



Università degli Studi di Palermo
Dipartimento di Matematica e Informatica
DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA
E SCIENZE COMPUTAZIONALI

SEMINARIO DOTTORANDI ALGEBRA E GEOMETRIA

BOOK OF ABSTRACTS

Palermo, 20 dicembre 2023

PROGRAMMA, 20 dicembre 2023

- **14:30** – Giovanni Busalacchi, *Algebre con identità polinomiali, identità generalizzate e polinomi centrali*
- **15:00** – Sara Accomando, *Caratterizzazione delle algebre di crescita polinomiale delle codimensioni*
- **15:30** – Alessandro Dioguardi Burgio, *Gruppi toroidali, Jacobiane generalizzate e campi numerici*
- **16:00** – Gianmarco La Rosa, *Biderivazioni di algebre di Lie complete*
- **16:30** – Manuel Mancini, *Sulla rappresentabilità delle azioni interne di varietà di algebre non associative*

Pausa

- **17:15** – Federica Piazza, *Azioni interne e prodotti semidiretti nella categoria delle MV-algebre*
- **17:45** – Giovanna Rinchiusa, *Le catene di Clifford e il legame con i politopi n -dimensionali*

Tè e panettone.

Caratterizzazione delle algebre di crescita polinomiale delle codimensioni

Sara Accomando¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy
E-mail: sara.accomando@unipa.it

Nell'ambito dello studio delle algebre con identità polinomiali, la successione delle codimensioni ha un ruolo fondamentale. È stata introdotta nel 1972 da Regev, il quale, in [6], ha dimostrato che tale successione è esponenzialmente limitata se un'algebra soddisfa almeno un'identità polinomiale non banale. Di particolare interesse è la caratterizzazione delle algebre con crescita polinomiale delle codimensioni. In letteratura, tale caratterizzazione è stata determinata per algebre associative e per algebre dotate di strutture aggiuntive, quali algebre graduate [5], algebre con involuzione [1], superinvoluzione [3] e involuzione graduata [2]. In particolare, la mia ricerca è stata indirizzata allo studio della successione delle codimensioni di superalgebre con superautomorfismi allo scopo di determinarne una caratterizzazione nel caso di crescita polinomiale.

In questo seminario saranno presentati i risultati già ottenuti per tale problema, le problematiche in corso di studio e gli obiettivi futuri.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Ioppolo, “Some characterizations of algebras with involution with polynomial growth of their codimensions”, *Linear and Multilinear Algebra* **67** (2019), no. 6, pp. 1217–1230.
- [2] A. Ioppolo, “Some results concerning the multiplicities of cocharacters of superalgebras with graded involution”, *Linear Algebra and its Application* **594** (2020), pp. 51–70.
- [3] A. Ioppolo, D. La Mattina, “Polynomial codimension growth of algebras with involutions and superinvolutions”, *Journal of Algebra* **472** (2017), pp. 519–545.
- [4] A. Ioppolo, D. La Mattina, “Algebras with superautomorphism: simple algebras and codimension growth”, preprint.
- [5] P. Koshlukov, D. La Mattina, “Graded algebras with polynomial growth of their codimensions”, *Journal of Algebra* **434** (2015), pp. 115–137.
- [6] A. Regev, “Existence of identities in $A \otimes B$ ”, *Isr. J. Math.* **11** (1972), pp. 131–152.

Gruppi toroidali, Jacobiane generalizzate e campi numerici

Alessandro Dioguardi Burgio¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy
E-mail: alessandro.dioguardiburgio@unipa.it

In questo seminario mostreremo i legami che sussistono tra i gruppi toroidali $\mathcal{T}$ e i campi numerici non totalmente reali K , le funzioni meromorfe periodiche, e le Jacobiane generalizzate $\mathfrak{J}_L$.

Nella prima parte verrà trattato il caso di un gruppo toroidale di dimensione n e rango reale $n+1$. Dopo aver richiamato il caso cubico e quartico studiato in [3], mostreremo il caso generale. Si daranno quindi delle relazioni tra il polinomio minimo di un opportuno elemento primitivo di K e i parametri che definiscono il gruppo toroidale associato all'anello degli interi di K . Inoltre, per un tale gruppo toroidale, esibiremo esplicitamente la rappresentazione analitica e quella razionale del suo anello degli endomorfismi, di cui la prima restituisce una nuova rappresentazione (complessa) dell'anello degli interi di K . Infine, daremo una descrizione esplicita della m -torsione di $\mathcal{T}$ nella corrispondenza geometrica di $\mathcal{T}$ con $\mathfrak{J}_L(\mathcal{C})$, per un'opportuna curva ellittica $\mathcal{C}$.

Nella seconda parte si studierà il collegamento di un gruppo toroidale che estende la Jacobiana di una curva iperellittica di genere 2 con le funzione meromorfe di 3 variabili e 5 periodi $\mathbb{R}$ -indipendenti e con i campi non-totalmente reali con due coppie di immersioni complesse. Relativamente al collegamento con i campi numerici, si daranno nuovamente le relazioni tra polinomio minimo e periodi di $\mathcal{T}$, analoghe al caso precedente.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Andreotti e F. Gherardelli, "Seminario di Geometria", *Pubblicazioni del Centro di Analisi Globale*, Firenze (1973).
- [2] A. Di Bartolo e G. Falcone, "The periods of the generalized Jacobian of a complex elliptic curve", *Advances in Geometry* **15** (2015), no. 1, pp. 127-131.
- [3] A. Dioguardi Burgio, G. Falcone, M. Galici, "Non-totally real number fields and toroidal groups", *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* (To appear, 2024).
- [4] D. Vallières, "Connected abelian complex Lie groups and number fields", *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **24** (2012), no. 1, pp. 201-229.

Estensioni di Loop di Steiner e Loop di Bol

Mario Galici¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy
E-mail: mario.galici@unipa.it

Alla domanda "cos'è un loop?", il modo più semplice di rispondere è dire "un gruppo senza associatività". Ciò è vero, ma poco esaustivo. È essenziale sottolineare che la teoria dei loop non è solo una generalizzazione della teoria dei gruppi, ma una disciplina a sé stante, che ha origine e si muove ancora all'interno di campi di ricerca riguardanti l'algebra, la geometria, la topologia e la combinatoria.

In [1] studiamo gli *Steiner triple systems* (STS) come estensioni mediante i *loop di Steiner* associati. Il concetto di *estensioni di Schreier* dei loop è stato introdotto nel caso generale in [4]. Nel contesto dei loop di Steiner, fornisce un potente strumento per costruire STS che contengono *punti di Veblen*. In [2] trattiamo gli STS di ordine 19, 27 e 31 che contengono punti di Veblen, determinando il numero di tali sistemi e presentando alcuni esempi.

In [3] studiamo anche una nuova formula di estensione per i loop di Bol destri, dimostrando le condizioni necessarie e sufficienti affinché l'estensione sia anch'essa un loop di Bol destro. Descriviamo gli invarianti più importanti, il corrispondente *core* e il suo *structure group*.

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Falcone, A. Figula and M. Galici. "Extensions of Steiner Loops". Preprint (2023).
- [2] G. Filippone and M. Galici. "On the number of small Steiner triple systems with Veblen points". Preprint (2023).
- [3] M. Galici and G. P. Nagy. "An extension formula for right Bol loops arising from Bol reflections". Preprint (2023).
- [4] P. T. Nagy and K. Strambach. "Schreier loops". Czech. Math. J. 58, No. 3, 759–786 (2008).

Biderivazioni di algebre di Lie complete

Gianmarco La Rosa¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy
E-mail: gianmarco.larosa@unipa.it

Scopo di questo talk è esporre i risultati ottenuti in [1]. Le *biderivazioni* possono essere viste come una generalizzazione del concetto di derivazione. Se una derivazione di un'algebra di Lie è una mappa lineare per la quale vale la regola di Leibniz, le biderivazioni sono mappe bilineari per le quali questa regola vale in ogni argomento. Ovvero, data un'algebra di Lie L su un campo $\mathbb{F}$ e una mappa bilineare $B: L \times L \rightarrow L$, quest'ultima è una biderivazione di L se valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} B([x, y], z) &= [x, B(y, z)] + [B(x, z), y] \\ B(x, [y, z]) &= [B(x, y), z] + [y, B(x, z)], \end{aligned}$$

per ogni $x, y, z \in L$.

Pertanto, descriveremo tutte le biderivazioni di algebre di Lie complete, ovvero algebre di Lie che hanno centro banale e derivazioni interne. Le algebre di Lie semisemplici, ad esempio, sono di questo tipo.

Una mappa lineare $f: L \rightarrow L$ è chiamata *commutativa* se $[x, f(x)] = 0$, per ogni $x \in L$. Se $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, allora una mappa lineare $f: L \rightarrow L$ è commutativa se e solo se $[f(x), y] = [x, f(y)]$, per ogni $x, y \in L$. Similmente, f è chiamata *anti-commutativa* se e solo se $[f(x), y] = -[x, f(y)]$, per ogni $x, y \in L$. Se f è una mappa commutativa, allora $B(x, y) = [f(x), y]$ è una biderivazione di L . Questo collegamento non è casuale. Infatti, vedremo come queste applicazioni ci serviranno per descrivere le biderivazioni simmetriche e anti-simmetriche di un'algebra di Lie completa.

I risultati di questo talk si basano su un lavoro congiunto con Alfonso Di Bartolo (Università degli Studi di Palermo).

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Di Bartolo and G. La Rosa, *Biderivations of complete Lie algebras*, *Journal of Algebra and Its Applications*, DOI: 10.1142/S0219498825500161
- [2] X. Tang, *Biderivations of finite-dimensional complex simple Lie algebras*, *Linear and Multilinear Algebra*, **66**(2), 250-259 (2018), DOI: 10.1080/03081087.2017.1295433.

Sulla rappresentabilità delle azioni interne di varietà di algebre non associative

Manuel Mancini¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, University of Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy.
E-mail: manuel.mancini@unipa.it

È ben noto che nella categoria semi-abeliana **Lie** delle algebre di Lie su un campo $\mathbb{F}$ con $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, le azioni interne (o equivalentemente le estensioni spezzanti) sono rappresentate da derivazioni. Da un punto di vista categoriale, ciò è equivalente a dire che **Lie** ha le *azioni rappresentabili* e l'oggetto rappresentante, chiamato *attore*, di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, è l'algebra di Lie delle derivazioni $\text{Der}(\mathfrak{g})$. È stato provato che la nozione di categoria semi-abeliana con azioni rappresentabili è abbastanza restrittiva: ad esempio, se una varietà non abeliana di algebre non associative $\mathcal{V}$ su un campo infinito $\mathbb{F}$, con $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, ha le azioni rappresentabili, allora $\mathcal{V} = \mathbf{Lie}$. Recentemente G. Janelidze ha introdotto la nozione di categoria con *azioni debolmente rappresentabili*, la quale include una classe più ampia di categorie semi-abeliane, come la varietà **Assoc** delle algebre associative e la varietà **Leib** delle algebre di Leibniz.

In questa esposizione si dimostrerà che, per una varietà *algebricamente coerente e operadica* di algebre non-associative $\mathcal{V}$ e per un oggetto X di $\mathcal{V}$, è possibile costruire un'algebra parziale $\mathcal{E}(X)$, chiamata *attore debole esterno* di X , e un monomorfismo naturale di funtori

$$\tau: \text{Act}(-, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}}(U(-), \mathcal{E}(X)),$$

dove **PAlg** è la categoria delle algebre parziali su $\mathbb{F}$ e $U: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{PAlg}$ denota il funtore dimenticante. La coppia $(\mathcal{E}(X), \tau)$ è chiamata *rappresentazione debole esterna* di $\text{Act}(-, X)$. Inoltre, per ogni altro oggetto B di $\mathcal{V}$, si darà una completa caratterizzazione dei morfismi $(B \rightarrow \mathcal{E}(X)) \in \text{Im}(\tau_B)$, cioè degli omomorfismi che identificano le azioni di B su X in $\mathcal{V}$.

Infine, si darà un'applicazione di tale costruzione nel caso di varietà di algebre con unità: si dimostrerà che se $\mathcal{V} = \mathbf{Alt}$ è la varietà delle algebre *alternative* e X è un'algebra alternativa con unità, allora $\mathcal{E}(X) \cong X$ è l'attore di X . In altre parole, le algebre alternative con unità, come ad esempio l'algebra $\mathbb{O}$ degli *ottonioni*, hanno le azioni rappresentabili.

L'esposizione si basa su lavori congiunti con Alan S. Cigoli (*Università degli Studi di Torino*), Xabier García Martínez (*Universidade de Vigo*, Spagna), Giuseppe Metere (*Università degli Studi di Palermo*) Tim Van der Linden e Corentin Vienne (*Université Catholique de Louvain*, Belgio).

Riferimenti bibliografici

- [1] A. S. Cigoli, M. Mancini M. and G. Metere, “On the representability of actions of Leibniz algebras and Poisson algebras”, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (2023).
- [2] X. García-Martínez, M. Mancini, T. Van der Linden and C. Vienne, “Weak representability of actions of non-associative algebras” (2023), sottomesso, preprint disponibile su [arXiv:2306.02812](https://arxiv.org/abs/2306.02812).

Azioni interne e prodotti semidiretti nella categoria delle MV-algebre

Federica Piazza¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy
E-mail: federica.piazza@unipa.it

La varietà delle MV-algebre è stata introdotta da Chang in [1] come controparte algebrica della logica proposizionale ad infiniti valori di Łukasiewicz. Una MV-algebra è un insieme dotato di un'operazione $\oplus$ associativa, commutativa ed avente elemento neutro 0 e di un'operazione unaria $\neg$, tali che valgono le seguenti uguaglianze: $\neg\neg x = x$, $x \oplus \neg 0 = \neg 0$ e $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

In questo seminario, dopo aver illustrato la ben nota equivalenza tra azioni interne ed estensioni spezzanti nel contesto delle categorie semi-abeliane, mostreremo alcune possibili strategie che possono essere implementate al fine di ottenere una descrizione delle azioni interne e dei prodotti semidiretti nella categoria delle MV-algebre. Una problematica che si riscontra nel descrivere internamente l'azione sul nucleo di un epimorfismo spezzante di MV-algebre è rappresentata dal fatto che i nuclei dei morfismi non sono sottoalgebre. Pertanto, una possibile soluzione consiste nel considerare la categoria delle MV-algebre come sottocategoria di una categoria semi-abeliana in cui gli ideali di una MV-algebra siano sottooggetti.

Riferimenti bibliografici

- [1] C. C. Chang, *Algebraic analysis of many-valued logic*, Transactions of the American Mathematical Society **88** (1958), 467-490.
- [2] F. Borceux, G. Janelidze, G. M. Kelly, *Internal object actions*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **46** (2005), 235-255.
- [3] S. Lapenta, G. Metere, L. Spada, *Relative ideals in homological categories, with an application to MV-algebras*, ArXiv:2208.12597

Le catene di Clifford e il legame con i politopi n -dimensionali

Giovanna Rinchiusa¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo,
Via Archirafi, 34, 90123, Palermo, Italy
E-mail: giovanna.rinchiusa@unipa.it

Uno degli aspetti della geometria elementare che hanno suscitato un forte interesse in molti matematici dell'Ottocento è costituito dalle catene di costruzioni e teoremi riguardanti rette e circonferenze nel piano.

Fra queste vi è quella presentata da W. K. Clifford in [1] nel 1871. Il punto di partenza di tale serie di teoremi è la prima delle dieci questioni proposte senza dimostrazione da J. Steiner in [5] tra il 1827 e il 1828, secondo cui *quattro rette del piano, prese a tre a tre, formano quattro triangoli tali che le circonferenze ad essi circoscritte passano tutte per uno stesso punto*. Tale questione ha suscitato l'attenzione di molti matematici, tra cui A. Miquel, che presenta la sua soluzione nel 1838, e partendo da essa dimostra anche altre proprietà, tra cui il cosiddetto *pentagramma di Miquel* [4]. Clifford, interessato al lavoro di Miquel, enuncia e dimostra lo stesso teorema in modo alternativo e, facendo uso di metodi sintetici, generalizza la configurazione dando origine alla prima catena di teoremi: *$2n$ rette del piano che si intersecano a due a due determinano $2n$ circonferenze che si incontrano in un punto, mentre $2n + 1$ rette del piano che si intersecano a due a due determinano $2n + 1$ punti che giacciono sulla stessa circonferenza*.

Sempre in [1] Clifford presenta una nuova catena di teoremi i cui passi sono strettamente collegati a quelli della prima.

Queste serie di teoremi, per come sono state ideate, costituiscono degli esempi di "geometria ricorrente" intesa nel senso di G. de Longchamps in [2].

Tali teoremi sono inquadrabili in un ambito più vasto di quello della geometria elementare, infatti molti di essi ritrovano ampie applicazioni nella ricerca matematica più contemporanea. Nel 1972 M. S. Longuet-Higgins in [3] ha mostrato una corrispondenza tra la prima catena di configurazioni di punti e circonferenze di Clifford e i politipi n -dimensionali studiati da H. S. M. Coxeter.

L'obiettivo di tale contributo è quello di indagare le origini storiche delle catene di Clifford e il legame con i politopi n -dimensionali.

Riferimenti bibliografici

- [1] W. K. Clifford, *A synthetic proof of Miquel's theorem*, The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, vol. v, (1871), pp. 124-141, in *Mathematical Papers by William Kingdon Clifford*, Cambridge University Press, 1882, pp. 38-54.

- [2] G. de Longchamps, *La Géométrie Récursive*, Journal de Mathématiques Élémentaires, 1883, pp. 3-10, 25-33, 49-56, 73-78, 121-126.
- [3] M. S. Longuet-Higgins, *Clifford's chain and its analogues in relation to the higher polytopes*, Proc. R. Soc. Lond. A., 330, 1972, pp. 443-466.
- [4] A. Miquel, *Théorèmes de Géométrie*, Journal de mathématiques pures et appliquées, tome III, 1838, pp. 485-487.
- [5] J. Steiner, *Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet*, Annales de mathématiques pures et appliquées, tome 18, 1827-28, pp. 302-304.