation universelle, on pose

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_g - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (12)$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur position du point considéré par rapport au centre de la Terre. D'autre part, ($\mathbf{v}, \lambda^T, \lambda^S$) $\approx (10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-9}) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ représentent les diffusivités moléculaires de quantité de

mouvement, de température et de sel. L'énergie interne vaut $c T$, où c ($\approx 4 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) est la chaleur spécifique de l'eau de mer, supposée constante. Enfin, q^S est le flux de rayonnement solaire.

Bien entendu, on peut récrire l'équation d'état (2) sous la forme

$$b = b(T, S) . \quad (13)$$

Selon les besoins du modèle, des équations pour des concentrations c^i autres que la salinité peuvent être ajoutées:

$$\frac{\partial c^i}{\partial t} + \nabla \cdot [(v + m^i) c^i] = p^i + \nabla \cdot (\lambda^i \nabla c^i) , \quad (14)$$

où p^i et m^i représentent le taux de production/destruction et la vitesse de migration éventuelle du constituant "i", qui peut être une substance polluante, du zooplancton, un sel nutritif, ...

4. Variabilité marine

Les équations de bilan que l'on vient d'écrire permettent, en principe, de représenter tous les phénomènes macroscopiques se déroulant dans les mers peu profondes, à l'exception des ondes acoustiques supprimées par l'approximation de Boussinesq.

Les phénomènes marins se développent sur une gamme très étendue d'échelles spatiales et temporelles. Ainsi, le temps caractéristique peut aller d'une seconde à des mois, voire des années. La longueur caractéristique peut varier du millimètre à des dizaines ou des centaines de kilomètres. Toutefois, aucun modèle pratiquement réalisable ne peut ambitionner de représenter tous les processus à toutes les échelles. Il faut définir l'ouverture du modèle (NIHOUL et DJENIDI, 1987), c'est-à-dire l'échelle spatio-temporelle des phénomènes à étudier. Ensuite, on filtre les processus dont les échelles sont inférieures.

Dans la mer, il est indispensable de distinguer la longueur caractéristique verticale, $\mathcal{L}_v$, de la longueur caractéristique horizontale, $\mathcal{L}_h$. La première, limitée par la profondeur de la mer, ne dépasse pas quelques dizaines de mètres alors que la seconde peut prendre des valeurs beaucoup plus grandes, selon la taille du domaine d'intérêt. On définit le quotient d'aspect comme

$$\delta = \frac{\mathcal{L}_v}{\mathcal{L}_h} . \quad (15)$$

Classer les phénomènes marins selon leur temps caractéristique $\mathcal{T}$ s'avère très commode. En partant des processus les plus "rapides", on identifie successivement les échelles de mouvement suivantes (NIHOUL *et al.*, 1989):

– Micro-échelle: $\mathcal{T} \approx 1 - 10 \text{ s}$ et $\delta \approx 1$. Il s'agit de la turbulence tri-dimensionnelle et, en particulier, de la cascade turbulente au bas de laquelle se produit la dissipation visqueuse. On trouve aussi les

ondes courtes de surface qui, dès que leur amplitude est suffisante, se brisent et génèrent de la turbulence.

- Echelle médiale: $\mathcal{T} \approx 10^2 - 10^3$ s et $\delta \leq 1$. Ce sont les ondes internes courtes et tous les processus turbulents affectés par la stratification (structure fine verticale, blinis, ...).
- Méso-échelle: $\mathcal{T} \approx 10^4$ s et $\delta \ll 1$. Ce sont les ondes de Poincaré — excitées par les forcings de marée-tempête —, les ondes internes longues et les oscillations d'inertie. On doit y ajouter les variations journalières dues à l'alternance du jour et de la nuit.
- Echelles synoptiques et climatiques: $\mathcal{T} > 10^6$ s et $\delta \ll 1$. A ces échelles, on trouve les fronts (SIMPSON et HUNTER, 1974) et la circulation résiduelle, ou circulation générale (ou climatique), qui résulte du forcing météorologique à des échelles d'un mois, ou plus (DJENIDI, 1987), des variations spatiales des courants de marée (NIHOUL et RONDAY, 1975) ou de l'hydrodynamique de l'océan au-delà du talus continental (STIGEBRANDT, 1984).

Remarquons que l'anisotropie des processus — mesurée par δ^{-1} , par exemple — croît, en gros, au fur et à mesure que le temps caractéristique augmente.

5. Equations pour les processus à la méso-échelle

Selon REYNOLDS (1894), on peut considérer un écoulement turbulent comme la superposition d'un écoulement moyen et de fluctuations turbulentes, que l'on distingue à l'aide d'une moyenne statistique, définie comme la moyenne sur toutes les réalisations possibles d'un écoulement donné.

Cette conception de la moyenne ne s'applique pas aux fluides géophysiques car on voit mal comment on pourrait y déterminer — expérimentalement, ou de toute autre façon — l'ensemble des réalisations possibles d'un écoulement. On peut cependant définir la moyenne temporelle d'une variable y :

$$\langle y(t, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{t_m} \int_{t-t_m/2}^{t+t_m/2} y \, dt. \quad (16)$$

Les processus pour lesquels $\mathcal{T} \ll t_m$ apparaissent semblables aux fluctuations, telles que les définissait Reynolds, tandis que les processus dont le temps caractéristique dépasse nettement t_m peuvent s'interpréter comme l'écoulement moyen de Reynolds. S'il existe une vallée dans le spectre de y aux temps caractéristiques de l'ordre de t_m , alors les phénomènes répondant à $\mathcal{T} \approx t_m$ sont relativement peu énergétiques de sorte que les fluctuations et l'écoulement moyen sont bien distincts. Dans ce cas, l'opérateur moyenne possède des propriétés intéressantes, comme par exemple:

$$\langle y \rangle \sim \langle \langle y \rangle \rangle \quad (17)$$

et

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial t} \right\rangle \sim \frac{\partial \langle y \rangle}{\partial t} . \quad (18)$$

On peut profiter de ces propriétés pour moyenner les équations de base de l'hydrodynamique des mers peu profondes et obtenir des équations d'évolution pour des grandeurs moyennes. De la sorte, il n'est plus nécessaire de représenter le détail des phénomènes dont les échelles de temps sont inférieures à t_m .

Si $t_m \approx 10^3$ s, alors les phénomènes à la méso-échelle — et aux échelles encore moins "rapides" — apparaissent comme étant l'écoulement moyen. Les processus à la micro-échelle et à l'échelle médiale font partie des fluctuations, mais il n'est guère certain qu'il existe vraiment une vallée énergétique dans le spectre des mouvements marins aux alentours de $\mathcal{T} \approx 10^3$ s (WOODS, 1980).

Quoi qu'il en soit, on applique la moyenne temporelle aux équations de bilan (6)-(7) et (14). Les moyennes des variables d'état deviennent les nouvelles inconnues du problème. On applique (17)-(18) de sorte que les termes linéaires ne font apparaître que les moyennes des variables d'état. Il n'en va pas de même de l'advection.

Si y' désigne la partie fluctuante de la grandeur scalaire y , alors

$$y = \langle y \rangle + y' , \quad \langle y' \rangle = 0 . \quad (19)$$

De façon analogue, on écrit pour la vitesse:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}' , \quad \langle \mathbf{v}' \rangle = 0 . \quad (20)$$

Il s'ensuit que les moyennes des flux d'advection de y et de $\mathbf{v}$ deviennent, respectivement,

$$\langle \mathbf{v} y \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle y \rangle + \langle \mathbf{v}' y' \rangle \quad (21)$$

et

$$\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle . \quad (22)$$

La turbulence, à l'image de la diffusion moléculaire, a généralement pour effet de diminuer les gradients des variables d'état et donc de favoriser le mélange. Dans cet esprit, BOUSSINESQ (1877) a proposé d'ajouter des diffusivités turbulentes aux diffusivités moléculaires. Ainsi, on paramétrise les flux de diffusion turbulente et moléculaire d'une grandeur scalaire y par

$$\langle \mathbf{v}' y' \rangle - \lambda^y \nabla \langle y \rangle = -(\lambda_T^y + \lambda^y) \nabla \langle y \rangle . \quad (23)$$

De même, pour les flux de quantité de mouvement (RODI, 1984):

$$\langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle - 2 \nu \langle \mathbf{D} \rangle = -2 (\nu_T + \nu) \langle \mathbf{D} \rangle + \frac{2}{3} e \mathbf{I}, \quad (24)$$

où e représente l'énergie cinétique turbulente,

$$e = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle. \quad (25)$$

Ci-dessus, $\mathbf{I}$ est le tenseur identité tandis que λ_T^y et ν_T dénotent, respectivement, la diffusivité turbulente du scalaire y et la viscosité turbulente. La turbulence mélangeant nettement plus efficacement que les processus moléculaires, on a le plus souvent:

$$(\lambda_T^y, \nu_T) \gg (\lambda^y, \nu). \quad (26)$$

On néglige donc les diffusivités moléculaires par rapport à leurs équivalents turbulents. Néanmoins, la modélisation adéquate des régions où la turbulence est très faible requiert l'imposition d'une borne inférieure aux diffusivités, à savoir:

$$(\lambda_T^y, \nu_T) \geq (\lambda^y, \nu). \quad (27)$$

Pour les phénomènes à la méso-échelle, le quotient d'aspect est nettement inférieur à l'unité ($\delta \ll 1$). Il en résulte que de nombreux termes des équations sont négligeables, à l'ordre δ ou δ^2 . Ainsi, la diffusion verticale domine nettement la diffusion horizontale. Plus important encore, l'équation de quantité de mouvement verticale se réduit à l'équilibre hydrostatique (PEDLOSKY, 1982).

D'autre part, l'extension horizontale d'un plateau continental est généralement beaucoup plus petite que le rayon de la Terre. On peut donc négliger la courbure de la Terre et écrire les équations en coordonnées cartésiennes dans le plan tangent à la Terre au centre du domaine considéré. Si $\mathbf{e}_3$ dénote le vecteur unitaire vertical, alors on pose généralement

$$2 \Omega \cdot \mathbf{e}_3 = f. \quad (28)$$

Dans le domaine d'intérêt, $f \approx 1.3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Conformément à la discussion qui précède, la forme finale des équations régissant l'évolution des processus à la méso-échelle dans une mer peu profonde est:

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) + \frac{\partial (w \mathbf{u})}{\partial x_3} + f \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u} = -\nabla_h q + \frac{\partial}{\partial x_3} (\nu_T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}) + \mathbf{D}^u, \quad (30)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_3} = b, \quad (31)$$

$$b = b(T, S), \quad (32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{u} T) + \frac{\partial(w T)}{\partial x_3} = \frac{-1}{\rho_0 c} \frac{\partial q^s}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\lambda_T^T \frac{\partial T}{\partial x_3}) + D^T, \quad (33)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{u} S) + \frac{\partial(w S)}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} (\lambda_T^S \frac{\partial S}{\partial x_3}) + D^S, \quad (34)$$

$$\frac{\partial c^i}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{u} c^i) + \frac{\partial[(w + m^i) c^i]}{\partial x_3} = p^i + \frac{\partial}{\partial x_3} (\lambda_T^i \frac{\partial c^i}{\partial x_3}) + D^i. \quad (35)$$

avec

$$\nabla_h = \nabla - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (36)$$

Ci-dessus, on a omis les “< >”, pour simplifier les notations. De plus, on a décomposé la vitesse $\mathbf{v}$ en sa partie horizontale, $\mathbf{u}$, et sa composante verticale, w , c'est-à-dire $\mathbf{v} = \mathbf{u} + w \mathbf{e}_3$.

Le taux moyen de production d'énergie interne par dissipation visqueuse est négligeable, dans l'équation de bilan d'énergie interne. Ce terme n'apparaît donc pas dans (33).

Il convient d'ajouter de la diffusion horizontale dans les équations à la méso-échelle. La paramétrisation et l'importance de cet effet est un sujet extrêmement controversé (DELEERSNIJDER et WOLANSKI, 1990) que l'on abordera dans le Chapitre III. Pour le moment on se contente de noter les termes correspondants $\mathbf{D}^u$, pour la vitesse horizontale, et D^y , pour une grandeur scalaire y .

6. Fermeture turbulente

Le système d'équations (29)-(35) n'est pas fermé. En effet, les diffusivités turbulentes de quantité de mouvement ou de grandeurs scalaires ne sont pas déterminées. Calculer celles-ci est le rôle de la fermeture turbulente.

Il existe des schémas de fermeture turbulente de niveaux de complexité très différents (RODI, 1984, 1987). Ici, il faut que l'ordre de grandeur des flux turbulents puisse être bien représenté mais,

surtout, il est impératif que le schéma de fermeture puisse tenir compte de l'existence possible de pycnoclines. Par conséquent, toute fermeture où la diffusivité est constante (PEDLOSKY, 1982) est à proscrire. Idem pour les schémas où le profil vertical des diffusivités est imposé (DAVIES, 1990; DELEERSNIJDER *et al.*, 1991). On peut envisager des formules comme celles de MUNK et ANDERSON (1948) ou PACANOWSKI et PHILANDER (1981), dans lesquelles la stratification intervient via le nombre de Richardson,

$$Ri = \frac{N^2}{M^2} \quad (37)$$

où N et M , les fréquences de Brunt-Väisälä et de Prandtl, sont définies par

$$(N^2, M^2) = \left(\frac{\partial b}{\partial x_3}, \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2 \right). \quad (38)$$

Un modèle plus sophistiqué permettant de représenter la production/destruction locale, l'advection et la diffusion des quantités turbulentes contient cependant plus de potentialités (RODI, 1984). On considère la viscosité turbulente comme le produit d'une vitesse caractéristique, V_T , et d'une échelle de longueur ou longueur de mélange, L_T , c'est-à-dire

$$\nu_T = V_T L_T. \quad (39)$$

La vitesse caractéristique est, selon la formule de Kolmogorov-Prandtl, proportionnelle à $\epsilon^{1/2}$, si bien que l'on a finalement (NIHOUL, 1984):

$$\nu_T = \frac{\alpha_\epsilon^{1/4}}{2} \epsilon^{1/2} L_T, \quad (40)$$

où α_ϵ est une constante d'ordre 1. On considère les diffusivités turbulentes de température, de salinité ou de poussée comme égales — $\lambda_T^T = \lambda_T^S = \lambda_T^b$. Une formule empirique relie λ_T^b à ν_T (NIHOUL et DJENIDI, 1987; NIHOUL et BECKERS, 1990) (Figure 3):

$$\lambda_T^b = \gamma (1 - Rf)^{1/2} \nu_T, \quad (41)$$

où γ désigne une constante empirique d'ordre 1 et où Rf , le nombre de Richardson de flux, est, en fait, une fonction de Ri , car

$$Rf = \frac{\lambda_T^b}{\nu_T} Ri. \quad (42)$$

D'où

$$1 - Rf = \frac{2}{2 + \gamma Ri \sqrt{4 + (\gamma Ri)^2 + (\gamma Ri)^2}}. \quad (43)$$

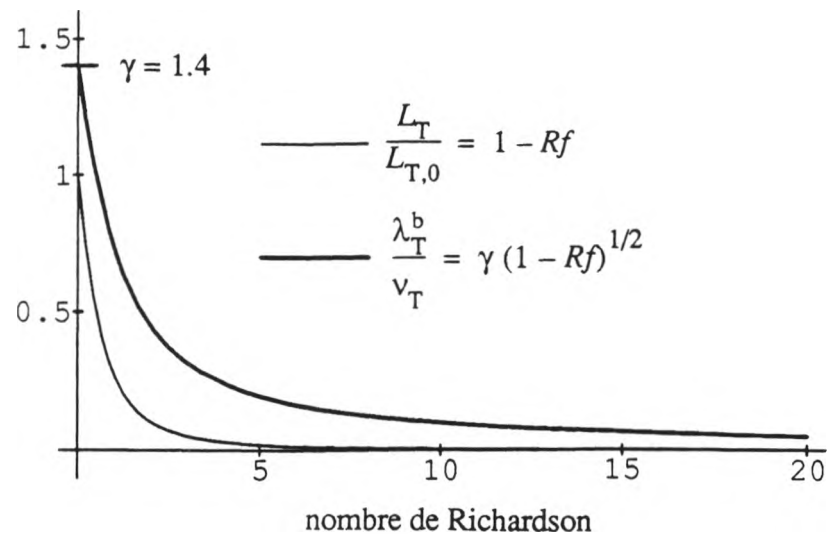


Figure 3. Fonctions empiriques λ_T^b / ν_T et $L_T / L_{T,0}$ de la fermeture turbulente.

L'évolution de l'énergie cinétique turbulente est régie par une équation différentielle qui, sous forme paramétrisée, s'écrit:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{u} e) + \frac{\partial (w e)}{\partial x_3} =$$

$$\nu_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2 - \lambda_T^b \frac{\partial b}{\partial x_3} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_T^e \frac{\partial e}{\partial x_3} \right) + D^e, \quad (44)$$

Dans le membre de droite de cette équation, on identifie, successivement, le taux de transfert d'énergie cinétique de l'écoulement moyen vers la turbulence, le taux d'échange d'énergie entre la turbulence et le champ d'énergie potentielle, le taux de dissipation visqueuse et les termes diffusifs.

A partir de considérations dimensionnelles, on obtient (NIHOUL, 1984):

$$\varepsilon = \frac{\alpha_\varepsilon^{3/4}}{8} \frac{e^{3/2}}{L_T}. \quad (45)$$

Il reste donc à calculer L_T . Pour ce faire, on peut se baser sur une équation différentielle pour e ressemblant à (44) — modèle k - ε — (RODI, 1984, 1987; NIHOUL *et al.*, 1989). On peut aussi faire appel à une équation, toujours du même type que (44), dont l'inconnue est $e L_T$ (MELLOR et YAMADA, 1982). Plus simplement, on peut déterminer L_T empiriquement. On n'utilisera pas les

formules prévues pour des écoulements non-stratifiés (BLACKADAR, 1962; MOFJELD et LAVELLE, 1984). On prend (NIHOUL et DJENIDI, 1987) (Figure 3):

$$L_T = L_{T,0} (1 - Rf) \quad (46)$$

où $L_{T,0}$ symbolise la longueur de mélange neutre. Cette dernière vaut (NIHOUL, 1984):

$$L_{T,0} = \kappa \sigma (1 - \alpha_L \sigma) H \quad (47)$$

où κ est la constante de von Karman ($\kappa \approx 0.4$), H est la profondeur totale de la colonne d'eau et α_L est un paramètre ajustable ($1/2 \leq \alpha_L \leq 1$). De plus, σ est une coordonnée verticale adimensionnelle augmentant linéairement de 0, au fond, jusqu'à 1, à la surface (voir Chapitre III).

A l'image de la plupart des schémas de fermeture turbulente utilisant (39), la principale faiblesse du présent schéma réside dans le calcul de la longueur de mélange. On notera cependant que (47) admet la forme asymptotique bien connue dans la couche limite de fond, à savoir

$$L_{T,0} \sim \kappa z, \quad (48)$$

où z désigne la distance séparant le fond du point considéré. De plus, si la stratification est stable ($Ri \geq 0$) — comme c'est le plus souvent le cas —,

$$L_T \leq L_{T,0} \leq \frac{\kappa}{4 \alpha_L} H \leq \frac{1}{5} H, \quad (49)$$

ce qui est sans doute très raisonnable (NIHOUL, 1977), à condition que la mer ne soit pas trop profonde.

On utilise ici:

$$(\alpha_\epsilon, \gamma, \alpha_L, \lambda_T^e) = (1.0, 1.4, 0.7, 0.7 \nu_T). \quad (50)$$

Chapitre III: Modèle numérique

1. Introduction

Les équations (II.29)-(II.35) et (II.44) du modèle mathématique qui nous occupe n'admettent aucune solution analytique générale. On doit donc les résoudre par voie numérique. Avant tout, il faut choisir le type de méthode que l'on va employer.

Les éléments finis s'adaptent facilement à des domaines de forme complexe, comme on en rencontre souvent en océanographie. Mais, cette méthode exige un travail informatique très lourd: elle ne convient sans doute pas pour une première approche — bien que je sois persuadé qu'à long terme les éléments finis s'imposeront, au moins dans les modèles marins à petite échelle, principalement à cause du fait que cette technique permet de prendre facilement et précisément en compte les détails de la géométrie du domaine d'intérêt.

Les méthodes spectrales se distinguent par leur très grande précision. Toutefois, leur adaptation à des équations aussi difficiles que celles de la fermeture turbulente reste problématique.

En océanographie, on utilise presque exclusivement la méthode des différences finies. Cette approche minimise la tâche de développement du code et, en utilisant les techniques appropriées, on peut atteindre une précision tout à fait acceptable. Néanmoins, la prise en compte de la géométrie du bassin n'est pas toujours aisée. On adopte cependant cette méthode.

Les interfaces des mailles sont des surfaces de coordonnées du système de coordonnées choisi pour couvrir le domaine d'intérêt. On doit donc d'abord déterminer le système de coordonnées qui va sous-tendre le maillage.

2. Systèmes de coordonnées

Pour bâtir le maillage, certains auteurs (LEENDERTSE et LIU, 1978; BACKHAUS *et al.*, 1987) adoptent la solution la plus simple sur le plan conceptuel: un maillage dont les surfaces de coordonnées sont des plans orthogonaux — “maillage cartésien” — (Figure 1A). Ce type d'approche conduit cependant à une utilisation peu économique des ressources informatiques. Il faut mettre en mémoire des valeurs inutiles correspondant aux points de discrétisation situés sous le fond de la mer car la taille des matrices du programme est fixe; ou alors, on a recours à l'adressage indirect mais cette façon de

programmer ne permet pas d'exploiter au mieux les ressources des super-ordinateurs. De plus, la représentation précise du fond de la mer et des couches limites associées n'est guère possible. En effet, une série de surfaces planes alternativement verticales et horizontales constituent le fond numérique, ce qui est bien loin de la réalité.

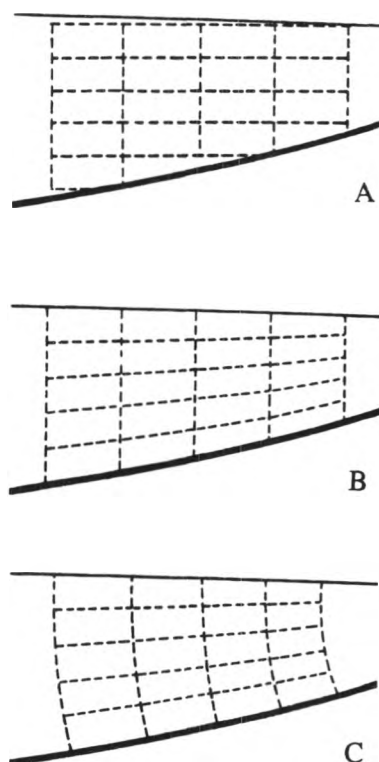


Figure 1. Coupes verticales illustrant différents types de maillage. Le fond de la mer est dessiné en gras. Les mailles de la grille A sont des parallélépipèdes rectangles dont les faces sont verticales ou horizontales. Dans la Figure 1B, les faces latérales des mailles sont planes et verticales; la colonne d'eau est divisée en un nombre égal de points de discrétisation. Le maillage 1C est orthogonal et une des familles de surfaces de coordonnées est orthogonale au fond et à la surface.

Pour remédier à ces inconvénients, il importe de choisir un système de coordonnées, et partant, un maillage, s'adaptant mieux aux variations de profondeur de la mer. Le quotient d'aspect étant petit, on peut s'inspirer des techniques généralement employées en modélisation des couches limites. Dans cet esprit, on définit un maillage curviligne orthogonal dans lequel le fond et la surface de la mer sont des surfaces de coordonnées (Figure 1C). MELLOR et BLUMBERG (1985) estiment que ce maillage est, en théorie, le plus approprié. Cependant, ils indiquent aussi qu'on peut l'approcher par un maillage dont deux familles de surfaces de coordonnées sont verticales afin de ne pas introduire des complications mathématiques, numériques et informatiques inutiles. En effet, la pente du fond n'excède pas 10^{-3} — ou, tout au plus, 10^{-2} — si bien que les grilles 1B et 1C sont, en réalité, très proches.

La forme générale du changement de variables conduisant au système de coordonnées que l'on vient de décrire est

$$(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (t, x_1, x_2, \tilde{x}_3(t, x_1, x_2, x_3)), \quad (1)$$

où on a placé les nouvelles variables dans le membre de gauche. Remarquons que le temps reste évidemment inchangé, de même que les coordonnées horizontales, x_1 et x_2 . Seule la coordonnée verticale est modifiée. En d'autres termes, dans le nouvel espace, "une verticale correspond à une verticale de l'espace physique". L'équation du fond se transforme comme suit:

$$x_3 = -h(x_1, x_2) \rightarrow \tilde{x}_3 = 0, \quad (2)$$

tandis que celle de la surface libre — et donc mobile — devient:

$$x_3 = \eta(t, x_1, x_2) \rightarrow \tilde{x}_3 = L, \quad (3)$$

où L est une longueur constante arbitraire représentant la hauteur du domaine transformé (Figure 2). La première formulation d'un changement de variables de ce type est souvent attribuée à PHILLIPS (1957), dans le cadre de simulations atmosphériques, et son application en océanographie remonte sans doute à FREEMAN *et al.* (1972).

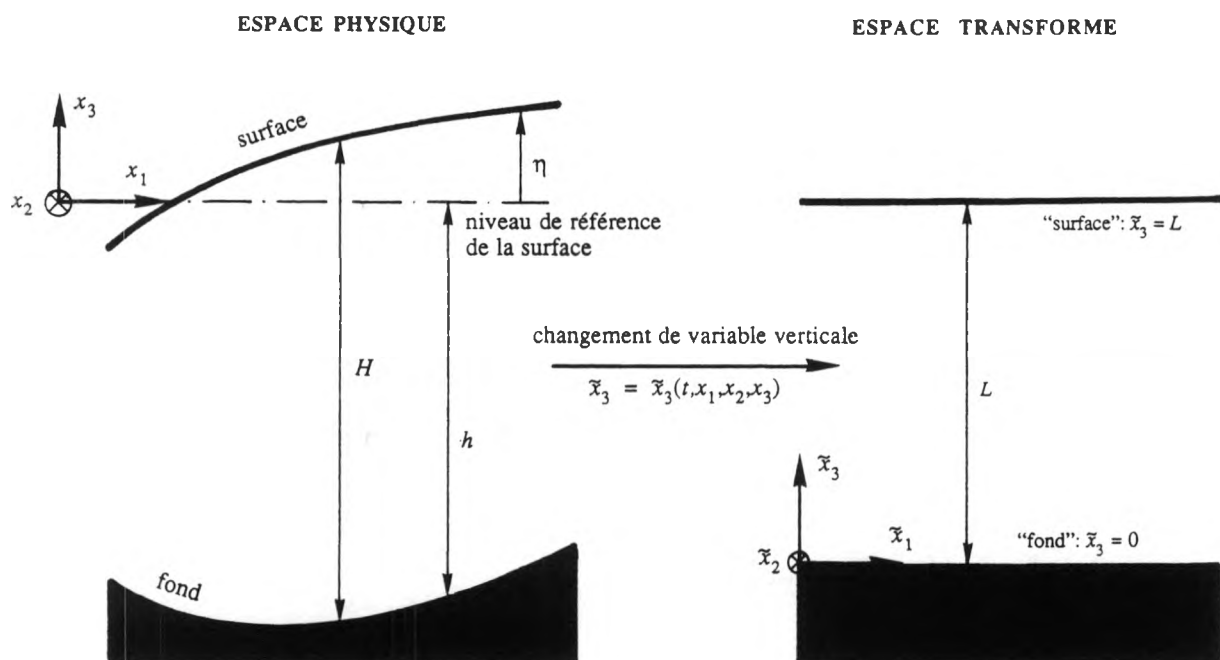


Figure 2. Illustration du changement de variables transformant la mer en un domaine de calcul dont la hauteur est constante.

On transforme les opérateurs de dérivation selon

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3}, \quad (4)$$

$$\nabla_h = \tilde{\nabla}_h + (\nabla \tilde{x}_3) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3}, \quad (6)$$

avec

$$\tilde{\nabla}_h = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}. \quad (7)$$

Le jacobien de la transformation vaut

$$J = \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_3}. \quad (8)$$

On introduit une nouvelle vitesse verticale,

$$\tilde{w} = D_t \tilde{x}_3, \quad (9)$$

dont l'utilisation simplifie grandement les équations. Ci-dessus, D_t symbolise la dérivée matérielle:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h + w \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (10)$$

Finalement, l'équation de continuité s'écrit

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial J}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \cdot (J \mathbf{u}) + \frac{\partial (J \tilde{w})}{\partial \tilde{x}_3} \right] = 0, \quad (11)$$

de sorte que les termes de variation temporelle et d'advection de l'équation de bilan d'une quantité y gardent une forme très simple (KASAHARA, 1974):

$$J \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{u} y) + \frac{\partial (w y)}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial (J y)}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \cdot (J \mathbf{u} y) + \frac{\partial (J \tilde{w} y)}{\partial \tilde{x}_3}. \quad (12)$$

Le fond et la surface de la mer étant imperméables, une particule fluide se trouvant sur une de ces surfaces doit y rester. Il s'ensuit que la dérivée matérielle de la coordonnée verticale dans le nouvel espace doit y être nulle. Donc,

$$[\tilde{w}]_{\tilde{x}_3=0,L} = 0, \quad (13a)$$

qui est une forme très simple. Par contre, dans l'espace physique, l'imperméabilité du fond et de la surface s'exprime de façon nettement plus complexe:

$$[\mathbf{u} \cdot \nabla_h h + w]_{x_3=-h} = 0 \quad (13b)$$

et

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h \eta - w \right]_{x_3=\eta} = 0. \quad (13c)$$

L'équation de quantité de mouvement verticale se réduisant à l'équilibre hydrostatique, (12) montre que la vitesse verticale dans l'espace physique, w , n'intervient plus dans les équations du modèle. Evidemment, on peut toujours la calculer au cours du post-traitement des résultats par

$$w = J \left(\tilde{w} - \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla_h \tilde{x}_3 \right). \quad (14)$$

En résumé, l'introduction d'une coordonnée verticale généralisée ne complique pas significativement les équations, permet un traitement simple et précis de la condition d'imperméabilité du fond et de la surface et n'entraîne pas de gaspillage de ressources informatiques — dans la mesure où toutes les mailles d'une verticale donnée sont toujours dans la mer. De plus, les techniques de génération de maillage autorisent une grande liberté dans la définition du changement de coordonnée verticale (THOMPSON *et al.*, 1985): l'expression du jacobien est tellement simple que rien ne s'oppose à l'utilisation d'un maillage dynamiquement adaptatif. Notons encore que l'introduction de coordonnées curvilignes selon l'horizontale ne conduirait pas non plus à des complications notoires (BLUMBERG et HERRING, 1987), pour autant que le changement de coordonnées horizontales reste découplé du changement de variable verticale — c'est-à-dire que toute verticale de l'espace physique doit rester verticale dans l'espace transformé.

3. Coordonnée σ

A l'exception de DE KOK (1991) — dans une application assez rudimentaire, toutefois —, aucun océanographe ne semble jamais avoir tenté de tirer parti de toutes les possibilités offertes par l'utilisation d'une coordonnée verticale généralisée. Il semble d'ailleurs que le changement de variables général et les équations correspondantes soient peu ou pas connus des modélisateurs marins. On se contente généralement d'utiliser une forme simplifiée, la coordonnée σ (FREEMAN *et*

al., 1972; OWEN, 1980; NIHOUL *et al.*, 1986; BLUMBERG et MELLOR, 1987; DAVIES, 1987; DELEERSNIJDER, 1989, DELEERSNIJDER *et al.*, 1991), ou une combinaison de systèmes de coordonnée σ (BECKERS, 1988, 1991a; SPALL et ROBINSON, 1990; DELEERSNIJDER et BECKERS, 1991).

Utilisant les notations de NIHOUL *et al.* (1986), on définit le changement de coordonnée verticale σ par

$$\tilde{x}_3 = L \sigma = L \frac{x_3 + h}{H}, \quad (15)$$

où H désigne la hauteur d'eau totale,

$$H = h + \eta. \quad (16)$$

L'avantage majeur de cette formulation réside dans le fait que le jacobien est constant sur la verticale:

$$J = \frac{H}{L}. \quad (17)$$

Introduisant (17) dans (11), on voit que l'équation de continuité devient

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \cdot (H \mathbf{u}) + \frac{\partial (H \tilde{w})}{\partial \tilde{x}_3} = 0. \quad (18)$$

Intégrant cette relation du fond à la surface, tenant compte des conditions d'imperméabilité (13a), on obtient

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \cdot (H \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (19)$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse moyenne — sur la hauteur d'eau —, à savoir

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} \, dx_3 = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{u} \, d\tilde{x}_3. \quad (20)$$

En pratique, on calcule l'élévation de la surface libre à partir de (19) et la nouvelle vitesse verticale à l'aide d'une combinaison de (18) et (19):

$$\tilde{w} = -\frac{1}{H} \int_0^{\tilde{x}_3} \tilde{\nabla}_h \cdot (H \hat{\mathbf{u}}) \, d\tilde{x}_3 = \frac{1}{H} \int_{\tilde{x}_3}^L \tilde{\nabla}_h \cdot (H \hat{\mathbf{u}}) \, d\tilde{x}_3 \quad (21)$$

où

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}. \quad (22)$$

L'équation de quantité de mouvement devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H \mathbf{u})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (\mathbf{u} H \mathbf{u}) + \frac{\partial(\tilde{w} H \mathbf{u})}{\partial \tilde{x}_3} + f \mathbf{e}_3 \times H \mathbf{u} = \\ - H \nabla_h q + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left[\tilde{v}_T \frac{\partial(H \mathbf{u})}{\partial \tilde{x}_3} \right] + H \mathbf{D}^u, \end{aligned} \quad (23)$$

avec

$$\tilde{v}_T = \left(\frac{L}{H}\right)^2 v_T. \quad (24)$$

A la surface libre, la pression dans l'eau équivaut à la pression atmosphérique, p_{atm} . L'équilibre hydrostatique implique alors

$$q = \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{atm},0}}{\rho_0} + g \eta - \int_{\sigma}^1 H b \, d\sigma, \quad (25)$$

de sorte que la force de pression intervenant dans l'équation de quantité de mouvement se transforme en:

$$\begin{aligned} - H \nabla_h q = - H \tilde{\nabla}_h \left[\frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{atm},0}}{\rho_0} + g \eta - \int_{\sigma}^1 H b \, d\sigma \right] \\ - \left[(1 - \sigma) \nabla_h h - \sigma \nabla_h \eta \right] H b. \end{aligned} \quad (26)$$

En fait, $- H \nabla_h q$ peut s'écrire sous de nombreuses formes mathématiquement équivalentes mais dont les qualités numériques peuvent être très diverses (ARAKAWA et SUAREZ, 1983). La formulation (26) a, en tout cas, l'avantage de la simplicité.

En coordonnée σ , l'équation de bilan générale d'un scalaire y s'écrit

$$\frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (H \mathbf{u} y) + \frac{\partial[H (\tilde{w} + \tilde{m}^y) y]}{\partial \tilde{x}_3} = H p^y + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left[\tilde{\lambda}_T^y \frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{x}_3} \right] + H D^y, \quad (27)$$

avec

$$\tilde{\lambda}_T^y = \left(\frac{L}{H}\right)^2 \lambda_T^y. \quad (28)$$

Ci-dessus, $\tilde{m}^y$ représente la vitesse de migration éventuelle exprimée dans le nouveau système de coordonnées.

Les équations d'état du modèle, écrites en coordonnée σ , sont rassemblées dans l'Annexe I.

Remarquons, au passage, que les équations de bilan en coordonnée σ ressemblent aux équations d'un fluide compressible dont la masse volumique serait H . Le nombre de Mach correspondant vaudrait $|u| / \sqrt{gH}$, $\sqrt{gH}$ étant la vitesse de propagation des ondes de gravité de surface. La vitesse horizontale étant limitée à 1 m s^{-1} , le nombre de Mach que l'on vient de définir est petit, donc la pseudo-compressibilité est faible.

Bien entendu, les variables d'état du modèle ne dépendent pas *in fine* de L , la hauteur d'eau dans l'espace transformé. Seule la nouvelle vitesse verticale est proportionnelle à L :

$$\tilde{w} = \frac{L}{H} \left\{ -\sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot [(1 - \sigma) \nabla_h h - \sigma \nabla_h \eta] + w \right\}. \quad (29)$$

Ainsi, si l'on impose que L soit du même ordre de grandeur que la longueur caractéristique horizontale, alors le domaine de calcul transformé est isotrope — quotient d'aspect ≈ 1 — et $\tilde{w}$ peut être, potentiellement, du même ordre de grandeur que $|u|$.

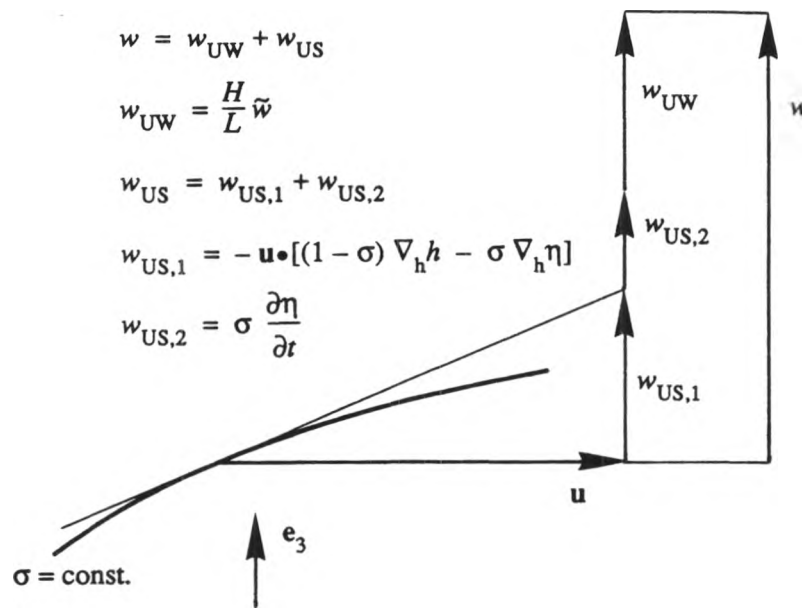


Figure 3. Décomposition de la vitesse verticale w en vitesse d'upsloping, w_{US} , et vitesse d'upwelling, w_{UW} .

On peut voir la vitesse verticale réelle, w , comme la somme de deux composantes (WALEFFE, 1985; DELEERSNIJDER, 1989) (Figure 3):

$$w = w_{UW} + w_{US} \quad (30)$$

avec

$$w_{UW} = \frac{H}{L} \tilde{w} \quad (31)$$

et

$$w_{US} = \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot [(1 - \sigma) \nabla_h h - \sigma \nabla_h \eta] . \quad (32)$$

On peut montrer qu'une particule dont la vitesse est $\mathbf{u} + w_{US} \mathbf{e}_3$ reste à la même hauteur relative dans la colonne d'eau, c'est-à-dire que cette particule ne quitte pas la surface iso- σ où elle se trouvait initialement. Le fond et la surface de la mer étant des surfaces iso- σ , on peut donc considérer w_{US} comme la vitesse verticale d'une particule adaptant son déplacement à la géométrie du bassin. En conséquence, on appelle w_{US} la vitesse d'upsloping — néologisme formé d'après "slope", en anglais. Finalement, w_{UW} est la vitesse verticale avec laquelle une particule fluide traverse les surfaces iso- σ . En fait, w_{UW} n'est pas directement induite par la pente du fond ou de la surface et mesure donc l'up- ou le down-welling effectif, c'est-à-dire le processus par lequel une particule se rapproche, en termes relatifs, de la surface ou du fond de la mer en traversant des surfaces iso- σ . Ainsi, on peut déterminer si w est due à la topographie, à un upwelling intrinsèque ou à une combinaison de ces deux processus (DELEERSNIJDER, 1989; DELEERSNIJDER *et al.*, 1991).

Au cours du post-traitement des résultats, on peut évaluer w à l'aide de (30)-(32). Cependant, il est souhaitable de disposer d'une forme conservative permettant de tirer naturellement avantage de l'imperméabilité du fond, de la surface et des frontières latérales solides. Dans cette optique, on utilise plutôt (DELEERSNIJDER, 1989):

$$w = \frac{H}{L} \tilde{w} + [(1 - \sigma) h - \sigma \eta] (\tilde{\nabla}_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}_3}) - [\tilde{\nabla}_h \cdot (h \mathbf{u}) + \frac{\partial (h \tilde{w})}{\partial \tilde{x}_3}] . \quad (33)$$

4. Précision numérique en coordonnée σ

DELEERSNIJDER et BECKERS (1991) ont examiné l'influence de la bathymétrie sur la précision des approximations numériques en coordonnée σ . La présente section s'inspire largement de cette étude.

Dans l'espoir qu'un modèle soit précis, la taille des mailles est choisie de telle sorte que

$$(\Delta x_h, \Delta x_v) = (\varepsilon_h \mathcal{L}_h, \varepsilon_v \mathcal{L}_v) \quad (34)$$

avec

$$\varepsilon_h, \varepsilon_v \ll 1, \quad (35)$$

où Δx_h et Δx_v désignent l'ordre de grandeur des incréments spatiaux selon l'horizontale et la verticale.

Quand on résout une équation différentielle à l'aide de la méthode des différences finies, il est courant d'évaluer l'erreur de troncature numérique sur chacun des termes afin de se faire une idée de la précision du schéma. Pour une dérivée du $m^{\text{ième}}$ ordre de y par rapport à s , on a

$$\mathcal{N}_{m,n}(y,s) = \frac{\partial^m y}{\partial s^m} (1 + et), \quad (36)$$

où $\mathcal{N}_{m,n}$ est l'opérateur numérique utilisé pour évaluer $\partial^m y / \partial s^m$ au $n^{\text{ième}}$ ordre de précision. L'erreur relative de troncature vaut asymptotiquement

$$et \sim \alpha_{m,n} \frac{\left(\frac{\partial^{m+n} y}{\partial s^{m+n}} \right)}{\left(\frac{\partial^m y}{\partial s^m} \right)} \Delta s^n, \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad (37)$$

où Δs est l'incrément associé à la discrétisation de s . Généralement, $\alpha_{m,n} < 1$.

L'ordre de grandeur de dérivées spatiales purement horizontales ou verticales est

$$\left(\frac{\partial^m y}{\partial x_i^m}, \frac{\partial^m y}{\partial x_3^m} \right) \approx \left(\frac{1}{\mathcal{L}_h^m}, \frac{1}{\mathcal{L}_v^m} \right) \mathcal{Y}, \quad (i=1,2), \quad (38)$$

où $\mathcal{Y}$ dénote l'ordre de grandeur caractéristique de y . Introduisant (34) et (38) dans (37), on aboutit aux erreurs relatives de troncature horizontale et verticale

$$(et_h, et_v) \approx \alpha_{m,n} [(\epsilon_h)^n, (\epsilon_v)^n]. \quad (39)$$

Donc, comme on s'y attendait, ϵ_h et ϵ_v sont des mesures adéquates des erreurs relatives de troncature.

En coordonnée σ , on pourrait être tenté de faire exactement la même analyse et conclure que (39) est toujours d'application. On va montrer que ce serait une erreur majeure.

On suppose que $h \sim H$ car, habituellement, $|\eta| \ll h$.

Pour des dérivées verticales, on a

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_3^m} \approx \left(\frac{h}{L} \right)^m \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{L}_v^m}, \quad (40)$$

et l'erreur relative dans l'espace transformé vaut

$$et_{v,\sigma} \approx \alpha_{m,n} \left(\frac{h \Delta \sigma}{\mathcal{L}_v} \right)^n, \quad (41)$$

qui est similaire à l'erreur relative verticale dans l'espace physique, car $h \Delta \sigma \sim \Delta x_3$.

Les surfaces iso- σ n'étant pas horizontales, la mise à l'échelle suivante est incorrecte

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_i^m} = \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{L}_h^m}, \quad (i=1,2). \quad (42)$$

Exprimons (42) en fonction de dérivées purement horizontales et verticales:

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_i^m} \sim \left[\frac{\partial}{\partial x_i} - (1-\sigma) \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^m y, \quad (i=1,2), \quad (43)$$

ce qui suggère

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_i^m} \approx \max \left[\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{L}_h^m}, \left| \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|^m \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{L}_v^m} \right], \quad (i=1,2), \quad (44)$$

On définit la longueur caractéristique de variation de la profondeur comme

$$\mathcal{L}_{\text{prof}} \approx \frac{h}{|\nabla_h h|}, \quad (45)$$

de sorte que

$$\frac{1}{h} \left| \frac{\partial h}{\partial x_i} \right| \approx \frac{1}{\mathcal{L}_{\text{prof}}}, \quad (i=1,2). \quad (46)$$

Combinant (37), (44) et (46), on obtient

$$e_{h,\sigma} \approx \alpha_{m,n} \max \left[(\epsilon_h)^n, \left(\frac{h}{\mathcal{L}_v} \right)^n \left(\frac{\Delta x_h}{\mathcal{L}_{\text{prof}}} \right)^n \right]. \quad (47)$$

Il en résulte qu'imposer $\epsilon_h \ll 1$ ne garantit pas nécessairement la petitesse de l'erreur relative horizontale. Il faut aussi s'assurer que

$$\frac{h}{\mathcal{L}_v} \frac{\Delta x_h}{\mathcal{L}_{\text{prof}}} \ll 1. \quad (48a)$$

Ordinairement, $h \geq \mathcal{L}_v$ mais, en pratique, il suffit probablement d'exiger

$$\frac{\Delta x_h}{\mathcal{L}_{\text{prof}}} \ll 1. \quad (48b)$$

Ainsi, Δx_h doit être nettement plus court que la longueur caractéristique associée à la bathymétrie, $\mathcal{L}_{\text{prof}}$. Donc, pour la détermination de la taille de la maille horizontale, $\mathcal{L}_{\text{prof}}$ doit être considérée comme n'importe quelle autre longueur caractéristique horizontale. En d'autres termes, le maillage doit être à même de bien résoudre toutes les variations horizontales, y compris celles de la profondeur du domaine d'intérêt.

Il n'est guère certain que la condition (48b) s'applique aussi à des modèles marins ne faisant pas appel à la coordonnée σ .

D'autre part, on ne peut manquer de noter la similitude (DELEERSNIJDER et BECKERS, 1991) de la condition (48b) et de la condition de "cohérence hydrostatique",

$$\frac{\Delta x_h}{\mathcal{L}_{\text{prof}}} < \frac{\Delta \sigma}{1 - \sigma}, \quad (49)$$

qui se rapporte spécifiquement au calcul du gradient horizontal de pression dans des modèles atmosphériques (JANJIC, 1977; MESINGER, 1982) ou marins (HANEY, 1991) en coordonnée σ où la "partie barocline" de la pression joue un rôle déterminant.

Notons encore qu'il n'est pas nécessaire de discuter spécifiquement la précision des dérivées temporelles:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_3} \sim \frac{\partial}{\partial t}, \quad (50)$$

parce que, généralement, $|\eta| \ll \mathcal{L}_v$.

Finalement, il faut insister sur un point. Toute la discussion que nous venons de mener repose sur l'hypothèse que $\mathcal{L}_h$ correspond à des variations strictement horizontales. Cette hypothèse est plutôt arbitraire car elle sous-entend que les coordonnées les plus naturelles sont les coordonnées cartésiennes — ayant des plans de coordonnées horizontaux et verticaux. A proximité du fond, on peut, au contraire, penser que des coordonnées épousant la bathymétrie sont plus appropriées. Toute notre analyse est-elle, finalement, inutile? Pas du tout. Suffisamment loin du fond, rien n'empêche de penser que $\mathcal{L}_h$ puisse effectivement correspondre à des variations vraiment horizontales. En clair, il faut comprendre la condition (48b) comme une restriction qui est peut être trop sévère mais dont il est souhaitable de tenir compte, au moins partiellement.

5. Lissage de la bathymétrie

La longueur caractéristique $\mathcal{L}_{\text{prof}}$ est une fonction de la position. Donc, la condition (48b) doit être envisagée en tout point du domaine d'intérêt. Pour la satisfaire, on peut employer plusieurs moyens.

Si les incréments horizontaux sont constants, la méthode la plus directe est d'imposer

$$\Delta \tilde{x}_1, \Delta \tilde{x}_2 \ll \min_{\mathcal{S}} \mathcal{L}_{\text{prof}}, \quad (51)$$

où $\mathcal{S}$ désigne la surface horizontale du domaine d'intérêt. Si ce dernier contient des régions où h varie très rapidement, on doit utiliser une maille très fine dans tout le domaine. Pour éviter cet inconvénient, on peut utiliser une combinaison de changements de variable σ (BECKERS, 1988,

1991a; DELEERSNIJDER et BECKERS, 1991) ou alors se servir de (48b) pour guider la construction de coordonnées curvilignes horizontales.

On peut aussi satisfaire (48b) de manière plus lâche, globalement, en quelque sorte. On suggère de se contenter de

$$\Delta \tilde{x}_1, \Delta \tilde{x}_2 \ll L_{\text{prof}}, \quad (52)$$

où L_{prof} est une mesure globale de la longueur caractéristique de variation de la profondeur. Par exemple,

$$L_{\text{prof}} = \left[\frac{\mathcal{S}}{\int_{\mathcal{S}} \left(\frac{|\nabla_h h|}{h} \right)^2 d\mathcal{S}} \right]^{1/2}. \quad (53)$$

Si les capacités informatiques disponibles ne permettent pas l'emploi d'une maille suffisamment petite, alors il faut lisser la bathymétrie de telle sorte que la discrétisation puisse finalement résoudre le champ de profondeur lissé — la bathymétrie doit être en accord avec le maillage choisi. Ici, il paraît naturel de requérir que le lissage numérique soit tel qu'il fasse augmenter la longueur caractéristique globale de variation de la profondeur, L_{prof} .

Imaginons que l'opérateur de lissage soit itératif et que $\theta (\geq 0)$ soit un pseudo-temps mesurant l'état d'avancement de la procédure de lissage. De la sorte, $h(\theta, x_1, x_2)$ désigne la profondeur à l'instant θ du pseudo-temps de lissage et $h(0, x_1, x_2)$ représente la profondeur non lissée — qu'on lit sur une carte marine, par exemple. Il faut donc que

$$L_{\text{prof}}(\theta) \geq L_{\text{prof}}(\theta=0). \quad (54)$$

La solution du problème différentiel suivant définit une procédure de lissage adéquate:

$$\frac{\partial \ln h}{\partial \theta} = \nabla_h^2 \ln h \quad (55)$$

avec

$$h(\theta > 0) = h(\theta = 0) \quad \text{sur} \quad \delta \mathcal{S}, \quad (56)$$

où $\delta \mathcal{S}$ est la frontière latérale de $\mathcal{S}$. En effet, on pose

$$\phi = \ln h. \quad (57)$$

Donc,

$$\int_{\mathcal{S}} |\nabla_h \phi|^2 d\mathcal{S} = \frac{\mathcal{S}}{(L_{\text{prof}})^2} . \quad (58)$$

Combinant (55)-(58), il vient

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\mathcal{S}}{(L_{\text{prof}})^2} = -2 \int_{\mathcal{S}} |\nabla_h^2 \phi|^2 d\mathcal{S} \leq 0 . \quad (59)$$

Ainsi L_{prof} augmente au fur et à mesure que le lissage progresse. La condition (54) est remplie.

On propose donc de lisser le logarithme de la profondeur de préférence à la profondeur elle-même.

Puisqu'il n'est guère certain que (48b) s'applique à des modèles n'utilisant pas la coordonnée σ , il n'est pas non plus certain que la discussion sur le lissage de la bathymétrie s'applique à ces modèles.

Des expériences numériques — en relation avec DELEERSNIJDER *et al.* (1989) — ont montré que la procédure de lissage décrite ici diminue significativement le bruit numérique présent dans les variables d'état du modèle. D'autre part, la bathymétrie du domaine d'intérêt du présent travail a été lissée à l'aide de la procédure que l'on vient de suggérer (voir Section V.2).

En aucun cas, le lissage ne peut modifier la bathymétrie originale de manière trop importante. Le lissage peut seulement éliminer les variations de profondeur se produisant à une échelle comparable à celle de la maille, c'est-à-dire les variations de profondeur mal *résolues* par le maillage.

On pourrait objecter que le champ de profondeur est une donnée du problème qu'il n'est pas permis de modifier. Nous pensons qu'il n'en est rien.

En tout cas, dans les modèles atmosphériques en coordonnée σ , le lissage de la topographie terrestre ne semble pas être l'objet de controverses (MANABE *et al.*, 1975).

En fait, considérer le champ de profondeur comme une fonction fixe et définie sans ambiguïté est une attitude dont la pertinence ne résiste pas à une analyse approfondie.

La limite entre la terre et la mer est loin d'être une courbe "classique". RICHARDSON (1961) le soupçonnait et MANDELBROT (1983) a fait du tracé des côtes un exemple maintenant classique de "courbe fractale", c'est-à-dire de courbe dont le tracé présente des variations sur une gamme, en principe infinie, d'échelles de longueur. En extrapolant quelque peu, on en arrive à penser que le fond de la mer doit sans doute être appréhendé comme une "surface fractale" — comme certains l'ont sans doute déjà fait. Si l'on admet cette proposition, il faut alors réaliser que le fond doit présenter des variations sur une gamme très étendue d'échelles caractéristiques dont on ne peut représenter les plus courtes, à cause de la trop grande taille de la maille. Donc, assigner une profondeur à chaque noeud d'une grille d'un incrément spatial donné revient *de facto* à éliminer des variations de profondeur qui existent bel et bien, mais à une échelle inférieure à celle de la maille.

Ainsi, qu'on le veuille ou non, fixer la bathymétrie discrétisée d'un modèle est équivalent à un lissage, parfois "brutal", de la bathymétrie. Nous proposons seulement d'étendre quelque peu ce lissage.

D'autre part, il faut réaliser que le nombre de sondages bathymétriques effectués dans le domaine d'intérêt est sans doute très inférieur au nombre de mailles couvrant ce même domaine d'intérêt. Par conséquent, assigner une profondeur à chaque point de la grille relève de l'interpolation ou de l'extrapolation. Donc, la profondeur est loin d'être univoquement définie. Il s'ensuit que modifier, dans des limites raisonnables, le champ de profondeur découlant d'une première interpolation ou extrapolation ne peut être interdit.

6. Diffusion horizontale

Les mouvements à la micro-échelle et à l'échelle médiale ont été filtrés (voir Section II.5). Les processus filtrés sont relativement isotropes (voir Section II.4). Leurs longueurs caractéristiques verticale et horizontale sont comparables et sont, au maximum, de l'ordre de quelques mètres. Si la taille de la maille est de cet ordre de grandeur, les mouvements filtrés par la moyenne temporelle le sont aussi par la discrétisation spatiale (NIHOUL, 1975a). Utiliser une maille verticale de l'ordre de quelques mètres est tout à fait possible, la profondeur ne dépassant pas 100 à 200 mètres. Selon l'horizontale, par contre, les limitations des moyens de calcul obligent le modélisateur à employer une maille d'au moins quelques dizaines ou centaines de mètres. Les processus dont la longueur caractéristique horizontale est comprise entre la taille de la maille verticale et la maille horizontale,

$$\Delta x_v \lesssim \mathcal{L}_h \lesssim \Delta x_h, \quad (60)$$

ne sont en principe pas filtrés par le filtre temporel mais, étant tout de même *sub-grid scale*, ils le sont *de facto* par la discrétisation horizontale. Ces phénomènes sont essentiellement anisotropes et horizontaux. Ils ont en général un effet diffusif et le coefficient de diffusion correspondant est d'ordre (OKUBO, 1971):

$$\lambda_{H,P} \approx C_{H,P} (\Delta x_h)^{4/3}, \quad (61)$$

l'indice "P" indiquant qu'il s'agit de diffusion existant "physiquement" dans le domaine d'intérêt. Trouver une valeur universellement valable pour $C_{H,P}$ n'est guère possible. Dans OKUBO (1971, 1980), NIHOUL (1975a), RONDAY (1975) ou MONIN et OZMIDOV (1985), on voit qu'il existe, en fonction de l'écoulement étudié, une large plage de variation de $C_{H,P}$, dont la borne supérieure vaut

$$C_{H,P} \lesssim 10^{-3} \text{ m}^{2/3} \text{ s}^{-1}. \quad (62)$$

La grossièreté relative de la discrétisation horizontale requiert donc l'introduction de diffusion horizontale dans les équations d'état (MELLOR, 1985) — que l'on a noté D^u ou D^y , selon la variable concernée.

D'autre part, la stabilité de la méthode numérique exige habituellement aussi la présence d'un terme de diffusion horizontale. De surcroît, aucune méthode n'étant capable de bien représenter

l'évolution des phénomènes dont l'échelle est proche de l'incrément spatial, il est souhaitable de filtrer au mieux les "ondes numériques" les plus courtes. Ces dernières sont générées en permanence par les non-linéarités des équations et peuvent être regardées comme du bruit puisque le schéma les traite de façon inadéquate.

Par exemple, pour éliminer l'erreur d'*aliasing*, il faut supprimer les modes numériques dont la longueur d'onde est inférieure à trois fois l'incrément spatial (ORSZAG, 1971).

D'après les conditions de stabilité des schémas numériques du type FTCS (*Forward on Time and Centered on Space*) (ROACHE, 1972; MESINGER et ARAKAWA, 1976; BECKERS, 1991b), au terme d'expériences numériques sur l'influence de la diffusion horizontale sur des tourbillons formés dans un écoulement marin (DELEERSNIJDER *et al.*, 1989; DELEERSNIJDER et WOLANSKI, 1990), on peut estimer que le coefficient de diffusion horizontale qu'il faut introduire pour des raisons numériques est d'ordre

$$\lambda_{H,N} \approx C_{H,N} \Delta x_h \quad (63)$$

avec

$$C_{H,N} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}. \quad (64)$$

Additionnant (61) et (63), on obtient le coefficient de diffusion horizontale:

$$\lambda_H = \lambda_{H,P} + \lambda_{H,N} \approx C_{H,P} (\Delta x_h)^{4/3} + C_{H,N} \Delta x_h. \quad (65)$$

Mais, avec les ordres de grandeur que nous venons de donner, $\lambda_{H,N}$ domine $\lambda_{H,P}$. En effet, le rapport

$$\frac{\lambda_{H,N}}{\lambda_{H,P}} \approx \frac{C_{H,N}}{C_{H,P} (\Delta x_h)^{1/3}} \gtrsim \frac{30}{(\Delta x_h)^{1/3}} \quad (66)$$

n'est inférieur à l'unité que si

$$\Delta x_h \gtrsim 3 \cdot 10^4 \text{ m}. \quad (67)$$

Mais, au-delà d'une échelle de 10 kilomètres environ, la formule (61) n'est plus très valable et, si on l'applique quand même, $C_{H,P}$ doit être significativement inférieur à $10^{-3} \text{ m}^{2/3} \text{ s}^{-1}$ (AITSAM, 1991).

Ainsi donc, pour les modèles marins visant à la représentation des phénomènes à la méso-échelle ou à des échelles supérieures, il semble bien qu'il faille introduire de la diffusion horizontale essentiellement pour corriger des déficiences numériques. Evidemment, D^u et D^y ne peuvent être des termes dominants des équations. On peut en choisir la forme analytique pour optimiser le schéma numérique tout en veillant à respecter au mieux les caractéristiques observées de l'écoulement modélisé. L'expression des termes de diffusion horizontale doit dépendre du schéma numérique et du maillage utilisés. Ainsi, prétendre qu'en toute circonstance D^u et D^y doivent être paramétrisés par

$$(D^u, D^y) = (v_H \nabla_h^2 u, \lambda_H^y \nabla_h^2 y) \quad (68)$$

ne nous paraît pas très raisonnable. Ceci est d'autant plus vrai que, dans le cas où une coordonnée verticale généralisée est employée, l'expression du laplacien purement horizontal — écrit dans le nouveau système de coordonnées — devient tellement longue et compliquée que D^u et D^y pourraient demander plus d'effort de calcul que la plupart des autres termes, ce qui est inadmissible — puisque ces termes sont loin d'être les plus significatifs.

Suivant les recommandations de NIHOUL (1975b) et de MELLOR et BLUMBERG (1985), en accord — partiel — avec la discussion de DELEERSNIJDER et WOLANSKI (1990), on adopte ici les paramétrisations suivantes — où $\tilde{v}_H$ et $\tilde{\lambda}_H^y$ représentent la viscosité horizontale et la diffusivité horizontale adaptées à l'espace σ :

$$H D^u = \tilde{v}_h \cdot [\tilde{v}_H \tilde{\nabla}_h (H u)] \quad (69)$$

et

$$H D^y = \tilde{v}_h \cdot [\tilde{\lambda}_H^y H \tilde{\nabla}_h y], \quad (70)$$

qui sont des expressions dont l'évaluation dans l'espace σ est très aisée — d'autant que Hu et y sont les inconnues numériques, au lieu de u et y comme dans BLUMBERG et MELLOR (1987), par exemple. De plus, (69) et (70) sont des formes conservatives et n'incluent que des dérivées dans les surfaces iso- σ — c'est-à-dire dans des plans "horizontaux" de l'espace transformé. Cette dernière caractéristique est souhaitable, au moins près du fond et de la surface (MELLOR et BLUMBERG, 1985; DELEERSNIJDER et WOLANSKI, 1990). Une calibration très sommaire conduit, pour la présente application, à

$$(\tilde{v}_H, \tilde{\lambda}_H^y) = (500, 75) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad (71)$$

valeurs qui ne sont pas en contradiction avec (62)-(65).

La diffusion horizontale sert principalement à stabiliser la partie advective du schéma numérique et à maîtriser le bruit numérique qu'elle produit. La diffusion horizontale doit bien entendu rester significativement plus petite que l'advection. Toutefois, dans l'écoulement étudié ici, cette condition doit être comprise de façon beaucoup plus contraignante pour l'équation de bilan d'un scalaire que pour l'équation de quantité de mouvement où, de toutes façons, l'advection n'est pas un processus dominant. En effet le nombre de Rossby est très petit (voir Chapitres suivants):

$$Ro \approx \frac{\mathcal{U}}{f \mathcal{L}_h} \approx \frac{0.2}{10^{-4} * 4 \times 10^4} \approx 0.05, \quad (72)$$

où $\mathcal{U}$ dénote la vitesse caractéristique horizontale — c'est-à-dire que, en gros, l'advection représente 5% de la force de Coriolis ou du gradient de pression. D'où la différence entre $\tilde{v}_H$ et $\tilde{\lambda}_H^y$ dans (71).

D'autres paramétrisations des termes de diffusion horizontale existent. SMAGORINSKY (1963) ou LEENDERTSE et LIU (1978) utilisent un coefficient de diffusion non constant qui est fonction d'une mesure du taux de déformation locale du champ de vitesse. HOLLAND (1978) préfère un terme biharmonique en raison de sa sélectivité plus grande — dissipation plus active (faible) des ondes courtes (longues). Les termes de diffusion de SARMIENTO et ROTH (1980) ou BLECK et SMITH (1990) ne font appel qu'à des dérivées selon les surfaces d'égale densité. L'emploi de diffusion isopycnale semble cependant réservée aux modèles à grande échelle. DELEERSNIJDER et WOLANSKI (1990) ont proposé d'ajouter au membre de droite de (69) un terme dont le rôle est de filtrer spécifiquement le bruit numérique de la vitesse verticale — par le biais d'une action spécifique sur la vitesse horizontale.

Notons aussi que certains n'introduisent aucune espèce de diffusion horizontale et préfèrent utiliser un filtre numérique amortissant surtout les ondes courtes (SIGNELL, 1989).

7. Conditions aux limites: fonctions de paroi de fond

Sauf dans le cas où le transport de sédiments joue un rôle important, on peut assimiler le fond de la mer à une paroi solide, où la vitesse doit s'annuler. De nombreuses mesures attestent de l'existence, à proximité du fond de la mer, d'une couche limite turbulente où le profil de vitesse est logarithmique (WIMBUSH et MUNK, 1971; WEATHERLY, 1972, 1977; MARCHUK et KAGAN, 1984). Selon WIMBUSH et MUNK (1971), la hauteur de la couche logarithmique est d'ordre

$$h_{\log} \approx \frac{2 |\tau^b|}{f |\mathbf{u}_{\text{ext}}|}, \quad (73)$$

où τ^b et $\mathbf{u}_{\text{ext}}$ désignent, respectivement, la tension qu'exerce l'eau sur le fond de la mer et la vitesse en dehors de la couche limite. En pratique, $h_{\log}$ ne dépasse pas quelques mètres.

La couche logarithmique est une région de grande variation verticale de $\mathbf{u}$. Numériquement, on peut *résoudre* cette couche, c'est-à-dire utiliser une discrétisation tellement fine que les fortes variations peuvent être décrites par le modèle numérique. Ce procédé exige beaucoup de ressources informatiques: on peut l'utiliser dans un modèle unidimensionnel (WEATHERLY, 1975; MARCHUK et KAGAN, 1984; DAVIES et JONES, 1991) mais certainement pas dans un modèle tridimensionnel. Pour éviter cet inconvénient, on utilise la technique des "fonctions de paroi". Au lieu de *résoudre* la couche limite, on introduit dans l'algorithme numérique la solution asymptotique des équations valables dans la couche limite. De la sorte, il n'est pas nécessaire d'utiliser une discrétisation fine. Cette approche est couramment utilisée, depuis longtemps, en modélisation des fluides géophysiques (e.g. SMAGORINSKY, 1963; BLUMBERG et MELLOR, 1987).

La longueur de rugosité, z_0 , globalise l'effet sur la couche limite turbulente de la couche limite laminaire se situant entre le bas de la couche turbulente et le fond lui-même. Les mesures de WEATHERLY (1977) indiquent que z_0 peut changer, en un même point, de plusieurs ordres de grandeur, en quelques heures seulement. Il attribue ce fait à l'évolution de la structure du fond sous

l'action des courants. En fait, z_0 est très variable, à la fois dans l'espace et dans le temps (MARCHUK et KAGAN, 1984) de sorte qu'il est inutile d'introduire dans le modèle des valeurs mesurées locales et instantanées. En principe, il faudrait considérer la longueur de rugosité comme un paramètre du modèle à calibrer et non comme une grandeur à déterminer *in situ*. Ici, on se borne simplement à poser

$$z_0 = 10^{-3} \text{ m}, \quad (74)$$

qui est une valeur typique des fonds hydrodynamiquement rugueux (MARCHUK et KAGAN, 1984).

On suppose que la turbulence générée près du fond est suffisamment intense pour mélanger la couche de fond de sorte que la stratification n'y joue aucun rôle — ce qui n'est pas toujours une bonne hypothèse (WEATHERLY et MARTIN, 1978). Donc, d'après (II.46):

$$L_T \sim L_{T,0} \sim \kappa z, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}, \quad (75)$$

où z est la distance mesurée verticalement à partir du fond, $z = x_3 - h$.

Une mise à l'échelle adéquate des équations de quantité de mouvement montre que, dans la couche logarithmique, la tension turbulente est asymptotiquement constante:

$$\nu_T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \sim \tau^b, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}, \quad (76)$$

où τ^b est la tension turbulente exercée par l'eau sur le fond.

Dans ce texte, ce que nous appelons "tension" n'est pas une grandeur ayant la dimension d'une force par unité de surface. Les "tensions" employées ici représentent en fait le quotient d'une tension, au sens propre du terme, et de la masse volumique de l'eau.

La couche logarithmique étant une couche de cisaillement, on peut faire l'hypothèse que la production d'énergie cinétique turbulente par cisaillement y équilibre à peu près la dissipation visqueuse:

$$\nu_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|^2 \sim \varepsilon, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}. \quad (77)$$

La dissipation visqueuse peut s'écrire (voir (II.40) et (II.45)):

$$\varepsilon = \alpha_\varepsilon \frac{e^2}{16 \nu_T}. \quad (78)$$

Combinant (76)-(78), on obtient la fonction de paroi pour e :

$$e(z) \sim \frac{4}{\alpha_\varepsilon^{1/2}} (u_*^b)^2, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}, \quad (79)$$

où u_*^b est la vitesse de friction de fond, à savoir

$$u_*^b = |\tau^b|^{1/2}. \quad (80)$$

Donc, dans la couche limite de fond, l'énergie cinétique turbulente est à peu près constante.

Combinant (75)-(79) et la paramétrisation de la viscosité turbulente (II.40), on obtient

$$v_T \sim \kappa z u_*^b, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}, \quad (81)$$

que l'on introduit dans (76), ce qui conduit à la fonction de paroi pour la vitesse horizontale, à savoir

$$u(z) \sim \left(\frac{u_*^b}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \right) \frac{\tau^b}{|\tau^b|}, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}. \quad (82)$$

A partir de (81) et (82), on trouve facilement une expression permettant d'évaluer la tension de fond:

$$\frac{1}{L} \left[\tilde{v}_T \frac{\partial(H u)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=0} = \tau^b \sim C_D(z) |u(z)| u(z), \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}, \quad (83)$$

où C_D , le coefficient de friction sur le fond, vaut

$$C_D(z) = \left[\frac{\kappa}{\ln \frac{z}{z_0}} \right]^2. \quad (84)$$

Typiquement, $C_D \approx 10^{-3} - 10^{-2}$.

En résumé, dans le modèle numérique, on évalue τ^b conformément à la relation (83) à partir de la vitesse horizontale au premier point de discrétisation de u au-dessus du fond. Ensuite, on calcule u_*^b et on impose l'énergie cinétique turbulente à l'aide de (79) au premier point de discrétisation de e .

Habituellement, le flux des quantités scalaires — autres que e — au travers du fond est négligeable, voire réellement nul, ce qui se traduit par

$$\left[\tilde{\lambda}_T^y \frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=0} = 0. \quad (85)$$

Bien que la dissipation visqueuse ne soit pas, à proprement parler, une variable d'état du modèle, il est utile de connaître son profil dans la couche logarithmique, en vue de sa représentation graphique, par exemple. Introduisant (79) et (81) dans (78), on obtient:

$$\varepsilon \sim \frac{(u_*^b)^3}{\kappa z}, \quad z_0 \leq z \lesssim h_{\log}. \quad (86)$$

8. Conditions aux limites: flux de surface

La surface de la mer n'est pas une frontière fixe solide. Donc, traiter la couche limite de surface comme la couche de fond est, en théorie, incorrect. Cependant, vue de l'atmosphère, la surface de la mer ressemble quelque peu à une frontière solide. Pour les variables qui le permettent, il suffit donc de calculer les flux dans l'atmosphère avec les fonctions de paroi atmosphériques adéquates et puis d'exprimer la continuité de ces flux au travers de l'interface air-mer pour obtenir, finalement, les flux dans la mer.

Le vent exerce sur la surface de la mer une tension paramétrisée par (NIHOUL, 1984)

$$\tau^s = 0.63 \cdot 10^{-6} (1 + C^a |u^a|) |u^a| u^a, \quad (87)$$

où $C^a = 0.1 \text{ m}^{-1} \text{ s}$ et où u^a représente la vitesse de l'air, que l'on mesure généralement 10 m au-dessus du niveau de la mer. D'autres formules très semblables à (87) existent (KONDO, 1975; SMITH et BANKE, 1975; BUSCH, 1977). La condition de surface pour l'équation de quantité de mouvement horizontale s'écrit donc

$$\frac{1}{L} \left[\tilde{v}_T \frac{\partial(H u)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=L} = \tau^s. \quad (88)$$

A proximité de la surface de la mer existent deux sources distinctes d'énergie cinétique turbulente. Les vagues, en se brisant, produisent de la turbulence dans une couche d'épaisseur comparable à leur hauteur; cette énergie pénètre, par diffusion turbulente, dans la colonne d'eau (KITAIGORODSKII, 1979). D'autre part, sous l'action de la tension de vent, une mince couche de fort cisaillement se forme sous la surface et produit de la turbulence (KITAIGORODSKII, 1979).

Si l'on suppose que la seconde source de turbulence l'emporte sur la première — comme c'est sans doute souvent le cas (NIHOUL, 1973) —, le raisonnement effectué dans la couche de fond s'applique: on a alors

$$e(z^e) \sim \frac{4}{\alpha_e^{1/2}} (u_*^s)^2, \quad (89)$$

où $u_*^s = |\tau^s|^{1/2}$ et où z^e est la distance séparant le premier point de discrétisation de e de la surface. Quand le vent est nul, de la turbulence peut tout de même être générée par cisaillement près de la surface, par des courants induits par d'autres sources que le vent. Comment concilier les deux possibilités? En s'inspirant de RODI (1984), on propose la formule suivante:

$$e(z^e) \sim \frac{4}{\alpha_e^{1/2}} \max[(u_*^s)^2, |v_T \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z^e}]. \quad (90)$$

Evidemment, si la tension de vent est le principal moteur de l'écoulement et si la discrétisation est suffisamment fine, on doit avoir

$$(u_*^s)^2 \approx |v_T \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z^s} \quad (91)$$

Certains auteurs (NIHOUL, 1984; BAUMERT et RADACH, 1991) proposent de tenir compte des deux sources de turbulence agissant près de la surface en laissant le modèle calculer au mieux la production par cisaillement dans la dernière maille sous la surface — comme partout ailleurs — et en imposant, à la surface, le flux d'énergie cinétique turbulente, c'est-à-dire (NIHOUL, 1984):

$$\frac{1}{L} \left[\tilde{\lambda}_T^e \frac{\partial(H e)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=L} = 0.63 \cdot 10^{-9} (u_*^s)^3 \quad (92)$$

Physiquement, cette approche est meilleure — puisqu'elle ne néglige aucun mécanisme de production de turbulence. Mais, surtout si le maillage est grossier, il n'est guère certain que le schéma puisse correctement représenter la production d'énergie cinétique turbulente dans la mince couche de cisaillement se formant sous la surface. On a finalement opté pour la première solution.

Pour les quantités scalaires — autres que e —, on impose

$$\frac{1}{L} \left[\tilde{\lambda}_T^y \frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=L} = -\phi^{y,s}, \quad (93)$$

où $\phi^{y,s}$ est le flux de y à la surface — qui est positif si le transfert est dirigé vers le haut.

Si y désigne la température, il faut rappeler que l'équation pour T est en fait l'équation de bilan d'énergie interne. Donc,

$$\phi^{T,s} = \frac{1}{\rho_0 c} \phi^{ei,s}, \quad (94)$$

où $\phi^{ei,s}$, le flux d'énergie à la surface de la mer — en $W m^{-2}$ —, est la somme du flux d'ondes longues — infra-rouge — émises par la mer, du flux de chaleur latente associé aux échanges d'eau à l'interface air-mer et du flux de chaleur sensible correspondant à la conduction turbulente de chaleur.

On relie le flux de salinité au flux d'eau $\phi^{w,s}$ — évaporation – précipitation — à la surface par la formule classique:

$$\frac{1}{L} \left[\tilde{\lambda}_T^S \frac{\partial(H S)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=L} = \frac{S(\tilde{x}_3=L)}{\rho_0} \phi^{w,s} \quad (95)$$

On évalue $\phi^{ei,s}$ et $\phi^{w,s}$ au moyen de formules empiriques *ad hoc* (KONDO, 1975; BUSCH, 1977; NIHOUL, 1984).

9. Dynamique de l'énergie cinétique turbulente

Pour proposer des conditions aux limites latérales pour une variable donnée, il faut connaître les termes dominants de l'équation d'évolution de la variable en question. Ces notions sont en général bien connues sauf, peut-être, pour l'énergie cinétique turbulente. Nous allons donc ébaucher une mise à l'échelle de l'équation régissant l'évolution de e , c'est-à-dire (II.44).

Pour simplifier l'analyse, on néglige l'influence de la stratification. Cette hypothèse n'est mise en défaut que dans la (ou les) pycnocline(s), qui, de toutes façons, sont des couches minces. D'où, ici, $L_T \approx L_{T,0}$.

On définit $\mathcal{U}_*$, la vitesse de friction caractéristique, comme l'ordre de grandeur de la racine carrée de la tension turbulente:

$$\left[\nu_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right| \right]^{1/2} \approx \mathcal{U}_*, \quad (96)$$

avec

$$\mathcal{U}_* = \max[\sqrt{|\tau^b|}, \sqrt{|\tau^s|}]. \quad (97)$$

Les fonctions de paroi (79) et (90) suggèrent

$$e \approx 4 \mathcal{U}_*^2, \quad (98)$$

car $\alpha_\varepsilon \approx 1$. Il en résulte

$$\nu_T \approx \mathcal{U}_* L_{T,0}. \quad (99)$$

Globalement, l'énergie cinétique turbulente est extraite du courant moyen et est, en définitive, transformée en chaleur. Donc, la production par cisaillement et la dissipation visqueuse doivent être des termes dominants de l'équation de bilan de e et doivent avoir le même ordre de grandeur. Mathématiquement, on écrit

$$\nu_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2 = \frac{|\nu_T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}|^2}{\nu_T} \approx \frac{\mathcal{U}_*^3}{L_{T,0}} \quad (100)$$

et

$$\varepsilon \approx \frac{\mathcal{U}_*^3}{L_{T,0}}. \quad (101)$$

Notons que le temps caractéristique lié à la production ou à la dissipation visqueuse,

$$\mathcal{F}_T \approx \frac{e}{\varepsilon} \approx 4 \frac{L_{T,0}}{\mathcal{L}_*}, \quad (102)$$

tend vers zéro à mesure que l'on s'approche du fond — car $L_{T,0}$ tend vers zéro près du fond. De plus, dans cette région, la production par cisaillement et la dissipation visqueuse tendent vers l'infini. Par conséquent, l'ajustement vers l'équilibre production/dissipation est d'autant plus rapide que le point considéré est proche du fond — ce qui est en accord avec les hypothèses conduisant aux fonctions de paroi de fond et de surface, où l'on suppose l'équilibre production/dissipation établi.

Globalement, l'équilibre production/dissipation prévaut. Néanmoins, localement, les mécanismes de redistribution, l'advection et la diffusion turbulente, pourraient jouer un rôle conséquent. Examinons cette question.

On ne considère pas la diffusion horizontale qui ne peut, en aucun cas, être un processus dominant.

Pour la diffusion verticale, on a :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_T^e \frac{\partial e}{\partial x_3} \right)}{v_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2} \approx 2.8 \left(\frac{L_{T,0}}{\mathcal{L}_v} \right)^2. \quad (103)$$

Plus on s'éloigne du fond ou, dans une moindre mesure, de la surface, plus $(L_{T,0} / \mathcal{L}_v)$ est susceptible de grandir. Si on pose

$$\mathcal{L}_v = \alpha_v H, \quad 0 < \alpha_v \leq 1, \quad (104)$$

alors, en vertu de (II.49),

$$\frac{L_{T,0}}{\mathcal{L}_v} \leq \frac{0.2}{\alpha_v}. \quad (105)$$

Choisissons une valeur plausible de α_v : par exemple, $\alpha_v = 1/2$. Dans ce cas,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_T^e \frac{\partial e}{\partial x_3} \right)}{v_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2} \lesssim 0.4, \quad (106)$$

ce qui montre que la diffusion turbulente verticale est un phénomène potentiellement important qu'il ne peut être question de négliger.

Conformément aux usages, on considère que le terme d'advection verticale est, au plus, du même ordre de grandeur que le terme d'advection horizontale, ce qui implique

$$\mathcal{W} \leq \delta \mathcal{U}, \quad (107)$$

où $\mathcal{W}$ symbolise l'ordre de grandeur de la vitesse verticale. On trouve:

$$\left| \frac{\nabla_h \cdot (\mathbf{u} e)}{v_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2} \right| \approx 4 \delta \frac{L_{T,0}}{\mathcal{L}_v} \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_*}. \quad (108)$$

Si la tension de fond fixe l'ordre de grandeur de $\mathcal{U}_*$, alors (83) et (84) suggèrent

$$\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_*} \approx \frac{1}{\sqrt{C_D}}. \quad (109)$$

Introduisant (105) et (109) dans (108), prenant $\alpha_v \approx 1/2$ et $C_D \approx 3 \times 10^{-3}$, l'ordre de grandeur classique, on déduit

$$\left| \frac{\nabla_h \cdot (\mathbf{u} e)}{v_T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2} \right| \lesssim 30 \delta. \quad (110)$$

Le quotient d'aspect δ des phénomènes modélisés s'avère souvent si petit que l'advection est négligeable. Par exemple, dans le domaine d'intérêt de ce travail, on a $\mathcal{L}_v \approx 20$ m et $\mathcal{L}_h \approx 4 \times 10^4$, c'est-à-dire que $\delta \approx 5 \times 10^{-4}$, et donc $30 \delta \approx 0.015$.

En conclusion, l'advection est, de loin, le moins important des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente. La diffusion verticale peut être très significative. Mais, en gros, l'équilibre production/dissipation domine et cet équilibre s'établit d'autant plus rapidement que L_T est petit.

10. Conditions aux limites: frontières latérales

Dans la plupart des modèles marins à la méso-échelle, les frontières latérales sont constituées de surfaces verticales. En effet, les systèmes de coordonnées généralement utilisés ne permettent pas de représenter "naturellement" des frontières latérales obliques.

On distingue deux types de frontières latérales: la côte et la frontière en mer ouverte. La première a une existence physique tandis que la seconde représente la séparation, purement arbitraire, entre le domaine d'intérêt et le reste de la mer ou des océans, dont l'influence sur l'écoulement dans le domaine d'intérêt se manifeste au travers des conditions aux limites en mer ouverte.

Le nombre et la nature des conditions qu'il faut imposer sur la frontière au cours de la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles dépend évidemment de la nature des équations.

La diffusion horizontale est introduite pour des raisons numériques et n'est pas un processus dominant: on n'en tient pas compte dans l'établissement des conditions aux limites. En d'autres

termes, on établit les conditions aux limites comme si la diffusion horizontale était nulle. Mais, en pratique, il faut quand même traiter le terme de diffusion horizontale sur les frontières: on le calcule de telle sorte qu'il engendre le moins de perturbations possible sur l'écoulement. Dans ce travail, on a simplement annulé le flux de diffusion horizontale aux frontières latérales. De la sorte, on évite l'apparition d'oscillations parasites correspondant à une couche limite mal résolue par le maillage. Si $\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur en un point de la frontière latérale $\delta\mathcal{P}$, les paramétrisations (69) et (70) de $\mathbf{D}^u$ et D^y suggèrent les conditions suivantes:

$$[\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_H \tilde{\nabla}_h (H \mathbf{u})]_{\delta\mathcal{P}} = 0 \quad (111)$$

et

$$[\mathbf{n} \cdot \tilde{\lambda}_H^y H \tilde{\nabla}_h y]_{\delta\mathcal{P}} = 0. \quad (112)$$

Insistons sur un point. La *résolution* du modèle ne permet généralement pas de représenter correctement les détails de l'écoulement tout près de la côte, là où la profondeur tend vers zéro. Il n'est donc pas illogique de fermer cette zone par un mur vertical. Mais, annuler la vitesse tangentielle à ce mur et y associer une couche logarithmique n'aurait aucun sens physique.

L'imperméabilité de la côte implique l'annulation de tout flux advectif, c'est-à-dire

$$[\mathbf{n} \cdot (H \mathbf{u})]_{\text{côte}} = 0, \quad (113)$$

$$[\mathbf{n} \cdot (H \mathbf{u} \mathbf{u})]_{\text{côte}} = 0, \quad (114)$$

et

$$[\mathbf{n} \cdot (H \mathbf{u} y)]_{\text{côte}} = 0. \quad (115)$$

Les frontières en mer ouverte se divisent en deux catégories: les frontières *entrantes* et les frontières *sortantes*, selon que l'*information* entre dans le domaine ou en sort. Si la frontière est *entrante*, en principe, on y impose des valeurs mesurées *in situ*, tandis que, sur une frontière *sortante*, on s'efforce d'appliquer une condition telle que les perturbations ayant leur origine dans le domaine puisse en sortir librement (ROED et COOPER, 1986). A une frontière *sortante*, on applique habituellement une condition de radiation dont la forme générale est (BLUMBERG et KANTHA, 1985):

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u_y (\mathbf{n} \cdot \nabla_h) y = - \frac{y - y_f}{T_f}, \quad u_y \geq 0, \quad (116)$$

où u_y , y_f et T_f dénotent, respectivement, la vitesse de propagation de l'information concernant la variable y , une valeur mesurée vers laquelle y devrait tendre sur la frontière et un temps caractéristique de rappel vers y_f . La relation (116) permet d'établir une combinaison — à pondération variable — entre différents types de conditions aux limites généralement envisagées séparément (CHAPMAN, 1985). Si $T_f \rightarrow 0$, alors (116) revient à imposer $y = y_f$ à la frontière. Si $T_f \rightarrow \infty$, (116) devient la condition de radiation classique. Dans le cas où $u_y \rightarrow \infty$, $\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} y = 0$, c'est-à-dire que (116) se transforme en une condition de gradient nul.

Encore faut-il savoir si l'information concernant une variable donnée entre dans le domaine ou en sort, et à quelle vitesse?

A l'exception de l'équation d'évolution de e , les équations pour les quantités scalaires sont généralement dominées par l'advection. Donc, la frontière est *sortante* ou *entrante* selon la règle suivante:

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{\text{front. mer}} > 0 : \text{frontière } \textit{sortante}, \quad (117a)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{\text{front. mer}} \leq 0 : \text{frontière } \textit{entrante}. \quad (117b)$$

Bien entendu, quand la frontière est *sortante*,

$$u_y = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{\text{front. mer}}. \quad (118)$$

Concernant la quantité de mouvement, la situation est moins simple. En effet, la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ est associée à la propagation des ondes de gravité de surface, propagation dans laquelle $\hat{\mathbf{u}}$ ne joue pas un rôle déterminant. La vitesse de propagation du mode externe — correspondant aux équations moyennées sur la verticale et donc aux ondes de Poincaré — dépasse très nettement celle(s) du mode interne — associé aux équations pour les déviations par rapport aux moyennes. Pour cette raison, on peut résoudre séparément les équations pour le mode externe et celles pour le mode interne (MADALA et PIACSEK, 1977; MADALA, 1981; BLUMBERG et MELLOR, 1987; BECKERS, 1988, 1991a). Dans ce cas, on applique au mode externe des conditions semblables à celles employées dans un modèle bidimensionnel intégré sur la profondeur. En particulier, pour l'ensemble des variables $\bar{\mathbf{u}}$ et η , on doit appliquer un total de deux conditions à une frontière *entrante* — au sens de (117b), où on remplace $\mathbf{u}$ par $\bar{\mathbf{u}}$ — et une condition seulement dans le cas contraire (DAUBERT et GRAFFE, 1967). Cependant, si on néglige les termes d'advection, alors une condition suffit, quel que soit le type de la frontière considérée (DAUBERT et GRAFFE, 1967). Dans la présente étude, le nombre de Rossby est petit. On suggère donc la règle suivante: une condition, sur la vitesse normale à la frontière, par exemple, doit requérir beaucoup de soin tandis qu'une simple condition additionnelle de gradient nul de la vitesse tangentielle à la frontière suffit. Cette dernière condition est mathématiquement correcte si la frontière est *entrante* mais, dans le cas contraire, seules les nécessités du calcul numérique justifient son emploi — et il s'agit alors d'une condition purement artificielle. L'élévation n'étant pas

calculée sur la frontière, comme on le verra plus loin, aucune condition concernant cette variable, mathématiquement correcte ou purement artificielle, n'est nécessaire. Pour $\hat{u}$, les conditions aux limites relèvent le plus souvent du bricolage mais, en tout cas, il faut éviter que la technique utilisée produise des mouvements verticaux parasites à proximité de la frontière — car $\tilde{w}$ dépend directement de $\hat{u}$ et non de u (voir (21)) (DELEERSNIJDER *et al.*, 1989). Si, comme dans cette étude, on n'utilise pas la méthode de séparation des modes, il est tout de même possible d'appliquer des conditions différentes à $\bar{u}$ et $\hat{u}$ (DELEERSNIJDER *et al.*, 1989).

Aux parois imperméables, les conditions appliquées à l'énergie cinétique turbulente sont les mêmes que celles utilisées pour les autres variables scalaires. A une frontière en mer ouverte, si la condition (110) est vérifiée — comme c'est presque toujours le cas —, alors on peut négliger l'advection à la frontière, ce qui supprime la dérivée horizontale normale à la frontière et donc tout problème de conditions aux limites. Au vu de (110), on pourrait même négliger partout l'advection de e . Ici, on ne l'a cependant pas fait, car on ne peut exclure que l'advection d'énergie cinétique turbulente puisse être significative dans certaines régions, en principe, peu étendues — où il ne faut évidemment pas placer de frontière en mer ouverte. De toutes façons, les frontières en mer ouverte ne peuvent traverser des zones où l'on s'attend à rencontrer de fortes variations horizontales des variables d'état. C'est une règle de bonne pratique évidente!

Une stratégie consistant à imposer à une frontière latérale des valeurs mesurées de l'énergie cinétique turbulente ne serait guère réaliste. En effet, mesurer en mer des corrélations turbulentes s'avère difficile et onéreux. Par conséquent, ce type de données est fort rare. De plus, les grandeurs turbulentes dépendent fort — malheureusement — des détails de la fermeture turbulente. Il s'ensuit que les valeurs de e calculées peuvent être très éloignées des valeurs mesurées. En fait, les flux turbulents de quantité de mouvement, de température, de salinité, ..., sont imposés ou calculés de façon assez fiable à la surface ou au fond. C'est pourquoi on peut penser que les flux évalués par le modèle dans la colonne d'eau sont de meilleure qualité que les valeurs individuelles de l'énergie cinétique turbulente, de la dissipation visqueuse, des diffusivités turbulentes, ... Tout ceci renforce l'idée selon laquelle il est préférable de laisser la fermeture turbulente calculer, au besoin à l'aide d'équations simplifiées, les variables adéquates à proximité des frontières. Ces valeurs seront probablement plus en accord avec celles calculées à l'intérieur du domaine d'intérêt et induiront sans doute moins de perturbations que des valeurs mesurées. Après tout, on ne s'intéresse aux grandeurs turbulentes que dans la mesure où ces grandeurs permettent de calculer les flux turbulents des variables qui comptent réellement en éco-hydrodynamique, à savoir la vitesse, la température, la salinité, ...

11. Schéma numérique

Il existe de nombreuses méthodes numériques capables de résoudre les équations différentielles (AI.1)-(AI.6) du modèle qui nous occupe. Pour choisir un schéma numérique, ou une famille de

schémas, on doit tenir compte des objectifs du modèle, mais aussi des moyens informatiques disponibles.

Les résultats exposés dans la suite de ce travail ont été obtenus sur un IBM 43/81, c'est-à-dire une machine dont la vitesse effective de calcul (≤ 0.5 Mégaflops) et la mémoire centrale (≤ 15 Mégabytes) sont très limitées — par rapport aux ordinateurs vectoriels et/ou parallèles maintenant en fonction en Belgique. Le schéma numérique devait donc être simple et économique.

On privilégie les schémas qui permettent d'avancer d'un incrément temporel en un seul pas. On exclut les différences centrées dans le temps au profit des différences "avant", afin de limiter les besoins de mémoire.

Quand les termes d'advection sont discrétisés de façon rudimentaire (MESINGER et ARAKAWA, 1976; SEMTNER, 1986a, b) — au moyen de différences centrées, par exemple —, les schémas du type *leapfrog*, fréquemment utilisés en océanographie, permettent une meilleure représentation de l'advection que les schémas utilisant les différences temporelles "avant". Toutefois, quasiment toutes les discrétisations précises de l'équation d'advection/diffusion emploient des différences "avant" sur le temps — voir l'étude comparative de BESTGEN et DEVILLE (1987). Pour se ménager la possibilité d'utiliser, dans le futur, un de ces schémas, il nous paraît plus opportun de ne pas s'orienter vers une méthode du type *leapfrog*.

Remarquons aussi que les différences centrées temporelles conduisent à une séparation des modes correspondant à un nombre pair ou impair d'incrément temporels. On remédie à cet inconvénient en appliquant un filtre temporel à la solution numérique (ASSELIN, 1972).

On peut mettre au point des approximations numériques des dérivées spatiales dont l'ordre de précision est élevé. Cependant, la qualité de ce type de schéma est généralement fort affectée par le traitement des conditions aux frontières quand la géométrie du domaine d'intérêt est complexe — ce qui est habituellement le cas en océanographie. L'attitude la plus réaliste consiste sans doute à optimiser des schémas utilisant peu de points de discrétisation.

La conservativité est une propriété essentielle, d'autant que l'on intègre habituellement les équations du modèle pendant un grand nombre de pas de temps. En effet, à quoi servirait-il d'utiliser un schéma très précis mais non conservatif qui, au bout d'un certain temps, aurait quand même fait disparaître 10% de la masse de la mer ou des constituants dissous? Mieux vaut un schéma moins précis mais conservatif. De plus, un schéma conservatif permet d'établir, en toute sécurité, des bilans des flux de matière entrant et sortant du domaine ou d'un sous-domaine donné.

D'autre part, il faut que le schéma soit capable de traiter des zones de grandes variations des variables d'état — fronts, pycnoclines, ... — sans *over-* ou *under-shooting*. Ici aussi, on donnera la préférence à des schémas peut-être trop diffusifs mais ne générant pas trop d'oscillations ou de concentrations négatives dans les régions de grands gradients.

On désire donc employer un schéma "robuste", c'est-à-dire un schéma très stable dont les solutions sont, en toutes circonstances, réalistes ou, au moins, non-absurdes.

Les équations du modèle étant longues et complexes, on ne peut évidemment pas analyser l'entière du schéma numérique visant à les résoudre. On se contente généralement de décomposer le modèle en sous-modèles simples pour lesquels on examine une ou plusieurs méthodes numériques.

On espère que le schéma global “additionnera” les propriétés des schémas partiels. Cette approche est la seule possible mais elle n'est pas très fiable (KASAHARA 1965; CUSHMAN-ROISIN 1984; BECKERS 1991b; BECKERS et DELEERSNIJDER 1991).

On adopte les notations usuelles:

$$y_{i,j,k}^n = y(n \Delta \tilde{t}, i \Delta \tilde{x}_1, j \Delta \tilde{x}_2, k \Delta \tilde{x}_3), \quad n, i, j, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (119)$$

Pour le temps et les coordonnées horizontales,

$$(\Delta \tilde{t}, \Delta \tilde{x}_1, \Delta \tilde{x}_2) = (\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2), \quad (120)$$

mais, selon la verticale,

$$(\Delta \tilde{x}_3, \Delta x_3) = (\Delta \sigma L, \Delta \sigma H). \quad (121)$$

Pour simplifier les notations, on omet d'écrire tout indice valant n, i, j ou k — pour autant qu'aucune confusion ne soit possible. Par exemple, y^{n+1} désigne, en fait, $y_{i,j,k}^{n+1}$.

11.1 Grille numérique

La plupart des modèles marins à petite échelle utilisent la grille décentrée de type C — selon la classification d'Arakawa (ARAKAWA et LAMB, 1977) (Figure 4). Sur cette grille, la propagation des ondes de Poincaré et le contrôle du bruit numérique sont meilleurs que sur les autres (MESINGER et ARAKAWA, 1976; BATTEEN et HAN, 1981; SEMTNER, 1986a). De plus, tenir compte de l'imperméabilité des frontières est très aisé, à condition que la limite du domaine passe sur les points de discrétisation de la composante de vitesse normale à cette limite.

A l'origine, la classification des types de grilles concernait seulement la position des points de discrétisation dans le plan horizontal. L'extension de la grille C à trois dimensions, en coordonnée σ , ne pose aucun problème. Ici, on utilise exactement la même disposition des inconnues que BLUMBERG et MELLOR (1987), à une différence près: l'énergie cinétique turbulente est définie au même point que les autres quantités scalaires alors que BLUMBERG et MELLOR (1987) placent cette variable au même point que $\bar{\omega}$. Notre système a un avantage: il facilite le calcul des flux d'advection de e — mais, comme le transport advectif de l'énergie cinétique turbulente ne domine pas la dynamique de e , cet avantage n'est guère décisif.

On définit la maille du modèle comme le volume entourant un point de discrétisation d'une quantité scalaire, les faces de ce volume passant par les “points vitesse” (Figure 4). Les flux d'advection et de diffusion d'un scalaire se calculent très naturellement sur les interfaces des mailles. Par conséquent, les conditions aux limites en termes de flux sont très facilement implémentées.

Ici, on a :

$$\Delta \tilde{x}_1 = \Delta \tilde{x}_2 = \Delta \tilde{x}_3 = 10^4 \text{ m}. \quad (122)$$

Chaque verticale comprend 10 mailles:

$$\Delta\sigma = 0.1, \quad (123)$$

donc

$$L = 10^5 \text{ m}. \quad (124)$$

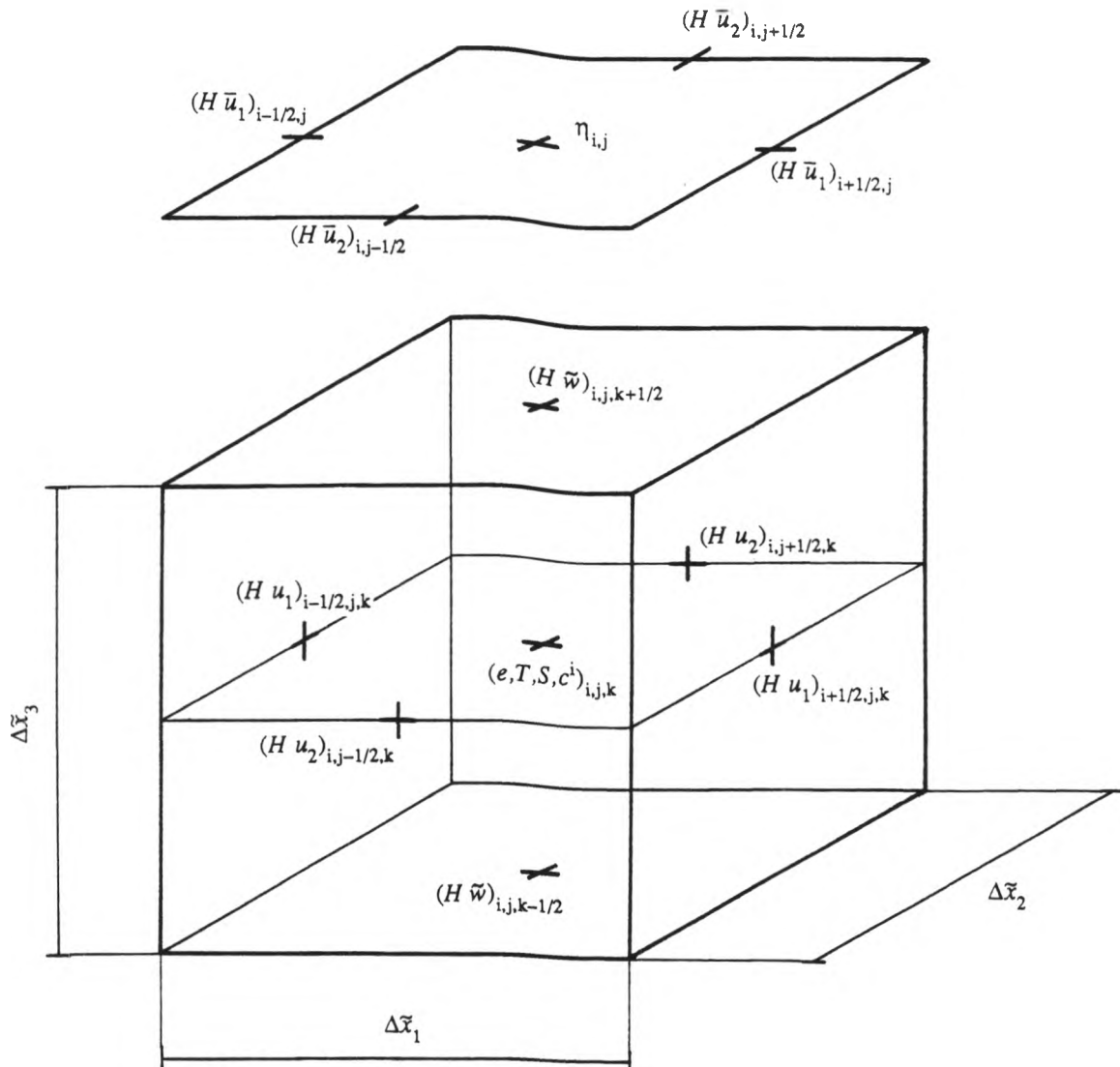


Figure 4. Position des inconnues numériques bi- et tri-dimensionnelles sur la grille C.

11.2 Technique du "volume fini"

Pour que le schéma soit conservatif, on utilise la technique du "volume fini" (PEYRET et TAYLOR, 1983). On évite ainsi les pertes de matière et les solutions numériques sont généralement robustes (ROACHE, 1982).

L'équation d'évolution d'une quantité scalaire y peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{t}} = H p^y - \tilde{\nabla} \bullet \mathbf{q}^y, \quad (125)$$

où $\mathbf{q}^y$ représente le flux d'advection/diffusion de y . On intègre (125) sur un pas de temps et sur le volume $\mathcal{M}$ de la maille repérée par les indices (i, j, k) :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\Delta\tilde{t}} \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{t}} d\mathcal{M} d\tilde{t} &= \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\Delta\tilde{t}} \int_{\mathcal{M}} H p^y d\mathcal{M} d\tilde{t} \\ &\quad - \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\Delta\tilde{t}} \int_{\delta\mathcal{M}} \mathbf{n} \bullet \mathbf{q}^y d\delta\mathcal{M} d\tilde{t}, \end{aligned} \quad (126)$$

où $\delta\mathcal{M}$ symbolise la surface de la maille $\mathcal{M}$ dont la normale extérieure est notée $\mathbf{n}$. On fait l'approximation suivante:

$$\int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\Delta\tilde{t}} \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{t}} d\mathcal{M} d\tilde{t} \approx [(H y)^{n+1} - (H y)^n] \Delta\tilde{x}_1 \Delta\tilde{x}_2 \Delta\tilde{x}_3. \quad (127)$$

On pose:

$$\int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\Delta\tilde{t}} \int_{\mathcal{M}} H p^y d\mathcal{M} d\tilde{t} = P^y \Delta\tilde{t} \Delta\tilde{x}_1 \Delta\tilde{x}_2 \Delta\tilde{x}_3. \quad (128)$$

On écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+\Delta\tilde{t}} \int_{\delta\mathcal{M}} \mathbf{n} \bullet \mathbf{q}^y d\delta\mathcal{M} d\tilde{t} &= \Delta\tilde{t} \Delta\tilde{x}_2 \Delta\tilde{x}_3 [(\Phi_1^y)_{i+1/2} - (\Phi_1^y)_{i-1/2}] + \\ &\quad \Delta\tilde{t} \Delta\tilde{x}_1 \Delta\tilde{x}_3 [(\Phi_2^y)_{j+1/2} - (\Phi_2^y)_{j-1/2}] + \Delta\tilde{t} \Delta\tilde{x}_1 \Delta\tilde{x}_2 [(\Phi_3^y)_{k+1/2} - (\Phi_3^y)_{k-1/2}]. \end{aligned} \quad (129)$$

Ci-dessus, $(\Phi_1^y)_{i+1/2}$ représente la moyenne sur l'incrément temporel et sur l'interface de maille correspondant à l'indice $i+1/2$ du flux d'advection diffusion/diffusion de y . Les autres notations sont similaires.

Rassemblant (126)-(129), on trouve l'expression générale du schéma de résolution de (125):

$$\begin{aligned}
 (H y)^{n+1} = (H y) + \Delta \tilde{t} P^y - \Delta \tilde{t} \frac{(\Phi_1^y)_{i+1/2} - (\Phi_1^y)_{i-1/2}}{\Delta \tilde{x}_1} \\
 - \Delta \tilde{t} \frac{(\Phi_2^y)_{i+1/2} - (\Phi_2^y)_{i-1/2}}{\Delta \tilde{x}_2} - \Delta \tilde{t} \frac{(\Phi_3^y)_{k+1/2} - (\Phi_3^y)_{k-1/2}}{\Delta \tilde{x}_3} . \quad (130)
 \end{aligned}$$

Bien entendu, la qualité du schéma dépend de la manière dont on évalue P^y et les moyennes des flux sur les interfaces des mailles.

On applique la même technique aux équations de quantité de mouvement mais le volume d'intégration est décalé d'une demi-maille par rapport à celui utilisé pour les variables scalaires.

11.3 Conservation de la masse

On considère $(H u_1)$ et $(H u_2)$, les composantes horizontales de $H \mathbf{u}$, comme inconnues numériques, plutôt que les composantes de la vitesse. La forme la plus simple conforme au schéma général (130) de la discrétisation des équations (AI.1) et (AI.2) exprimant la conservation de la masse, sur une verticale et dans chaque maille, est donnée par:

$$\begin{aligned}
 \eta^{n+1} = \eta \\
 - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} [(H \bar{u}_1)_{i+1/2} - (H \bar{u}_1)_{i-1/2}] - \frac{\Delta t}{\Delta x_2} [(H \bar{u}_2)_{j+1/2} - (H \bar{u}_2)_{j-1/2}] , \quad (131)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H \tilde{w})_{k+1/2} = (H \tilde{w})_{k-1/2} \\
 - \frac{\Delta \tilde{x}_3}{\Delta x_1} [(H \hat{u}_1)_{i+1/2} - (H \hat{u}_1)_{i-1/2}] - \frac{\Delta \tilde{x}_3}{\Delta x_2} [(H \hat{u}_2)_{j+1/2} - (H \hat{u}_2)_{j-1/2}] . \quad (132)
 \end{aligned}$$

L'imperméabilité du fond implique

$$(H \tilde{w})_{1/2} = 0 . \quad (133)$$

L'expression aux différences (132) vérifie, par construction, l'imperméabilité de la surface de la mer, à savoir

$$(H \tilde{w})_{10+1/2} = 0 . \quad (134)$$

Calculer $(H \tilde{w})$ par intégration à partir du fond ou de la surface ne fait aucune différence dans le schéma ci-dessus. On respecte donc la dernière égalité de (21).

11.4 Ondes de Poincaré

La propagation des ondes de Poincaré est généralement le processus le plus important à la méso-échelle. Le schéma numérique doit donc être à même de bien représenter ce processus. Cependant, à

cause de difficultés mathématiques quasi-insurmontables, il n'existe que très peu d'études strictement analytiques de schémas de discrétisation des équations régissant la propagation des ondes de Poincaré. Citons toutefois BECKERS et DELEERSNIJDER (1991). On se contente le plus souvent d'examiner séparément les ondes de gravité de surface et les oscillations d'inertie.

Pour les ondes de gravité, on analyse le sous-modèle suivant:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla_h \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (135)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g \nabla_h \eta, \quad (136)$$

où la profondeur H est constante. On utilise le schéma *forward-backward* qui est simple, précis et économique (MESINGER et ARAKAWA, 1976):

$$\eta^{n+1} = \eta - H \frac{(u_1)_{i+1/2} - (u_1)_{i-1/2}}{\Delta x_1} - H \frac{(u_2)_{j+1/2} - (u_2)_{j-1/2}}{\Delta x_2}, \quad (137)$$

$$(u_1)_{i+1/2}^{n+1} = (u_1)_{i+1/2} - \frac{g \Delta t}{\Delta x_1} (\eta_{i+1}^{n+1} - \eta_i^{n+1}), \quad (138)$$

$$(u_2)_{j+1/2}^{n+1} = (u_2)_{j+1/2} - \frac{g \Delta t}{\Delta x_2} (\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_j^{n+1}). \quad (139)$$

La condition de stabilité est (RONDAY, 1976):

$$\Delta t \leq \left[\frac{(\Delta x_1)^2 (\Delta x_2)^2}{g H [(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2]} \right]^{1/2}. \quad (140)$$

La relation (131) peut être vue comme la généralisation de (137).

Dans le schéma complet, on introduit l'élévation à l'instant "n+1" dans l'expression discrétisée de la force de pression horizontale (26). En tout cas, prendre l'élévation au temps "n" conduit à un schéma inconditionnellement instable.

Concernant les oscillations d'inertie, on étudie

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u} = 0. \quad (141)$$

La discrétisation explicite

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u} - f \Delta t \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u} \quad (142)$$

est instable. En effet, (142) implique une augmentation continue de l'énergie cinétique:

$$|\mathbf{u}^{n+1}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + (f \Delta t)^2 |\mathbf{u}|^2. \quad (143)$$

La discrétisation de type Crank-Nicholson assure la constance de l'énergie mais on ne peut l'appliquer aisément sur une grille C parce que les composantes de la vitesse ne sont pas définies au même point. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser un schéma classique adapté de SIELECKI (1968) qui n'exige pas la résolution d'un système d'équations linéaires:

$$(u_1)^{n+1} = u + f \left[\frac{1 + (-1)^n}{2} u_2 + \frac{1 - (-1)^n}{2} (u_2)^{n+1} \right], \quad (144a)$$

$$(u_2)^{n+1} = u - f \left[\frac{1 - (-1)^n}{2} u_1 + \frac{1 + (-1)^n}{2} (u_1)^{n+1} \right]. \quad (144b)$$

Ici, on emploie un système moins habituel: on ajoute un terme de friction artificielle à (142) pour dissiper l'énergie produite par la force de Coriolis:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u} - f \Delta t \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u} - K_f \mathbf{u}^{n+1}. \quad (145)$$

Le coefficient de friction K_f est calculé de telle sorte que l'énergie cinétique n'augmente pas:

$$K_f = \frac{[1 + (f \Delta t)^2]^{1/2} - 1}{\Delta t}. \quad (146)$$

Dans le schéma (144), l'énergie cinétique oscille autour d'une valeur moyenne (BECKERS, 1988), alors qu'avec (145) elle reste constante. Par contre, l'erreur de phase du schéma (144) est deux fois plus petite que celle de (145).

La profondeur du domaine d'intérêt de notre travail ne dépasse pas 80 m, environ. Après quelques essais, on a choisi:

$$\Delta \tilde{t} = 180 \text{ s}, \quad (147)$$

alors que la borne supérieure fixée par la condition (140) concernant la propagation des ondes de gravité est de ≈ 200 s. Il vient:

$$K_f = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}. \quad (148)$$

On se persuade facilement que l'amortissement associé à K_f ne domine que très rarement la diffusion verticale de quantité de mouvement.

11.5 Flux d'advection

On considère l'équation d'advection

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial (u y)}{\partial x} = 0, \quad u > 0, \quad (149)$$

où la vitesse u est constante.

Conformément au schéma général, on écrit

$$y^{n+1} = y - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi_{i+1/2} - \Phi_{i-1/2}). \quad (150)$$

Comment calculer le flux d'advection?

Si l'on prend

$$\Phi_{i+1/2} = u y_i, \quad (151)$$

on obtient le schéma *upwind* du premier ordre. Cette discrétisation ne génère pas d'*over-* ou *under-shooting*, bénéficie de bonnes qualités de propagation mais contient beaucoup trop de diffusivité numérique.

Le schéma FTCS correspond à

$$\Phi_{i+1/2} = u y_{i+1/2} = u \frac{y_i + y_{i+1}}{2}. \quad (152)$$

Cette méthode est instable mais un peu de diffusion suffit à la stabiliser. Elle est potentiellement plus précise, surtout si y varie peu. Toutefois, dans les régions de forte variation de y , des oscillations conduisant à des dépassements apparaissent.

Comment profiter des avantages des deux méthodes en évitant au mieux leurs inconvénients? En fait, (152) équivaut à une interpolation linéaire de y entre x_i et x_{i+1} :

$$y(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, \quad (153)$$

de sorte que, en $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i) / 2$, on trouve

$$y(x_{i+1/2}) = y_{i+1/2} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}. \quad (154)$$

Quand les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2 de y sont négligeables, l'interpolation linéaire (153) fournit une bonne approximation de $y_{i+1/2}$. Dans le cas contraire, l'interpolation linéaire n'est pas valable et la méthode génère des oscillations que l'on pourrait éviter en posant, localement,

$$y_{i+1/2} = y_i, \quad (155)$$

comme dans le schéma *upwind* du premier ordre. On est donc conduit à proposer un schéma hybride basé sur l'interpolation suivante:

$$y_{i+1/2} = \beta y_i + (1 - \beta) \frac{y_i + y_{i+1}}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (156)$$

où β , le taux de décentrement, augmente si les dérivées d'ordre élevé sont importantes. De la sorte, on peut espérer que le schéma soit capable de bien représenter les fronts, les pycnoclines, ... En

s'inspirant de HARTEN (1978) et JAMES (1986), BECKERS (1988, 1991a) a proposé un schéma à la fois précis, peu diffusif et exempt d'oscillations, dans lequel β est une fonction d'une mesure de la dérivée seconde locale. Ici, on a utilisé une version antérieure à ce schéma où β est proportionnel à la norme de la dérivée première de y . Ceci est une erreur car le gradient local peut être grand tandis que y varie linéairement si bien que l'interpolation linéaire reste très valable.

On peut raffiner quelque peu l'interpolation (156) (DELEERSNIJDER *et al.*, 1989) en tenant compte de la solution analytique locale de l'équation d'advection (149). De la sorte, on obtient une variante de la méthode de LEITH (1965).

En pratique, on évalue le flux d'advection $(H u_1 y)_{i+1/2}$ selon

$$(H u_1 y)_{i+1/2} = (H u_1)_{i+1/2} \left[\beta y_i + (1 - \beta) \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right]. \quad (157)$$

On calcule les autres flux advectifs de manière similaire, bien entendu.

Le décentrement variable n'est pas utilisé dans les équations de quantité de mouvement. En effet, il ne paraît pas indispensable de raffiner le calcul de l'advection de quantité de mouvement dès lors que ce processus n'est pas dominant dans notre écoulement. Dans ces équations, on se contente d'un schéma centré classique.

11.6 Diffusion

Une condition nécessaire de stabilité concernant la diffusion turbulente est (ROACHE, 1982):

$$\frac{\tilde{\lambda}_T^y \Delta \tilde{\tau}}{(\Delta \tilde{x}_3)^2} = \frac{\lambda_y^y \Delta t}{(\Delta x_3)^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (158)$$

La diffusivité turbulente peut atteindre $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ tandis que $\Delta x_3 \geq 1 \text{ m}$. Par conséquent, la condition (158) peut être violée. Pour éviter toute instabilité, on évalue la diffusion verticale de façon implicite.

Conformément au schéma général, les flux de diffusion turbulente verticale sont évalués à l'aide de relations du type:

$$\left[\tilde{\lambda}_T^y \frac{\partial(H y)}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3 = (\tilde{x}_3)_{k+1/2}} \approx (\tilde{\lambda}_T^y)_{k+1/2} \frac{(H y)_{k+1}^{n+1} - (H y)_k^{n+1}}{\Delta \tilde{x}_3}. \quad (159)$$

La diffusion horizontale ne pose aucun problème de stabilité et est calculée explicitement.

11.7 Production/destruction

Il faut éviter que la discrétisation des termes de production/destruction génère des dépassements. Par exemple, la dissipation visqueuse ne peut conduire à des valeurs négatives de l'énergie cinétique turbulente. Nous allons voir comment l'éviter.

On considère le problème suivant:

$$\frac{dy}{dt} = So(y) - Pu(y) \quad (160)$$

avec

$$y(t=0) > 0. \quad (161)$$

Les termes $So(y)$ et $Pu(y)$ représentent, respectivement, la somme des sources de y et la somme des puits. On a

$$So(y), Pu(y) > 0. \quad (162)$$

On suppose que l'équation (160) possède un seul point d'équilibre,

$$y_{\text{eq}} > 0, \quad (163)$$

qui est stable. D'où

$$So(y) - Pu(y) > 0 \quad \text{si} \quad y < y_{\text{eq}}, \quad (164a)$$

$$So(y) - Pu(y) = 0 \quad \text{si} \quad y = y_{\text{eq}}, \quad (164b)$$

$$So(y) - Pu(y) < 0 \quad \text{si} \quad y > y_{\text{eq}}, \quad (164c)$$

Il en résulte que y reste positif et tend monotonément vers le point d'équilibre.

On exige que la solution numérique ait le même comportement.

Un schéma simple, pseudo-implicite sur la destruction, ayant les propriétés souhaitées, est facilement bâti (PATANKAR, 1980; BAUMERT et RADACH, 1991):

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = So(y^n) - Pu(y^n) \frac{y^{n+1}}{y^n}. \quad (165)$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient:

$$y^{n+1} = \frac{y^n + \Delta t So(y^n)}{y^n + \Delta t Pu(y^n)} y^n. \quad (166)$$

A l'évidence, ce schéma est défini positif et a un point d'équilibre en $y = y_{\text{eq}}$. Il reste à montrer que la solution numérique tend monotonément vers ce point d'équilibre. Il faut donc que le schéma vérifie:

$$y_{\text{eq}} \geq y^{n+1} > y^n \quad \text{si} \quad y^n < y_{\text{eq}}, \quad (167)$$

$$y_{\text{eq}} \leq y^{n+1} < y^n \quad \text{si} \quad y^n > y_{\text{eq}}. \quad (168)$$

Ces deux conditions conduisent à exiger

$$\Delta t < \frac{1}{\max_{y \neq y_{\text{eq}}} \left[0, \frac{y_{\text{eq}} P u(y) - y S o(y)}{y (y - y_{\text{eq}})} \right]} \quad (169)$$

Sauf dans des cas très particuliers, il existe toujours un pas de temps non nul satisfaisant la condition de monotonie (169).

En pratique, cependant, l'inégalité (168) n'est pas toujours vérifiée pour toutes les valeurs possibles des paramètres et des variables d'état. Mais, même si la monotonie n'est pas assurée, la positivité du schéma reste garantie — et c'est l'essentiel.

Par exemple, on discrétise la dissipation visqueuse comme suit:

$$\varepsilon \approx \left(\frac{\alpha_\varepsilon e}{16 \nu_T} \right) e^{n+1}. \quad (170)$$

En résumé, on évalue explicitement les termes de production. On calcule de manière pseudo-implicite les termes de destruction mais aucune équation non-linéaire ne doit être résolue.

On pourrait facilement transformer (165) en un schéma dont le taux de pseudo-implicité serait variable. Dans cette optique, les expériences numériques d'ADAM (1990) montrent que la méthode que nous venons de présenter est loin d'être la plus précise mais est la plus sûre.

11.8 Organisation des calculs

En fonction de la discussion qui précède, on peut maintenant esquisser les grandes lignes du schéma numérique global.

Tout d'abord, on calcule η^{n+1} et $(H \bar{\omega})$. Ensuite, on évalue les diffusivités turbulentes, puis l'énergie cinétique turbulente. Finalement, on détermine la température, la salinité et les composantes du transport local — $(H u_1)$ et $(H u_2)$ — à l'instant "n+1" en utilisant η^{n+1} dans le gradient horizontal de pression. Les équations d'évolution pour e , T , S , $(H u_1)$ et $(H u_2)$ requièrent, à cause de la diffusion verticale, la résolution d'un système linéaire tridiagonal — que l'on effectue au moyen d'une version simplifiée bien connue de la décomposition L-U (DAHLQUIST et BJÖRCK, 1974).

11.9 Discussion

Notre schéma numérique est simple, mais il est sans doute assez rudimentaire.

Parmi les défauts majeurs du schéma, il faut distinguer ceux qui affectent la qualité des résultats et ceux qui concernent essentiellement l'économie de temps de calcul.

La méthode de calcul de la force de Coriolis n'est pas très classique et, surtout, elle n'est sans doute pas supérieure à (144), qui est une discrétisation bien connue. Il serait sans doute préférable de revenir à cette méthode. Remarquons que la discrétisation (144), qui découle de SIELECKI (1968), revient à évaluer la force de Coriolis de façon "centrée dans le temps", le "centrage temporel" étant réalisé sur deux pas de temps. La plupart des discrétisations "classiques" de la force de Coriolis

visent à obtenir une évaluation centrée sur un pas de temps, sur deux pas de temps *leapfrog*, sur deux demi-pas de temps, ..., selon le *time stepping* choisi.

L'évaluation du taux de décentrement utilisée pour le calcul des flux advectifs est déficiente — bien qu'une méthode semblable à la nôtre ait déjà été employée (CLARK and HALL, 1979). Il faudrait remédier à ce défaut en s'inspirant des travaux de HARTEN (1978), JAMES (1986) et BECKERS (1988, 1991a).

Notre schéma n'est pas économique. En effet, la condition de stabilité concernant la propagation des ondes de gravité de surface restreint considérablement le pas de temps. Pour remédier à cet inconvénient, on peut utiliser le *mode splitting*, c'est-à-dire résoudre séparément, avec deux pas de temps différents, les équations pour le mode interne, d'une part, et les équations pour le mode externe, d'autre part (BLUMBERG et MELLOR, 1987). On pourrait aussi traiter par une méthode implicite — aux directions alternées, par exemple, — les termes des équations régissant l'évolution du mode externe. Pour les modèles atmosphériques, les deux approches évoquées ci-dessus ont été examinées et la première a été retenue (GADD, 1978; MADALA, 1981). Il n'est cependant pas certain que l'on puisse directement transposer aux modèles de mers peu profondes le raisonnement appliqué aux modèles météorologiques. Cette question mériterait une étude approfondie. D'autre part, il faut insister sur le point suivant: quelle que soit la méthode choisie, on peut supposer que la précision obtenue sera moindre que celle que l'on atteint en calculant les modes internes et externes avec le pas de temps court utilisé ici. Si l'on doit chercher à contourner la limitation drastique du pas de temps liée aux ondes de gravité de surface, c'est uniquement pour des raisons d'économie de temps de calcul.

Chapitre IV: Océanographie physique de la région du Détroit de Bering

1. Introduction

Les Figures I.1 et 1 illustrent la position du domaine d'intérêt de notre étude par rapport au Pacifique et à l'Arctique.



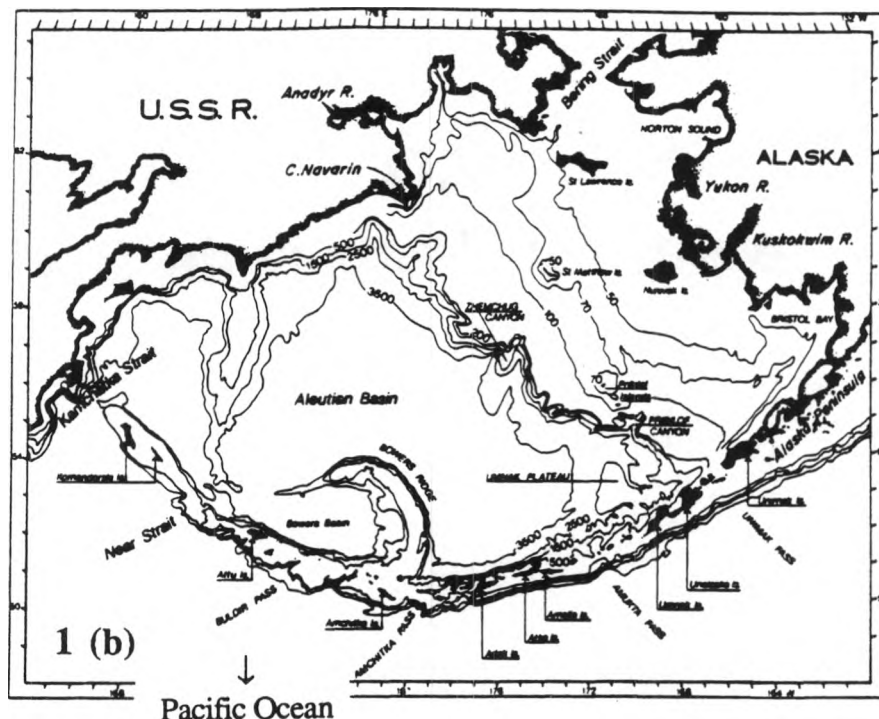


Figure 1. (a): Bathymétrie de l'Océan Arctique et des mers continentales adjacentes (extrait de WALSH *et al.*, 1989b).
(b): Topographie du fond de la mer de Bering (d'après KINDER *et al.*, 1986).

La région étudiée s'étend des Détroits d'Anadyr et de Shpanberg à la partie sud de la Mer de Chukchi, en passant par le Détroit de Bering (Figure I.1). La largeur du Détroit d'Anadyr, de Shpanberg et de Bering vaut, respectivement, 75, 190 et 85 kilomètres. La profondeur de la mer ne dépasse pas 60 m environ.

La frontière entre les eaux américaines et soviétiques — *convention line of 1867* — traverse les Détroits d'Anadyr et de Bering (Figure I.1). A cause de l'antagonisme entre les Etats Unis et l'U.R.S.S., les données et la littérature dont nous disposons couvrent quasi exclusivement la zone américaine. Cependant, la croisière américano-soviétique de l'*Akademik Korolev*, en août 1988, a permis de réaliser de précieuses mesures dans les eaux soviétiques.

Le programme ISHTAR s'intéresse aux caractéristiques de l'éco-système du domaine que nous venons de délimiter. Le temps caractéristique de croissance du phytoplancton est d'une journée au moins (SHELDON *et al.*, 1972; STEELE, 1978). D'autre part, les herbivores et les carnivores évoluent selon des échelles de temps supérieures à une dizaine de jours (SHELDON *et al.*, 1972). Par conséquent, on peut penser que ce sont surtout les phénomènes hydrodynamiques se déroulant à l'échelle synoptique ou climatique qui influencent les différents organismes de la chaîne alimentaire.

Dans ce chapitre, on décrit l'hydrodynamique de la région du Détroit de Bering en ne retenant que les processus se déroulant à des échelles de temps supérieures à quelques jours, les phénomènes à la méso-échelle — au moins les plus "rapides" d'entre eux — étant filtrés.

2. Circulation générale

L'étude éco-hydrodynamique du programme ISHTAR concerne principalement la période de l'année allant de la mi-juin à la mi-septembre. A cette époque, le domaine d'intérêt est presque dépourvu de glace (Figure 2). Aucun processus d'importance notable lié à la glace n'est donc observé.

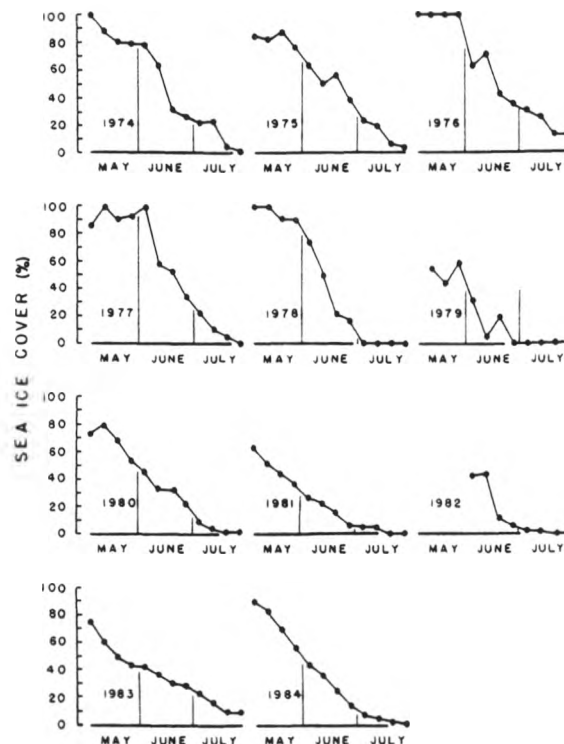


Figure 2. Couverture de glace des Mers de Bering et de Chukchi (WALSH *et al.*, 1989a).

Sur le plateau continental des Mers de Bering et de Chukchi, les composantes de marée semi-diurne M2 et diurne K1 dominant (MOFJELD, 1986). Les marées du Pacifique et de l'Arctique se propagent, respectivement, vers le nord et vers le sud sur le plateau continental mais leur amplitude diminue significativement à mesure qu'elles s'approchent du domaine d'intérêt. Par exemple, dans les Détroits d'Anadyr et de Bering, environ 10% de l'énergie cinétique de l'écoulement correspond aux marées, le reste étant contenu dans des processus plus "lents" (AAGAARD *et al.*, 1985; WALSH *et al.*, 1989b). Dans le Bassin de Chirikov, l'importance relative de l'énergie tidale n'est guère plus grande. Aux environs du Détroit de Shpanberg, cependant, l'énergie de marée peut représenter jusqu'à 30% de l'énergie cinétique totale (AAGAARD *et al.*, 1985; COACHMAN, 1986).

Ouvrons une parenthèse. Considérons un écoulement unidimensionnel qui est la superposition d'un courant résiduel constant, u_r , et d'un courant de marée d'amplitude u_m et de période $2\pi/\omega_m$:

$$u(t) = u_r + u_m \cos(\omega_m t). \quad (1)$$

Sur une période de marée, l'énergie cinétique moyenne vaut

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_m} \int_0^{2\pi/\omega_m} [u_r + u_m \cos(\omega_m t)]^2 dt = \frac{1}{2} (u_r^2 + \frac{1}{2} u_m^2). \quad (2)$$

Si u_r et u_m sont du même ordre de grandeur, alors l'énergie tidale ne représente qu'un tiers de l'énergie cinétique totale. Donc, au vu des chiffres cités plus haut, on peut estimer que, dans le domaine étudié, les courants de marée sont au plus du même ordre de grandeur que les courants variant sur des périodes plus longues, ce que confirment les mesures courantométriques (COACHMAN *et al.*, 1975). Néanmoins, en termes énergétiques, et notamment pour la production d'énergie cinétique turbulente, négliger les marées n'est pas une erreur majeure, au contraire de ce qu'affirment certains (LEENDERTSE, 1988).

Différents auteurs ont tenté d'évaluer dans les détroits du domaine d'intérêt le flux d'eau à une échelle de temps supérieure à celle des marées (COACHMAN *et al.*, 1975; AAGAARD *et al.*, 1985; COACHMAN et AAGAARD, 1988).

Le transport journalier dans le Détroit de Bering est presque toujours dirigé vers le nord — du Pacifique vers l'Arctique. Les périodes pendant lesquelles le débit s'inverse ne dépassent pas quelques jours (COACHMAN et AAGAARD, 1988). D'après COACHMAN *et al.* (1975), le débit journalier vers le nord peut atteindre 4 Sv ($= 4 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) tandis que le débit mensuel est compris entre 1 et 2 Sv, la moyenne se situant sans doute entre 1.5 et 2 Sv. Ces auteurs n'ont pas mis en évidence l'existence d'un cycle annuel du flux d'eau dans le Détroit de Bering: ils concluent donc que le débit mensuel fournit une bonne estimation du débit annuel. AAGAARD *et al.* (1985), utilisant d'autres méthodes que leurs prédécesseurs, pensent que le transport varie en cours d'année: le débit estival serait de 50% supérieur à celui enregistré pendant l'hiver. De plus, ils affirment que le débit annuel moyen est de l'ordre de 0.6 Sv, c'est-à-dire 2 à 3 fois moins que les évaluations précédentes. Finalement, COACHMAN et AAGAARD (1988) confirment l'existence d'un cycle annuel (Figure 3) semblable à celui de AAGAARD *et al.* (1985) mais estiment que le débit annuel vaut à peu près 0.8 Sv, de sorte que le débit estival pourrait atteindre 1.2 Sv environ. Dans cette optique, WALSH *et al.* (1989b) évaluent le transport moyen pendant la période juillet-septembre à 1.28 Sv, 1.08 Sv et 1.18 Sv pour les années 1985, 1986 et 1987, respectivement.

Depuis COACHMAN et AAGAARD (1966), l'hypothèse suivante semble recueillir l'approbation générale: le flux d'eau dans le Détroit de Bering résulte d'une différence de niveau de la surface entre le Pacifique nord et l'Arctique, le niveau du premier étant supérieur d'à peu près 0.50 m à celui du second; la variabilité du débit est due au vent. STIGEBRANDT (1984) attribue la différence de niveau à l'inégalité de la salinité des deux océans. COACHMAN *et al.* (1975), AAGAARD *et al.* (1985) et COACHMAN et AAGAARD (1988) expriment mathématiquement l'hypothèse précédente par une formule simple, à savoir

$$D_b = D_{b,0} + \alpha_{v,n} V_n, \quad (3)$$

où D_b et V_n symbolisent, respectivement, le débit — positif vers le nord — dans le Détroit de Bering et la composante sud-nord du vent ou de la tension de vent — selon les études — mesuré ou calculé par un modèle atmosphérique à un endroit approprié.

Les coefficients $D_{b,0}$ et $\alpha_{v,n}$, déterminés par régression linéaire sur base de différents ensembles de données, diffèrent de plusieurs centaines de pourcents. Faut-il en conclure que le scénario évoqué plus haut est sans fondement? Pas du tout. Selon STIGEBRANDT (1984), la différence de niveau entre le Pacifique et l'Arctique a été évaluée, de façon concordante, par des méthodes totalement indépendantes. D'autre part, le vent est une source de variabilité bien connue des écoulements des mers continentales (NIHOUL, 1982; CSANADY, 1984). Ni le courant résiduel de marée, ni le vent thermique ne peuvent rendre compte de l'intensité du flux d'eau dans le Détroit de Bering (LIU et LEENDERTSE, 1987). Aucun autre forcing de l'écoulement ne paraissant exister, on en déduit que la pente de la surface ainsi que le vent génèrent la majeure partie de l'écoulement dans le domaine étudié. Mais, on conclut aussi que la formule (3) n'est pas valable.

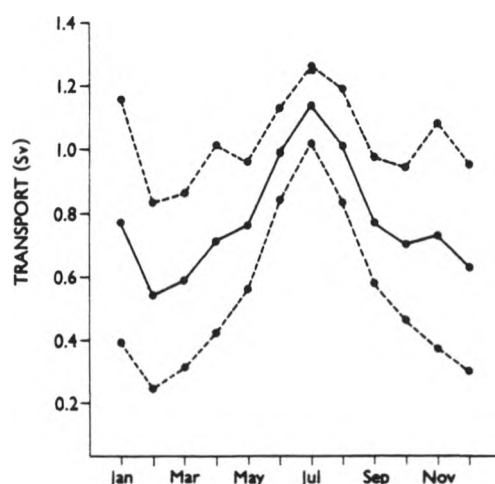


Figure 3. Débit mensuel dans le Détroit de Bering (trait plein) basé sur des données couvrant la période 1946 – 1982. Les courbes pointillées symbolisent la déviation d'un écart-type par rapport à la moyenne (COACHMAN et AAGAARD, 1988).

STIGEBRANDT (1984) a paramétrisé le transport dans le Détroit de Bering en fonction de la différence de niveau entre le Pacifique et l'Arctique. Selon cette théorie, la force de pression due à la pente de la surface est équilibrée par la tension de fond. Toutefois, la rotation de la Terre n'est pas prise en compte.

OVERLAND et ROACH (1987) déclarent que le débit dans le Détroit de Bering est soumis au "contrôle géostrophique". Cette affirmation nous paraît cependant suspecte (voir Annexe 2).

L'apport d'eau en provenance de l'Alaska, en particulier du fleuve Yukon, ne dépasse pas la valeur de pointe de 0.1 Sv (COACHMAN *et al.*, 1975). Les fleuves de Sibérie apportent beaucoup

moins d'eau encore (COACHMAN *et al.*, 1975). On peut donc estimer qu'en moyenne la somme des débits dans les Détroits d'Anadyr et de Shpanberg équivaut au transport dans le Détroit de Bering. Le Détroit d'Anadyr est traversé par un flux équivalant à peu près au double de celui qui passe dans le Détroit de Shpanberg (COACHMAN *et al.*, 1975; SPAULDING *et al.*, 1987; WALSH *et al.*, 1989b).

KINDER *et al.* (1975) ont observé le *Bering slope current* qui longe le talus séparant le plateau continental du Bassin Aléoutien. Au large du Cap Navarin, ce courant se sépare en deux branches, dont l'une pénètre dans le Golfe d'Anadyr puis dans le Détroit d'Anadyr. L'existence du *Bering slope current* et du Courant d'Anadyr (Figure I.2) semble bien établie. Ils transportent la majorité de l'eau qui traverse finalement le Détroit de Bering. En d'autres termes, on observe des courants beaucoup plus intenses le long des limites sud et ouest du plateau continental de Bering. KINDER *et al.* (1986) expliquent ce phénomène par l'effet β bathymétrique (PEDLOSKY, 1982) lié à la pente générale du fond qui s'élève du sud-ouest vers le nord-ouest (Figure 1b). La théorie de KINDER *et al.* (1986) est étayée par des expériences de laboratoire et par un modèle numérique simple dont les résultats paraissent très convaincants. En tout cas, l'intensification du courant dans le Golfe d'Anadyr ne peut être attribuée à l'effet β lié à la courbure de la Terre. En effet, le coefficient β ,

$$\beta = |\nabla_h f| \approx 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad (4)$$

est nettement inférieur à son équivalent bathymétrique (KINDER *et al.*, 1986),

$$\beta_{\text{bathy}} = \left| \frac{f}{h} \nabla_h h \right| \approx 5 \times 10^{-10} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (5)$$

Donc, considérer f comme constant dans le domaine d'intérêt est tout à fait justifié.

A l'exception du *Bering slope current* et du Courant d'Anadyr, les caractéristiques de la circulation générale entre le talus continental et l'Île St. Laurent sont encore l'objet de discussions. Les marées dominant très largement la circulation générale dans une partie importante de cette région (COACHMAN, 1986), ce qui complique fortement la détermination des flux d'eau à long terme. WALSH *et al.* (1989b) suggèrent la présence d'un gyre au sud-est du Golfe d'Anadyr (Figure I.2). TAKENOUTI et OHTANI (1974) pensent que le Courant d'Anadyr se sépare en deux branches à l'Ouest de l'Île St. Laurent, la branche la plus intense pénétrant dans le Détroit d'Anadyr tandis que l'autre longe la face sud de l'île avant d'entrer dans le Détroit de Shpanberg (Figure I.2). Cette hypothèse a souvent été considérée comme très valable (WHITLEDGE *et al.*, 1988; HANSELL *et al.*, 1989; WALSH *et al.*, 1989a; BRASSEUR, 1991). Cependant, FAVORITE *et al.* (1976) suggèrent que le transport est dirigé dans la direction opposée le long de la face sud de l'Île St. Laurent. De surcroît, COACHMAN et SHIGAIEV (1991) s'abstiennent habilement de prendre position sur cette question mais leur schéma de circulation — voir la Figure 2 de leur texte — semble contredire l'opinion généralement admise. En l'absence de mesures courantométriques adéquates, il est bien difficile de trancher définitivement cette question.

Dans le domaine d'intérêt proprement dit, les observations (COACHMAN *et al.*, 1975; TRIPP, 1985, 1986; WALSH *et al.*, 1989b) et les modèles (WALEFFE, 1985; NIHOUL *et al.*, 1986; OVERLAND et ROACH, 1987; SPAULDING *et al.*, 1987; BRASSEUR, 1991) concordent: la circulation générale est

approximativement géostrophique — le nombre de Rossby est petit — et suit les isobathes (PEDLOSKY, 1982). En effet, pour un courant géostrophique stationnaire $\mathbf{u}_g$ ne comprenant aucune composante “thermique”, l'équation de conservation de la masse,

$$\nabla_h \cdot (h \mathbf{u}_g) = 0, \quad (6)$$

et l'équation de quantité de mouvement,

$$f \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_g = -g \nabla_h \eta, \quad (7)$$

conduisent à

$$\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h h = 0. \quad (8)$$

Dans le sud de la Mer de Chukchi, un gyre existerait le long de la côte sibérienne (WALSH *et al.*, 1989a,b) mais, comme il s'étendrait principalement en aval de notre domaine d'étude, on ne s'y intéressera pas outre mesure.

Pour finir, notons que des tourbillons synoptiques ont été observés dans le Bassin Aléoutien (KINDER *et al.*, 1980) et dans le Bassin Canadien (AAGAARD, 1988). Leur diamètre est de l'ordre d'au moins 100 kilomètres. Des mécanismes essentiellement baroclines conduisent à la formation de ces tourbillons. Bien entendu, aucun de ces tourbillons n'a été observé sur le plateau continental: la faible profondeur n'autorise le développement de phénomènes fondamentalement baroclines qu'à une échelle de l'ordre de quelques kilomètres (NIHOUL, 1986). De toutes façons, la bathymétrie — voir (8) — exerce une contrainte telle sur l'écoulement que la formation de tourbillons synoptiques est probablement impossible.

3. Modèles hydrodynamiques

Les formules empiriques, quel que soit le soin apporté à leur établissement, peuvent rarement rivaliser de réalisme avec un modèle hydrodynamique. C'est pourquoi, au cours des dernières années, des modèles de différents aspects de l'écoulement dans la région du Détroit de Bering ont été proposés.

BRASSEUR (1989, 1991) a résolu par la méthode des éléments finis les équations de quantité de mouvement et de continuité moyennées sur la profondeur. Dans cette étude, les termes d'advection sont omis, le vent est supposé nul et la solution est stationnaire. La Figure 4 montre la vitesse moyenne sur la verticale correspondant à la circulation générale. On notera que l'écoulement au sud de l'Ile St. Laurent est conforme au schéma de circulation de la Figure I.2. Toutefois, dans la partie est du Détroit de Shpanberg, le flux d'eau sort du Bassin de Chirikov, au lieu d'y entrer comme l'indiquent les observations (TRIPP, 1985, 1986; BRASSEUR, 1991; NIHOUL *et al.*, 1991). Pour le reste, le champ de vitesse de BRASSEUR (1991) semble en bon accord avec celui calculé par d'autres

modèles, déduit de mesures courantométriques ou inféré de la distribution des traceurs. En particulier, dans la Mer de Chukchi, une partie de l'écoulement sortant du Déroit de Bering se "rabat" vers la côte de l'Alaska en suivant les isobathes.

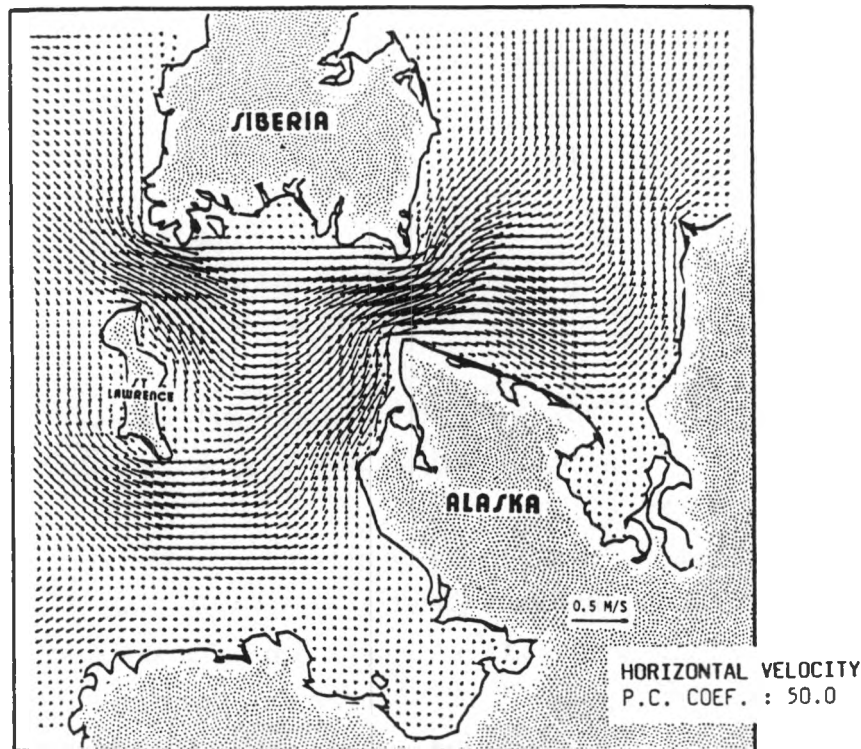


Figure 4. Vitesse moyenne — sur la verticale — de la circulation générale en l'absence de vent calculée par BRASSEUR (1991).

Au passage, notons que BRASSEUR (1991) attribue à la technique de résolution par éléments finis des qualités qui nous semblent, *a priori*, imaginaires. Le transport $H \bar{u}$ est calculé à partir du rotationnel de la fonction de courant ψ , qui est l'inconnue du problème:

$$H \bar{u} = -\nabla_h \times \psi e_3. \quad (9)$$

En fixant ψ le long des côtes, on impose le débit dans les détroits. Sur les frontières en mer ouverte, BRASSEUR (1991) n'est pas obligé d'imposer une condition essentielle sur ψ . Il affirme qu'il s'agit d'un avantage important par rapport aux modèles utilisant les différences finies, dans lesquels une condition impliquant la vitesse normale est, le plus souvent, requise sur toute frontière du domaine. Imposer la vitesse normale en l'absence de mesures courantométriques relève effectivement du plus haut empirisme. Néanmoins, l'absence de conditions sur ψ aux frontières en mer ouverte ne signifie pas que les conditions naturelles sur les dérivées de ψ — résultant de l'application du principe variationnel sous-tendant la méthode de résolution par éléments finis (DELEERSNIJDER, 1991b) —

produisent une solution de meilleure qualité. BRASSEUR (1989, 1991) n'a pas examiné cette question, mais on trouvera quelques pistes de réflexion dans DELEERSNUDER (1991b).

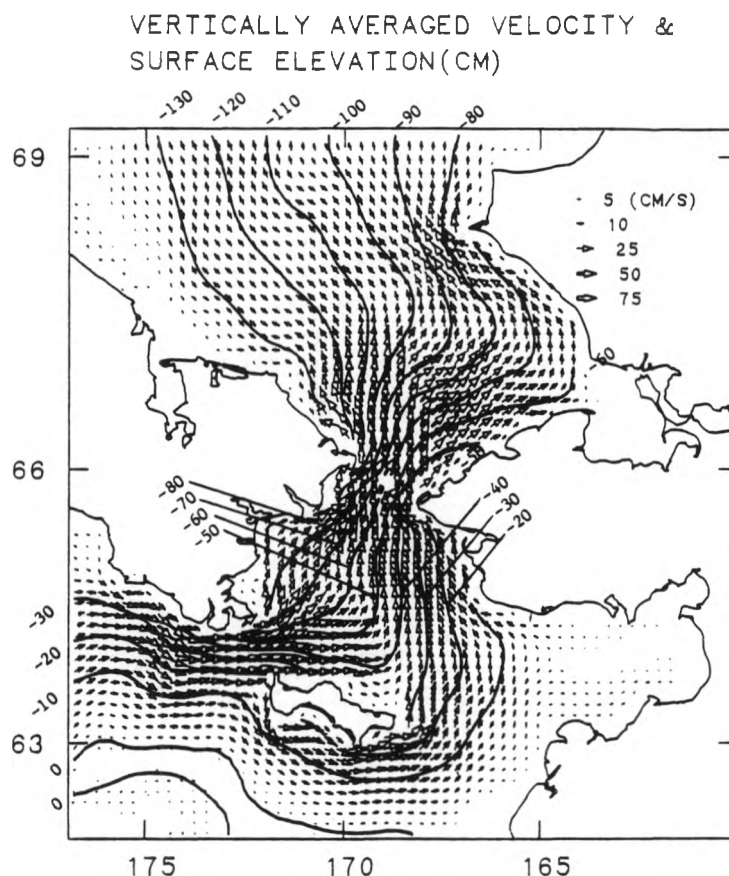


Figure 5. Circulation générale stationnaire due à la pente de la surface calculée par le modèle 2D de SPAULDING *et al.* (1987).

SPAULDING *et al.* (1987) ont appliqué un modèle 2D classique, en différences finies, à l'étude de la circulation générale sur le plateau continental des Mers de Bering et Chukchi. Deux résolutions différentes ont été testées — une maille d'environ 28 km de côté et une autre de 14 km — mais aucune différence d'importance n'a été mise en évidence. SPAULDING *et al.* (1987) ont d'abord tenté de reproduire la circulation générale uniquement induite par la différence de niveau entre le Pacifique et l'Arctique. Ensuite, la circulation due exclusivement au vent — en l'absence de différence de niveau — a été modélisée. Dans les deux cas, les deux tiers du débit dans le détroit de Bering proviennent de l'eau passant dans le Détroit d'Anadyr. Selon ce modèle, la circulation générale en l'absence de vent (Figure 5) est à peu près géostrophique, suit les isobathes mais diffère de celle de BRASSEUR (1991) dans la partie est du Détroit de Shpanberg. SPAULDING *et al.* (1987) ont modélisé l'écoulement généré par divers champs de vent. Si le vent souffle du sud vers le nord, le flux d'eau traversant le Détroit de Bering est inférieur à celui induit par un champ de vent de même intensité

dirigé vers l'ouest. De plus, la variabilité spatiale et temporelle du champ de vent influence de façon déterminante le débit dans le Déroit de Bering. Ceci confirme le peu de valeur de formules simplifiées du type (3).

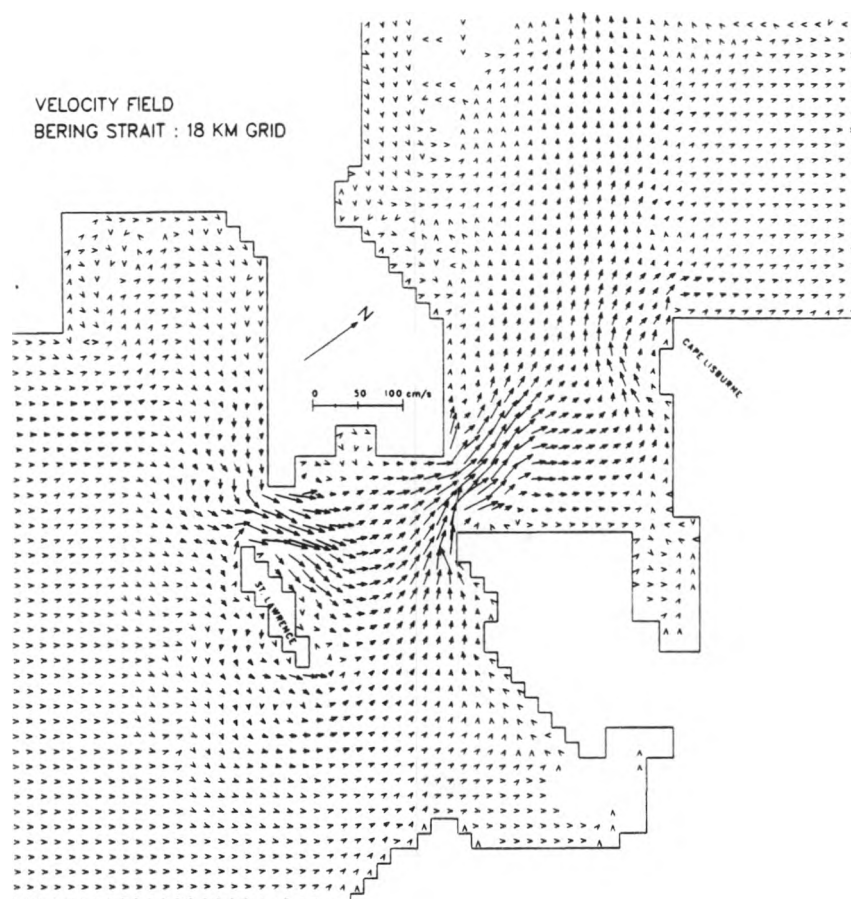


Figure 6. Circulation générale stationnaire due à la pente de la surface calculée par le modèle 2D de OVERLAND et ROACH (1987).

OVERLAND et ROACH (1987) ont appliqué un modèle similaire à celui de SPAULDING *et al.* (1987) au problème de la circulation générale dans la région du Déroit de Bering. Cependant, la paramétrisation habituelle de la tension de fond a été modifiée pour tenir compte, de façon simple, de la contribution des marées à la tension de fond résiduelle. La taille de la maille est de l'ordre de 18 km * 18 km. La Figure 6 montre la circulation générale obtenue. D'autre part, OVERLAND et ROACH (1987) ont modélisé l'écoulement induit à la fois par la pente de la surface et par le vent (Figure 7), ce que n'avaient pas essayé SPAULDING *et al.* (1987). Les conditions aux limites en mer ouverte, en particulier dans la Mer de Chukchi, ne paraissent pas être de bonne qualité (Figures 6 et 7).

Aucun modèle développé jusqu'ici ne semble donc à même de bien représenter la circulation générale due à l'action combinée de la pente de la surface et du vent.

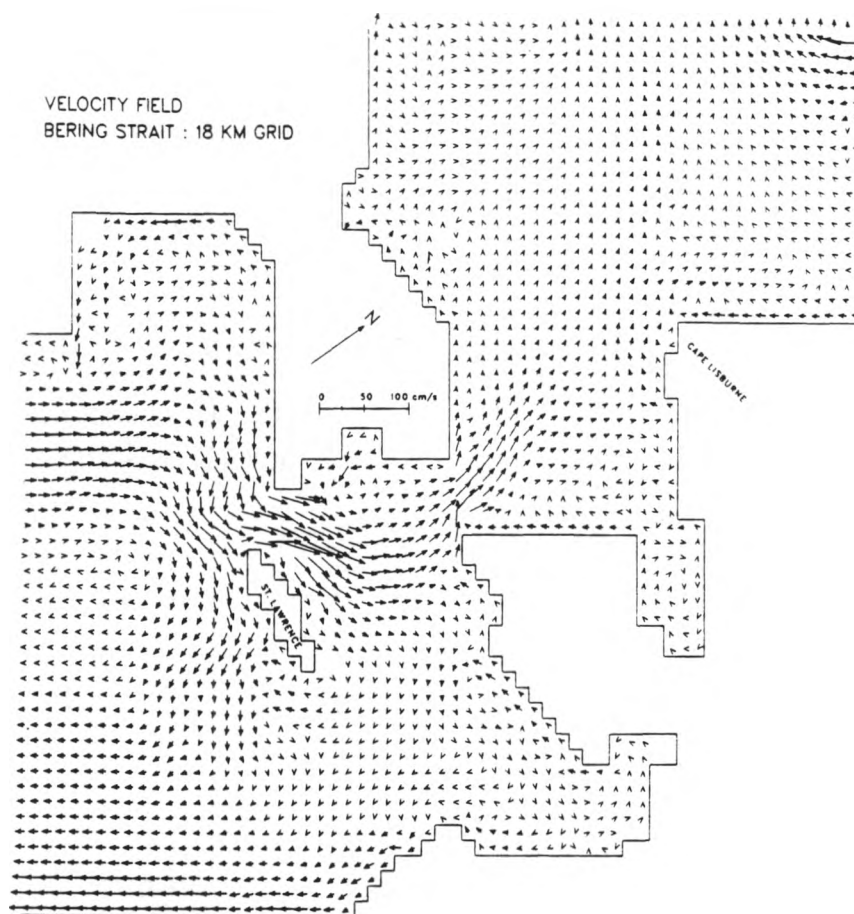


Figure 7. Circulation générale induite par le vent et la pente de la surface obtenue par OVERLAND et ROACH (1987).

Notons encore que WALSH et DIETERLE (1986) ont utilisé un modèle bidimensionnel, sans termes d'advection de quantité de mouvement, dont le domaine de calcul se limitait à la zone d'intérêt d'ISHTAR, telle qu'elle est illustrée dans la Figure I.1. Le champ de vitesse moyenne obtenu présente une grande variabilité spatiale si bien que la circulation générale calculée ressemble assez peu à celles d'autres modèles.

LIU et LEENDERTSE (1987) ont appliqué une série de modèles numériques tridimensionnels à diverses parties du plateau continental des Mers de Bering et de Chukchi. Leur modèle mathématique est très semblable à celui présenté ici. L'approche de LIU et LEENDERTSE (1987) nous paraît très saine. Leur but est la détermination de la circulation générale. Mais, comme les marées sont très importantes sur tout le plateau continental — sauf dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR —, ces auteurs insistent sur le fait qu'il faut d'abord calculer la circulation à la méso-échelle avant d'extraire, par filtrage, le courant à long terme. De plus, pour représenter l'effet du vent, LIU et LEENDERTSE (1987) indiquent qu'il est impératif d'utiliser un modèle couvrant tout le plateau continental, ce que ne font ni SPAULDING *et al.* (1987), ni OVERLAND et ROACH (1987). En effet, la taille d'une dépression atmosphérique est telle que le forçage du vent se fait sentir à la fois dans la Mer de Bering, la Mer de

Chukchi et le Bassin de Chirikov. Tous ces sous-domaines interagissent: on ne peut donc les envisager séparément. De plus, au talus continental, il est généralement plus facile qu'en un endroit quelconque du plateau continental de mettre au point des conditions aux limites de qualité. Malheureusement, le modèle concernant tout le plateau utilise une maille de 40 km * 40 km environ. En conséquence, mettre en évidence l'effet de phénomènes purement tridimensionnels s'avère bien difficile.

WALEFFE (1985) et NIHOUL *et al.* (1986) ont représenté la circulation générale tridimensionnelle dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR (Figure 8). Les équations de ce modèle sont à peu près identiques à celles de notre modèle. La maille a 10 km de côté selon l'horizontale et 10 mailles sont disposées selon chaque verticale dans le système de coordonnée σ . La circulation générale est fort semblable à celle des autres modèles — qui sont postérieurs. Il s'agissait cependant d'une étude préliminaire de sorte que les aspects typiquement tridimensionnels du modèle et des résultats n'ont pas été pleinement exploités.

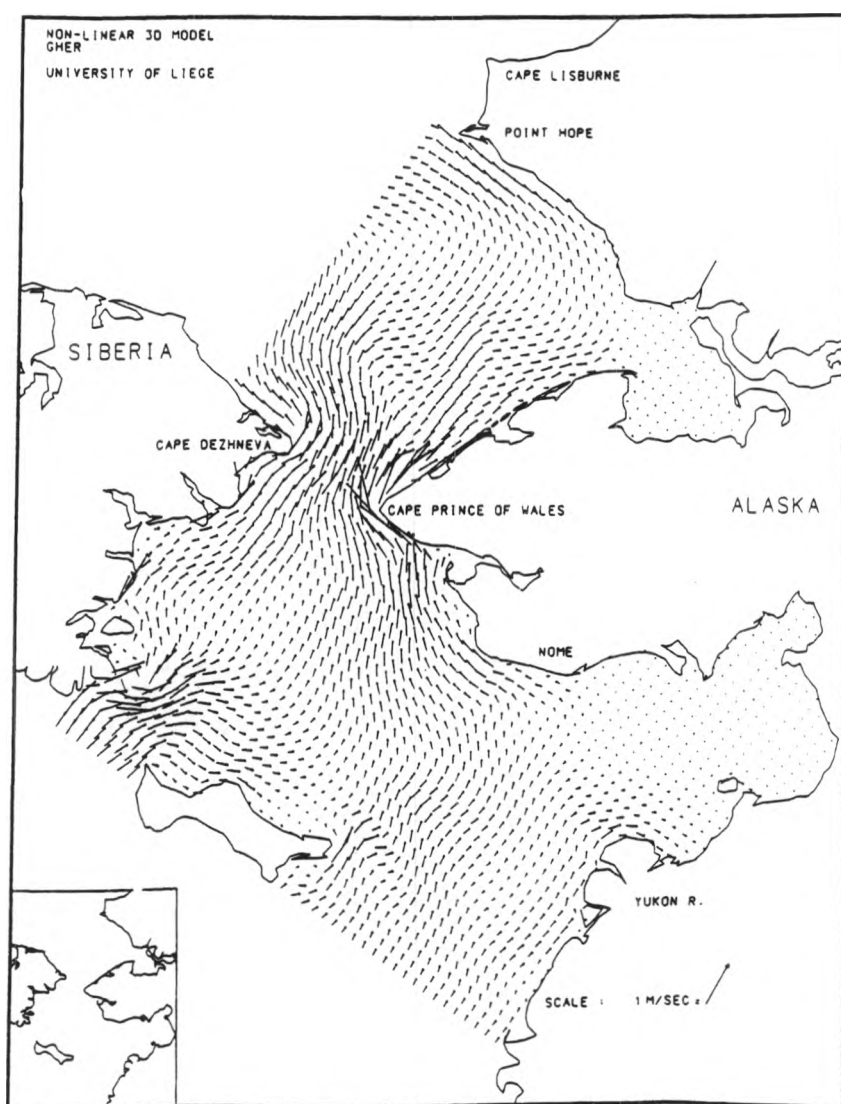
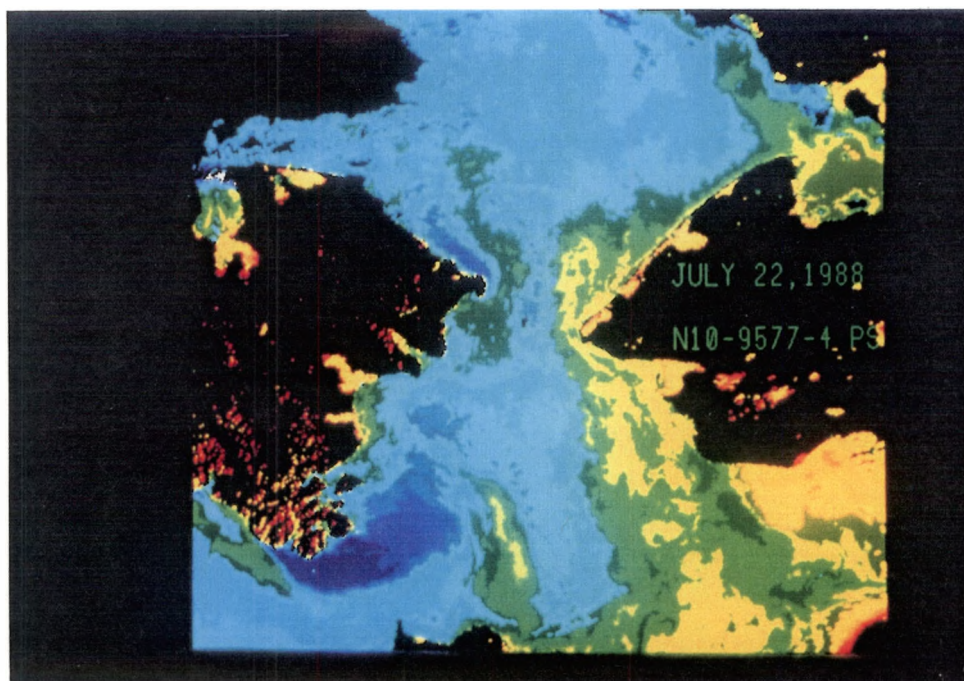


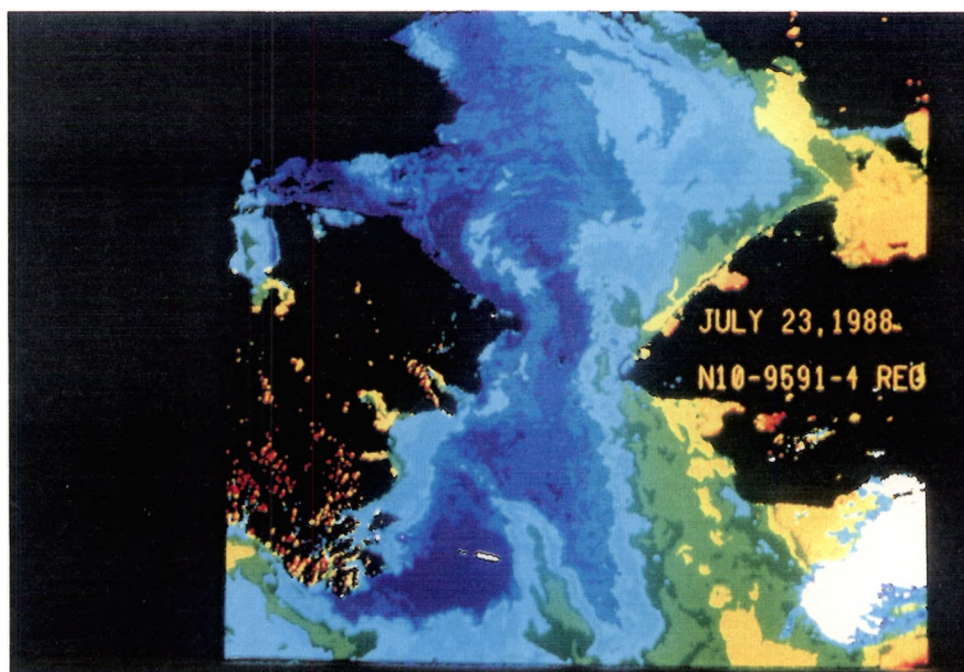
Figure 8. Vitesse dans la maille de surface de la circulation générale simulée par WALEFFE (1985) et NIHOUL *et al.* (1986).



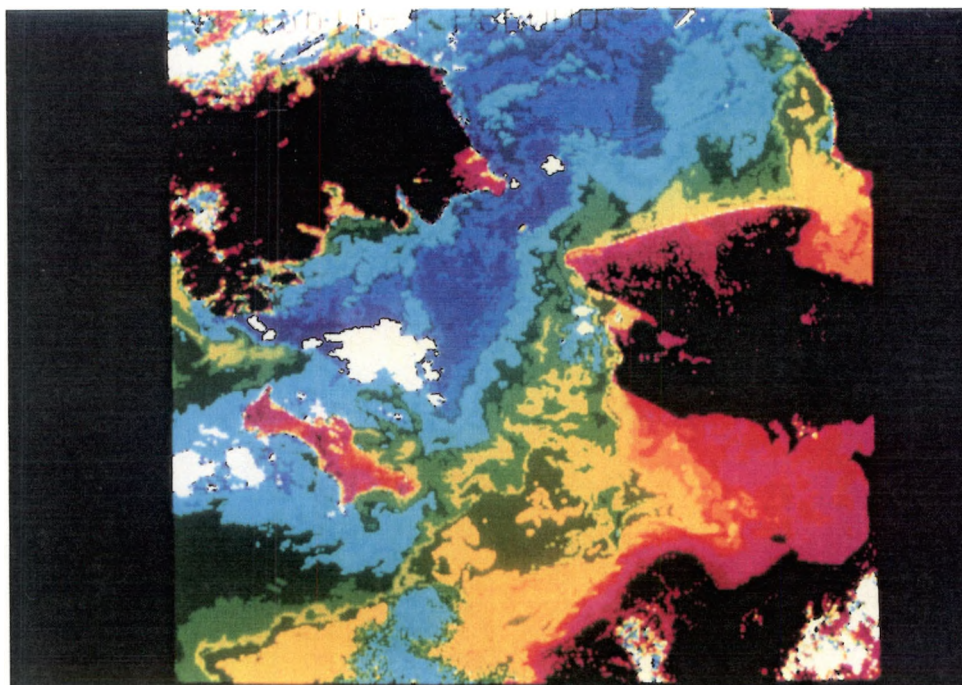
Bibliothèque des
Sciences de la Terre



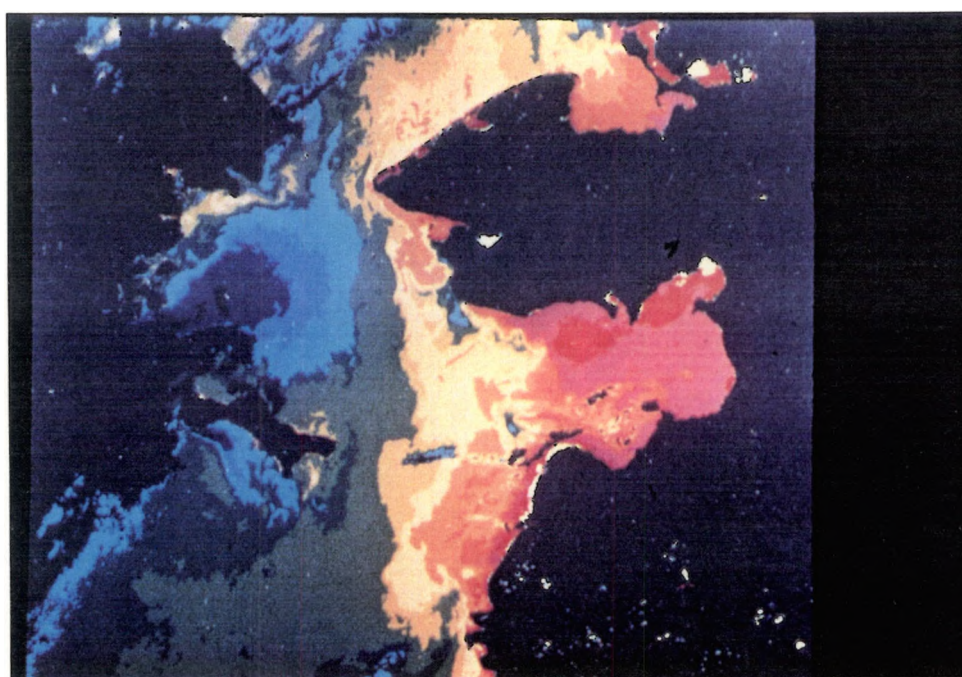
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 9. Température de surface de la mer dans la région du Déroit de Bering reconstituée à partir de données satellitaires acquises dans l'infrarouge. L'eau la plus froide (moins de 3 °C) est colorée en bleu foncé. Le vert, le jaune et le rouge correspondent à des températures croissantes (jusqu'à 15 °C). Dates des prises de vue: (a , b , c , d) = (22-07-1988 , 23-07-1988 , 24-07-1988 , 03-08-1985).

4. Masses d'eau

Dans le Détroit de Bering, COACHMAN *et al.* (1975) ont identifié trois masses d'eau qu'ils ont proposé de nommer "eau d'Anadyr", "eau du plateau continental de Bering" et "eau côtière d'Alaska". L'advection dominant nettement la diffusion horizontale dans le domaine d'étude, les masses d'eau que l'on distingue dans le Détroit de Bering doivent toujours être identifiables en amont et en aval du détroit. Ainsi, l'eau d'Anadyr provient du Courant d'Anadyr; elle est la plus salée — $S \geq 32.7 \times 10^{-3}$. L'eau côtière de l'Alaska longe la côte de l'Alaska à partir du sud-est du plateau continental de Bering. Cette eau se mélange à l'eau douce provenant des fleuves de l'Alaska et est, par conséquent, la moins salée — $S \geq 32.2 \times 10^{-3}$. Entre l'eau d'Anadyr et l'eau côtière de l'Alaska se trouve une masse d'eau de salinité intermédiaire, l'eau du plateau continental de Bering.

De façon très schématique, on peut estimer que les variations de la salinité sont essentiellement horizontales (COACHMAN *et al.*, 1975); ces variations permettent d'identifier les masses d'eau. Par contre, les variations de température sont principalement verticales (COACHMAN *et al.*, 1975). Notons toutefois que l'eau côtière de l'Alaska a tendance à être plus chaude. Sur la plupart des verticales, les mesures montrent l'existence d'au moins une pycnocline, qui est donc essentiellement une thermocline (COACHMAN *et al.*, 1975) — plutôt qu'une halocline.

Insistons sur un point. L'apport d'eau douce de l'Alaska représente, au plus, 10% du débit traversant le Détroit de Bering. Néanmoins, ce flux d'eau, si petit soit-il, a une influence importante sur la salinité de l'eau côtière de l'Alaska. Raisonnons simplement. Considérons deux courants de débit D_1 et D_2 , et de salinité S_1 et S_2 . Mélangeons ces deux masses d'eau. Le débit total vaut

$$D_3 = D_1 + D_2, \quad (10)$$

tandis que la salinité résultante est

$$S_3 = \frac{D_1 S_1 + D_2 S_2}{D_3}. \quad (11)$$

Si $S_2 = 0$, alors

$$S_1 - S_3 = \frac{D_2}{D_3} S_1. \quad (12)$$

Posons $S_1 = 32.5 \times 10^{-3}$ et $D_2 / D_3 = 0.05$. Dans ce cas,

$$S_1 - S_3 \approx 1.6 \times 10^{-3}. \quad (13)$$

Ainsi, on se persuade facilement que l'eau douce provenant de l'Alaska peut diminuer la salinité de l'eau côtière de l'ordre de quelques millièmes, ce qui est considérable.

Les photos prise dans l'infra-rouge par les satellites donnent une vue synoptique — c'est-à-dire une vue d'ensemble — de la température de surface de la mer — à l'instant de la prise de vue. Les

Figures 9 (a), (b) et (c) montrent que la température de surface de la mer peut varier de plusieurs degrés sur 24 heures seulement. Ce n'est pas étonnant: un coup de vent peut approfondir la thermocline de plus de 10 mètres par jour et donc entraîner de l'eau froide dans la couche de surface, modifiant considérablement la température de surface. Cependant, en consultant également les Figures 9 (d) et I.5, on remarque que deux caractéristiques semblent permanentes: en aval du Cap Chukotski et, dans une moindre mesure, en aval du Cap Dezhneva, un panache d'eau froide paraît se maintenir.

Dans le cadre d'ISHTAR, différents navires océanographiques ont effectué des croisières dans le domaine d'intérêt durant les mois d'été des années 1985 à 1988. Chaque expédition a duré 2 à 4 semaines et a effectué quelques dizaines, voire une centaine, de stations de mesure. Des profils verticaux de température, de salinité, de substances nutritives et autres variables biologiques ont été enregistrés. Au total, il y eut 1522 stations de mesure (Figure 10). La variabilité illustrée par la Figure 9 montre que les mesures d'une même croisière ne peuvent fournir une vue synoptique de l'état de la mer, une croisière durant beaucoup trop longtemps. On ne peut donc interpoler spatialement les données d'une croisière et prétendre que le résultat de cette interpolation représente l'état de la mer à un instant donné ou correspond à une moyenne sur la durée de la croisière. Cependant, faute de mieux, tout le monde le fait quand même! Mais, des précautions sont prises...

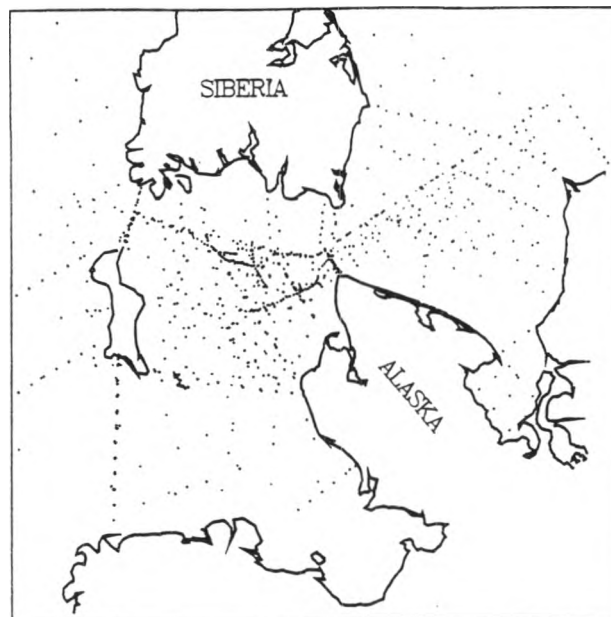


Figure 10. Localisation des 1522 stations de mesure de profils verticaux de quantités scalaires effectuées par les navires océanographiques travaillant dans le cadre d'ISHTAR. Les stations situées dans les eaux sibériennes correspondent à la croisière américano-russe de l'*Akademik Korolev*, en août 1988 (d'après BRASSEUR, 1991).

La plupart des participants d'ISHTAR ont construit des cartes synoptiques de telle ou telle variable scalaire, les valeurs de la variable choisie étant indiquées par des iso-lignes — comme, par exemple, dans les Figures I.3 et I.4. La construction de ces iso-lignes ne découle pas d'une interpolation des

données au sens strict du terme. En effet, les iso-courbes sont tracées manuellement à partir des mesures des croisières et l'intuition, la connaissance de la région ainsi que de rares séries temporelles fournies par des instruments mouillés permettent de corriger les erreurs d'un procédé en théorie peu justifiable. D'un autre côté, BRASSEUR (1989, 1991), HAUS (1990, 1991) et BRASSEUR et HAUS (1991) ont développé une méthode d'interpolation automatique des données, appelée "modèle variationnel inverse". Cette technique permet de construire une fonction d'interpolation définie en tout point du domaine qui répond aux exigences suivantes: elle doit être la plus lisse possible, doit respecter au mieux les valeurs mesurées et doit satisfaire, si nécessaire, des contraintes physiques. On tient compte de ces impératifs au moyen d'une fonctionnelle dont le minimum est déterminé par la méthode des éléments finis. Le modèle variationnel inverse n'impose pas nécessairement que la fonction d'interpolation soit égale aux données aux points de mesure. Par conséquent, la fonction d'interpolation devant être la plus lisse possible, on peut espérer qu'une partie de la variabilité à la méso-échelle est lissée et que le modèle variationnel inverse fournit, dans une certaine mesure, une situation moyenne. On ne peut cependant éviter un inconvénient majeur: le lissage fait disparaître, ou à tout le moins "étale", des caractéristiques très marquées comme des fronts ou des pycnoclines qui sont pourtant très présents dans l'écoulement (Figure 11).

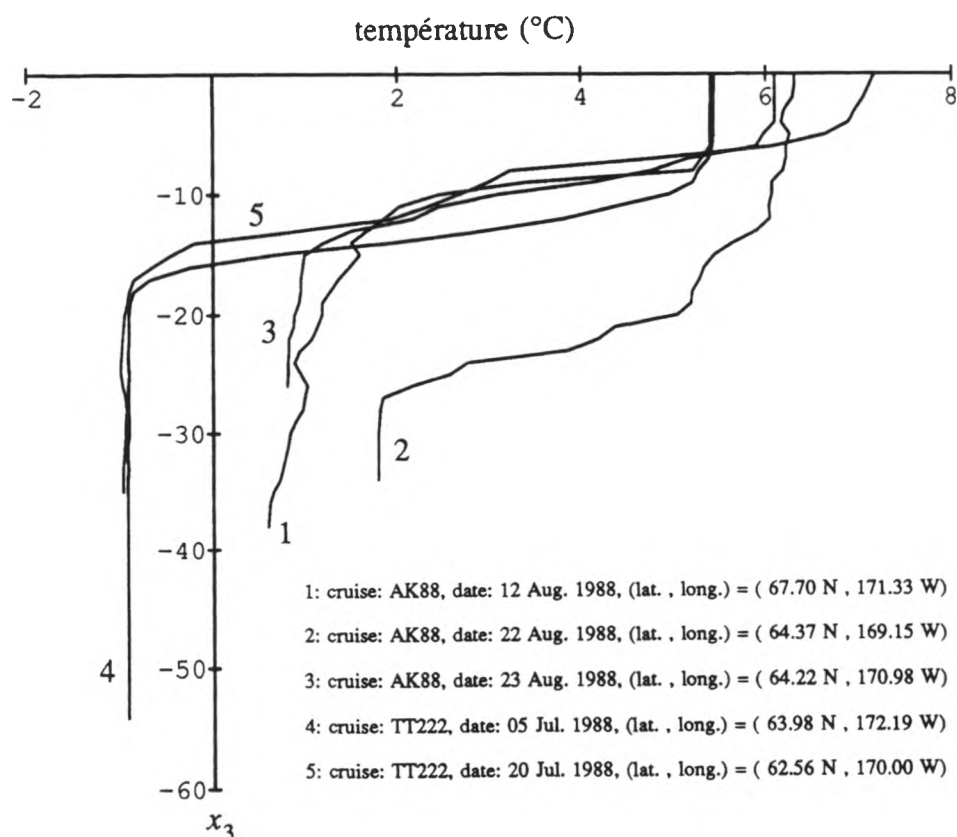


Figure 11. Quelques profils verticaux de température.

Les résultats du modèle variationnel inverse reproduits ici ont été aimablement cédés à l'auteur par J. Haus, qui les a obtenus à l'aide du logiciel issu des travaux de BRASSEUR (1989, 1991), HAUS (1990, 1991) et BRASSEUR et HAUS (1991).

A partir de toutes les données disponibles, le modèle variationnel inverse a permis de construire un état de référence du domaine étudié. La Figure 12 illustre la température de surface de cet état de référence. La présence d'eau froide en surface à proximité de la côte sibérienne est très nettement confirmée.

Il existe donc un faisceau convergent de faits indiquant que le panache d'eau froide naissant dans le Détroit d'Anadyr et l'injection de substances nutritives dans la couche de surface sont bien des caractéristiques de la circulation générale estivale.

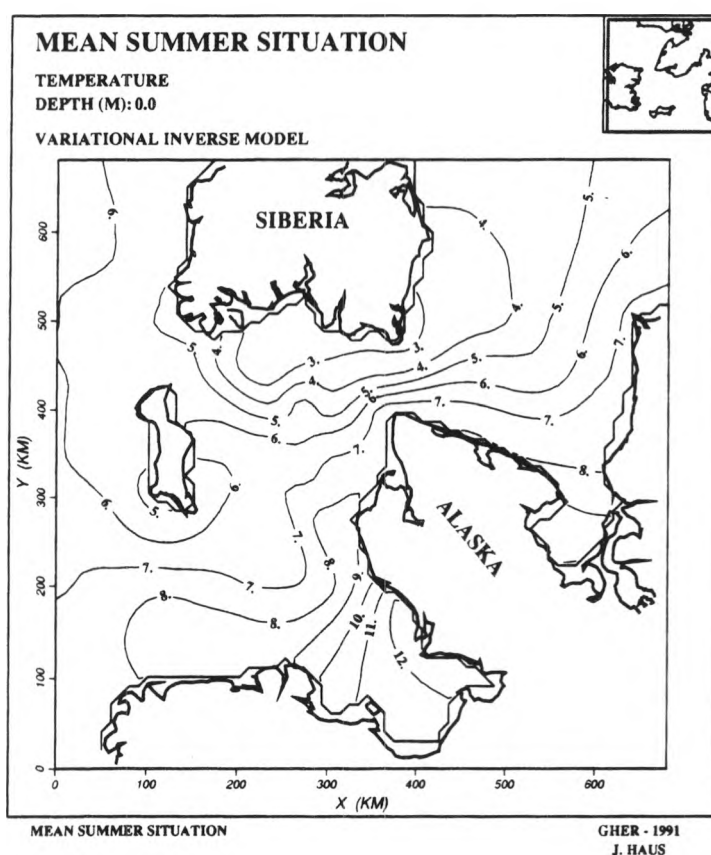


Figure 12. Température de surface de la situation de référence construite par le modèle variationnel inverse.

5. Upwelling et production primaire

Des taux de production primaire très élevés, avec des valeurs de pointe pouvant atteindre 10^{-2} à 10^{-1} $\text{kg jour}^{-1} \text{m}^{-2}$, ont été mesurés dans l'eau d'Anadyr, en aval du Détroit d'Anadyr (SAMBROTTO *et al.*, 1984; WHITLEDGE *et al.*, 1988; WALSH *et al.*, 1989b). De plus, la production primaire se maintient durant les mois pendant lesquels la glace est absente et la quantité de lumière suffisante, c'est-à-dire de juin à septembre. En dépit de la brièveté de la période favorable à la croissance du

phytoplancton, la production primaire annuelle est du même ordre de grandeur que celle mesurée dans des eaux côtières eutrophisées situées à des latitudes plus basses (SAMBROTTO *et al.*, 1984). En amont du Détroit d'Anadyr, la couche euphotique est pauvre en substances nutritives, au contraire de l'eau située près du fond (Figures I.3 et 13). Pour alimenter la grande production primaire de la région, il faut que les substances nutritives arrivent en continu dans la couche euphotique. Reste à savoir par quel mécanisme.

Soulignons encore une fois le caractère exceptionnel de notre éco-système. Dans une mer continentale "normale", les tempêtes d'automne et d'hiver homogénéisent la colonne d'eau, amenant ainsi des substances nutritives à proximité de la surface. Au printemps, à mesure que la quantité de lumière disponible augmente et que la température de l'eau s'élève, la production primaire démarre. Cependant, l'augmentation du rayonnement solaire ne tarde pas à conduire à la formation d'une pycnocline qui "isole" la couche de surface de la couche de fond. Par conséquent, la concentration en substances nutritives de la couche euphotique diminue au fur et à mesure que le phytoplancton se développe. En d'autres termes, la production primaire est rapidement limitée, sauf si des substances nutritives sont apportées par des fleuves enrichis en nitrates, phosphates et autres sels par l'action de l'homme. Dans l'eau d'Anadyr, circonstance rare, c'est un mécanisme naturel qui injecte constamment des substances nutritives dans la couche euphotique.

Manifestement, le même processus hydrodynamique rend compte du panache d'eau froide naissant dans le Détroit d'Anadyr et de l'introduction de substances nutritives dans la couche euphotique dans ce même détroit.

Les Figures 13-18 suggèrent qu'un intense upwelling se maintient dans le Détroit d'Anadyr (Annexe III).

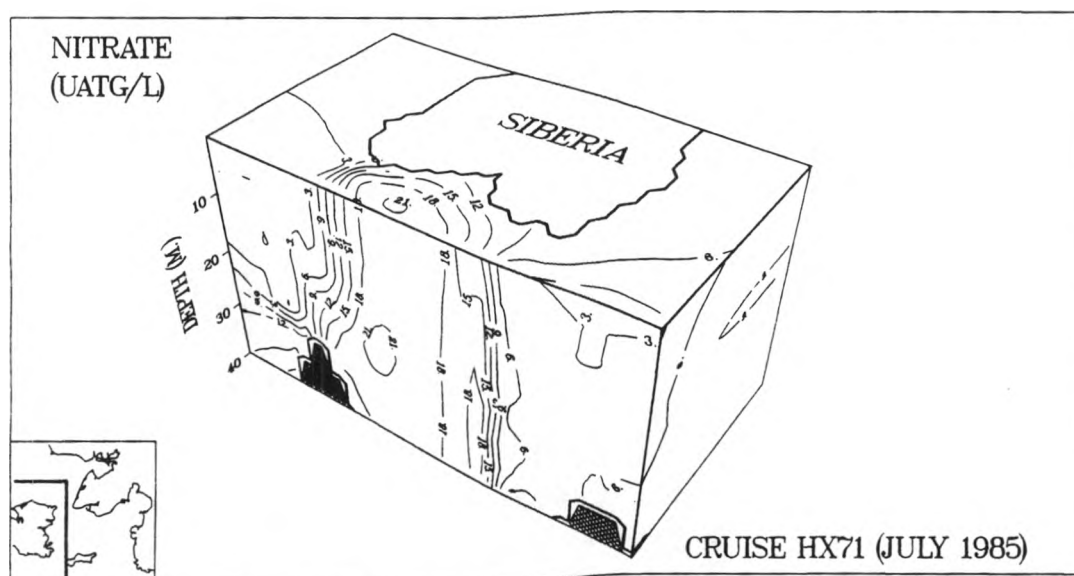


Figure 13. Vue tridimensionnelle de la concentration en nitrate, essentiellement dans les eaux sibériennes, reconstruite par le modèle variationnel inverse à partir de données de juillet 1985.

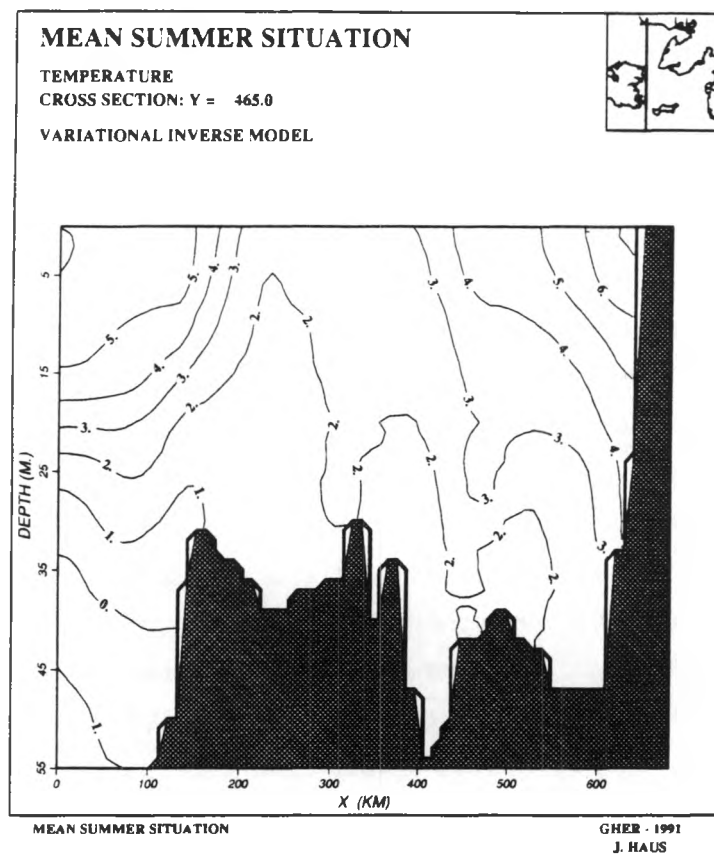


Figure 14. Coupe verticale passant principalement dans les eaux russes représentant la température de la situation estivale de référence reconstruite par le modèle variationnel inverse.

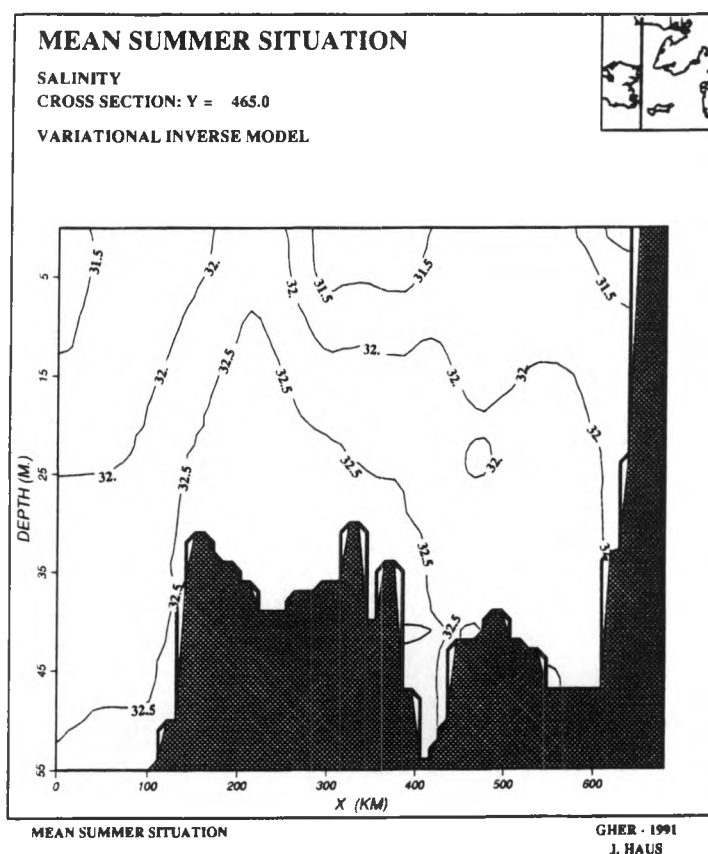


Figure 15. Coupe verticale passant principalement dans les eaux russes représentant la salinité de la situation estivale de référence reconstruite par le modèle variationnel inverse.

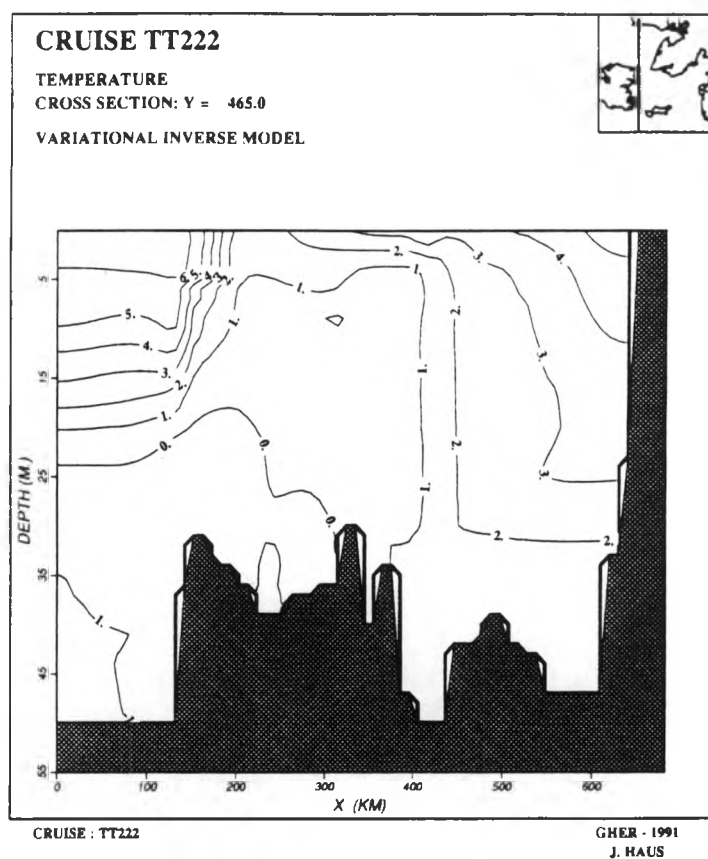


Figure 16. Coupe verticale passant principalement dans les eaux russes représentant la température reconstruite par le modèle variationnel inverse à partir de données de juillet 1988.

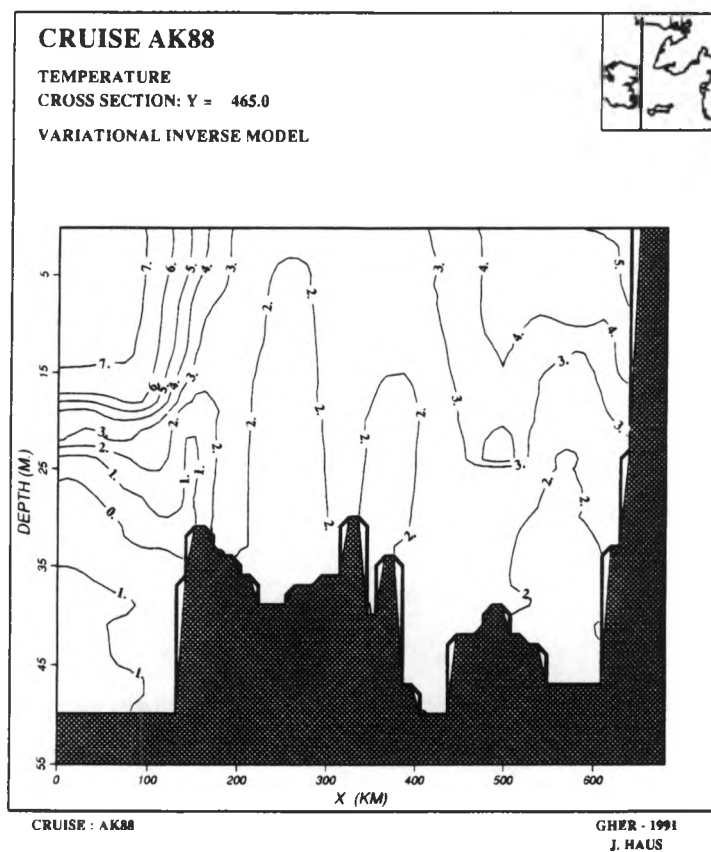


Figure 17. Coupe verticale passant principalement dans les eaux russes représentant la température reconstruite par le modèle variationnel inverse à partir de données d'août 1988.

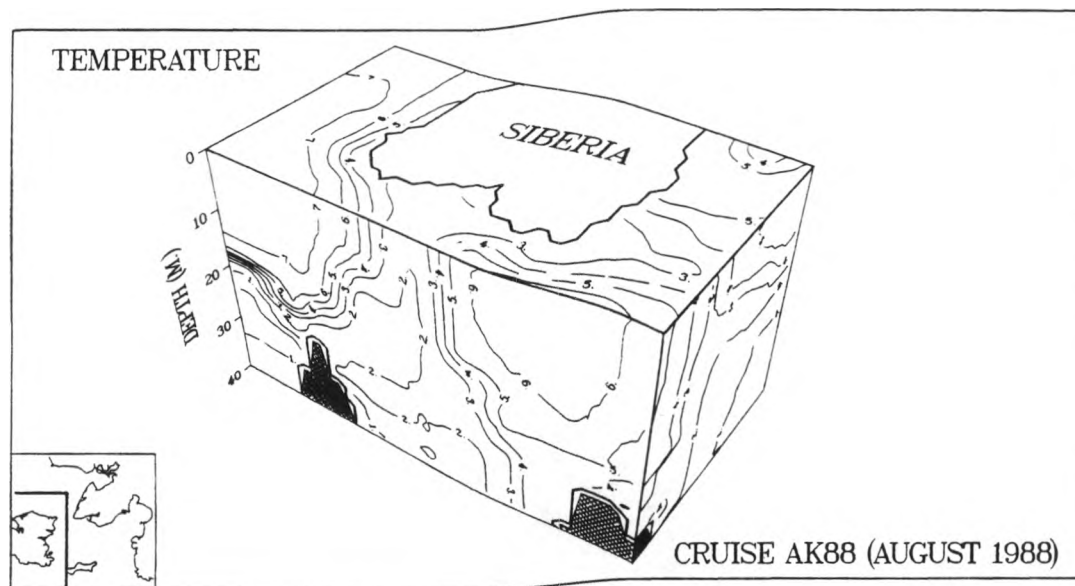


Figure 18. Vue tridimensionnelle de la température, essentiellement dans les eaux sibériennes, reconstruite par le modèle variationnel inverse à partir de données d'août 1988.

Outre l'upwelling, d'autres mécanismes de génération du panache d'eau froide ont été évoqués.

On a pensé à un apport d'eau froide — mais non-salée, donc légère — en provenance de Sibérie. Aucun panache d'eau froide n'étant présent à la sortie du Yukon, il aurait alors fallu expliquer pourquoi l'eau des fleuves de Sibérie était nettement plus froide que celle des fleuves d'Alaska.

On a aussi dit que l'accélération de l'écoulement dans le Détroit d'Anadyr — confirmée par tous les modèles — augmentait fortement le mélange turbulent, détruisant ainsi la pycnocline et mélangeant toute la colonne d'eau. Si cette hypothèse était valable alors, dans les Figures 13-18, le nombre d'iso-lignes s'élevant vers la surface serait approximativement égal au nombre de celles descendant vers le fond (voir Annexe 3).

L'upwelling semble donc bien être le mécanisme de base, même si la contribution de la diffusion turbulente ne peut sans doute pas être négligée (Annexe 3).

La théorie classique de l'upwelling côtier (CSANADY, 1977, 1984) attribue au vent le rôle de force motrice principale: dans l'hémisphère nord, si le vent souffle "côte à gauche" ("côte à droite"), alors il a tendance à induire un upwelling (downwelling) dans la région adjacente à la côte. Cependant, dans le voisinage du Détroit d'Anadyr, la tension de vent mensuelle estivale ne semble presque jamais orientée de façon à favoriser, selon la théorie classique, la génération de flux verticaux dirigés vers le haut (Table 1 et Figure 19). Donc, la présence permanente d'un panache d'eau froide et l'injection de sels nutritifs dans la couche de surface ne peuvent probablement pas être attribuées à l'action d'un upwelling côtier induit par le vent.

L'alternative est simple. Ou bien, l'hypothèse de l'upwelling est fausse et il reste à en trouver une meilleure — parmi les autres hypothèses avancées ci-dessus ou ailleurs. Ou bien, l'hypothèse de

l'upwelling est correcte mais, dans ce cas, il faut expliquer le mécanisme de cet upwelling sans faire appel au vent.

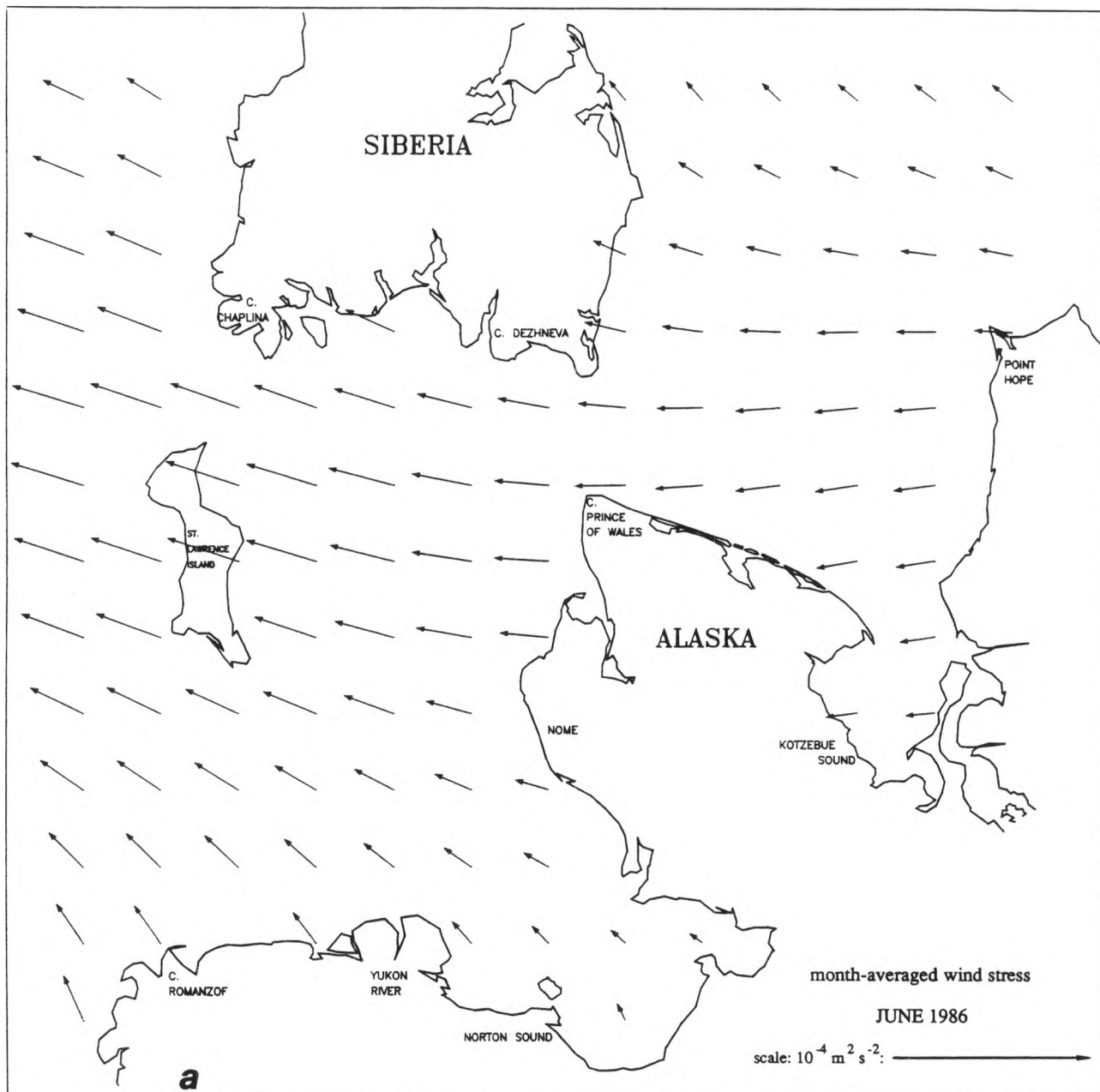
Puisque la mesure directe de flux verticaux est actuellement impossible à réaliser avec un coût admissible, il reste à se tourner vers un modèle tridimensionnel.

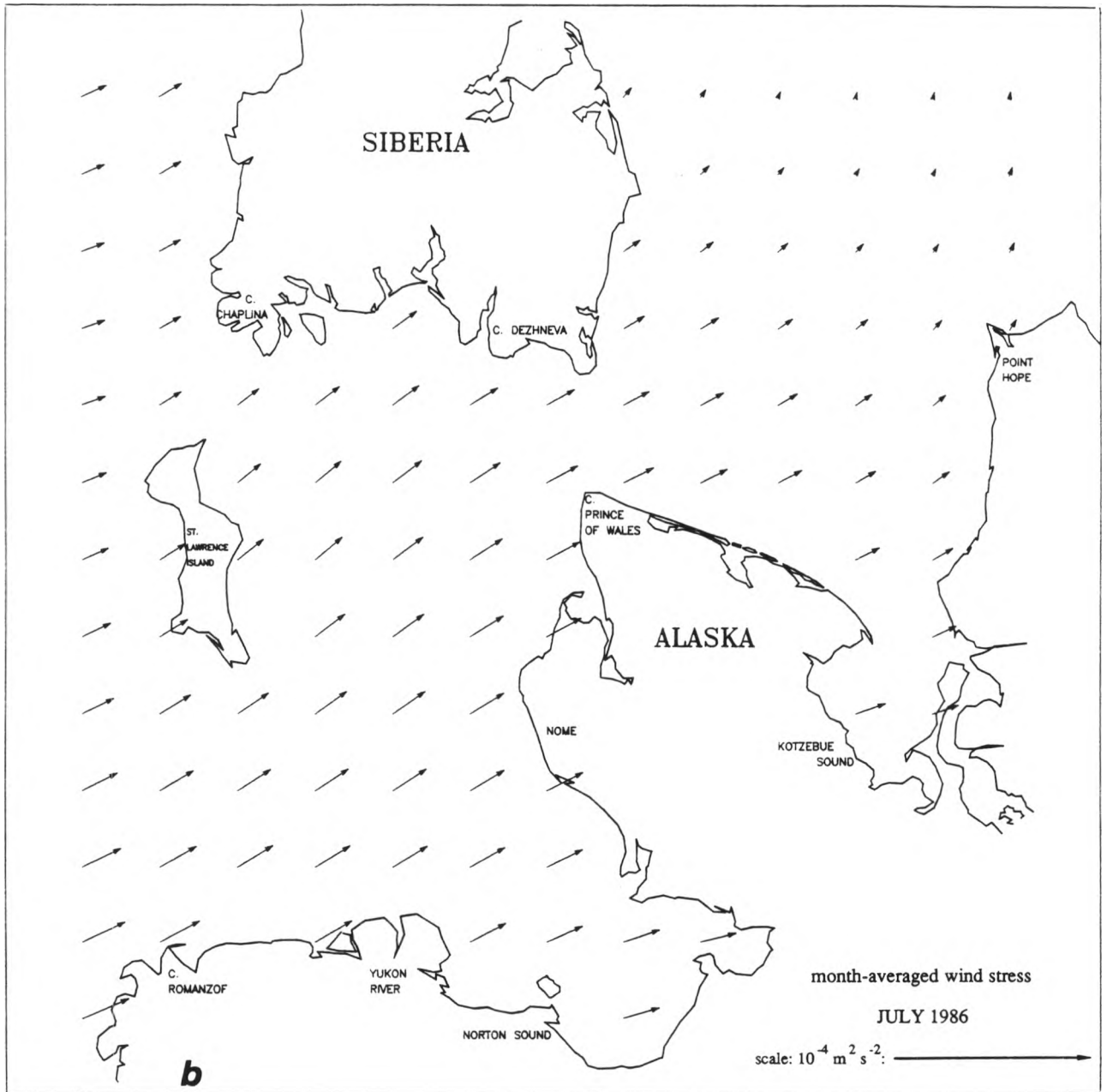
mois	$ \tau^s _{\max}$ ($10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$)	favorable à l'upwelling d'Anadyr
juin 1984	1.1	NON
juillet 1984	2.6	OUI
août 1984	1.7	OUI
septembre 1984	4.9	NON
juin 1985	2.5	NON
juillet 1985	2.2	OUI / NON
août 1985	2.5	NON
septembre 1985	10.3	NON
juin 1986	3.9	NON
juillet 1986	2.8	OUI
août 1986	7.8	NON
septembre 1986	11.2	NON

Table 1. Caractérisation succincte du champ de tension de vent mensuelle dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR.

6. Conclusion

Différents modèles 2D et 3D ont permis de représenter, plus ou moins fidèlement, les caractéristiques de la circulation climatique horizontale dans la région du Détroit de Bering. Mais, jusqu'à présent, aucun modèle n'a fourni une évaluation, même grossière, de l'importance des flux verticaux. Tenter de combler cette lacune est donc l'objectif principal de ce travail.





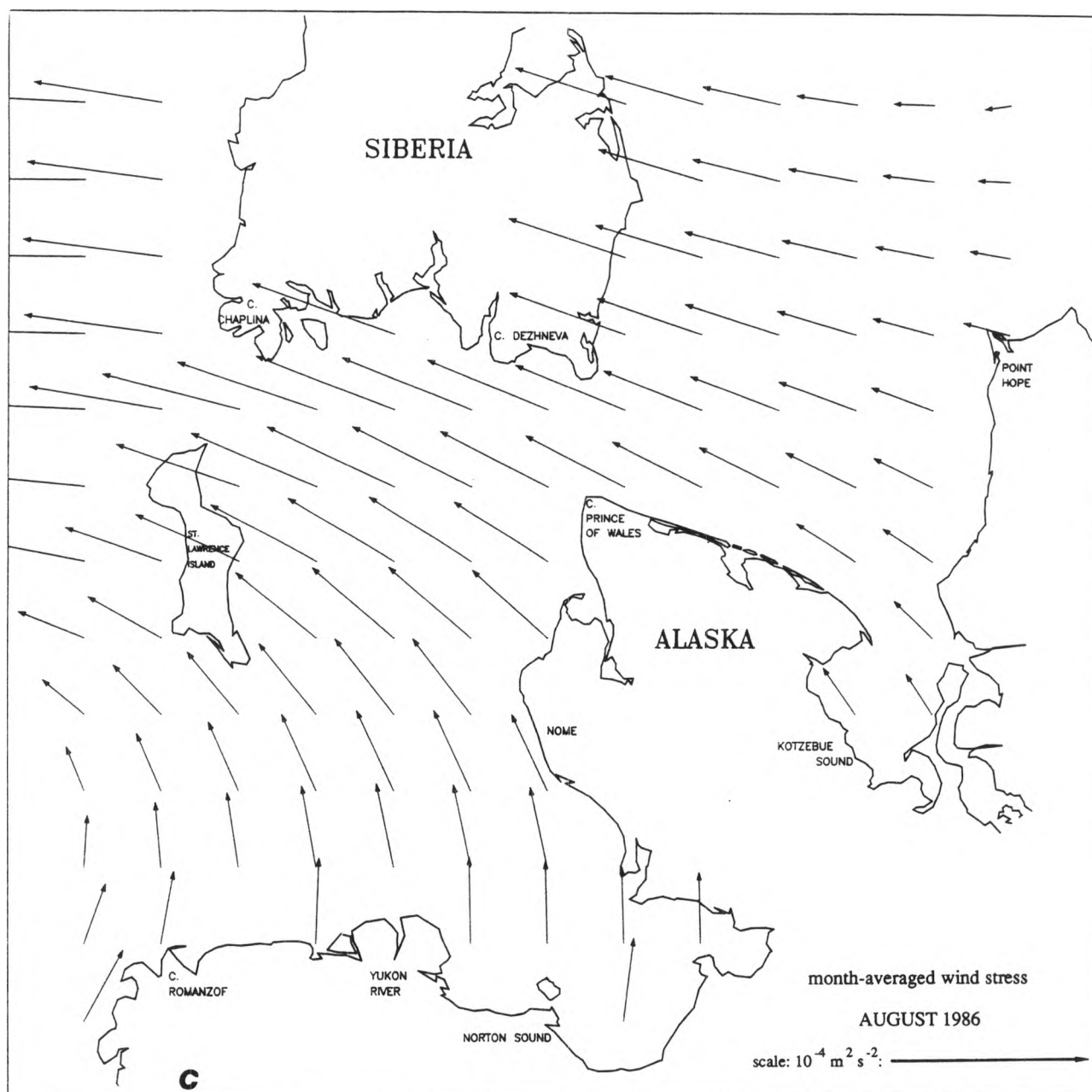


Figure 19. Moyenne mensuelle de la tension de vent pour les mois de juin (a), juillet (b) et août (c) de l'année 1986 (source: A. Mouchet, communication personnelle).

Chapitre V: Conception d'une simulation numérique tridimensionnelle

1. Introduction

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, les modèles mis en oeuvre jusqu'à maintenant ont été capables de donner une bonne idée de la circulation générale horizontale dans la région du Détroit de Bering. Cependant, une étude éco-hydrodynamique complète requiert des modèles hydrodynamiques qu'ils fournissent également une estimation des flux verticaux associés à la circulation générale. On a expliqué à quel point cette exigence est cruciale pour la compréhension de l'éco-système auquel ISHTAR s'intéresse. Nous allons donc essayer de modéliser la circulation générale tridimensionnelle dans le domaine d'intérêt. Mais, avant tout, il faut définir la grille numérique. Il importe aussi de s'interroger sur la possibilité de modéliser efficacement la circulation générale tridimensionnelle dans le domaine d'intérêt.

2. Grille numérique et bathymétrie

On pourrait utiliser la même grille que celle de WALEFFE (1985) et NIHOUL *et al.* (1986). Cette grille couvre à peu près la zone auxquelles ISHTAR s'intéresse (Figure I.1) mais elle a deux inconvénients considérables. Premièrement, la limite sud de la grille traverse le Détroit d'Anadyr où l'on suspecte la présence d'un important upwelling. Ce dernier ne peut être bien représenté si la frontière du domaine est comprise dans la zone d'upwelling. Deuxièmement, avec une maille de 10 km de côté, on ne peut simuler les circulations secondaires ayant une échelle de longueur de quelques kilomètres associées à des instabilités agéostrophiques baroclines-barotropes (NIHOUL, 1986). La trace de ces instabilités est visible sur les photos prises dans l'infra-rouge par les satellites. Ces circulations secondaires semblent surtout se développer aux bords du panache d'eau froide issu du Détroit d'Anadyr (NIHOUL, 1986). Elles augmentent sans doute la diffusion associée à la circulation générale.

Les moyens informatiques disponibles ne permettent pas la réduction de la taille de la maille. On conserve donc une maille de 10^5 m de côté dans le plan horizontal. Par contre, on remédie facilement au premier inconvénient cité en déplaçant la frontière numérique d'une centaine de kilomètres vers le

sud. De la sorte, on espère que les erreurs associées aux conditions imposées sur la longue frontière en mer ouverte ne se feront pas trop sentir dans les Détroit d'Anadyr et de Shpanberg. Pour les mêmes raisons, dans la mer de Chukchi, on repousse la frontière en mer ouverte de quelques dizaines de kilomètres. On obtient finalement un domaine de travail de 700 km de côté (Figure 1).

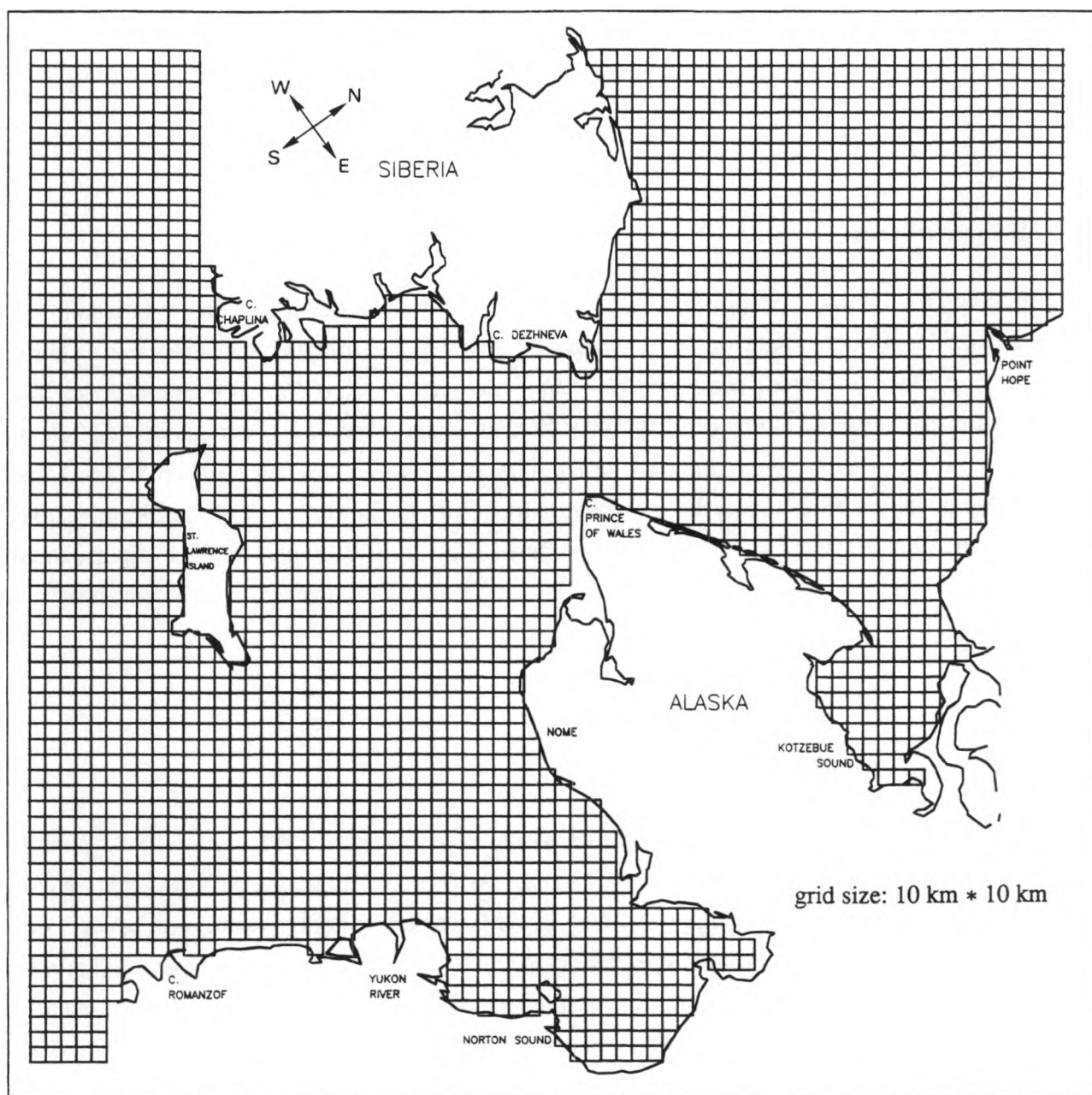


Figure 1. Vue en plan des interfaces des mailles "mouillées" sur lesquelles s'appuie le modèle numérique.

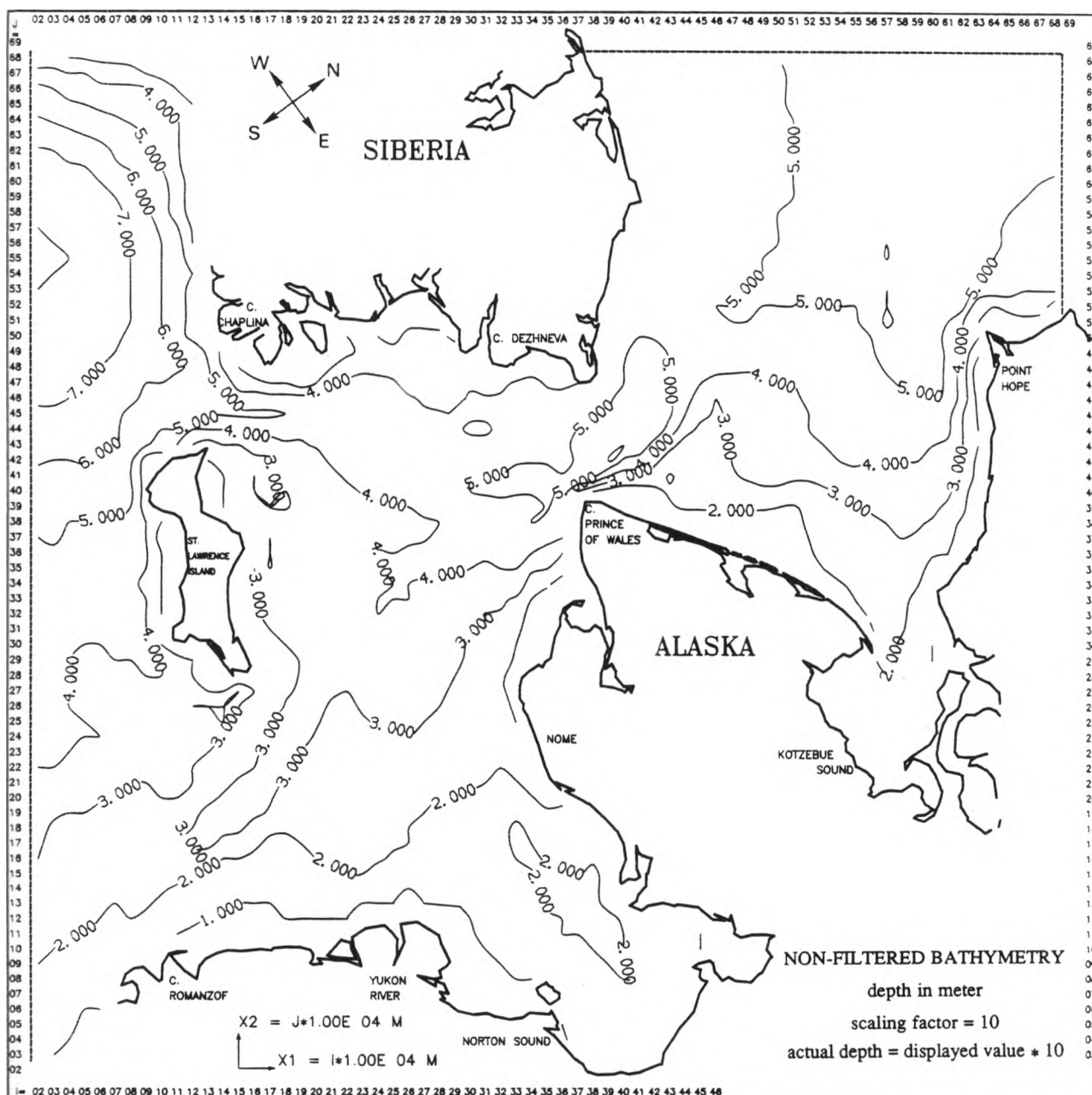


Figure 2. Bathymétrie "brute" du domaine de calcul. La profondeur est exprimée en décimètres.

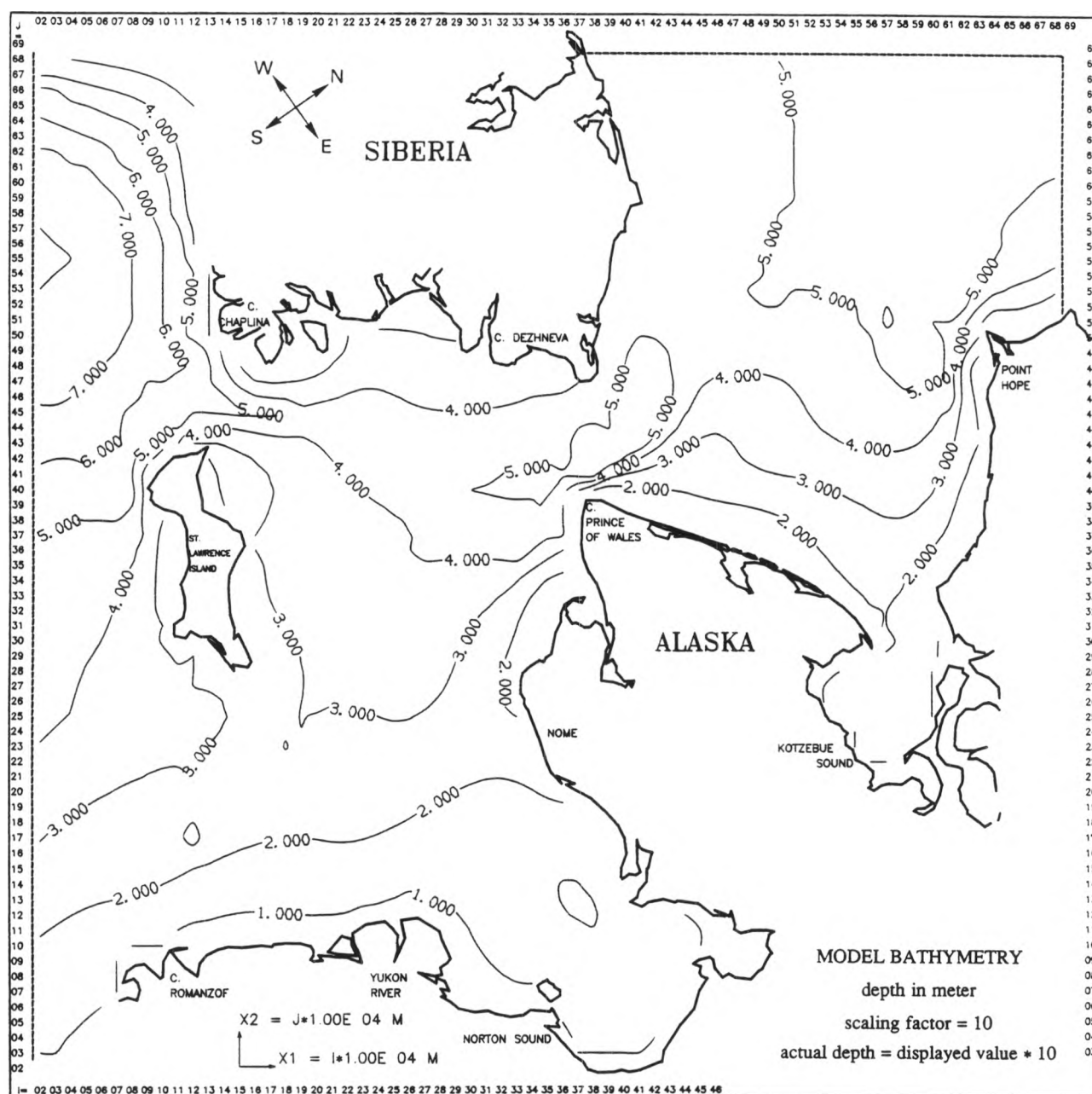


Figure 3. Bathymétrie "lissée" du modèle. La profondeur est exprimée en décamètres.

Le long des frontières en mer ouverte, il est commode de considérer qu'une ou deux mailles font fictivement partie du domaine de calcul de manière à faciliter l'application des conditions aux limites. Finalement, le nombre de verticales réellement comprises dans le domaine de calcul (Figure 1) est de $67^2 = 4,489$. Parmi celles-ci, 1,799 verticales sont "sèches". Donc, le nombre de verticales "mouillées" s'écrit:

$$n_{2D} = 4,489 - 1,799 = 2,690 . \quad (1)$$

Evidemment, modéliser tout le plateau continental constituerait l'approche idéale, notamment parce que cela faciliterait la mise en oeuvre des conditions aux limites en mer ouverte. Mais, cette approche nécessiterait un nombre de mailles prohibitif. On pourrait cependant trouver un compromis: modéliser l'écoulement sur tout le plateau à l'aide d'un modèle bidimensionnel intégré sur la profondeur, qui est très économique, et représenter la circulation dans le domaine d'intérêt avec un modèle tridimensionnel dont certaines conditions aux limites proviendraient des résultats du modèle bidimensionnel. Cette approche n'a cependant pas encore été implémentée.

Selon la verticale, 10 mailles sont utilisées de sorte que le nombre total de mailles "mouillées" de la grille tridimensionnelle vaut

$$n_{3D} = 2,690 * 10 = 26,900 . \quad (2)$$

Conformément aux explications des Sections III.4 et III.5, on applique un filtre à la bathymétrie déduite des cartes marines disponibles (Figure 2) pour obtenir le champ de profondeur effectivement utilisé dans le modèle numérique (Figure 3). La comparaison des Figures 2 et 3 montre que le lissage effectué est très modéré. En effet, la profondeur moyenne non lissée vaut 36.8 m alors que

$$\left[\frac{\sum |\Delta h|^2}{n_{2D}} \right]^{1/2} = 1.77 \text{ m} , \quad (3)$$

où Δh désigne la différence, en un point de grille donné, entre la profondeur lissée et la profondeur non lissée.

3. Modélisation de la circulation générale tridimensionnelle

Au sens strict, la circulation générale résulte de la moyenne sur une durée d'au moins une dizaine de jours des variables d'état caractérisant le système marin étudié.

Comment obtenir un modèle focalisé sur la circulation générale? A l'image de ce que l'on fait pour bâtir un modèle à la méso-échelle, on pourrait prendre la moyenne des équations de base de l'hydrodynamique des mers peu profondes de telle sorte que les fluctuations comprennent les processus à la micro-échelle, à l'échelle médiale et à la méso-échelle. Ainsi, les variables d'état seraient liées à la circulation générale. On pourrait aussi filtrer les équations à la méso-échelle pour dégager les variables caractéristiques de l'échelle synoptique ou climatique. Un sérieux problème

apparaît cependant: est-il possible de trouver des paramétrisations adéquates des moyennes de produits de fluctuations correspondant aux mouvements filtrés (NIHOUL *et al.*, 1989)? Une question similaire se posait pour les modèles à la méso-échelle et la réponse était positive. Mais, ici, il n'est guère certain que la réponse soit encore positive. En effet, on peut penser que plus la gamme de processus filtrés est large, plus la paramétrisation des corrélations correspondantes devient difficile.

Plutôt que d'essayer de paramétriser l'effet des phénomènes à la méso-échelle, on peut les calculer explicitement puis évaluer les moyennes apparaissant dans les équations de la circulation générale. Cette technique a fait ses preuves dans les modèles intégrés sur la profondeur où la marée, un phénomène essentiellement périodique, représente la contribution dominante à la méso-échelle (NIHOUL et RONDAY, 1975). Cependant, dans le domaine d'intérêt, la marée ne représente pas l'unique contribution importante des processus à la méso-échelle. Si l'on veut étendre à notre étude la technique de NIHOUL et RONDAY (1975), on va se trouver dans l'obligation d'effectuer la moyenne de termes qui ne sont pas périodiques. Il faudrait alors effectuer des simulations à la méso-échelle sur des périodes assez longues et il serait sans doute plus direct de prendre simplement la moyenne du résultat de ces simulations.

Il semble donc que la seule démarche raisonnable soit de simuler explicitement les processus à la méso-échelle, puis de "moyenner" les résultats obtenus. De cette façon, on peut obtenir facilement les valeurs des variables à l'échelle synoptique ou climatique. L'objection soulevée par NIHOUL et RONDAY (1975) à l'encontre de cette approche ne s'applique pas car, dans notre domaine d'intérêt, l'énergie contenue dans la circulation générale est supérieure à celle associée aux phénomènes à la méso-échelle. De surcroît, l'avantage majeur de cette approche réside dans le fait qu'elle ne requiert que la mise en oeuvre d'un modèle à la méso-échelle, dont les paramétrisations sont généralement considérées comme fiables (NIHOUL *et al.*, 1989). Mais, de nombreux inconvénients subsistent. Il faudrait, en principe, faire "tourner" le modèle sur la période de juin à septembre, ce qui exigerait d'importantes ressources informatiques. De plus, afin d'effectuer ce type de simulation, il faut disposer de suffisamment de données pour calculer les flux à l'interface air-mer et, surtout, pour mettre au point des conditions aux limites en mer ouverte. En d'autres termes, il faut imposer des forçages très réalistes, sans quoi la simulation risque de perdre une bonne partie de sa signification. De toutes façons, les données acquises dans la cadre d'ISHTAR ne permettent pas de réaliser une telle simulation.

De nouveau, on se heurte à des difficultés insurmontables.

En fait, on touche du doigt un important inconvénient des modèles tridimensionnels. Ces modèles ont la capacité de fournir des solutions très réalistes mais, étant très "pointus", ils s'accommodent mal de forçages idéalisés ou simplifiés — au contraire des modèles 2D. De plus, ils ne se prêtent pas du tout au "moyennage" additionnel de leurs équations. En d'autres termes, ces modèles sont potentiellement très précis mais ils ne sont pas très "robustes".

Mais, au fond, est-il vraiment adéquat de chercher à modéliser la circulation générale au sens le plus strict du terme? On désire modéliser l'hydrodynamique de la région du Déroit de Bering dans le but d'aider à comprendre l'écologie de cette région. Les phénomènes biologiques se déroulent à des échelles temporelles de quelques jours au moins. Il a donc semblé naturel de tenter de représenter la

circulation générale. A l'image de beaucoup d'autres, nous avons accepté cette stratégie de modélisation sans nous interroger plus avant sur son bien-fondé. Il est cependant grand temps de remettre notre position en question.

Examinons d'abord le temps caractéristique lié à la diffusion turbulente verticale. L'ordre de grandeur de la diffusivité turbulente est de $10^{-1} - 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. La profondeur valant $10^1 - 10^2 \text{ m}$, le temps caractéristique lié au mélange turbulent vertical peut être estimé à $(10^1 - 10^2)^2 / (10^{-1} - 10^{-2}) \approx 10^3 - 10^6 \text{ s}$. Retenons surtout la plage intérieure, c'est-à-dire $10^4 - 10^5 \text{ s}$, soit quelques heures à une journée environ. Donc, la diffusion verticale est clairement un phénomène à la méso-échelle. Vue de l'échelle synoptique, la diffusion verticale doit sans doute être interprétée comme un processus conduisant à une homogénéisation instantanée des parties turbulentes de la colonne d'eau.

Il est capital pour l'écologie de déterminer l'existence et la position de la pycnocline — si elle est présente. Cependant, comme le suggère l'Annexe IV, la pycnocline n'est probablement pas une caractéristique d'un écoulement à l'échelle synoptique. En effet, à cette échelle, il semble très plausible que la pycnocline ne se présente pas comme une région de fort gradient vertical de poussée séparant deux couches homogènes (Annexe IV). Or, la fermeture turbulente ne peut représenter convenablement l'inhibition de la turbulence par la stratification que là où le gradient de poussée est fort. Il paraît donc souhaitable de “garder la pycnocline de la méso-échelle”.

D'un autre côté, on peut penser que dans la région du Détroit de Bering l'advection liée à la circulation générale joue un rôle plus important que son équivalent à la méso-échelle.

De cette analyse, il résulte que, pour comprendre ou modéliser des processus biologiques, il faut représenter la diffusion turbulente de la méso-échelle tandis que l'on peut sans doute se contenter de tenir compte de l'advection à l'échelle synoptique.

Dans l'absolu, la meilleure solution est sans doute de faire des simulations à la méso-échelle. Ici, on a cependant écarté cette approche — pour des raisons exposées plus haut. Il reste alors à mettre au point une technique permettant de représenter l'advection liée à la circulation générale tout en modélisant au mieux les processus turbulents de la méso-échelle. Pour ce faire, nous allons utiliser le modèle 3D à la méso-échelle. On trouvera une discussion théorique plus détaillée de ce point dans NIHOUL (1989) et NIHOUL *et al.* (1989).

Ainsi, les résultats de nos simulations ne représenteront pas vraiment la circulation générale au sens strict. Cependant, on espère que de nombreuses caractéristiques de la circulation générale seront tout de même représentées. C'est pourquoi, par abus de langage, nous parlerons parfois de “circulation générale” alors qu'il serait sans doute plus correct de parler de “simulations à la méso-échelle présentant des caractéristiques typiques de la circulation générale” ou, plus brièvement, de modélisation d'une “situation typique”.

4. Modélisation d'une situation typique

Au lieu de tenter de simuler la circulation générale au sens propre du terme, on propose d'utiliser le modèle méso-échelle avec un forçage tel que le champ de vitesse horizontale soit proche de celui caractérisant la circulation générale à l'échelle d'un mois ou d'une saison, par exemple.

La moyenne mensuelle ou saisonnière de la tension de vent étant significativement plus petite que la tension de vent horaire ou journalière, on impose $\tau^s = 0$ à la surface. On néglige aussi le forçage directement associé aux variations de pression atmosphérique.

Nous n'avons qu'une confiance limitée dans la technique d'OVERLAND et ROACH (1987) visant à générer l'écoulement dans le domaine d'intérêt par la pente de la surface de la mer (voir Section IV.3). De plus, cette approche ne permet pas de choisir *a priori* le débit traversant le Déroit de Bering. On impose plutôt la vitesse normale à la frontière sud de telle sorte que deux tiers du flux d'eau entrant dans le domaine passe par le Déroit d'Anadyr. La vitesse normale imposée ne dépend pas du temps. La distribution le long de la frontière du flux entrant a été déterminée de façon empirique, à la suite d'un grand nombre d'essais.

Le long de la frontière sud, on impose des valeurs constantes — dans le temps — de la température et de la salinité.

A la frontière sortante, en mer de Chukchi, on applique une condition de radiation "advective" sur la température et la salinité. On prescrit aussi la composante normale de la vitesse, de manière tout aussi empirique qu'à la frontière entrante.

Sur les frontières en mer ouverte, on suppose que la dérivée normale de la composante tangentielle de Hu est nulle. Sur ces mêmes frontières, on néglige l'advection d'énergie cinétique turbulente de sorte qu'aucune condition n'est requise pour e .

Les frontières latérales du domaine de calcul ne comprennent que des interfaces de maille — où la vitesse normale à la frontière est définie. Par conséquent, on ne doit pas imposer de condition sur l'élévation.

A la surface de la mer, on néglige les flux de chaleur et de matière. De plus, on ne tient pas compte du rayonnement solaire.

Les conditions aux limites que l'on vient d'exposer sont en accord avec la discussion du Chapitre III.

Le nombre de Rossby de l'écoulement étant petit, les termes non-linéaires d'advection de quantité de mouvement sont relativement petits de sorte que la contribution de ces termes est peu importante à toutes les échelles de mouvement — supérieures à une dizaine de kilomètres. D'autre part, on peut supposer que, comme dans la plupart des mers peu profondes, la déviation de vitesse sur la verticale $\hat{u}$ est significativement plus petite que la vitesse moyenne $\bar{u}$. Par conséquent, les forçages de l'écoulement ne dépendant pas du temps, on peut espérer trouver un champ de $\bar{u}$ à peu près stationnaire qui devrait être très proche de la circulation générale. Par contre, les champs de température, de salinité, d'énergie cinétique turbulente et de $\hat{u}$ dépendront fortement des conditions aux limites et des conditions initiales et ne seront probablement pas représentatifs de la circulation générale — au sens strict du terme. Cependant, on va essayer qu'ils correspondent autant que possible à une situation typique.

A l'instant initial, on suppose que la température ne dépend pas des coordonnées horizontales mais présente une thermocline marquée à 15 mètres sous la surface. A la surface, la température vaut 7°C tandis qu'au fond elle est de 1°C . La salinité initiale ne dépend pas de la coordonnée verticale mais seulement des coordonnées horizontales. Elle est comprise entre 31.9×10^{-3} et 33.1×10^{-3} . Elle est distribuée de façon à représenter, schématiquement, les trois masses d'eau définies par COACHMAN *et al.* (1975). On néglige l'influence du Yukon. Ce dernier point mis à part, les conditions initiales sur la température et la salinité sont en accord avec la description des masses d'eau (Section IV.4). A la frontière sud, les valeurs imposées constantes de T et S correspondent, bien entendu, aux conditions initiales.

Dans le domaine de calcul, la vitesse est supposée nulle à l'instant initial. Cette condition initiale est appliquée non parce que l'on pense qu'elle est de bonne qualité mais tout simplement parce qu'elle est simple et que l'on ne voit pas comment en trouver de meilleure.

A partir des frontières en mer ouverte, des ondes de Poincaré devraient se propager à une vitesse de plusieurs dizaines de mètres par seconde et établir progressivement un champ de vitesse horizontale dans le domaine. Cependant, ce processus risque d'être très "brutal": il pourrait être associé à une intense production par cisaillement d'énergie cinétique turbulente et à des vitesses verticales très élevées. Par conséquent, la stratification initiale pourrait être détruite et, pour que la pycnocline se rétablisse éventuellement, il faudrait attendre l'arrivée d'eau stratifiée en provenance de la frontière sud, ce qui peut demander plus d'un mois, à cause de la lenteur relative de l'advection.

On peut éviter la destruction de la stratification initiale en modifiant la procédure de "démarrage" du modèle. Tout d'abord, sous les conditions décrites plus haut, on fait "tourner" un modèle bidimensionnel intégré sur la profondeur. Au bout de quelques jours de simulation, le champ de vitesse $\bar{\mathbf{u}}_{2D}$ devrait atteindre un état quasi-stationnaire à peu près géostrophique. Notons que l'ajustement du champ de vitesse — et d'élévation — vers l'équilibre géostrophique devrait être le résultat de la propagation des ondes de Poincaré dans le domaine et ne devrait dépendre que très peu des termes dissipatifs. C'est l'"ajustement géostrophique" (BLUMEN, 1972). Le champ de vitesse $\bar{\mathbf{u}}_{2D}$ devrait correspondre à la circulation générale calculée par les modèles bidimensionnels d'autres auteurs. Ce champ vitesse servira de condition initiale au modèle tridimensionnel. Donc, pour démarrer le modèle 3D, on posera tout simplement $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_{2D}$. Mais, à cet instant, la déviation de vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ sera encore nulle. Son ajustement vers des valeurs raisonnables s'accompagnera certainement de grandes vitesses verticales qui pourraient détruire la stratification et même violer les conditions de stabilité du modèle. Pour éviter ces problèmes, on ne fera pas encore "démarrer" tout le modèle tridimensionnel. On bloquera la température et la salinité tandis qu'on laissera le champ de vitesse tridimensionnelle et l'énergie cinétique turbulente atteindre un état à peu près stationnaire. A ce moment, la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ devrait différer très peu de $\bar{\mathbf{u}}_{2D}$ et on sera certain que la stratification n'aura pas été altérée. A partir de cet instant seulement, on résoudra toutes les équations du modèle tridimensionnel. On s'attend à ce que le champ de vitesse moyenne se modifie peu, au contraire du champ de température qui devrait ressentir fortement l'action des flux verticaux. Cette action devrait être mise en lumière de façon d'autant plus spectaculaire qu'à l'instant initial les surfaces isothermes sont des plans horizontaux.

Donc, on va mettre en oeuvre un modèle à la méso-échelle dont le champ de vitesse moyenne $\bar{u}$ devrait être proche de la circulation générale. La vitesse verticale, à l'image des autres variables d'état, évoluera à la méso-échelle sans pour autant représenter une situation particulière de la méso-échelle parce que les conditions aux limites sont indépendantes du temps et que les conditions initiales proviennent de champs idéalisés des variables d'état. On représentera plutôt une situation typique, c'est-à-dire une idéalisation et une simplification de l'état du système. Ce scénario est d'autant plus plausible que, dans le domaine d'intérêt, la majeure partie de l'énergie cinétique n'est pas associée aux phénomènes à la méso-échelle les plus "rapides" mais bien aux plus lents et surtout à la circulation générale.

Il reste cependant un problème à résoudre. Dans la situation typique que l'on imagine, la pycnocline sépare deux couches de fluide qui sont homogénéisées sous l'action de la turbulence générée par la friction sur le fond, pour la couche inférieure, et par le vent, pour la couche supérieure. Néanmoins, on a décidé de négliger la tension de vent. Il faut réaliser que la moyenne sur une durée suffisamment longue de τ^s peut être significativement plus petite que la moyenne sur ce même intervalle de temps de $|\tau^s|$. Par conséquent, il n'est pas illogique d'annuler la tension de vent τ^s dans les conditions aux limites des équations de quantité de mouvement tout en considérant que $|\tau^s|$ n'est pas nul dès lors qu'il s'agit de fixer l'énergie cinétique turbulente dans la maille de surface — voir (III.89). De plus, τ^s étant nul, on s'attend à ce que le cisaillement dans la couche de surface soit relativement faible de sorte que le processus de production par cisaillement d'énergie cinétique turbulente sera peu actif. On propose de compenser cette faiblesse relative en augmentant la diffusion d'énergie cinétique turbulente. Pour ce faire, on fixe une valeur de $|\tau^s|$ artificiellement élevée — c'est-à-dire plus grande que les valeurs mesurées. On stimule ainsi la diffusion d'énergie cinétique turbulente à partir de la surface. Après de nombreux essais, on impose finalement que l'énergie cinétique turbulente dans la maille de surface soit égale à $2.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, c'est-à-dire une valeur correspondant à un vent constant de 10 m s^{-1} .

Essentiellement dans la couche de surface, on pense que M^2 pourrait être trop faible. Ceci pourrait conduire à de trop grandes valeurs du nombre de Richardson, donc à des diffusivités turbulentes nettement trop petites et, par voie de conséquence, à la multiplication intempestive des pycnoclines dans la même colonne d'eau. Des simulations préliminaires le confirment. Pour résoudre ce problème, on propose d'imposer une limite supérieure à Ri . Cette limite devrait être une fonction croissante de N^2 , que l'on regarde évidemment comme plus fiable que M^2 . Ainsi, ce serait plutôt N^2 , et non Ri , qui décèlerait la présence de la pycnocline et qui autoriserait l'augmentation du nombre de Richardson et donc l'inhibition de la turbulence ainsi que la limitation drastique des diffusivités turbulentes. Après de nombreux essais, on suggère:

$$Ri \leq \exp\left(\frac{N^2}{N_0^2}\right) \quad (4)$$

avec

$$N_0^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}. \quad (5)$$

Dans le modèle numérique, la borne (4) est, en fait, appliquée à M^2 . En pratique, on impose donc

$$M^2 = \max \left[\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right|^2, \frac{N^2}{\exp\left(\frac{N^2}{N_0^2}\right)} \right]. \quad (6)$$

5. Conclusion

Il résulte de la présente discussion qu'il n'est finalement pas souhaitable de tenter de modéliser la circulation générale tridimensionnelle — au sens strict du terme. Il est plus opportun de représenter une situation typique associée à des conditions initiales permettant de mettre clairement en évidence l'effet des flux verticaux sur la distribution de température. On a montré que le champ de vitesse tridimensionnelle calculé pourrait être vu comme une approximation de la circulation générale, mais que la diffusion turbulente devrait plutôt être celle de la méso-échelle.

Il reste à analyser les résultats de la simulation que nous venons de concevoir.

Chapitre VI: Résultats: description et interprétation

1. Introduction

Le programme informatique visant à la résolution des équations du modèle a fonctionné à de nombreuses reprises. Il a aussi subi maintes transformations. Les différents essais avaient pour but la calibration des constantes empiriques, la mise au point de la procédure de “démarrage” et la modification du calcul de M^2 . Pour deux raisons majeures, on ne va cependant pas décrire ce travail de “réglage” du modèle. Premièrement, une telle description risquerait de nuire à la concision du texte. Deuxièmement, il nous paraît plus important de se concentrer sur l'interprétation physique des résultats dans la perspective du programme ISHTAR. Nous allons donc focaliser notre attention sur la simulation qui nous semble être la meilleure ou, en tout cas, la plus riche d'enseignements. Les résultats de cette simulation sont rassemblés dans le rapport de DELEERSNIJDER et NIHOUL (1988a) qui comprend plus de 500 dessins de toute nature.

Pour la simulation qui nous occupe, la procédure de “démarrage” a fonctionné comme prévu. En particulier, la stratification n'a pas été détruite et le champ de vitesse moyenne $\bar{u}$ du modèle tridimensionnel est resté très semblable à celui produit par le modèle 2D, $\bar{u}_{2D}$. On a arrêté la simulation tridimensionnelle complète après trois jours seulement. A ce moment, on ne pouvait considérer l'écoulement comme réellement stationnaire — la vitesse moyenne et le champ d'élévation mis à part. Cependant le taux de variation temporelle des variables d'état tridimensionnelles était considérablement plus petit qu'au début de la simulation. De toutes façons, rien ne prouve qu'un système aussi non-linéaire que celui que nous modélisons a vraiment un état d'équilibre stable. Et même si un tel état d'équilibre existe, rien ne prouve qu'il est unique (Annexe V). En tout cas, après trois jours de simulation, les déplacements de la thermocline sont déjà très significatifs. De plus, le traitement des termes d'advection étant de qualité assez moyenne, surtout dans les régions de grands gradients, il n'était pas opportun de poursuivre plus avant la simulation numérique. Pour le faire, il aurait fallu appliquer de sévères corrections aux champs de quantités scalaires, comme le filtrage ou l'écrêtage.

Le débit imposé à la frontière “entrante” est de 1.8 Sv, valeur en parfait accord avec les observations anciennes de COACHMAN *et al.* (1975) mais trop élevée en regard des estimations

récentes (AAGAARD *et al.*, 1985; COACHMAN et AAGAARD, 1988; WALSH *et al.*, 1989b). Les expériences numériques effectuées précédemment, la comparaison avec les mesures et les résultats présentés dans ce chapitre suggèrent que, en première approximation, en chaque point du domaine, l'orientation de la vitesse moyenne $\bar{u}$ n'est pas fonction du débit et que la norme de $\bar{u}$ est proportionnelle au flux d'eau traversant le Détroit de Bering. La déviation de vitesse $\hat{u}$, et donc la vitesse verticale $\bar{w}$, sont, en gros, des fonctions croissantes du débit. Donc, le choix du flux d'eau traversant le domaine n'est pas un facteur déterminant (WALSH *et al.*, 1989b) à condition que les valeurs choisies restent plausibles: imposer un flux de 0.1 Sv ou de 10 Sv n'a évidemment aucun sens! D'autre part, imposer un débit un peu trop grand a au moins l'avantage de stimuler la production d'énergie cinétique turbulente — et donc le mélange turbulent — dans la couche de fond. De la sorte, on tient compte, de façon très grossière et “par la bande”, du surcroît de mélange turbulent dû aux phénomènes “rapides” de la méso-échelle, qui sont absents de notre simulation.

Dans ce chapitre, on va décrire et interpréter les résultats de la meilleure simulation disponible, au moment où la simulation a été arrêtée. Toutefois, même avec un nombre de mailles aussi modeste que celui de notre grille, la description et l'interprétation de résultats tridimensionnels demandent des efforts considérables.

Le matériel et les logiciels aujourd'hui disponibles sur le marché permettent de visualiser très efficacement des champs bidimensionnels de variables scalaires ou vectorielles. Cette opération est d'autant plus facile que les écrans de visualisation et les imprimantes sont des instruments essentiellement bidimensionnels. De sérieux problèmes se posent évidemment dès que le nombre de dimensions de l'espace dans lequel les variables sont définies dépasse celui du matériel de visualisation. A titre expérimental, il est maintenant possible de générer informatiquement des hologrammes. Cependant, aucune “imprimante holographique” n'a encore été mise sur le marché. Par conséquent, on doit se contenter de dessins bidimensionnels. Pour construire chacun de ces dessins, il faut projeter un champ 3D sur un champ 2D en effectuant, par exemple, une coupe ou une moyenne le long d'une coordonnée spatiale. Mais, on peut réaliser une infinité de projections de ce type. Seule, l'intuition physique du modélisateur permet de sélectionner les quelques projections qui conduisent à une bonne compréhension de l'écoulement. En d'autres termes, la qualité de la visualisation d'un écoulement tridimensionnel ne dépend pas seulement des performances du matériel et des logiciels mais aussi des idées de celui qui les utilise.

Interpréter les résultats, ce n'est pas dire “ici l'eau monte, là elle descend alors que, près de tel ou tel cap, l'écoulement s'incurve vers la gauche ou la droite”. Interpréter les résultats c'est utiliser la visualisation pour comprendre la dynamique de l'écoulement, c'est-à-dire identifier les processus dominants. Donc, interpréter les résultats c'est résumer l'énorme quantité de nombres réels fournis par l'ordinateur en quelques phrases, en quelques schémas ou, mieux encore, en quelques expressions mathématiques simples. Nous allons nous atteler à cette tâche.

2. Notations

Il s'avère souvent utile d'établir des statistiques sur les résultats d'un modèle. Ces statistiques exigent généralement que l'on effectue des sommes ou des moyennes concernant toutes les mailles "mouillées" de la grille. On désigne par $\sum_{2D}$ et $\sum_{3D}$ la somme sur toutes mailles "mouillées" de la grille bidimensionnelle horizontale et la somme sur toutes les mailles "mouillées" de la grille tridimensionnelle. On note $\sum_{2D-}$ une somme analogue à $\sum_{2D}$ dont on exclut les mailles adjacentes à une frontière du domaine. On pose

$$|y|_{RMC} = \left[\frac{\sum y^2}{n_D} \right]^{1/2}, \quad (1)$$

où "D" peut valoir "2D", "3D" ou "2D-", selon la nature de la variable y et où "RMC" est une abréviation de "Racine de la Moyenne des Carrés". Notons que

$$n_{2D-} = 2,301. \quad (2)$$

3. Vitesse horizontale

Nous analysons ici certains aspects du champ de vitesse horizontale.

3.1 Vitesse moyenne

La vitesse moyenne $\bar{u}$ (Figure 1) est très proche de celle fournie par le modèle bidimensionnel. Dans le domaine d'intérêt de ISHTAR, le champ de vitesse moyenne est similaire à celui obtenu par WALEFFE (1985), NIHOUL *et al.* (1986), OVERLAND et ROACH (1987) et SPAULDING *et al.* (1987). Au sud de l'Ile St. Laurent, par contre, l'écoulement est dirigé dans la direction opposée à celle prédite par OVERLAND et ROACH (1987), SPAULDING *et al.* (1987) et BRASSEUR (1989, 1991). Il est fort possible que, sur ce point particulier, notre modèle soit dans l'erreur mais, comme on l'a expliqué dans le Chapitre IV, il n'est guère aisé de trancher sans disposer de mesures courantométriques adéquates.

Le débit dans le Détroit d'Anadyr vaut 1.15 Sv tandis qu'un flux de 0.65 Sv traverse le Détroit de Shpanberg. La répartition des débits dans le rapport de 2 à 1 est donc respectée.

3.2 Déviation de vitesse

Une comparaison sommaire des Figures 1 et 2 suggère que la déviation de vitesse $\hat{u}$ est significativement plus petite que $\bar{u}$. Des mesures globales de $\hat{u}$ et $\bar{u}$ le prouvent:

$$\|\hat{u}\|_{RMC} = 0.02 \text{ m s}^{-1} \quad (3)$$

et

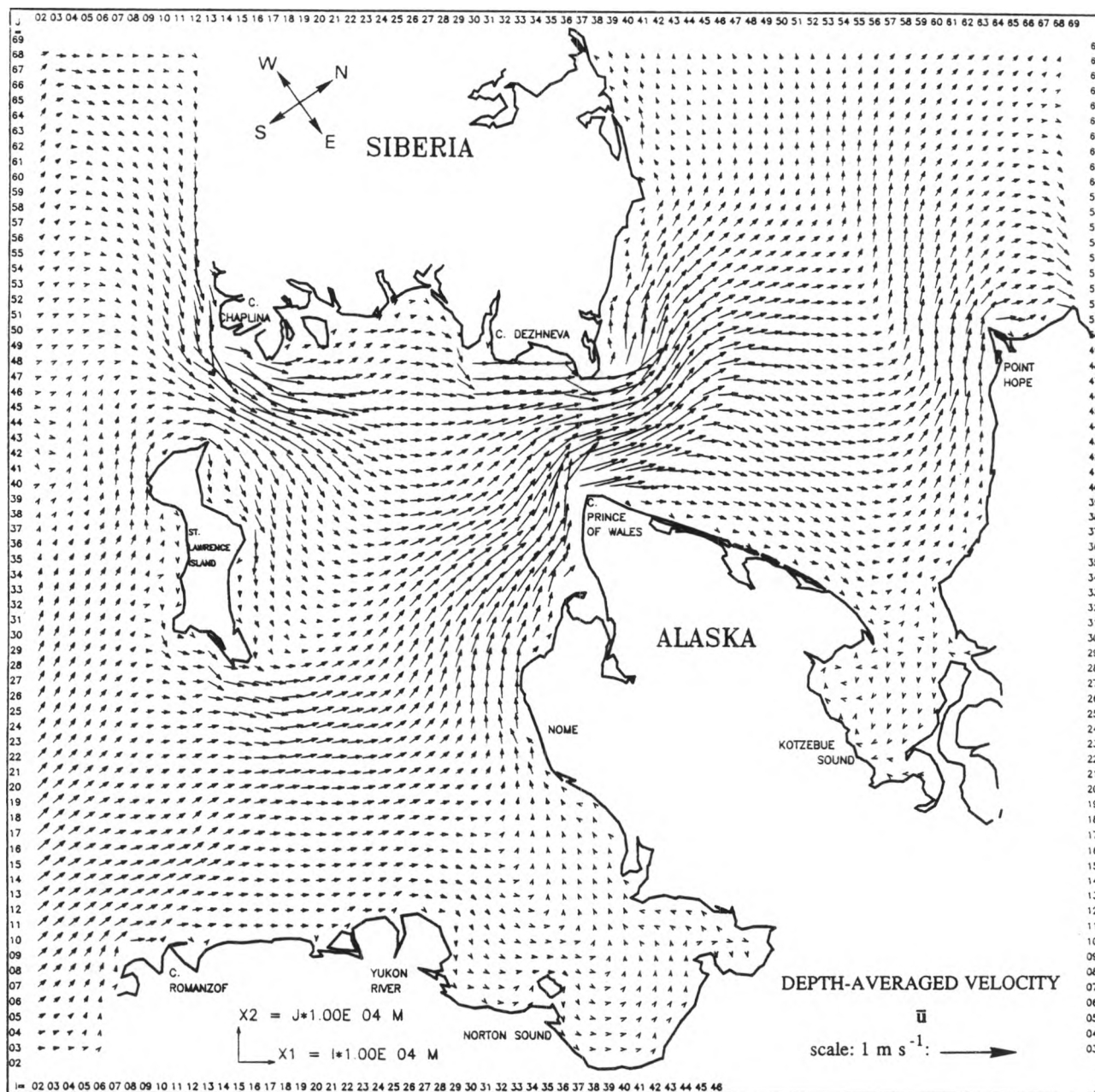


Figure 1. Vitesse moyenne horizontale $\bar{u}$ fournie par le modèle tridimensionnel.

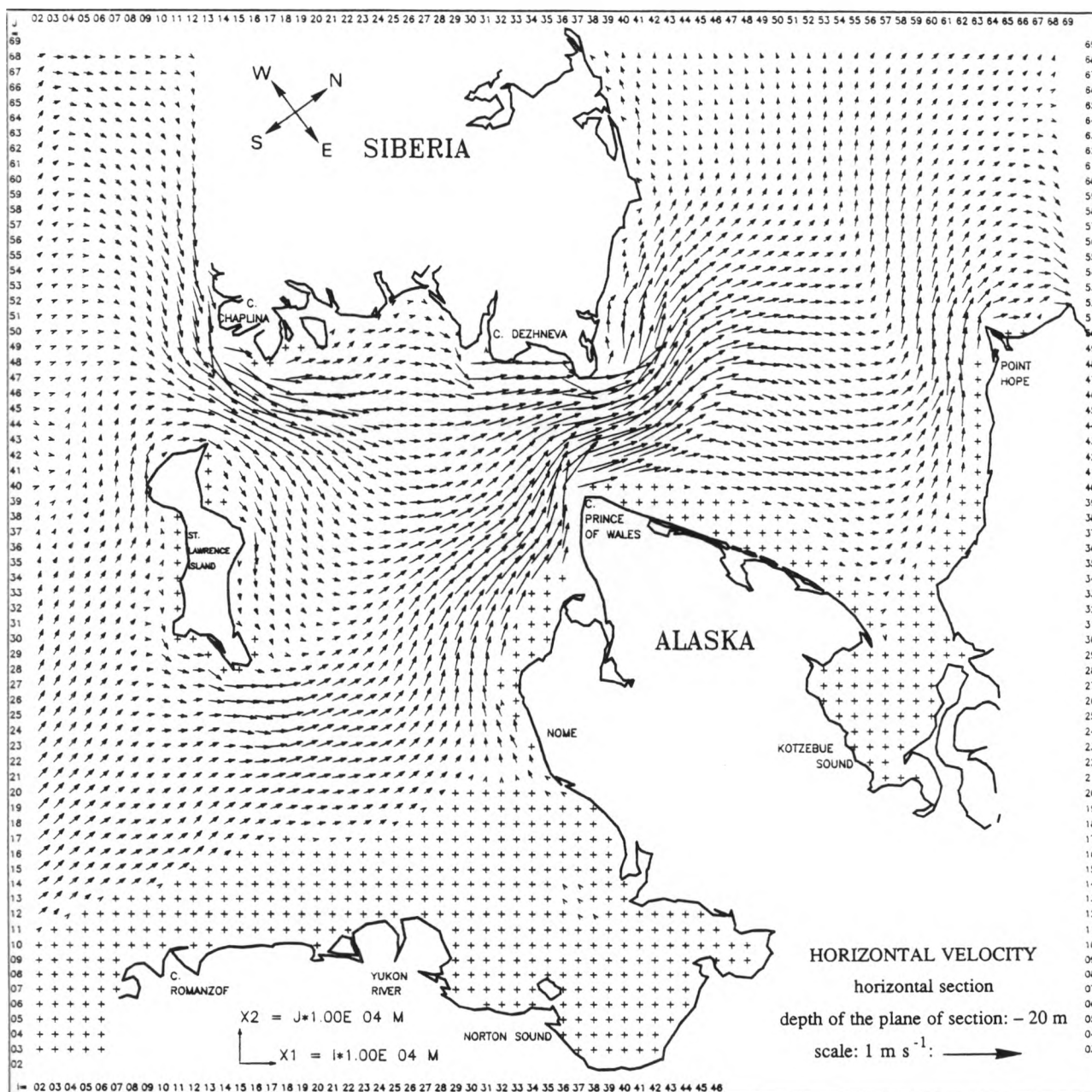


Figure 2. Vitesse horizontale dans un plan de coupe situé 20 mètres sous le niveau de référence de la surface de la mer.

$$||\bar{\mathbf{u}}||_{\text{RMC}} = 0.18 \text{ m s}^{-1}. \quad (4)$$

La Figure 3 confirme que, en gros, $|\hat{\mathbf{u}}|$ ne dépasse guère un dixième de $|\bar{\mathbf{u}}|$ et montre que, de façon étonnante, une relation linéaire semble exister entre $|\hat{\mathbf{u}}|$ et $|\bar{\mathbf{u}}|$.

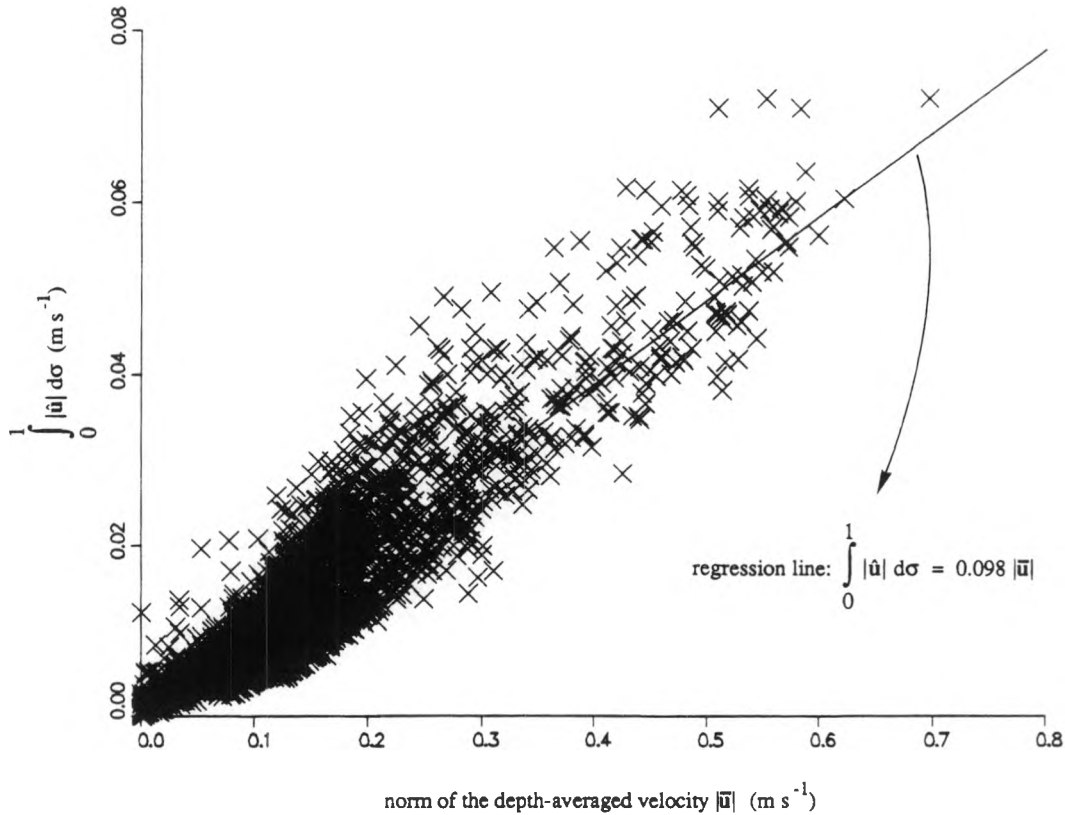


Figure 3. Scatérogramme montrant, pour chaque verticale “mouillée”, une mesure de $\hat{\mathbf{u}}$ en fonction de $|\bar{\mathbf{u}}|$. La meilleure approximation, au sens des moindres carrés, du nuage de points est fournie par la droite de régression représentée ci-dessus.

On évalue l'orientation de la vitesse par rapport à la vitesse moyenne à l'aide de l'angle ξ , qui est positif quand $\mathbf{u}$ est “à gauche” de $\bar{\mathbf{u}}$ (Figure 4). Bien entendu, sur toute verticale, ξ doit changer de signe au moins une fois. Sur chaque verticale, nous définissons le *veering* Ξ comme suit:

$$\Xi = \xi_{\max} - \xi_{\min} \quad (5a)$$

si l'altitude du point où ξ atteint son maximum est inférieure à celle du point où ξ est minimum; dans le cas contraire, on écrit

$$\Xi = -(\xi_{\max} - \xi_{\min}). \quad (5b)$$

On a

$$\frac{\sum \Xi}{n_{2D}} = 12.0^\circ. \quad (6)$$

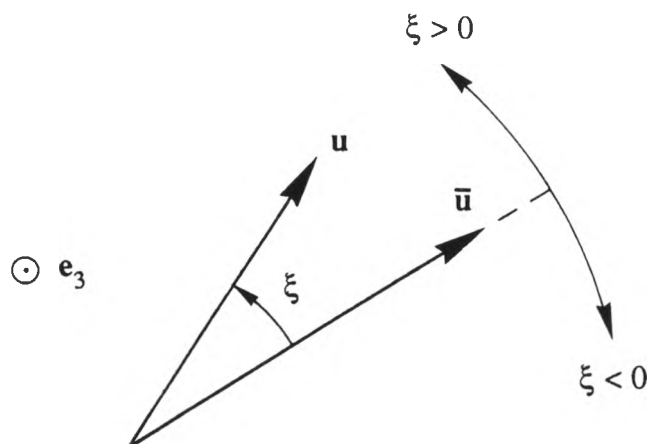


Figure 4. Mesure de la direction de la vitesse horizontale par rapport à la vitesse moyenne.

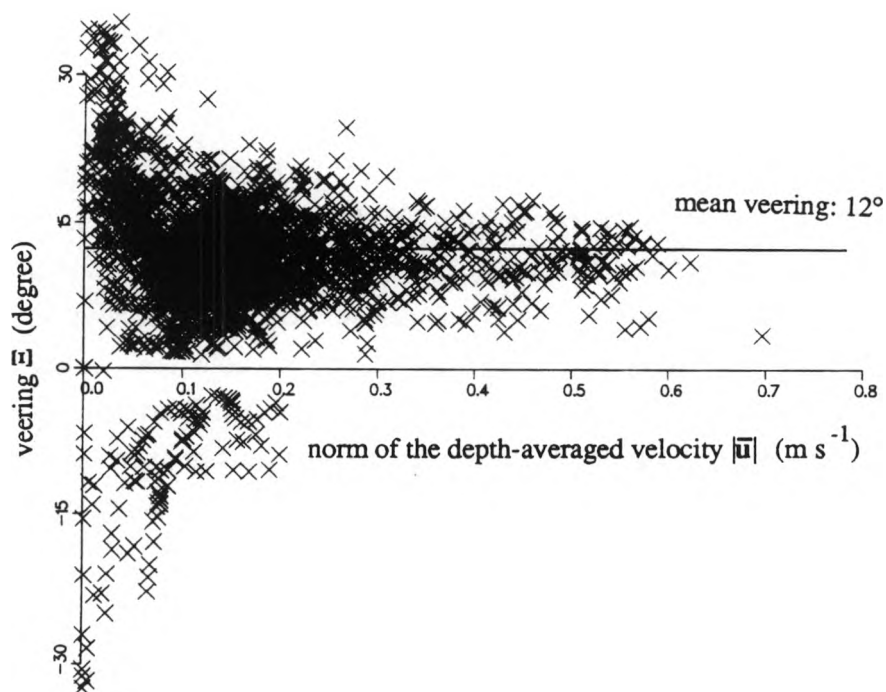


Figure 5. Scattérogramme montrant, pour chaque verticale, le *veering* Ξ en fonction de $|\bar{\mathbf{u}}|$.

Le *veering* est positif en 2,556 verticales sur un total de 2,690. Donc, pour 95% des verticales du domaine de calcul, le signe du *veering* correspond à celui de la spirale d'Ekman de fond (PEDLOSKY, 1982). D'autre part, comme le montre la Figure 5, le *veering* varie d'autant moins autour de la moyenne que la vitesse horizontale augmente.

Résumons-nous. Sauf dans la couche limite logarithmique — non *résolue* par le modèle —, la vitesse varie peu par rapport à la vitesse moyenne. De plus, près du fond, $\mathbf{u}$ est généralement “à gauche” de $\bar{\mathbf{u}}$ et, à proximité de la surface, $\mathbf{u}$ est plutôt “à droite” de $\bar{\mathbf{u}}$. Le *veering* est généralement limité à une dizaine de degrés. Par conséquent, la représentation graphique de $\bar{\mathbf{u}}$ suffit à donner une bonne image du champ de vitesse horizontale.

3.3 Comparaison avec les mesures

Durant l'été des années 1985 et 1986, des courantomètres ont été mouillés dans le domaine d'intérêt. La moyenne des vitesses enregistrées correspond à la circulation générale estivale. Pour comparer ces moyennes aux prédictions du modèle, on a simplement multiplié les vitesses du modèle par un facteur d'échelle ramenant le débit de 1.8 Sv à 1.28 Sv pour 1985 et 1.08 Sv pour 1986 (WALSH *et al.*, 1989b). Les Tables 1 et 2 donnent tous les détails nécessaires.

L'évaluation de l'erreur relative entre les prédictions du modèle et les mesures — donnée dans la dernière colonne des tableaux — suggère que la qualité de la simulation est assez moyenne. Cependant, il faut réaliser que l'expression mathématique de cette erreur relative met en lumière sans aucune indulgence les différences entre les vitesses mesurées et les vitesses calculées. Une simple inspection des Figures 6 et 7 amène à relativiser l'impression défavorable qui pourrait résulter de la lecture des Tables 1 et 2.

Dans le Bassin de Chirikov, ainsi que dans les Détroits d'Anadyr et de Bering, le modèle reproduit assez fidèlement la réalité.

Il ne faut pas tenter de comparer les *veerings* observés et les *veerings* calculés là où deux courantomètres ont été installés sur une même verticale. En effet, les prédictions du modèle, tout comme les mesures, suggèrent que le *veering* est limité à une dizaine, voire une vingtaine, de degrés. Or, l'erreur expérimentale sur l'évaluation de la direction de la vitesse est du même ordre de grandeur. De surcroît, la déviation de vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ calculée ne correspond pas strictement à la circulation générale mais plutôt à un cas typique. En théorie, on ne peut donc pas comparer la déviation de vitesse du modèle avec les observations. Remarquons enfin que la plupart des courantomètres ont été mouillés à une profondeur d'au moins 20 mètres, en principe sous la pycnocline et donc à l'abri de l'influence directe du vent. Ceci est évidemment très favorable pour la comparaison que nous menons ici.

Dans le Détroit de Shpanberg, à proximité de l'Ile St. Laurent, l'accord entre le modèle et les observations est plutôt mauvais. Deux raisons — qui ne s'excluent pas mutuellement — peuvent être avancées.

Premièrement, si la direction de la circulation prédite par le modèle au sud de l'Ile St. Laurent est effectivement fautive, alors il n'est pas étonnant que les prédictions du modèle soient de piètre qualité dans la moitié ouest du Détroit de Shpanberg.

mooring	depth (m)	latitude N	longitude W	$u_{1,meas}$ (cm/s)	$u_{2,meas}$ (cm/s)	u_1 (cm/s)	u_2 (cm/s)	$ u - u_{meas} / u_{meas} $
ISH-1	16.0	62.21	166.94	10.9	6.2	11.5	6.5	0.05
ISH-2	24.0	62.73	168.37	7.1	- 2.6	8.3	4.1	0.89
ISH-3	25.0	62.83	168.66	15.7	- 3.9	8.6	1.3	0.55
ISH-4/1	16.5	62.90	168.91	- 3.5	- 11.2	10.0	- 2.4	1.37
ISH-4/2	24.5	62.90	168.91	- 2.8	- 12.0	9.2	0.2	1.39
ISH-5	18.0	63.78	171.94	15.0	- 7.3	20.2	- 8.8	0.32
ISH-6	40.0	63.92	172.08	33.6	- 4.6	27.9	- 11.6	0.26
ISH-7/1	22.5	64.09	172.25	33.6	- 10.8	34.1	- 25.9	0.43
ISH-7/2	30.5	64.09	172.25	33.1	- 16.5	30.9	- 22.1	0.16
ISH-8	26.0	64.62	170.90	16.7	- 5.9	17.8	- 5.1	0.08
ISH-9	27.5	64.35	168.65	11.0	3.7	11.0	8.2	0.39
ISH-10/1	24.0	65.62	168.91	23.0	24.7	34.0	19.0	0.37
ISH-10/2	32.0	65.62	168.91	18.3	23.3	33.0	18.7	0.52

Table 1. Comparaison entre les vitesses moyennes estivales mesur es (u_{meas}) en 1985 et les vitesses fournies par le modèle tridimensionnel (u). Les données sont reprises de TRIPP (1985).

mooring	depth (m)	latitude N	longitude W	$u_{1,meas}$ (cm/s)	$u_{2,meas}$ (cm/s)	u_1 (cm/s)	u_2 (cm/s)	$ u - u_{meas} / u_{meas} $
ISH-3/1	21.0	62.83	168.66	12.1	- 3.5	7.1	0.7	0.52
ISH-3/2	32.0	62.83	168.66	17.8	- 3.8	6.4	1.7	0.70
ISH-7/1	20.0	64.00	172.17	23.7	- 11.5	26.5	- 15.2	0.18
ISH-7/2	44.0	64.00	172.17	26.1	- 5.3	23.4	- 12.5	0.29
ISH-8	20.0	64.63	170.90	13.4	- 7.2	15.5	- 5.3	0.19
ISH-10/1	19.0	65.60	168.90	17.4	20.7	22.4	18.8	0.20
ISH-10/2	40.0	65.60	168.90	14.3	24.3	19.3	17.2	0.31
ISH-12	20.0	64.20	167.83	10.2	17.4	6.5	11.6	0.34
ISH-13/1	19.0	65.15	169.67	8.8	4.0	10.2	6.3	0.28
ISH-13/2	36.0	65.15	169.67	8.6	5.2	9.1	6.3	0.13
ISH-14	20.0	66.75	168.92	29.3	15.5	18.6	10.4	0.36
ISH-15	25.0	67.61	167.87	14.0	- 4.8	7.2	- 1.2	0.52
ISH-16	27.0	65.15	168.47	18.3	17.4	10.9	18.3	0.29

Table 2. Comparaison entre les vitesses moyennes estivales mesurées (u_{meas}) en 1986 et les vitesses fournies par le modèle tridimensionnel (u). Les données sont reprises de TRIPP (1986).

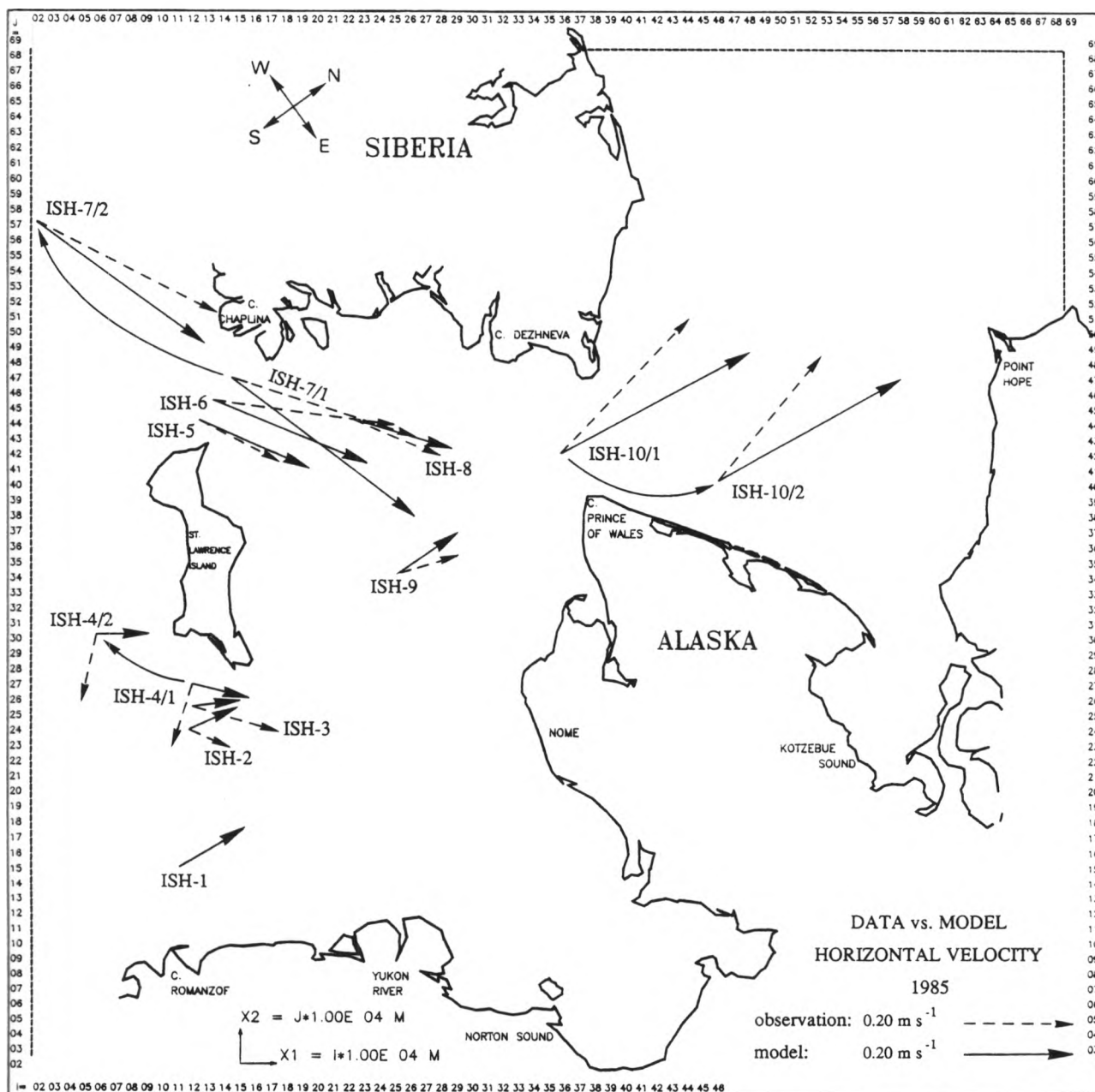


Figure 6. Comparaison entre les vitesses moyennes estivales mesurées en 1985 et les vitesses prédites par le modèle tridimensionnel.

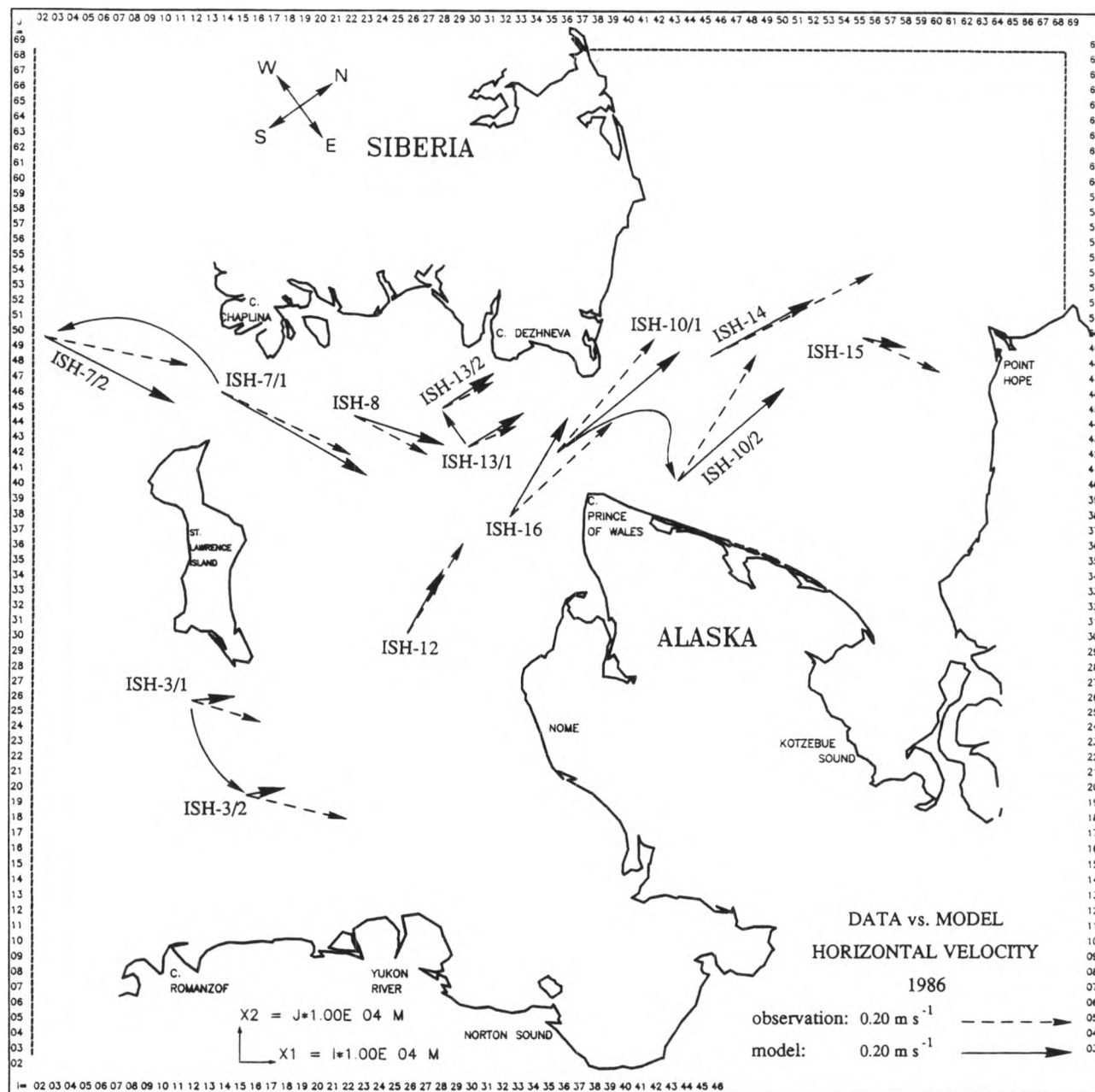


Figure 7. Comparaison entre les vitesses moyennes estivales mesurées en 1986 et les vitesses prédites par le modèle tridimensionnel.

Deuxièmement, c'est dans le Déroit de Shpanberg que l'influence de la marée est proportionnellement la plus importante (AAGAARD *et al.*, 1985; COACHMAN, 1986): il se peut que le courant résiduel eulérien de marée, non représenté par le modèle, ait une amplitude très significative, diminuant ainsi le réalisme des courants calculés par notre modèle — mais aussi par les autres modèles de circulation générale. D'autre part, au vu des enregistrements de 1985 des courantomètres ISH-2 et ISH-3, on ne peut manquer d'émettre de sérieuses réserves quant à la validité des mesures de ISH-4/1 et ISH-4/2 (Figure 6).

Seuls deux courantomètres ont été installés dans la Mer de Chukchi (Figure 7). En ces deux stations, il existe un remarquable accord entre la direction du courant modélisé et celle du courant mesuré. Néanmoins, les normes des vitesses diffèrent fortement. Si le courant est approximativement géostrophique, la direction de la vitesse est fixée, en première approximation, par les isobathes — voir (IV.8). Mais la norme de la vitesse dépend alors des conditions existant en amont de l'écoulement. Il semble que le modèle sous-estime la quantité d'eau se dirigeant, dans la Mer de Chukchi, vers Point Hope. Puisque le débit dans le Déroit de Bering est correct, il s'ensuit que le modèle surestime le flux d'eau longeant, en direction de l'ouest, la côte nord de la Sibérie — à partir du Cap Dezhneva. Si, comme le pensent WALSH *et al.* (1989a,b), un gyre existe bien dans cette région, la majorité de l'eau sortant du Déroit de Bering ne pourrait longer la côte sibérienne et devrait se diriger principalement vers le nord. Ceci expliquerait pourquoi le modèle sous-estime nettement la norme de la vitesse aux stations ISH-14 et ISH-15 de 1986. Les conditions aux limites imposées en Mer de Chukchi empêchent la formation d'un gyre. Cependant, si ce dernier existe vraiment, il est très probable qu'il se situe principalement en dehors de la zone d'intérêt de ISHTAR.

Quoi qu'il en soit, on peut affirmer que le modèle reproduit de façon très satisfaisante la circulation générale horizontale.

La littérature océanographique regorge d'études où l'accord entre modèle et observations s'avère bien plus médiocre qu'ici. En d'autres termes, si l'ordre de grandeur de l'erreur relative des prédictions de notre modèle pourrait sembler inacceptable à un aérodynamicien, un océanographe ne peut que juger positivement, ou même très positivement, la qualité de nos calculs.

3.4 Vitesse géostrophique

La petitesse du nombre de Rossby suggère que les équations de quantité de mouvement doivent être dominées par l'équilibre géostrophique. On va tester cette hypothèse.

L'équilibre géostrophique résulte de l'égalité de l'accélération de Coriolis et de la force de pression horizontale:

$$f \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u} = -\nabla_h q = -g \nabla_h \eta + \nabla_h \int_{\sigma}^1 H b d\sigma. \quad (7)$$

On décompose, arbitrairement, la vitesse horizontale solution de (7) en "vent géostrophique",

$$\mathbf{u}_g = \frac{g}{f} \mathbf{e}_3 \times \nabla_h \eta, \quad (8)$$

et “vent thermique”,

$$\mathbf{u}_{th} = - \mathbf{e}_3 \times \nabla_h \int_{\sigma}^1 H b d\sigma . \quad (9)$$

Bien entendu, $\mathbf{u}_g$ ne dépend pas de x_3 alors que $|\mathbf{u}_{th}|$ est nul à la surface et peut être maximum au fond.

A partir du champ d'élévation de la surface de la mer (Figure 8), on obtient la vitesse géostrophique $\mathbf{u}_g$ (Figure 9), qui semble très proche de la vitesse moyenne. En effet,

$$\frac{\|\mathbf{u}_g - \bar{\mathbf{u}}\|_{RMC}}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_{RMC}} = 0.15 , \quad (10)$$

c'est-à-dire que $\mathbf{u}_g$ “rend compte de 85% de la vitesse moyenne horizontale”.

La grille C ne se prête pas au calcul de la vitesse géostrophique dans les mailles adjacentes à une frontière latérale: on ne calcule $\mathbf{u}_g$ qu'au centre des n_{2D} mailles dont tous les interfaces sont “mouillés” (Figure 9).

Pourrait-on se contenter de la vitesse géostrophique? Pourrait-on ramener les équations du modèle à (IV.6) et (IV.7)? La réponse est négative. La vitesse géostrophique ne dépend pas de la coordonnée verticale. Donc cette vitesse ne permet pas de modéliser la structure verticale de l'écoulement. Par exemple, aucune vitesse verticale ne lui est associée. De plus, (IV.8) montre qu'un champ de vitesse strictement géostrophique doit être parallèle aux isobathes, ce qui est approximativement vérifié dans une bonne partie du domaine (Figure V.3, Figures 1 et 2). Néanmoins, comme l'indique la carte bathymétrique (Figure V.2), un flux d'eau qui suit les isobathes ne pourrait pas traverser les Détroit d'Anadyr et de Bering. Donc, au moins dans ces détroits, la vitesse horizontale doit comprendre une composante agéostrophique très significative (Figure 10). Ainsi, même si la vitesse géostrophique est globalement proche de la vitesse moyenne, il ne peut être question de négliger les effets agéostrophiques.

Dans cette simulation, le vent thermique ne dépasse pas, globalement, 4% de la vitesse moyenne. On n'a pas tenu compte de l'influence du Yukon, afin de simplifier les conditions initiales et les conditions aux limites. Par conséquent, à proximité de l'Alaska, les gradients de salinité (Figure 11), et donc de poussée, sont trop petits, ce qui conduit à une sous-estimation de la vitesse thermique. Cependant, dans la réalité, on peut penser que, sauf au voisinage de fronts — associés au Yukon, à des upwellings, à de fortes variations du mélange vertical, ... —, la vitesse thermique reste assez peu significative, principalement parce que la profondeur du domaine d'intérêt est faible. Par contre, dans une mer profonde de plusieurs kilomètres, le vent thermique représente généralement une bonne partie, voire la quasi totalité, de la vitesse horizontale.

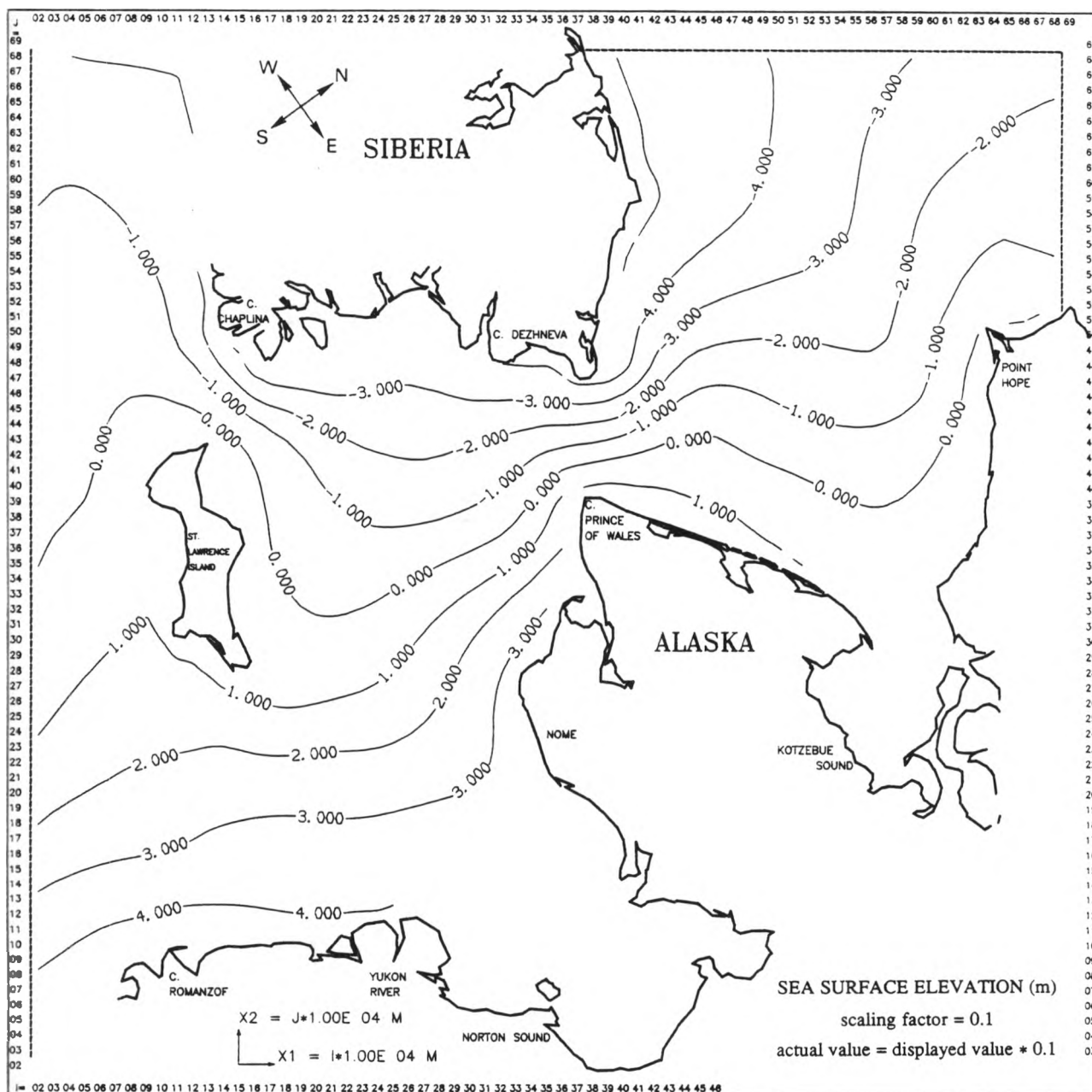


Figure 8. Elevation de la surface de la mer — estimée en décimètres. L'élévation est positive quand la surface est plus haute que le niveau de référence.

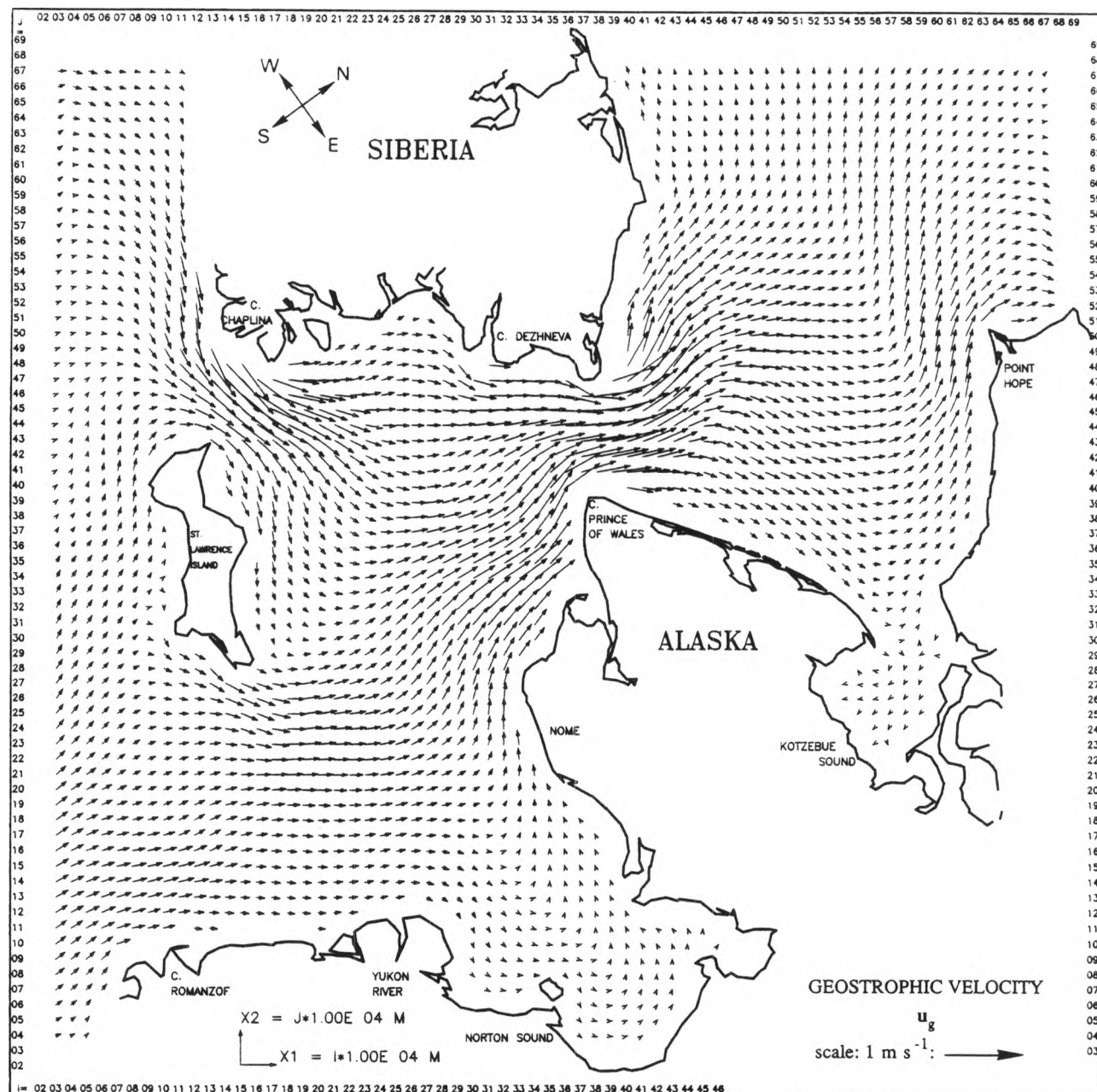


Figure 9. Vitesse géostrophique u_g .

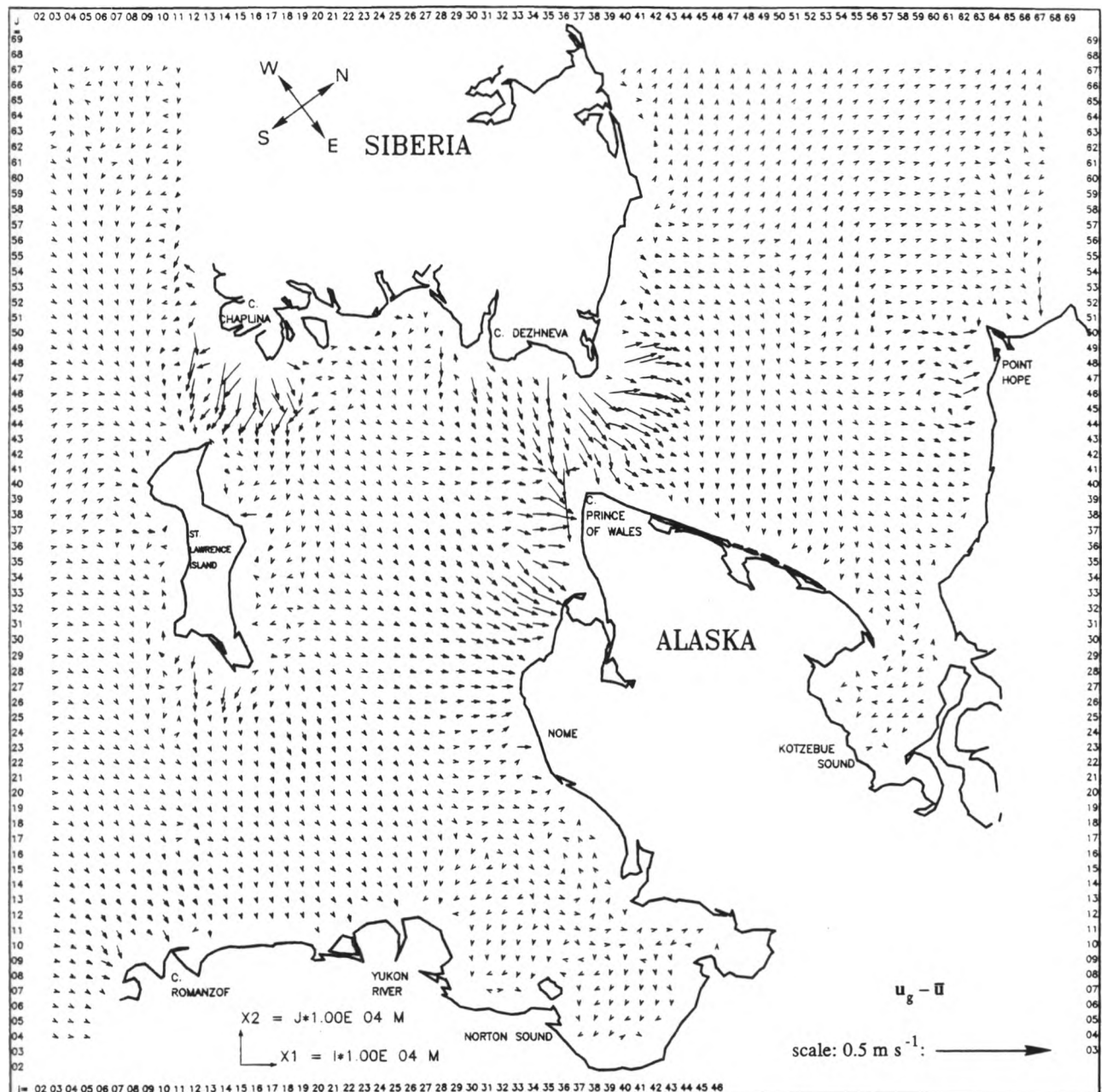


Figure 10. Ecart de la vitesse géostrophique par rapport à la vitesse moyenne $u_g - \bar{u}$.

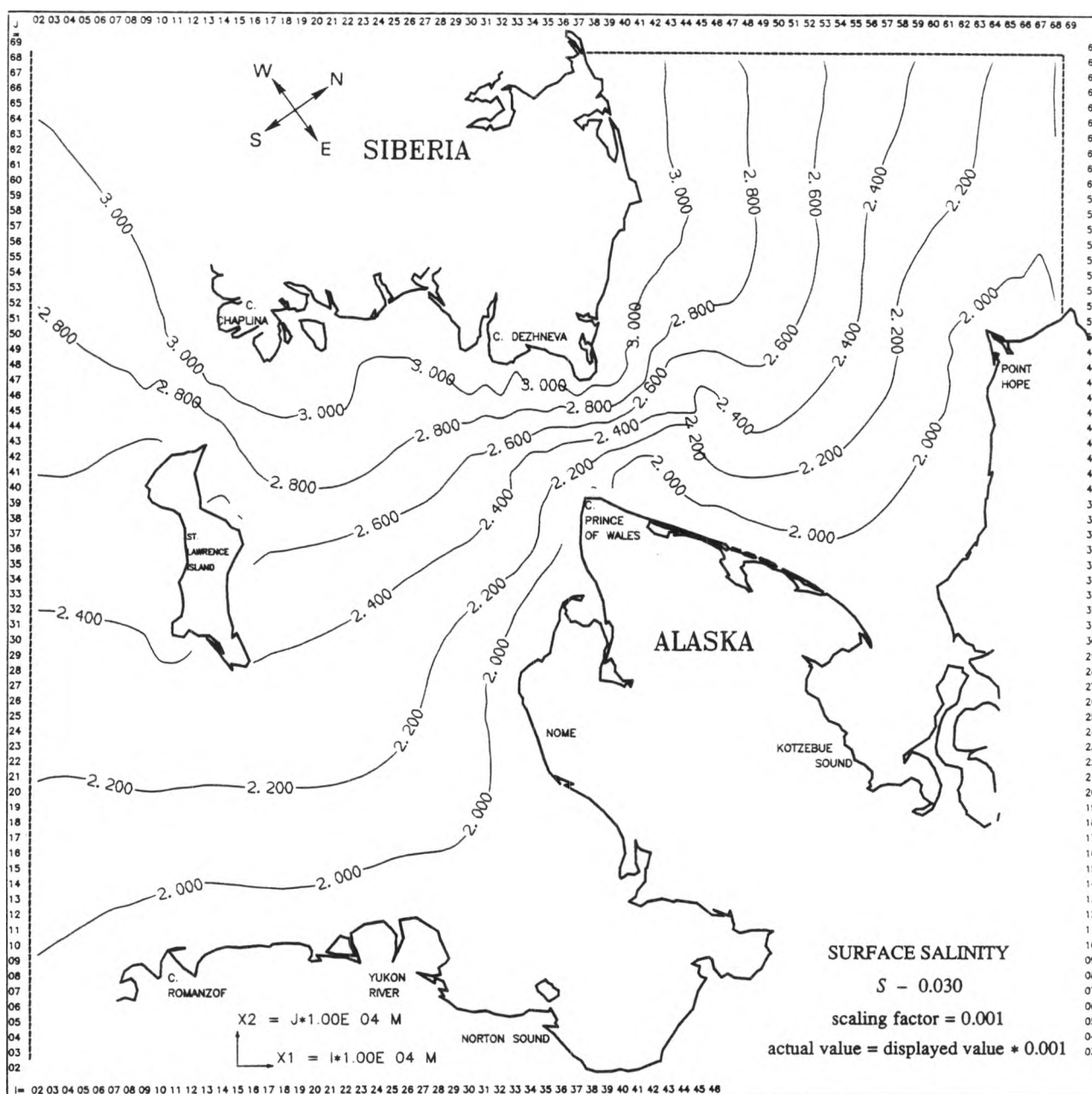


Figure 11. Salinité dans la maille de surface. Les iso-lignes représentent $S - 0.030$ exprimée en millièmes.

3.5 Vitesse d'Ekman

On vient de le voir, la vitesse géostrophique est très proche de la vitesse moyenne alors que le vent thermique est sans doute globalement négligeable. Mais, est-il possible de trouver une équation de quantité de mouvement qui, tout en restant très simplifiée, rend encore mieux compte de la dynamique de notre écoulement? Essayons l'équation d'Ekman

$$f \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u} = -g \nabla_h \eta + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu_T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right). \quad (11)$$

Afin de simplifier l'analyse, on l'intègre sur la profondeur de la colonne d'eau:

$$f \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{u}} = -g \nabla_h \eta - \frac{\tau^b}{H}. \quad (12)$$

Appelons "vitesse d'Ekman", $\mathbf{u}_e$, la vitesse vérifiant la relation (12), c'est-à-dire

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_g + \frac{1}{fH} \mathbf{e}_3 \times \tau^b. \quad (13)$$

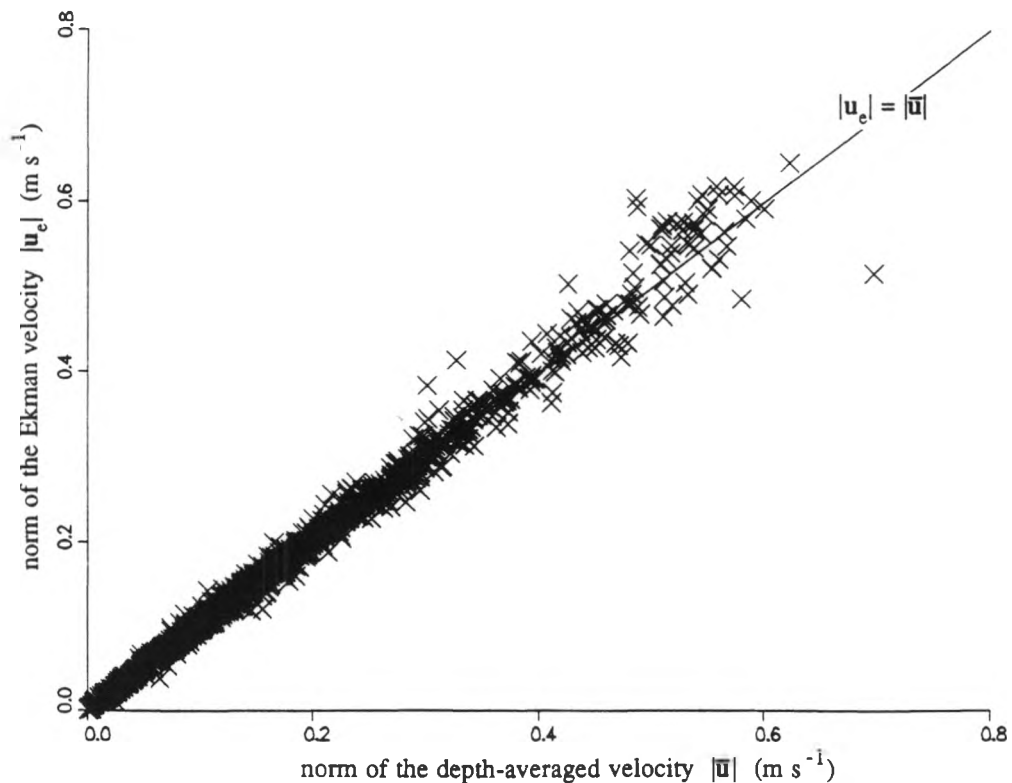


Figure 12. Scatérogramme montrant, en chaque verticale "mouillée" non adjacente à une frontière latérale, $|u_e|$ en fonction de $|\bar{u}|$.

On vient de calculer la vitesse géostrophique. La tension de fond est fournie par le modèle tridimensionnel. On peut donc évaluer $\mathbf{u}_e$. On montre alors que

$$\frac{\|\mathbf{u}_e - \bar{\mathbf{u}}\|_{\text{RMC}}}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\text{RMC}}} = 0.09 . \quad (14)$$

Ainsi, la vitesse d'Ekman "explique 91% de la vitesse moyenne", au lieu de 85% pour la vitesse géostrophique. Les 9% restants sont dus au vent thermique, aux termes d'accélération et à la diffusion horizontale. La Figure 12 illustre l'excellent accord entre la vitesse d'Ekman et la vitesse moyenne.

La relation (13) présente un certain inconvénient: faisant appel à la tension de fond du modèle 3D, elle ne permet pas d'aller plus avant dans l'explication de la dynamique de l'écoulement. Pour remédier à ce problème, on introduit la paramétrisation de la tension de fond classiquement utilisée dans les modèles bidimensionnels (NIHOUL, 1982), à savoir

$$\tau^b = C_{D,2D} |\bar{\mathbf{u}}| \bar{\mathbf{u}} . \quad (15)$$

Utilisant les résultats du modèle, on estime le coefficient de friction $C_{D,2D}$ au sens des moindres carrés:

$$C_{D,2D} = \frac{\sum_{2D} |\tau^b| |\bar{\mathbf{u}}|^2}{\sum_{2D} |\bar{\mathbf{u}}|^4} = 1.75 \times 10^{-3} . \quad (16)$$

La tension de fond estimée à l'aide de (15)-(16) conduit à une vitesse d'Ekman $\mathbf{u}_{e,2D}$ qui diffère très peu de $\mathbf{u}_e$. En effet,

$$\frac{\|\mathbf{u}_{e,2D} - \mathbf{u}_e\|_{\text{RMC}}}{\|\mathbf{u}_e\|_{\text{RMC}}} = 0.02 . \quad (17)$$

En commettant une erreur limitée, on peut donc remplacer (12) par

$$f \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{u}} = -g \nabla_h \eta - \frac{C_{D,2D}}{H} |\bar{\mathbf{u}}| \bar{\mathbf{u}} . \quad (18)$$

On décompose le gradient d'élévation en deux contributions,

$$\nabla_h \eta = (\nabla_h \eta)_\perp + (\nabla_h \eta)_\parallel , \quad (19)$$

$(\nabla_h \eta)_\perp$ et $(\nabla_h \eta)_\parallel$ étant, respectivement, perpendiculaire et parallèle à la vitesse moyenne. Combinant (18) et (19), on trouve

$$(\nabla_h \eta)_\perp = -\frac{f}{g} \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{u}} , \quad (20)$$

$$(\nabla_h \eta)_{//} = - \frac{C_{D,2D}}{g H} |\bar{\mathbf{u}}| \bar{\mathbf{u}} . \quad (21)$$

Donc, dans la direction de l'écoulement, la tension de fond est responsable de la pente de la surface de la mer, tandis que, dans la direction perpendiculaire, c'est la force de Coriolis qui rend compte de la pente de la surface (Figure 13). On se persuade aisément que

$$\frac{|(\nabla_h \eta)_{//}|}{|(\nabla_h \eta)_{\perp}|} = \frac{C_{D,2D}}{f H} |\bar{\mathbf{u}}| \ll 1 \quad (22)$$

dans la quasi totalité du domaine de calcul.

L'égalité (21) est conforme à l'esprit de la théorie de STIGEBRANDT (1984), qui considère que la pente de la surface est équilibrée par la tension de fond, mais en ignorant la rotation de la Terre. Dans cette optique, on peut regarder (20) comme la "correction" tenant compte de la rotation de la Terre.

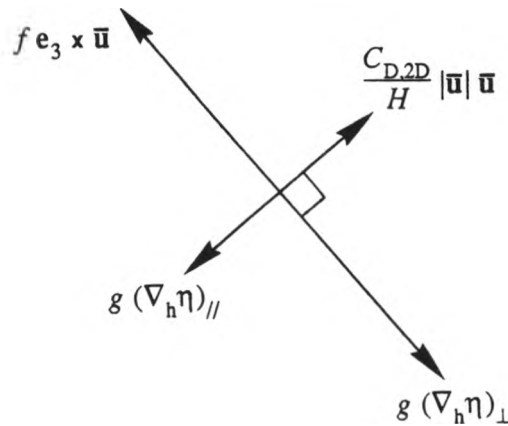


Figure 13. Equilibre des forces selon l'équation (18).

Si, dans le sens de l'écoulement, le domaine d'intérêt était aussi "long" que "large", alors l'inégalité (22) indiquerait clairement que l'hypothèse du "contrôle géostrophique" avancée par OVERLAND et ROACH (1987) ne se vérifie pas. Toutefois, le domaine d'intérêt est plus "long" que "large". Il faut donc nuancer le jugement. La Figure 8 montre que la différence de niveau de la surface entre la frontière "entrante" et la frontière "sortante" est de l'ordre de 0.35 m alors que la différence de niveau entre les deux extrémités de la frontière "entrante" ("sortante") vaut 0.60 m (0.50 m). Donc, pour toute la région étudiée, la différence de niveau dans le sens de l'écoulement est

significativement plus petite que la différence de niveau dans le transversal. Sur base de ces éléments, il semble cependant bien difficile de se prononcer sur la validité du "contrôle géostrophique".

Pour tester valablement l'hypothèse du "contrôle géostrophique", il ne faudrait pas se contenter d'examiner le champ d'élévation dans un seul cas — ni se borner à émettre des considérations théoriques du style de celles de l'Annexe II. Nous proposons plutôt d'effectuer une série de simulations destinées à déterminer si, dans un état stationnaire, le débit dans le Détroit de Bering est une fonction linéaire de la différence de niveau entre la frontière "entrante" et la frontière "sortante". Si c'est le cas, alors l'hypothèse du "contrôle géostrophique" s'en trouvera renforcée. Mais, nous n'y croyons guère. Nous pensons plutôt que le débit sera plus proche de la racine carrée de la différence de niveau longitudinale — comme le suggère (21). Il reste à le vérifier!

3.6 Mise à l'échelle de la déviation de vitesse

Si l'on admet que l'équation d'Ekman rend compte de façon satisfaisante de la dynamique de l'écoulement étudié, alors on peut comprendre pourquoi la déviation de vitesse est nettement plus petite que la vitesse moyenne.

Soustrayant (12) de (11), on obtient

$$f \mathbf{e}_3 \times \hat{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(v_T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_3} \right) + \frac{\tau^b}{H}. \quad (23)$$

Deux possibilités de mise à l'échelle s'offrent à nous. Considérons d'abord que la force de Coriolis et le terme de tension de fond sont du même ordre de grandeur. Utilisant la paramétrisation (15), on trouve

$$|\hat{\mathbf{u}}| \approx \frac{C_{D,2D}}{f H} |\bar{\mathbf{u}}|^2. \quad (24)$$

Avec $H \approx 40$ m,

$$|\hat{\mathbf{u}}| \approx 0.3 |\bar{\mathbf{u}}|^2. \quad (25)$$

D'un autre côté, on peut penser que les deux termes du second membre de (23) sont susceptibles de s'équilibrer. Conformément à (II.49), (III.99) et (15), on a

$$v_T \approx \frac{\kappa (C_{D,2D})^{1/2}}{4 \alpha_L} H |\bar{\mathbf{u}}|. \quad (26)$$

Comme dans les développements de la Section III.9, on évalue l'ordre de grandeur des dérivées verticales par

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \approx \frac{1}{\alpha_v H}. \quad (27)$$

On trouve

$$|\hat{u}| \approx \frac{4 \alpha_L \alpha_v^2 (C_{D,2D})^{1/2}}{\kappa} |\bar{u}|. \quad (28)$$

Comme précédemment, on prend $\alpha_L = 0.7$ et $\alpha_v = 0.5$. On aboutit finalement à

$$|\hat{u}| \approx 0.07 |\bar{u}|. \quad (29)$$

La Figure 3, issue des résultats du modèle, suggérait

$$|\hat{u}| \approx 0.1 |\bar{u}|. \quad (30)$$

Comme l'indique la Figure 14, les estimations (25), (29) et (30) ne sont pas très éloignées les unes des autres, surtout pour $|\bar{u}| \lesssim 0.5 \text{ m s}^{-1}$.

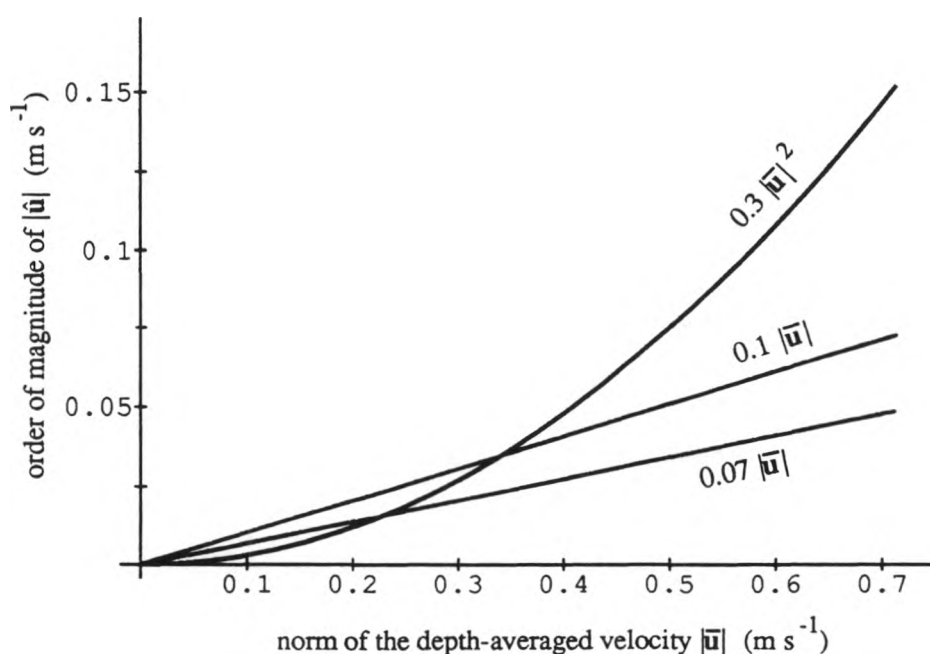


Figure 14. Illustration de différentes estimations de l'ordre de grandeur de la déviation de vitesse $\hat{u}$ en fonction de la norme de la vitesse moyenne.

3.7 Tension de fond

La Figure 15 montre la vitesse de friction de fond, $u_*^b = |\tau^b|^{1/2}$.

La nature des sédiments présents au fond de la mer est liée à l'intensité de la tension de fond: plus u_*^b est grande, plus gros sont les sédiments, les particules les plus légères étant emportées par le courant sous l'action de la tension de fond. En quelque sorte, $(u_*^b)^3$ mesure la "puissance érosive" du

courant. Il semble que la nature des sédiments observés par GREBMEIER (1987) (Figure 16) puisse être mise en relation avec la tension de fond prédite par le modèle (NIHOUL *et al.*, 1991).

A l'exception de la région des *sounds*, la vitesse de friction dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR est comprise entre les bornes suivantes:

$$0.8 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} \lesssim u_*^b \lesssim 2.8 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}. \quad (31)$$

D'où,

$$6 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \lesssim |\tau^b| \lesssim 8 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}. \quad (32)$$

Mais, on sait que le débit est sans doute surestimé. En multipliant ces bornes par $(2/3)^2$, on obtient probablement les valeurs limites correspondant aux débits de 1985 et 1986:

$$3 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \lesssim |\tau^b| \lesssim 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}. \quad (33)$$

D'autre part, au cours des périodes estivales couvertes par la Table IV.1, la moyenne mensuelle de la tension de vent n'a pas dépassé $3.9 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, sauf pendant le mois d'août 1986 et durant tous les mois de septembre — la valeur maximale étant de $11.2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Ainsi, la plupart du temps, la tension de vent peut, tout au plus, atteindre l'ordre de grandeur minimal de la tension de fond. Donc, dans une simulation très réaliste, il ne faudrait pas négliger τ^s , mais on ne peut s'attendre à voir ce forçage jouer un rôle important dans le domaine d'ISHTAR — puisque la tension de fond, qui est au moins aussi considérable, est dominée de très loin par la force de pression et l'accélération de Coriolis.

Pourtant, les mesures (COACHMAN *et al.*, 1975; AAGAARD *et al.*, 1985; COACHMAN et AAGAARD, 1988), ainsi que le modèle de SPAULDING *et al.* (1987), tendent à prouver que la tension de vent ne peut en aucun cas être négligée.

Comment réconcilier ces deux positions apparemment contradictoires? Il suffit de réécrire la paramétrisation (15) en fonction du transport $H \bar{u}$, c'est-à-dire

$$\tau^b = \frac{C_{D,2D}}{H^2} |H \bar{u}| H \bar{u}. \quad (34)$$

C'est le transport, et non la vitesse, qui conditionne le débit à travers une section verticale donnée. Le débit dans les détroits étant un des paramètres de base de notre étude, considérons le transport, dans l'expression (34), comme un vecteur constant. Dans ce cas, on voit que la tension de fond diminue très vite si la profondeur augmente. Or, les cartes bathymétriques (Figures I.1 et IV.1) indiquent clairement que, dans la région d'intérêt d'ISHTAR, la profondeur est minimale; partout ailleurs sur le plateau continental, la mer est plus profonde. Donc, la tension de fond atteint probablement son ordre de grandeur maximal dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR. Cette conclusion est renforcée par le fait que, au nord et au sud du domaine d'intérêt, la "largeur" de la mer augmente notablement, conduisant

vraisemblablement à une diminution de l'ordre de grandeur du transport — et donc de la tension de fond.

Ainsi, nous pensons que, localement, dans le domaine d'intérêt d'ISHTAR, le forçage du vent ne peut s'avérer déterminant, mais, sur tout le plateau continental, rien ne semble s'opposer à ce que le vent joue un rôle capital.

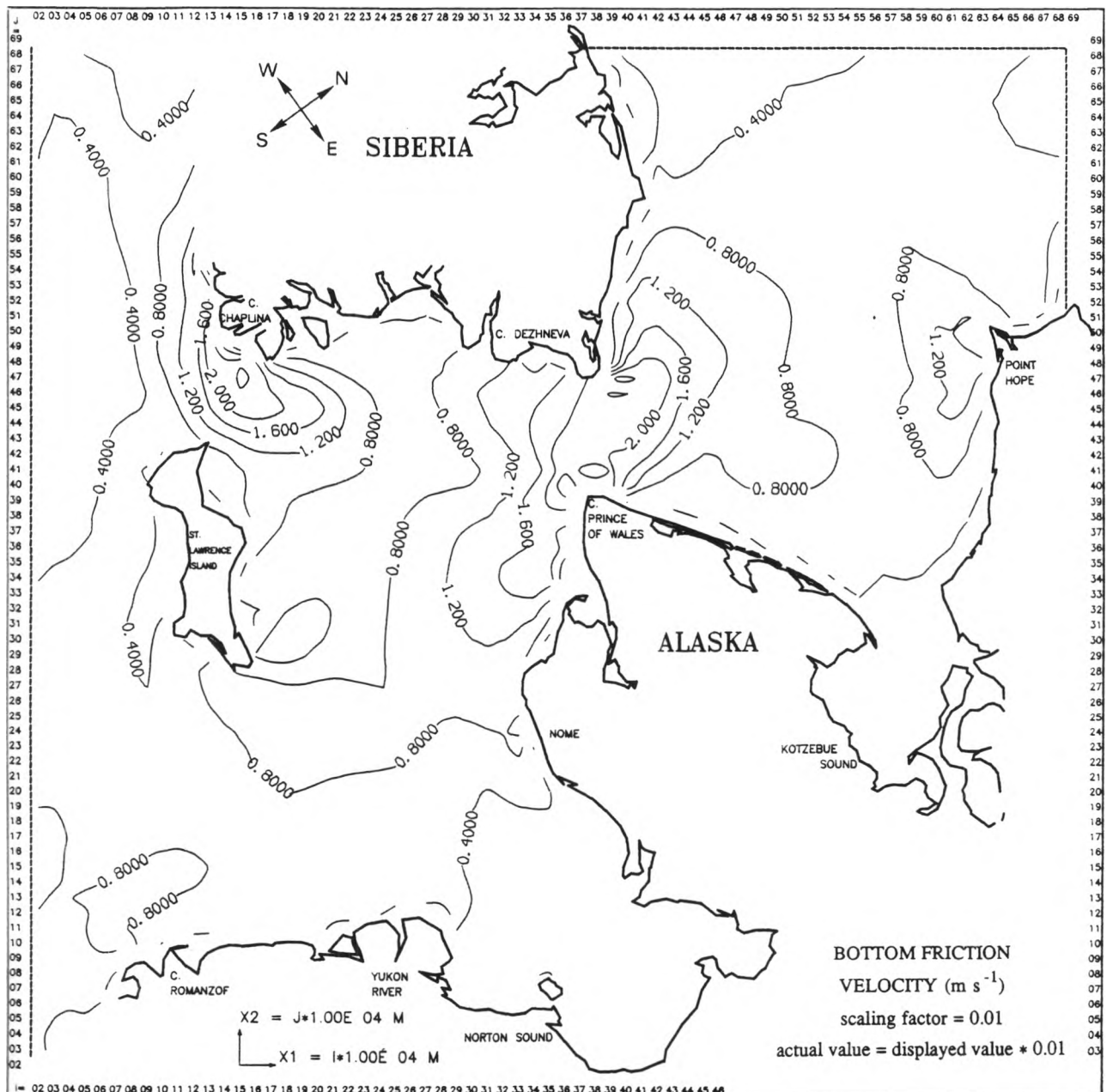


Figure 15. Vitesse de friction de fond μ_b^b .

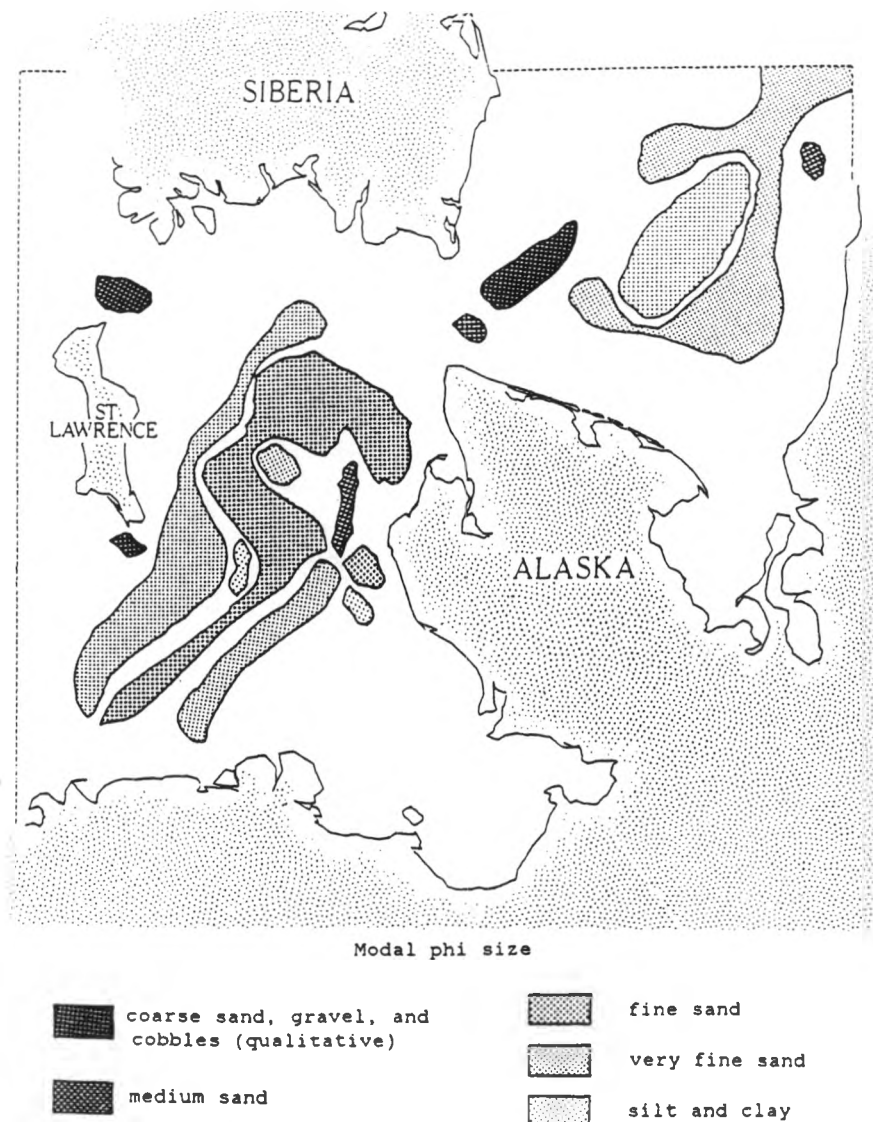


Figure 16. Nature des sédiments observés par GREBMEIER (1987) (d'après NIHOUL *et al.*, 1991).

4. Vitesse verticale

Dans le Chapitre III, on a suggéré de séparer la vitesse verticale en deux contributions: la vitesse d'upsloping, w_{US} , et la vitesse d'upwelling, w_{UW} . Considérer séparément ces deux composantes facilite grandement la visualisation et l'interprétation des résultats, parce que les profils verticaux typiques de w_{US} et w_{UW} sont totalement dissemblables et parce que ces deux vitesses verticales sont associées à des mécanismes complètement différents. L'étude de DELEERSNIJDER *et al.* (1991) montre clairement l'intérêt de cette démarche.

Commençons par l'analyse de la vitesse d'upsloping, w_{US} .

5. Vitesse d'upsloping

Une particule dont la vitesse est $\mathbf{u} + w_{US} \mathbf{e}_3$ reste à la même hauteur relative dans la colonne d'eau, c'est-à-dire que cette particule ne traverse pas de surface iso- σ . Si la vitesse horizontale était partout égale à sa moyenne $\bar{\mathbf{u}}$, la vitesse d'upsloping équivaldrait à la vitesse verticale de la "théorie des eaux peu profondes" (PEDLOSKY, 1982), w_{SW} , définie par

$$w_{SW} = \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} - \bar{\mathbf{u}} \cdot [(1 - \sigma) \nabla_h h - \sigma \nabla_h \eta] . \quad (35)$$

On peut donc voir w_{US} comme une généralisation de w_{SW} .

Comment visualiser le champ de vitesse d'upsloping? Et surtout, comment le mettre en rapport avec le champ de vitesse horizontale? On vient de montrer que la vitesse horizontale $\mathbf{u}$ ne différerait pas tellement de sa moyenne $\bar{\mathbf{u}}$. Par conséquent, on peut penser que w_{SW} constitue une bonne approximation de w_{US} .

Comme on le sait déjà, on peut considérer le champ d'élévation de la surface de la mer comme stationnaire. De plus, les Figures V.3 et 8 indiquent que $|\eta| \ll H$. En conséquence, on approche w_{SW} par $w_{US,S}$, que nous proposons d'appeler "vitesse d'upsloping simplifiée":

$$w_{US,S} = -(1 - \sigma) \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_h H . \quad (36)$$

Au cours de l'évaluation de la vitesse d'upsloping simplifiée, il importe de tenir correctement compte de l'imperméabilité des frontières solides latérales. Dans cette optique, on transforme (36) en

$$w_{US,S} = (1 - \sigma) H \nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}} , \quad (37)$$

que l'on obtient en utilisant le fait que la divergence horizontale du transport est nulle — pour un écoulement stationnaire.

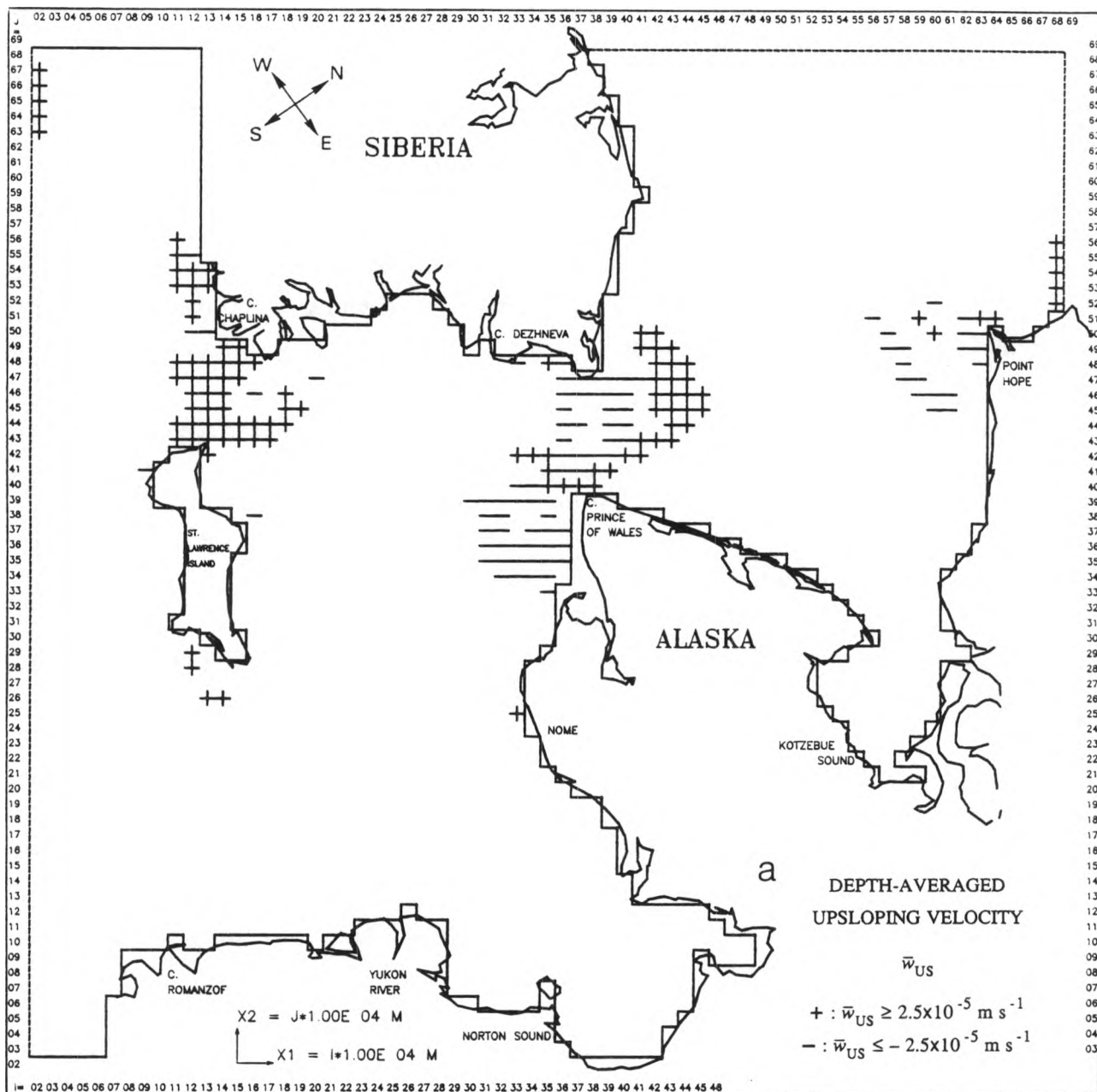
La formule (37) fournit une approximation acceptable de la vitesse d'upwelling car

$$\frac{|w_{US,S} - w_{US}|_{RMC}}{|w_{US}|_{RMC}} = 0.24 . \quad (38)$$

En d'autres termes, " $w_{US,S}$ explique 76% de w_{US} ".

D'après $w_{US,S}$, on peut affirmer que, en première approximation, la vitesse d'upsloping est nulle en surface et croît linéairement, en valeur absolue, jusqu'au maximum qui est atteint au fond de la mer — en dehors de la couche logarithmique, non *résolue* par le modèle. Les profils verticaux de w_{US} étant à peu près auto-semblables, une grandeur bidimensionnelle — dépendant uniquement des coordonnées horizontales — suffit donc à caractériser le champ de vitesse d'upsloping. On choisit (Figure 17):

$$\bar{w}_{US} = \int_0^1 w_{US} d\sigma . \quad (39)$$



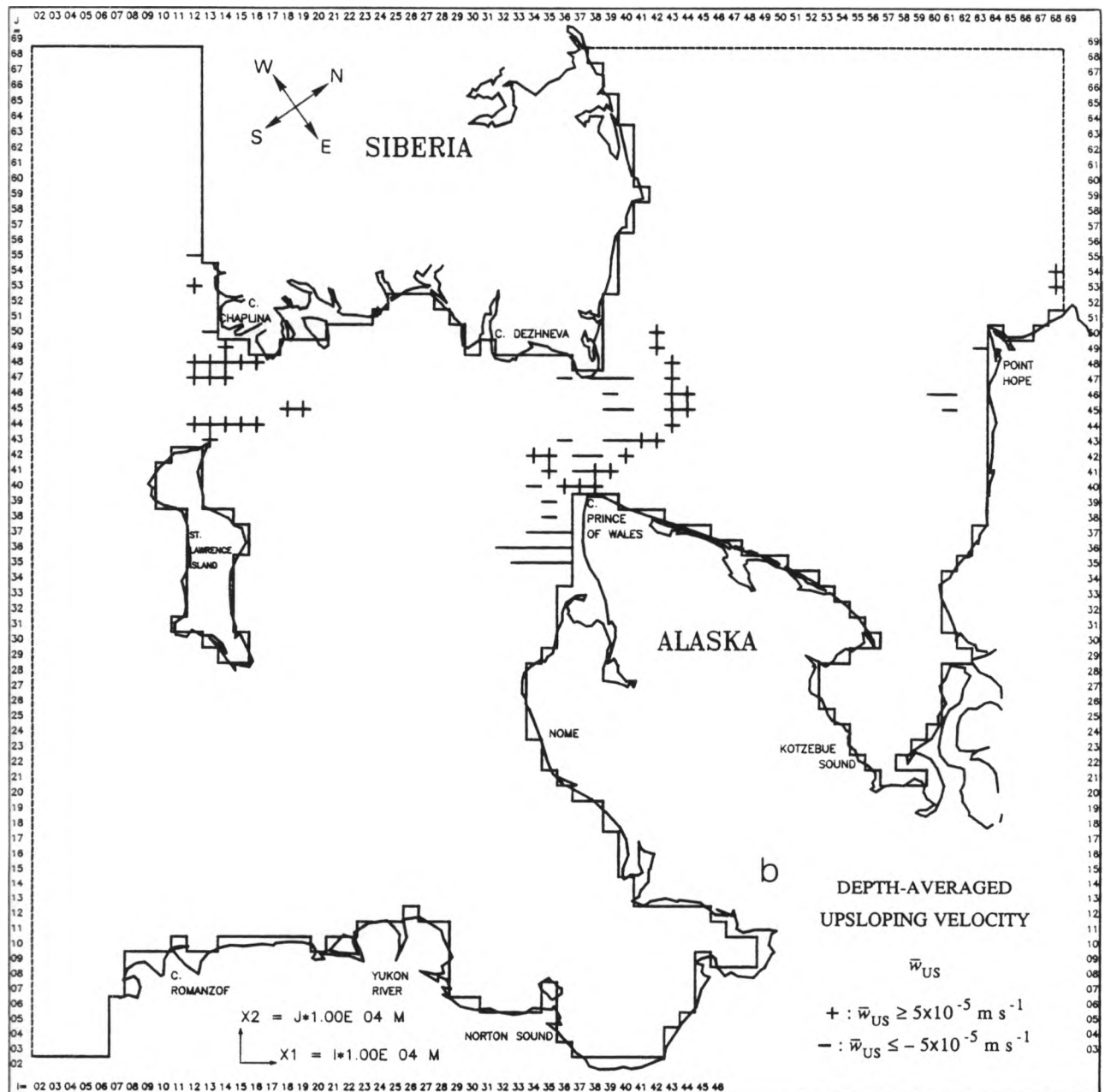


Figure 17 (a), (b). Vitesse moyenne d'upsloping représentée avec deux seuils d'exclusion différents.
Note: $5 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1} \approx 4.3 \text{ m jour}^{-1}$.

C'est dans la région des Détroit d'Anadyr et de Bering que $|\bar{w}_{US}|$ atteint son ordre de grandeur maximum (Figure 17). Or, c'est également dans ces zones que la vitesse horizontale moyenne, et probablement $\hat{u}$, sont les plus grandes. Par conséquent, dans ces régions, l'écart entre u et $\bar{u}$ est sans doute le plus important. C'est donc là que la qualité de l'approximation (36) est minimale, ce qui explique que l'accord entre w_{US} et $w_{US,S}$ n'est pas meilleur que ne l'indique (38).

Si la vitesse était strictement géostrophique, elle serait parallèle aux isobathes, ce qui impliquerait que $w_{US,S}$ soit nul. Il semble donc naturel que $|w_{US}|$ soit maximale là où la vitesse horizontale est "la moins géostrophique", à savoir dans les Détroits d'Anadyr et de Bering (Figure 10).

Notons finalement que représenter la valeur de w_{US} dans un plan de coupe horizontal ne constituerait pas une option de visualisation très judicieuse. Raisonnons sur base de la vitesse d'upsloping simplifiée. Dans un plan horizontal, la variation de $w_{US,S}$ est due à deux facteurs: $H \nabla_h \bullet \bar{u}$ et $(1 - \sigma)$. Donc, la représentation de w_{US} dans un plan horizontal ne permettrait pas de décider à quel facteur, $H \nabla_h \bullet \bar{u}$ ou $(1 - \sigma)$, attribuer la variabilité de la vitesse d'upsloping dans le plan de coupe choisi. Puisque le facteur $(1 - \sigma)$ est commun à tous les profils — au moins dans l'expression simplifiée —, on se concentre sur $H \nabla_h \bullet \bar{u}$ en montrant uniquement $\bar{w}_{US}$. Une alternative intéressante eut été de visualiser w_{US} dans une surface iso- σ .

6. Vitesse d'upwelling

La vitesse d'upwelling, w_{UW} , est la vitesse avec laquelle le fluide traverse les surfaces iso- σ . Cette vitesse est associée aux up- ou down-wellings effectifs. Elle vaut $(H/L)\tilde{w}$, $\tilde{w}$ étant la vitesse verticale dans l'espace σ .

6.1 Vitesse verticale dans l'espace σ

Dans l'espace σ , la vitesse verticale réelle ne joue aucun rôle. Seule $\tilde{w}$ apparaît dans les équations. On évalue $\tilde{w}$ au moyen d'une intégrale selon la direction verticale, équivalente à (III.21),

$$\tilde{w} = -\frac{L}{H} \int_0^\sigma \bar{\nabla}_h \bullet (H \hat{u}) d\sigma. \quad (40)$$

Ainsi, $\tilde{w}$ ne peut sans doute pas être vue comme une variable d'état à part entière. En effet, elle n'obéit pas à une équation d'évolution. Elle assure simplement la conservation locale de la masse.

On a

$$|\tilde{w}|_{RMC} = 0.03 \text{ m s}^{-1}, \quad (41)$$

c'est-à-dire que $\tilde{w}$ est du même ordre de grandeur que $|\hat{u}|$, comme on pouvait le pressentir en examinant (40). Donc, $\tilde{w}$ est globalement nettement plus petite que la vitesse horizontale. Comme la hauteur de l'espace transformé, L , est du même ordre de grandeur que la longueur caractéristique horizontale, $\tilde{w}$ ne semble pas pouvoir jouer un rôle appréciable dans l'advection d'une quantité

scalaire. En effet, en coordonnée σ , le rapport du terme d'advection verticale d'un scalaire y à celui d'advection horizontale vaut

$$\left| \frac{\frac{\partial(H \tilde{w} y)}{\partial \tilde{x}_3}}{\tilde{\nabla}_h \cdot (H \mathbf{u} y)} \right| \approx \left| \frac{\mathcal{L}_h}{L} \frac{\tilde{w}}{|\mathbf{u}|} \right| \approx \left| \frac{\tilde{w}}{|\mathbf{u}|} \right|. \quad (42)$$

Donc, d'après les estimations globales (3), (4) et (41), on peut conclure que l'advection verticale est partout négligeable par rapport à l'advection horizontale, sauf si la vitesse verticale est "concentrée" dans une ou plusieurs régions peu étendues par rapport à la surface de tout le domaine de calcul.

6.2 Bruit numérique (I)

Comme nous l'avons rappelé dans la Section III.6, aucune méthode numérique n'est capable de bien représenter l'évolution de phénomènes dont la longueur caractéristique est proche de la taille de la maille. Plus la qualité de la méthode numérique est grande, plus la plage de longueurs caractéristiques correspondant à des processus mal représentés — le "bruit numérique" — est étroite. Cependant, cette plage n'est jamais nulle. Toute méthode numérique produit donc du bruit numérique qu'il est indispensable de filtrer au mieux.

Malheureusement, la technique de calcul de la vitesse verticale — voir (40) — a pour effet de mettre en évidence le bruit numérique présent dans $H \hat{\mathbf{u}}$.

Supposons que $H \hat{\mathbf{u}}$ soit la somme de deux composantes:

$$H \hat{\mathbf{u}} = (H \hat{\mathbf{u}})_1 + (H \hat{\mathbf{u}})_2, \quad (43)$$

$(H \hat{\mathbf{u}})_2$ désignant le bruit numérique affectant $H \hat{\mathbf{u}}$. Il paraît normal d'imaginer que

$$|(H \hat{\mathbf{u}})_2| \ll |(H \hat{\mathbf{u}})_1|, \quad (44)$$

mais aussi que la longueur caractéristique horizontale de $(H \hat{\mathbf{u}})_2$, $\mathcal{L}_{h,2}$, est nettement inférieure à celle de $(H \hat{\mathbf{u}})_1$, $\mathcal{L}_{h,1}$. Ainsi, il est plausible, et pratique, de poser

$$\frac{|(H \hat{\mathbf{u}})_2|}{|(H \hat{\mathbf{u}})_1|} \approx \frac{\mathcal{L}_{h,2}}{\mathcal{L}_{h,1}} \ll 1. \quad (45)$$

La vitesse verticale s'écrit maintenant:

$$\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2, \quad (46)$$

avec

$$\tilde{w}_i = - \frac{L}{H} \int_0^\sigma \tilde{\nabla}_h \cdot (H \hat{\mathbf{u}})_i d\sigma, \quad (i = 1, 2). \quad (47)$$

Tenant compte de (45), (47) implique

$$|\tilde{w}_1| \approx |\tilde{w}_2|. \quad (48)$$

Donc, $\tilde{w}_2$, qui est censée représenter le bruit affectant $\tilde{w}_1$, peut fort bien atteindre l'ordre de grandeur que $\tilde{w}_1$, la partie "réaliste" de $\tilde{w}$.

Du point de vue numérique, la méthode de calcul de la vitesse verticale s'avère donc très mauvaise. Cependant, tous les modèles tridimensionnels marins opérant à la même échelle que le nôtre font appel à une équation du même type que (40) (LEENDERTSE et LIU, 1978; OWEN, 1980; WALEFFE, 1985; BACKHAUS *et al.*, 1987; BLUMBERG et MELLOR, 1987; LIU et LEENDERTSE, 1987; BECKERS, 1988 et 1991a). Idem pour les modèles météorologiques (STEPPELER, 1989). On doit évaluer la vitesse verticale à partir de l'équation de continuité dès lors que l'on applique l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique. C'est une fatalité!

Réduire au mieux le bruit numérique affectant $H \hat{u}$ est donc impératif. On devrait même tenter de filtrer le transport horizontal de telle sorte que le bruit induit dans la vitesse verticale soit réduit de manière optimale (DELEERSNIJDER et WOLANSKI, 1990). En tout cas, puisque la profondeur est un des facteurs de $H \hat{u}$, le filtrage de la bathymétrie, comme nous l'avons suggéré dans le Chapitre III, se justifie pleinement.

Tout laisse à penser que la vitesse verticale varie plus "vite" que la plupart des autres variables, comme la vitesse horizontale, par exemple. On évalue la variabilité de $\tilde{w}$ au moyen d'une longueur caractéristique horizontale globale (POWELL, 1989; DELEERSNIJDER et WOLANSKI, 1990):

$$\mathcal{L}_h(\tilde{w}) = \sqrt{2} \frac{\left| \tilde{w} - \frac{\sum \tilde{w}}{n_{3D}} \right|_{RMC}}{|\tilde{\nabla}_h \tilde{w}|_{RMC}} = 1.9 \times 10^4 \text{ m}. \quad (49)$$

Comme prévu, on trouve que l'échelle de longueur des composantes de la vitesse moyenne horizontale est plus longue:

$$\mathcal{L}_h(\bar{u}_1) = 3.6 \times 10^4 \text{ m} \quad (50)$$

et

$$\mathcal{L}_h(\bar{u}_2) = 4.1 \times 10^4 \text{ m}. \quad (51)$$

Que la vitesse verticale se caractérise par une plus grande variabilité que la vitesse horizontale tend évidemment à confirmer l'hypothèse, formulée plus haut, selon laquelle la vitesse verticale pourrait se concentrer dans quelques régions relativement peu étendues.

Néanmoins, une importante question se pose: la grande variabilité relative de la vitesse verticale n'indique-t-elle pas la présence trop importante de bruit numérique? Comme $\mathcal{L}_h(\tilde{w})$ est du même ordre de grandeur que la taille de la maille, on pourrait être tenté de conclure que le champ de vitesse

verticale contient une part très significative de bruit. Ce jugement doit toutefois être nuancé. En effet, il faut se souvenir que la longueur caractéristique doit être interprétée comme l'inverse d'un "nombre d'onde" (NIHOUL, 1982). Donc, une longueur caractéristique de 1.9×10^4 m correspond à une "longueur d'onde" d'environ 12×10^4 m, c'est-à-dire 6 fois la longueur d'onde du mode le plus court que peut représenter notre modèle — un mode dont la longueur d'onde vaut le double de l'incrément spatial. Par conséquent, on peut penser que le champ de vitesse verticale, s'il n'est pas exempt de bruit, a tout de même une signification physique non négligeable.

Notons que la principale faiblesse de l'analyse que nous venons de faire réside dans le fait qu'elle repose quasi exclusivement sur le calcul de la longueur caractéristique définie par la relation (49). Or, il existe d'autres expressions permettant d'évaluer une longueur caractéristique globale. Il serait sans doute souhaitable de disposer d'une technique d'analyse exempte d'ambiguïté. De plus, avoir la possibilité d'évaluer localement une échelle de longueur ne serait pas non plus à dédaigner.

De cette discussion, on peut tirer une conclusion de portée générale. Puisque le bruit numérique doit être bien contrôlé, il faut filtrer énergiquement les variables d'état, c'est-à-dire supprimer les phénomènes ayant une échelle de longueur proche de la taille de la maille — qui sont de toutes façons mal modélisés, quel que soit le schéma numérique. Mais, ce faisant, on risque de supprimer des composantes physiques à haute variabilité, qui pourraient être intéressantes. Pour minimiser ce problème, il faut imposer que la taille de la maille soit nettement plus petite que la plus grande longueur caractéristique de l'écoulement. De la sorte, des mouvements à relativement petite échelle peuvent se développer sans être trop affectés par la procédure de filtrage, qui ne doit concerner que des échelles encore plus petites. Mais, pour mettre en oeuvre un tel modèle, il faut de grands moyens informatiques — qui sont sans commune mesure avec ceux utilisés dans ce travail. Donc, plus fine est la grille, plus précis sont les résultats du modèle. C'est un truisme! Par contre, ce qui est moins évident, c'est le fait que c'est surtout la précision de la vitesse verticale qui requiert une maille de petite taille.

Cette discussion a un caractère essentiellement spéculatif, puisqu'on n'a pas analysé la sensibilité des résultats du modèle à la variation de la résolution spatiale. Nous pensons cependant pouvoir affirmer que, pour atteindre une même précision relative, un modèle tridimensionnel doit faire appel à une maille plus fine qu'un modèle bidimensionnel.

A propos de la finesse des mailles, nous proposons au lecteur de songer à l'exemple suivant. Supposons que l'on désire diviser par deux tous les incréments spatiaux d'un modèle numérique tridimensionnel. Cette opération exige la multiplication par 8 de la mémoire utilisée et la division par 2 du pas de temps — si l'on fait appel à des méthodes explicites —, ce qui conduit à l'augmentation du temps de calcul d'un facteur 16! Donc, penser que la solution de tous les problèmes numériques peut venir d'une augmentation de la résolution est une option hasardeuse, la capacité des ordinateurs étant limitée. En d'autres termes, il faut toujours utiliser le maillage le plus fin possible, mais cela ne suffit pas à garantir la qualité des résultats; il faut aussi veiller à employer des méthodes numériques performantes.

On peut pousser l'exemple plus loin. Supposons que l'on dispose d'un ordinateur équipé d'une mémoire centrale de capacité respectable, disons 64 méga-mots. Si l'on désire éviter les échanges

d'informations entre la mémoire centrale et les disques — échanges qui peuvent ralentir très nettement l'exécution des programmes —, un rapide calcul montre que nous ne pourrions diviser les incréments spatiaux de notre modèle par plus d'un facteur 4, ce qui n'autoriserait même pas une bonne résolution des instabilités agéostrophiques étudiées par NIHOUL (1986).

6.3 Visualisation des zones d'upwelling

La vitesse d'upwelling, w_{UW} , est nulle au fond et à la surface. Entre ces deux limites, elle a tendance à ne pas changer de signe. Désignons par $w_{UW,+}$ toute vitesse d'upwelling ayant le même signe, sur une verticale donnée, que la vitesse d'upwelling moyenne de la même verticale. On note $w_{US,-}$ la vitesse d'upwelling de signe opposé à celui de la vitesse d'upwelling moyenne. On a

$$\frac{|w_{US,-}|_{RMC}}{|w_{US,+}|_{RMC}} = 0.05. \quad (52)$$

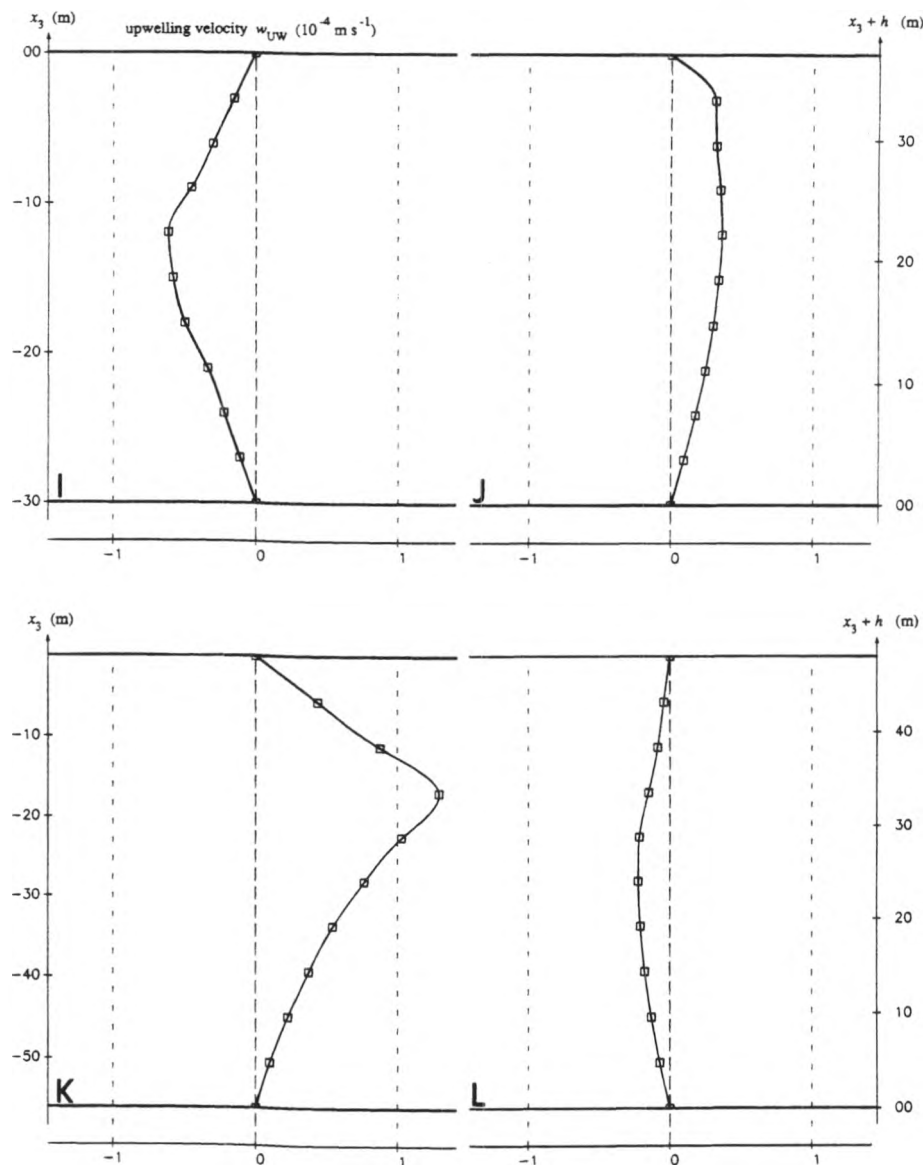


Figure 18. Quelques profils verticaux de vitesse d'upwelling. Les verticales d'où viennent ces profils sont localisées dans la Figure 19.

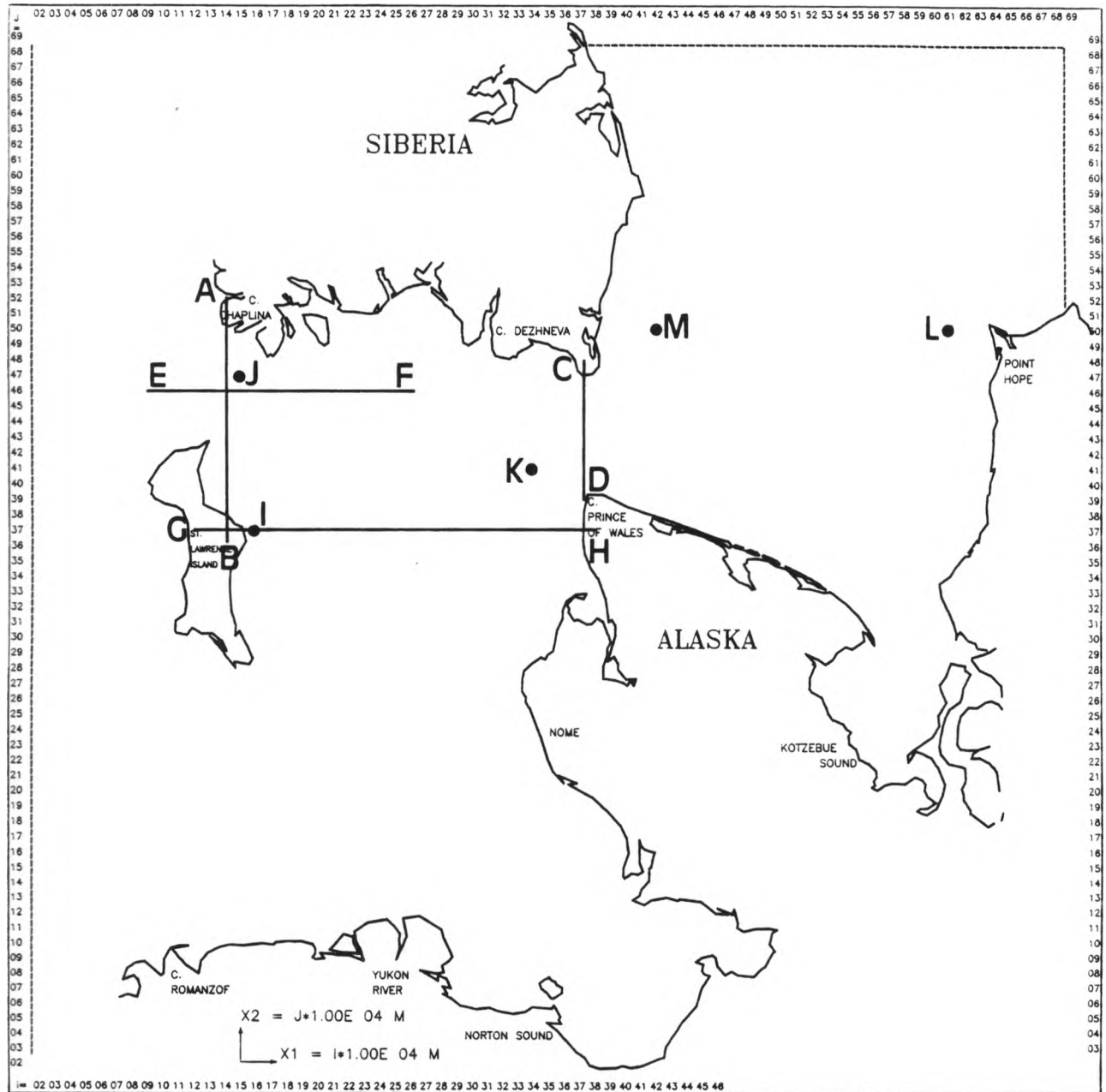
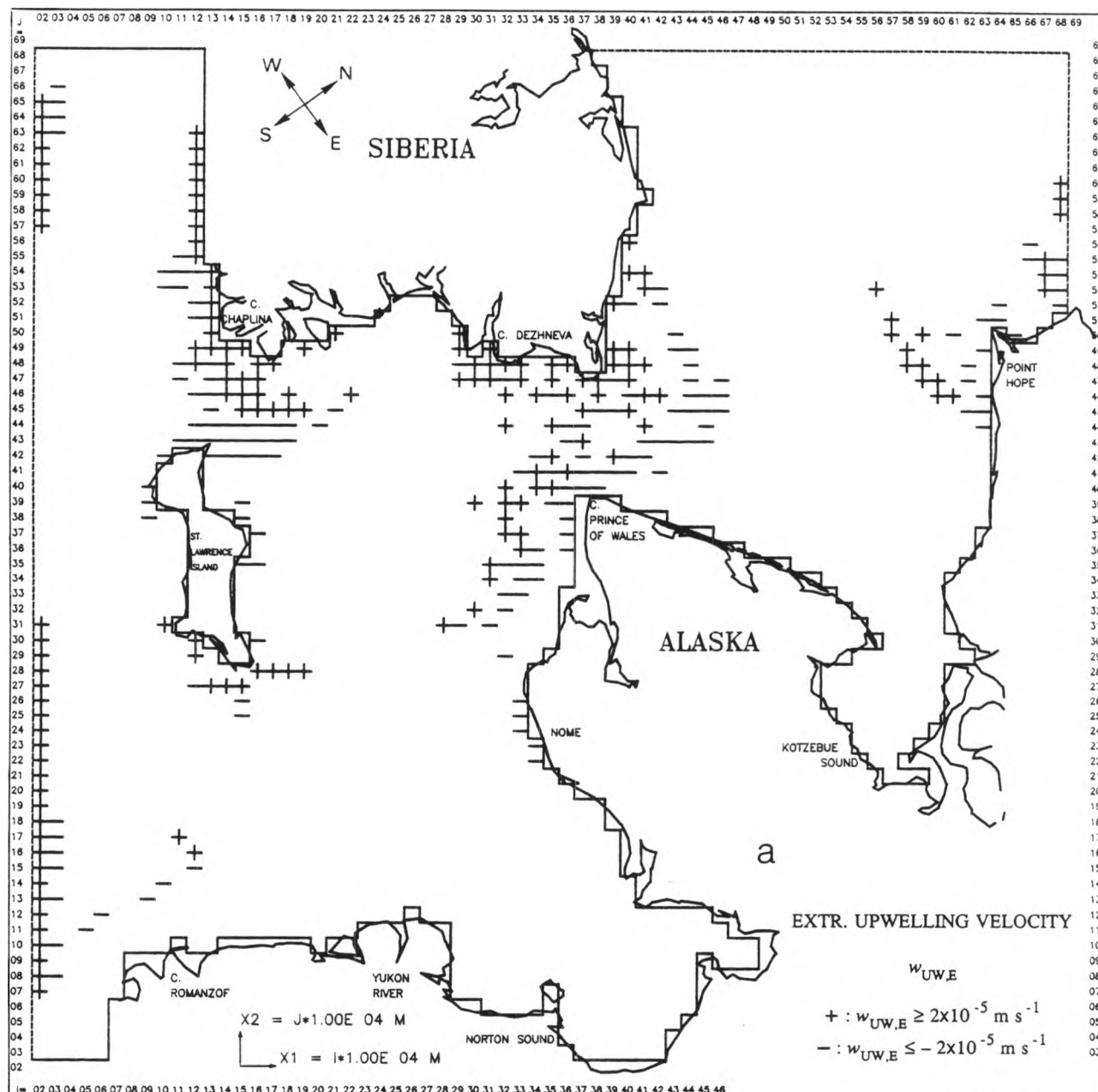


Figure 19. Localisation des profils verticaux et des plans de coupe.



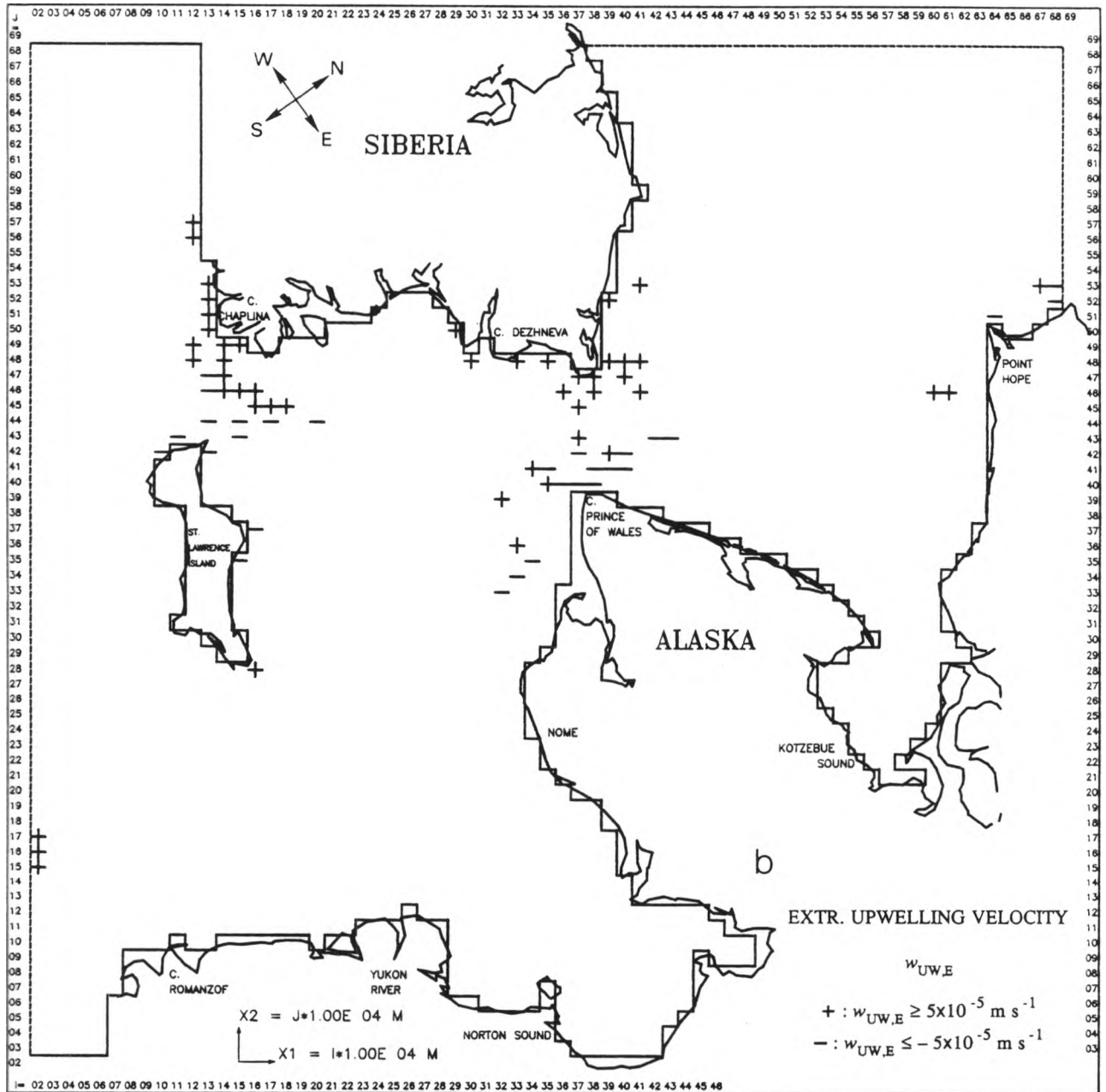


Figure 20 (a), (b). Vitesse d'upwelling extrême $w_{UW,E}$ représentée avec deux seuils d'exclusion différents.
Note: $5 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1} \approx 4.3 \text{ m jour}^{-1}$.

Généralement, $|w_{UW}|$ croît monotonément à partir du fond, atteint sa valeur maximale et décroît monotonément jusqu'à zéro à la surface (Figure 18). Bien que les profils verticaux de w_{UW} soient loin d'être auto-semblables, ils ont suffisamment de caractéristiques communes dépendant essentiellement de σ — et non de x_3 — pour que les considérations développées précédemment au sujet de la représentation graphique du champ de vitesse d'upsloping restent d'application. On choisit de visualiser la vitesse d'upwelling extrême de chaque verticale (Figure 20), à savoir

$$w_{UW,E} = w_{UW,max} \quad \text{si} \quad |w_{UW,max}| > |w_{UW,min}|, \quad (53a)$$

$$w_{UW,E} = w_{UW,min} \quad \text{si} \quad |w_{UW,max}| \leq |w_{UW,min}|, \quad (53b)$$

avec

$$w_{UW,max} = \max_{0 \leq \sigma \leq 1} w_{UW}, \quad (54a)$$

$$w_{UW,min} = \min_{0 \leq \sigma \leq 1} w_{UW}. \quad (54b)$$

La Figure 20 le montre, la vitesse d'upwelling se caractérise par une grande variabilité spatiale. Ce point a été suffisamment discuté. D'autre part, les mouvements verticaux intenses se produisent surtout dans le voisinage des Détroits d'Anadyr et de Bering, c'est-à-dire que les zones d'up- ou de down-welling sont peu étendues, comme on en avait émis l'hypothèse plus haut.

On va maintenant se pencher sur deux aspects du champ de vitesse d'upwelling: les mouvements verticaux le long des frontières en mer ouverte et les up- ou down-wellings côtiers. Ensuite, on proposera une approche générale rendant compte du signe de w_{UW} .

6.4 Mouvements verticaux à proximité des frontières en mer ouverte

Le long de la frontière sud du domaine, dans une bande large d'une maille, on remarque la présence d'un upwelling, qui n'est bien sûr qu'un artefact. L'emploi de conditions aux limites inadéquates est cause de ce phénomène — voir Section III.10. Aucun up- ou down-welling de la même ampleur ne se développe à proximité de la limite du domaine traversant la Mer de Chukchi. La raison de cette dissymétrie est encore obscure.

A la frontière sud du domaine, on impose que la composante de la vitesse normale à la frontière obéisse, sur toute la hauteur de la colonne d'eau, à un profil logarithmique. Manifestement, ce profil diffère nettement de celui de la vitesse horizontale calculé par le modèle à l'intérieur du domaine d'intérêt. D'où, localement, la divergence horizontale de $H \hat{u}$ est artificiellement grande. Pour remédier à ce problème, il aurait fallu appliquer des conditions aux limites différentes aux composantes normales de $\bar{u}$ et $\hat{u}$. On aurait dû imposer la composante normale de $\bar{u}$ — car on veut contrôler le débit — mais ne pas prescrire *a priori* la forme analytique du profil vertical de déviation de vitesse. Comme DELEERSNIJDER *et al.* (1989) le préconisent, il aurait fallu calculer la composante

normale de $\hat{u}$ avec une équation de quantité de mouvement qui, tout en étant simplifiée, aurait au moins permis de produire un profil de déviation de vitesse ressemblant quelque peu à ceux prévalant à l'intérieur du domaine, ce qui aurait réduit fortement l'ordre de grandeur de l'upwelling indésirable. Notons cependant que les vitesses d'upwelling qui nous occupent ne dépassent pas $2.5 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$, alors que, dans le Détroit d'Anadyr ou de Bering, la vitesse d'upwelling peut être 3 ou 4 fois plus grande.

L'upwelling artificiel ne concernant que la maille contiguë à la frontière, les vitesses verticales correspondantes étant relativement petites, tout en étant significatives, aucun problème majeur ne se pose donc.

6.5 Upwellings côtiers

Quand l'eau s'écoule "côte à gauche", un upwelling côtier se forme tandis qu'un downwelling côtier correspond au cas "côte à droite" (Figure 20). La même règle prévaut pour les up- et down-wellings côtiers induits par le vent (CSANADY, 1977). Or, ici, la tension de vent en surface est nulle mais, ainsi qu'on va le montrer, la tension de fond joue un rôle similaire à celui de la tension de surface.

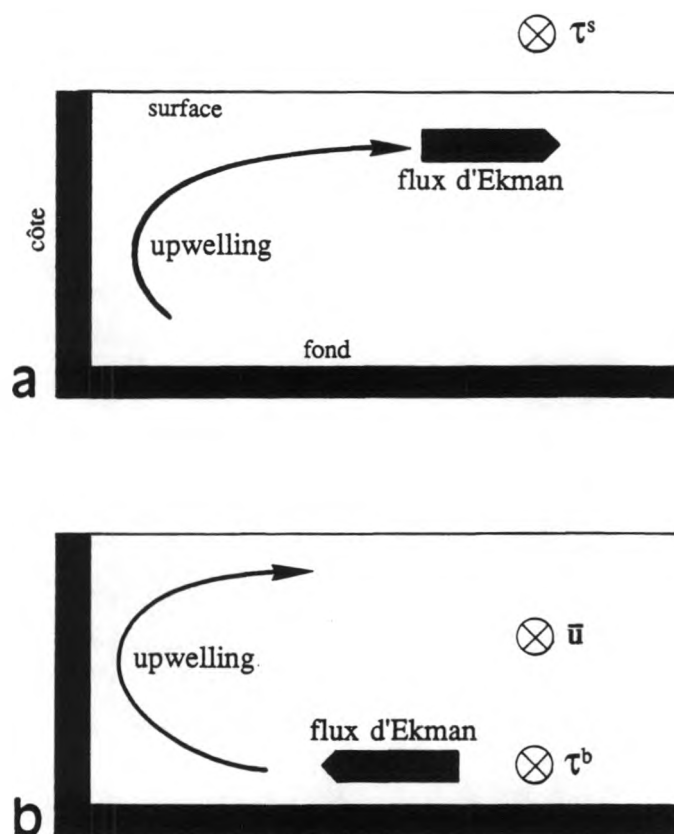


Figure 21. Mécanisme d'un upwelling côtier induit par le vent (a) et par la tension de fond (b).

Réexaminons le modèle classique d'upwelling côtier dû à la tension de vent (CSANADY, 1977). La tension de vent, orientée "côte à gauche" (Figure 21a), induit un écoulement parallèle à la côte auquel se superpose un flux d'Ekman, dans la couche de surface, transportant de l'eau vers le large. Ce flux d'Ekman résulte de l'équilibre entre la force de Coriolis et la force résultant des variations du flux turbulent vertical de quantité de mouvement horizontale — associé à la tension de vent. Puisque, dans la couche de surface, l'eau s'éloigne de la côte, un flux vers la côte naît dans la couche de fond qui remplace progressivement l'eau de la couche de surface, maintenant approximativement la hauteur de la colonne d'eau. A proximité de la côte, l'eau de la couche de fond s'élève vers la surface. C'est un upwelling. La présence de friction sur le fond n'est pas nécessaire à la mise en oeuvre de ce processus (CSANADY, 1977).

Dans notre cas, la tension de vent n'est pas le moteur de l'écoulement. Cependant, la tension de fond génère un flux d'Ekman orienté vers la côte (Figure 21b) ou vers le large, selon que l'eau s'écoule "côte à gauche" ou "côte à droite". Ici, parler de flux d'Ekman est peut être un peu abusif mais, le *veering* étant presque partout positif, un flux orienté "à gauche" de la vitesse moyenne existe bel et bien près du fond (Figures 22 et 23). Ce flux joue un rôle tout à fait symétrique à celui que joue le flux d'Ekman dans la couche de surface dans le cadre du processus d'upwelling côtier induit par le vent.

Le mécanisme que nous venons d'ébaucher rend compte du signe de la vitesse verticale à proximité de la côte mais il ne nous apprend rien quant aux up- et down-wellings se déroulant au large.

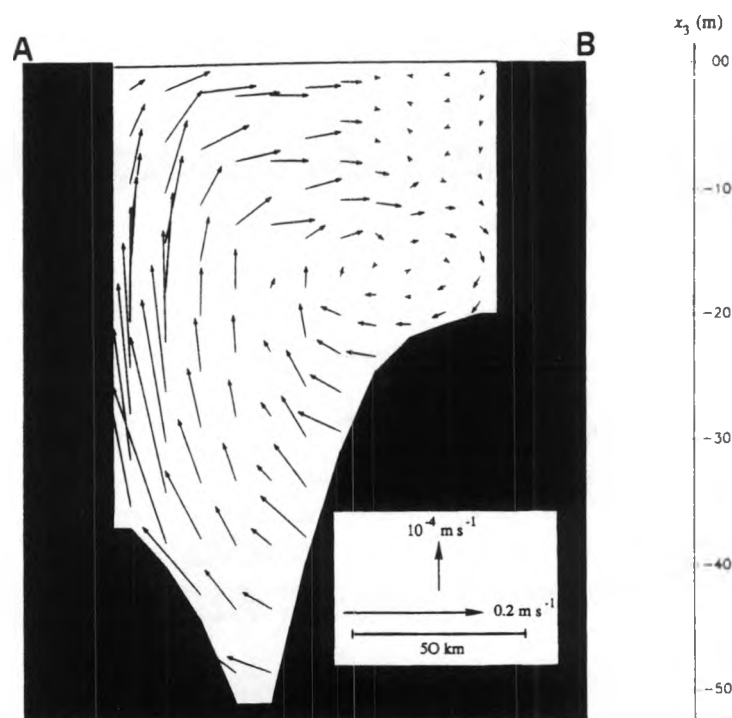


Figure 22. Représentation de $\hat{u}_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$ dans le plan de coupe verticale A-B traversant le Détroit d'Anadyr. La position du plan de coupe est indiquée dans la Figure 19.

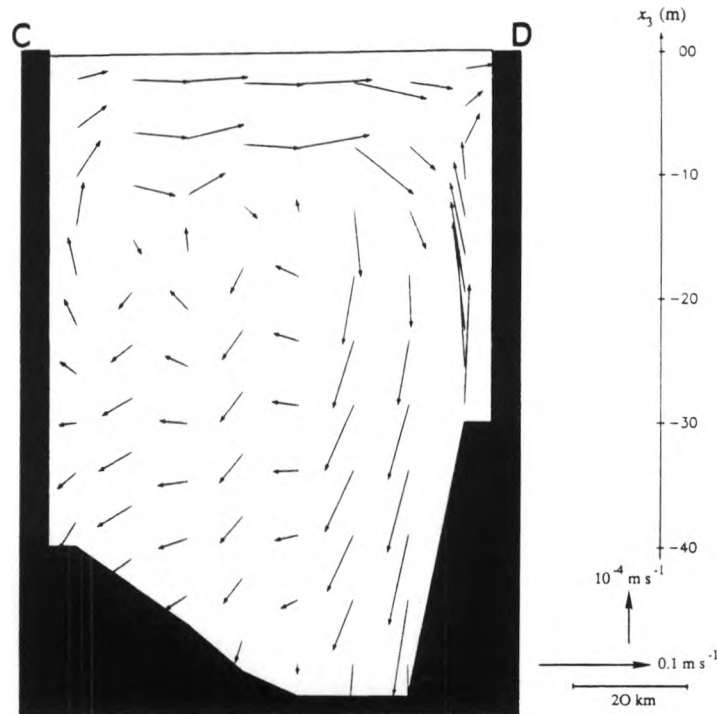


Figure 23. Représentation de $\vec{u}_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$ dans le plan de coupe verticale C-D traversant le Détroit de Bering. La position du plan de coupe est indiquée dans la Figure 19.

6.6 Mécanisme des upwellings

Puisque la vitesse d'upwelling est fonction de la divergence de $H \hat{\mathbf{u}}$, il faut s'intéresser à $H \hat{\mathbf{u}}$ pour comprendre le mécanisme des upwellings.

On peut dresser une liste des caractéristiques générales de la vitesse horizontale $\mathbf{u}$:

1. Près du fond, $\mathbf{u}$ est "à gauche" de $\bar{\mathbf{u}}$. Près de la surface, $\mathbf{u}$ est "à droite" de $\bar{\mathbf{u}}$ (Figures 4, 5, 22 et 23).
2. L'ordre de grandeur de $|\hat{\mathbf{u}}|$ est une fonction croissante, approximativement linéaire, de $|\bar{\mathbf{u}}|$ (Figure 3).
3. L'ordre de grandeur du *veering* est approximativement constant (Figure 5) — ce qui est d'autant plus vrai que $|\bar{\mathbf{u}}|$ est grand.
4. Dans le voisinage du fond, la norme de $\mathbf{u}$ croît à mesure que l'on s'éloigne du fond (Figure 24).

On propose une forme analytique simple de $H \hat{\mathbf{u}}$ susceptible de respecter les caractéristiques énoncées ci-dessus:

$$H \hat{\mathbf{u}} = (1 - 2 \sigma) (-a_{//} H \bar{\mathbf{u}} + a_{\perp} \mathbf{e}_3 \times H \bar{\mathbf{u}}), \quad (55)$$

où $a_{//}$ et $a_{\perp}$ sont des constantes positives de l'ordre de 0.1 (Figure 3). Il ne faut pas considérer (55) comme une tentative de représentation réaliste du profil de $H \hat{\mathbf{u}}$; il s'agit simplement d'une forme

caricaturale qui intègre de façon très schématique des caractéristiques des profils de la vitesse modélisée. L'expression (55) va s'avérer très utile dans la mesure où elle permet de suggérer des hypothèses de travail intéressantes. La vitesse d'upwelling associée à (55) vaut:

$$w_{UW} = a_{\perp} \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_h \times H \bar{\mathbf{u}}) \sigma (1 - \sigma). \quad (56)$$

Le mécanisme d'upwelling suggéré par les formules (55) et (56) est illustré dans un cas simple par la Figure (25).

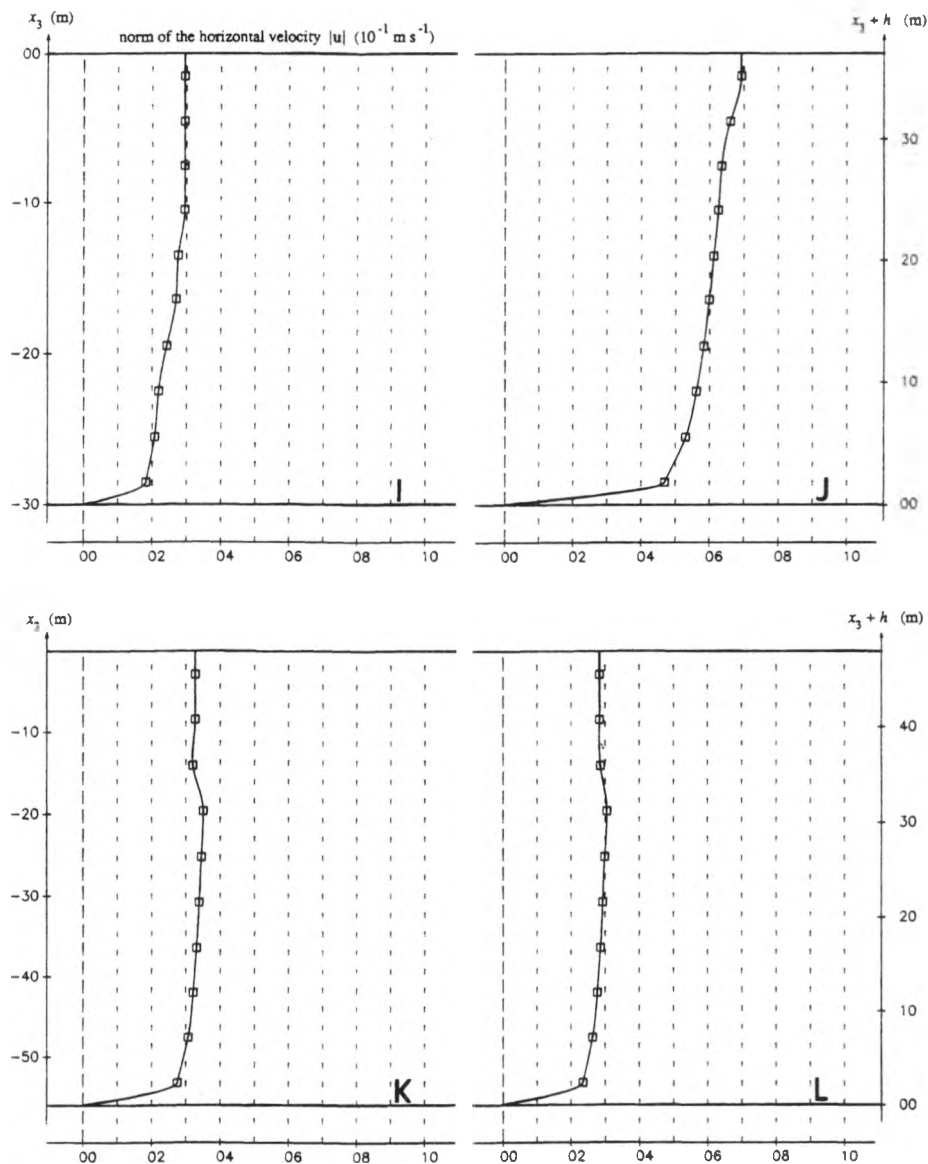


Figure 24. Quelques profils verticaux de la norme de la vitesse horizontale. Les verticales d'où proviennent ces profils sont localisées dans la Figure 19.

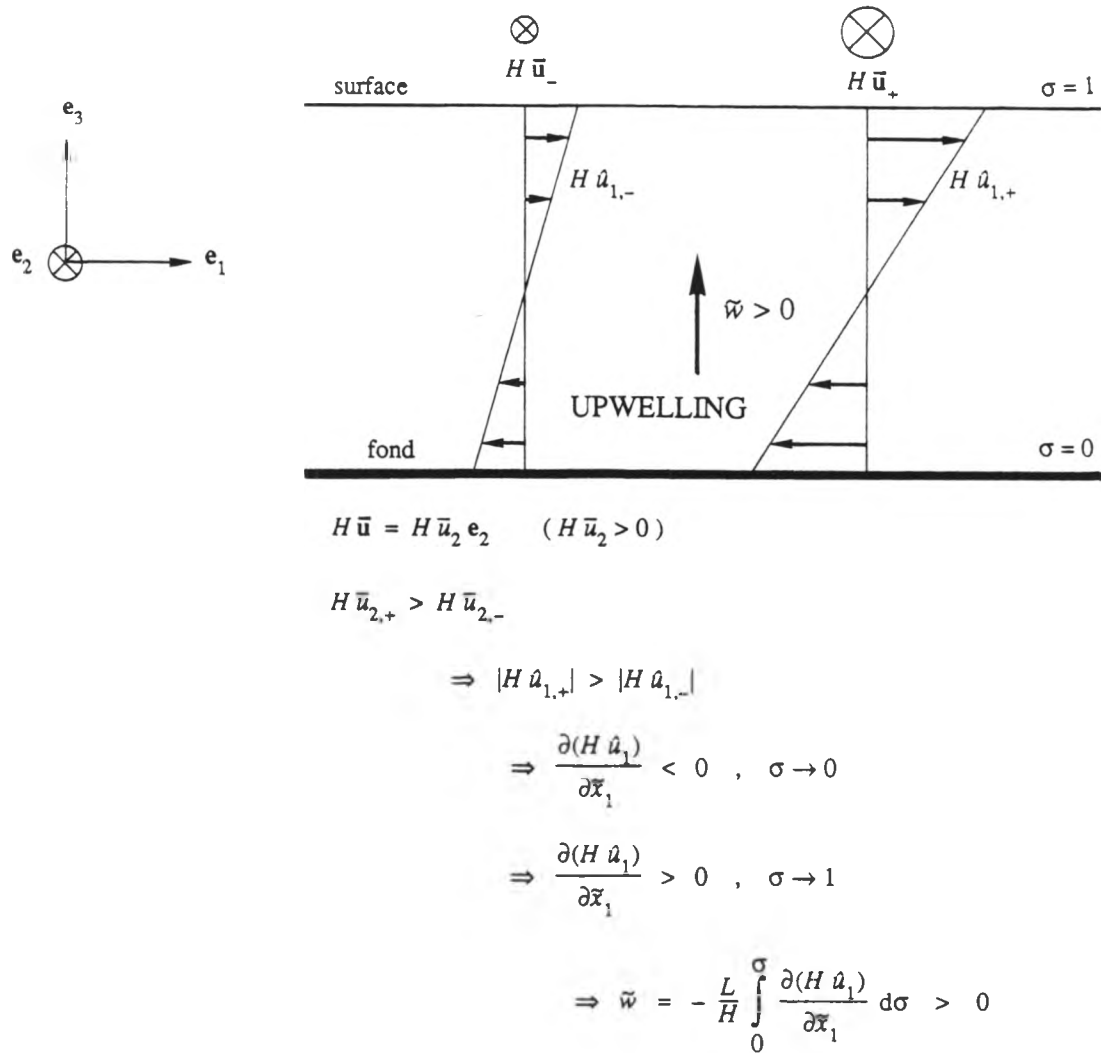


Figure 25. Illustration d'un mécanisme d'upwelling induit par les variations du transport dans la direction perpendiculaire à celui-ci.

On est conduit à formuler deux hypothèses, dont nous allons tester la validité:

1. La vitesse d'upwelling est surtout due à la divergence de la composante de $H \hat{u}$ perpendiculaire à l'écoulement moyen.
2. Le signe de $\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_h \times H \bar{u})$ conditionne le signe du flux d'upwelling.

Exprimons $H \hat{u}$ comme la somme d'une composante parallèle à $H \bar{u}$ et d'une composante perpendiculaire à $H \bar{u}$

$$H \hat{u} = (H \hat{u})_{//} + (H \hat{u})_{\perp}, \quad (57)$$

avec

$$(H \hat{u})_{//} = \frac{H \hat{u} \cdot H \bar{u}}{|H \bar{u}|} \frac{H \bar{u}}{|H \bar{u}|} \quad (58)$$

et

$$(H \hat{u})_{\perp} = \frac{H \hat{u} \cdot (e_3 \times H \bar{u})}{|H \bar{u}|} \frac{e_3 \times H \bar{u}}{|H \bar{u}|} \quad (59)$$

Les vitesses d'upwelling associées à ces deux composantes de $H \hat{u}$ s'écrivent

$$w_{UW, //} = - \int_0^{\sigma} \tilde{\nabla}_h \cdot (H \hat{u})_{//} d\sigma \quad (60)$$

et

$$w_{UW, \perp} = - \int_0^{\sigma} \tilde{\nabla}_h \cdot (H \hat{u})_{\perp} d\sigma \quad (61)$$

avec, bien entendu,

$$w_{UW} = w_{UW, //} + w_{UW, \perp} \quad (62)$$

Profitant de

$$\sum_{3D} (w_{UW, //} - w_{UW})^2 + \sum_{3D} (w_{UW, \perp} - w_{UW})^2 = \sum_{3D} (w_{UW, //})^2 + \sum_{3D} (w_{UW, \perp})^2, \quad (63)$$

on met la première hypothèse à l'épreuve en évaluant

$$\frac{\sum_{3D} (w_{UW, //} - w_{UW})^2}{\sum_{3D} (w_{UW, //})^2 + \sum_{3D} (w_{UW, \perp})^2} = 0.72 \quad (64a)$$

et

$$\frac{\sum_{3D} (w_{UW, \perp} - w_{UW})^2}{\sum_{3D} (w_{UW, //})^2 + \sum_{3D} (w_{UW, \perp})^2} = 0.28 \quad (64b)$$

Ainsi, $w_{UW, \perp}$ est significativement plus proche de la vitesse d'upwelling totale que $w_{UW, //}$. Il en résulte que la première hypothèse est raisonnablement correcte, comme le soulignent les Figures (25) et (26).

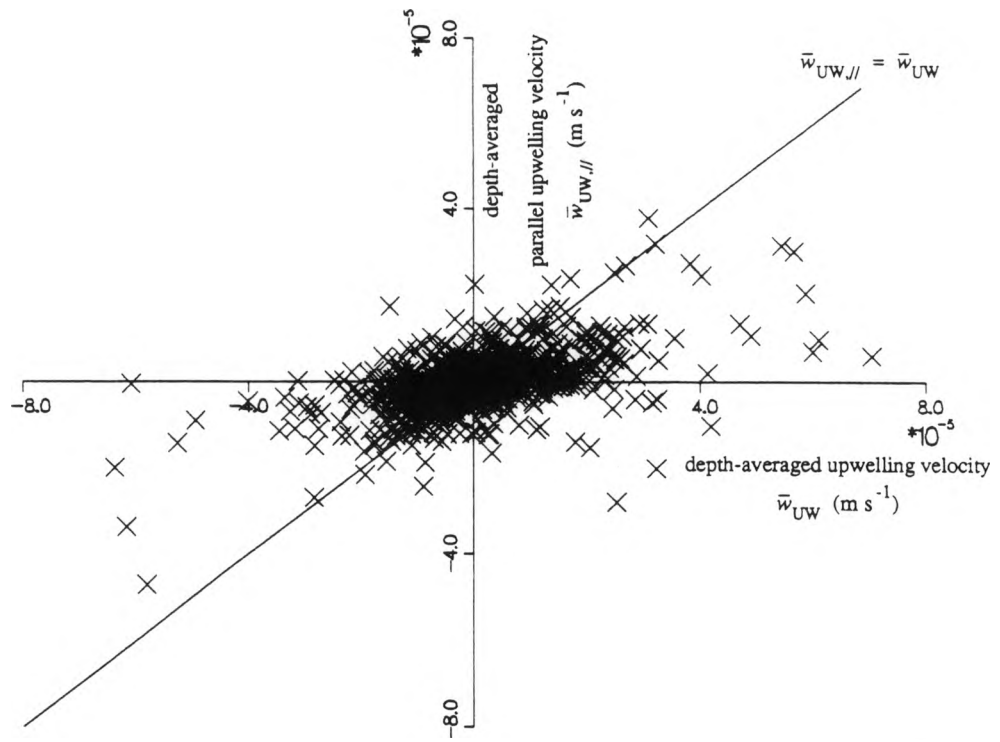


Figure 26. Scattérogramme de $\bar{w}_{UW,||}$ en fonction de $\bar{w}_{UW}$.

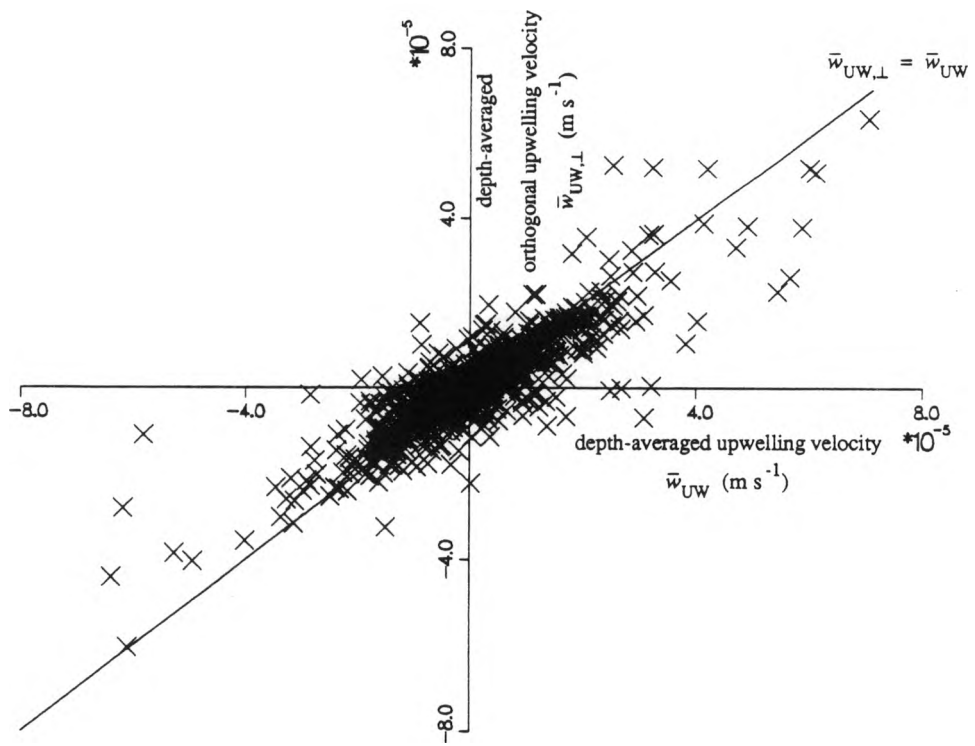


Figure 27. Scattérogramme de $\bar{w}_{UW,\perp}$ en fonction de $\bar{w}_{UW}$.

La seconde hypothèse s'avère être de très bonne qualité (Table 3). Sans commettre de grande erreur, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{signe}(\bar{w}_{\text{UW}}) = \text{signe}[\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_h \times H \bar{\mathbf{u}})]}, \quad (65)$$

où $\bar{w}_{\text{UW}}$ symbolise la vitesse moyenne d'upwelling,

$$\bar{w}_{\text{UW}} = \int_0^1 w_{\text{UW}} d\sigma. \quad (66)$$

Soulignons que (65) est d'autant mieux vérifiée par les résultats du modèle que l'on considère des mouvements verticaux intenses (Table 3).

$ \bar{w}_{\text{UW}} $ (10^{-5} m s^{-1})	n_+	n_-	$\frac{n_+}{n_+ + n_-}$
≥ 0.1	1547	315	0.83
≥ 0.5	531	126	0.81
≥ 1	240	69	0.78
≥ 2	78	13	0.86
≥ 3	30	3	0.91
≥ 4	17	1	0.94
≥ 5	10	1	0.91
≥ 6	5	0	1.0
≥ 7	1	0	1.0
≥ 8	0	0	—

Table 3. Vérification de la relation (65); n_+ désigne le nombre de verticales où le signe de $\bar{w}_{\text{UW}}$ est identique à celui de $\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_h \times H \bar{\mathbf{u}})$; n_- représente le nombre de verticales où le signe de $\bar{w}_{\text{UW}}$ et celui de $\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_h \times H \bar{\mathbf{u}})$ sont opposés.

De (65) on peut déduire quatre cas simples d'upwelling ou de downwelling (Figure 28). On voit que les variations de la profondeur peuvent conduire à des mouvements verticaux dans l'espace σ .

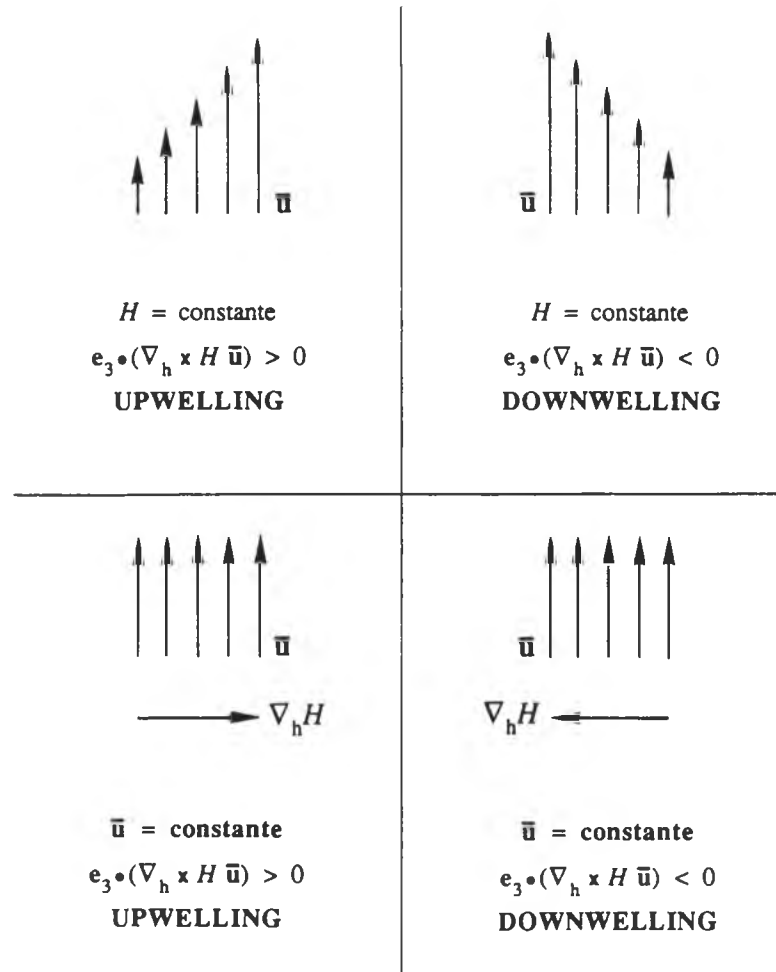


Figure 28. Quelques cas simples d'up- ou de down-welling correspondant à (65).

Le signe des flux verticaux côtiers examinés dans la section précédente est en accord avec (65). A la côte, le transport est nul. Dans le voisinage de la côte, $H \bar{u}$ est essentiellement parallèle à celle-ci. Donc, près de la côte, on a

$$e_3 \cdot (\nabla_h \times H \bar{u}) \sim (n \cdot \nabla_h) [H \bar{u} \cdot (e_3 \times n)], \quad (67)$$

où n désigne la normale unitaire à la côte pointant vers le large. Combinant (65) et (67), on obtient

$$\bar{w}_{UW} > 0 \quad \text{si} \quad H \bar{u} \cdot (e_3 \times n) > 0 \quad (\text{"côte à gauche"}), \quad (68a)$$

$$\bar{w}_{UW} < 0 \quad \text{si} \quad H \bar{u} \cdot (e_3 \times n) < 0 \quad (\text{"côte à droite"}), \quad (68b)$$

qui n'est rien d'autre que la formulation mathématique de la règle donnant le signe de la vitesse d'upwelling côtière. Pour mieux comprendre ce raisonnement, on peut consulter la Figure 29.

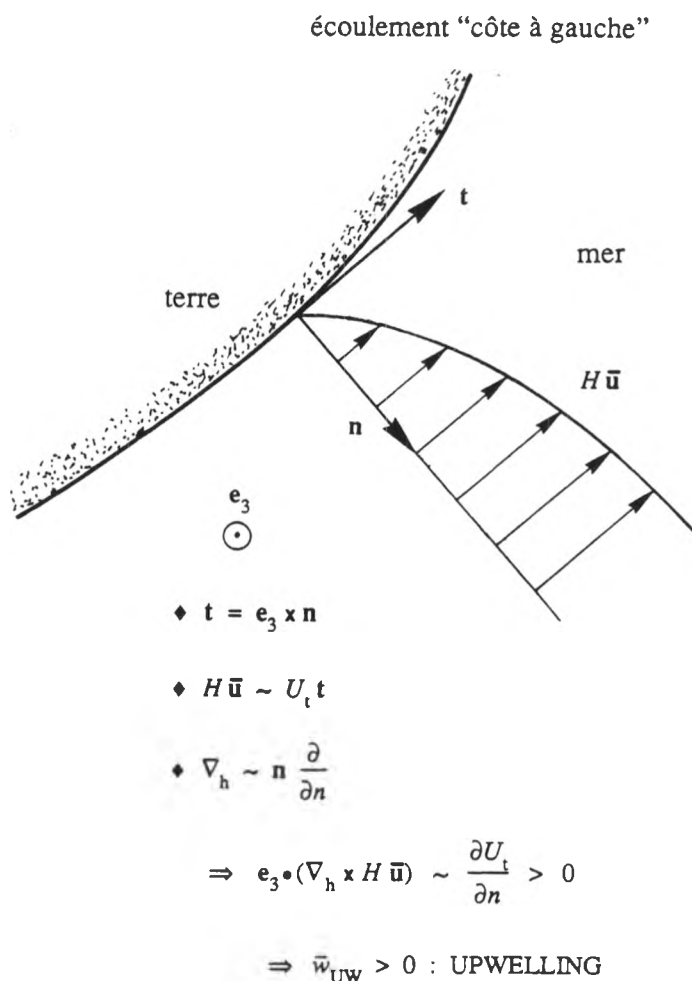


Figure 29. Illustration du fait que la relation (65) s'applique également à la détermination du signe des flux côtiers.

On peut regarder la relation (65) comme la transposition à une mer peu profonde de la "théorie du pompage d'Ekman", généralement appliquée à la couche de fond d'une mer profonde (PEDLOSKY, 1982). Sur le plan de l'étude des processus marins, (65) est le résultat majeur de ce travail.

On a donc montré qu'il existe un mécanisme d'upwelling agissant en l'absence de tension de vent. Ce sont les variations du transport normal à la vitesse moyenne qui sont principalement responsables de la génération des up- et down-wellings. Or, comme on pense que l'équation d'Ekman rend assez bien compte du bilan de quantité de mouvement, ce sont les variations verticales à partir du fond de la tension turbulente qui, à cause de la force de Coriolis, engendrent la déflexion de la vitesse — et donc le transport $(H \bar{u})_{\perp}$. En définitive, on voit que la tension de fond joue un rôle capital dans les mouvements verticaux modélisés ici.

Dans ce texte, on parle à plusieurs reprises d'"upwelling induit par la tension de fond". C'est une formule très parlante. Il s'agit cependant d'un abus de langage car la tension de fond n'est pas un moteur de l'écoulement.

6.7 Bruit numérique (II)

Les profils verticaux de vitesse d'upwelling sont très lisses (Figure 18) alors que la variabilité horizontale de cette même vitesse est relativement grande (Figure 20). En d'autres termes, le bruit numérique affecte surtout la dépendance horizontale de w_{UW} et non sa dépendance verticale. Pour expliquer ce fait, il faut d'abord se rappeler que la diffusion turbulente verticale de quantité de mouvement est beaucoup plus efficace que la diffusion horizontale. Par conséquent, les profils verticaux de $H \hat{u}$ contiennent peu de bruit numérique, au contraire des profils horizontaux. De plus, pour calculer la vitesse d'upwelling, on applique successivement à $H \hat{u}$ l'opérateur de divergence horizontale — dans l'espace σ — et une intégration sur la verticale. Ce faisant, on met en évidence le bruit "horizontal" mais on filtre le bruit "vertical" éventuel. Que w_{UW} soit nettement plus variable horizontalement que verticalement ne doit donc pas étonner.

6.8 Comparaison avec les mesures

Aucun instrument actuellement disponible sur le marché ne permet de mesurer de façon directe et à peu de frais la vitesse verticale *in situ*. Par conséquent, on ne peut comparer les vitesses verticales produites par le modèle avec des mesures. Tout ce que l'on peut faire, c'est examiner l'évolution des quantités scalaires du modèle pour lesquelles l'advection verticale joue un rôle important. Mais, il est clair qu'une telle démarche ne peut fournir qu'une vérification essentiellement qualitative du champ de vitesse verticale. De plus, si le comportement de la température paraissait inacceptable, on ne pourrait aisément décider à quoi, de l'advection verticale ou de la diffusion turbulente, imputer l'erreur. En effet, la diffusion turbulente verticale est potentiellement aussi importante que l'advection verticale. L'estimation, à partir de mesures, des flux de diffusion verticale est tout aussi malaisée que celle des flux advectifs. Donc, aucun flux vertical fourni par le modèle ne peut être directement confronté à des données acquises sur le terrain.

7. Quantités turbulentes

DELEERSNIJDER et NIHOUL (1988b) ont brièvement discuté de la distribution de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation visqueuse fournies par le modèle.

Des quantités comme e , ε , v_T et λ_T^b ne sont pas mesurées *in situ*. En conséquence, l'évaluation de leur réalisme n'est guère aisée. Remarquons simplement que les résultats paraissent très raisonnables. En effet, dans le voisinage de la pycnocline, le nombre de Richardson augmente, l'énergie cinétique turbulente et la diffusivité turbulente diminuent (Figure 30). De plus, en accord avec la théorie et avec des mesures effectuées sur d'autres sites, la diffusivité turbulente croît quasi linéairement à partir du fond.

Le temps caractéristique $\mathcal{T}_{T,v}$ lié à la diffusion turbulente est très bref. Dans le cas des profils verticaux de la Figure (30), on a

$$\mathcal{T}_{T,v} = \frac{(H/2)^2}{\lambda_T^b} \approx \frac{25^2}{5 \times 10^{-2}} \approx 10^4 \approx 3 \text{ heures} . \quad (69)$$

En conséquence, le gradient vertical de poussée ne peut être que nul ou très grand. C'est le cas dans tous les profils de poussée produits par le modèle (DELEERSNIJDER et NIHOUL, 1988a), ce qui paraît globalement confirmé par les observations (Figure IV.11).

Comme la distribution de la vitesse de friction de fond le suggère (Figure 15), c'est dans la région du Détroit de Bering et du Détroit d'Anadyr que l'énergie cinétique turbulente (Figure 31) et la diffusivité turbulente (Figure 32) atteignent leur ordre de grandeur maximum. Ce fait s'explique aisément dès lors que l'on se rappelle que la vitesse horizontale est maximale dans les détroits précités (Figure 1).

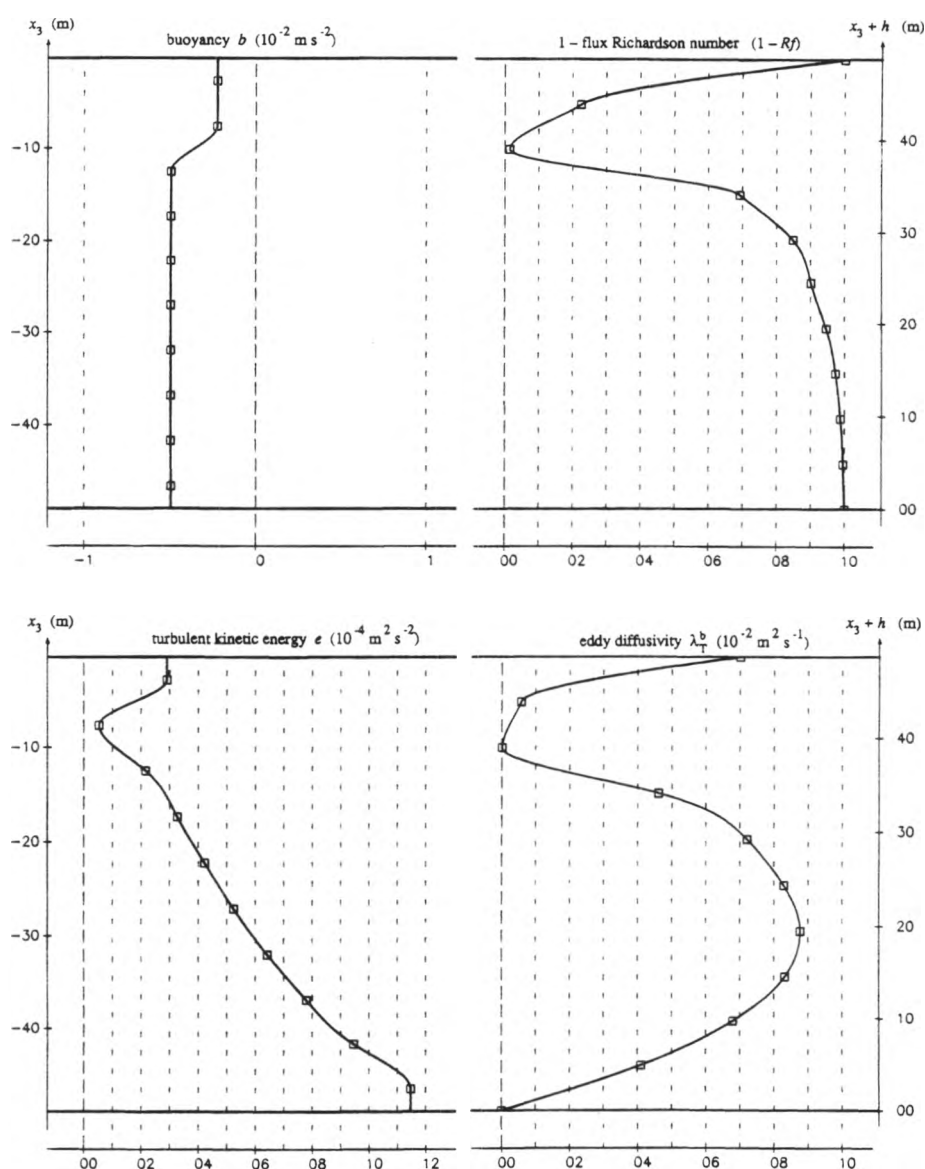


Figure 30. Profils verticaux de poussée, de nombre de Richardson de flux, d'énergie cinétique turbulente et de diffusivité turbulente à la verticale M — localisée dans la Figure 19.

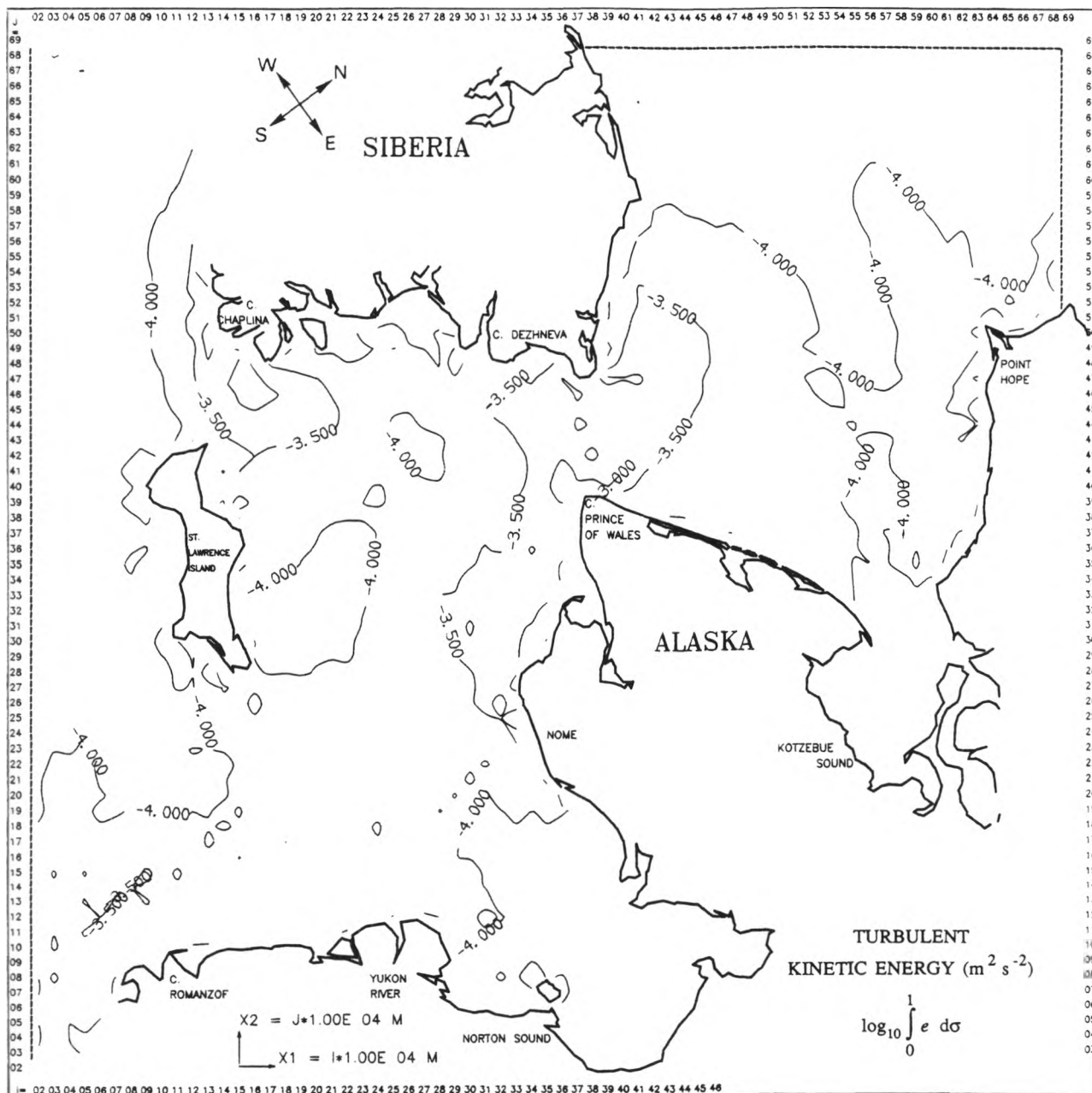


Figure 31. Distribution horizontale de l'énergie cinétique turbulente.

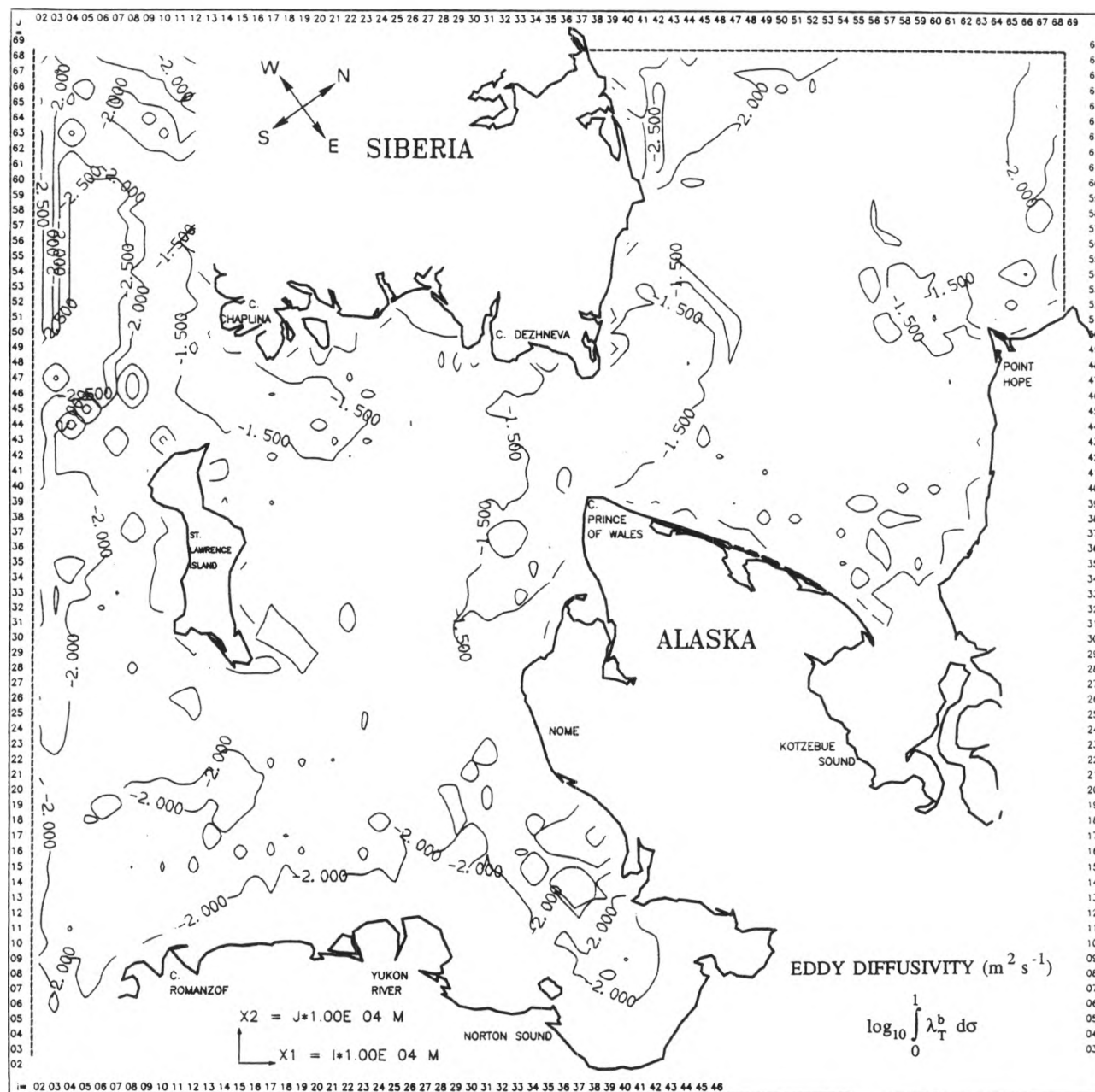


Figure 32. Distribution horizontale de la diffusivité turbulente.

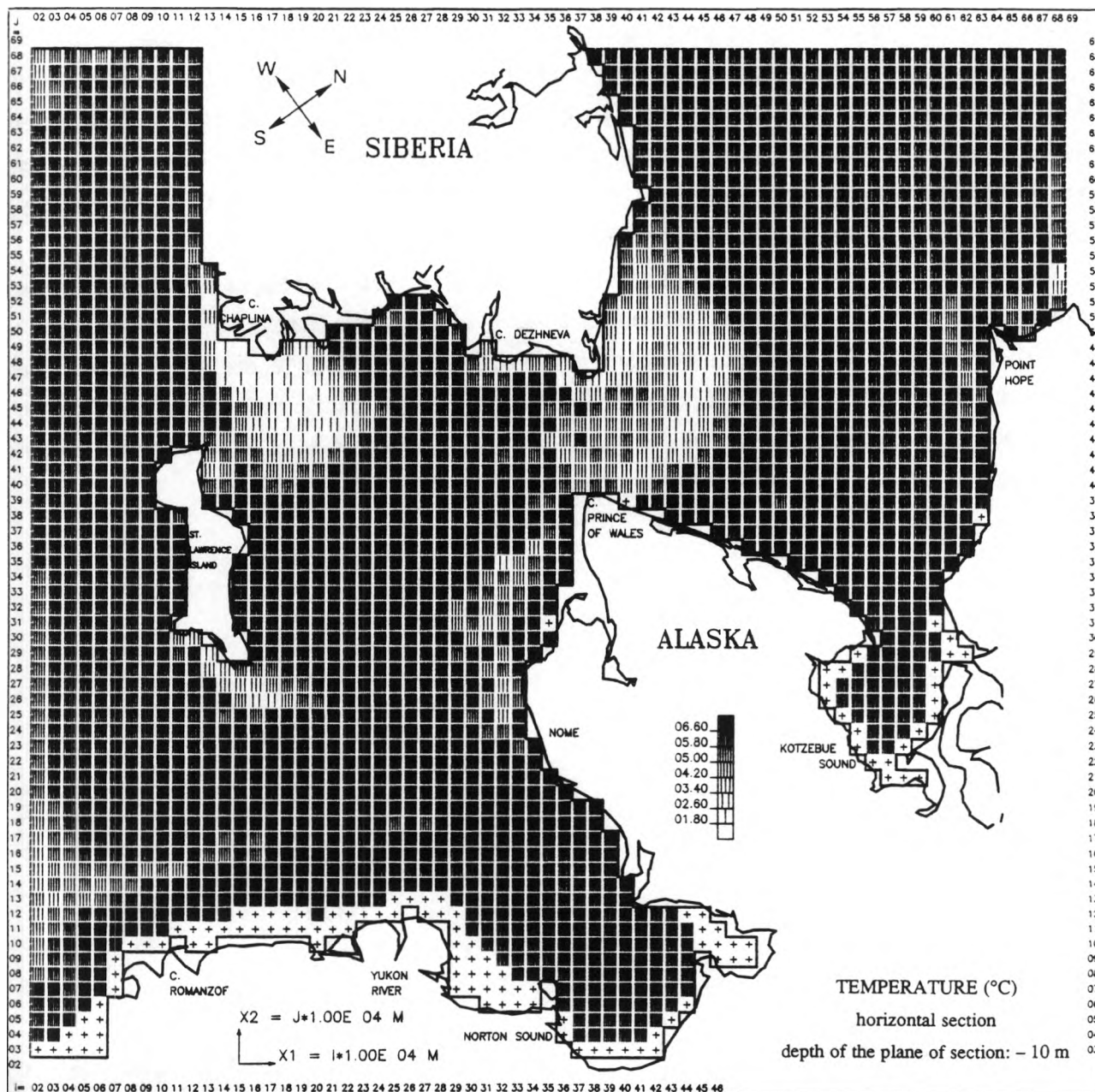


Figure 33. Température à 10 mètres de profondeur.

8. Température

A l'instant où l'entière du modèle tridimensionnel "démarré", la température ne dépend que de la coordonnée verticale x_3 . Donc, la formation de gradients horizontaux de température est due aux variations d'intensité des flux verticaux de température. Par conséquent, la distribution horizontale de température permet d'identifier aisément les zones où les flux verticaux sont importants.

La Figure 33 montre clairement que de l'eau froide se dirige vers la surface en aval du Cap Chaplina et en aval du Détroit de Bering. Qualitativement, il existe une très bonne concordance entre cette figure et la température de surface enregistrée par les satellites (Figure IV.9) ou reconstruite par le modèle variationnel inverse (Figures IV.12, IV.14, IV.16-IV.18). Donc, au moins sur le plan qualitatif, les résultats du modèle sont tout à fait satisfaisants.

D'après les mesures *in situ*, nous pensons que le panache d'eau froide apparaissant en surface en aval du Détroit d'Anadyr est principalement dû à l'advection verticale (voir Section IV.4) et non à une intensification du mélange vertical qui détruirait la pycnocline et homogénéiserait la colonne d'eau. Ceci a été examiné dans le cadre du modèle variationnel inverse mais le modèle qui nous occupe ici confirme tout à fait la prédominance des flux advectifs. Les Figures 34 et 35 en attestent, surtout si l'on note la similitude qualitative entre ces figures et la Figure 1.d de l'Annexe III.

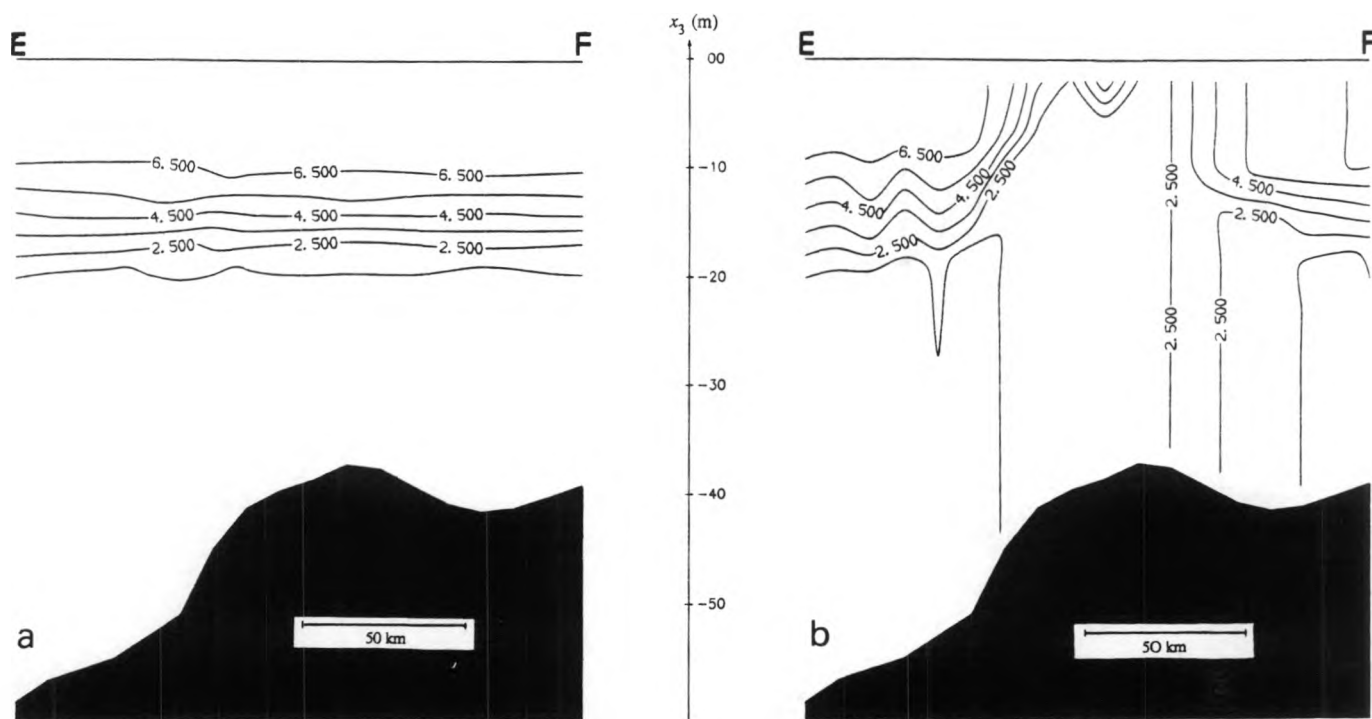


Figure 34. Température dans la section verticale E-F (voir Figure 19) à l'instant initial (a) et au moment de l'arrêt de la simulation (b).

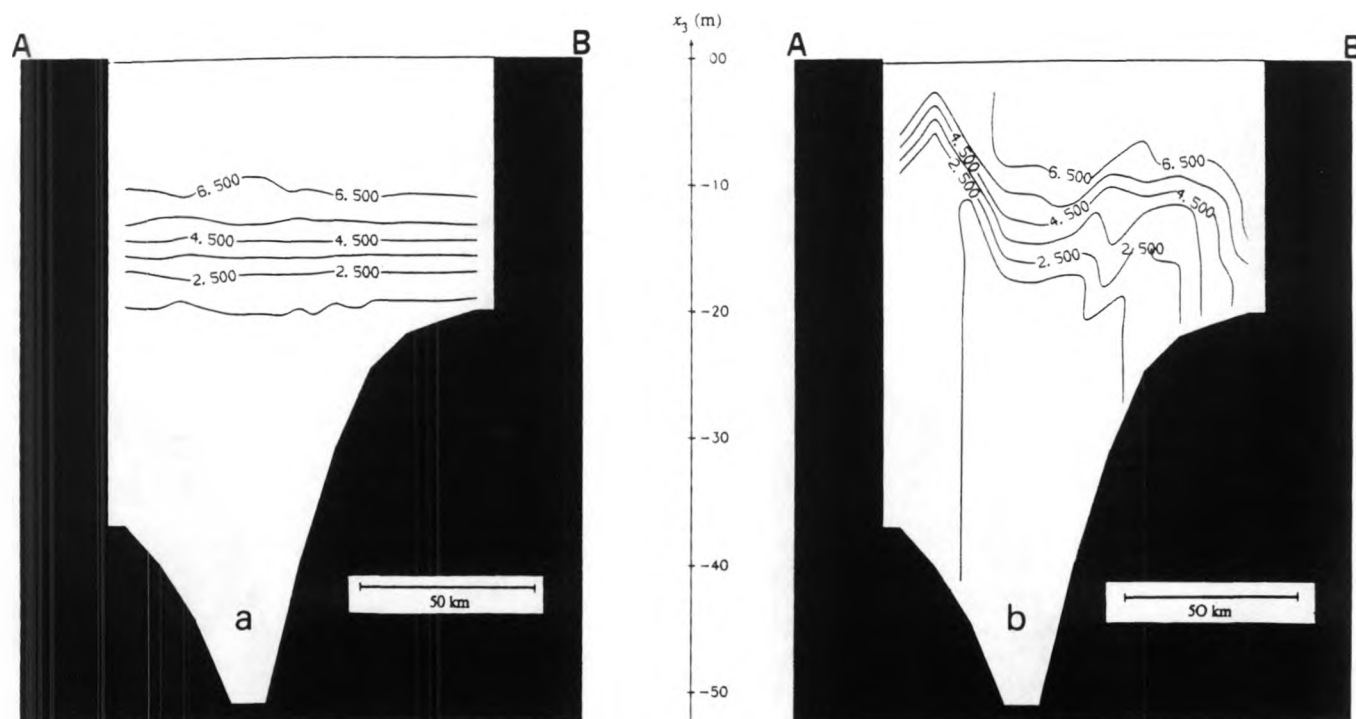


Figure 35. Température dans la section verticale A-B (voir Figure 19) à l'instant initial (a) et au moment de l'arrêt de la simulation (b).

Cependant, comme l'indiquent les Figures 17, 20 et 36, les vitesses d'upwelling sont, en gros, plus petites que les vitesses d'upsloping. Donc, dans le Détroit d'Anadyr, l'upwelling, l'upsloping et la diffusion turbulente combinent leur action pour homogénéiser la colonne d'eau et amener de l'eau du fond vers la surface. Ces processus étant couplés, il est évidemment difficile de déterminer avec certitude lequel est le plus important. Mais, nous inclinons à penser que l'advection verticale est le processus dominant. Nous l'avons déjà dit. Il est alors clair que l'upwelling, même plus petit que l'upsloping, joue un rôle important: l'upsloping permet à une particule fluide de se rapprocher de la surface "à σ constant" mais seul l'upwelling autorise la traversée des surfaces iso- σ .

La Figure 20 montre que l'upwelling du Détroit d'Anadyr commence, en fait, dans une bande étroite située le long de la côte sibérienne et ayant son origine plus de 50 kilomètres en amont du Cap Chaplina. Les photos prises dans l'infra-rouge (Figure IV.9) le confirment. Cette concordance ne peut que renforcer, au moins sur le plan qualitatif, la confiance dans les résultats du modèle.

Dans l'ensemble, les up- et down-wellings sont négligeables, sauf dans des régions peu étendues. Donc, le champ de température tend à garder sa configuration initiale sauf, bien entendu, là où les mouvements verticaux sont importants (Figure 37).

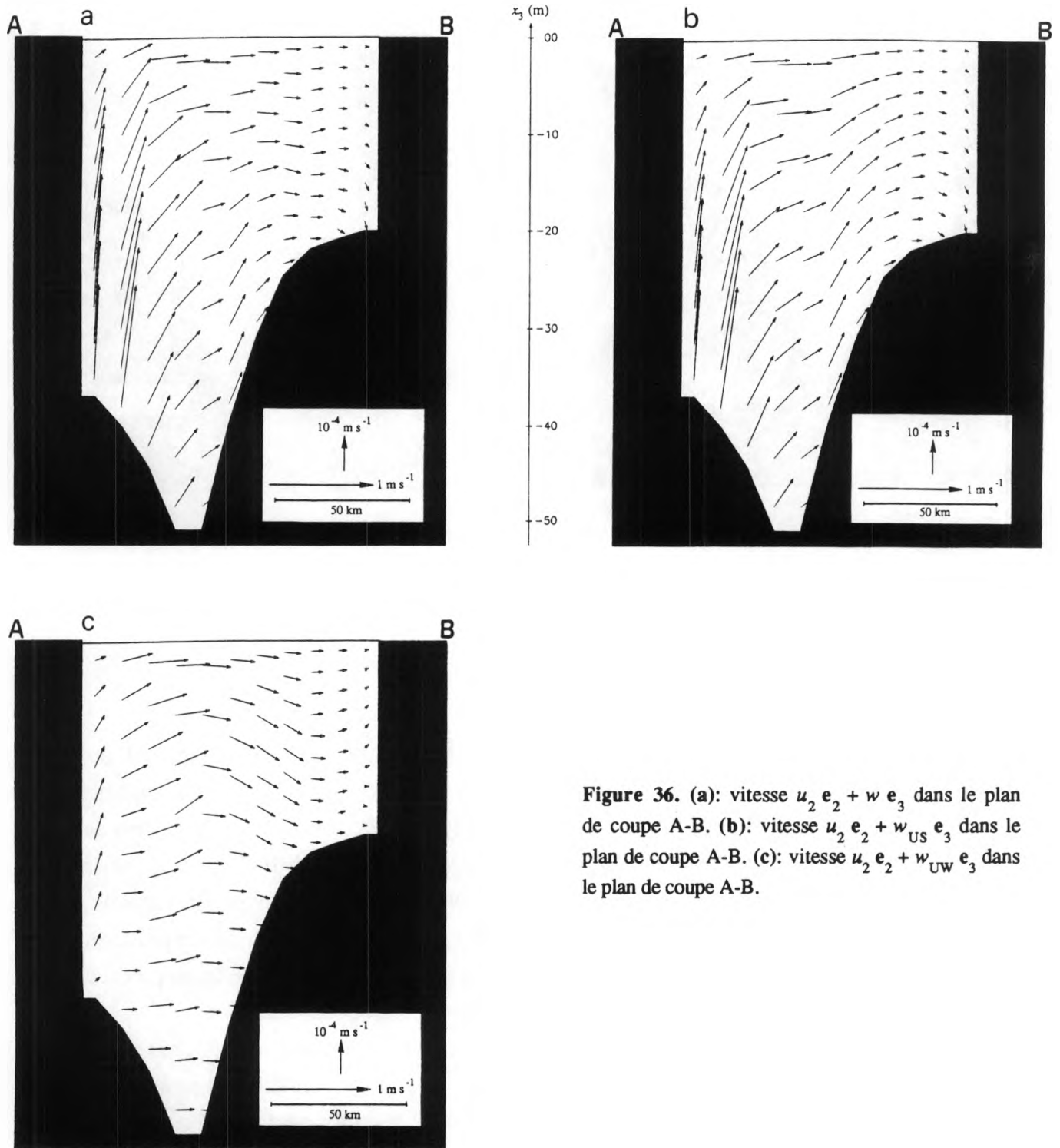


Figure 36. (a): vitesse $u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$ dans le plan de coupe A-B. (b): vitesse $u_2 \mathbf{e}_2 + w_{us} \mathbf{e}_3$ dans le plan de coupe A-B. (c): vitesse $u_2 \mathbf{e}_2 + w_{uw} \mathbf{e}_3$ dans le plan de coupe A-B.

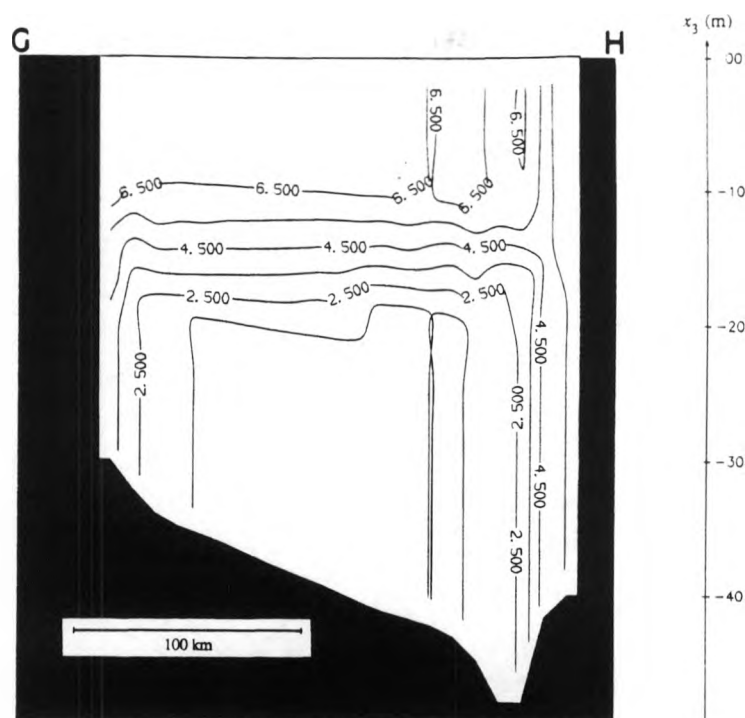


Figure 37. Champ de température dans le plan de coupe G-H (voir Figure 19) où l'on remarque les fronts produits par les downwellings.

9. Eco-hydrodynamique

ADAM (1990) a utilisé les résultats de notre modèle hydrodynamique dans son modèle écologique tridimensionnel. Ce dernier examine l'évolution de 4 variables: la matière nutritive (nitrate), le phytoplancton, le zooplancton et la matière organique morte — qui est reminéralisée.

Les résultats de cette étude éco-hydrodynamique s'avèrent extrêmement encourageants. En effet, on voit clairement l'injection de nitrate dans la couche euphotique dans le Déroit d'Anadyr (Figure 38). Ces sels nutritifs sont advectés vers le Déroit de Bering et la Mer de Chukchi (Figure 38) où ils permettent le développement du phytoplancton (Figure 39) qui, à son tour, alimente le zooplancton (Figure 40).

Ces résultats sont en excellent accord avec la présentation générale du Chapitre I. On ne peut y voir qu'une confirmation de la qualité — et de l'utilité — de notre modèle hydrodynamique.

10. Conclusion

Le modèle hydrodynamique tridimensionnel développé ici a globalement très bien fonctionné. La circulation générale horizontale est quantitativement bien reproduite. Pour les variables comme la déviation de vitesse horizontale, la température ou les quantités turbulentes, la comparaison directe ou indirecte avec les données disponibles s'est avérée qualitativement positive. De plus, l'introduction des résultats hydrodynamiques dans le modèle écologique d'ADAM (1990) a été couronnée de succès.

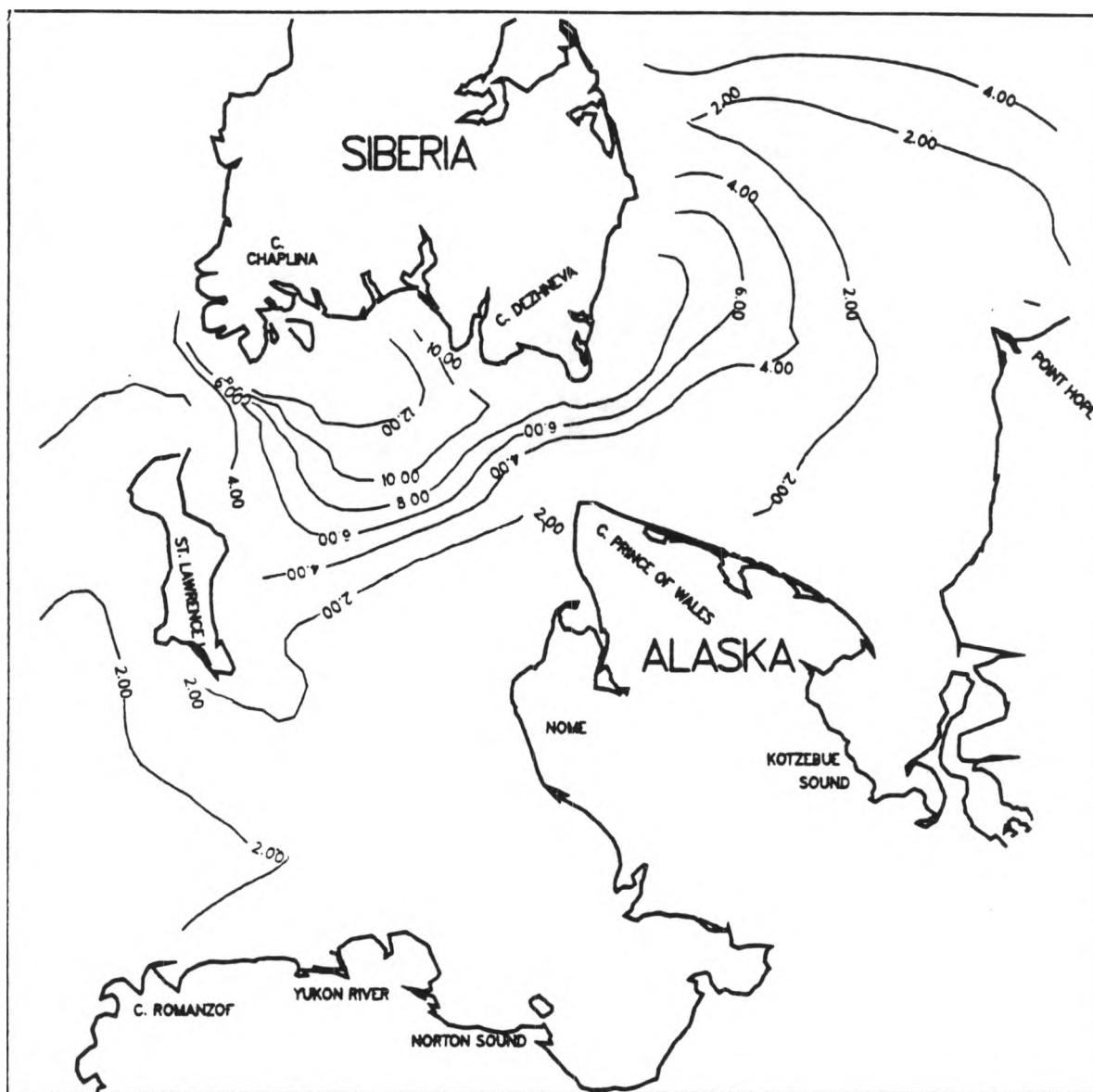


Figure 38. Concentration en nitrate à proximité de la surface exprimée en μ at-g N / litre (figure extraite de ADAM, 1990).

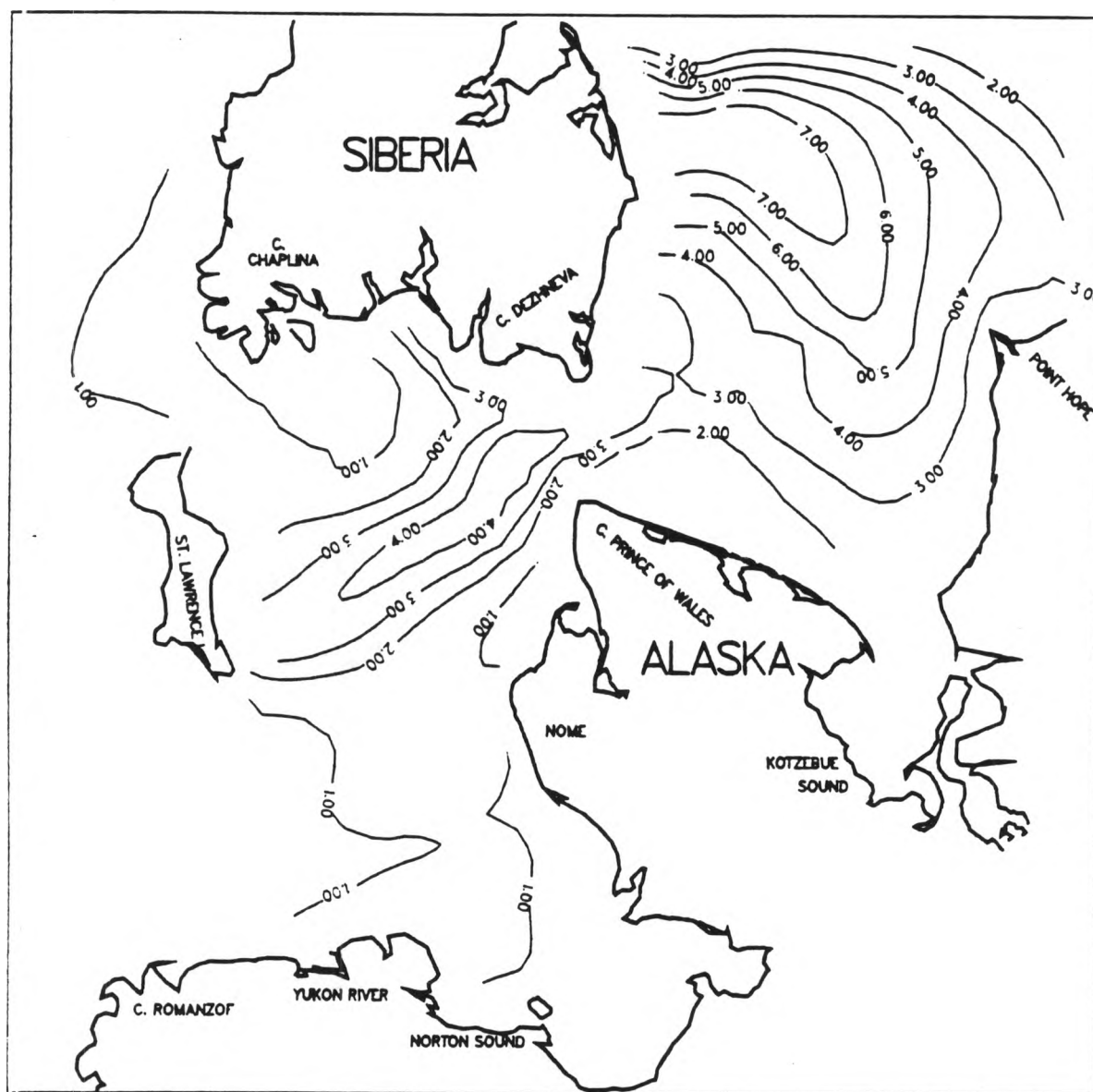


Figure 39. Concentration en phytoplancton à proximité de la surface exprimée en $\mu\text{g N / litre}$ (figure extraite de ADAM, 1990).

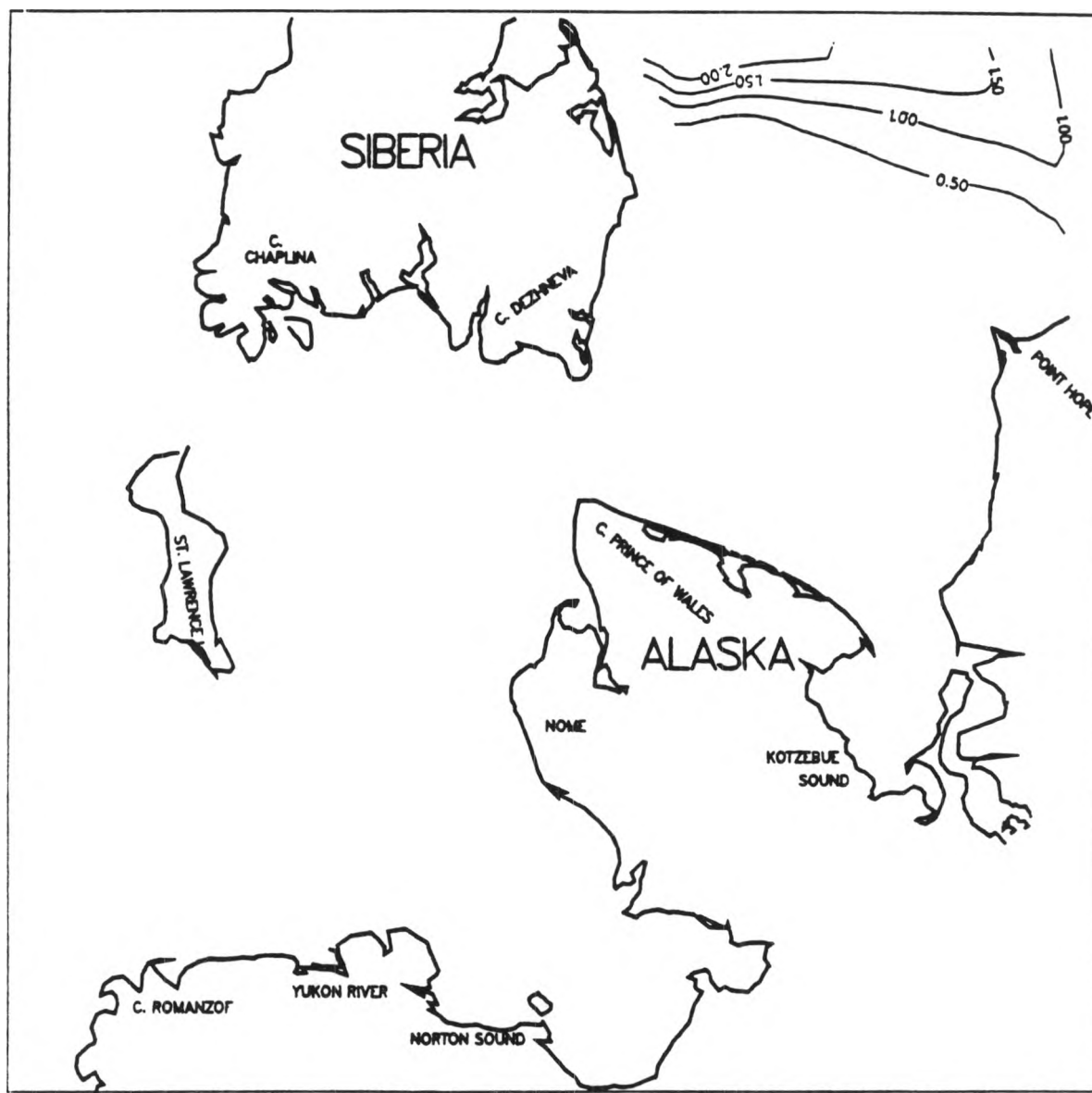


Figure 40. Concentration en zooplancton à proximité de la surface exprimée en μ at-g N / litre (figure extraite de ADAM, 1990).

Chapitre VII: Conclusion

Dans ce travail, nous avons apporté, sous forme d'un modèle hydrodynamique, une contribution originale à l'étude éco-hydrodynamique de la mer baignant la région du Déroit de Bering — réalisée sous l'égide du programme ISHTAR.

Durant tout l'été, en aval du Déroit d'Anadyr, des substances nutritives sont constamment disponibles dans la couche euphotique, permettant ainsi à la production primaire de se maintenir à un taux exceptionnellement élevé. Pour bien appréhender ce phénomène, on a montré qu'il faut disposer d'une estimation fiable des flux verticaux advectifs et diffusifs. Comme aucun instrument n'autorise la mesure directe de ces flux, il était nécessaire d'avoir recours à un modèle hydrodynamique tridimensionnel.

La mise au point de ce modèle, ainsi que l'interprétation des résultats obtenus, constituait l'objectif de notre travail.

Tout d'abord, on a rappelé les équations de base de la géohydrodynamique. On les a filtrées pour obtenir un modèle mathématique adapté à l'étude des phénomènes marins se déroulant à la méso-échelle dans les mers peu profondes. On a introduit une fermeture turbulente de "type k ".

Ensuite, on a construit un schéma numérique, basé sur la technique du "volume fini" en coordonnée σ , visant à résoudre les équations du modèle. On a mis en lumière les qualités et les faiblesses de notre méthode numérique. Ces dernières concernent surtout le calcul du taux de décentrement dans l'évaluation des flux d'advection et l'économie de temps de calcul — liée au traitement identique du "mode externe" et du "mode interne". Nous avons expliqué que l'amélioration du schéma numérique ne poserait aucun problème rédhibitoire.

On a aussi montré que la vitesse verticale, parce qu'on l'évalue à l'aide de l'équation de continuité, était particulièrement sensible au bruit numérique. Pour bien maîtriser ce problème, on a indiqué qu'il fallait utiliser un maillage très fin — ce que les limitations de nos moyens informatiques ne nous ont pas vraiment permis.

On a résumé l'état des connaissances de l'océanographie physique du domaine d'intérêt. En particulier, il s'est avéré qu'aucun modèle n'avait encore fourni les estimations des flux verticaux requises par le programme d'étude éco-hydrodynamique auquel nous avons participé.

On a indiqué que, pour étudier un écosystème marin, il n'était pas souhaitable de se référer à l'hydrodynamique associée à la circulation générale au sens strict du terme. En effet, nous pensons que la meilleure solution est de modéliser les courants et l'écologie à la méso-échelle. Comme le type

de données disponibles rendait difficile une telle approche, nous avons suggéré une stratégie alternative. Cette dernière consiste à utiliser le modèle à la méso-échelle avec des forçages tels que les courants simulés soient proches de ceux de la circulation générale. La diffusion turbulente, par contre, doit plutôt correspondre à celle de la méso-échelle. On atteint cet objectif grâce à une modification adéquate du calcul du cisaillement du courant. Sur cette base, on a mis au point les forçages du modèle et la stratégie de démarrage à partir des conditions initiales.

Les résultats obtenus ont été comparés avec les données: la circulation horizontale est proche de la circulation générale tandis que les autres variables sont qualitativement bien représentées. En particulier, le modèle a simulé l'homogénéisation de la colonne d'eau en aval du Détroit d'Anadyr, phénomène qui est dû à l'advection verticale et, dans une moindre mesure, à la diffusion turbulente.

Des produits du modèle, on a tenté de dégager une explication de l'hydrodynamique de la région. Il s'est avéré que la vitesse horizontale est quasiment géostrophique. On a mis en doute l'hypothèse du "contrôle géostrophique" du débit dans le Détroit de Bering et on a suggéré que le débit était globalement contrôlé par les processus dissipatifs. Enfin, on a analysé séparément les composantes d'upwelling et d'upsloping de la vitesse verticale. L'intérêt de cette décomposition a été pleinement confirmé. De surcroît, on a mis en évidence un mécanisme d'upwelling "induit par la tension de fond". Ce faisant, on a établi de façon quasi certaine que le forçage éolien n'est pas le moteur principal des remontées d'eau se produisant dans le voisinage du Détroit d'Anadyr.

Finalement, on indique qu'ADAM (1990) avait introduit nos résultats hydrodynamiques dans un modèle écologique tridimensionnel. Cette étude a permis de confirmer le scénario mis en avant dans l'Introduction de ce travail — c'est-à-dire que les mouvements verticaux se produisant dans le voisinage du Détroit d'Anadyr injectent des sels nutritifs dans la couche euphotique, ces sels nutritifs alimentant la production primaire du Bassin de Chirikov et du sud de la Mer de Chukchi. Ces simulations écologiques ont ainsi apporté une preuve supplémentaire de la validité de nos résultats hydrodynamiques, ainsi que de leur utilité dans le cadre de l'étude éco-hydrodynamique de la région du Détroit de Bering.

Même si la méthode numérique s'est avérée perfectible, le bilan de ce travail est globalement très positif surtout parce que les informations apportées sur les flux verticaux sont des résultats tout à fait originaux.

Dans le futur, nous envisageons de remédier aux quelques défauts de la méthode numérique. De plus, nous nous fixons trois axes de développement du modèle. Premièrement, nous établirons une stratégie de modélisation permettant d'effectuer des simulations à la méso-échelle car, à cette échelle, les équations du modèle sont beaucoup plus fiables. Deuxièmement, nous utiliserons la fermeture turbulente $k-\epsilon$, qui est plus performante que celle que nous avons employée. Enfin, afin de nous débarrasser d'épineux problèmes de conditions aux limites en mer ouverte, nous étendrons le domaine d'intérêt jusqu'aux limites du plateau continental — au moins vers le sud. Bien entendu, nous utiliserons un maillage plus fin. Ces développements nécessiteront évidemment des moyens de calcul intensif.

Annexe I: Modèle mathématique en coordonnée σ

On rassemble dans cette annexe les équations d'état, en coordonnée σ , du modèle hydrodynamique développé dans ce travail:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (H \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (1)$$

$$H \tilde{w} = - \int_0^{\tilde{x}_3} \tilde{\nabla}_h \bullet (H \hat{\mathbf{u}}) d\tilde{x}_3, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H \mathbf{u})}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (\mathbf{u} H \mathbf{u}) + \frac{\partial(\tilde{w} H \mathbf{u})}{\partial \tilde{x}_3} + f \mathbf{e}_3 \times H \mathbf{u} = \\ - H \tilde{\nabla}_h \left[\frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{atm},0}}{\rho_0} + g \eta - \int_{\sigma}^1 H b d\sigma \right] - [(1-\sigma) \nabla_h h - \sigma \nabla_h \eta] H b \\ + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left[\tilde{v}_T \frac{\partial(H \mathbf{u})}{\partial \tilde{x}_3} \right] + \tilde{\nabla}_h \bullet [\tilde{\lambda}_H \tilde{\nabla}_h (H \mathbf{u})], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H T)}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (H \mathbf{u} T) + \frac{\partial(H \tilde{w} T)}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{-L}{\rho_0 c} \frac{\partial q^S}{\partial \tilde{x}_3} \\ + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left[\tilde{\lambda}_T^T \frac{\partial(H T)}{\partial \tilde{x}_3} \right] + \tilde{\nabla}_h \bullet [\tilde{\lambda}_H^T H \tilde{\nabla}_h T], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(H S)}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (H \mathbf{u} S) + \frac{\partial(H \tilde{w} S)}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left[\tilde{\lambda}_T^S \frac{\partial(H S)}{\partial \tilde{x}_3} \right] + \tilde{\nabla}_h \bullet [\tilde{\lambda}_H^S H \tilde{\nabla}_h S], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H e)}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}_h \bullet (H \mathbf{u} e) + \frac{\partial(H \tilde{w} e)}{\partial \tilde{x}_3} &= \frac{\tilde{v}_T}{H} \left| \frac{\partial H \mathbf{u}}{\partial \tilde{x}_3} \right|^2 (1 - Rf) - H \varepsilon \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left[\tilde{\lambda}_T^e \frac{\partial(H e)}{\partial \tilde{x}_3} \right] + \tilde{\nabla}_h \bullet \left[\tilde{\lambda}_H^e H \tilde{\nabla}_h e \right], \end{aligned} \quad (6)$$

avec les ordres de grandeur de la région du Détroit de Bering ($30 \times 10^{-3} \leq S \leq 33.5 \times 10^{-3}$ et $-2^\circ \text{C} \leq T \leq 10^\circ \text{C}$), on peut simplifier l'équation d'état de l'eau de mer (UNESCO, 1981) en une expression simple qui, traduite en terme de poussée, s'écrit:

$$\begin{aligned} b &= 0.25096 - 6.4953 \times 10^{-4} * T + 8.6955 \times 10^{-5} * T^2 \\ &+ (3.9101 \times 10^{-2} * T - 7.8854) * S, \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$H = h + \eta, \quad (8)$$

$$H \bar{\mathbf{u}} = \int_0^L H \mathbf{u} d\tilde{x}_3, \quad (9)$$

$$H \hat{\mathbf{u}} = H \mathbf{u} - H \bar{\mathbf{u}}, \quad (10)$$

$$\tilde{v}_T = \frac{\alpha_\varepsilon^{1/4} \kappa L^2}{2 H} e^{1/2} \sigma (1 - \alpha_L \sigma) (1 - Rf), \quad (11)$$

$$\tilde{\lambda}_T^T = \tilde{\lambda}_T^S = \gamma (1 - Rf)^{1/2} \tilde{v}_T, \quad (12)$$

$$\tilde{\lambda}_T^e = 0.7 \tilde{v}_T, \quad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_\varepsilon L^2}{16 H^2} \frac{e^2}{\tilde{v}_T}, \quad (14)$$

$$1 - Rf = \frac{2}{2 + \gamma Ri \sqrt{4 + (\gamma Ri)^2} + (\gamma Ri)^2}. \quad (15)$$

Annexe II: Contrôle géostrophique

GARRETT et TOULANY (1982) ou GARRETT (1983) ont proposé une formule permettant d'évaluer, de façon simple, le débit dans un détroit.

On imagine qu'un détroit de profondeur h et de largeur L_d sépare deux bassins océaniques (Figure 1) dans lesquels le niveau de la mer, suffisamment loin du détroit, vaut η_1 , pour l'un, et η_2 , pour l'autre, avec

$$\eta_2 > \eta_1. \quad (1)$$

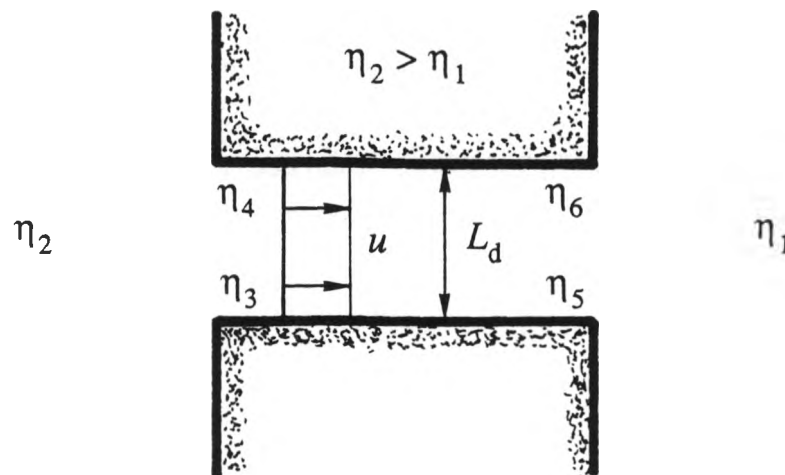


Figure 1. Schéma d'un détroit séparant deux bassins océaniques de niveaux différents.

Cette différence de niveau engendre un écoulement dans le détroit. On suppose que la vitesse u du fluide est constante dans le détroit. Si l'écoulement est, en bonne approximation géostrophique, alors

$$u = \frac{g}{f} \frac{\eta_3 - \eta_4}{L_d} = \frac{g}{f} \frac{\eta_5 - \eta_6}{L_d}, \quad (2)$$

où η_3 , η_4 , η_5 et η_6 représentent les élévations de la surface de mer aux extrémités du détroit (Figure 1).

D'après GARRETT et TOULANY (1982), la différence de niveau selon la largeur du détroit ne peut dépasser la différence de niveau entre les deux bassins. Dans cette optique, il paraît naturel de poser

$$\eta_2 = \eta_3 \quad (3)$$

et

$$\eta_1 = \eta_6. \quad (4)$$

Par conséquent, le débit dans le détroit vaut

$$D = L_d h u = \frac{g h (\eta_2 - \eta_1)}{f}. \quad (5)$$

On voit que la rotation de la Terre ($f \neq 0$) limite le débit dans le détroit. Si le système ne tournait pas, le débit serait beaucoup plus important. C'est le "contrôle géostrophique."

TOULANY et GARRETT (1984) admettent que la théorie du contrôle géostrophique est peut être trop simple: *The GARRETT and TOULANY (1982) model was based on simple physical reasoning and assumptions that might not be universally accepted.* Toutefois, TOULANY et GARRETT (1984) ont montré que la formule (5) est, en gros, valable en se basant sur des études de la propagation d'ondes de Poincaré à travers une ouverture dans une paroi infiniment mince (BUCHWALD, 1971; BUCHWALD et MILES, 1974). En effet, en supposant que la largeur de l'ouverture est nettement plus petite que le rayon externe de déformation de Rossby, R_E , et en supposant que la fréquence des ondes de Poincaré tend vers zéro, TOULANY et GARRETT (1984) ont établi que le débit dans l'ouverture était donné par une expression très similaire à (5). Pour un détroit, on peut penser que, si

$$L_d \ll R_E = \frac{\sqrt{g h}}{f}, \quad (6)$$

la formule (5) permet d'évaluer de façon réaliste le débit dans le détroit. Par contre, si la largeur du détroit est, au moins, du même ordre de grandeur que R_E , il ne semble pas possible de confirmer la validité du contrôle géostrophique.

Notons aussi que la plupart des études ultérieures (ROCHA et CLARKE, 1987; TANG, 1990) font, au préalable une hypothèse qui est équivalente à (6) pour les mouvements de faible fréquence.

En somme, pour qu'un détroit soit un "détroit", il faut que sa largeur soit petite par rapport à une échelle de longueur appropriée, qui est le rayon de déformation de Rossby.

Considérons que la profondeur du Détroit de Bering est d'environ 50 m. Il vient:

$$R_E = \frac{\sqrt{g h}}{f} \approx \frac{(9.81 * 50)^{1/2}}{1.33 * 10^{-4}} \approx 1.7 * 10^5 \text{ m}. \quad (7)$$

La largeur du détroit étant de $0.85 * 10^5$ m, la condition (6) n'est pas respectée. Donc, le Détroit de Bering n'est pas vraiment un détroit — pour la propagation des ondes de Poincaré. Y appliquer la théorie du contrôle géostrophique, comme le font OVERLAND et ROACH (1987), est donc, à tout le moins, hasardeux.

Annexe III: Mélange et upwelling

En analysant des cartes de quantités scalaires mesurées *in situ*, il n'est pas toujours facile de déterminer les mécanismes hydrodynamiques qui ont forgé la distribution spatiale de ces quantités scalaires au moment de la mesure. Par exemple, la présence d'eau plus froide en surface n'est pas forcément due à un upwelling. En effet, un accroissement du mélange turbulent peut très bien avoir détruit une thermocline existant précédemment, homogénéisant ainsi la colonne d'eau et causant donc la chute de la température de surface.

On peut cependant penser que la répartition spatiale des isothermes n'est pas la même si le refroidissement de l'eau de surface est occasionné par un upwelling ou par l'intensification du mélange vertical. Nous allons tenter de le montrer en étudiant un cas très simple, dont nous pensons qu'il idéalise cependant assez bien l'hydrodynamique du Déroit d'Anadyr.

Imaginons qu'une colonne d'eau caractérisée par une thermocline marquée, située à mi hauteur, soit advectée de la gauche vers la droite sur la Figure 1 (a). Il ne s'agit pas d'un écoulement bidimensionnel se déroulant dans le plan de coupe de la Figure 1. Disons simplement que la direction principale de l'advection horizontale est de la gauche vers la droite. On va discuter la distribution spatiale de la température mais on peut remplacer cette variable par une autre quantité scalaire.

Examinons un premier scénario. En un certain point x_0 de l'écoulement, la turbulence augmente de sorte que la pycnocline soit détruite et que l'eau s'homogénéise. Si les échanges air-mer et le cisaillement du courant ne sont pas trop importants, on peut sans doute estimer que la température moyenne de la colonne d'eau homogène et de la colonne d'eau stratifiée sont égales. Par conséquent, en se déplaçant de l'amont vers l'aval, on observe que les isothermes s'ouvrent en éventail, le nombre d'isothermes s'élevant vers la surface étant égal au nombre de celles se dirigeant vers le fond (Figure 1 (b)). En aval de x_0 , la température de surface équivaut à peu près à celle existant au milieu de la pycnocline, et est donc inférieure à la température de surface prévalant en amont.

Imaginons un autre mécanisme de refroidissement de la température de surface. Supposons que le mélange turbulent ne joue pas un rôle déterminant mais que pour $x > x_0$ (Figure 1 (c)) la vitesse verticale soit positive. Dans ce cas, à mesure que l'on se déplace vers l'aval, on observe l'élévation de toutes les isothermes vers la surface de sorte qu'à partir d'un certain point la température de surface est égale à celle de fond. La colonne d'eau devient homogène, comme dans le cas précédent, mais elle est plus froide (Figure 1 (c)).

Dans une mer peu profonde, on ne peut généralement pas négliger le mélange turbulent. Combinant ce dernier à un upwelling, on obtient alors une distribution des isothermes qui devrait être assez semblable à celle de la Figure 1 (d)).

Evidemment, les processus que nous venons de schématiser sont des caricatures. Dans la réalité, rien de tel n'est jamais observé. Cependant, on peut penser que les scénarios que nous venons

d'esquisser peuvent servir de guide pour interpréter des données acquises *in situ*. Ainsi, on imagine que x_0 symbolise la position du Déroit d'Anadyr et que x augmente dans la direction du Déroit de Bering. On voit qu'il existe une remarquable similitude entre le schéma 1 (d) et les données illustrées par les Figures IV.13-IV.18. On en conclut que, dans le Déroit d'Anadyr, une importante advection verticale et une intensification du mélange turbulent combinent leur action pour réduire fortement, voire supprimer, la stratification en aval du Déroit.

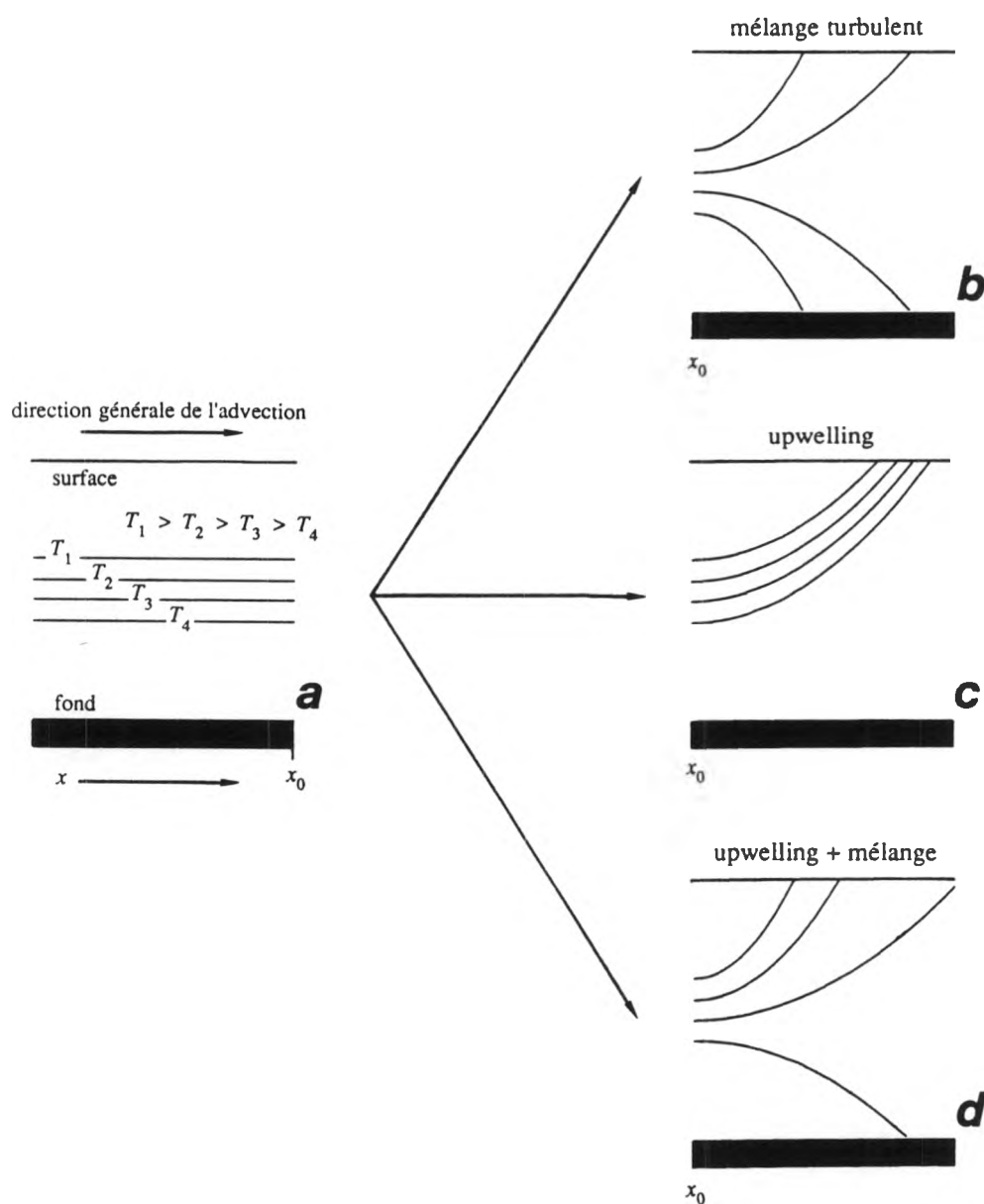


Figure 1. Illustration de trois scénarios conduisant à une chute de la température de surface.

Annexe IV: Pycnocline et moyennes climatiques

Le terme “pycnocline” désigne une région où le gradient vertical de poussée est très grand, ce qui conduit à une importante inhibition de la turbulence. Cette définition a un sens à la méso-échelle mais, à une échelle de temps supérieure, le concept même de pycnocline a beaucoup moins de signification.

On sait que la pycnocline peut descendre à une vitesse de plusieurs mètres, voire plusieurs dizaines de mètres, par jour sous l'action de la turbulence induite par un coup de vent, par exemple. D'autre part, un fort upwelling peut faire remonter la pycnocline à des vitesses du même ordre de grandeur. Donc, si l'on effectue une moyenne sur une dizaine de jours, ou plus, du profil vertical de poussée, il se peut que ce profil soit considérablement plus lisse que celui défini à la méso-échelle, même si à chaque instant une pycnocline très marquée existe. Nous allons illustrer cela par un exemple simple avant de nous tourner vers les données d'ISHTAR.

Considérons le profil de poussée correspondant au cas typique évoqué plus haut: deux couches turbulentes homogènes séparées par une pycnocline très marquée. Mathématiquement, on idéalise cette situation par un profil de poussée “en marche d'escalier”, c'est à dire (Figure 1)

$$b = b_- , \quad 0 \leq z < z_p , \quad (1a)$$

$$b = b_+ , \quad z_p < z \leq h , \quad (1b)$$

où $z = 0$ correspond au fond et $z = h$, à la surface. La pycnocline se trouve à une distance z_p du fond. La dérivée verticale de la poussée est nulle partout sauf en $z = z_p$, où elle est infinie.

Supposons maintenant que, en raison de la variabilité à la méso-échelle, la pycnocline se déplace selon un mouvement que l'on considère comme périodique — pour simplifier l'analyse. Par exemple,

$$z_p = \frac{z_{\min} + z_{\max}}{2} + \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} \sin(\omega_p t) . \quad (2)$$

L'altitude de la pycnocline varie entre $z_{\min}$ et $z_{\max}$. Sur une période de mouvement, $2\pi / \omega_p$, la poussée climatique moyenne vaut:

$$\langle b \rangle = b_- , \quad 0 \leq z < z_{\min} , \quad (3a)$$

$$\langle b \rangle = \frac{b_- + b_+}{2} + \frac{b_+ - b_-}{\pi} \arcsin\left(\frac{2z - (z_{\min} + z_{\max})}{z_{\max} - z_{\min}}\right) , \quad z_{\min} \leq z \leq z_{\max} , \quad (3b)$$

$$\langle b \rangle = b_+, \quad z_{\max} < z \leq h. \quad (3c)$$

Le profil de $\langle b \rangle$ est nettement plus lisse que celui de b (Figure 1).

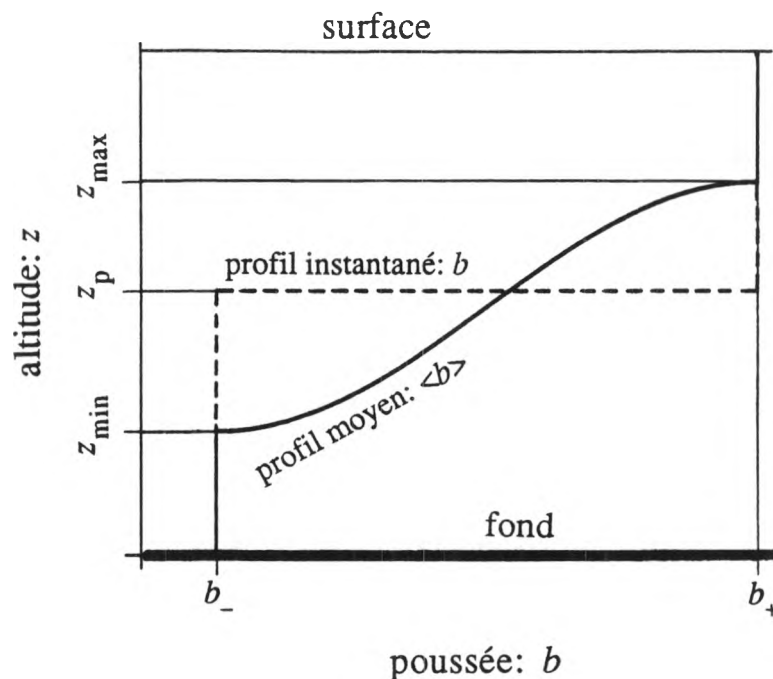


Figure 1. Profils de poussée instantanée et de poussée moyenne selon les équations (1)-(3).

Bien entendu, l'exemple que nous venons de présenter est une caricature. Cependant, il met en lumière un point essentiel: la moyenne d'un profil de poussée contenant une pycnocline ne ressemble en rien au profil instantané. Cette conclusion est confortée par les données d'ISHTAR. Admettons que le modèle variationnel inverse fournisse une fonction d'interpolation équivalant à une moyenne de l'état du système sur l'intervalle de temps qui sépare la première mesure de la dernière. Dans ce cas, les profils de température de la Figure IV.14 correspondent à une moyenne sur plusieurs étés alors que ceux de la Figure IV.16 correspondent à une moyenne sur la durée de la croisière TT222, à savoir quatre semaines. On constate que les gradients de température sont plus marqués dans la Figure IV.16 que dans la Figure IV.14. Bien entendu, ils sont encore plus marqués dans la Figure IV.11 qui illustre le résultat de mesures quasi-instantanées.

Sans grand risque de se tromper, on peut faire l'hypothèse que le profil à la méso-échelle de déviation de vitesse horizontale, $\hat{u}$, ne ressemble, lui non plus, en rien au profil moyen. Tous les profils moyens sont probablement beaucoup plus lisses que leurs équivalents à la méso-échelle.

On sait qu'il est essentiel que le modèle numérique puisse évaluer correctement N^2 et M^2 qui, par le biais du nombre de Richardson, influent sur l'inhibition de la turbulence par la stratification. A l'évidence, il serait tout à fait inopportun de calculer N^2 et M^2 sur base des profils moyens de

poussée et de vitesse. Ceci renforce la thèse, développée dans la Section V.3, selon laquelle il est probablement impossible de bâtir des équations susceptibles de conduire au calcul direct de la circulation générale.

Annexe V: Comportement asymptotique ($t \rightarrow \infty$) du modèle 3D

1. Introduction

Les modèles marins doivent faire face à un problème commun: le manque relatif de données rend difficile la mise au point d'un état initial réaliste du système étudié. Par conséquent, avec les informations disponibles, on bâtit, au mieux, une situation initiale et on espère que l'influence de l'état imposé au début de la simulation, en $t = 0$, va s'amoinrir au cours du temps. En d'autres termes, on souhaite que le système modélisé "perde progressivement la mémoire de ses conditions initiales au fur et à mesure que le temps passe". On fait donc, implicitement ou explicitement, l'hypothèse que le comportement asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ des équations du modèle mathématique ne dépend pas des conditions initiales. Cette supposition apparaît d'autant plus valable que les équations des modèles marins, bi- ou tri-dimensionnels, contiennent des termes dissipatifs, dont on pense généralement qu'ils "font oublier les conditions initiales et assurent l'unicité du comportement asymptotique".

Cependant, nous avons affirmé dans les Chapitres V et VI que le risque de voir le système "conserver la mémoire de ses conditions initiales" était grand. De plus, nous avons subodoré que la stratification jouait un rôle crucial. En fait, nous pensons que l'état du système peut, selon la nature des conditions initiales, bifurquer soit vers un état stratifié, soit vers un état non stratifié.

Notre opinion paraît indéfendable au vu du rôle en principe "bénéfique" des termes dissipatifs. Il importe cependant de réaliser que la diffusion turbulente verticale — un des effets dissipatifs — ne ressemble en rien à la diffusion présente dans l'"équation de la chaleur", qui est l'exemple classiquement invoqué pour illustrer l'effet de la diffusion. Dans ce cas, la diffusion assure effectivement l'unicité de la solution asymptotique de l'équation pour $t \rightarrow \infty$. Mais, le coefficient de diffusion est constant. Dans la diffusion turbulente verticale, le coefficient de diffusion n'est pas constant; il peut même être quasi nul, là où la stratification est forte.

Quand le coefficient de diffusion est une fonction de la solution de l'équation considérée et, en particulier, quand il peut s'annuler, l'effet du terme de diffusion sur la solution peut ne pas être "diffusif", au sens classique du terme — voir, par exemple, DELEERSNIJDER (1991a).

Dans la Section V.4, nous avons décrit, en quelques phrases, un scénario dans lequel le système pouvait rester stratifié ou bifurquer vers un état non stratifié — et, pour éviter cette bifurcation, nous avons montré qu'il fallait concevoir avec attention la procédure de démarrage du modèle. Nous allons tenter de confirmer notre analyse en apportant des arguments mathématiques.

2. Préliminaires

Avant tout, il faut préciser que " $t \rightarrow \infty$ " signifie " t nettement plus grand qu'un temps caractéristique approprié". Comme on va se focaliser sur le rôle de la diffusion turbulente verticale, le "temps caractéristique approprié" est l'échelle de temps de cette diffusion,

$$\mathcal{T}_{T,v} \approx \frac{\mathcal{L}_v^2}{\lambda_y^v}. \quad (1)$$

Ainsi, " $t \rightarrow \infty$ " veut dire " $t \gg \mathcal{T}_{T,v}$ ".

A l'échelle spatiale de notre modèle, l'advection est beaucoup plus "lente" que la diffusion turbulente verticale. La diffusion moléculaire agit sur une échelle de temps encore plus longue que celle de l'advection. Ainsi, sur un temps nettement plus grand que $\mathcal{T}_{T,v}$, la diffusion moléculaire peut homogénéiser la colonne d'eau, ce que la diffusion turbulente, inhibée dans la pycnocline, ne peut pas faire. Ici, on veut ignorer le processus de diffusion moléculaire parce qu'il est trop lent. Donc, pour nous, " $t \rightarrow \infty$ " signifie

$$\mathcal{T}_{T,v} \ll t \ll \mathcal{T}_v, \quad (2)$$

où $\mathcal{T}_v$ désigne l'échelle de temps de la diffusion moléculaire verticale,

$$\mathcal{T}_v \approx \frac{\mathcal{L}_v^2}{\lambda_y^v}. \quad (3)$$

D'autre part, on va utiliser plusieurs fois le théorème suivant:

$$\text{si } \mu(\zeta) \geq 0 \text{ et } \frac{d\mu}{d\zeta} > 0,$$

$$\text{alors } (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \bullet [\mu(|\mathbf{b}|) \mathbf{b} - \mu(|\mathbf{a}|) \mathbf{a}] > 0, \text{ ssi } \mathbf{b} \neq \mathbf{a}, \quad (4a)$$

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \bullet [\mu(|\mathbf{b}|) \mathbf{b} - \mu(|\mathbf{a}|) \mathbf{a}] = 0, \text{ ssi } \mathbf{b} = \mathbf{a}. \quad (4b)$$

La démonstration de ce théorème étant simple, on ne la reproduit pas ici.

3. Modèle bidimensionnel

Considérons d'abord un modèle hydrodynamique bidimensionnel, intégré sur la profondeur. On applique quelques hypothèses simplificatrices, qui sont vérifiées dans de nombreux cas. On néglige η devant h . On suppose que le nombre de Rossby est petit: on supprime les termes d'advection de quantité de mouvement. On ne tient pas compte de la diffusion horizontale: puisque c'est un phénomène "lent" et que la justification de la présence de cette diffusion dans les équations est plutôt

numérique, il faut éviter que l'unicité éventuelle du comportement asymptotique repose sur ces termes.

Les équations du modèle ainsi simplifié s'écrivent:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \bullet (h \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + f \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{u}} = -g \nabla_h \eta - \frac{\tau^b}{h} + \frac{\tau^s}{h} + \mathbf{F}, \quad (6)$$

où la tension de fond est paramétrisée classiquement selon (V.15) et où $\mathbf{F}$ symbolise les *forcings* éventuels — force astronomique de marée ou gradient de pression atmosphérique. Conformément à DAUBERT et GRAFFE (1967), à la frontière $\delta\mathcal{S}$ du domaine de calcul $\mathcal{S}$, on impose une condition sur η ou sur la vitesse normale $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$ — $\mathbf{n}$ désignant la normale extérieure au domaine. Supposons, pour simplifier l'analyse, que les conditions aux limites soient toutes du type "Dirichlet" — valeur imposée.

On examine l'évolution de deux solutions de (5) et (6), notées $(\eta_1, \bar{\mathbf{u}}_1)$ et $(\eta_2, \bar{\mathbf{u}}_2)$. Ces solutions sont soumises aux mêmes conditions aux limites et à des *forcings* identiques. Cependant, on prescrit des conditions initiales différentes. On symbolise la différence entre les deux solutions par

$$Z = \eta_2 - \eta_1, \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{u}}_1. \quad (8)$$

Par une simple soustraction, on obtient les équations régissant l'évolution de Z et $\bar{\mathbf{U}}$:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \nabla_h \bullet (h \bar{\mathbf{U}}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + f \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{U}} = -g \nabla_h Z - \frac{C_{D,2D}}{h} (|\bar{\mathbf{u}}_2| \bar{\mathbf{u}}_2 - |\bar{\mathbf{u}}_1| \bar{\mathbf{u}}_1). \quad (10)$$

Après quelques calculs, on aboutit à l'équation d'évolution d'une mesure de l'écart entre les deux solutions, à savoir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} h |\bar{\mathbf{U}}|^2 + \frac{1}{2} g Z^2 \right) = -g \nabla_h \bullet (Z h \bar{\mathbf{U}}) - C_{D,2D} \bar{\mathbf{U}} \bullet (|\bar{\mathbf{u}}_2| \bar{\mathbf{u}}_2 - |\bar{\mathbf{u}}_1| \bar{\mathbf{u}}_1). \quad (11)$$

Sur $\delta\mathcal{S}$, Z ou $\bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n}$ est nul. Donc, en intégrant (11) sur $\mathcal{S}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{1}{2} h |\bar{\mathbf{U}}|^2 + \frac{1}{2} g Z^2 \right) d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{S}} C_{D,2D} \bar{\mathbf{U}} \bullet (|\bar{\mathbf{u}}_2| \bar{\mathbf{u}}_2 - |\bar{\mathbf{u}}_1| \bar{\mathbf{u}}_1) d\mathcal{S}. \quad (12)$$

En vertu de (4), le second membre de cette relation est strictement négatif sauf si $\bar{u}_2 = \bar{u}_1$. Dans ce cas, Z doit être égale à une constante, qui est nulle si l'élévation est imposée au moins sur un tronçon de frontière.

Ainsi, l'écart entre les deux solutions ne peut que décroître. Par conséquent, asymptotiquement, les deux champs de vitesse deviennent égaux tandis que η_2 et η_1 ne peuvent différer, en tout point du domaine $\mathcal{D}$, que d'une constante, ce qui n'a aucune conséquence dynamique dans les équations (5)-(6). Après un temps suffisant, la solution ne dépend quasiment plus de l'état initial. Par conséquent, la forme de la condition initiale importe peu. Tous ceux qui utilisent des modèles bidimensionnels peuvent confirmer cette conclusion, qui reste généralement vraie même si les équations du modèle sont plus complètes que (5)-(6).

L'examen de l'unicité du comportement asymptotique des solutions d'un modèle bidimensionnel est inspiré de MARCHUK et KAGAN (1984). Nous allons étendre cette technique à un problème tridimensionnel.

4. Modèle tridimensionnel

Analyser le comportement asymptotique des équations tridimensionnelles complètes paraît très difficile, les équations étant très complexes. Il faut effectuer des simplifications.

4.1 Fermeture turbulente

On ne peut considérer les diffusivités turbulentes comme des constantes, puisque l'on pense que leurs variations peuvent jouer un rôle déterminant dans le problème que nous examinons. Il faut cependant simplifier quelque peu l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente. Il est très réaliste de supposer que la production par cisaillement, l'inhibition par la stratification et la dissipation visqueuse s'équilibrent. Dans cette hypothèse, combinant (I.40), (I.41), (I.44)-(I.46), on obtient

$$v_T = (L_{T,0})^2 M (1 - Rf)^{5/2}, \quad (13)$$

$$\lambda_T^b = \gamma (L_{T,0})^2 M (1 - Rf)^3. \quad (14)$$

Comme l'indique (I.43), $(1 - Rf)$ est une fonction décroissante du nombre de Richardson. Par conséquent,

$$\frac{\partial(v_T, \lambda_T^b)}{\partial M} > 0 \quad (15)$$

et

$$\frac{\partial(v_T, \lambda_T^b)}{\partial N^2} < 0. \quad (16)$$

Ce résultat est en parfait accord avec la connaissance intuitive générale des processus turbulents. Si le cisaillement augmente, la turbulence s'intensifie, conduisant à un accroissement des diffusivités turbulentes. Par contre, une augmentation du gradient de poussée inhibe la turbulence, entraînant une diminution des diffusivités turbulentes.

Bien que les inégalités (15) et (16) ne soient rigoureusement justifiées que dans le cadre de la théorie simplifiée utilisée dans cette annexe, on peut penser que (15) et (16) rendent assez bien compte du comportement général de notre fermeture turbulente, et de celui de beaucoup d'autres fermetures.

4.2 Champ de vitesse horizontale

Supposons que la stratification soit fixe. Faisons aussi l'hypothèse que l'essentiel du gradient horizontal de pression soit dû à la pente de la surface libre. Considérons que les simplifications utilisées pour le modèle 2D restent valables. Dans ce cas, il reste à examiner le comportement des équations (5) et (6), auxquelles on ajoute une équation pour la déviation de vitesse,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + f \mathbf{e}_3 \times \hat{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial x_3} (v_T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_3}) + \frac{\tau^b}{h} - \frac{\tau^s}{h}. \quad (17)$$

Comme précédemment, on examine l'évolution de deux solutions, $(\eta_1, \mathbf{u}_1)$ et $(\eta_2, \mathbf{u}_2)$, qui sont soumises à des *forcings* et des conditions aux limites identiques mais dont les conditions initiales diffèrent. On pose

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1. \quad (18)$$

A l'issue d'un certain nombre de calculs, on montre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \int_{-h}^0 \left(\frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{h} Z^2 \right) dx_3 d\mathcal{S} = \\ - \int_{\mathcal{S}} \int_{-h}^0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_3} \cdot \left(v_{T,2} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_2}{\partial x_3} - v_{T,1} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_1}{\partial x_3} \right) dx_3 d\mathcal{S}. \end{aligned} \quad (19)$$

Tenant compte de (15), utilisant (4), on voit que le second membre de cette relation est négatif, sauf si $\mathbf{U} = 0$. On en tire la même conclusion que pour le modèle bidimensionnel: à mesure que le temps passe, l'écart entre les deux solutions s'amenuise.

4.3 Champ de poussée

On suppose que les équations pour la température et la salinité peuvent se combiner en une équation simplifiée pour la poussée:

$$\frac{\partial(H b)}{\partial \tilde{t}} + \vec{\nabla}_h \bullet (H \mathbf{u} b) + \frac{\partial(H \tilde{w} b)}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{L^2}{H} \lambda_T^b \frac{\partial b}{\partial \tilde{x}_3} \right). \quad (20)$$

Au fond, le flux turbulent de poussée est nul,

$$\left[\frac{L}{H} \lambda_T^b \frac{\partial b}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=0} = 0, \quad (21)$$

tandis qu'à la surface le flux turbulent de poussée est donné par une expression du type

$$\left[\frac{L}{H} \lambda_T^b \frac{\partial b}{\partial \tilde{x}_3} \right]_{\tilde{x}_3=L} = \alpha_b + \beta_b b(\tilde{x}_3=L), \quad (22)$$

où α_b et β_b sont, en toute généralité, des fonctions du temps et de la position. La relation (22) constitue une idéalisation des paramétrisations permettant d'évaluer les flux de surface de variables scalaires (BUSCH, 1977). Dans cet esprit, il faut

$$\beta_b \leq 0. \quad (23)$$

Aux frontières solides, ainsi qu'à la surface, le flux advectif de poussée est nul. Aux frontières en mer ouverte "entrantes", on fixe la valeur de la poussée alors que, aux frontières "sortantes", aucune condition n'est, en principe, requise.

On analyse l'évolution de deux solutions, b_1 et b_2 , dont la différence est notée

$$B = b_2 - b_1. \quad (24)$$

Ces deux solutions ont les mêmes conditions aux limites mais des conditions initiales différentes. On suppose que les champs de vitesse et d'élévation sont identiques pour b_1 et b_2 .

Manipulant (20)-(24), on aboutit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \int_0^L \frac{1}{2} H B^2 d\tilde{x}_3 d\mathcal{S} = & - \int_{\delta\mathcal{S}} \int_0^L \frac{1}{2} \mathbf{n} \bullet (H \mathbf{u} B^2) d\tilde{x}_3 d\delta\mathcal{S} + \\ & \int_{\mathcal{S}} L \beta_b [B(\tilde{x}_3=L)]^2 d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}} \int_0^L \frac{L^2}{H} \frac{\partial B}{\partial \tilde{x}_3} (\lambda_{T,2}^b \frac{\partial b_2}{\partial \tilde{x}_3} - \lambda_{T,1}^b \frac{\partial b_1}{\partial \tilde{x}_3}) d\tilde{x}_3 d\mathcal{S}. \end{aligned} \quad (25)$$

Les deux premiers termes du membre de droite de (25) sont négatifs ou nuls. Par contre, on ne peut appliquer le théorème (4) pour prouver que le dernier terme de (25) est négatif. En fait, ce terme peut être positif ou négatif, selon les valeurs particulières des inconnues. Ainsi, l'écart initial entre deux

solutions peut fort bien augmenter. Soulignons que ce problème est dû à la diffusion turbulente et non à l'advection qui, si elle était seule, aurait tendance à faire converger les deux solutions l'une vers l'autre.

4.4 Interprétation

Il semble que seule la stratification soit responsable de la non-unicité du comportement asymptotique. Ceci peut facilement s'interpréter physiquement.

Supposons que, pour une raison quelconque, une petite perturbation du champ de vitesse horizontale intervienne. Si cette perturbation augmente le cisaillement, alors la viscosité turbulente augmente — voir (15) —, la diffusion de quantité de mouvement devient plus active et l'augmentation du cisaillement tend à se résorber. Par contre, si la perturbation tend à diminuer le cisaillement, le processus inverse se déroule. Donc, dans un cas comme dans l'autre, l'amplitude d'une petite perturbation tend à décroître. Ainsi, si l'on regarde le champ de vitesse $\mathbf{u}_2$ comme une perturbation de $\mathbf{u}_1$, on comprend pourquoi $\mathbf{u}_2$ se "rapproche" progressivement de $\mathbf{u}_1$.

Pour la poussée, on peut tenir un raisonnement semblable. Si une petite perturbation tend à amplifier le gradient vertical de poussée, alors la diffusivité turbulente de poussée diminue. Par conséquent, le gradient de poussée peut très bien continuer de grandir. Ainsi, il n'est pas sûr qu'une perturbation de poussée tende à se résorber.

On peut penser que l'advection assure finalement l'unicité du comportement asymptotique. Ce n'est pas certain. Mais, en tout cas, le temps caractéristique advectif,

$$\mathcal{T}_A \approx \frac{\mathcal{L}_h}{U} \approx \frac{\mathcal{L}_v}{W}, \quad (26)$$

dépasse nettement l'échelle de temps de la diffusion turbulente. Donc, l'action de l'advection ne peut être que plus lente que celle de la diffusion turbulente.

4.5 Remarque concernant les mers profondes ou les océans

Soulignons finalement un point important. L'analyse que nous venons de faire ne s'applique pas à une mer profonde. En effet, dans une telle mer, les sources d'énergie turbulente ne sont pas suffisamment intenses pour homogénéiser toute la colonne d'eau. Le vent produit de la turbulence dans la couche de surface, épaisse de quelques dizaines à quelques centaines de mètres au plus. Près du fond, on trouve aussi une couche turbulente, dont la hauteur ne dépasse pas quelques dizaines de mètres. En dehors des couches limites de fond et de surface, l'écoulement est essentiellement laminaire (WOODS, 1980). Cependant, les ondes internes peuvent inter-agir non-linéairement, conduisant à la formation de tourbillons qui constituent le sommet d'une cascade turbulente locale (WOODS, 1980). Ces tourbillons n'occupent pas tout le volume de la mer: les zones turbulentes représentent au plus quelques pourcents du volume des mers profondes ou des océans — on parle de turbulence "intermittente". Ainsi, dans un océan, toute la colonne d'eau ne peut devenir turbulente. Donc, la bifurcation vers un état non stratifié ne peut pas se produire.

Références

- AAGAARD K., 1988, *Some thoughts on the large-scale circulation of the Arctic Ocean*, In: Proc. of the Second Conference on Polar Meteorology and Oceanography, March 29-31, Madison, Wisconsin, Published by the American Meteorological Society, pp. 1 – 3
- AAGAARD K., A.T. ROACH and J.D. SCHUMACHER, 1985, *On the wind-driven variability of the flow through Bering Strait*, Journal of Geophysical Research, **90**, 7213 – 7221
- ADAM P., 1990, Modélisation Mathématique Tridimensionnelle d'un Ecosystème Marin – Application à la Région du Détroit de Béring. Mémoire de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 159 pp.
- AITSAM A., 1991, Communication personnelle
- ARAKAWA A. and V.R. LAMB, 1977, *Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model*, In: Methods in Computational Physics (Vol. 17) – General Circulation Models of the Atmosphere, J. CHANG, Editor, Academic Press, pp. 173 – 265
- ARAKAWA A. and M.J. SUAREZ, 1983, *Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates*, Monthly Weather Review, **111**, 34 – 45
- ASSELIN R., 1972, *Frequency filters for time integrations*, Monthly Weather Review, **100**, 487 – 490
- BACKHAUS J.O., P.B. CREAN and D.K. LEE, 1987, *On the application of a three-dimensional numerical model to the waters between Vancouver Island and the mainland coast of British Columbia and Washington State*, In: Three-Dimensional Coastal Ocean Models, N.S. HEAPS, Editor, American Geophysical Union, pp. 149 – 175
- BATCHELOR G.K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 615 pp.
- BATTEEN M.L. and Y.-J. HAN, 1981, *On the computational noise of finite-difference schemes used in ocean models*, Tellus, **33**, 387 – 396
- BAUMERT H. and G. RADACH, 1991, *Hysteresis of turbulence in tidal flows: a model study*, à paraître dans Journal of Geophysical Research
- BECKERS J.-M., 1988, Modélisation Mathématique et Numérique de la Méditerranée Occidentale. Mémoire de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 184 pp.
- BECKERS J.-M., 1991a, *Application of the GHER 3D general circulation model to the Western Mediterranean*, Journal of Marine Systems, **1**, 315 – 332
- BECKERS J.-M., 1991b, *Analytical linear numerical stability conditions for an anisotropic 3D advection-diffusion equation*, à paraître dans SIAM Journal of Numerical Analysis
- BECKERS J.-M. and E. DELEERSNIJDER, 1991, *Stability of a FBTCS scheme applied to the propagation of shallow-water inertia-gravity waves on various space grids*, soumis à Journal of Computational Physics
- BESTGEN L. et M. DEVILLE, 1987, Comparaison de Méthodes d'Intégration Numérique pour l'Equation d'Advection Diffusion - Rapport Final. Unité de Mécanique Appliquée, Université Catholique de Louvain, Etude réalisée pour le compte de l'UGMM, BH/86/22
- BLACKADAR A.K., 1962, *The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere*, Journal of Geophysical Research, **4**, 333 – 355
- BLECK R. and L.T. SMITH, 1990, *A wind-driven isopycnic coordinate model of the north and equatorial Atlantic Ocean, 1. Model development and supporting experiment*, Journal of Geophysical Research, **95**, 3273 – 3285
- BLUMBERG A.F. and H.J. HERRING, 1987, *Circulation modelling using orthogonal curvilinear coordinates*, In: Three-Dimensional Models of Marine and Estuarine Dynamics, J.C.J. NIHOUL and B.M. JAMART, Editors, Elsevier, pp. 55 – 88
- BLUMBERG A.F. and L.H. KANTHA, 1985, *Open boundary condition for circulation models*, Journal of Hydraulic Engineering, **111**, 237 – 255
- BLUMBERG A.F. and G.L. MELLOR, 1987, *A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model*, In: Three-Dimensional Coastal Ocean Models, N.S. HEAPS, Editor, American Geophysical Union, pp. 1 – 16

- BLUMEN W., 1972, *Geostrophic adjustment*, Reviews of Geophysics and Space Physics, 10, 485 – 528
- BOUSSINESQ J., 1877, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mém. Prés. par Div. Savants. à l'Académie Sci. (Paris), 23, 1 – 680
- BRASSEUR P.P., 1989, *Analyse de Données Océanographiques par le Modèle Variationnel Inverse*. Mémoire de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 139 pp.
- BRASSEUR P.P., 1991, *A variational inverse method for the reconstruction of general circulation fields in the Northern Bering Sea*, Journal of Geophysical Research, 96, 4891 – 4907
- BRASSEUR P.P. and J.A. HAUS, 1991, *Application of a 3-D variational inverse model to the analysis of ecohydrodynamic data in the Northern Bering and Southern Chukchi Seas*, Journal of Marine Systems, 1, 383 – 401
- BUCHWALD V.T., 1971, *The diffraction of tides by a narrow channel*, Journal of Fluid Mechanics, 46, 501 – 511
- BUCHWALD V.T. and J.W. MILES, 1974, *Kelvin-wave diffraction by a gap*, Australian Mathematical Society Journal, 17, 29 – 34
- BUSCH N.E., 1977, *Fluxes in the surface boundary layer over the sea*, In: Modelling and Prediction of the Upper Layers of the Ocean, E.B. KRAUS, Editor, Pergamon Press, pp. 72 – 91
- CHAPMAN D.C., 1985, *Numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropic coastal ocean model*, Journal of Physical Oceanography, 15, 1060 – 1075
- CLARK T.L. and W.D. HALL, 1979, *A numerical experiment on stochastic condensation theory*, Journal of the Atmospheric Sciences, 36, 470 – 483
- COACHMAN L.K., 1986, *Circulation, water masses, and fluxes on the southeastern Bering Sea shelf*, Continental Shelf Research, 5, 23 – 108
- COACHMAN L.K. and K. AAGAARD, 1966, *On the water exchange through Bering Strait*, Limnology and Oceanography, 11, 44 – 59
- COACHMAN L.K. and K. AAGAARD, 1988, *Transports through Bering Strait: annual and interannual variability*, Journal of Geophysical Research, 93, 15535 – 15539
- COACHMAN L.K. and V.V. SHIGAIEV, 1991, *Northern Bering-Chukchi sea ecosystem: the physical basis*, à paraître dans Continental Shelf Research
- COACHMAN L.K., K. AAGAARD and R.B. TRIPP, 1975, Bering Strait - The Regional Physical Oceanography. University of Washington Press, 172 pp.
- CSANADY G.T., 1977, *The coastal jet conceptual model in the dynamics of shallow seas*, In: The Sea (Vol. 6), E.D. GOLDBERG, I.N. McCAYE, J.J. O'BRIEN and J.H. STEELE, Editors, Wiley, pp. 117 – 144
- CSANADY G.T., 1984, Circulation in the Coastal Ocean, Reidel, 279 pp.
- CUSHMAN-ROISIN B., 1984, *Analytical, linear stability criteria for the leap-frog, Dufort-Frankel Method*, Journal of Computational Physics, 53, 227 – 239
- DAHLQUIST G. and A. BJÖRCK, 1974, Numerical Methods, Prentice-Hall, 573 pp.
- DAUBERT A. and O. GRAFFE, 1967, *Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents — Application aux estuaires*, La Houille Blanche, 8, 847 – 860
- DAVIES A.M., 1987, *Spectral models in continental shelf sea oceanography*, In: Three-Dimensional Coastal Ocean Models, N.S. HEAPS, Editor, American Geophysical Union, pp. 71 – 106
- DAVIES A.M., 1990, *On extracting tidal current profiles from vertically integrated two-dimensional hydrodynamic models*, Journal of Geophysical Research, 95, 18317 – 18342
- DAVIES A.M. and J.E. JONES, 1991, *On the numerical solution of the turbulence energy equations for wave and tidal flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 12, 17 – 41
- DE KOK J.M., 1991, *A 3-D finite difference model for the computation of near-field and far-field transport of suspended matter near a river mouth*, à paraître dans Continental Shelf Research
- DELEERSNIJDER E., 1989, *Upwelling and upsloping in three-dimensional marine models*, Applied Mathematical Modelling, 13, 462 – 467
- DELEERSNIJDER E., 1991a, *Revisiting Nihoul's model for oil slicks transport and spreading on the sea*, à paraître dans Ecological Modelling
- DELEERSNIJDER E., 1991b, *Comment on "A Variational Inverse Method for the Reconstruction of General Circulation Fields in the Northern Bering Sea" by Pierre P. Brasseur*, soumis à Journal of Geophysical Research
- DELEERSNIJDER E. and J.-M. BECKERS, 1991, *On the use of the σ -coordinate system in regions of large bathymetric variations*, à paraître dans Journal of Marine Systems

- DELEERSNIJDER E. and J.C.J. NIHOUL, 1988a, General Circulation in the Northern Bering Sea. ISHTAR Annual Progress Report, University of Liège, 392 pp.
- DELEERSNIJDER E. and J.C.J. NIHOUL, 1988b, *Turbulent fields associated with the general circulation in the Northern Bering Sea*, In: Small-Scale Turbulence and Mixing in the Ocean. J.C.J. NIHOUL and B.M. JAMART, Editors, Elsevier, pp. 77 – 93
- DELEERSNIJDER E., A. NORRO and E. WOLANSKI, 1991, *A three-dimensional model of the water circulation around an island in shallow water*, à paraître dans Continental Shelf Research
- DELEERSNIJDER E. and E. WOLANSKI, 1990, *Du rôle de la dispersion horizontale de quantité de mouvement dans les modèles marins tridimensionnels*, In: Journées Numériques de Besançon 1990 - Courants Marins. J.-M. CROLET and P. LESAIN, Editors, Publications Mathématiques de Besançon, pp. 39 – 50
- DELEERSNIJDER E., E. WOLANSKI and A. NORRO, 1989, *Numerical simulation of the three-dimensional tidal circulation in an island's wake*, In: Computers and Experiments in Fluid Flow. G.M. CARLOMAGNO and C.A. BREBBIA, Editors, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag, pp. 355 – 381
- DJENIDI S., 1987, Modèles Mathématiques et Dynamique des Mers Continentales d'Europe Septentrionale. Thèse de Doctorat, Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées n° 110, Université de Liège, 218 pp.
- EISMA D., 1988, *An introduction to the geology of continental shelves*, In: POSTMA H. and J.J. ZIJLSTRA, Editors, Continental Shelves (Ecosystems of the World, No. 27), Elsevier, pp. 39 – 91
- FAVORITE F., A.J. DODIMEAD and K. NASU, 1976, Oceanography of the Subarctic Pacific Region, 1960-71. International North Pacific Fishery Commission Bulletin No 33, 187 pp.
- FREEMAN N.G., A.M. HALE and M.B. DANARD, 1972, *A modified sigma equations' approach to the numerical modeling of Great Lakes hydrodynamics*, Journal of Geophysical Research, 77, 1050 – 1060
- GADD A.J., 1978, *A split-explicit integration scheme for numerical weather prediction*, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 104, 569 – 582
- GARRETT C., 1983, *Variable sea level and strait flows in the Mediterranean: a theoretical study of the response to meteorological forcing*, Oceanologica Acta, 6, 79 – 87
- GARRETT C. and B. TOULANY, 1982, *Sea level variability due to meteorological forcing in the northeast Gulf of St. Lawrence*, Journal of Geophysical Research, 87, 1968 – 1978
- GARY J.M., 1973, *Estimate of truncation error in transformed coordinate, primitive equation atmospheric models*, Journal of the Atmospheric Sciences, 30, 223 – 233
- GREBMEIER J., 1987, ISHTAR Results: Benthic Communities. ISHTAR Progress Report 1987
- HANEY R.L., 1991, *On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models*, Journal of Physical Oceanography, 21, 610 – 619
- HANSELL D.A., J.J. GOERING, J.J. WALSH, C.P. McROY, L.K. COACHMAN and T.E. WHITLEDGE, 1989, *Summer phytoplankton production and transport along the shelf break in the Bering Sea*, Continental Shelf Research, 9, 1085 – 1104
- HARTEN A., 1978, *The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities: III – Self-adjusting hybrid schemes*, Mathematics of Computation, 32, 363 – 389
- HAUS J., 1990, Extension de la Méthode Variationnelle Inverse à l'Analyse Tridimensionnelle de Données Océanographiques. Mémoire de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 125 pp.
- HAUS J., 1991, Variational Inverse Modelling – Data Analysis via Reconstruction of 3-D Fields. Mémoire de D.E.A. européen en modélisation de l'environnement marin, Programme ERASMUS, Université de Liège, 88 pp.
- HOLLAND W.R., 1978, *The role of meso-scale eddies in the general circulation of the ocean – Numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model*, Journal of Physical Oceanography, 8, 363 – 392
- IVANOFF A., 1977, *Oceanic absorption of solar energy*, In: Modelling and Prediction of the Upper Layers of the Ocean. E.B. KRAUS, Editor, Pergamon Press, pp. 47 – 71
- JAMES I.D., 1986, *A front resolving sigma coordinate sea model with a simple hybrid advection scheme*, Applied Mathematical Modelling, 10, 87 – 92
- JANJIC Z.I., 1977, *Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography*, Contributions to Atmospheric Physics, 50, 186 – 199
- KASAHARA A., 1965, *On certain finite-difference methods for fluid dynamics*, Monthly Weather Review, 93, 27 – 31

- KASAHARA A., 1974, *Various vertical coordinate systems used for numerical weather predictions*, Monthly Weather Review, **102**, 509 – 522
- KINDER T.H., D.C. CHAPMAN and J.A. WHITEHEAD, Jr., 1986, *Westward intensification of the mean circulation on the Bering Sea shelf*, Journal of Physical Oceanography, **16**, 1217 – 1229
- KINDER T.H., L.K. COACHMAN and J.A. GALT, 1975, *The Bering Slope current*, Journal of Physical Oceanography, **5**, 231 – 244
- KINDER T.H., J.D. SCHUMACHER and D.V. HANSEN, 1980, *Observation of a baroclinic eddy: an example of mesoscale variability in the Bering sea*, Journal of Physical Oceanography, **10**, 1228 – 1245
- KITAIGORODSKII S.A., 1979, *Review of the theories of wind-mixed layer deepening*, In: Marine Forecasting – Predictability and Modelling in Ocean Hydrodynamics, J.C.J. NIHOUL, Editor, Elsevier, pp. 1 – 33
- KONDO J., 1975, *Air-sea bulk transfer coefficients in diabatic conditions*, Boundary-Layer Meteorology, **9**, 91 – 112
- LEENDERTSE J.J., 1988, Communication personnelle
- LEENDERTSE J.J. and S.K. LIU, 1978, *A three-dimensional turbulent energy model for nonhomogeneous estuaries and coastal sea systems*, In: Hydrodynamics of Estuaries and Fiords, J.C.J. NIHOUL, Editors, Elsevier, pp. 387 – 405
- LEITH C.E., 1965, *Numerical simulation of the Earth's atmosphere*, In: Methods in Computational Physics (Vol 4), pp. 1 – 28
- LIU S.K. and J.J. LEENDERTSE, 1987, Modeling the Alaskan Continental Shelf Waters, The RAND Corporation, RAND/R-3567-NOAA/RC, 136 pp.
- MADALA R.V., 1981, *Efficient time integration schemes for atmosphere and ocean models*, In: Finite-Difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Calculations, D.L. BOOK, Editor, Springer-Verlag, pp. 56 – 74
- MADALA R.V. and S.A. PIACSEK, 1977, *A semi-implicit numerical model for baroclinic ocean*, Journal of Computational Physics, **23**, 167 – 178
- MANABE S., K. BRYAN and M.J. SPELMAN, 1975, *A global ocean-atmosphere climate model. Part I. The atmospheric circulation*, Journal of Physical Oceanography, **5**, 3 – 29
- MANDELBROT B.B., 1983, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, 468 pp.
- MARCHUK G.I. and B.A. KAGAN, 1984, Ocean Tides, Pergamon Press, 292 pp.
- MELLOR G.L., 1985, *Ensemble average, turbulence closure*, Advances in Geophysics, **28B**, 345 – 358
- MELLOR G.L. and A.F. BLUMBERG, 1985, *Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system*, Monthly Weather Review, **113**, 1379 – 1383
- MELLOR G.L. and T. YAMADA, 1982, *Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems*, Reviews of Geophysics and Space Physics, **20**, 851 – 875
- MESINGER F., 1982, *On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models*, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **19**, 105 – 117
- MESINGER F. and A. ARAKAWA, 1976, Numerical Methods Used in Atmospheric Models (Volume 1), GARP Publications Series No. 17, WMO – ICSU, 64 pp.
- MOFJELD H.O., 1986, *Observed tides on the Northeastern Bering shelf*, Journal of Geophysical Research, **91**, 2593 – 2606
- MOFJELD H.O. and J.W. LAVELLE, 1984, *Setting the length scale in a second-order closure model of the unstratified boundary layer*, Journal of Physical Oceanography, **14**, 833 – 839
- MONIN A.S. and R.V. OZMIDOV, 1985, Turbulence in the Ocean, Reidel, 247 pp.
- MUNK W.H. and E.R. ANDERSON, 1948, *Notes on a theory of the thermocline*, Journal of Marine Research, **8**, 276 – 295
- NIHOUL J.C.J., 1973, The Wind-Mixed Layer in the Bay of Calvi, Progress Report n° 8, STARESO, Université de Liège, 19 pp.
- NIHOUL J.C.J., 1975a, *Marine systems analysis*, In: Modelling Marine Systems, J.C.J. NIHOUL, Editor, Elsevier, pp. 3 – 39
- NIHOUL J.C.J., 1975b, *Hydrodynamic models*, In: Modelling Marine Systems, J.C.J. NIHOUL, Editor, Elsevier, pp. 41 – 67
- NIHOUL J.C.J., 1977, Modèles Mathématiques et Dynamique de l'Environnement, Ele, 198 pp.

- NIHOUL J.C.J., 1980, Basic Equations of Geophysical Fluid Dynamics and their Applications to Ocean-Atmosphere Weather and Climate Models. University of London, Special University Lectures, Department of Mathematics, Imperial College, 61 pp.
- NIHOUL J.C.J., 1982, Hydrodynamic Models of Shallow Continental Seas – Application to the North Sea. Riga, 198 pp.
- NIHOUL J.C.J., 1984, *A three-dimensional general marine circulation model in a remote sensing perspective*, Annales Geophysicae, 2, 433 – 442
- NIHOUL J.C.J., 1986, *Aspects of the Northern Bering sea ecohydrodynamics*, In: Marine Interfaces Ecohydrodynamics. J.C.J. NIHOUL, Editor, Elsevier, pp. 385 – 399
- NIHOUL J.C.J., 1989, *Nowcasting and forecasting with a 3D k-ε model of the marine environment*, In: Computers and Experiments in Fluid Flow. G.M. CARLOMAGNO and C.A. BREBBIA, Editors, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag, pp. 99 – 111
- NIHOUL J.C.J., P. ADAM, P. BRASSEUR, E. DELEERSNIJDER, S. DJENIDI and J. HAUS, 1991, *Three-dimensional general circulation model of the Northern Bering Sea's summer ecohydrodynamics*, à paraître dans Continental Shelf Research
- NIHOUL J.C.J. and J.-M. BECKERS, 1990, *Diagnostic/metagnostic modelling of the Western Mediterranean's general circulation with a 3D primitive equations k-ε model*, Proceedings of the 32nd CIESM, Perpignan, October 1990, Physical Oceanography Committee, 14 pp.
- NIHOUL J.C.J., E. DELEERSNIJDER and S. DJENIDI, 1989, *Modelling the general circulation of shelf seas by 3D k-ε models*, Earth-Science Reviews, 26, 163 – 189
- NIHOUL J.C.J. and S. DJENIDI, 1987, *Perspective in three-dimensional modelling of the marine system*, In: Three-Dimensional Models of Marine and Estuarine Dynamics. J.C.J. NIHOUL and B.M. JAMART, Editors, Elsevier, pp. 1 – 33
- NIHOUL J.C.J. and F.C. RONDAY, 1975, *The influence of the tidal stress on the residual circulation*, Tellus, 29, 484 – 490
- NIHOUL J.C.J., F. WALEFFE and S. DJENIDI, 1986, *A 3D-numerical model of the Northern Bering Sea*, Environmental Software, 1, 76 – 81
- OKUBO A., 1971, *Oceanic diffusion diagrams*, Deep-Sea Research, 18, 789 – 802
- OKUBO A., 1980, Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Springer-Verlag, 254 pp.
- ORSZAG S.A., 1971, *On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components*, Journal of the Atmospheric Sciences, 28, 1074
- OVERLAND J.E. and A.T. ROACH, 1987, *Northward flow in the Bering and Chukchi Seas*, Journal of Geophysical Research, 92, 7097 – 7105
- OWEN A., 1980, *A three-dimensional model of the Bristol Channel*, Journal of Physical Oceanography, 10, 1290 – 1302
- PACANOWSKI R.C. and S.G.H. PHILANDER, 1981, *Parameterization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans*, Journal of Physical Oceanography, 11, 1443 – 1451
- PATANKAR S.V., 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere, 197 pp.
- PEDLOSKY J., 1982, Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 624 pp.
- PEYRET R. and T.D. TAYLOR, 1983, Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag, 358 pp.
- PHILLIPS N.A., 1957, *A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting*, Journal of Meteorology, 14, 184 – 185
- POSTMA H., 1988, *Physical and chemical oceanographic aspects of continental shelves*, In: Continental Shelves (Ecosystems of the World, No. 27), POSTMA H. and J.J. ZIJLSTRA, Editors, Elsevier, pp. 5 – 37
- POSTMA H. and J.J. ZIJLSTRA, Editors, 1988a, Continental Shelves (Ecosystems of the World, No. 27), Elsevier, 421 pp.
- POSTMA H. and J.J. ZIJLSTRA, 1988b, *Introduction*, In: Continental Shelves (Ecosystems of the World, No. 27), POSTMA H. and J.J. ZIJLSTRA, Editors, Elsevier, pp. 1 – 4
- POWELL T.M., 1989, *Physical and biological scales of variability in lakes, estuaries and the coastal ocean*, In: Perspectives in Ecological Theory. J. ROUGHGARDEN, R.M. MAY and S.A. LEVIN, Editors, Princeton University Press, pp. 157 – 176

- REYNOLDS, O., 1894, *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **186**, 123 – 161
- RICHARDSON L.W., 1961, *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels*, General Systems Yearbook, **6**, 139 – 187
- ROACHE P.J., 1972, *On artificial viscosity*, Journal of Computational Physics, **10**, 169 – 184
- ROACHE P.J., 1982, Computational fluid dynamics, Hermosa Publishers, 446 pp.
- ROCHA C.A. and A.J. CLARKE, 1987, *Interaction of ocean tides through a narrow single strait and narrow multiple straits*, Journal of Physical Oceanography, **17**, 2203 – 2218
- RODI W., 1984 (2nd rev. ed.), Turbulence Models and their Application in Hydraulics – A State of the Art Review, International Association for Hydraulic Research, 104 pp.
- RODI W., 1987, *Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids*, Journal of Geophysical Research, **92**, 5305 – 5328
- ROED L.P. and C.K. COOPER, 1986, *Open boundary conditions in numerical ocean models*, In: Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling, J.J. O'BRIEN, Editor, NATO ASI Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences Vol. 186, D. Reidel, pp. 411 – 436
- RONDAY F., 1975, *Influence du cisaillement des courants sur l'anisotropie des coefficients de diffusion-dispersion*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, **11-12**, 609 – 624
- RONDAY F., 1976, Modèles Hydrodynamiques de la mer du Nord: Détermination des Circulations Transitoire et Résiduelle, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 270 pp.
- SAMBROTTO R.N., J.J. GOERING and C.P. McROY, 1984, *Large yearly production of phytoplankton in the Western Bering Strait*, Science, **225**, 1147 – 1150
- SARMIENTO J.L. and C.G.H. ROTH, 1980, *A comparison of vertical and isopycnal mixing models in the deep sea based on Radon 222 measurements*, Journal of Geophysical Research, **85**, 1515 – 1518
- SEMTNER A.J., Jr., 1986a, *History and methodology of modelling the circulation of the world ocean*, In: Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling, J.J. O'BRIEN, Editor, D. Reidel Publishing Company, pp. 23 – 32
- SEMTNER A.J., Jr., 1986b, *Finite-difference formulation of a world ocean model*, In: Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling, J.J. O'BRIEN, Editor, D. Reidel Publishing Company, pp. 187 – 202
- SHARP G.D., 1988, *Fish populations and fisheries: their perturbations, natural and man-induced*, In: Continental Shelves (Ecosystems of the World, No. 27), POSTMA H. and J.J. ZIJLSTRA, Editors, Elsevier, pp. 155 – 202
- SHELDON R.W., A. PRAKASH and W.H. SUTCLIFFE, 1972, *The size distribution of particles in the ocean*, Limnology and Oceanography, **17**, 327 – 340
- SIELECKI A., 1968, *An energy-conserving difference scheme for the storm surge equations*, Monthly Weather Review, **96**, 150 – 156
- SIGNELL R.P., 1989, Tidal Dynamics and Dispersion around Coastal Headlands, Ph. D. Thesis, MIT/WHOI, WHOI-89-38, 159 pp.
- SIMPSON J.H. and J.R. HUNTER, 1974, *Fronts in the Irish Sea*, Nature, **250**, 404 – 406
- SMAGORINSKY J., 1963, *General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment*, Monthly Weather Review, **91**, 99 – 164
- SMITH S.D. and E.G. BANKE, 1975, *Variation of the sea surface drag coefficient with wind speed*, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, **101**, 665 – 673
- SPALL M.S. and A.R. ROBINSON, 1990, *Regional primitive equation studies of the Gulf Stream meander and ring formation region*, Journal of Physical Oceanography, **20**, 985 – 1016
- SPAULDING M., T. ISAJI, D. MENDELSON and A.C. TURNER, 1987, *Numerical simulation of wind-driven flow through the Bering Strait*, Journal of Physical Oceanography, **17**, 1799 – 1816
- STEELE J.H., 1978, *Some comments on plankton patches*, In: Spatial Pattern in Plankton Communities, J.H. STEELE, Editor, Plenum Press, pp. 1 – 20
- STEPPELER J., 1989, *A three dimensional global weather prediction model using a finite element scheme for vertical discretization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **27**, 129 – 144
- STIGEBRANDT A., 1984, *The North Pacific: a global-scale estuary*, Journal of Physical Oceanography, **14**, 464 – 470

- TAKENOUTI A.Y. and K. OHTANI, 1974, *Currents and Water masses in the Bering Sea: a review of Japanese work*, In: Oceanography of the Bering Sea, D.W. HOOD and E.J. KELLEY, Editors, Institute of Marine Science, University of Alaska Occasional Publ. No.2, pp. 39 – 57
- TANG B., 1990, *Fluctuating flow through straits of variable depth*, Journal of Physical Oceanography, **20**, 1077 – 1086
- THOMPSON J.F., Z.U.A. WARSI and C. WAYNE MASTIN, Numerical Grid Generation — Foundations and Applications, North-Holland, 483 pp.
- TOULANY B. and C. GARRETT, 1984, *Geostrophic control of fluctuating barotropic flow through straits*, Journal of Physical Oceanography, **14**, 649 – 655
- TRIPP R.B., 1985, 1985 Current Meter and Pressure Gauge Data, ISHTAR Data Report No. 2, University of Washington, 129 pp.
- TRIPP R.B., 1986, 1986 Current Meter and Pressure Gauge Data, Draft of ISHTAR Data Report, University of Washington, 26 pp.
- UNESCO, 1981, *Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards*, UNESCO Technical Papers in Marine Science No. 36
- WALEFFE F., 1985, Modèle Mathématique 3D de la Mer de Bering, Mémoire de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 126 pp.
- WALSH J.J., 1988, On the Nature of Continental Shelves, Academic Press, 520 pp.
- WALSH J.J. and D.A. DIETERLE, 1986, *Simulation analysis of plankton dynamics in the Northern Bering sea*, In: Marine Interfaces Ecohydrodynamics, J.C.J. NIHOUL, Editor, Elsevier, pp. 401 – 428
- WALSH J.J., C.P. McROY, T.H. BLACKBURN, L.K. COACHMAN, J.J. GOERING, K. HENRIKSEN, P. ANDERSEN, J.C.J. NIHOUL, P.L. PARKER, A.M. SPRINGER, R.B. TRIPP, T.E. WHITLEDGE, C.D. WIRICK, 1989a, *The role of the Bering Strait in the carbon/nitrogen fluxes of polar marine ecosystems*, In: Proceedings of the Sixth Conference of the Comité Arctique International (13-15 May 1985), L. REY and V. ALEXANDER, Editors, Brill, pp. 90 – 120
- WALSH J.J., C.P. McROY, L.K. COACHMAN, J.J. GOERING, J.C.J. NIHOUL, T.E. WHITLEDGE, T.H. BLACKBURN, P.L. PARKER, C.D. WIRICK, P.G. SHUERT, J.M. GREBMEIER, A.M. SPRINGER, R.D. TRIPP, D.A. HANSELL, S. DJENIDI, E. DELEERSNIJDER, K. HENRIKSEN, B.A. LUND, P. ANDERSEN, F.E. MÜLLER-KARGER and K. DEAN, 1989b, *Carbon and nitrogen cycling within the Bering/Chukchi Seas: source regions for organic matter affecting AOU demands of the Arctic Ocean*, Progress in Oceanography, **22**, 279-361
- WEATHERLY G.L., 1972, *A study of the bottom boundary layer of the Florida current*, Journal of Physical Oceanography, **2**, 54 – 72
- WEATHERLY G.L., 1975, *A numerical study of time-dependent turbulent Ekman layers over horizontal and sloping bottoms*, Journal of Physical Oceanography, **5**, 288 – 299
- WEATHERLY G.L., 1977, *Bottom boundary layer observations in the Florida Current*, In: Bottom Turbulence, J.C.J. NIHOUL, Editor, Elsevier, pp. 237 – 254
- WEATHERLY G.L. and P.J. MARTIN, 1978, *On the structure and dynamics of the oceanic bottom boundary layers*, Journal of Physical Oceanography, **8**, 557 – 570
- WHITLEDGE T.E., R.R. BIDIGARE, S.I. ZEEMAN, R.N. SAMBROTTO, P.F. ROSCIGNO, P.R. JENSEN, J.M. BROOKS, C. TREES and D. VEIDT, 1988, *Biological measurements and related chemical features in Soviet and United States regions of the Bering Sea*, Continental Shelf Research, **12**, 1299 – 1319
- WHITTLE K.J., 1977, *Marine organisms and their contribution to organic matter in the oceans*, Marine Chemistry, **5**, 318 – 411
- WIMBUSH M. and W. MUNK, 1971, *The benthic boundary layer*, In: The Sea (Vol. 4), A.E. MAXWELL, Editor, Wiley, pp. 731 – 758
- WOODS J.D., 1980, *Do waves limit turbulence diffusion in the ocean?*, Nature, **288**, 219 – 224

