

CHAPITRE 6

Configurations de k points, $k > 2$

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces de configurations de plus de deux points, dans une variété M , compacte, sans bord et simplement connexe.

Dans la première section, nous discutons l'existence d'un modèle commutatif pour $F(M; k)$. Nous définissons une adgc qui généralise le modèle de $F(M; k)$ pour les variétés complexes projectives, défini par I.Kriz et B.Totaro.

Dans la deuxième section, nous démontrons le résultat essentiel de ce chapitre :

Théorème 6.1. Si M est une variété compacte, sans bord, simplement connexe et polygène, alors la catégorie rationnelle de la fibre homotopique de l'inclusion $F(M; k) \hookrightarrow M^k$ est inférieure à $k - 1$.

Dans la troisième section, nous décrivons le lien entre les groupes d'homotopie de $F(M \setminus m_0; k)$ et ceux de $F(M; k)$.

Enfin, dans la quatrième section, nous calculons la structure d'algèbre de Lie d'homotopie des configurations de trois points dans la variété monogène $\mathbb{C}P(n)$.

6.1. UN MODÈLE POUR $F(M; k)$?

L'étude des espaces $F(M; k)$, $k \geq 3$, est malaisée car on ne dispose pas actuellement de modèles commutatifs pour tous ces espaces.

Lorsque M est une variété projective complexe simplement connexe de dimension complexe n , B.Totaro [23] et I.Kriz [14], ont montré indépendamment que le modèle minimal de $F(M; k)$ était quasi-isomorphe à l'algèbre différentielle $A(M; k)$ définie dans l'introduction. Remarquons que dans le cas considéré par B.Totaro et I.Kriz, les variétés sont formelles et admettent donc $(H^*(M; \mathbb{Q}), 0)$ comme modèle commutatif.

Une variété simplement connexe de dimension n quelconque, admet, suivant le résultat de Lambrechts et Stanley [17], un modèle commutatif finiment engendré à dualité de Poincaré (A, d) . Dans cette algèbre, $A^n = \mathbb{Q}\omega$, $A^r = 0$, $r > n$. De plus, la multiplication $A^p \otimes A^{n-p} \rightarrow A^n \cong \mathbb{Q}$

met les espaces A^p et A^{n-p} en dualité. Notons $\epsilon : A \rightarrow \mathbb{Q}$, le morphisme de degré $-n$ défini par $\epsilon(\omega) = 1$ et $\epsilon(A^{<n}) = 0$. Pour toute algèbre à dualité de Poincaré (A, d) , nous pouvons construire un cocycle $\omega \in A \otimes A$ représentant la classe diagonale et tel que pour tout élément $a \in A$,

$$\omega(a \otimes 1) = \omega(1 \otimes a).$$

En effet, soit (A, d) une algèbre à dualité de Poincaré et $\theta : A \rightarrow \text{Hom}(A; \mathbb{Q})$ l'isomorphisme de dualité défini par $\theta(a)(b) = \epsilon(a \cdot b)$. Fixons une base homogène $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ de A et $\alpha^* = \{\alpha_j^*\}_{j \in I}$ la base duale définie par $\theta(\alpha_i)(\alpha_j^*) = \delta_{ij}$.

Lemme 6.2. L'élément $\omega = \sum_{i \in I} (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \alpha_i^*$ est un cocycle représentant la classe diagonale.

Preuve

Décomposons $d(\alpha_i)$ dans la base α et $d(\alpha_k^*)$ dans la base des α^* :

$$d(\alpha_i) = \sum_{j \in I} c_i^j \alpha_j ; d(\alpha_k^*) = \sum_{r \in I} d_k^r \alpha_r^*,$$

pour certains $c_i^j, d_k^r \in \mathbb{Q}$. On obtient

$$\theta(d(\alpha_i))(\alpha_k^*) = \sum_{j \in I} c_i^j \theta(\alpha_j)(\alpha_k^*) = c_i^k.$$

D'autre part, en rappelant que la différentielle D sur $\text{Hom}(A; \mathbb{Q})$, est définie par

$$(Df)(a) = -(-1)^{|f|} f(d(a)),$$

on calcule que

$$\begin{aligned} (D\theta(\alpha_i))(\alpha_k^*) &= -(-1)^{|\alpha_i^*|} \theta(\alpha_i)(d(\alpha_k^*)) \\ &= -(-1)^{|\alpha_i^*|} \sum_{k \in I} d_k^r \theta(\alpha_i)(\alpha_r^*) = -(-1)^{|\alpha_i^*|} d_k^i. \end{aligned}$$

Comme $\theta d = (-1)^n D\theta$, on obtient

$$c_i^k = -(-1)^{|\alpha_i|} d_k^i.$$

En conséquence, on observe finalement que

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i \in I} (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \alpha_i^*\right) &= \sum_{i, j \in I} (-1)^{|\alpha_i|} c_i^j \alpha_j \otimes \alpha_i^* + \sum_{i, r \in I} \alpha_i \otimes d_i^r \alpha_r^* \\ &= \sum_{i, j \in I} ((-1)^{|\alpha_i|} c_i^j + d_j^i) \alpha_j \otimes \alpha_i^* = 0. \end{aligned}$$

□

L'égalité $\omega(a \otimes 1) = \omega(1 \otimes a)$ se montre de la même manière que le

Lemme 2.12.

L'algèbre différentielle qui semble un bon candidat pour représenter le type d'homotopie rationnel de $F(M; k)$ est alors

$$(A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij}, 1 \leq i, j \leq k))/I, d)$$

avec les mêmes définitions pour I que dans le cas de B.Totaro et I.Kriz et $d(x_{ij}) = p_{ij}^*(\omega)$: les x_{ij} sont de degré $n-1$, et I est l'idéal différentiel engendré par les éléments $x_{ij} + (-1)^n x_{ji}$, $p_i^*(x)x_{ij} - p_j^*(x)x_{ij}$ et $x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij}$.

Définition 6.3. Nous dirons qu'une variété M admet un *bon modèle*, s'il existe un modèle (A, d) de M à dualité de Poincaré, pour lequel $(A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij})/I, d)$ est un modèle commutatif de $F(M; k)$.

Les travaux de Kriz [14] et Totaro [23], impliquent en particulier que les variétés projectives complexes admettent un bon modèle.

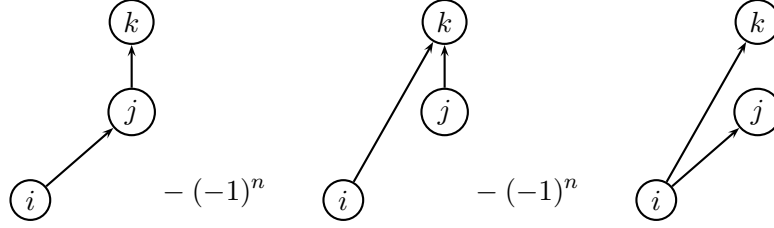
6.2. FIBRE HOMOTOPIQUE F_k DE L'INCLUSION $F(M; k) \hookrightarrow M^k$

Nous avons démontré précédemment que la fibre homotopique F_2 de l'inclusion $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$, avait le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères, quand la variété M est polygène. Ceci revient à dire que la catégorie rationnelle de F_2 est égale à 1.

Dans cette section, nous généralisons ce résultat. Tout d'abord, nous calculons les dimensions des groupes de cohomologie de F_k , pour une variété M admettant un bon modèle. Ensuite, nous donnons une borne supérieure pour la catégorie rationnelle de F_k dans le cas général. Enfin, nous démontrons que tout comme F_2 , l'espace F_3 est coformal.

(a) Cohomologie de F_k

Notre objectif ici est de calculer l'homologie de F_k pour une variété M admettant un bon modèle. Pour décrire l'algèbre $A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij})/I$ et la relation d'Arnold, il est utile d'introduire la notation des graphes. A tout mot $x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_r j_r}$, $i_t < j_t$, on associe le graphe orienté à k sommets $1, 2, \dots, k$ et dont les arêtes sont $(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)$. La relation d'Arnold $x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij} = 0$ peut s'écrire en terme de graphes sous la forme



pour $i < j < k$.

Cette relation permet de remplacer tout graphe par un graphe dans lequel un sommet est le but d'au plus une arête : on remplace le graphe du centre par les deux autres.

Une base de $\Lambda(x_{ij})/(\text{Arnold})$ est donc donnée par les graphes à k sommets dans lesquels tout sommet est extrémité d'au plus une arête. Notons $\Gamma_{k,r}$ l'ensemble de ces graphes ayant r arêtes, et remarquons que $r \leq k - 1$.

Dans la composante $A^{\otimes k} \otimes x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r} / I$, les composantes d'indice i_1 et j_1 de $A^{\otimes k}$ sont identifiées, de même pour les composantes d'indices i_2 et j_2 et ainsi de suite. Autrement dit,

$$A^{\otimes k} \otimes x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r} / I = A^{\otimes(k-r)} \otimes x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r}$$

avec une composante A par composante connexe du graphe associé. Comme l'adjonction d'une arête diminue chaque fois le nombre de composantes de 1, il reste $k - r$ composantes connexes. En tant qu'espace vectoriel, $A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij}) / I$ s'écrit donc

$$A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij}) / I = \bigoplus_{r=0}^{k-1} (\bigoplus_{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r) \in \Gamma_{k,r}} A^{\otimes(k-r)} \otimes x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r}).$$

Notons $(A \otimes \Lambda \overline{V}, d)$ un modèle minimal relatif de l'espace des chemins sur M . Un modèle de la fibre F_k est donc

$$M_k = ((A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij}) / I) \otimes \Lambda(\overline{V}_1 \oplus \dots \oplus \overline{V}_k), D)$$

obtenu comme le produit tensoriel

$$(A^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij}) / I) \otimes_{A^{\otimes k}} ((A \otimes \Lambda \overline{V}_1) \otimes \dots \otimes (A \otimes \Lambda \overline{V}_k))$$

et dans lequel chaque $(A \otimes \Lambda \overline{V}_i, d)$ est une copie de $(A \otimes \Lambda \overline{V}, d)$. Pour étudier la cohomologie de F_k , en tant qu'espace vectoriel, on forme la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow A^{\otimes k} \otimes \Lambda(\overline{V}_1 \oplus \dots \oplus \overline{V}_k) \rightarrow M_k \rightarrow (A^{\otimes k} \otimes \Lambda^+(x_{ij}) / I) \otimes \Lambda(\overline{V}_1 \oplus \dots \oplus \overline{V}_k) \rightarrow 0.$$

L'homologie réduite du membre de gauche est nulle. Dans le membre de droite, $d(x_{ij}) = 0$. Ce terme est donc la somme directe de complexes

$$\bigoplus_{r=1}^{k-1} (\bigoplus_{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r) \in \Gamma_{k,r}} x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r} A^{\otimes(k-r)} \otimes \Lambda(\overline{V}_1 \oplus \dots \oplus \overline{V}_k)).$$

On en déduit la

Proposition 6.4. Si M admet un bon modèle, alors

$$\tilde{H}^*(F_k; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{r=1}^{k-1} (\bigoplus_{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r) \in \Gamma_{k,r}} s^{(n-1)r} (H_* \Omega M)^{\otimes r})$$

où s désigne la suspension et $\Gamma_{k,r}$ l'ensemble des graphes à k sommets et r arêtes.

Preuve

La cohomologie réduite est donnée par

$$\tilde{H}^*(F_k; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{r=1}^{k-1} \bigoplus_{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r) \in \Gamma_{k,r}} x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r} (\Lambda \overline{V})^{\otimes r}.$$

□

Remarque 6.5. Une base de la cohomologie réduite de M_k est donc donnée par un ensemble de cocycles dont la composante dans l'idéal engendré par les x_{ij} se projette sur une base de

$$\bigoplus_{r=1}^{k-1} \bigoplus_{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r) \in \Gamma_{k,r}} x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_r j_r} (\Lambda \overline{V})^{\otimes r}.$$

Pour $k = 2$, on retrouve

$$\tilde{H}^*(F_2; \mathbb{Q}) = x_{12} \Lambda \overline{V}.$$

Pour $k = 3$, on a

$$\tilde{H}^*(F_3; \mathbb{Q}) = x_{12}(\Lambda \overline{V}) \oplus x_{13}(\Lambda \overline{V}) \oplus x_{23}(\Lambda \overline{V}) \oplus x_{12}x_{23}(\Lambda \overline{V})^{\otimes 2} \oplus x_{12}x_{13}(\Lambda \overline{V})^{\otimes 2}.$$

(b) Homotopie de F_k

Avant d'entamer la discussion, munissons-nous d'un outil performant pour déterminer certaines fibres homotopiques.

Soient $p : E \rightarrow B$ une fibration de fibre F et $f : A \rightarrow E$ une application continue telle que $p \circ f \sim *$. Il existe alors des applications $f' \sim f$ et g rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \xrightarrow{p} B \\ & \nwarrow g & \uparrow f' \\ & & A. \end{array}$$

Notons $E' = E \cup_{f'} CA$, $p' : E' \rightarrow B$ l'extension de p définie par $p'|_{CA} = *$ et $q : \Omega B \times A \rightarrow \Omega B \times F \rightarrow F$ la composée de l'holonomie et de $Id \times g$.

Théorème 6.6. La fibre homotopique de p' a le type d'homotopie de l'espace

$$\frac{F \amalg (\Omega B \times CA)}{\sim}$$

obtenu en identifiant $(w, (a, 0))$ avec $q(w, a)$ pour tous les $w \in \Omega B$ et $a \in A$.

Preuve

Par définition, la fibre homotopique de $p' : E' \rightarrow B$ est donnée par

$$F_{p'} = \{(e', \sigma) \in E' \times PB \mid \sigma(0) = p'(e')\}.$$

Notons F_p la fibre homotopique de p . L'espace topologique $F_{p'}$ est homéomorphe à l'espace

$$\frac{F_p \amalg (\Omega B \times CA)}{\sim}$$

obtenu en identifiant $(\omega, (a, 0))$ avec $(f'(a), \omega)$ pour tous les $a \in A$ et $\omega \in \Omega B$. Enfin, l'équivalence d'homotopie $\varphi : F_p \rightarrow F : (e, \sigma) \mapsto H(1)$, où $H : I \rightarrow E$ désigne l'unique application qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{e} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\sigma} & B, \end{array}$$

induit l'équivalence d'homotopie annoncée. $\square$

Soient $q_1, q_2, \dots$ une suite de points distincts de M .

Lemme 6.7. Si M est une variété polygène, alors la fibre homotopique F_{j_k} de l'inclusion

$$j_k : M \setminus \{q_1, \dots, q_{k-1}\} \hookrightarrow M,$$

a le type d'homotopie rationnel du bouquet de sphères

$$(\Sigma^{n-1}(\Omega M \vee S^0))^{\vee(k-1)}.$$

Preuve Nous allons faire la démonstration pour $k = 3$.

Comme le suggère le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} M \setminus \{p\} \vee S^{n-1} & \xrightarrow{i \vee *} & M \\ & \searrow k & \nearrow j \\ & M \setminus \{p, q\} & \end{array}$$

la fibre homotopique de j a le type d'homotopie de la fibre homotopique de $i \vee *$. On applique alors le Théorème 6.6 à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & M \setminus \{p\} & \xrightarrow{i} & M \\ & \nwarrow * & \uparrow * & \nearrow * & \\ & & S^{n-2} & & \end{array}$$

où la fibre homotopique F_0 a le type d'homotopie rationnel de $\Sigma^{n-1}(\Omega M \vee S^0)$, suivant le Théorème 4.3. On en déduit que la fibre homotopique de l'application $i \vee * : M \setminus \{p\} \vee S^{n-1} = M \setminus \{p\} \cup_* CS^{n-2} \rightarrow M$ a le type d'homotopie de l'espace

$$F' = \frac{F_0 \coprod (\Omega M \times CS^{n-2})}{\sim}$$

obtenu en identifiant les couples $(w, (x, 0)) \in \Omega M \times CS^{n-2}$ avec $\delta(w)$, l'image de w par le connectant de la fibration i . Suivant le Lemme 1.11, l'application rationalisée $(\Omega i)_0$ admet une section σ . Par conséquent, le connectant rationnel δ_0 est trivial : $\delta_0 \circ Id \sim \delta_0 \circ (\Omega i)_0 \circ \Omega \sigma_0 \sim *$. Il s'ensuit que $F_{j_3} \approx_0 F_0 \vee \frac{\Omega M \times D^{n-1}}{\Omega M \times S^{n-2}} \approx F_0 \vee \Sigma^{n-1} \Omega M \vee S^{n-1}$.

Pour $k > 3$, il suffit de répéter la construction. $\square$

Nous en déduisons la Proposition suivante décrivant le lien entre F_k et F_{k-1} :

Proposition 6.8. Si la variété M est polygène, alors pour chaque $k \geq 2$, la fibre homotopique F_k de l'inclusion $i_k : F(M; k) \hookrightarrow M^k$, s'inscrit dans une fibration homotopique

$$\Sigma_k \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1},$$

où

$$\Sigma_k \approx_0 (\Sigma_{n-1}(\Omega M \vee S^0))^{\vee(k-1)}.$$

Preuve

Rappelons que si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues et F_f , F_g et $F_{g \circ f}$ désignent les fibres homotopiques des applications f , g , et $g \circ f$, alors on a une fibration

$$F_f \rightarrow F_{g \circ f} \rightarrow F_g.$$

Considérons les injections $f : F(M; k) \rightarrow F(M; k-1) \times M$ et $g : F(M, k-1) \times M \rightarrow M^k$. On a $F_{g \circ f} = F_k$ et $F_g = F_{k-1}$. D'autre part en composant f avec la projection $p_1 : F(M; k-1) \times M \rightarrow F(M; k-1)$, on fait apparaître F_f comme la fibre homotopique de l'inclusion $i : M \setminus Q_{k-1} \hookrightarrow M$. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème fondamental de ce chapitre :

Théorème 6.9. Si la variété M est polygène, alors

- (1) $\pi_* \Omega F_k \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de Lie de dimension globale inférieure ou égale à $k - 1$.
- (2) La fibre homotopique F_k est un espace de catégorie rationnelle inférieure ou égale à $k - 1$.
- (3) Si M admet un bon modèle, alors pour chaque $k \geq 2$, la suite spectrale de Serre de la fibration $\Sigma_k \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1}$ dégénère au terme E_2 .

Pour rappel, la dimension globale d'une algèbre de Lie graduée L , $gldim(L)$, est l'entier r maximal tel que $Ext_{\cup L}^r(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \neq 0$. S'il n'existe pas de tel entier, la dimension globale est dite infinie.

La cohomologie $Ext_{\cup L}^*(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ est la cohomologie de l'algèbre des cochaines $C^*(L) = (\Lambda Hom(sL, \mathbb{Q}), d_2)$, et la dimension globale l'entier maximal tel que cette cohomologie soit non nulle.

Pour un espace topologique simplement connexe X dont les nombres de Betti sont finis, et admettant un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$, l'algèbre des cochaines sur l'algèbre de Lie $\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}$ est $(\Lambda V, d_2)$, d_2 désignant la partie quadratique de la différentielle. De plus, en filtrant $(\Lambda V, d)$ par la longueur des mots, on obtient une suite spectrale avec $E^2 = H^*(\Lambda V, d_2)$ et $E^\infty = H^*(\Lambda V, d)$. La cohomologie de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ est donc une bonne première approximation de $H^*(X; \mathbb{Q})$.

Remarquons toutefois que la dimension globale de L_X peut être supérieure à la catégorie rationnelle de X , comme dans le cas $\mathbb{C}P(2)$. En effet, l'algèbre différentielle $(\Lambda(x, y), d)$ définie par $d(y) = x^3$, $d(x) = 0$ et $|x| = 2$ est un modèle minimal de $\mathbb{C}P(2)$. Comme la partie quadratique de d est nulle, la dimension globale de $L_{\mathbb{C}P(2)}$ est infinie, tandis que la catégorie rationnelle de $\mathbb{C}P(2)$ est égale à 2.

Preuve du théorème 6.9

(1) Montrons tout d'abord par récurrence sur k que $\pi_*(\Omega F_k) \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de Lie de dimension globale inférieure à $k - 1$.

Le résultat est vrai pour $k = 2$, car F_2 est rationnellement un bouquet de sphères, c'est à dire un espace coformal de catégorie 1.

Supposons le résultat vrai pour l'entier $k - 1$. Dans ce cas on a un modèle de Sullivan relatif de la fibration

$$\Sigma_k \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1}$$

de la forme suivante

$$(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \rightarrow (\Lambda W, \overline{D}).$$

Comme Σ_k est rationnellement un bouquet de sphères, et grâce au Corollaire 1.41, on peut supposer que l'image par la différentielle D d'un élément $w \in W$ s'écrit

$$D(w) = x + \sum_i v_i \otimes w_i + \overline{D}(w),$$

pour certains $x \in \Lambda^{\geq 2}(V)$ et $v_i \in V$. En particulier, $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ est le modèle minimal de Sullivan de F_k et en considérant les parties quadratiques des différentielles, on obtient l'extension suivante :

$$(\Lambda V, d_2) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D_2) \rightarrow (\Lambda W, \overline{D}).$$

Par l'hypothèse de récurrence, $H_p(\Lambda V, d_2) = \frac{\text{Ker}(d_2: \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{p+1} V)}{\text{Im}(d_2: \Lambda^{p-1} V \rightarrow \Lambda^p V)} = 0$, pour $p \geq k-1$. Notons $S \subset \Lambda^{k-2} V$ un supplémentaire des cocycles. L'idéal I de $(\Lambda V, d_2)$ défini par $I = \Lambda^{\geq k-1} V \oplus S$ est acyclique. Par conséquent, l'algèbre différentielle graduée commutative $(A, d_2) = (\Lambda V/I, d_2)$ est quasi-isomorphe à $(\Lambda V, d_2)$. Pour calculer $H_p(\Lambda V \otimes \Lambda W, D_2)$, il suffit de calculer $H_p(A \otimes \Lambda W, D_2)$. Or $H_p(A \otimes \Lambda W, D_2) = 0$ pour $p \geq k$, car toutes les classes d'homologie de $(A \otimes \Lambda W, D_2)$ peuvent être représentées par un cocycle de $A \otimes (W \oplus \mathbb{Q})$. En effet, soit $\omega = \sum_i a_i \otimes z_i \in A \otimes \Lambda W$ un cocycle dans lequel z_{i_0} est un élément de $\Lambda^l W$ de longueur $l \geq 2$ maximale. La forme de D_2 implique que $\overline{D}(z_{i_0}) = 0$, et comme Σ_k est de catégorie rationnelle 1, il existe $u_{i_0} \in \Lambda^{l-1} W$ tel que $\overline{D}(u_{i_0}) = z_{i_0}$. Le cocycle $\omega' = \sum_i a_i \otimes z_i - D_2(a_{i_0} u_{i_0})$ représente la même classe d'homologie que ω . En répétant l'argument, on peut s'arranger pour que $\omega' \in A \otimes (W \oplus \mathbb{Q})$. La dimension globale de $\pi_* \Omega F_k \otimes \mathbb{Q}$ est bien inférieure à $k-1$.

(2) Nous déduisons du point (1) que si $(\Lambda X, d)$ est le modèle minimal de F_k , alors tout cocycle de $(\Lambda X, d_2)$ de longueur supérieure à k est un cobord. Notons S un supplémentaire des d_2 -cocycles dans $\Lambda^{k-1} X$, alors $I = \Lambda^{\geq k} X \oplus S$ est un idéal acyclique pour la différentielle d_2 . L'idéal I est aussi acyclique pour la différentielle d . En effet, notons $w = \sum_{i=i_0}^{i_1} w_i$, $w_i \in \Lambda^i X$ un d -cocycle de I . Dans ce cas w_{i_0} est un d_2 -cocycle et donc un d_2 -cobord, $w_{i_0} = d_2(\alpha)$. On remplace alors w par le d -cocycle cohomologiquement équivalent $w - d(\alpha)$. Ce nouveau d -cocycle appartient à $\Lambda^{> i_0} X$. On recommence et on voit ainsi que w est équivalent à un cocycle de $\Lambda^{\geq N} X$ pour N arbitrairement grand. L'élément w est donc un cobord. Il s'ensuit que l'adgc $(\Lambda X, d)$ est quasi-isomorphe à $(\Lambda X/I, d)$. Cette dernière adgc est de nilpotence $k-1$. L'espace F_k est donc de

catégorie rationnelle inférieure ou égale à $k - 1$.

(3) Supposons maintenant que la variété M admette un bon modèle. Les fibrations $\Sigma_r \rightarrow F_r \rightarrow F_{r-1}$ donnent des bornes supérieures pour les homologies des F_r . En effet, notons $P_r(t)$ la série de Poincaré de F_r . Nous avons une inégalité coefficient par coefficient :

$$P_r(t) \leq P_{r-1}(t)(1 + (r-1)P_{\Omega M}(t)t^{n-1}).$$

Par récurrence, nous en déduisons cette inégalité :

$$P_k(t) \leq (1 + (k-1)P_{\Omega M}(t)t^{n-1})(1 + (k-2)P_{\Omega M}(t)t^{n-1}) \cdots (1 + P_{\Omega M}(t)t^{n-1}).$$

Reprenons maintenant le calcul de $P_k(t)$ effectué en 6.1 et calculons de part et d'autre le nombre α de termes $(P_{\Omega M}(t)t^{n-1})^r$. Dans l'expression du terme de droite de l'inégalité, α désigne le choix de r composants parmi les $k - 1$ composants, que l'on peut numéroté de k à 2 en décroissant, et pour chaque composant, d'un entier inférieur au numéro de ce composant. Ce nombre α est exactement égal au nombre de forêts à r arêtes formées avec les sommets $1, \dots, k$ et telles que 2 arêtes n'ont jamais le même sommet. En effet une telle forêt est déterminée par l'ensemble des extrémités des arêtes, (r nombres parmi les entiers de 2 à k), et pour chaque arête d'extrémité j du choix de son origine, un nombre entre 1 et $j - 1$. Ceci prouve que l'inégalité est en fait une égalité. $\square$

(c) F_3

Théorème 6.10. L'espace F_3 est un espace coformal de catégorie rationnelle inférieure à 2.

Preuve

La fibration $\Sigma_3 \rightarrow F_3 \rightarrow F_2$ admet pour modèle minimal

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{i} (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \longrightarrow (\Lambda W, \overline{D})$$

dans lequel d et $\overline{D}$ sont quadratiques. L'espace Σ_3 étant rationnellement un bouquet de sphères, on peut supposer que pour chaque $w \in W$,

$$D(w) = \overline{D}(w) + \sum_{i \in I} w_i f_i(w) + g(w)$$

pour certains $f_i(w) \in \Lambda^+ V$, $g(w) \in \Lambda^{\geq 2} V$ et où $\{w_i\}_{i \in I}$ désigne une base de W . Nous allons démontrer par récurrence sur le degré usuel que la différentielle D vérifie

$$(6.1) \quad D(w) = \overline{D}(w) + \sum_{i \in I} w_i x_i(w)$$

pour certains $x_i(w) \in V$.

Soit $w \in W$ de degré minimal. Alors $D(w) = g(w)$ est un cocycle de $(\Lambda V, d)$ de longueur supérieure ou égale à 2, et donc un cobord : $g(w) = d(x)$. Quitte à remplacer w par $w' = w - x$, on peut donc supposer que $D(w) = 0$. La différentielle D a donc la forme 6.1 sur les éléments de W de degré minimal.

Supposons que D soit de la forme 6.1 sur $W^{<k}$. Soit $w \in W^k$. Le calcul suivant

$$\begin{aligned} D^2(w) &= D(\overline{D}(w)) + \sum_{i \in I} \overline{D}(w_i) f_i(w) \\ &+ \sum_{i \in I} (\sum_{j \in I} w_j x_j(w_i)) f_i(w) \\ &+ \sum_{i \in I} (-1)^{|w_i|} w_i d(f_i(w)) + d(g(w)) \end{aligned}$$

prouve que $g(w)$ est un cocycle et donc un cobord, $g(w) = d(y')$. Quitte à remplacer le générateur w par $w' = w - y'$, on peut donc supposer que

$$D(w) = \overline{D}(w) + \sum_{i \in I} w_i f_i(w).$$

On décompose $\sum_i w_i f_i(w) = a_2 + \cdots + a_n$ en une somme dans laquelle $a_r \in \Lambda^r(V \oplus W)$ et $a_n \neq 0$. Si $n = 2$, $D(w)$ a la forme 6.1. Si $n \geq 3$, alors par l'hypothèse de récurrence, l'élément a_n est un cocycle. Notons $a_n = \sum_{j \in I'} w_j b_j$ avec $I' \subset I$. On déduit de l'égalité

$$(6.2) \quad 0 = D(a_n) = \sum_j \overline{D}(w_j) b_j + \sum_j (\sum_i w_i x_i(w_j)) b_j \pm \sum_j w_j d(b_j)$$

que les w_j sont des $\overline{D}$ -cocycles.

Soit $I_0 \subset I'$ l'ensemble d'indices tel que w_j est de degré maximal si et seulement si $j \in I_0$. On déduit encore de l'égalité 6.2 que pour chaque $j \in I_0$, $d(b_j) = 0$. F_2 étant un bouquet de sphères, ceci implique que $b_j = d(b'_j)$. On pose alors $w' = w - \sum_{j \in I_0} (-1)^{|w_j|} w_j b'_j$ et on recommence l'opération jusqu'à ce que $a'_n = 0$. Ensuite on recommence sur a'_{n-1} et ainsi de suite, jusqu'à ce que $n = 2$. $\square$

6.3. HOMOTOPIE DE $F(M; k)$

Proposition 6.11. Si M est une variété polygène, alors l'homomorphisme

$$j_k : \pi_*(F(M \setminus m_0; k)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(F(M; k)) \otimes \mathbb{Q}$$

est surjectif pour chaque $k \geq 1$.

Preuve

Nous allons faire la preuve par récurrence sur k . La première partie du Théorème 4.3 donne le cas $k = 1$. Supposons ensuite que l'assertion soit

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \\
\downarrow & & \\
\pi_*(M \setminus m_0 \setminus Q_{k-1}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{i} & \pi_*(M \setminus Q_{k-1}) \otimes \mathbb{Q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_*F(M \setminus m_0; k) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{j_k} & \pi_*F(M; k) \otimes \mathbb{Q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_*F(M \setminus m_0; k-1) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{j_{k-1}} & \pi_*F(M; k-1) \otimes \mathbb{Q} \\
\downarrow & & \\
0 & &
\end{array}$$

FIG. 1

vérifiée pour $k-1$. D'après le Théorème 2.3, les colonnes du diagramme commutatif suivant sont des fibrations et la première admet une section.

$$\begin{array}{ccc}
M \setminus m_0 \setminus Q_{k-1} & \longrightarrow & M \setminus Q_{k-1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(M \setminus m_0; k) & \longrightarrow & F(M; k) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \\
F(M \setminus m_0; k-1) & \longrightarrow & F(M; k-1).
\end{array}$$

On en tire le diagramme commutatif représenté à la figure 1, dans lequel les suites verticales sont exactes. Par l'hypothèse de récurrence, l'homomorphisme j_{k-1} est surjectif. Pour prouver que j_k est surjectif, il suffit donc de prouver que l'homomorphisme i est surjectif. Dans ce but, rappelons que $M \setminus Q_k \approx M \setminus q_1 \vee (\bigvee_{i=1}^{k-1} S_i^{n-1})$. Il s'ensuit que i s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\pi_*(M \setminus m_0 \setminus Q_{k-1}) & \xrightarrow{i} & \pi_*(M \setminus Q_{k-1}) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
\pi_*(M_1 \vee (\bigvee_{i=1}^{k-1} S_i^{n-1})) & \longrightarrow & \pi_*(M_1 \vee (\bigvee_{i=1}^{k-2} S_i^{n-1})),
\end{array}$$

ce qui complète la preuve. $\square$

Les relations de Cohen et Gitler restent donc valables pour $F(M; k)$. En particulier $\pi_*(\Omega F(M; k)) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré comme algèbre de Lie par

les B_{ij} vérifiant les " infinitesimal braid relations " et les images par les différentes sections s_i de $\pi_*(\Omega M) \otimes \mathbb{Q}$.

6.4. $L_{F(\mathbb{CP}(n);3)}$

Suivant le Théorème 2.3, l'espace de configurations $F(\mathbb{CP}(n); 3)$ s'inscrit dans la fibration

$$(6.3) \quad \mathbb{CP}(n) \setminus Q_2 \rightarrow F(\mathbb{CP}(n); 3) \rightarrow F(\mathbb{CP}(n); 2).$$

La fibre $\mathbb{CP}(n) \setminus Q_2$ a le type d'homotopie du bouquet $\mathbb{CP}(n-1) \vee S^{2n-1}$. D'après la Proposition 1.18, l'algèbre de Lie d'homotopie de ce bouquet est le produit libre $L_{\mathbb{CP}(n-1) \vee S^{2n-1}} = L_{\mathbb{CP}(n-1)} \amalg L_{S^{2n-1}}$. Par conséquent, le centre est réduit à 0 et le Corollaire 1.33 implique l'exactitude de la suite

$$(6.4) \quad 0 \longrightarrow L_{\mathbb{CP}(n) \setminus Q_2} \xrightarrow{i} L_{F(\mathbb{CP}(n);3)} \xrightarrow{p} L_{F(\mathbb{CP}(n);2)} \longrightarrow 0$$

induite par la fibration 6.3. On en déduit l'isomorphisme d'espaces vectoriels $L_{F(\mathbb{CP}(n);3)} \cong L_{\mathbb{CP}(n-1)} \amalg L_{S^{2n-1}} \oplus \sigma(L_{F(\mathbb{CP}(n);2)})$, où σ désigne une section linéaire de p . L'algèbre de Lie $L_{\mathbb{CP}(n-1)} \amalg L_{S^{2n-1}}$ est une sous-algèbre de Lie de $L_{F(\mathbb{CP}(n);3)}$. Pour déterminer complètement $L_{F(\mathbb{CP}(n);3)}$, il reste donc à déterminer les crochets $[x, \sigma(v)]$ et $[\sigma(v), \sigma(v')]$ pour $v, v' \in L_{F(\mathbb{CP}(n);2)}$ et $x \in L_{\mathbb{CP}(n-1)} \amalg L_{S^{2n-1}}$. Pour ce faire, nous construisons explicitement le modèle minimal de Sullivan de $F(\mathbb{CP}(n); 3)$.

6.4.1. Modèle minimal de $F(\mathbb{CP}(n); 3)$

Commençons par le cas particulier de $\mathbb{CP}(2)$. Cet espace est une variété complexe projective et admet donc un bon modèle. Un modèle commutatif de $F(\mathbb{CP}(2); 3)$ est donné par l'adgc (A, D) obtenue en quotientant

$$(\Lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \otimes \Lambda(x_{12}, x_{13}, x_{23}), D)$$

par les relations $x_{12}x_{23} + x_{23}x_{13} + x_{13}x_{12} = (a_i - a_j)x_{ij} = 0$ et dont la différentielle est définie par :

$$D(b_i) = a_i^3, \quad D(x_{ij}) = a_i^2 + a_i a_j + a_j^2 \quad \text{et} \quad |a_i| = 2.$$

D'ailleurs, le Théorème 2.3 indique que l'espace $F(\mathbb{CP}(2); 3)$ s'inscrit dans la fibration

$$F(\mathbb{CP}(2) \setminus 2pt; 1) \rightarrow F(\mathbb{CP}(2); 3) \rightarrow F(\mathbb{CP}(2); 2).$$

Suivant le Corollaire 3.1 de la section 3, $m_{F(\mathbb{CP}(2);2)} = (\Lambda(a_1, b, a_2, y_3), d)$ avec $db = a_1^3$, $dy_3 = a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2$. De plus, l'équivalence d'homotopie

$\mathbb{CP}(2) \setminus 2pt \approx \mathbb{CP}(2) \setminus pt \vee S^3 \approx S^2 \vee S^3$ implique que

$$m_{\mathbb{CP}(2) \setminus 2pt} = (\Lambda(a_3, y_1, y_2, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \dots), d)$$

avec $|a_3| = 2$, $|y_1| = 3$, $da_2 = dy_1 = 0$, $dy_2 = a_3^2$, $dt = a_3y_1$, $du = y_2y_1 - a_3t$, $dv = a_3u - y_2t$, $dw = y_1t$, $d\alpha = a_3v - y_2u$, $d\beta = t^2 + 2y_1u$, $d\gamma = a_3w + y_1u$. Par conséquent, le modèle minimal de Sullivan de $F(\mathbb{CP}(2); 3)$ a la forme suivante

$$m_{F(\mathbb{CP}(2); 3)} = (\Lambda(a_1, a_2, a_3, y_1, y_2, y_3, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \dots), D),$$

pour une certaine différentielle D telle que $Da_i = 0$, $Db = a_1^3$, et $Dy_3 = a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2$.

Premièrement, l'isomorphisme $H(m_{F(\mathbb{CP}(2); 3)}) \cong H(A, D)$ implique que $Dy_2 = a_1^2 + a_1a_3 + a_3^2$ et $Dy_1 = a_2^2 - a_1^2 + a_2a_3 - a_1a_3$. On en déduit que $Dt = a_3y_1 - a_1y_3 + a_2y_3 + a_1y_2 - a_2y_2 - a_2y_1$.

Ensuite, les égalités $a_1^3 = Db$, $(a_2)^3 = D(a_2y_3 - a_1y_3 + b)$, $a_1^2a_2 = D(a_1y_3 - b) - a_1a_2^2$, $a_2^2a_3 = D(a_3y_3 - a_1y_2 + b) + a_1a_3^2 - a_1a_2a_3$, $a_1a_2^2 = D(a_1y_1 + a_1y_2) - a_1a_2a_3 - a_1a_3^2$, $a_1^2a_3 = D(a_1y_2 - b) - a_1a_3^2$, $a_3^3 = D(a_3y_2 - a_1y_2 + b)$, $a_2a_3^2 = D(a_2y_2 + a_1y_2 - a_1y_3 + a_1y_1 + b) - 2a_1a_2a_3 - a_1a_3^2$ et $2a_1a_2a_3 = D(-a_2y_1 + a_2y_3 - 2a_1y_3 + 3b + y_3 - a_1y_2) + a_1a_3^2$ impliquent que, quitte à remplacer u par $u + \alpha$ pour un certain α de degré 5, on peut supposer que $Du = y_3y_1 + a_1t + a_2t - y_2y_1 + a_3t + u_1a_1a_3^2$, pour un certain $u_1 \in \mathbb{Q}$. Cependant, en travaillant de la même façon pour déterminer Dv et Dw , on remarque que $Dv = a_3u - y_2t - a_2u + ty_3$, $Dw = y_1t - a_2u + a_1u$ et $u_1 = 0$.

Enfin en poursuivant les calculs, on obtient $D\alpha = a_3v - y_2u + a_1v + a_2v + y_3u$, $D\beta = t^2 + 2y_1u + 2a_1v - 2a_2v + 2a_1w + 4a_2w$ et $D\gamma = a_3w + y_1u + a_1w + a_2w$.

Dans le cas $n \geq 3$, l'adgc (A, D) obtenue en quotientant l'algèbre

$$(\Lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \otimes \Lambda(x_{12}, x_{13}, x_{23}), D)$$

par les relations $x_{12}x_{23} + x_{23}x_{13} + x_{13}x_{12} = (a_i - a_j)x_{ij} = 0$ et telle que $D(b_i) = a_i^{n+1}$, $D(x_{ij}) = \sum_{k=0}^n a_i^{n-k} a_j^k$ et $|a_i| = 2$, est un modèle commutatif de l'espace $F(\mathbb{CP}(n); 3)$, qui s'inscrit dans la fibration suivante

$$\mathbb{CP}(n-1) \vee S^{2n-1} \rightarrow F(\mathbb{CP}(n); 3) \rightarrow F(\mathbb{CP}(n); 2).$$

Le modèle minimal de Sullivan de $\mathbb{CP}(n-1) \vee S^{2n-1}$ est donné par

$$m_{\mathbb{CP}(n-1) \vee S^{2n-1}} = (\Lambda(a_3, y_2, y_1, t, u, v, w, \alpha, \dots), d)$$

avec $da_3 = 0$, $dy_2 = a_3^n$, $dy_1 = 0$, $dt = a_3z$, $du = a_3^{n-1}t - y_2y_1$, $dv = a_3u - y_2t$, $dw = y_1t$ et $d\alpha = t^2 - 2a_3w$. En imitant les calculs du cas

$n = 2$, on trouve

$$m_{F(\mathbb{CP}(n);3)} = (\Lambda(a_1, a_2, a_3, y_1, y_2, y_3, t, b, u, v, w, \alpha, \dots), D)$$

avec

$$\begin{aligned} Da_i &= 0, \\ Dy_2 &= \sum_{i=0}^n a_1^{n-i} a_3^i, \\ Dy_3 &= \sum_{i=0}^n a_1^{n-i} a_2^i, \\ Dy_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_2^{n-i} a_3^i - a_1^{n-i} a_3^i), \\ Dt &= a_3 y_1 - a_1 y_3 + a_2 y_3 + a_1 y_2 - a_2 y_2 - a_2 y_1, \\ Db &= a_1^{n+1}, \\ Du &= y_3 y_1 - y_2 y_1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_1^{n-1-i} (\sum_{k=0}^i a_2^k a_3^{i-k}) t, \\ Dv &= a_3 u - y_2 t - a_2 u + t y_3, \\ Dw &= y_1 t - a_2 u + a_1 u, \\ D\alpha &= t^2 - 2a_3 w + 2a_1 v - 2a_2 v + 2a_2 w. \end{aligned}$$

Enfin, dans un cas comme dans l'autre, en effectuant les changements de variable $y_1 = y_1 + y_2$ et $b = 3b + a_3 y_2 - a_1 y_2 + a_2 y_3 - a_1 y_3$, on donne la forme suivante au modèle minimal de $F(\mathbb{CP}(n);3)$

$$m_{F(\mathbb{CP}(n);3)} = (\Lambda(a_1, a_2, a_3, y_1, y_2, y_3, t, b, u, v, w, \alpha, \dots), D)$$

avec

$$\begin{aligned} Da_i &= 0, \\ D(y_i) &= \sum_{l=0}^n a_j^{n-l} a_k^l \text{ avec } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \\ D(t) &= (a_3 - a_2) y_1 + (a_2 - a_1) y_3 + (a_1 - a_3) y_2, \\ Db &= \sum_{i=1}^3 a_i^{n+1}, \\ Du &= y_3 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + \sum_{i=0}^{n-1} a_1^{n-1-i} (\sum_{k=0}^i a_2^{i-k} a_3^k) t, \\ Dv &= (a_3 - a_2) u + t(y_3 - y_2), \\ Dw &= (a_1 - a_2) u + t(y_1 - y_2), \\ D\alpha &= t^2 + 2(a_2 - a_3) w + 2(a_1 - a_2) v. \end{aligned}$$

pour $n \geq 3$, et pour $n = 2$,

$$m_{F(\mathbb{CP}(2);3)} = (\Lambda(a_1, a_2, a_3, y_1, y_2, y_3, t, b, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \dots), D)$$

avec

$$\begin{aligned}
Da_i &= 0, \\
D(y_i) &= \sum_{l=0}^2 a_j^{2-l} a_k^l \text{ avec } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \\
D(t) &= (a_3 - a_2)y_1 + (a_2 - a_1)y_3 + (a_1 - a_3)y_2, \\
Db &= \sum_{i=1}^3 a_i^3, \\
Du &= y_3y_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + (a_1 + a_2 + a_3)t, \\
Dv &= (a_3 - a_2)u + t(y_3 - y_2), \\
Dw &= (a_1 - a_2)u + t(y_1 - y_2), \\
D\alpha &= u(y_3 - y_2) + (a_1 + a_2 + a_3)v, \\
D\beta &= t^2 + 2(a_2 - a_3)w + 2(a_1 - a_2)v + 6a_2w + 2y_1u, \\
D\gamma &= (a_1 + a_2 + a_3)w + (y_1 - y_2)u.
\end{aligned}$$

6.4.2. Algèbre de Lie d'homotopie de $F(\mathbb{CP}(n); 3)$

(a) $L_{\mathbb{CP}(n) \setminus 2pts}$

Le modèle minimal de Sullivan de $\mathbb{CP}(n-1)$ est donné par

$$m_{\mathbb{CP}(n-1)} = (\Lambda(a, y), d)$$

avec $dy = a^n$ et $|a| = 2$. On en déduit que

$$L_{\mathbb{CP}(n-1)} = \begin{cases} Ab(\check{a}, \check{y}) & \text{si } n \geq 3, \\ \mathbb{L}(\check{a}) & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

De même, d'après l'Exemple 1.7, on trouve $L_{S^{2n-1}} = \mathbb{L}(\check{z})$. Finalement on obtient

$$(6.5) \quad L_{\mathbb{CP}(n) \setminus 2pts} = \begin{cases} Ab(\check{a}, \check{y}) \amalg \mathbb{L}(\check{z}) & \text{si } n \geq 3, \\ \mathbb{L}(\check{a}, \check{z}) & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

(b) $L_{F(\mathbb{CP}(n); 2)}$

Suivant le Corollaire 3.1, le modèle minimal de $F(\mathbb{CP}(n); 2)$ est donné par $m_{F(\mathbb{CP}(n); 2)} = (\Lambda(a_1, a_2, b, c), d)$ avec $db = a_1^{n+1}$, $dc = \sum_{i=0}^n a_1^{n-i} a_2^i$. Dans le cas $n = 2$, on observe que $[\check{a}_1, \check{a}_1] = \nu\check{c}$, $[\check{a}_1, \check{a}_2] = \eta\check{c}$ et $[\check{a}_2, \check{a}_2] = \xi\check{c}$. D'après la formule 1.4, on obtient $\nu = \langle s[\check{a}_1, \check{a}_1]; c \rangle = 2$. De même, on trouve $\eta = 1$ et $\xi = 2$. Par conséquent, $[\check{a}_1, \check{a}_1] = [\check{a}_2, \check{a}_2] = 2[\check{a}_1, \check{a}_2]$. On en déduit

$$(6.6) \quad L_{F(\mathbb{CP}(n); 2)} = \begin{cases} \frac{Ab(\check{b}) \oplus \mathbb{L}(\check{a}_1, \check{a}_2)}{[\check{a}_i, \check{a}_i] - 2[\check{a}_i, \check{a}_j] \text{ pour } i \neq j} & \text{si } n = 2, \\ Ab(\check{a}_1, \check{a}_2, \check{c}, \check{b}) & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

(c) $L_{F(\mathbb{CP}(n); 3)}$

Les éléments $\check{a}_1, \check{a}_2, \check{a}_3, \check{y}_1', \check{y}_2, \check{y}_3$ et $\check{b}'$ engendrent $(L_{F(CP(n);3)})$. Dans le cas $n \geq 3$, la suite exacte 6.4 a la forme suivante :

$$0 \longrightarrow Ab(\check{a}, \check{y}) \amalg \mathbb{L}(\check{z}) \xrightarrow{i} L_{F(CP(n);3)} \xrightarrow{p} Ab(\check{a}_1, \check{a}_2, \check{b}, \check{c}) \longrightarrow 0$$

avec $i(\check{a}) = \check{a}_3$, $i(\check{y}) = \frac{1}{2}(\check{y}_1' + \check{y}_2)$, $i(\check{z}) = \frac{1}{2}(\check{y}_1' - \check{y}_2)$, $p(\check{a}_i) = \check{a}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, $p(\check{b}') = 3\check{b}$ et $p(\check{y}_3) = \check{y}_3$. Ceci prouve la

Proposition 6.12. Si $n \geq 3$, alors $L_{F(CP(n);3)} = L \oplus Ab(\check{b}')$, où L désigne l'algèbre obtenue en quotientant $Ab(\check{a}_1, \check{a}_2, \check{a}_3) \amalg \mathbb{L}(\check{y}_1, \check{y}_2, \check{y}_3)$ par les relations :

$$(1) [y_1', y_2] = [y_2, y_3] = [y_3, y_1'],$$

$$(2) [a_1, y_3] = [a_2, y_1'] = [a_3, y_2] = -[a_1, y_2] = -[a_2, y_3] = -[a_3, y_1'].$$

Dans le cas $n = 2$, la suite exacte 6.4 a la forme suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(\check{a}, \check{z}) \xrightarrow{i} L_{F(CP(2);3)} \xrightarrow{p} \frac{\mathbb{L}(\check{a}_1, \check{a}_2)}{([\check{a}_i, \check{a}_i] - 2[a_i, a_j], i \neq j)} \oplus Ab(\check{b}) \longrightarrow 0$$

avec $i(\check{a}) = \check{a}_3$, $i(\check{y}) = \frac{1}{2}(\check{y}_1' + \check{y}_2)$, $p(\check{a}_i) = \check{a}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $p(\check{b}') = 3\check{b}$. Ceci prouve la

Proposition 6.13.

$$L_{F(CP(2);3)} \cong \frac{\mathbb{L}(\check{a}_1, \check{a}_2, \check{a}_3) \oplus Ab(\check{b}')}{([\check{a}_i, \check{a}_i] - 2[a_i, a_j], i \neq j)}$$

□