Université catholique de Louvain

Secteur des sciences et technologies

Earth and Life Institute

# Détermination de la rotation et des marées d'Europe et de Ganymède à partir de mesures de poursuite Doppler : Modélisation et simulations

**Rose-Marie Baland**

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences

Décembre 2011

# *Remerciements*

Tout d'abord, je tiens à remercier Véronique Dehant de m'avoir encouragée à poursuivre une thèse au sein de son équipe. Sans son enthousiasme, ce projet n'aurait pu voir le jour. Mes remerciements vont également à Tim Van Hoolst pour son investissement dans l'encadrement de ce travail. Ses conseils avisés et le temps qu'il m'a accordé ont permis de mener à bien ce projet.

Je remercie les membres de mon jury, Marie-Laurence De Keersmaecker, Michel Crucifix, Pascale Defraigne, Anne Lemaître, Antoine Moquet et Marie Yseboodt pour avoir accepté ce rôle et pour leur commentaires qui ont permis d'améliorer le manuscript.

Merci aux collègues pour les bons moments passés ensemble. Merci tout d'abord à Lébi, Michel, Mari-Carmen et Collin avec qui j'ai eu l'occasion de partager mon bureau et qui ont eu sufisemment de patience pour gérer la cohabitation. Merci à Mari-Carmen pour les séances de rédaction communes qui furent d'une grande aide. Je remercie particulièrement Marie et Tim pour m'avoir accompagnée avec bonne humeur pendant mon apprentissage de la recherche. Je remercie également Pascal Rosenblatt et Michel Mitrovic d'avoir relu avec application certaines parties du manuscrit. Merci aussi à Antony, Gregor, Laurence, Aurélien, Olivier, Tilio, Mikael, Seb, Maria, Ozgür, Quentin, Justine et Sandrine pour la bonne ambiance.

Merci à mon père pour sa contribution à la chasse aux fautes d'orhographe, ainsi qu'à mon frère, *Capitaine* Laurence, Liliane et les copains d'unif pour leurs encouragements.

Enfin, merci à Alix. Merci pour la compréhension et l'écoute lors des moments de stress, merci pour les *sièges rédactionnels* du week-end, merci pour ton soutien. Bref, merci pour avoir été à mes côtés pendant ces trois dernières années.

# Table des matières

**Introduction** **1**

**I Les paramètres géophysiques** **13**

**1 Les paramètres dans le potentiel gravitationnel du satellite** **15**
1.1 Potentiel gravitationnel statique . . . . . 16
1.1.1 Tenseur d'inertie . . . . . 16
1.1.2 Coefficients du potentiel gravitationnel statique . . . . . 18
1.1.3 Paramètres liés à la rotation . . . . . 20
1.2 Potentiel gravitationnel variable . . . . . 26
1.2.1 Potentiel générateur de marée . . . . . 26
1.2.2 Nombre de Love . . . . . 27
1.2.3 Facteur de dissipation . . . . . 29
1.3 Résumé . . . . . 31

**2 Les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ et la structure interne** **33**
2.1 Équilibre hydrostatique . . . . . 34
2.2 Aplatissements, équation de Radau et moment d'inertie moyen 36
2.3 Modèles de structure interne . . . . . 38
2.3.1 Profils de densité . . . . . 38
2.3.2 Profils d'aplatissements . . . . . 42

**3 Les paramètres liés à la rotation et la structure interne** **45**
3.1 Les librations . . . . . 46
3.1.1 Librations pour un corps rigide . . . . . 47
3.1.2 Effet d'un océan interne global . . . . . 50
3.2 L'état de Cassini . . . . . 62
3.2.1 État de Cassini pour un corps rigide . . . . . 64
3.2.2 Effet d'un océan interne global . . . . . 71

**II Problème direct** **83**

**4 Perturbations des éléments orbitaux de la sonde** **85**
4.1 Équations du mouvement . . . . . 86
4.2 Équations de Lagrange . . . . . 87
4.2.1 Orbite keplerienne . . . . . 87
4.2.2 Orbite perturbée . . . . . 88
4.3 Potentiels perturbateurs . . . . . 90
4.3.1 Potentiel perturbateur statique $\mathcal{R}_{gr}$ . . . . . 90
4.3.2 Potentiel perturbateur de marée $\mathcal{R}_{tid}$ . . . . . 91
4.3.3 Potentiel perturbateur de troisième corps (Jupiter) $\mathcal{R}_J$ . 93
4.4 Intégration numérique des équations de Lagrange . . . . . 93
4.5 Intégration analytique : méthode de Kaula . . . . . 95
4.6 Méthode de Kaula modifiée . . . . . 97
4.6.1 Solution primaire . . . . . 98
4.6.2 Solution additionnelle . . . . . 107
4.6.3 Solution approximée . . . . . 107
4.7 Validité de la nouvelle méthode d'intégration . . . . . 108
4.7.1 Date . . . . . 108
4.7.2 Demi-grand axe, excentricité et inclinaison . . . . . 108
4.7.3 Longitudes du nœud, du péricentre et anomalie moyenne 113
4.7.4 Ganymède . . . . . 113
4.8 Effet des paramètres liés à la rotation . . . . . 114
4.9 Effet de la dissipation . . . . . 115

**5 Modélisation de l'observable et signature des paramètres** **119**
5.1 Définition de l'observable Doppler . . . . . 120
5.2 Valeurs numériques des constantes . . . . . 124
5.2.1 Éléments orbitaux . . . . . 124
5.2.2 Paramètres d'orientation . . . . . 126
5.2.3 Longitude du périjove d'Europe et de Ganymède par rapport au plan de Laplace . . . . . 127
5.2.4 Angles de rotation . . . . . 128
5.3 Sensibilité de l'observable Doppler aux paramètres géophysiques 129
5.3.1 Observable Doppler pour une sonde en orbite keplerienne 129
5.3.2 Effet de Jupiter sur l'observable Doppler . . . . . 131
5.3.3 Effet total des paramètres géophysiques . . . . . 132
5.3.4 Effets individuels des paramètres géophysiques . . . . . 133
5.4 Visibilité de la sonde, orbite face-on ou edge-on et angle $\beta$ . . . 139

**III Problème Inverse** **145**

**6 Méthode d'inversion** **147**
6.1 Choix des paramètres à inverser . . . . . 148
6.1.1 Paramètres issus du problème direct . . . . . 148
6.1.2 Nouveau choix de paramètres . . . . . 152
6.2 Bruit sur les mesures : erreurs a posteriori et corrélations . . . 154
6.3 Absorption du signal par les conditions initiales de l'orbite . . . 156
6.4 Effet de la visibilité et du nombre de mesures . . . . . 160
6.5 Les nouveaux paramètres et la structure interne . . . . . 163
6.5.1 Europe . . . . . 165
6.5.2 Ganymède . . . . . 169

**7 Recherche d'une stratégie de mission favorable** **173**
7.1 Europe . . . . . 174
7.1.1 Précision requise sur les paramètres . . . . . 174
7.1.2 Bilan de la configuration nominale . . . . . 176
7.1.3 Comparaison de différentes configurations de mission . . 176
7.2 Ganymède . . . . . 183
7.2.1 Précision requise sur les paramètres . . . . . 183
7.2.2 Comparaison de différentes configurations de mission . . 184
7.3 Choix de la configuration de mission la plus favorable . . . . . 188

**Conclusions et perspectives** **191**

**Bibliographie** **197**

**A Vecteur rotation - Forces d'inertie - Pesanteur/Marées** **205**
A.1 Composition des vitesses . . . . . 206
A.2 Composition des accélérations . . . . . 207
A.3 Pesanteur et marées en un point quelconque d'un satellite . . . 207

**B Équations de Clairaut et Radau pour un satellite synchrone** **209**
B.1 Théorie de Clairaut . . . . . 209
B.2 Equation différentielle de Clairaut . . . . . 211
B.3 Equation de Radau : moment d'inertie moyen . . . . . 211

**C Résolution des équations de Lagrange** **213**
C.1 Facteurs de perturbation . . . . . 213
C.2 Constantes . . . . . 222
C.3 Valeurs moyennes du demi-grand axe et du moyen mouvement 223
C.3.1 Effet des paramètres liés à la rotation . . . . . 225

**D Équation de Kepler** **229**

**E Inversion par la méthode des moindres carrés** **231**

**F Librations of the Galilean satellites** **237**

**G Titan's Obliquity as evidence for a subsurface ocean ?** **253**

# Introduction

Le système solaire externe comprend quatre planètes géantes : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Chacune de ces planètes possède un grand nombre de satellites naturels de tailles variées, aussi appelés *lunes*. Certains de ces satellites sont suffisamment grands pour ressembler à des petites planètes, c'est-à-dire qu'ils sont approximativement sphériques. D'autres, plus petits, ont une forme irrégulière. Alors que la plupart de ces satellites se sont formés autour de leur planète, certains ont été capturés à partir de la ceinture de Kuiper. Il s'agit d'une zone du système solaire, au-delà de l'orbite de Neptune, qui contient des dizaines, voire des centaines de milliers, de corps glacés de tailles diverses. Triton, le plus grand satellite de Neptune, et Phœbé, un petit satellite de Saturne ayant une forme irrégulière, sont des exemples probables d'objets capturés[1]. Chaque planète géante et son cortège de satellites forment ainsi une sorte de système solaire miniature. A cause de leur éloignement, peu de missions d'exploration spatiale ont, à ce jour, été dédiées à l'étude de ces *systèmes satellitaires*.

## De Galilée aux sondes Pioneer 10 et 11

Les quatre plus grandes lunes de Jupiter sont appelées *satellites galiléens*, en l'honneur de Galilée qui les a découvertes en 1610 grâce à sa lunette astronomique. Elles se nomment, de la plus proche à la plus éloignée de la planète : Io, Europe, Ganymède et Callisto (voir également la figure 1). Ce sont les premiers satellites du système solaire externe à avoir été observés. Quelques dizaines d'années plus tard, en 1655, Huygens découvre Titan, le plus grand satellite de Saturne. On sait aujourd'hui que Ganymède, avec son rayon de 2631 kilomètres, est plus grand que Titan (2575 km) et est le plus grand satellite du système solaire. Ces deux satellites sont même plus grands que la planète Mercure, dont le rayon est de 2440 kilomètres. Notons qu'Europe et Ganymède seront au centre de notre travail.

[1] Les orbites de Triton et de Phœbé sont rétrogrades, ce qui signifie que ces satellites ne se seraient pas formés dans le système dans lequel ils se trouvent actuellement.



FIG. 1 – Les satellites galiléens vus par la sonde Galileo. De gauche à droite : Io, Europe, Ganymède et Callisto. Le rapport entre les dimensions des satellites est respecté (crédit : JPL/NASA).

Au début du vingtième siècle, avant la conquête de l'espace, des estimations de la masse des satellites galiléens et de Titan ont été réalisées à partir de l'observation depuis la Terre des perturbations mutuelles des trajectoires des satellites galiléens et des perturbations de la trajectoire d'Hypérion[2] par Titan (Brouwer 1924 et de Sitter 1931, par exemple). L'amélioration des techniques d'observation depuis la Terre a permis par la suite d'estimer approximativement l'albédo, la température et la composition de la surface de ces satellites grâce à l'analyse de la lumière qu'ils réfléchissent. Ces analyses ont indiqué la présence d'eau sous forme de glace à la surface d'Europe, de Ganymède et de Callisto (Pilcher et al. 1972 par exemple) et la présence d'une atmosphère contenant du méthane sur Titan (Kuiper 1944). Les dimensions des satellites ont été estimées à partir d'occultations d'étoiles ou de l'observation directe de la taille de leur disque vu depuis la Terre (Carlson et al. 1973 et Dollfus 1970 par exemple). La mise en commun des données pour la masse et la taille des satellites galiléens a montré qu'Io avait une densité similaire à celle de la Lune (c'est-à-dire environ 3500 kg/m$^3$) tandis que la densité de Ganymède et de Callisto valait environ 2000 kg/m$^3$ et que celle d'Europe était intermédiaire (environ 3000 kg/m$^3$). En fait, mis à part Io, et vu leur faible densité, les satellites sphériques du système solaire externe sont composés d'un mélange d'eau, de silicates et d'un peu de fer. On les appelle *satellites de glace*.

A partir de ces données imprécises, Lewis (1971a et b) tenta de décrire la structure interne des satellites de glace, en partant du principe que la chaleur perdue en surface (estimée par la température) devait provenir de la désintégration d'isotopes radioactifs présents dans les silicates. Il arriva à la conclusion que tous ces satellites devaient avoir un manteau d'eau liquide sous une fine croûte de glace. On parlerait aujourd'hui d'un *océan interne global* sous une *coquille de glace*. Il supposa que ces océans seraient détectables grâce à un

[2]Hypérion est un petit satellite de forme irrégulière de Saturne, découvert en 1848.

champ magnétique causé par des mouvements de convection dans l'eau liquide. Comme nous le verrons par la suite, les recherches et observations postérieures démontreront que la source de chaleur et le mécanisme de production du champ magnétique proposés par Lewis n'étaient pas corrects. Néanmoins, son intuition concernant la possibilité d'océans à l'intérieur des satellites de glace était remarquable.

Après les débuts de l'exploration de système solaire interne, la NASA[3] lance en 1972 et 1973 les sondes Pioneer 10 et 11, avec pour but d'étudier les systèmes de Jupiter et de Saturne. Après un voyage d'un peu moins de deux ans, les sondes sont passées respectivement à environ 130 000 et 43 000 kilomètres de la surface de Jupiter. A titre de comparaison, il faut savoir que le rayon de Jupiter est d'environ 70 000 kilomètres et que la distance de Io au centre de Jupiter est de 421 800 kilomètres. Lors de ces missions, des photos des quatre satellites galiléens et de Titan ont été prises, mais les clichés étaient de mauvaise qualité et ne permettaient de distinguer aucune caractéristique précise de leur surface. Lors de leur survol de Jupiter, les variations de vitesse des sondes dues à l'influence des satellites galiléens ont permis d'améliorer la précision sur la connaissance de leur masse, et donc sur la connaissance de leur densité (Anderson et al. 1974, Null 1976). Comme prévu, après son passage par le système jovien, la sonde Pioneer 10 s'est retrouvée sur une trajectoire de sortie du système solaire, tandis que Pioneer 11, profitant de l'assistance gravitationnelle de Jupiter, partait vers le système de Saturne. De la même façon que pour les satellites galiléens, le survol de Saturne a permis d'améliorer la connaissance de la masse de Titan (Null et al. 1981).

## Voyager 1 et 2

Les sondes Voyager 1 et 2, lancées en 1977, ont exploité plus avant la technique de l'assistance gravitationnelle. Comme Pioneer 11, elles sont toutes deux passées par les systèmes de Jupiter et de Saturne. Voyager 2 a ensuite ajouté Uranus et Neptune à son tableau de chasse, en profitant d'une position favorable des planètes les unes par rapport aux autres. Les survols des différentes planètes ont eu lieu entre 1979 et 1989. La résolution des caméras étant meilleure que pour les sondes Pioneer, des photos de meilleure qualité des satellites galiléens, de Titan et d'autres satellites de Saturne, ainsi que des principaux satellites d'Uranus et de Neptune ont été prises.

### Système jovien

A partir de ces images, une nouvelle estimation des dimensions des satellites galiléens a été réalisée (Smith et al. 1979a et b), ce qui a conduit à une plus grande précision sur l'estimation de leur densité moyenne, en considérant

[3]National Aeronautics and Space Administration (agence spatiale américaine)

les masses dérivées des données Pionner. L'analyse des variations de vitesse des sondes pour en déduire avec une meilleure précision la masse des satellites galiléens n'est arrivée que plus tard (Campbell et Synnot, 1985 et Campbell et Anderson, 1989).

Les surfaces des quatre satellites présentaient de grandes différences entre elles et des surprises étaient au rendez-vous parmi ces mondes si éloignés du Soleil, et que l'on supposait, à l'époque du lancement des sondes, glacés et inertes (Smith et al. 1979a et b) :

- La surface d'Io s'est révélée relativement jeune (moins d'un million d'années), car aucun cratère d'impact n'a pu y être décelé. Des panaches de matière éjectée jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres de la surface ont été observés (Morabito et al, 1979). Io est donc géologiquement actif, comme cela avait été prédit quelques mois avant l'arrivée de Voyager 1 dans le système jovien par Peale et al. (1979). Les auteurs y expliquaient que la dissipation interne de chaleur liée aux fortes marées levées par Jupiter sur le satellite seraient responsable d'un volcanisme observable.
- Sur les images de la mission Voyager, la surface d'Europe montre peu de cratères d'impact et présente un grand nombre de structures linéaires qui s'entrecroisent et semblent dues à des processus tectoniques à grande échelle, peut-être également liés aux marées. Par analogie avec Io, le chauffage de marée, et non la désintégration d'isotopes radioactifs supposée par Lewis (1971a et b), pouvait être tenu pour responsable de l'éventuelle présence d'un océan interne global. Par conséquent, la densité révisée menait à la conclusion que le satellite devait être composé d'environ vingt pour cent d'eau formant une couche externe d'environ cent kilomètres d'épaisseur et dont la partie inférieure serait sous forme liquide.
- La surface de Ganymède ne semblait pas très jeune en comparaison de celle des deux premiers satellites galiléens. Pourtant, certaines parties étant plus jeunes et moins cratérisées que d'autres, Smith et al. (1979a et b) suggérèrent une activité géologique passée.
- Les nombreux cratères à la surface de Callisto indiquaient une surface relativement âgée.

**Système de Saturne**

Le système de Saturne réservait également une surprise de (petite) taille ! Le satellite Encelade, malgré ses 500 kilomètres de diamètre, semblait être le satellite le plus actif du système (Smith et al. 1981 et 1982). En effet, sa surface très brillante et jeune présentait des preuves d'activité tectonique. De plus, les auteurs supposèrent que ce satellite était probablement la source des parti-

cules de l'anneau E[4], présentes en plus grande concentration près de son orbite.

L'atmosphère de Titan s'est révélée être plus épaisse que le laissaient penser les données des sondes Pioneer. C'est d'ailleurs pour cette raison que Titan a perdu son statut de plus grande lune du système solaire au profit de Ganymède. L'atmosphère de Titan étant très opaque, aucun détail de la surface n'a pu être observé. L'interprétation des données indiquait une pression atmosphérique soixante pour cent plus importante que sur Terre et une température de surface proche du point triple du méthane, suggérant que les états gazeux, liquide et solide puissent exister, selon la saison et la latitude.

Avec une densité d'environ 1900 kg/m$^3$, Titan est le plus dense des satellites de Saturne et est en cela similaire à Ganymède et Callisto. La densité des autres satellites de glace de Saturne est comprise entre 1000 et 1400 kg/m$^3$, ce qui en fait des corps composés majoritairement d'eau.

## Galileo et Cassini

Les sondes Voyager sont à l'origine d'un grand nombre de découvertes, mais elles ont également soulevé beaucoup de questions. Par exemple :

- Y a-t-il vraiment un océan sous la surface d'Europe ? Si oui, est-ce que la vie y est possible ?
- A quoi ressemble la surface de Titan ?
- Par quel mécanisme Encelade alimente l'anneau E ?

Les missions Pionner et Voyager consistaient, pour chaque sonde, en un bref passage dans les systèmes de Jupiter et/ou de Saturne. L'étape suivante de l'exploration devait être une mise en orbite autour de ces planètes, pour permettre une étude approfondie de leur système. Ce fut chose faite avec les sondes Galileo et Cassini lancées respectivement en 1989 et en 1997. Galileo a étudié le système jovien de 1995 à 2003, tandis que Cassini est entrée en orbite autour de Saturne en 2004 et est toujours en fonction.

A l'occasion de ses survols des différents satellites, le magnétomètre embarqué sur Galileo a détecté un champ magnétique induit[5] autour d'Europe, de Ganymède et de Callisto. Ces champs induits indiquent la présence possible d'une couche liquide conductrice près de la surface, c'est-à-dire un océan interne global qui, plongé dans le champ magnétique de Jupiter, produit le sien en réponse (Khurana et al. 1998 et Kivelson et al. 2002). La présence d'un océan

[4] L'anneau E est le plus large des anneaux de Saturne, mais également le plus éloigné. Contrairement aux autres anneaux, il est plutôt diffus.

[5] à ne pas confondre avec un champ magnétique propre, c'est à dire créé directement par les mouvements dans la couche liquide, comme le supposait Lewis (1971 et b).

à l'intérieur d'Europe semble difficile à remettre en question, tant les images de la surface plaident également en faveur de cette hypothèse (Carr et al. 1998).

Les survols des satellites galiléens ont également permis d'obtenir, grâce à l'analyse des variations de la vitesse de la sonde, une nouvelle donnée qui est le *moment d'inertie*. Ce dernier indique le niveau de concentration des masses du satellite en son centre (Anderson et al., 1996, 1998, 2001a et b). En particulier, l'épaisseur de la couche externe eau/glace des trois derniers satellites a été contrainte dans une gamme de valeurs possibles (de 80 à 170 km pour Europe, par exemple).

L'observation de geysers de glace au pôle sud d'Encelade par la sonde Cassini a fourni l'explication à la fois du caractère jeune de sa surface et de l'alimentation de l'anneau E (Porco et al. 2006). L'origine de ces geysers n'est pas encore déterminée avec certitude. Il pourrait s'agir d'un océan interne global ou d'une poche d'eau située sous la surface. L'observation de structures similaires à celles d'Europe à la surface d'Encelade laisse penser qu'il s'agit bien d'un océan (Giese et al. 2011a).

La sonde Cassini comportait un module nommé Huygens, développé par l'ESA[6], destiné à se poser sur la surface de Titan. Les images prises par le module ainsi que les données recueillies par des instruments plus adaptés que ceux des sondes Voyager pour voir au travers de l'atmosphère ont permis de montrer que le méthane est à la base d'un cycle comparable au cycle de l'eau sur Terre.

Le moment d'inertie de Titan a été déterminé grâce aux variations de vitesse de la sonde Cassini (Iess et al. 2010). Les images radar de la surface ont permis de mesurer la rotation du satellite. Lorenz et al. (2008) détectent une très légère variation de la vitesse de rotation de Titan, par rapport à la rotation synchrone[7] attendue, qu'ils attribuent à l'effet de l'atmosphère sur une coquille de glace découplée de l'intérieur par un océan liquide. Cette variation de la vitesse de rotation se retrouve dans une analyse plus détaillée de Stiles et al. (2008 et 2010) qui ont également estimé l'*obliquité* de Titan, c'est-à-dire l'inclinaison de son axe de rotation par rapport à un axe perpendiculaire à son orbite. La valeur de l'obliquité n'est pas compatible avec celle d'un corps rigide ayant le moment d'inertie déterminé par Iess et al. (2010), indiquant peut-être également la présence d'un océan liquide à l'intérieur du satellite (Bills et Nimmo 2008 et Baland et al. 2011). Notons que la présence d'un océan global à l'intérieur de Titan est aussi compatible avec les modèles théoriques

[6] European Spatial Agency (agence spatiale européenne).

[7] Tout comme la Lune, les satellites de glace sont en rotation synchrone avec leur révolution, c'est-à-dire que leur vitesse de rotation est égale à leur vitesse de révolution. Ils montrent toujours la même face à leur planète.

de formation et d'évolution de sa structure interne (Tobie et al. 2005a).

## Missions futures vers Europe et Ganymède

Comme nous venons de le voir, les données de la sonde Galileo ont permis d'affiner les modèles de structure interne d'Europe et de Ganymède. Néanmoins, des détails comme l'épaisseur de la coquille ou de l'océan demeurent inconnus et la question de l'habitabilité présente ou passée reste ouverte. Il faudra donc à l'avenir observer des phénomènes qui dépendent des caractéristiques de la couche eau/glace. Par exemple, les déformations de marée ou les variations périodiques de la vitesse de rotation qui dépendent de l'épaisseur de la coquille de glace.

Après la mise en orbite autour de la planète pour effectuer des survols des satellites, l'étape suivante serait de mettre une sonde en orbite autour de ces satellites. Dans la foulée de la mission Galileo, des missions d'exploration dédiées à Europe et/ou Ganymède ont été mises à l'étude à la NASA, comme à l'ESA. Les derniers projets soumis aux processus de sélection des agences spatiales s'appellent EJSM-Laplace (Europa Jupiter System Mission-Laplace) et JUICE (JUpiter ICy moon Explorer). Le projet EJSM-Laplace était le fruit d'une collaboration entre la NASA et l'ESA qui avaient décidé de fusionner des projets concurrents, pour réduire les coûts. Il avait été convenu que la NASA serait responsable de la conception d'une sonde devant orbiter autour d'Europe et appelée JEO (Jupiter Europa Orbiter) tandis que l'ESA serait en charge de JGO (Jupiter Ganymede Orbiter), un orbiteur pour Ganymède. Devant faire face à des restrictions budgétaires, la NASA a, début 2011, fait descendre la mission EJSM dans la liste de ses priorités. L'ESA a donc décidé de poursuivre l'étude séparée de sa partie de mission, tout en prévoyant de faire quelques survols d'Europe avec JGO avant l'insertion en orbite autour de Ganymède. Il s'agit du projet JUICE (Dougherty et al. 2011b).

## Étude de faisabilité

Pour qu'un projet de mission soit adopté, il faut que ses objectifs scientifiques soient clairement définis, ainsi que la configuration de mission qui permet de les atteindre, en fonction des contraintes techniques et en sachant que différents objectifs scientifiques peuvent avoir tendance à interférer entre eux. Ces travaux préalables peuvent être appelés « étude de faisabilité » (*assessment study* ou *feasibility study* dans la littérature). La détermination du moment d'inertie des satellites galiléens grâce à la mesure du décalage en fréquence dû à l'effet Doppler sur le signal émis par la sonde Galileo fournit un exemple intéressant de l'importance de ces études :

- Hubbard et Anderson (1978) ont d'abord expliqué que des survols rapprochés (*flyby encounters* ou *flybys*) des satellites galiléens devraient permettre de mesurer les coefficients de degré deux de leur potentiel gravitationnel, notés $C_{20}$ et $C_{22}$, qui permettent ensuite d'estimer leur moment d'inertie, et donc d'obtenir de l'information sur la répartition des masses à l'intérieur des satellites.
- Ensuite, Campbell (1984) a estimé la précision qui serait obtenue sur détermination des paramètres $C_{20}$ et $C_{22}$, pour les quatre satellites, à partir de la configuration de la mission Galileo telle que définie à l'époque. Par *configuration de mission*, nous entendons ici le nombre de flybys pour chaque satellite ainsi que les position et vitesse initiales de la sonde au début de chaque flyby. L'objectif scientifique était de pouvoir déterminer si les satellites étaient différentiés ou non.
- A cause d'une défaillance de l'antenne principale de la sonde en 1991, la configuration de mission a du être redéfinie. Schubert et al. (1994) ont réestimé la précision attendue sur la détermination de $C_{20}$ et $C_{22}$ à partir de la nouvelle configuration. Ils ont montré que l'objectif scientifique pouvait encore être rencontré.

Dans Anderson et al. (1997), la précision obtenue sur les paramètres $C_{20}$ et $C_{22}$ d'Europe à partir des données réelles est en très bon accord avec les prévisions de Schubert et al. (1994). Ensuite, la mission ayant été étendue, des flybys supplémentaires ont été effectués et la précision sur la détermination de $C_{20}$ et $C_{22}$ a été améliorée d'un facteur cinq (Anderson et al. 1998).

Dans le présent travail, nous proposons de réaliser une étude de faisabilité pour une sonde en orbite autour d'Europe ou de Ganymède, dans le but de participer à l'effort de préparation de la future mission JUICE pour Ganymède ou de toute autre mission à destination d'Europe et/ou de Ganymède qui pourrait être définie à l'avenir.

Précédemment, des études de faisabilité ont été réalisées pour des orbites autour d'Europe (Wu et al. 2001 et Wahr et al. 2006) et autour de Ganymède (Finocchiaro et al. 2010). Ces études sont assez réalistes vu qu'elles prennent en compte l'effet de forces non gravitationnelles qui s'exercent sur la sonde, comme le freinage atmosphérique ou la pression de radiation solaire qui agit sur les différentes surfaces de la sonde. Dans ces études, la trajectoire de la sonde est calculée numériquement, ce qui implique une meilleure précision qu'avec une solution analytique qui est forcément une approximation plus forte de la réalité[8].

[8]Sachant qu'au moins trois corps sont impliqués dans le problème (la sonde, Europe ou Ganymède, et Jupiter), il n'existe pas de solution analytique exacte pour la trajectoire de la sonde.

Dans les études de Wu et al. (2001) et Finocchiaro et al. (2010), l'*observable* envisagée, c'est-à-dire la quantité qui sera mesurée en situation réelle, est le décalage Doppler, dans la continuité de ce qui a été réalisé auparavant grâce à la sonde Galileo. Parmi les paramètres estimés, on trouve les coefficients $C_{20}$ et $C_{22}$ du potentiel gravitationnel statique, ainsi qu'un paramètre appelé nombre de Love et noté $k_2$ qui représente la partie variable du potentiel gravitationnel due aux marées périodiques levées par Jupiter sur le satellite considéré. En effet, ce dernier paramètre dépend fortement des caractéristiques de la couche eau/glace du satellite dans le cas où ce dernier possède un océan liquide interne global. Sa détermination lors d'une mission future permettra de remplir l'objectif scientifique qui est de mieux contraindre la couche eau/glace. Dans Wahr et al. (2006), les mesures du décalage Doppler sont combinées avec des mesures altimétriques des variations de l'élévation de la surface du satellite dues au marées périodiques et qui correspondent à un autre nombre de Love, noté $h_2$, qui dépend également de la structure de la couche eau/glace. Dans notre étude de faisabilité, nous allons uniquement considérer la mesure du décalage Doppler. Nous avons divisé le travail en trois parties distinctes.

**Les paramètres géophysiques**

En plus des paramètres $C_{20}$, $C_{22}$ et $k_2$, nous allons considérer d'autres paramètres qui interviennent dans l'expression du potentiel gravitationnel du satellite et qui sont liés à sa rotation. Ces paramètres proviennent des variations périodiques de la vitesse de rotation de la coquille et de l'intérieur du satellite, ou *librations*, et de l'orientation des axes de rotation de la coquille et de l'intérieur par rapport au plan de l'orbite du satellite naturel, ou *état de Cassini*. Ces paramètres sont petits et ont une faible influence sur le décalage Doppler. Ils sont d'ailleurs explicitement négligés dans Wahr et al. (2006). Néanmoins, étant donné qu'ils peuvent dépendre de la structure de la couche eau/glace, leur détermination pourrait apporter des contraintes supplémentaires, complétant l'information obtenue à partir des trois premiers paramètres ($C_{20}, C_{22}$ et $k_2$). Nous allons également prendre en compte la dissipation de chaleur due aux déformations de marée, en considérant un paramètre supplémentaire appelé facteur de dissipation. Les paramètres retenus seront appelés *paramètres géophysiques*. L'identification des paramètres géophysiques dans le potentiel gravitationnel du satellite considéré sera le sujet du premier chapitre de ce travail.

Les contraintes sur la structure interne qui seraient apportées par la détermination des coefficients $C_{20}$ et $C_{22}$, du nombre de Love $k_2$ et du facteur de dissipation seront discutées dans le premier et le second chapitre, à partir de la littérature existante.

La modélisation des librations pour le satellite Europe et son océan interne

global a d'abord été envisagée par Van Hoolst et al. (2008). Dans le cadre de notre travail, nous avons réalisé une étude plus complète qui concerne les quatre satellites galiléens et leurs possibles couches internes liquides (un noyau métallique liquide pour Io, Europe et Ganymède, et un océan d'eau liquide sous la surface pour Europe, Ganymède et Callisto). Le modèle et les résultats ont été présentés dans Baland et Van Hoolst (2010). Dans la première section du chapitre 3, nous présenterons l'application à Europe et Ganymède. Nous nous intéresserons particulièrement à la façon dont la mesure des amplitudes de libration permettrait de contraindre ou non les caractéristiques de l'intérieur, et en particulier l'épaisseur de la coquille de glace.

Nous avons envisagé la modélisation de l'État de Cassini pour un satellite ayant un océan interne global en prenant d'abord comme exemple Titan (Baland et al. 2011), dans le but d'expliquer l'obliquité observée par Stiles et al. (2008 et 2010). Dans la seconde section du chapitre 3, nous avons appliqué le modèle à Europe et Ganymède, dans le but de déterminer si l'orientation de l'axe de rotation de la coquille et de l'intérieur de ces satellites dépendent significativement de l'une ou l'autre caractéristique de leur structure interne.

**Le problème direct**

Notre objectif n'est pas de réaliser une étude numérique la plus réaliste possible. Nous souhaitons modéliser analytiquement le décalage Doppler dû au mouvement de la sonde pour déterminer comment les paramètres géophysiques influencent ce dernier. Nous ne prendrons en compte que les forces gravitationnelles qui s'exercent sur la sonde : celle du satellite naturel, mais également celle de Jupiter. L'avantage d'une approche analytique par rapport à une approche numérique est qu'elle permet de tester rapidement un grand nombre de configurations de mission[9]. En effet, les études numériques précédentes (Wu et al. 2001, Wahr et al. 2006, Finocchiaro et al. 2010) ne portaient que sur une ou deux configurations de mission et ne permettaient pas de comparer l'influence d'une configuration différente sur l'effet des paramètres géophysiques.

La seconde partie de notre étude concernera donc, en premier lieu, la dérivation d'une solution analytique approximée pour la trajectoire de la sonde, sachant que l'orbite de cette dernière devra être quasi circulaire et quasi polaire, en vertu du fait qu'un autre objectif scientifique de la mission requiert une orbite qui permet de photographier l'ensemble du satellite avec une altitude plutôt stable. Nous intégrerons les *équations de Lagrange*, qui décrivent les variations des éléments orbitaux de la sonde, en nous inspirant de la méthode d'intégration de Kaula (1966). La solution approximée présentée dans le chapitre 4 dépendra des paramètres géophysiques identifiés dans la première partie.

[9]L'approche numérique devant être utilisée ensuite pour affiner les résultats de l'approche analytique.

En second lieu, dans le chapitre 5, nous calculerons la vitesse relative projetée sur la ligne formée par la sonde et la station d'observation terrestre qui reçoit le signal émis par la sonde. En effet, cette vitesse relative projetée est proportionnelle au décalage Doppler et peut servir à modéliser l'observable. Nous estimerons la sensibilité de l'observable par rapport aux paramètres géophysiques, en vue d'évaluer la pertinence de leur présence dans le modèle. C'est ce que l'on appelle le *problème direct*.

**Le problème inverse**

Enfin, dans la troisième et dernière partie, nous évaluerons la précision que l'on pourra obtenir sur la détermination des paramètres géophysiques, à partir de mesures du décalage Doppler, pour différentes configurations de mission. C'est ce que l'on appelle le *problème inverse*. Nous établirons quel type de configuration de mission, c'est-à-dire quel type d'orbite, permet de réaliser l'objectif de mieux contraindre la structure de la couche eau/glace d'Europe ou de Ganymède.

Pour ce faire, nous présenterons dans le chapitre 6 la méthode d'inversion par la minimisation des moindres carrés, en prenant soin de choisir un ensemble de paramètres compatibles avec cette méthode. Dans le chapitre 7, les orbites testées seront toutes quasi circulaires, c'est-à-dire d'excentricité faible, et quasi polaires, c'est-à-dire d'inclinaison élevée. Elles pourront varier, par exemple, selon l'altitude, l'excentricité ou l'orientation du plan de l'orbite par rapport à la station d'observation située sur Terre, ou ce qui revient au même, par rapport à la ligne de visée.

# Première partie

# Les paramètres géophysiques

# Chapitre 1

# Les paramètres géophysiques dans le potentiel gravitationnel du satellite

## Sommaire


**1.1 Potentiel gravitationnel statique . . . . . 16**
1.1.1 Tenseur d'inertie . . . . . 16
1.1.2 Coefficients du potentiel gravitationnel statique . . 18
1.1.3 Paramètres liés à la rotation . . . . . 20
**1.2 Potentiel gravitationnel variable . . . . . 26**
1.2.1 Potentiel générateur de marée . . . . . 26
1.2.2 Nombre de Love . . . . . 27
1.2.3 Facteur de dissipation . . . . . 29
**1.3 Résumé . . . . . 31**


Le but final de notre travail est de déterminer quel type d'orbite devrait avoir une sonde pour contraindre au mieux la structure interne d'Europe ou de Ganymède, à partir de mesures d'une quantité observable. Dans cette étude, la quantité observable sera le décalage en fréquence dû à l'effet Doppler sur le signal émis par la sonde et reçu sur Terre, que l'on appellera simplement *observable Doppler*. Pour rechercher cette configuration de mission optimale, nous devons modéliser cette observable Doppler, en passant par la modélisation de la trajectoire de la sonde.

La façon dont les masses sont réparties à l'intérieur du satellite considéré, c'est-à-dire sa structure interne, va influencer la trajectoire de la sonde. Les perturbations de la trajectoire seront calculées à partir du potentiel gravitationnel

du satellite. Dans ce chapitre, nous identifions des paramètres qui permettent à la fois de décrire la structure interne et le potentiel gravitationnel. Nous les appellerons *paramètres géophysiques*. Ils seront classés selon deux catégories : les paramètres géophysiques correspondant à la partie statique du potentiel gravitationnel et ceux correspondant à la partie variable de ce potentiel. La modélisation de la dépendance des paramètres de la première catégorie par rapport à la structure interne sera abordée dans les chapitres 2 et 3, tandis que celle des paramètres de la seconde catégorie est traitée dans la section 2 de ce chapitre.

## 1.1 Potentiel gravitationnel statique

Le *potentiel gravitationnel statique* décrit l'attraction exercée en un point extérieur par le satellite considéré comme non déformable, c'est-à-dire parfaitement rigide. Les corrections à apporter pour tenir compte des déformations dues aux marées et donc, au comportement viscoélastique du satellite, seront comprises dans un potentiel additionnel que nous appellerons *potentiel gravitationnel variable* (voir section 1.2).

### 1.1.1 Tenseur d'inertie

Considérons un corps rigide auquel est attaché un repère orthogonal $(Oxyz)$ ayant pour origine $O$ le centre de masse du corps et dont l'axe $x$ est orienté dans une direction quelconque mais fixe par rapport au corps considéré. La position d'un point du corps dans ce repère sera donnée par $\vec{r} = (x, y, z)$ et la densité en ce point sera notée $\rho(x, y, z)$. Le moment d'inertie du corps par rapport à un axe quelconque représente sa résistance à une mise en rotation autour de cet axe, de la même façon que la masse représente la résistance du corps vis-à-vis d'une translation du centre de masse. Le moment d'inertie est donc à la rotation ce que la masse est à la translation. Pour mieux comprendre cette similitude, il est utile de faire le parallèle entre l'expression de la quantité de mouvement et celle du moment cinétique, qui sont des quantités conservées lors d'une translation et d'une rotation d'un corps rigide, respectivement, en l'absence de force extérieures.

– Considérons une translation de vitesse uniforme du corps rigide dans un référentiel inertiel. Tous les points du corps ont la même vitesse $\vec{v}$, constante, dans ce référentiel. La quantité de mouvement

$$\vec{p} = \int_V \vec{v}\, dm = \vec{v} \int_V dm = \vec{v} \int_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \mathcal{M}\vec{v} \tag{1.1}$$

est une intégrale sur le volume $V$ du corps rigide et est conservée au cours du temps. Elle s'écrit comme le produit d'une inertie et du vecteur vitesse. Cette inertie est la masse $\mathcal{M}$ du corps. Il s'agit bien d'une quantité

scalaire puisque la résistance à la translation est identique quelque soit la direction du vecteur vitesse.

– Considérons maintenant une rotation, de vitesse angulaire uniforme, du corps rigide par rapport à un référentiel inertiel, et autour d'un axe passant par son centre de masse. Le vecteur rotation $\vec{\omega} = (u, v, w)$, exprimé dans le repère $Oxyz$, est constant et est défini de façon à ce que la vitesse[1] d'un point du corps situé en $\vec{r}$ s'écrive $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. La vitesse $\vec{v}$ est donc différente pour les différents points du corps rigide. Le moment angulaire est conservé et s'écrit

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm = \int_V \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\, dm. \tag{1.2}$$

Par analogie avec la quantité de mouvement, on écrit le moment angulaire comme le produit d'une inertie et du vecteur rotation

$$\vec{L} = \bar{\bar{I}}\vec{\omega}. \tag{1.3}$$

L'inertie est dans ce cas un tenseur, car la résistance à la rotation est différente selon la direction de l'axe de rotation. Ce tenseur est appelé simplement *tenseur d'inertie* et son expression, obtenue en comparant les équations (1.2) et (1.3), est la suivante :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \int_V (y^2+z^2) dm & -\int_V xy\, dm & -\int_V xz\, dm \\ -\int_V xy\, dm & \int_V (x^2+z^2) dm & -\int_V yz\, dm \\ -\int_V xz\, dm & -\int_V yz\, dm & \int_V (x^2+y^2) dm \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Par convention, le tenseur d'inertie s'écrit plus souvent de cette façon :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Les éléments diagonaux $(A, B, C)$, également appelés *moments d'inertie*, représentent la résistance par rapport à la mise en rotation autour des axes $(x, y, z)$, respectivement. Ils sont d'autant plus petits que la masse du corps rigide est concentrée près de l'axe considéré. Les éléments non-diagonaux, ou *produits d'inertie*, représentent l'asymétrie de la répartition des masses par rapport aux trois plans définis par les axes du repère.

[1] Cette vitesse est appelée vitesse d'entraînement, car elle est due à la rotation du repère lié au corps par rapport au référentiel inertiel. Il s'agit ici également de la vitesse absolue, puisque les points du corps rigide sont au repos dans le repère lié au corps (voir aussi annexe A).

Le tenseur d'inertie est symétrique et donc diagonalisable. Par conséquent, il existe toujours au moins un repère lié au corps rigide pour lequel les éléments non-diagonaux sont nuls, il s'agit du *repère principal d'inertie*. Les termes diagonaux $(A, B, C)$ sont alors les *moments d'inertie principaux* dont la moyenne est le *moment d'inertie moyen* $I = (A+B+C)/3$. $I$ représente la concentration des masses près du centre de masse. Considérons quelques exemples pertinents en géophysique :

- Pour un corps sphérique de densité homogène, de rayon $R$ et de masse $\mathcal{M}$, les moments d'inertie principaux sont égaux ($A = B = C$) et $I = 0.4\mathcal{M}R^2$.

- Pour un ellipsoïde de révolution de densité homogène, les moments d'inertie principaux (liés aux axes de symétries de l'ellipsoïde) sont tels que $A \leq B \leq C$ et $I = 0.4\mathcal{M}R^2$ avec $R$ le rayon moyen de l'ellipsoïde.

- Les satellites naturels comme Europe ou Ganymède peuvent être considérés comme un ensemble de couches homogènes à symétrie ellipsoïdale imbriquées les unes dans les autres, la densité augmentant vers le centre de masse. Il s'agit en effet de l'état d'équilibre à long terme atteint par le satellite sous l'effet de sa rotation et de l'attraction de la planète autour de laquelle il évolue (voir chapitre 2). Les moments d'inertie principaux seront tels que $A < B < C$ et le moment d'inertie moyen sera tel que $I < 0.4\mathcal{M}R^2$. En pratique, on préfère utiliser le *moment d'inertie moyen normalisé* $I/(\mathcal{M}R^2)$ pour décrire la concentration de la masse du corps près du centre de masse, car il facilite la comparaison entre les différents satellites. Au plus $I/(\mathcal{M}R^2)$ est petit, au plus les couches internes et externes présenteront un écart de densité important.

### 1.1.2 Coefficients du potentiel gravitationnel statique

Restons dans la cas d'un satellite naturel rigide et considérons un point $P$ extérieur à ce satellite. Les coordonnées cartésiennes de $P$ sont notées $(x, y, z)$ et la distance de $P$ au centre de masse du satellite est donnée par $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Les coordonnées des points situés à l'intérieur du satellite sont notées $(x', y', z')$ et leur distance au centre de masse est $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Au second ordre du développement en polynômes de Legendre du rapport $(r'/r)$, le potentiel gravitationnel statique du satellite au point $P$ est (Dehant et al. 2011, par exemple)

$$W(x, y, z) = \frac{G\mathcal{M}}{r} + \frac{G}{2r^3} \int_V \left( \frac{3}{r^2}(xx' + yy' + zz')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right) dm. \tag{1.6}$$

En utilisant la définition du tenseur d'inertie (1.4), on obtient

$$W = \frac{G\mathcal{M}}{r} + \frac{G}{2r^3}\left[(A+B+C) - \right. \\ \left. -\frac{3\left(-2yzD - 2xyF - 2xzE + x^2A + y^2B + z^2C\right)}{r^2}\right]. \quad (1.7)$$

Le potentiel gravitationnel statique du satellite est donc la somme du potentiel d'une masse ponctuelle $\mathcal{M}$ égale à celle du satellite et d'un terme dépendant de la répartition des masses à l'intérieur du satellite, via les composantes du tenseur d'inertie. Dès lors, les coordonnées sphériques $(r, \lambda, \theta)$, telles que $(x, y, z) = (r\cos\lambda\sin\theta, r\sin\lambda\sin\theta, r\cos\theta)$, sont plus appropriées pour la description du potentiel qui s'écrit alors

$$W = \frac{G\mathcal{M}}{r}\left(1 + \sum_{m=0}^{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 (C_{2m}\cos m\lambda + S_{2m}\sin m\lambda)P_2^m(\cos\theta)\right) \quad (1.8)$$

où $P_2^m$ sont les polynômes de Legendre associés[2] de degré 2 et d'ordre $m$, $R$ est le rayon moyen du satellite et les coefficients $C_{2m}$ sont des combinaisons des composantes du tenseur d'inertie :

$$C_{20} = -\frac{C - \frac{A+B}{2}}{\mathcal{M}R^2}, \quad C_{21} = \frac{E}{\mathcal{M}R^2}, \quad S_{21} = \frac{D}{\mathcal{M}R^2}, \\ C_{22} = \frac{B-A}{4\mathcal{M}R^2}, \quad S_{22} = \frac{F}{2\mathcal{M}R^2}. \quad (1.9)$$

De part la définition des produits d'inertie, $C_{21}, S_{21}$ et $S_{22}$ sont nuls dans le repère principal d'inertie du satellite. Les moments d'inertie et les coefficients du potentiel gravitationnel sont deux façons différentes de décrire la répartition des masses à l'intérieur d'un satellite. Mais si les moments d'inertie diagonaux définissent univoquement les coefficients $C_{20}$ et $C_{22}$, les coefficients $C_{20}$ et $C_{22}$ correspondent à plusieurs solutions possibles pour les moments d'inertie. Néanmoins, les coefficients du potentiel présentent l'avantage d'une interprétation physique plus directe :

- $C_{20}$ correspond à une concentration de masse près du plan défini par les axes correspondants aux moments d'inertie principaux $A$ et $B$. On parle d'*aplatissement polaire*, auquel correspond un *bourrelet équatorial*.

[2] avec la convention de signe utilisée en géophysique, c'est-à-dire que $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$. Les mathématiciens emploient plutôt une autre définition pour les polynômes, égale à un facteur $(-1)^m$ près.

– $C_{22}$ représente une concentration de masse près du plan défini par les axes correspondants aux moments d'inertie principaux $A$ et $C$. On parle d'*aplatissement équatorial*.

De plus, les perturbations de la trajectoire d'une sonde en orbite autour du satellite par rapport à une orbite keplerienne (chapitre 4) dépendent directement de ces coefficients et donc indirectement des moments d'inertie. Ces deux coefficients seront donc nos deux premiers paramètres géophysiques, faisant le lien entre la répartition des masses à l'intérieur du satellite et les perturbations de la trajectoire de l'orbite.

### 1.1.3 Paramètres liés à la rotation

Les coefficients de degré 2 des potentiels gravitationnels d'Europe et de Ganymède ont déjà fait l'objet d'une estimation, grâce à l'analyse des données des flybys de la sonde Galileo. Anderson et al. (1996 et 1998) ont estimé ces coefficients dans un repère tournant dont l'origine est le centre de masse du satellite et dont le plan équatorial est confondu avec le plan de l'orbite du satellite autour de sa planète. La rotation du repère est uniforme et sa vitesse de rotation est la vitesse moyenne de rotation du satellite. L'axe $x$ est orienté dans la direction de la position moyenne de Jupiter vue depuis le satellite naturel. Nous appelons ce repère **ROT** pour **R**epère-**O**rbite-**T**ournant. L'orientation du ROT par rapport à un référentiel inertiel, l'ICRF[3] par exemple, peut être déduite des éphémérides du satellite considéré. Cette orientation est donnée dans les rapports de l'IAU (Seidelmann et al. 2007 et Archinal et al. 2011), sur base des éphémérides de Lieske (1998), et est par conséquent supposée connue. On peut définir une version 'fixe' du repère lié à l'orbite, appelons-le **RO** pour **R**epère-**O**rbite, avec l'axe $x$ orienté selon le nœud de l'orbite sur l'équateur de l'ICRF. Étant donné le lien entre les deux repères et le fait que l'orientation du RO est connue et fixe, ce dernier est pratique pour décrire le mouvement d'une sonde sous l'influence du potentiel gravitationnel d'un satellite naturel.

En choisissant de déterminer les coefficients du potentiel dans le ROT, Anderson et al. (1996 et 1998) ont supposé que ce repère est confondu avec le repère principal d'inertie (ou **BF** pour **B**ody-**F**rame), puisqu'il s'agit de l'hypothèse retenue dans les conventions de l'IAU.

– Pour Ganymède, les auteurs ont considéré a priori que les coefficients $C_{21}$, $S_{21}$ et $S_{22}$ étaient nuls et ils ne les ont pas gardés dans le modèle utilisé

[3]L'ICRF (International Celestial Reference Frame) est une réalisation d'un système de référence quasi-inertiel basé sur des sources radio extragalactiques très lointaines qui peuvent donc être considérées comme fixes (Ma et al. 1998). Comme on peut le voir à partir de Archinal et al. (2011), cette réalisation, c'est-à-dire le choix de l'orientation des axes du repère, est telle que le plan (x,y) correspond au plan équatorial de la Terre à l'époque J2000 et l'axe z est orienté selon la direction de l'axe de rotation de la Terre à la même époque.

| | Europe | Ganymède |
|---|---|---|
| $C_{20}$ | $(-435.5 \pm 8.2)\,10^{-6}$ | $(-127.53 \pm 2.9)\,10^{-6}$ |
| $C_{21}$ | $(-1.4 \pm 6.0)\,10^{-6}$ | - |
| $S_{21}$ | $(14 \pm 12)\,10^{-6}$ | - |
| $C_{22}$ | $(131.0 \pm 2.5)\,10^{-6}$ | $(38.26 \pm 0.87)\,10^{-6}$ |
| $S_{22}$ | $(-11.9 \pm 2.9)\,10^{-6}$ | - |

TAB. 1.1 – Coefficients de degré 2 du potentiel gravitationnel d'Europe et de Ganymède (Anderson et al. 1996 et 1998, et Schubert et al. 2004).

pour analyser les données.
- Pour Europe, ils ont gardés ces paramètres dans le modèle. L'hypothèse que le ROT et le BF sont confondus semble presque justifiée a posteriori. En effet $C_{21}$ et $S_{21}$ sont compatibles avec une valeur nulle (Table 1.1). Le faible écart de $S_{22}$ par rapport à 0 est attribué à un manque de précision des éphémérides de Lieske et à une convention particulière de l'IAU quant au choix de l'axe $x$ du ROT pour le faire coïncider avec la position d'un cratère identifié sur les images de la sonde Voyager. Il suffirait donc d'effectuer une légère rotation selon l'axe $z$ du ROT de façon à annuler $S_{22}$ pour être dans le $BF$. Dans ce nouveau repère, que l'on va appeler **ROT'**, le coefficient $C_{22}$ vaut alors $(131.5 \pm 2.5)\,10^{-6}$.

Pourtant, en réalité, le ROT (ou le ROT' pour Europe) n'est pas confondu avec le repère principal d'inertie du satellite et, de plus, ses axes ne sont pas fixes par rapport au satellite. Il y deux raisons à cela :

- L'axe de rotation (et donc l'axe lié au plus grand moment d'inertie principal, si on néglige le wobble) est incliné, par rapport à l'orbite, d'un angle appelé *obliquité* $\varepsilon$ (voir section 3.2).

- La rotation d'Europe n'est pas uniforme et présente des variations périodiques, appelées *librations* $\gamma$, dues à l'excentricité de l'orbite d'Europe autour de Jupiter qui induit un couplage gravitationnel sur l'aplatissement équatorial (section 3.1).

L'obliquité et l'amplitude de libration des satellites galiléens n'ont pas encore été mesurées et sont supposées être de petites quantités. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle Anderson et al. (1996 et 1998) ont pu supposer que le ROT est confondu avec le BF. Nous avons néanmoins décidé de les prendre en compte parce que ces quantités dépendent de la structure interne (voir chapitre 3) et que leur détermination peut donc être utile. Il faut donc déterminer comment ces quantités interviennent dans l'expression des coefficients du potentiel. Comme il est nécessaire de décrire le mouvement de la sonde dans un référentiel

connu (le RO), nous continuerons d'exprimer le potentiel dans le ROT, défini cette fois par des éphémérides plus récentes telles que celles de Lainey et al. (2006).

**Expression des coefficients dans le ROT en fonction de leur valeur dans le BF**

Europe et Ganymède sont des satellites en rotation synchrone. Nous considérons qu'ils sont, comme la Lune, dans l'état de Cassini (section 3.2). Sur le long terme, le plan de l'orbite du satellite ne garde pas une orientation fixe dans l'espace. Il précesse autour d'une position moyenne appelée *plan de Laplace*. A cause de la précession du plan de l'orbite, le plan équatorial du repère principal d'inertie précesse également. Son inclinaison par rapport au plan orbital est l'obliquité $\varepsilon$. Nous notons $\mu$ la longitude du nœud du BF sur le plan orbital, comptée à partir du nœud du plan orbital sur le plan de Laplace.

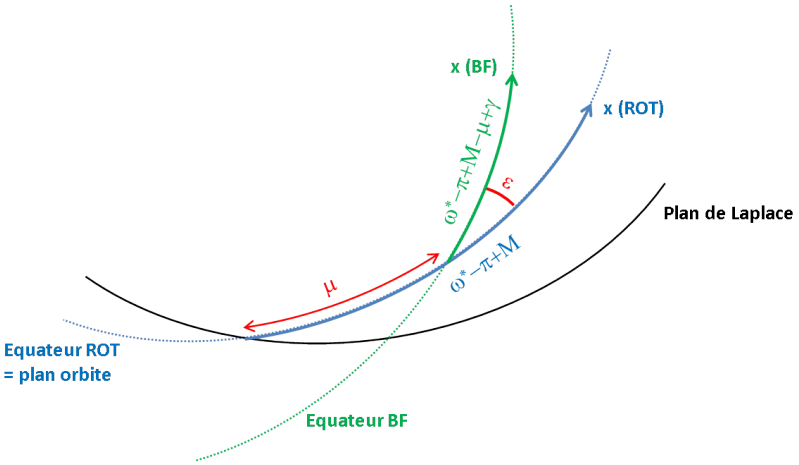


FIG. 1.1 – Passage du BF au ROT

Par définition, le plan équatorial du ROT est confondu avec le plan de l'orbite et son axe $x$, orienté en moyenne vers Jupiter, décrit une rotation uniforme dans ce plan. L'angle entre le nœud de l'orbite sur le plan de Laplace et l'axe $x$ du ROT est égal à la somme de la longitude du péricentre de Jupiter, dans son mouvement relatif par rapport au satellite naturel, et de son anomalie moyenne. La longitude du péricentre de Jupiter est égale à la longitude du périjove du satellite, $\omega^*$, à laquelle on retranche $\pi$. L'anomalie moyenne de Jupiter est égale à celle du satellite, $M$. Nous avons noté $\omega^*$, la longitude du périjove exprimée par rapport au plan de Laplace, pour ne pas la confondre avec $\omega$, la longitude du périjove exprimée par rapport au plan équatorial de Jupiter en J2000 et qui peut être obtenue à partir des éphémérides de Lainey et al. (2006). Étant

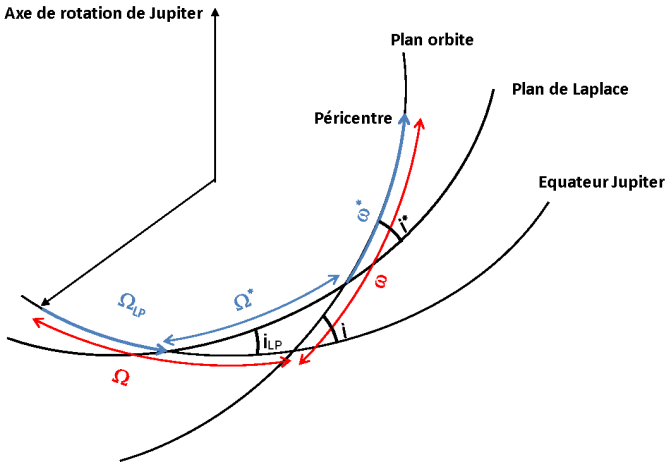


FIG. 1.2 – Définition de l'orientation de l'orbite du satellite naturel par rapport au plan équatorial de Jupiter et par rapport au plan de Laplace.

donné que l'inclinaison du plan de Laplace ($i_{LP}$, appelée *tilt*) et l'inclinaison de l'orbite $i$ par rapport au plan équatorial de Jupiter sont petites, on a que $\omega^* \simeq \omega + \Omega - (\Omega_{LP} + \Omega^*)$, avec $\Omega$ et $\Omega^*$, les longitudes des nœuds de l'orbite par rapport au plan équatorial de Jupiter et par rapport au plan de Laplace, et $\Omega_{LP}$, la longitude du nœud du plan de Laplace par rapport au plan équatorial de Jupiter (voir figure 1.2).

L'angle entre le nœud du BF sur le plan de l'orbite et l'axe $x$ du ROT est égal à $(\omega^* - \pi + M - \mu)$. Par conséquent, étant donné la rotation synchrone, la longitude de l'axe $x$ du BF comptée à partir du nœud du BF sur la plan de l'orbite doit être égale à $(\omega^* - \pi + M - \mu + \gamma)$, avec $\gamma$ l'angle de libration qui représente la variation autour de la rotation moyenne. Cet angle s'écrit $\gamma = g \sin M$ avec $g$, l'amplitude de libration (voir section 3.1).

Pour passer du BF au ROT, il faut réaliser trois rotations selon les angles d'Euler $(\omega^* - \pi + M - \mu + \gamma)$, $\varepsilon$ et $(\omega^* - \pi + M - \mu)$. La matrice de passage du BF au ROT est donnée par

$$M_{BF \to ROT} = R_z[\omega^* - \pi + M - \mu].R_x[-\varepsilon].R_z[-(\omega^* - \pi + M - \mu + \gamma)] \quad (1.10)$$

avec $R_x$ et $R_z$ les matrices de rotation définies de la façon suivante

$$R_x[\theta] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_z[\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Dans le BF, le tenseur d'inertie et les coefficients du potentiel sont notés

$$\bar{\bar{I}}_{BF} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

$$C_{20} = -\frac{C - \frac{A+B}{2}}{\mathcal{M}R^2},\ C_{22} = \frac{B-A}{4\mathcal{M}R^2},\ S_{22} = C_{21} = S_{21} = 0, \tag{1.12}$$

tandis que le tenseur d'inertie dans le ROT sera noté

$$\bar{\bar{I}}_{ROT} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{F} & -\tilde{E} \\ -\tilde{F} & \tilde{B} & -\tilde{D} \\ -\tilde{E} & -\tilde{D} & \tilde{C} \end{pmatrix} = M_{BF\rightarrow ROT}.\bar{\bar{I}}_{BF}.M^{-1}_{BF\rightarrow ROT}. \tag{1.13}$$

A l'ordre[4] deux en $\gamma$ et à l'ordre 1 en $\varepsilon$, nous avons :

$$\bar{\bar{I}}_{ROT} \simeq \begin{pmatrix} A - A\gamma^2 + B\gamma^2 & (A-B)\gamma & (A-C)\varepsilon\sin(\chi-\mu) \\ (A-B)\gamma & B + A\gamma^2 - B\gamma^2 & (B-C)\varepsilon\cos(\chi-\mu) \\ (A-C)\varepsilon\sin(\chi-\mu) & (B-C)\varepsilon\cos(\chi-\mu) & C \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

avec $\chi = (\omega^* - \pi + M)$. Les coefficients du potentiel gravitationnel, dans le ROT, sont exprimés de la façon suivante :

$$\tilde{C}_{20} = -\frac{\tilde{C} - \frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{2}}{\mathcal{M}R^2} = -\frac{C - \frac{A+B}{2}}{\mathcal{M}R^2} = C_{20}, \tag{1.15}$$

$$\tilde{C}_{22} = \frac{\tilde{B}-\tilde{A}}{4\mathcal{M}R^2} = \frac{B-A}{4\mathcal{M}R^2}(1-2\gamma^2) = C_{22}(1-2g^2\sin^2 M), \tag{1.16}$$

$$\tilde{S}_{22} = \frac{\tilde{F}}{2\mathcal{M}R^2} = \frac{B-A}{4\mathcal{M}R^2}(2\gamma) = C_{22}(2g\sin M), \tag{1.17}$$

$$\tilde{C}_{21} = \frac{\tilde{E}}{\mathcal{M}R^2} = \frac{(C-A)}{\mathcal{M}R^2}\varepsilon\sin(\chi-\mu) = (-C_{20}+2C_{22})\varepsilon\sin(\chi-\mu), \tag{1.18}$$

$$\tilde{S}_{21} = \frac{\tilde{D}}{\mathcal{M}R^2} = \frac{(C-B)}{\mathcal{M}R^2}\varepsilon\cos(\chi-\mu) = (-C_{20}-2C_{22})\varepsilon\cos(\chi-\mu). \tag{1.19}$$

Le coefficient $\tilde{C}_{20} = C_{20}$ a la même valeur dans les deux repères. Le coefficient $\tilde{C}_{22}$ dépend du temps et a pour valeur moyenne $C_{22}$. Les coefficients $\tilde{S}_{22}, \tilde{C}_{21}$ et $\tilde{S}_{21}$ sont non-nuls, dépendent du temps et ont une valeur moyenne nulle. Pour simplifier l'écriture des coefficients exprimés dans le ROT, la valeur moyenne de $\tilde{C}_{22}$ sera désormais notée $\bar{C}_{22}$. Nous pourrons ainsi omettre les tildes.

$$C_{22} = \bar{C}_{22}(1-2g^2\sin^2 M), \tag{1.20}$$

$$S_{22} = \bar{C}_{22}(2g\sin M), \tag{1.21}$$

$$C_{21} = (-C_{20}+2\bar{C}_{22})\varepsilon\sin(\chi-\mu), \tag{1.22}$$

$$S_{21} = (-C_{20}-2\bar{C}_{22})\varepsilon\cos(\chi-\mu). \tag{1.23}$$

[4]Nous verrons dans le chapitre 3 que l'amplitude de libration peut être amplifiée par une résonance, il peut donc être utile de considérer les librations jusqu'à l'ordre 2.

Jusqu'ici nous avons considéré un satellite entièrement rigide. Mais Europe et Ganymède sont probablement composés de deux couches à symétrie triaxiale, une coquille externe et un intérieur, séparées par une couche liquide (océan interne global). Les masses du satellite peuvent alors être classées en deux catégories : une partie alignée avec la coquille et une partie alignée avec l'intérieur. L'orientation du BF de ces deux parties est différente si leur obliquité et leur amplitude de libration sont différentes. Si l'on considère que la coquille et l'intérieur sont rigides, il est facile de généraliser l'expression des coefficients dans le ROT pour le cas avec océan :

$$\begin{aligned} C_{22} &= \bar{C}_{22} - 2FC_{22}\sin^2 M, && (1.24)\\ S_{22} &= 2FS_{22}\sin M, && (1.25)\\ C_{21} &= FC_{21}^{sin}\sin\chi - FC_{21}^{cos}\cos\chi, && (1.26)\\ S_{21} &= FS_{21}^{sin}\sin\chi + FS_{21}^{cos}\cos\chi, && (1.27) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} FC_{22} &= (C_{22}^s g_s^2 + (\bar{C}_{22} - C_{22}^s)g_i^2), && (1.28)\\ FS_{22} &= (C_{22}^s g_s + (\bar{C}_{22} - C_{22}^s)g_i), && (1.29)\\ FC_{21}^{sin} &= (-C_{20}^s + 2C_{22}^s)\varepsilon_s\cos\mu_s \\ &\quad +(-(C_{20} - C_{20}^s) + 2(\bar{C}_{22} - C_{22}^s))\varepsilon_i\cos\mu_i, && (1.30)\\ FC_{21}^{cos} &= (-C_{20}^s + 2C_{22}^s)\varepsilon_s\sin\mu_s \\ &\quad +(-(C_{20} - C_{20}^s) + 2(\bar{C}_{22} - C_{22}^s))\varepsilon_i\sin\mu_i, && (1.31)\\ FS_{21}^{sin} &= (-C_{20}^s - 2C_{22}^s)\varepsilon_s\sin\mu_s \\ &\quad +(-(C_{20} - C_{20}^s) - 2(\bar{C}_{22} - C_{22}^s))\varepsilon_i\sin\mu_i, && (1.32)\\ FS_{21}^{cos} &= (-C_{20}^s - 2C_{22}^s)\varepsilon_s\cos\mu_s \\ &\quad +(-(C_{20} - C_{20}^s) - 2(\bar{C}_{22} - C_{22}^s))\varepsilon_i\cos\mu_i. && (1.33) \end{aligned}$$

Les combinaisons $FC_{22}$ et $FS_{22}$ décrivent donc respectivement l'effet des librations sur les coefficients $C_{22}$ et $S_{22}$. Les autres combinaisons décrivent l'effet de l'orientation de la coquille et de l'intérieur sur $C_{21}$ et $S_{21}$. Les paramètres $C_{20}^s$ et $C_{22}^s$ sont les coefficients du potentiel gravitationnel des masses alignées avec la coquille, dans le repère principal de la coquille, tandis que $C_{20}^i = C_{20} - C_{20}^s$ et $C_{22}^i = \bar{C}_{22} - C_{22}^s$ sont les coefficients du potentiel des masses alignées avec l'intérieur, dans le repère principal de l'intérieur. $g_s$ et $g_i$ sont les amplitudes de libration de la coquille et de l'intérieur. $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$ sont les obliquités des deux couches. $\mu_s$ et $\mu_i$ sont les nœud du BF de la coquille et de l'intérieur, respectivement. Nous avons donc dix paramètres géophysiques décrivant le potentiel gravitationnel statique du satellite dans le ROT :

– Les coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ sont les paramètres estimés par Anderson et al. (1996 et 1998) et correspondent au potentiel gravitationnel statique

moyen.

– Les paramètres $g_s$, $g_i$, $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$, $\mu_s$, $\mu_i$, $C^s_{20}$ et $C^s_{22}$ sont des paramètres additionnels qui décrivent l'effet de la rotation sur les coefficients gravitationnels exprimés dans le ROT, et nous les appellerons donc *paramètres liés à la rotation.*

La dépendance des paramètres liés à la rotation vis-à-vis de la structure interne d'Europe ou de Ganymède sera discutée dans le chapitre 3, en utilisant les modèles de structure interne construits à partir des coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ dans le chapitre 2.

## 1.2 Potentiel gravitationnel variable

Le potentiel gravitationnel variable résulte des déformations de marée dues à Jupiter. Pour trouver son expression, il faut partir du potentiel générateur de marée et utiliser ensuite un paramètre appelé nombre de Love et qui décrit une réponse instantanée du satellite au potentiel générateur de marée. Cette réponse dépend de la rhéologie du satellite, c'est-à-dire de la rigidité, de l'épaisseur et de la densité des couches qui le composent. Si la réponse n'est pas instantanée, un autre paramètre rentre en jeu. Il s'agit du facteur de dissipation qui dépend également de la rhéologie, et en particulier de la viscosité des matériaux.

### 1.2.1 Potentiel générateur de marée

Notre but étant d'exprimer le potentiel gravitationnel variable dans le ROT, comme nous l'avons fait pour le potentiel statique, nous allons également exprimer le potentiel générateur de marée dans le ROT. Le potentiel générateur de marée en un point du satellite est égal à la différence du potentiel gravitationnel exercé par Jupiter en ce point et de ce même potentiel, exercé au centre de masse du satellite (voir annexe A). Notons $r_J$ la distance de Jupiter au centre de masse d'Europe, $(r, \theta, \lambda)$ les coordonnées sphériques d'un point $P$ du satellite dans le ROT, et $\psi$ l'angle au centre du satellite formé par les directions du point $P$ et de Jupiter. Grâce à un développement en polynômes de Legendre du rapport $(r/r_J)$, le potentiel générateur de marée s'écrit :

$$V_{gm}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_J}{r_J} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^l P_l(\cos\psi). \tag{1.34}$$

L'angle $\psi$ dépend à la fois de la position de Jupiter et de celle du point $P$. Puisque

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta_J + \sin\theta\sin\theta_J\cos(\lambda - \lambda_J), \tag{1.35}$$

le théorème d'addition des harmoniques sphériques permet de réécrire le potentiel générateur de marée de façon à ce que les coordonnées de Jupiter $(r_J, \theta_J, \lambda_J)$ et du point $P$ apparaissent clairement :

$$\begin{aligned} V_{gm}(r,\theta,\lambda) &= \frac{GM_J}{r_J}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{r}{r_J}\right)^l (2-\delta_{m0})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta) \\ &\quad P_l^m(\cos\theta_J)\cos m(\lambda-\lambda_J). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Ce potentiel se divise en une partie statique et une partie périodique.

$$V_{gm}(r,\theta,\lambda) = V_{gm}^{stat}(r,\theta,\lambda) + V_{gm}^{per}(r,\theta,\lambda). \tag{1.37}$$

La partie statique du potentiel générateur de marée est responsable, avec le potentiel centrifuge lié à la rotation et l'auto-gravitation, de la répartition moyenne des masses à l'intérieur du satellite et donc du potentiel gravitationnel statique défini dans la section précédente (voir aussi chapitre 2). Pour dériver l'expression du potentiel gravitationnel variable, on ne garde donc que la partie périodique du potentiel générateur de marée.

### 1.2.2 Nombre de Love

Les déformations périodiques dues aux marées exercent à leur tour un potentiel sur les points situés à l'extérieur du satellite (comme une sonde par exemple). Ce potentiel est égal à la partie périodique du potentiel générateur de marée évalué en surface ($r = R$) et multiplié, pour l'ordre $l$, par $k_l(R/r)^{l+1}$,

$$V_{var}^l(r,\theta,\lambda) = k_l\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} V_{gm}^{per,l}(R,\theta,\lambda), \tag{1.38}$$

avec $r$ qui est cette fois la coordonnée radiale du point extérieur et $k_l$, le nombre de Love qui traduit la réponse du satellite aux marées d'ordre $l$. Le potentiel variable peut donc également se développer en série, comme le potentiel générateur de marée. On se limitera à l'ordre $l = 2$, comme pour le potentiel statique. Le nombre de Love $k_2$ sera donc un paramètre géophysique supplémentaire dans notre modélisation.

Au plus un corps est rigide, au moins il se déforme sous l'influence des forces de marée et au plus son nombre de Love est petit. Par exemple pour un satellite homogène de densité $\varrho$ et de rayon $R$,

$$k_2 = \frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{19\mu}{2g\varrho R}}, \tag{1.39}$$

avec $g$ la gravité en surface et $\mu$ la rigidité (ou module de cisaillement) qui traduit la résistance à la déformation (Melchior, 1972). Mais Europe et Ganymède ne sont pas des corps homogènes. Nous verrons dans le chapitre 2 qu'ils

peuvent être considérés comme des couches de densité uniforme imbriquées les unes dans les autres : un noyau métallique au centre, suivi d'un manteau rocheux et d'une couche eau/glace. L'amplitude des déformations de marée est liée aux caractéristiques des différentes couches (rayon, densité et rigidité) et à leur état (solide ou liquide).

Si Europe et Ganymède ne possèdent pas d'océan interne global, leur nombre de Love sont respectivement de l'ordre de 0.015 et 0.067 (Moore and Schubert 2000 et 2003). La présence d'un océan liquide modifie fortement la réponse du satellite car il permet à la coquille externe de glace de se déformer sans la contrainte de devoir s'ajuster à la déformation du manteau. En effet, dans le cas solide, la coquille ne peut pas se soulever du manteau et créer un zone vide entre les deux couches (condition de continuité).

Le nombre de Love pour Europe dans le cas avec océan a été étudié et calculé successivement dans Moore and Schubert (2000), Wu et al. (2001), et Wahr et al. (2006). Les conclusions de ces trois études sont cohérentes entre elles malgré des hypothèses légèrement différentes pour les valeurs des rayons du manteau et du noyau et des densités de l'océan liquide et de la coquille de glace. Elles établissent que le nombre de Love dépend principalement de la rigidité de la coquille et de son épaisseur. En particulier, Wahr et al. (2006) fournissent une expression analytique pour $k_2$, en supposant que l'épaisseur de la coquille, notée $h_s$ ici, est petite devant le rayon total d'Europe. Si on considère que la coquille et l'océan ont la même densité $\rho_s$, comme supposé dans les deux autres études, on obtient que

$$k_2 = \frac{3\rho_s}{5\varrho - 3\rho_s} - \frac{270\mu_s h_s}{11R^3 G\pi(5\varrho - 3\rho_s)^2}, \tag{1.40}$$

avec $\varrho$ la densité moyenne d'Europe et $\mu_s$ la rigidité de la coquille de glace. Cette équation illustre la conclusion de Moore et Schubert à propos du fait que le produit de l'épaisseur de la coquille et de sa rigidité contrôle la réponse de la coquille au potentiel générateur de marée dans le cas avec océan. Les trois études considèrent des valeurs différentes pour la rigidité de la glace, comprises entre $10^9$ et $10^{10}$ Pa. En effet, cette rigidité n'est pas bien connue et les auteurs se basent sur des études en laboratoire du comportement de la glace (Cole et Durrel 1995) et sur l'étude des déformations de marée des banquises terrestres (Vaughan 1995). En se basant sur l'ensemble des trois études, on peut considérer que $k_2 = 0.25 \pm 0.5$. A partir de l'équation (1.40), on peut estimer l'erreur sur la détermination de $h_s$ qui résulterait d'une erreur $\sigma_{k_2}$ sur la mesure de $k_2$, dans le cas où $\mu_s$ et la densité $\rho_s$ seraient connues :

$$\sigma_{h_s} \approx \left| \frac{\sigma_{k_2}}{\partial_{h_s} k_2} \right|. \tag{1.41}$$

Selon la rigidité de la glace ($10^9$ à $10^{10}$ Pa), $\sigma_{k_2} = 0.0005$ correspond à une in-

certitude $\sigma_{h_s}$ de l'ordre de 0.2 à 2 km. Ce qui est en accord avec les conclusions de Wu et al. (2001) qui notaient qu'une incertitude de 0.0004 sur la mesure de $k_2$ correspond à un incertitude de 0.2 à 1 km sur $h_s$ pour $\mu_s$ allant de $10^9$ à $4\,10^9$ Pa. Mais puisque la valeur de $\mu_s$ est actuellement mal connue, la mesure de $k_2$ ne peut pas fournir d'information suffisemment précise sur $h_s$, comme le remarquaient Wahr et al. (2006). Notons qu'une incertitude $\sigma_{k_2} \lesssim 0.06$ devrait suffire[5] à distinguer avec certitude (au niveau 3-sigma) le cas avec océan du cas rigide .

Le cas de Ganymède avec un océan a été envisagé par Moore and Schubert (2003). Comme pour Europe, $k_2$ dépend principalement du produit de l'épaisseur de la coquille et de sa rigidité. A partir de leurs résultats on peut conclure que $k_2 = 0.5 \pm 0.1$ et que si la rigidité de la glace était connue, une incertitude de 0.0005 sur la mesure de $k_2$ induirait une incertitude sur $h_s$ de l'ordre de 1 à 5 km, pour $\mu_s$ allant de $10^9$ à $10^{10}$ Pa. Mais encore une fois, la méconnaissance de $\mu_s$ rend impossible la détermination précise de $h_s$ à partir de la mesure de $k_2$. Par contre, une incertitude $\sigma_{k_2} \lesssim 0.1$ devrait permettre de distinguer le cas avec océan du cas rigide.

### 1.2.3 Facteur de dissipation

Le nombre de Love traduit une réponse élastique/instantanée. Dans la réalité, les matériaux du satellite ne répondent pas instantanément à l'effet du potentiel générateur de marée, à cause de leur anélasticité/viscosité. Il se produit également une dissipation d'énergie sous forme de chaleur qui est générée par la friction des particules du matériau qui se déplacent les unes par rapport aux autres lors des déformations. Il faut donc introduire cette non-instantanéité de la réponse des matériaux dans notre modélisation. Pour ce faire, l'idée est de soustraire un angle, traditionnellement noté[6] $\varepsilon$, à $\lambda_J$ dans l'équation (1.36), pour faire comme si la planète était en retard par rapport à sa révolution dans un repère lié au satellite. Cet angle sera inversement proportionnel au facteur de dissipation du satellite, noté $Q$. En fait, la procédure sera un peu plus compliquée lorsque l'on aura écrit le potentiel gravitationnel variable dans sa forme définitive car le facteur de dissipation dépend de la fréquence de perturbation qui apparait lorsque la position de Jupiter est décrite sous forme d'éléments orbitaux (voir équation 4.16 et section 4.9). Néanmoins, le facteur $Q$ associé à la fréquence de perturbation principale sera le seul considéré dans notre modélisation de l'observable Doppler et sera donc notre dernier paramètre géophysique. Dans la pratique, on préfèrera utiliser $1/Q = \varepsilon$ car $\varepsilon = 0$ dans le cas où on ne tient pas compte de la dissipation. L'angle $\varepsilon$ est appelé *déphasage*

[5] Voir aussi l'article de Castillo et al. (2000), à partir duquel on peut arriver à la même conclusion.

[6] et donc à ne pas confondre avec l'obliquité des différentes couches, qui sont notées $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$.

dans la littérature. Le nombre de Love et le déphasage sont parfois remplacés par un nombre de Love complexe $k_{re}+ik_{im}$ avec $k_{re} = k_2 \cos\varepsilon$ et $k_{im} = k_2 \sin\varepsilon$ (voir Rappaport et al. 2008 par exemple).

Si Europe est entièrement solide, le déphasage peut atteindre quelques dizaines de degrés pour une viscosité de la glace $\nu_s$ de l'ordre de $10^{13}$ Pa s (Moore and Schubert 2000), ce qui donne un facteur de dissipation très petit ($Q \sim 2$). Pour une viscosité plus élevée ($10^{13-19}$ Pa s), le déphasage est d'à peine quelques degrés, et le facteur de dissipation sera de l'ordre de 15. En ce qui concerne Ganymède, Moore and Schubert (2003) n'ont pas indiqué leur résultat concernant la valeur du déphasage dans le cas solide. De leur côté, Rappaport et al. (2008) ont montré que ce déphasage peut également être de l'ordre de quelques dizaines de degrés pour Titan dans le cas solide. Nous supposons donc que le déphasage pour Ganymède solide peut également être de cet ordre de grandeur.

En présence d'un océan, la viscosité de l'eau liquide étant nulle, la dissipation d'énergie ne peut se produire que dans la coquille extérieure de glace ou dans l'intérieur. Pour Europe, les deux cas sont discutés dans Tobie (2003) :

– Une coquille mince (de l'ordre de quelques km d'épaisseur) n'est possible que si l'intérieur est suffisamment chaud, c'est-à-dire si la dissipation dans le manteau est élevée. Cela correspond à un taux élevé de dissipation de l'énergie interne globale. Or, pour un satellite synchrone, la partie imaginaire du nombre de Love est reliée à ce taux de dissipation par (Tobie 2003 d'après Segatz et al. 1988) :

$$\dot{E}_{glob} = -\frac{21}{2} k_{im} \frac{(nR^5)^2}{G} e^2. \tag{1.42}$$

Tobie (2003) estime que $\dot{E}_{glob}$ devrait valoir $7.5 - 15$ TW pour maintenir l'épaisseur de la coquille constante. Par conséquent, $k_{im} = 0.015 - 0.030$ et le facteur de dissipation $Q \simeq k_2/k_{im}$ est de l'ordre de 15 si $k_2 \simeq 0.25$. Au plus la coquille est mince, au plus $Q$ doit être petit. Néanmoins, il est difficile d'établir un lien direct entre le facteur de dissipation et l'épaisseur de la coquille, ou tout autre caractéristique de la structure interne, car la rhéologie des matériaux n'est pas bien connue.

– Si la coquille est plus épaisse, l'intérieur est moins chaud et la dissipation se produit essentiellement dans la coquille. Pour une épaisseur de l'ordre de $20 - 25$ km, Tobie (2003) indique que $k_{im} = 0.001 - 0.002$. Le facteur de dissipation est donc de l'ordre de 190, ce qui donne un déphasage de l'ordre de $0.3^\circ$. Ce résultat peut être comparé avec ceux de Moore and Schubert (2000). Ces derniers envisagent une coquille dont l'épaisseur varie entre 10 et 100 km. Le déphasage de $0.3^\circ$ et l'épaisseur de $20 - 25$ km

correspondent à une viscosité de la glace $\nu_s$ comprise entre $10^{14}$ et $10^{15}$ Pa s et à une rigidité $\mu_s = 10^9$ Pa. Pour une viscosité et une rigidité donnée, le déphasage augmente avec l'épaisseur de la coquille de glace. Mais étant donné que la viscosité et la rigidité de la coquille de glace ne sont pas bien connues, il ne sera pas possible de déterminer l'épaisseur de la coquille grâce à la mesure du déphasage/facteur de dissipation. Par exemple pour $h_s = 50$ km, $Q$ peut être compris entre 50 et 250, ce qui donne une valeur moyenne de 100.

Pour Europe, nous retiendrons donc qu'une coquille mince de l'ordre de quelques kilomètres d'épaisseur correspond à $Q \simeq 15$ et qu'une épaisseur de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres correspond à $Q \simeq 100$. Le premier cas ne pourrait pas être distingué du cas rigide à partir d'une mesure du déphasage. Dans le second cas, une précision $\sigma_\varepsilon \lesssim 1^\circ$ sur la mesure donnerait un déphasage différent de celui du cas rigide dans la limite des barres d'erreurs au niveau $3\sigma$ et permettrait de conclure à la présence d'un océan.

En ce qui concerne Ganymède, on sait que la coquille doit être relativement épaisse. Par conséquent la dissipation a lieu essentiellement dans la coquille. Tobie (2003) donne $k_{im} = 0.003 - 0.006$, ce qui correspond à $Q \simeq 120$ et $\varepsilon \simeq 0.5^\circ$ si $k_2 = 0.5$. Comme pour Europe, dans le cas d'une coquille épaisse, le déphasage est plus faible en présence d'un océan que dans le cas solide. En effet, en découplant l'intérieur de la coquille, l'océan induit une diminution de la dissipation dans l'intérieur et une augmentation dans la coquille (Tobie et al. 2005b). Comme pour Europe, une précision $\sigma_\varepsilon$ de l'ordre ou inférieure à $1^\circ$ sur la mesure du déphasage devrait permettre de déterminer si Ganymède possède ou non un océan.

## 1.3 Résumé

Nous avons donc 12 paramètres géophysiques à introduire dans notre modélisation de l'effet Doppler sur le lien radio entre la sonde et la station réceptrice sur Terre. Nous les classons de la façon suivante :

| **catégorie** | **sous-catégorie** | **paramètres** |
|---|---|---|
| Potentiel statique | potentiel moyen | $C_{20}$ et $C_{22}$ |
| | paramètres liés à la rotation | $g_s$, $g_i$, $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$, $\mu_s$, $\mu_i$, $C^s_{20}$ et $C^s_{22}$ |
| Potentiel variable (paramètres de marée) | élasticité | $k_2$ |
| | anélasticité | $\varepsilon$ |

En ce qui concerne Europe, nous pouvons réduire le nombre de paramètres car $\mu_s$ et $\mu_i$ peuvent être négligés (voir section 3.2).

# Chapitre 2

# Les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ et la structure interne

## Sommaire


**2.1 Équilibre hydrostatique . . . . . 34**

**2.2 Aplatissements, équation de Radau et moment d'inertie moyen . . . . . 36**

**2.3 Modèles de structure interne . . . . . 38**

2.3.1 Profils de densité . . . . . 38

2.3.2 Profils d'aplatissements . . . . . 42


Comme nous l'avons déjà mentionné dans le premier chapitre, les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ d'Europe et de Ganymède ont été évalués grâce à la mission Galileo. La mission Galileo, et avant elle, les missions Voyager, ont également permis de déterminer la masse $\mathcal{M}$, le rayon moyen $R$ et la densité moyenne $\varrho$ de ces satellites (voir Table 2.1). Il faut garder à l'esprit que l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique a été utilisée pour la détermination des coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$. C'est-à-dire que ces deux paramètres ont été déterminés avec comme contrainte de satisfaire la relation $C_{20} = -\frac{10}{3}\bar{C}_{22}$, dans les limites des barres d'erreur. Nous allons dans un premier temps montrer d'où vient cette relation (section 2.1). Dans un second temps, nous estimerons l'impact de la précision de la détermination de $\bar{C}_{22}$ sur la connaissance de la structure interne, en suivant la procédure suivante :

– La première information à retirer de $\bar{C}_{22}$ est la concentration des masses du satellite, c'est-à-dire son moment d'inertie moyen $I$, en utilisant l'équation de Radau (section 2.2).

– Ensuite, nous construirons des modèles de structure interne à partir des trois contraintes que sont le moment d'inertie moyen $I$, la masse $\mathcal{M}$ et le rayon moyen $R$ (section 2.3).

| | Europe | Ganymède |
|---|---|---|
| $C_{20}$ | $(-435.5 \pm 8.2)\,10^{-6}$ | $(-127.53 \pm 2.9)\,10^{-6}$ |
| $\bar{C}_{22}$ | $(131.5 \pm 2.5)\,10^{-6}$ | $(38.26 \pm 0.87)\,10^{-6}$ |
| $\mathcal{M}$ | $(4.79982 \pm 0.00062)\,10^{22}$ kg | $(1.481862 \pm 0.00018)\,10^{23}$ kg |
| $R$ | $1565. \pm 8$ km | $2631.2 \pm 1.7$ km |
| $\varrho$ | $2989 \pm 46$ kg/m$^3$ | $1942.0 \pm 4.8$ kg/m$^3$ |

TAB. 2.1 – Coefficients du champ gravitationnel statique de degré 2, masse, rayon et densité moyenne d'Europe et de Ganymède (Schubert et al. 2004)

## 2.1 Équilibre hydrostatique

Considérons un satellite isolé ne tournant pas sur lui-même et dont les masses se répartissent selon une symétrie sphérique parfaite sous l'effet de leur propre gravité. Si on met le satellite en rotation sur lui-même et en révolution autour d'une planète, selon une orbite synchrone avec la rotation, les matériaux du satellite subissent une accélération due à la rotation et au potentiel générateur de marée (voir annexe A). A long terme, c'est-à-dire en considérant la rotation moyenne et la partie statique du potentiel générateur de marée, on peut considérer que les matériaux se comportent comme des fluides et que le satellite atteint l'état d'équilibre hydrostatique.

– **Accélération centrifuge due à la rotation** : Les éléments de masse les plus éloignés de l'axe de rotation (à l'équateur en surface) vont subir une accélération plus forte que ceux situés près de l'axe de rotation. La résistance des matériaux à la déformation va alors se traduire par un aplatissement polaire et un bourrelet équatorial. L'accélération centrifuge dérive du potentiel

$$V_r(r,\theta,\lambda) = q_r \frac{G\mathcal{M}}{3R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(1 - P_2^0(\cos\theta)\right), \tag{2.1}$$

avec $q_r = \frac{\omega^2 R^3}{G\mathcal{M}}$, la facteur géodynamique qui représente le rapport entre l'accélération centrifuge et l'accélération gravitationnelle à la surface du satellite.

– **Accélération due au potentiel générateur de marée** : Les éléments de masse du satellite qui sont situés plus près/loin de la planète que le centre de masse du satellite vont être plus/moins attirés par la planète

que le centre de masse. La résistance des matériaux se traduit alors par un étirement dans la direction de la planète, aussi appelé aplatissement équatorial. La partie statique du potentiel générateur de marée, à l'ordre 2, s'écrit

$$V_{gm}^{stat,l=2}(r,\theta,\lambda) = q_t \frac{G\mathcal{M}}{6R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(P_2^0(\cos\theta) - \frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda\right), \tag{2.2}$$

avec $q_t = -3\frac{G\mathcal{M}_J}{G\mathcal{M}}\left(\frac{R}{a_J}\right)^3$ le paramètre de marée. $\mathcal{M}_J$ et $a_J$ sont la masse de Jupiter et sa distance au satellite considéré, respectivement.

Les déformations induites par ces deux potentiels exerceront à leur tour un potentiel en un point $P$ extérieur au satellite, ou situé en surface. Ce potentiel sera la partie moyenne (c'est-à-dire sans considérer l'influence des variations de la rotation) du potentiel gravitationnel statique de degré 2 défini dans la section (1.1) :

$$\bar{W}^{l=2}(r,\theta,\lambda) = \frac{G\mathcal{M}}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(C_{20}P_2^0(\cos\theta) + \bar{C}_{22}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda\right). \tag{2.3}$$

En surface, ce potentiel sera égal au produit de la somme des potentiels à l'ordre 2 induisant les déformations et d'un paramètre $k_f$, le nombre de Love fluide[1]. Ce dernier traduit la réponse à long terme des matériaux :

$$\bar{W}^{l=2}(r,\theta,\lambda) = k_f\left[V_r^{l=2}(r,\theta,\lambda) + V_{gm}^{stat,l=2}(r,\theta,\lambda)\right]$$

On trouve alors les relations suivantes entre les coefficients du potentiel gravitationnel statique du satellite et les paramètres géodynamique et de marée :

$$C_{20} = k_f\left(\frac{-2q_r + q_t}{6}\right) \quad \text{et} \quad \bar{C}_{22} = -k_f\frac{q_t}{12}. \tag{2.4}$$

Étant donné que nous considérons un satellite en rotation synchrone, la vitesse angulaire de rotation $\omega$ est égale au moyen mouvement $n$. En vertu de la troisième loi de Kepler ($G\mathcal{M}_J = n^2a_J^3$, à l'ordre zéro des masses), on trouve que $q_t = -3q_r$, ce qui mène à

$$C_{20} = \frac{-5k_fq_r}{6} \quad \text{et} \quad \bar{C}_{22} = \frac{q_rk_f}{4} \quad \Rightarrow C_{20} = -\frac{10}{3}\bar{C}_{22}. \tag{2.5}$$

Cette dernière égalité n'est donc valable que pour les satellites en rotation synchrone, sous l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique.

Pour un satellite homogène, $k_f = 3/2$. D'une certaine façon, le nombre de Love fluide $k_f$ s'interprète de la même façon que le moment d'inertie moyen. Nous allons d'ailleurs expliciter la relation entre ces deux quantités dans la section suivante.

[1] à noter le parallèle avec $k_2$, l'idée est la même, mais l'échelle de temps diffère.

## 2.2 Aplatissements, équation de Radau et moment d'inertie moyen

Jusqu'ici, les coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ ont été reliés aux moments d'inertie principaux (dans le chapitre 1) et au nombre de Love fluide du satellite (section précédente). On peut également les mettre en relation avec la forme à l'équilibre de la surface externe du satellite, grâce à la théorie de Clairaut, qui suppose que la surface externe est une équipotentielle (voir annexe B). En effet, la forme de la surface est un ellipsoïde triaxial de rayon moyen $R$ et dont les rayons principaux sont $a > b > c$. Si on définit les aplatissements polaire et équatorial de la surface par

$$\alpha(R) = \frac{\frac{a+b}{2} - c}{\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad \beta(R) = \frac{a-b}{a}, \tag{2.6}$$

on peut démontrer, pour les satellites en rotation synchrone, que

$$\alpha(R) = -\frac{3}{2}C_{20} + \frac{5q_r}{4} \quad \text{et} \quad \beta(R) = 6\bar{C}_{22} + \frac{3q_r}{2} \quad \Rightarrow \beta(R) = \frac{6}{5}\alpha(R). \tag{2.7}$$

Les aplatissements $\alpha$ et $\beta$ en fonction du rayon moyen $r_o$ des surfaces équipotentielles du satellite (qui sont aussi des surfaces d'égale densité) sont définis par l'*équation différentielle de Clairaut* (voir annexe B)

$$\frac{d^2\alpha}{{dr_o}^2} + \frac{6}{r_o}\frac{\rho}{\bar{\rho}}\frac{d\alpha}{dr_o} - \frac{6}{{r_o}^2}\left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)\alpha \quad = \quad 0, \tag{2.8}$$

avec $\bar{\rho}$ la densité moyenne de la matière située sous le niveau $r_o$ (en particulier, $\bar{\rho}(R) = \varrho$). Comme pour la surface, dans le cas hydrostatique synchrone, il suffira de multiplier $\alpha(r_o)$ par (6/5) pour obtenir $\beta(r_o)$. L'*équation de Radau* est une approximation élégante de l'équation de Clairaut qui permet de relier le moment d'inertie moyen[2] à l'aplatissement polaire de la surface externe, et donc au coefficient $C_{20}$ (voir annexe B et Van Hoolst et al. 2008). Dans le cas d'un satellite en rotation synchrone :

$$\frac{I}{\mathcal{M}R^2} = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{2}{5}\left(\frac{25}{4}\frac{q_r}{-\frac{3}{2}C_{20} + \frac{5}{4}q_r} - 1\right)^{1/2}\right]. \tag{2.9}$$

On peut encore utiliser l'équation (2.5) pour simplifier cette équation :

$$\frac{I}{\mathcal{M}R^2} = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{2}{5}\left(\frac{4-k_f}{1+k_f}\right)^{1/2}\right]. \tag{2.10}$$

[2]Il existe une confusion dans la littérature scientifique sur la notation du moment d'inertie moyen. En effet, bien qu'il soit évident à partir de la dérivation de l'équation de Radau que le membre de gauche est bien le moment d'inertie moyen $I$, les différents auteurs écrivent généralement l'équation de Radau avec le moment d'inertie polaire $C$. La confusion n'a que peu d'importance pour la construction de modèles de structure interne réalistes, car la différence entre $I$ et $C$ est de l'ordre de 0.1%, et sera donc plus petite que la barre d'erreur sur $I$.

La relation entre le moment d'inertie moyen normalisé et la nombre de Love fluide est quasi-linéaire (voir figure 2.1), en particulier pour les valeurs réalistes ($I/\mathcal{M}R^2$ entre 0.3 et 0.4) des paramètres. De plus on retrouve bien que $k_f = 3/2$ pour un corps homogène ($I/\mathcal{M}R^2 = 2/5$).

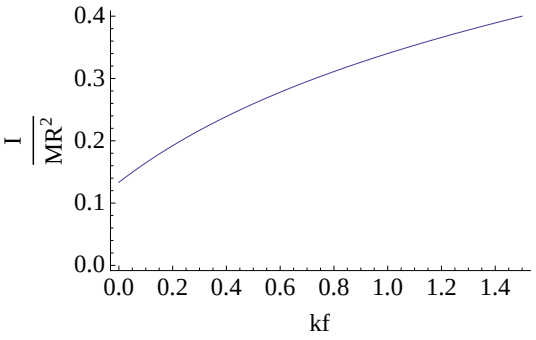


FIG. 2.1 – Relation entre le moment d'inertie moyen normalisé et le nombre de Love fluide.

En fait, sous l'approximation de Radau et l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique, plusieurs paramètres sont reliés univoquement les uns aux autres et représentent donc la même information sur la structure interne : $\bar{C}_{22}$, $C_{20}$, $I/\mathcal{M}R^2$, $k_f$, $\alpha(R)$ et $\beta(R)$. Selon le but poursuivi, on choisira donc un de ces six paramètres comme source d'information. $I/\mathcal{M}R^2$ sera d'abord utilisé en combinaison avec la masse et le rayon pour obtenir le profil de densité en fonction du rayon moyen. $\alpha(R)$ sera ensuite utilisé pour calculer le profil des aplatissements polaires et équatoriaux.

## Valeurs numériques

A partir de la valeur[3] de $\bar{C}_{22}$ , il est possible d'évaluer la valeur de $k_f$ et de $I/\mathcal{M}R^2$ (voir Schubert et al. 2004, et tableau 2.2) en considérant $q_r = 501.9\,10^{-6}$ pour Europe et $q_r = 190.3\,10^{-6}$ pour Ganymède. Les aplatissements en surface sont calculés au moyen de l'équation (2.7).

Si on multiplie $\beta(R)$ par le rayon moyen $R$, on obtient l'ordre de grandeur de l'aplatissement équatorial qui est de 1.1 km pour Europe et de 1.4 km pour Ganymède. En manipulant les expressions de $\alpha$ et $\beta$ (équation 2.6), et en considérant l'égalité $\beta = 6\alpha/5$, il est possible de montrer que $(a-c)/c = 8\alpha(R)/5$. Si on multiplie cette dernière expression par le rayon moyen, on ob-

[3]Sous l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique, $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ sont proportionnels, on peut donc choisir arbitrairement à partir de quel coefficient on va calculer les autres paramètres.

| Paramètres | Europe | Ganymède |
|---|---|---|
| $k_f$ | $1.048 \pm 0.020$ | $0.804 \pm 0.018$ |
| $I/\mathcal{M}R^2$ | $0.346 \pm 0.005$ | $0.3115 \pm 0.0028$ |
| $\alpha(R)$ | $0.00128488 \pm 0.000677212$ | $0.000429175 \pm 0.0001913$ |
| $\beta(R)$ | $0.00154185 \pm 0.000812655$ | $0.00051501 \pm 0.00022956$ |

TAB. 2.2 – Nombre de Love fluide, moment d'inertie moyen normalisé et aplatissements polaire et équatorial en surface pour Europe et Ganymède

tient l'ordre de grandeur de la différence entre le plus grand et le plus petit axe, qui est de 3.2 km pour Europe et de 1.8 km pour Ganymède.

## 2.3 Modèles de structure interne

### 2.3.1 Profils de densité

Les moments d'inertie moyens d'Europe et de Ganymède mesurés par Galileo (voir tableau 2.2 pour les valeurs numériques) indiquent une concentration de masse vers le centre de ces satellites. On peut donc supposer que ces satellites sont constitués de couches concentriques de matériaux dont la densité augmente en allant vers le centre.

Les équations d'un modèle d'intérieur sont l'équation de l'équilibre hydrostatique (avec comme condition aux frontières une pression nulle en surface), l'équation de la masse et l'équation du moment d'inertie moyen (Iess et al. 2007 par exemple) :

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = -2\frac{\rho(x)}{\varrho}\frac{y_2(x)}{x^2} \quad , \quad y_1(1) = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = 3\frac{\rho(x)}{\varrho}x^2 \quad , \quad y_2(1) = 1, \tag{2.12}$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx} = 2\frac{\rho(x)}{\varrho}x^4 \quad , \quad y_3(1) = \frac{I(R)}{\mathcal{M}R^2}, \tag{2.13}$$

avec :

- $x = \frac{r_o}{R}$, la variable adimensionnalisée correspondant à la distance moyenne au centre,
- $y_1 = \frac{P(r_o)}{P_o}$, la variable correspondant à la pression, où $P_o = \frac{2\pi}{3}G\varrho^2R^2$ serait la pression au centre d'un satellite de même masse et de même rayon que le satellite considéré, mais de densité uniforme $\varrho$,
- $y_2 = \frac{M(r_o)}{\mathcal{M}}$, la variable correspondant à la masse,
- et $y_3 = \frac{I(r_o)}{\mathcal{M}R^2}$, la variable correspondant au moment d'inertie moyen.

La résolution de ce système d'équations permet d'établir le profil de densité $\rho(r_o)$ du satellite considéré à condition de poser des hypothèses supplémentaires en répondant aux questions suivantes :

- Le satellite est-il constitué d'une ou de plusieurs couches de compositions différentes ? (différentiation)
- Est-ce que ces couches sont composées d'un mélange de plusieurs matériaux ? Si oui, est-ce que la fraction des matériaux varie avec la profondeur ? (homogénéité)
- Est-ce que la densité des matériaux dépend de la profondeur (via la pression et la température, ce que l'on exprime grâce à une équation d'état) ? (uniformité)

Certaines hypothèses peuvent rendre la résolution du système impossible. Par exemple, si on considère un corps fait d'une seule couche homogène et uniforme, il sera impossible de satisfaire la contrainte d'un moment d'inertie moyen normalisé inférieur à $2/5$. D'autres hypothèses peuvent rendre le système difficile à résoudre. Par exemple dans le cas où les couches sont non-homogènes et/ou non-uniformes, les deux premières équations sont couplées. Il faudra alors résoudre le système numériquement en partant d'une solution approchée que l'on ajuste ensuite pour satisfaire les conditions aux frontières.

Par contre, dans le cas où les couches sont homogènes et uniformes, le système peut être intégré analytiquement, car les deux dernières équations seront découplées de la première. En effet, si on néglige l'effet de la pression sur la densité, il n'est plus nécessaire de considérer l'équation de l'équilibre hydrostatique pour obtenir le profil de densité. Nous allons retenir cette hypothèse par la suite. En effet la pression à l'intérieur d'un satellite de la taille d'Europe ou de Ganymède est trop faible pour influencer la densité des matériaux[4]. D'un autre côté, ces satellites sont suffisamment grands pour que leur chaleur interne ait conduit à une différentiation des matériaux assurant une quasi-homogénéité des différentes couches. Le système d'équations devient donc, pour un corps à $n$ couches :

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi}{3}\left[R_1^3\rho_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1}(R_i^3 - R_{i-1}^3)\rho_i\right) + (R^3 - R_{n-1}^3)\rho_n\right], \quad (2.14)$$

$$I = \frac{4\pi}{3}\left[R_1^5\rho_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1}(R_i^5 - R_{i-1}^5)\rho_i\right) + (R^5 - R_{n-1}^5)\rho_n\right]. \quad (2.15)$$

On dispose de deux contraintes ($\mathcal{M}$, $I$) pour déterminer les $(2n-1)$ inconnues du profil de densité ($\{R_1, \ldots, R_{n-1}\}$ et $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$). Pour $n \leq 2$, le système

[4]En fait, pour une couche de glace présentant plusieurs phases à cause de la pression, on peut tout simplement considérer plusieurs couches uniformes de densités différentes.

est sous-déterminé et il existe une infinité de solutions.

Il est quand même possible de contraindre globalement la structure interne d'Europe et de Ganymède à partir des trois contraintes et en utilisant éventuellement d'autres connaissances provenant d'autres types d'observation. En effet les images prises par les sondes Voyager 1, Voyager 2 et Galileo montrent que la surface de ces satellites est composée essentiellement de glace d'eau. La mission Galileo a également permis de détecter un champ magnétique induit dans le voisinage de ces deux satellites, ce qui indique probablement la présence d'une couche globale d'eau liquide sous la surface glacée.

**Europe**

Grâce à ces observations et à la valeur du moment d'inertie, Anderson et al. (1998) considèrent qu'Europe comporte trois couches :

- une couche d'eau/glace dont l'épaisseur est comprise environ entre 80 et 170 km. La partie supérieure de cette couche est glacée et constitue la *coquille*. La partie inférieure est liquide et est appelée *océan*. Les deux phases étant supposées de même densité (1050 kg/m$^3$), il n'est pas possible de déterminer séparément l'épaisseur de la couche de glace et de la couche liquide à partir de cette méthode.
- un manteau rocheux dont la densité est comprise entre 3000 et 3800 kg/m$^3$.
- un noyau métallique dont le rayon peut valoir environ la moitié du rayon total du satellite et dont la densité vaut soit 5150, soit 8000 kg/m$^3$, selon la proportion de soufre additionnée au fer.

La seconde figure de Anderson et al. (1998) donne la valeur de $\bar{C}_{22}$ et de l'épaisseur de la couche eau/glace en fonction de la densité du manteau et du rayon du noyau, pour les deux densités possibles de ce dernier. A partir de cette figure, il est possible de montrer que l'erreur sur la détermination de $\bar{C}_{22}$ induit une erreur de l'ordre de 10 km sur la détermination des bornes de la gamme de valeurs possibles pour l'épaisseur de la couche eau/glace, ce qui n'est pas négligeable. Notre but sera donc de déterminer une stratégie de mission permettant de diminuer l'erreur sur $\bar{C}_{22}$ pour mieux contraindre les bornes de cette gamme de valeurs. La détermination de l'épaisseur individuelle de la coquille de glace pourra éventuellement être réalisée via la mesure d'autres paramètres géophysiques, comme nous allons le voir dans les chapitres suivants.

Par la suite, il sera utile d'avoir à notre disposition un ensemble (balayage) de profils de densité/modèles de structure interne compatibles avec les contraintes et représentatifs de l'infinité de solutions possibles. Nous sommes partis des résultats de Anderson et al. (1998) tout en permettant à l'eau et à

la glace d'avoir des densités différentes, ce qui nous donne un modèle à quatre couches au lieu de trois. Les rayons $R$ et densités $\rho$ des ces différentes couches sont indicés par $s$ (*shell*) pour la coquille, $o$ (*ocean*) pour l'océan, $r$ (*rock*) pour le manteau rocheux et $c$ (*core*) pour le noyau. Nous avons également permis à la densité du noyau de varier entre les deux valeurs utilisées par Anderson et al. Nous avons déterminé les densités du manteau et du noyau et l'épaisseur de l'océan ($h_o = R_o - R_r$) en fonction de la valeur des autres paramètres et des trois contraintes (voir Baland and Van Hoolst, 2010 et le tableau 2.3). L'épaisseur de la couche eau/glace est donnée par $h_s + h_o = R - R_r$ et vaut entre 85 et 160 km, ce qui est assez proche de la gamme donnée par Anderson et al. (1998). La différence provient, d'une part, du fait que notre balayage n'est pas exhaustif et tend donc à fournir donc un résultat moins précis et, d'autre part, des modifications que nous avons apportées à leurs hypothèses. Un exemple de profil de densité est donné par la figure (2.2).

| couche | Épaisseur($h$, en km) ou /Rayon($R$ en km) | Densité (kg $m^{-3}$) |
|---|---|---|
| coquille | $h_s = \{5, 7.5, ..., 15\}, \{20, 30, ..., 100\}$ | $\{800, 900, ..., 1200\}$ |
| océan | $h_o = 10 - 160$ | $\{800, 900, ..., 1200\}$ |
| manteau | $R_r = \{1400, 1425, ..., 1475\}$ | $3001 - 3785$ |
| noyau | $R_c = \{100, 200, ..., 800\}$ | $5151 - 7998$ |

TAB. 2.3 – Dimensions et densités des quatre couches des modèles de structure interne d'Europe compatibles avec les contraintes de masse, rayon et moment d'inertie. Les densités du manteau et du noyau, ainsi que l'épaisseur de l'océan, sont calculées à partir des valeurs des autres paramètres et des contraintes. A l'intérieur des accolades, les valeurs sont régulièrement espacées.

**Ganymède**

Étant donné la détection d'un champ magnétique intrinsèque par la sonde Galileo, suggérant la présence d'un noyau métallique, Anderson et al. (1996) rejettent les modèles à deux couches fait d'un noyau de roche et d'un manteau d'eau/glace, pourtant compatibles avec la valeur du moment d'inertie. Comme pour Europe, le rayon du noyau métallique peut valoir environ la moitié du rayon total du satellite et sa densité vaut 5150 ou 8000 kg/m$^3$, selon la proportion de soufre additionnée au fer. Le manteau rocheux, situé entre le noyau et la couche externe d'eau/glace, a également un densité comprise entre 3000 et 3800 kg/m$^3$. La couche d'eau/glace a une épaisseur comprise entre 710 et 1240 km. Il n'y a pas de distinction entre les différentes phases de l'eau, et la densité de cette couche est comprise entre 1000 et 1350 kg/m$^3$.

A partir de Anderson et al. (1996), il est possible de montrer que l'erreur sur la détermination de $\bar{C}_{22}$ entraine une erreur de l'ordre de 20 km sur la détermination des bornes de la gamme de valeurs possibles pour l'épaisseur de

la couche eau/glace.

Nous définissions également notre propre ensemble de modèles d'intérieur pour Ganymède (tableau 2.4 et figure 2.3 pour un exemple). Nous avons considéré les différentes phases de l'eau en divisant la couche de surface en trois couches : un coquille externe de glace, un océan d'eau liquide et un manteau de glace à haute densité (indicé par $i$ pour *ice*). Le noyau métallique comprend une graine solide et une partie liquide (indicée par $f$ pour *fluid core*), dont les densités peuvent varier entre les deux valeurs extrêmes considérées par Anderson et al. (1996).

| couche | épaisseur ($h$, en km) ou rayon ($R$, en km) | densité (kg $m^{-3}$) |
|---|---|---|
| coquille | $h_s = \{25, 37.5, ..., 75\}$, $\{100, 125, ...., 200\}$, $\{250, 300, ..., 400\}, 500$ | $\{800, 900, ..., 1200\}$ |
| océan | $h_o = 6.2 - 706.2$ | $\{800, 900, ..., 1200\}$ |
| manteau de glace | $R_i = \{1900, 2050, ..., 2500\}$ | $\{1000, 1100, ..., 1400\}$ |
| manteau rocheux | $R_r = \{1500, 1600, ..., 2000\}$ | $3000 - 3799$ |
| noyau liquide | $R_f = \{450, 700, ..., 1200\}$ | $5150 - 7996$ |
| graine | $R_c = \{200, 450, ..., 950\}$ | $5500, 6500, 8000$ |

TAB. 2.4 – Dimensions et densités des 6 couches des modèles de structure interne de Ganymède compatibles avec les contraintes de masse, rayon et moment d'inertie. Les densités du manteau et du noyau liquide, ainsi que l'épaisseur de l'océan, sont calculées à partir des valeurs des autres paramètres et des contraintes. A l'intérieur des accolades, les valeurs sont régulièrement espacées.

### 2.3.2 Profils d'aplatissements

Pour chacun de nos profils de densité, il est également possible de calculer le profil de l'aplatissement $\alpha$ en fonction du rayon moyen $r_o$, en intégrant l'équation différentielle de Clairaut[5]. Ces profils d'aplatissement seront utiles par la suite pour le calcul des librations et de l'obliquité de l'état de Cassini (chapitre 3). Des exemples de profils d'aplatissement pour Europe et pour Ganymède sont donnés par les figures (2.2) et (2.3), respectivement.

[5]par la méthode de Newton-Raphson par exemple, qui est assez simple à mettre en œuvre dans ce cas.

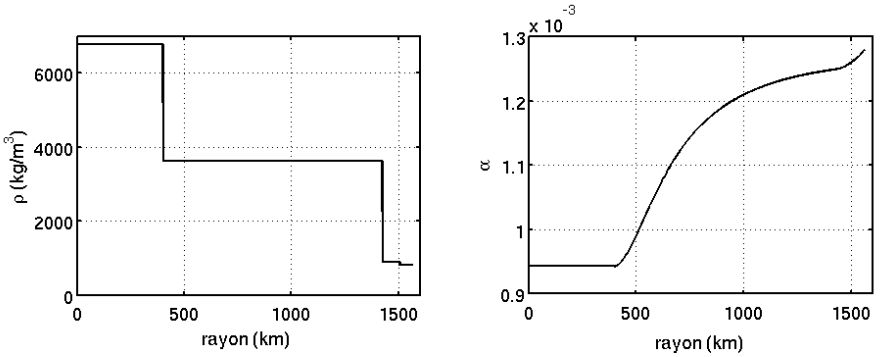


FIG. 2.2 – Exemple de profil de densité et d'aplatissement pour un même modèle de structure interne d'Europe.

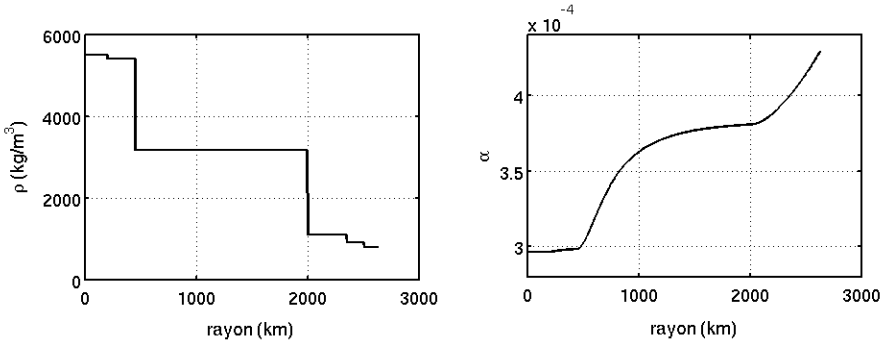


FIG. 2.3 – Exemple de profil de densité et d'aplatissement pour un même modèle de structure interne de Ganymède

# Chapitre 3

# Les paramètres liés à la rotation et la structure interne

## Sommaire


**3.1 Les librations . . . . . 46**
3.1.1 Librations pour un corps rigide . . . . . 47
Solution libre . . . . . 49
Solution forcée . . . . . 49
3.1.2 Effet d'un océan interne global . . . . . 50
Couples externes . . . . . 52
Couples internes gravitationnels . . . . . 52
Couples internes de pression . . . . . 53
Solution . . . . . 57
**3.2 L'état de Cassini . . . . . 62**
3.2.1 État de Cassini pour un corps rigide . . . . . 64
Solution libre . . . . . 65
Précession et inclinaison de l'orbite . . . . . 65
Solution forcée, obliquité et facteurs de résonance . 66
Déviation et longitude $\mu$ . . . . . 66
Application à Europe et Ganymède . . . . . 69
3.2.2 Effet d'un océan interne global . . . . . 71
Application à Europe . . . . . 72
Application à Ganymède . . . . . 78

La rotation d'un satellite synchrone peut être caractérisée par trois composantes :

- les variations de sa vitesse de rotation (les librations en longitude),
- l'orientation de l'axe de rotation par rapport à l'axe normal à son orbite (obliquité de l'état de Cassini),
- l'orientation de l'axe de rotation par rapport au body frame du satellite (wobble).

L'état de la rotation est déterminé par la résolution de l'équation du moment angulaire. Deux approches sont alors possibles. Soit on intègre numériquement l'équation et on déduit ensuite chaque composante de la rotation à partir de la solution numérique. Soit on intègre analytiquement l'équation en considérant séparément chaque composante de la rotation, ce qui est possible car elles correspondent à des échelles de temps différentes. C'est cette approche que nous avons retenue pour sa relative simplicité. Lors de l'étude d'une composante de la rotation, les deux autres composantes peuvent être négligées en première approximation. Cette méthode permet donc de mieux comprendre l'effet des couplages gravitationnels. Nous étudierons les librations et l'état de Cassini. Le wobble ne sera pas abordé dans le cadre de notre travail.

## 3.1 Les librations

Nous avons vu que les satellites synchrones tels qu'Europe et Ganymède ont une forme d'équilibre à long terme présentant un aplatissement équatorial orienté en moyenne dans la direction de leur planète. Changeons d'échelle de temps et considérons la période de révolution/rotation du satellite. L'orbite du satellite est légèrement excentrique et donc la vitesse de révolution va légèrement varier autour de sa valeur moyenne. Par conséquent, l'aplatissement équatorial du satellite n'est pas exactement dirigé vers la planète. La planète exerce alors un couple de force périodique tendant à réaligner le bourrelet avec la direction satellite-planète, ce qui va entrainer des variations périodiques de la rotation autour de la rotation synchrone moyenne, que l'on appelle librations. La période de ces librations sera celle de révolution/rotation[1] du satellite.

L'amplitude de ces variations périodiques peut être facilement calculée pour un satellite rigide. Nous allons ensuite discuter de l'influence de la présence de couches liquides internes globales, telles qu'un océan d'eau liquide sous la surface gelée ou un noyau métallique liquide.

[1] D'autres périodes de librations peuvent exister. En effet il est possible de considérer d'autres couplages à d'autres périodes dus à la présence des autres satellites galiléens par exemple (Rambaux et al. 2011), mais les librations correspondantes dépendent peu de la structure interne du satellite considéré.

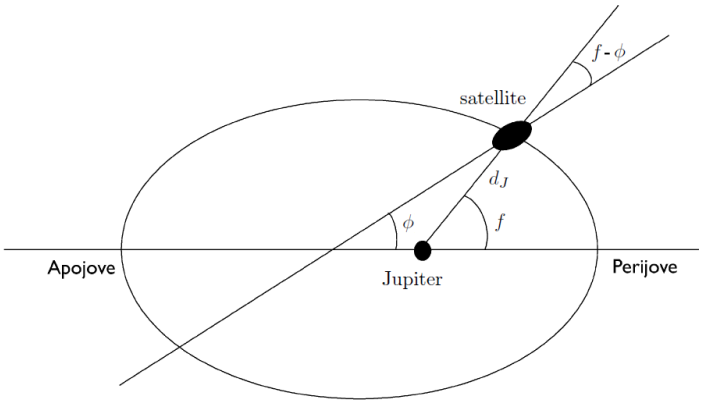


FIG. 3.1 – L'excentricité de l'orbite d'un satellite synchrone est à l'origine d'un couple de force exercé par la planète sur l'aplatissement équatorial (adapté de Van Hoolst et al. 2008).

### 3.1.1 Librations pour un corps rigide

En négligeant le wobble, la rotation du satellite se produit autour de l'axe du moment d'inertie polaire $C$. En négligeant l'obliquité et les variations de l'orbite du satellite, cet axe reste fixe dans l'espace et Jupiter est situé dans le plan équatorial du satellite considéré. L'axe du moment angulaire $A$ décrit alors une rotation dans l'espace de vitesse angulaire $\dot{\phi}$. L'angle $\phi$ est l'angle de rotation de l'axe $A$, compté par rapport au demi-grand axe de l'orbite du satellite naturel ($\phi = 0$ au moment du passage au périjove). Le moment angulaire de rotation, exprimé dans le Body Frame, est donc donné par $\vec{L} = (0, 0, C\dot{\phi})$. En supposant que le satellite est rigide, les moments d'inertie $A, B$ et $C$ sont constants et l'équation du moment angulaire pour les librations est donnée par :

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \vec{L} = \vec{\Gamma} \tag{3.1}$$

avec $\vec{\Gamma} = (0, 0, \Gamma_z)$ le couple de force dû à Jupiter et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané $(0, 0, \dot{\phi})$, qui sont tout deux orientés dans la même direction que $\vec{L}$, à cause des hypothèses de départ. L'équation du moment angulaire peut donc s'écrire sous la forme plus simple :

$$C\ddot{\phi} = \Gamma_z. \tag{3.2}$$

On peut déduire assez intuitivement la forme du couple $\Gamma_z$ à partir de la figure (3.1) :

- Le couple sera d'autant plus grand que l'aplatissement équatorial du satellite, représenté par la différence $(B - A)$, sera grand.
- Il dépendra aussi de la différence entre l'anomalie vraie $f$ et l'angle de rotation $\phi$.
- La force qui s'exerce entre l'aplatissement équatorial et la planète est proportionnelle[2] à $1/d_J^4$ , donc le couple doit être proportionnel à $1/d_J^3$.
- La force, et donc le couple, est aussi proportionnelle à la masse de la planète $\mathcal{M}_J$.

L'expression exacte du couple est donnée par (par exemple Goldreich et Peale, 1966 ou Murray et Dermott, 1999) :

$$\Gamma_z = \frac{3}{2}(B - A)\frac{G\mathcal{M}_J}{d_J^3}\sin 2(f - \phi). \tag{3.3}$$

En vertu de la troisième loi de Kepler, $G\mathcal{M}_J = n^2 a_J^3$, et on définit $K_{grav} = \frac{3}{2}(B - A)n^2$, l'intensité du couple, pour obtenir :

$$C\ddot{\phi} = K_{grav}\left(\frac{a_J}{d_J}\right)^3 \sin 2(f - \phi). \tag{3.4}$$

Les quantités $d_J$ et $f$ sont des fonctions du temps dont la période est celle de révolution/rotation du satellite, mais dont le taux de variation n'est pas constant, ce qui rend difficile la résolution analytique de l'équation du moment angulaire. C'est pourquoi on réexprime $d_J$ et $f$ en fonction de l'anomalie moyenne $M$, du demi-grand axe $a_J$ et de l'excentricité $e$ qui sont des quantités constantes ou variant de façon uniforme[3]. Au premier ordre en l'excentricité, l'équation (3.4) devient (Van Hoolst et al. 2008) :

$$C\ddot{\phi} = 4eK_{grav}\sin M - 2K_{grav}(\phi - M). \tag{3.5}$$

On sait que $\phi$ est égal à l'angle de rotation moyen, lui-même égal à l'anomalie moyenne, plus une petite quantité appelée angle de libration. On va donc définir $\gamma = \phi - M$, l'angle de libration et résoudre l'équation par rapport à cette nouvelle variable, puisque $\ddot{\phi} = \ddot{\gamma}$ :

$$C\ddot{\gamma} + 2K_{grav}\gamma = 4eK_{grav}\sin M. \tag{3.6}$$

On utilise le terme *librations* pour désigner les variations de la rotation du satellite autour de sa rotation moyenne car l'équation qui les décrit est celle d'un pendule forcé, c'est-à-dire du mouvement de balancier autour d'un position d'équilibre (libra, en latin). Comme pour un pendule forcé, on peut mettre en évidence une solution libre et une solution forcée.

[2] Il suffit de considérer le gradient de l'équation (2.3) pour s'en convaincre.

[3] puisque nous avons négligé les variations de l'orbite d'Europe dues aux perturbations par les autres satellites galiléens ou à d'autres planètes (comme Saturne).

**Solution libre**

La solution libre est obtenue en moyennant le forçage sur sa propre période. Il ne faut pas confondre moyenner le forçage et annuler le forçage. En effet, annuler le forçage revient à annuler le facteur $K_{grav}$, ce qui n'a physiquement pas de sens, tandis que moyenner le forçage revient à annuler le membre de droite de l'équation (3.6) et à « oublier » les courtes périodes. En ce sens, les librations libres sont bien dues à la présence de Jupiter dans le système considéré. L'équation à résoudre est

$$C\ddot{\gamma} + 2K_{grav}\gamma = 0 \tag{3.7}$$

et la solution est

$$\gamma_f = A_f \sin(\sigma_f t + \varphi_f) \tag{3.8}$$

avec $A_f$ l'amplitude, $\sigma_f$ la fréquence et $\varphi_f$ la phase des librations libres. L'amplitude dépend des conditions initiales tandis que la fréquence dépend de l'intensité du couple, mais pas de l'excentricité de l'orbite[4], et vaut

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2K_{grav}}{C}}. \tag{3.9}$$

La période du mode propre est de 52.57 jours pour Europe et 186.43 jours pour Ganymède. On considère généralement que les librations libres sont amorties, c'est-à-dire que $A_f = 0$, à cause de la dissipation qui sur le long terme tend à réduire les mouvement dus à une excitation ponctuelle et du fait que l'on ne connait pas actuellement de source d'excitation.

**Solution forcée**

La solution forcée aura la même période que le forçage (3.55 jours pour Europe et 7.15 jours pour Ganymède). En remplaçant $\gamma$ par $g \sin M$ dans l'équation du moment angulaire, on obtient que l'amplitude des librations forcées vaut

$$g = -\frac{2e\sigma_f^2}{n^2 - \sigma_f^2} = -6\frac{B-A}{C}\frac{n^2 e}{n^2 - \sigma_f^2} \tag{3.10}$$

et dépend de l'excentricité. Étant donné que $\sigma_f^2 << n^2$, on peut approximer la solution par

$$g \simeq -6\frac{B-A}{C}e. \tag{3.11}$$

Pour Europe, l'amplitude de libration en surface, à l'équateur, est $g \times R \simeq 134$ m, tandis qu'elle est d'à peine 10 m pour Ganymède. Les variations temporelles (équations 1.20 et 1.21) de $C_{22}$ et $S_{22}$, dans un repère tournant avec une vitesse

[4] ce qui découle du fait que l'on s'est restreint au premier ordre en l'excentricité dans l'équation (3.5).

uniforme, sont de l'ordre de $10^{-12}$ et $10^{-8}$ pour Europe et de l'ordre de $10^{-15}$ et $10^{-10}$ pour Ganymède (voir figure 3.2). Etant donné que la précision actuelle sur la détermination de $\bar{C}_{22}$ est de l'ordre de $2.5\,10^{-6}$ et $0.87\,10^{-6}$ pour Europe et Ganymède, respectivement (Anderson et al. 1996 et 1998), et que les missions futures devraient améliorer cette précision d'environ trois ordres de grandeur (Dougherty et al. 2011a), seul l'effet des librations rigides d'Europe, via le coefficient $S_{22}$ pourrait être détecté.

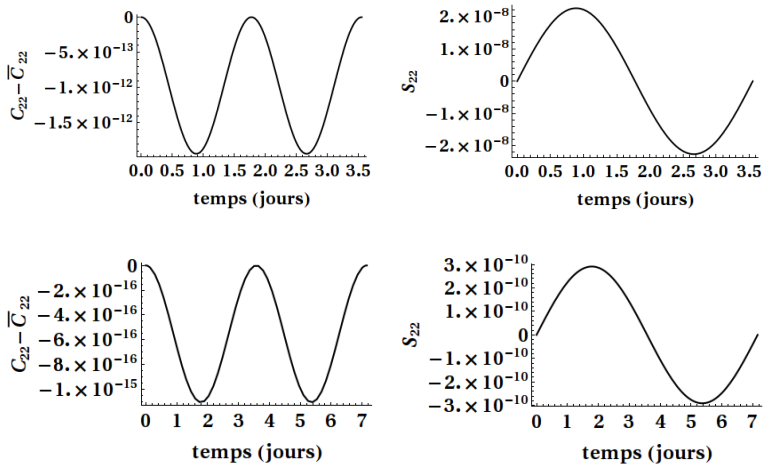


FIG. 3.2 – Variations temporelles de $C_{22}$ et $S_{22}$, à cause des librations, pour Europe (haut) et Ganymède (bas).

### 3.1.2 Effet d'un océan interne global

Le modèle de libration pour un corps rigide n'est pas adapté à Europe et Ganymède car ces satellites possèdent probablement un océan liquide interne sous leur coquille externe glacée. De plus, l'état de leur noyau métallique n'est pas connu et une partie ou l'entièreté de celui-ci pourrait également être liquide. La réponse d'un satellite fait de couches liquides et rigides imbriquées les unes dans les autres n'est pas la même que celle d'un satellite entièrement rigide. En effet chaque couche répond indépendamment au forçage externe selon son propre aplatissement et les différentes couches vont exercer des couplages internes les unes sur les autres. Nous n'avons retenu que les couplages internes de type gravitationnel et de pression.

L'effet d'une ou de plusieurs couches liquides globales sur l'amplitude de libration de la couche externe d'un satellite en rotation synchrone a fait l'objet d'une étude approfondie qui a donné lieu à une publication détaillée du modèle

et des résultats (Baland et Van Hoolst 2010, voir annexe F). Ce modèle ne sera donc pas retranscrit ici dans son entièreté, nous nous contenterons de présenter le raisonnement pour le cas d'une seule couche liquide, à savoir, l'océan situé sous la coquille de glace[5].

On considère qu'Europe est fait de 3 couches (voir figure 3.3) : une coquille externe rigide de glace d'eau (indicée[6] par $s$, pour *shell*), un intérieur rigide constitué du manteau rocheux et du noyau métallique ($i$, pour *interior*), les deux couches rigides étant séparées par un océan d'eau liquide ($o$, pour *ocean*). On considère également que Ganymède est fait de trois couches. La différence est que son intérieur est composé des manteaux de glace et de roche et du noyau métallique.

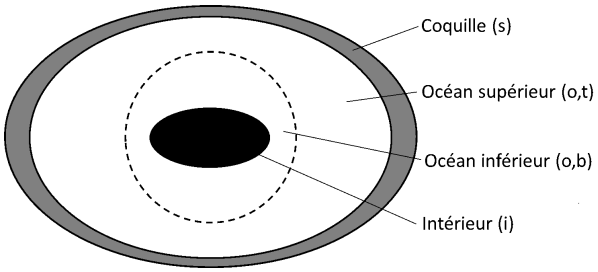


FIG. 3.3 – Structure interne à trois couches (coquille, océan, intérieur), vue et dans la plan de l'équateur. L'océan est lui-même divisé en deux couches situées de part et d'autre d'une sphère de rayon quelconque.

Chaque couche possède sa propre équation du moment angulaire. Il faut donc en principe résoudre le système d'équations suivant :

$$C_s\ddot{\phi}_s = \Gamma_{J,s} + \Gamma_{g,s} + \Gamma_{p,s}, \tag{3.12}$$
$$C_o\dot{\omega}_o = \Gamma_{J,o} + \Gamma_{g,o} + \Gamma_{p,o}, \tag{3.13}$$
$$C_i\ddot{\phi}_i = \Gamma_{J,i} + \Gamma_{g,i} + \Gamma_{p,i}, \tag{3.14}$$

avec :

- $C_{(.)}$, le moment d'inertie polaire des différentes couches,
- $\Gamma_{J,(.)}$, les couples externes dus à l'attraction gravitationnelle de Jupiter sur l'aplatissement équatorial des différentes couches,

[5]Il est en effet possible de montrer que l'état du noyau métallique n'influence pas significativement l'amplitude de libration de la coquille.

[6]Par souci de cohérence, nous avons conservé la notation des indices utilisée dans Baland et Van Hoolst (2010), sauf pour l'intérieur qui est indicé par $i$ au lieu de $in$.

- $\Gamma_{g,(.)}$ et $\Gamma_{p,(.)}$, les couples internes gravitationnel et de pression que les différentes couches exercent entre elles,
- $\phi_s$ et $\phi_i$, les angles de rotation de la coquille et de l'intérieur rigides,
- $\omega_o$, la fréquence de rotation de l'océan, définie de façon[7] à ce que $C_o\omega_o$ soit égal au moment angulaire de rotation de l'océan.

En effet l'océan n'a pas d'angle de rotation défini. On appelle *océan supérieur* $(o,t)$ et *océan inférieur* $(o,b)$ les parties situées de part et d'autre d'une surface sphérique de rayon quelconque située à l'intérieur de l'océan. L'océan supérieur est aligné avec la coquille et son angle de rotation est $\phi_s$, tandis que l'océan inférieur a $\phi_i$ pour angle de rotation.

### Couples externes

Les couples externes sur la coquille et l'intérieur s'écrivent de la même façon que le couple externe dans le cas rigide, de sorte que :

$$\Gamma_{J,s} = \frac{3}{2}(B_s - A_s)\frac{G\mathcal{M}_J}{d_J^3}\sin 2(f-\phi_s), \tag{3.15}$$

$$\Gamma_{J,i} = \frac{3}{2}(B_i - A_i)\frac{G\mathcal{M}_J}{d_J^3}\sin 2(f-\phi_i). \tag{3.16}$$

Pour l'océan, il faut additionner le couple sur les parties inférieure et supérieure :

$$\Gamma_{J,o} = \frac{3}{2}\frac{GM_J}{d^3}\left[(B_{o,b} - A_{o,b})\sin 2(f-\phi_m) + (B_{o,t} - A_{o,t})\sin 2(f-\phi_s)\right]. \tag{3.17}$$

Étant donné que les différentes couches réagissent différemment au couplage externe, elles vont se désaligner les unes par rapport aux autres et des couplages internes vont apparaître.

### Couples internes gravitationnels

Deux types de couplages internes gravitationnels sont possibles :

- le couple exercé par une couche « externe » ($O$, pour *Outer*) sur une couche « interne » ($I$, pour *Inner*) : $\Gamma_{g,I}$,
- et le couple exercé par une couche « interne » ($I$) sur une couche « externe » ($O$) : $\Gamma_{g,O}$.

Par « externe » , nous entendons une couche qui est située plus loin du centre de masse que la couche « interne » . Intuitivement, le couple $\Gamma_{g,I}$ dépend des profils de densité et d'aplatissement équatorial des deux couches et de la différence

[7] On peut le voir comme un artifice de notation, qui n'aura aucune conséquence par la suite.

entre leur angle de rotation. On peut montrer qu'il prend la forme exacte suivante :

$$\Gamma_{g,I} = \frac{4\pi G}{5}(B_I - A_I)\left[\int_O \rho(r)\frac{\partial\beta(r)}{\partial r}dr\right]\sin 2(\phi_O - \phi_I). \tag{3.18}$$

avec $\beta$ l'aplatissement équatorial défini dans la section (2.2). Le couple $\Gamma_{g,O}$ est égal $-\Gamma_{g,I}$, car la somme des couples gravitationnels internes exercés par deux couches l'une sur l'autre est nulle. On peut utiliser $\Gamma_{g,I}$ et $\Gamma_{g,O}$ pour calculer le couplage sur chaque couche, dû aux autres couches qui ne lui sont pas alignées. Par exemple, l'océan supérieur étant aligné avec la coquille, il ne contribue pas au couple qui s'exerce sur cette dernière.

- Pour calculer le couple sur la coquille, il faut prendre en compte :
  - l'effet de l'intérieur (en utilisant l'équation pour $\Gamma_{g,O}$). Cet effet est présenté géométriquement dans la figure (3.4),
  - l'effet de l'océan inférieur ($\Gamma_{g,O}$).

- Pour le couple sur l'intérieur, on calcule
  - l'effet de la coquille ($\Gamma_{g,I}$), voir figure (3.4),
  - l'effet de l'océan supérieur ($\Gamma_{g,I}$).

- Pour l'océan il faut additionner les effets suivants :
  - le couple sur l'océan supérieur dû à l'intérieur ($\Gamma_{g,O}$)
  - le couple sur l'océan inférieur dû à la coquille ($\Gamma_{g,I}$)
  - les couples mutuels entre l'océan inférieur et l'océan supérieur s'annulent en vertu de l'égalité ($\Gamma_{g,O} = -\Gamma_{g,I}$).

Les expressions détaillées de $\Gamma_{g,s}, \Gamma_{g,o}$ et $\Gamma_{g,i}$ sont données par :

$$\Gamma_{g,s} = -\frac{4\pi G}{5}\left[(B_i - A_i) + (B_{o,b} - A_{o,b})\right]\left[\rho_s(\beta_s - \beta_o)\right]\sin 2(\phi_s - \phi_i), \tag{3.19}$$

$$\Gamma_{g,o} = \frac{4\pi G}{5}\left\{(B_{o,b} - A_{o,b})\left[\rho_s(\beta_s - \beta_o)\right] - (B_i - A_i)\left[\rho_o\beta_o\right]\right\}\sin 2(\phi_s - \phi_i), \tag{3.20}$$

$$\Gamma_{g,i} = \frac{4\pi G}{5}(B_i - A_i)\left[\rho_o\beta_o + \rho_s(\beta_s - \beta_o)\right]\sin 2(\phi_s - \phi_i). \tag{3.21}$$

Notons que les couples gravitationnels internes tendent à réduire le désalignement entre les différentes couches et que leur somme est nulle.

### Couples internes de pression

Nous avons pris comme hypothèse que le gradient de pression dans l'océan est hydrostatique et lié aux potentiels gravitationnels internes et externes :

$$\nabla P \quad = \quad -\rho_o\nabla\Phi - \rho_o\nabla W, \tag{3.22}$$

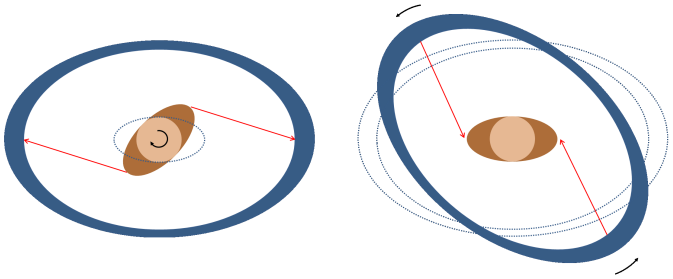

FIG. 3.4 – Couplages gravitationnels internes entre la coquille et l'intérieur, vus dans le plan de l'équateur. On considère un désalignement de l'intérieur par rapport à la coquille, qui peut être causé initialement par le couplage externe de la planète par exemple. A gauche, on se place dans un référentiel lié à la coquille et à droite, on considère que l'intérieur est fixe. Les excès de masses dus aux aplatissement équatoriaux vont s'attirer mutuellement (flèches rouges) et créer un couple de force qui va tendre à ramener l'intérieur ou la coquille vers leur position d'équilibre (en pointillés), grâce à une rotation différentielle (flèches noires) de l'intérieur ou de la coquille, par rapport à la couche considérée comme fixe.

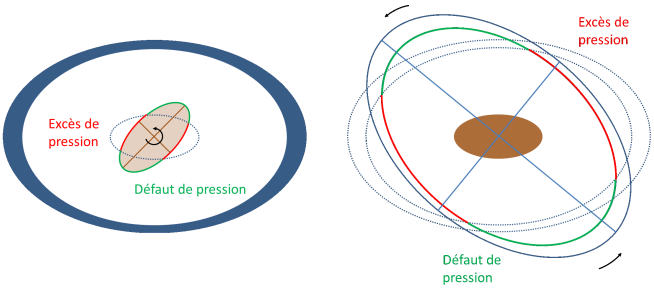


FIG. 3.5 – Couplages internes de pression sur l'intérieur (gauche) et la coquille (droite), liés aux potentiels gravitationnels de la coquille et de l'océan supérieur (gauche) et de l'intérieur et de l'océan inférieur (droite), vus dans le plan de l'équateur, dans un référentiel fixé à la coquille (gauche) et à l'intérieur (droite). Les positions d'équilibre sont données en pointillés. Lorsqu'une partie d'une interface est située au-dessous/au-dessus de la position d'équilibre, la pression y est en excès/défaut. Les excès et défauts de pression ne sont pas répartis symétriquement sur l'interface, comme on peut le voir grâce aux axes de symétrie tracés sur les deux figures. Il en résulte un couple de pression qui tend à accentuer (gauche) ou à diminuer (droite) le désalignement.

avec $\Phi$ le potentiel gravitationnel interne dû au satellite et $W$ le potentiel gravitationnel externe dû à Jupiter. On peut donc décomposer la pression en une partie due à $\Phi$ et notée $P_g$ et une partie due à $W$ et notée $P_J$. De la même façon, les couples seront séparés en deux composantes

$$\Gamma_{p,(.)} = \Gamma_{pg,(.)} + \Gamma_{pJ,(.)}. \tag{3.23}$$

Couples internes de pression liés au potentiel gravitationnel interne, $\Gamma_{pg,(.)}$

On se place dans un référentiel où la coquille est fixe (figure 3.5, gauche) et où l'intérieur présente un désalignement par rapport à sa position d'équilibre. La pression $P_g$ à l'interface entre l'océan et l'intérieur provient

- d'une part, du potentiel gravitationnel de la coquille et de l'océan supérieur,
- et d'autre part, du potentiel gravitationnel de l'intérieur et de l'océan inférieur.

La seconde partie de la pression s'exerce symétriquement sur l'interface océan-intérieur et n'engendre pas de couplage. Par contre la première partie présente, selon l'endroit considéré, un excès ou un défaut par rapport à sa valeur lorsque les couches sont alignées, ce qui entraîne un couple de force supplémentaire et une rotation différentielle de l'intérieur accentuant le désalignement. Un raisonnement similaire peut être tenu pour la coquille (figure 3.5, droite) et l'océan.

Comme dans le cas du couple interne gravitationnel, le couple $\Gamma_{pg,(.)}$ peut être dû à la pression résultant du potentiel gravitationnel d'une couche « externe » $(O)$ et s'exercer sur une couche « interne » et vice-versa. Vu que $\nabla P_g = -\rho_o \nabla \Phi$, $\Gamma_{pg,I}$ et $\Gamma_{pg,O}$ ont des expressions ressemblant à $\Gamma_{g,I}$ et $\Gamma_{g,O}$, mais cette fois $\Gamma_{g,O} \neq -\Gamma_{g,I}$ car le principe d'action-réaction ne peut être utilisé de la sorte pour une force de surface telle que la pression. En effet, les surfaces impliquées dans le calcul de $\Gamma_{g,I}$ et de $\Gamma_{g,O}$ ne sont pas nécessairement les mêmes. On peut montrer que (voir Baland et Van Hoolst 2010, annexe F)

$$\begin{aligned} \Gamma_{pg,I} &= \frac{32\pi^2 G}{75}\left[\rho_{Ib} R_{Ib}^5 \beta_{Ib} - \rho_{It} R_{It}^5 \beta_{It}\right]\left[\int_O \rho(r)\frac{\partial \beta(r)}{\partial r} dr\right] \\ &\quad \times \sin 2(\phi_O - \phi_I), \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\Gamma_{pg,O} = -\frac{4\pi G}{5}(B_I - A_I)(\beta_{Ob}\rho_{Ob} - \beta_{Ot}\rho_{Ob}) \sin 2(\phi_O - \phi_I). \tag{3.25}$$

où $R_{Ib}$ et $\beta_{Ib}$ sont le rayon et l'aplatissement équatorial de l'interface inférieure de la couche « interne » ($Ib$ pour *Inner bottom*) et $R_{It}$ et $\beta_{It}$ sont le rayon et l'aplatissement équatorial de l'interface supérieure de la couche « interne » ($It$ pour *Inner top*). $\rho_{Ib}$ et $\rho_{It}$ sont les densités des fluides présents aux interfaces inférieure et supérieure de la couche « interne ». $R_{Ob}$, $\beta_{Ob}$, $R_{Ot}$, $\beta_{Ot}$, $\rho_{IOb}$ et

$\rho_{Ot}$ sont définis de la même façon. Dans le cas où la couche « interne » est l'intérieur, on peut considérer $\rho_{Ib} = 0$ et dans le cas où la couche « externe » est la coquille, on peut considérer $\rho_{Ot} = 0$. Dans tous les autres cas, la densité sera égale à $\rho_o$. Les expressions détaillées de $\Gamma_{pg,s}, \Gamma_{pg,o}$ et $\Gamma_{pg,i}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{pg,s} &= -\frac{4\pi G}{5}\left[(B_i - A_i) + (B_{o,b} - A_{o,b})\right]\left[\rho_o\beta_o\right]\sin 2(\phi_s - \phi_i), \quad (3.26)\\
\Gamma_{pg,o} &= \frac{4\pi G}{5}\left[(B_i - A_i) + (B_{o,b} - A_{o,b})\right]\left[\rho_o\beta_o\right]\sin 2(\phi_s - \phi_i)\\
&\quad -\frac{4\pi G}{5}(B_{o,b} - A_{o,b})\left[\rho_o\beta_o + \rho_s(\beta_s - \beta_o)\right]\sin 2(\phi_s - \phi_i), \quad (3.27)\\
\Gamma_{pg,i} &= \frac{4\pi G}{5}\left[(B_{o,b} - A_{o,b})\right]\left[\rho_o\beta_o + \rho_s(\beta_s - \beta_o)\right]\sin 2(\phi_s - \phi_i). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

La somme de ces couplages internes est nulle, ce qui est normal car tous les couples mutuels aux différentes interfaces sont compris dans cette somme.

Couples internes de pression liés au potentiel gravitationnel externe, $\Gamma_{pJ,(.)}$

Étant donné que $\nabla P_J = -\rho_o \nabla W$, on peut montrer que le couple de pression associé au potentiel externe sur une couche quelconque ($l$ pour *layer*) est donné par

$$\Gamma_{pJ,l} = \frac{4\pi}{5}\left[R_{lb}^5\beta_{lb}\rho_{lb} - R_{lt}^5\beta_{lt}\rho_{lt}\right]\frac{GM_p}{d^3}\sin 2(f - \phi_l), \quad (3.29)$$

où $R_{lb}$ et $\beta_{lb}$ sont le rayon et l'aplatissement équatorial de l'interface inférieure de la couche considérée ($lb$ pour *layer bottom*) et $R_{lt}$ et $\beta_{lt}$ sont le rayon et l'aplatissement équatorial de l'interface supérieure de cette couche ($lt$ pour *layer top*). $\rho_{lb}$ et $\rho_{lt}$ sont les densités des fluides présents aux interfaces inférieure et supérieure de la couche considérée. Dans le cas où la couche considérée est l'intérieur, on peut prendre $\rho_{lb} = 0$ et dans le cas où cette couche est la coquille, on peut prendre $\rho_{lt} = 0$. Dans tous les autres cas, la densité sera égale à $\rho_o$. Les expressions détaillées de $\Gamma_{pJ,s}, \Gamma_{pJ,o}$ et $\Gamma_{pJ,i}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{pJ,s} &= \frac{3}{2}(B_{o,t} - A_{o,t})\frac{GM_p}{d^3}\sin 2(f - \phi_s), \quad (3.30)\\
\Gamma_{pJ,o} &= -\frac{3}{2}(B_{o,t} - A_{o,t})\frac{GM_p}{d^3}\sin 2(f - \phi_s)\\
&\quad -\frac{3}{2}(B_{o,b} - A_{o,b})\frac{GM_p}{d^3}\sin 2(f - \phi_i), \quad (3.31)\\
\Gamma_{pJ,i} &= \frac{3}{2}(B_{o,b} - A_{o,b})\frac{GM_p}{d^3}\sin 2(f - \phi_i). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

On trouve bien que la somme de ces couples internes est nulle.

Interprétation des couples internes de pression

On remarque que $\Gamma_{pg,o} = -\Gamma_{g,o}$ et $\Gamma_{pJ,o} = -\Gamma_{J,o}$ et que la somme des couples internes et externes sur l'océan est nulle. Cela découle de l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique. On a alors que $\dot{\omega}_o = 0$. Le système (3.12-3.14) se simplifie et il ne reste plus que deux équations à résoudre.

D'un autre côté, prendre en compte les couples internes de pression liés au potentiel gravitationnel interne permet d'obtenir une autre égalité intéressante. En effet, alors que la somme des couples internes $(\Gamma_{g,s}+\Gamma_{g,i})$ n'est pas nulle, en vertu du fait qu'un couple interne gravitationnel s'exerce aussi sur l'océan, la somme $\Gamma_{g,s}+\Gamma_{pg,s}+\Gamma_{g,i}+\Gamma_{pg,i}$ est bien nulle. On voit que l'effet de la pression compense l'effet de la gravitation interne sur l'océan. $\Gamma_{pg,s}$ et $\Gamma_{pg,i}$ peuvent alors être interprété comme un transfert des couplages internes gravitationnels sur l'océan vers les couches rigides, grâce à l'effet de la pression.

**Solution**

Au premier ordre par rapport aux petites quantités que sont l'excentricité et les angles de librations de la coquille ($\gamma_s = \phi_s - M$) et de l'intérieur ($\gamma_i = \phi_i - M$), le système des équations du moment angulaire (3.12-3.14) peut alors s'écrire sous une forme plus simple :

$$C_s\ddot{\gamma}_s + 2K_s\gamma_s + 2K_{int}(\gamma_s - \gamma_i) = 4eK_s \sin M, \tag{3.33}$$

$$C_i\ddot{\gamma}_i + 2K_i\gamma_i - 2K_{int}(\gamma_s - \gamma_i) = 4eK_i \sin M, \tag{3.34}$$

avec $K_s$ et $K_i$ qui représentent l'intensité du couplage gravitationnel externe, modifié par la pression, sur la coquille et l'intérieur. $K_{int}$ représente l'intensité du couplage gravitationnel interne, modifié par la pression, entre la coquille et l'intérieur. Ce système possède deux solutions libres (ou modes propres) de fréquences $\sigma_1$ et $\sigma_2$ et une solution forcée pour chaque couche, telles que les amplitudes de libration s'écrivent[8] :

$$g_s = \frac{4e\left(2(K_s+K_i)K_{int} + 2K_iK_s - C_iK_sn^2\right)}{C_iC_s(n^2-\sigma_1^2)(n^2-\sigma_2^2)}, \tag{3.35}$$

$$g_i = \frac{4e\left(2(K_s+K_i)K_{int} + 2K_iK_s - C_sK_in^2\right)}{C_iC_s(n^2-\sigma_1^2)(n^2-\sigma_2^2)}. \tag{3.36}$$

Les quantités $C_{(.)}$ et $(B_{(.)} - A_{(.)})$ peuvent être obtenues à partir des profils d'aplatissement et de densité d'un modèle de structure interne (Van Hoolst et al, 2008). De là, les amplitudes de libration peuvent être calculées pour tous les modèles de structure interne des balayages définis dans le chapitre précédent.

[8]Les expressions détaillées de $K_{int}$, $K_s$, $K_i$, $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont données par les équations (70,71,72 et 76) dans Baland et Van Hoolst (2010), voir annexe F.

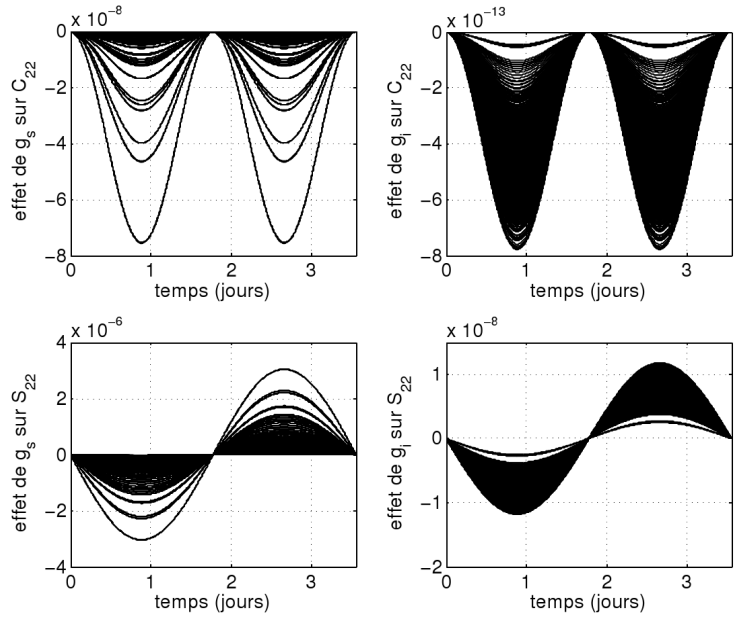


FIG. 3.6 – Variations temporelles de $C_{22}$ et de $S_{22}$ dues à l'effet des librations de la coquille et de l'intérieur, pour les différents modèles de structure interne d'Europe.

L'amplitude de libration de la coquille, $g_s R$, est comprise entre 500 et 40 000 m pour Europe et entre 15 et 355 m pour Ganymède. Elle est donc plus grande que dans le cas rigide. L'amplitude de libration de l'intérieur, $g_i R_i$, est comprise entre 25 et 95 m pour Europe et entre 2 et 5 m pour Ganymède. Elle est donc comparable à l'amplitude de libration du cas rigide.

Par conséquent, les librations de l'intérieur ont une influence (voir figure 3.6 pour Europe) sur les variations temporelles de $C_{22}$ et $S_{22}$ similaire à ce qui a été calculé dans le cas rigide, c'est-à-dire très faible. Par contre, les librations de la coquille ont un effet 10000 et 100 fois plus importants sur $C_{22}$ et $S_{22}$, respectivement, et vont masquer l'effet dû aux librations de l'intérieur. On peut donc espérer que les librations de la coquille pourront être détectées grâce à leur effet sur le champ gravitationnel (voir chapitres 6 et 7). L'amplitude de libration de la coquille pourrait également être estimée en comparant des images d'éléments de la surface prises à des moments différents (voir Pfyffer et al. 2011 pour une étude de faisabilité concernant Mercure). Nous allons donc nous concentrer sur le lien entre les librations de la coquille et la structure interne, en particulier l'épaisseur de la coquille de glace.

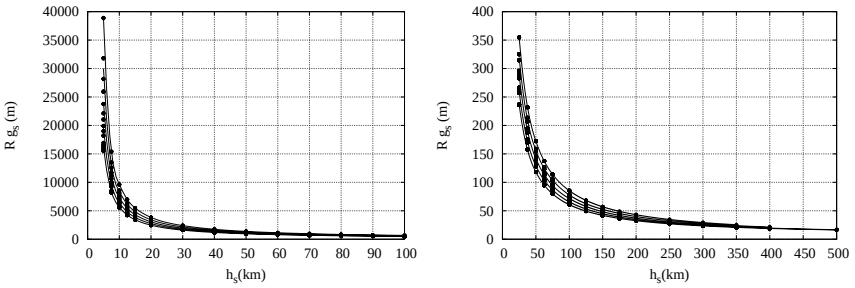


FIG. 3.7 – Amplitude de libration à l'équateur de la coquille ($R\,g_s$) en fonction de l'épaisseur de la coquille de glace ($h_s$), pour les différents modèles de structure interne d'Europe et de Ganymède.

Pour Europe (figure 3.7, gauche), l'amplitude de libration de la coquille $g_s R$ est très grande pour un coquille très mince. Cela est dû à une résonance de la fréquence de forçage avec une des fréquences des modes propres. En effet, la solution $g_s$ a au dénominateur les facteurs $(n^2 - \sigma_1^2)$ et $(n^2 - \sigma_2^2)$. Si $n$ est très proche de $\sigma_1$ ou $\sigma_2$, la valeur de $g_s$ sera amplifiée. Les graphes des périodes correspondant aux modes propres (figure 3.8) montrent que la résonance se produit avec $\sigma_1$. Le premier mode propre correspond à une coquille et un intérieur oscillant dans des directions opposées, c'est-à-dire découplés. On peut considérer que pour $h_s > 30$ km, on est loin de la résonance.

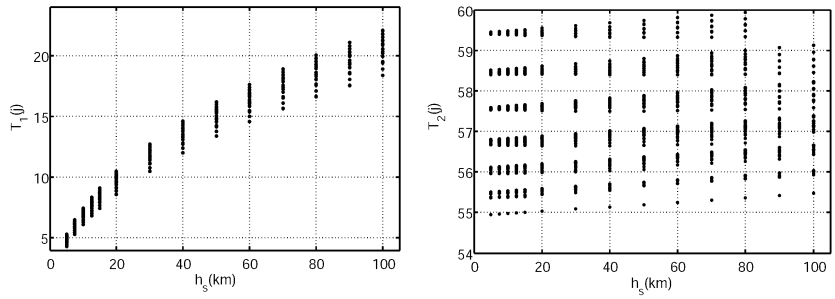


FIG. 3.8 – Périodes $T_1$ et $T_2$ correspondant aux fréquences propres $\sigma_1$ et $\sigma_2$ pour Europe.

Pour les deux satellites, l'amplitude de libration de la coquille, $g_s R$, pour les modèles hors résonance, dépend fortement de l'épaisseur de la coquille (figure 3.7). Mais les modèles se répartissent en 5 familles, ce qui indique une

dépendance par rapport à d'autres paramètres de la structure interne. Il s'agit de la différence entre la densité de l'océan et celle de la coquille. Plusieurs approximations sont possibles pour $g_s$ et permettent de confirmer ces différentes dépendances :

- En effet, en dehors de toute résonance, $\sigma_{1,2}^2 \ll n^2$, et pour tous les modèles des balayages pour Europe et Ganymède, une comparaison numérique des ordres de grandeur montre que $2(K_s + K_i)K_{int} + 2K_iK_s \ll C_iK_sn^2$. On a alors
$$g_s \approx -\frac{4eK_s}{n^2C_s} = -6e\frac{(B_s - A_s) + (B_{o,t} - A_{o,t})}{C_s}. \tag{3.37}$$
Cette équation montre que la coquille se comporte presque comme un corps rigide isolé devant le couplage externe de Jupiter, mais avec un petit effet supplémentaire qui provient de la pression à l'intérieur de l'océan, via le terme $(B_{o,t} - A_{o,t})$.

- De plus, pour $h_s << R$ , on obtient $C_s \simeq \frac{8\pi}{3}\rho_s R^4 h_s$ et
$$g_s \approx -\frac{6}{5}e\frac{\left(\rho_s\beta_s R^5 + (\rho_o - \rho_s)\beta_o R_o^5\right)}{\rho_s R^4 h_s}, \tag{3.38}$$
ce qui confirme la dépendance de l'amplitude de libration de la coquille par rapport à l'épaisseur de la coquille $h_s$ et, dans une moindre mesure, par rapport à la différence entre la densité de l'océan et de la coquille $(\rho_o - \rho_s)$.

- Si en plus on considère $\rho_s = \rho_o$, puisque la différence entre ces deux densités est petite pour les modèles du balayage, on arrive à
$$g_s \approx -\frac{6eR\beta_s}{5h_s}, \tag{3.39}$$
où $h_s$ est le seul paramètre dépendant de la structure interne. En conclusion, l'amplitude $g_s$ dépend principalement de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$.

Ces différentes approximations ne peuvent malheureusement pas être utilisées pour une modélisation précise des librations. La seconde (équation 3.38) et la troisième (équation 3.39) approximations tendent à sous-estimer $g_sR$ de quelques dizaines, voire quelques centaines de mètres. Par contre, leur comportement vis-à-vis de $h_s$ est similaire à celui de la solution exacte. Elles permettent donc d'estimer l'erreur sur la détermination de l'épaisseur de la coquille de glace qui provient de l'erreur sur la mesure des librations. A partir de la dernière approximation, on trouve :
$$\sigma_{h_s} \approx \left|\frac{\sigma_{g_s}}{\partial_{h_s} g_s}\right| = \left|\frac{h_s}{g_s}\sigma_{g_s}\right|. \tag{3.40}$$

Pfyffer et al. (2011) ont montré qu'avec la résolution de 2.5 arc-secondes (as) par pixel de la caméra haute résolution (HRIC) qui sera embarquée sur le MPO (Mercury Planetary Orbiter) de la mission BepiColombo, l'erreur sur la détermination de l'amplitude de libration de Mercure sera de 1.4 as. Le rayon de Mercure est de 2440 km et les librations seront donc déterminées avec une erreur de l'ordre de 17 m. Cette erreur est du même ordre de grandeur que la précision sur les images qui est de 5 à 18 m par pixel, car l'altitude du MPO varie entre 400 et 1500 km. L'orbiteur[9] qui sera envoyé vers Ganymède ou Europe devrait avoir une caméra haute résolution (0.02 mrad ou 4.1 as par pixel) qui permettrait d'obtenir une précision de l'ordre de quelques mètres sur les images pour une altitude basse ($\sim$ 200km). En extrapolant, on peut donc espérer une erreur sur la détermination des librations qui soit du même ordre de grandeur.

Pour une erreur $\sigma_{g_s}$ de 1 m, on obtient à partir de l'équation (3.40) une précision sur $h_s$ de l'ordre d'une centaine de mètres et de quelques km pour Europe et Ganymède, respectivement (voir la figure 9 de Baland et Van Hoolst 2010, en annexe F). Malheureusement, une erreur additionnelle provient de l'hypothèse $\rho_s = \rho_o$ et sera de l'ordre de 10 km pour Europe et de l'ordre de 20 km pour Ganymède, si l'incertitude sur $(\rho_o - \rho_s)$ est de 200 kg/m$^{-3}$. Cette erreur domine celle liée à l'erreur de mesure sur les librations.

L'amplitude de libration de l'intérieur, $g_i$, ne sera probablement pas mesurable, puisque son effet est masqué par les librations de la coquille. De plus, elle ne dépend que très peu de l'épaisseur de la coquille de glace.

L'introduction des paramètres liés à la rotation $g_s$ et $g_i$ a également entraîné l'introduction du paramètre $C_{22}^s$ dans l'expression des coefficients du second degré du champ gravitationnel statique (équations 1.24-1.25). Ce paramètre est défini de la façon suivante

$$C_{22}^s = \frac{(B_s - A_s) + (B_{o,t} - A_{o,t})}{4\mathcal{M}R^2}$$

ou encore, en utilisant l'équation (56) de Van Hoolst et al. (2008),

$$\begin{aligned} C_{22}^s &= \frac{2\pi}{15\mathcal{M}R^2}(\rho_s R^5 \beta_s + (\rho_o - \rho_s) R_o^5 \beta_o) \\ &\simeq \frac{2\pi\beta_s}{15\mathcal{M}R^2}(\rho_o R^5 - 5(\rho_o - \rho_s) R^4 h_s). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Il dépend principalement de la densité de l'océan, et dans une moindre mesure de la différence de densité entre l'océan et la coquille et de l'épaisseur de la coquille.

[9] La mission EJSM comprenait un orbiteur pour Europe (JEO) et un orbiteur pour Ganymède (JGO). La mission actuellement à l'étude (JUICE) ne comprend que l'orbiteur JGO, mais des changements sont encore possibles.

## 3.2 L'état de Cassini

Imaginons que nous observions la rotation d'un satellite synchrone, depuis un référentiel inertiel, sur une échelle de temps correspondant à la précession moyenne de l'orbite du satellite. Les variations de la vitesse de révolution dues à l'excentricité, et les librations qui leur sont associées, sont beaucoup plus rapides que la variation de l'orientation de l'orbite due à la précession. Ces variations rapides seront difficiles à percevoir[10] et on aura l'impression que la vitesse de rotation est constante[11]. Ce qui nous intéresse alors est l'orientation de l'axe de rotation par rapport au référentiel inertiel et par rapport au plan de l'orbite.

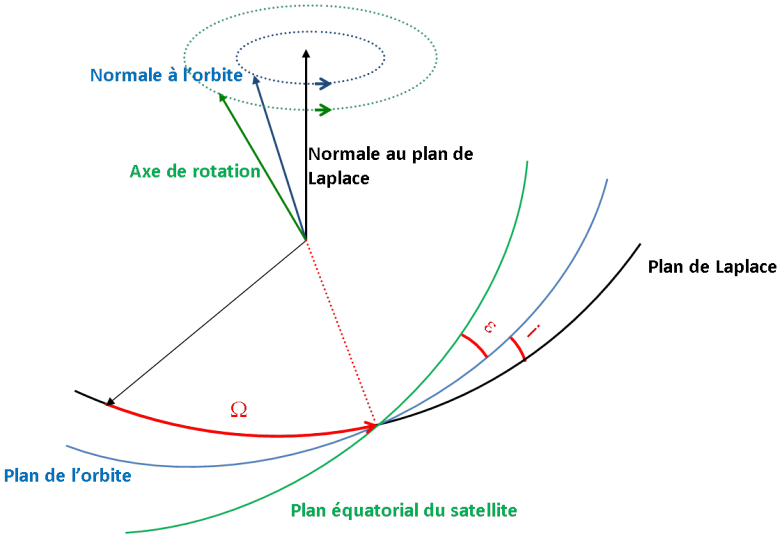


FIG. 3.9 – État de Cassini classique (cas de la précession uniforme)

Pour étudier cette orientation, on peut considérer que l'orbite est circulaire, puisque cela revient à annuler toutes les variations rapides. Par conséquent, la planète est toujours dans le plan défini par les axes A et C du satellite. On pourrait penser que l'axe A doit rester parfaitement orienté vers la planète. C'est-à dire que l'axe de rotation, confondu avec l'axe C, doit rester confondu avec la normale à l'orbite. Ou encore que l'*obliquité*, l'angle entre l'axe de rotation et la normale à l'orbite, est nulle. Mais ce serait oublier l'effet de la précession de

[10] Un peu comme si on filmait le mouvement d'un pendule, et que l'on visionnait ensuite le film en mode accéléré. Seule la position moyenne du pendule aurait encore une signification.

[11] En fait, les variations rapides sont moyennées dans l'équation du moment angulaire qui régit la rotation du satellite (voir par exemple Peale 2005 ou Henrard 2005, qui utilise un formalisme Hamiltonien).

l'orbite du satellite.

Le plan de l'orbite précesse autour d'une position moyenne, que l'on appelle[12] *plan de Laplace*. Ce dernier peut être considéré comme étant le plan équatorial d'un référentiel inertiel. Pour une précession uniforme telle que la précession moyenne, la longitude du nœud[13], $\Omega$, varie avec un taux constant et la normale à l'orbite décrit un cône autour de la normale au plan de Laplace (figure 3.9). L'ouverture angulaire de ce cône est l'inclinaison orbitale moyenne $i$ qui est constante.

Quelle est alors la trajectoire de l'axe de rotation ? A chaque instant la planète exerce un couple gravitationnel sur le satellite qui tend à ramener l'axe de rotation vers la normale à l'orbite, tandis que la normale à l'orbite s'éloigne de l'axe de rotation à cause de la précession. Il existe une configuration particulière, appelée *État de Cassini*, qui permet de conserver l'énergie (Hamiltonien) du système planète-satellite malgré ces deux effets, en stabilisant l'obliquité $\varepsilon$ à une valeur constante. Dans cet état, l'axe de rotation décrit aussi un cône autour de la normale au plan de Laplace, avec la même vitesse de précession que l'orbite. Cela revient à dire que l'axe de rotation, la normale à l'orbite et la normale au plan de Laplace restent coplanaires tout au long du mouvement de précession.

Intuitivement cette configuration n'est pas si surprenante. En effet, d'un côté, l'obliquité ne peut pas s'annuler puisque la précession orbitale ne s'arrête jamais. De l'autre côté, l'axe de rotation doit décrire une trajectoire dans l'espace telle que, si on considère une échelle de temps beaucoup plus grande que celle de la précession, on ait l'impression que les trois axes sont confondus en leur position moyenne. Une trajectoire conique similaire à celle de la normale à l'orbite, mais avec une inclinaison différente convient parfaitement.

Si on observe la rotation sur une échelle de temps plus petite que celle de la précession moyenne, mais toujours plus grande que celle de la révolution/rotation, on verra les variations de la précession elle-même. L'inclinaison orbitale n'est plus constante, de même que l'obliquité. De plus, la coplanarité entre les trois axe n'est plus vérifiée. Néanmoins, les positions moyennes de l'axe de rotation et de la normale à l'orbite sont toujours confondues avec la normale au plan de Laplace. La précession réelle peut être approximée par un développement

[12]Pour une étude du plan de Laplace dans le cas de la planète Mercure, le lecteur peut consulter Yseboodt et Margot (2006) ou D'Hoedt et al. (2009). Pour une application à Callisto, un des satellites galiléens, voir Noyelles et al. (2009).

[13]Dans le chapitre 1, la longitude du nœud et l'inclinaison par rapport au plan de Laplace sont notées $\Omega^*$ et $i^*$, pour réserver les notations $\Omega$ et $i$ aux valeurs fournies par les éphémérides et qui sont exprimées par rapport au plan équatorial de Jupiter. Dans le présent chapitre, nous considérons uniquement des angles exprimés par rapport au plan de Laplace et nous omettons volontairement les $(^*)$ par souci de simplicité.

en série, dont le terme principal correspond à la précession moyenne. On parle alors d'*État de Cassini multi-fréquence* pour l'orientation de l'axe de rotation. Ce modèle a été présenté dans un formalisme classique basé sur la résolution de l'équation du moment angulaire dans Bills (2005) pour les satellites galiléens considérés comme étant entièrement rigides. C'est ce modèle que nous allons utiliser par la suite dans la section suivante, avant de l'étendre au cas d'un satellite ayant un océan liquide interne.

### 3.2.1 État de Cassini pour un corps rigide

L'obliquité de l'état de Cassini peut être obtenue en minimisant l'Hamiltonien (énergie) du système Satellite-Planète, ou en résolvant l'équation du moment angulaire, exprimée dans un référentiel inertiel lié au plan de Laplace. C'est cette seconde approche que nous retenons car elle sera plus aisée à généraliser au cas d'un satellite ayant une couche liquide interne. Si on néglige le wobble, l'axe de rotation coïncide avec l'axe du moment d'inertie principal $C$ et l'équation du moment angulaire (voir Bills 2005) est donnée par

$$\begin{aligned} nC\frac{d\hat{s}}{dt} &= n\kappa(\hat{s}\wedge\hat{n}), \\ \kappa &= \frac{3}{2}\mathcal{M}R^2(-C_{20}+2C_{22})n = \frac{3}{2}(C-A)n, \end{aligned} \tag{3.42}$$

avec $\hat{s}=(s_x,s_y,s_z)$ et $\hat{n}=(n_x,n_y,n_z)$ les vecteurs unitaires dans la direction de l'axe de rotation et de la normale à l'orbite, respectivement, exprimés dans un repère lié au plan de Laplace. Les axes $x$ et $y$ de ce repère définissent le plan de Laplace, l'axe $x$ étant orienté selon le nœud du plan de Laplace sur le plan équatorial de Jupiter, et l'axe $z$ est orienté selon la normale à ce plan. Le membre de gauche de l'équation (3.42) est la dérivée du moment angulaire tandis que le membre de droite est le couple de force extérieur exercé par la planète. Puisque la planète est dans le plan défini par les axes $A$ et $C$ du satellite, le couple est proportionnel à la différence $(C-A)$. Le couple est également d'autant plus grand que l'obliquité $\varepsilon$ est grande. L'obliquité est bien présente dans l'expression du couple, via le produit vectoriel $(\hat{s}\wedge\hat{n})$ dont la norme est le sinus de l'obliquité. La dépendance du couple par rapport à la distance planète-satellite et par rapport à la masse de la planète est cachée dans le moyen mouvement $n=\sqrt{G\mathcal{M}_J/a_J^3}$.

La précession de l'orbite se traduit par une trajectoire quasi-conique du vecteur $\hat{n}$ dans l'espace et par un mouvement quasi-circulaire de la projection de $\hat{n}$ sur le plan de Laplace. Par conséquent, il est plus simple de résoudre l'équation du moment angulaire projetée sur le plan de Laplace,

$$\frac{dS}{dt} = I\frac{\kappa}{C}(N-S), \tag{3.43}$$

avec $S = (s_x + I s_y)$ et $N = (n_x + I n_y)$, les projections de $\hat{s}$ et $\hat{n}$, respectivement, sur le plan de Laplace ($I = \sqrt{-1}$). Cette équation est correcte au premier ordre en l'obliquité, l'excentricité et l'inclinaison, qui sont de petites quantités.

### Solution libre

L'équation (3.43) possède une solution libre que l'on peut trouver en moyennant le forçage, c'est-à-dire en considérant que le vecteur $\hat{n}$ occupe sa position moyenne. La position moyenne de $\hat{n}$ est perpendiculaire au plan de Laplace et est donc confondue avec l'axe $z$. Cela revient à poser $N = 0$ dans l'équation projetée sur le plan de Laplace. La fréquence de ce mode propre est donnée par

$$\omega_f = \frac{\kappa}{C} \tag{3.44}$$

et dépend de la structure interne du satellite et non de la précession de son orbite.

### Précession et inclinaison de l'orbite

Si la précession orbitale moyenne correspond à un mouvement circulaire de la projection de la normale à l'orbite sur le plan de Laplace, avec pour rayon le sinus de l'inclinaison moyenne, la précession réelle peut être exprimée comme une somme de mouvements circulaires :

$$N = \sum_j \sin i_j \, e^{I(\dot{\Omega}_j t + \gamma_j - \pi/2)}. \tag{3.45}$$

On a alors plusieurs *fréquences de précession* $\Omega_j$, associées avec leur phase $\gamma_j$ et plusieurs inclinaisons $i_j$ que l'on appellera *amplitudes d'inclinaison*. $\Omega_j$, $\gamma_j$ et $i_j$ peuvent être repris d'éphémérides exprimées sous forme synthétique (Lainey et al. (2006) pour les satellites galiléens ; Vienne et Duriez (1995) pour les satellites de Saturne). $\Omega_1$ et $i_1$ sont les fréquence de précession et inclinaison moyennes. En principe une telle série peut comprendre une infinité de termes. En pratique, elle s'arrête à $j = j_{max}$ selon la précision désirée.

L'inclinaison orbitale, qui n'est pas constante, et la longitude du nœud de l'orbite sont définis par :

$$i \cong \sin i = \|N\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}, \tag{3.46}$$

$$\Omega = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{Im(N)}{Re(N)} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{n_y}{n_x}. \tag{3.47}$$

**Solution forcée, obliquité et facteurs de résonance**

La solution forcée de l'équation (3.43) est

$$S = \sum_j \sin(i_j + \varepsilon_j)\, e^{I(\dot{\Omega}_j t + \gamma_j - \pi/2)}, \tag{3.48}$$

avec, au premier ordre en $\varepsilon_j$ et $i_j$ qui sont des petites quantités, les *amplitudes d'obliquité*

$$\varepsilon_j = -\frac{i_j \dot{\Omega}_j}{\omega_f + \dot{\Omega}_j}. \tag{3.49}$$

L'amplitude d'obliquité $\varepsilon_1$ est l'obliquité constante de l'état de Cassini classique, dans lequel on considère que le précession n'a qu'une seule fréquence. Ici, l'obliquité réelle

$$\varepsilon \cong \sin\varepsilon = \|S - N\| = \sqrt{(s_x - n_x)^2 + (s_y - n_y)^2} \tag{3.50}$$

n'est pas constante, mais reste proche de $\varepsilon_1$ si les autres amplitudes d'obliquité ne sont pas amplifiées par une résonance. En effet, puisque la fréquence $\omega_f$ est positive, le dénominateur $(\omega_f + \dot{\Omega}_j)$ peut être proche de zéro pour des fréquences de précession $\Omega_j$ négatives. Cela mène alors à une amplification de $\varepsilon_j$. Cette amplification peut être caractérisée par ce que l'on va appeler par la suite des *facteurs de résonance* $fr_j$. Ces facteurs sont définis par :

$$fr_j = \max(|\omega_f|, |\dot{\Omega}_j|)/|\omega_f + \dot{\Omega}_j| \tag{3.51}$$

et sont d'autant plus grands que l'amplification est importante. Ils seront proches de l'unité dans le cas contraire.

**Déviation et longitude $\mu$**

Dans le cas où on considère plusieurs fréquences de précession, l'axe de rotation ne sera plus coplanaire avec le plan défini par les normales à l'orbite et au plan de Laplace. Ce plan, notons-le $P_{lap,orb}$, est défini par les vecteurs directeurs $(0,0,1)$ et $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ et sa normale est donc $\hat{p} = (-n_y/||N||, n_x/||N||, 0)$. L'angle de *déviation* $\delta$ est défini comme étant l'angle formé par le vecteur $\hat{s}$ par rapport au plan $P_{lap,orb}$, ou encore

$$\delta \cong \sin\delta = \cos(\pi/2 - \delta) = \hat{p}.\hat{s} = \frac{n_x s_y - n_y s_x}{||N||}. \tag{3.52}$$

L'obliquité $\varepsilon$ est définie par rapport à l'orbite. On peut également définir l'*inclinaison du spin* $\vartheta$ qui est l'inclinaison de l'axe de rotation par rapport à la normale au plan de Laplace (voir figure 3.10). De même, nous définissons l'angle

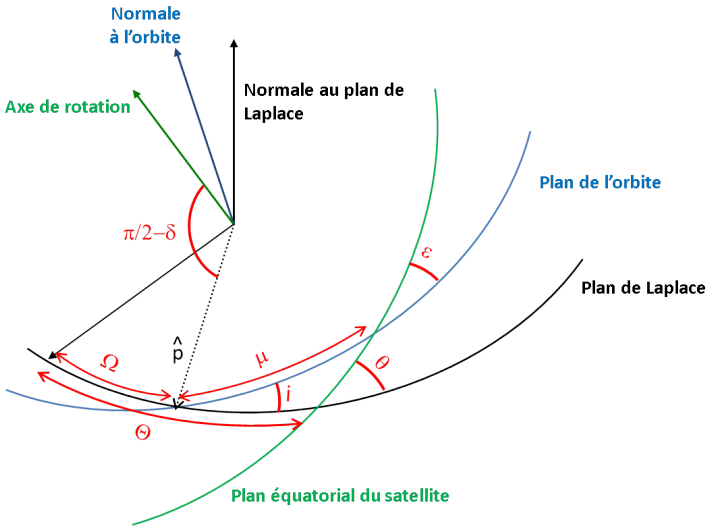


FIG. 3.10 – Les différents angles pour l'état de Cassini multi-fréquence.

$\Theta$ qui est la longitude du nœud du plan équatorial du satellite par rapport au plan de Laplace.

$$\vartheta \cong \sin\vartheta = \|S\| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}, \tag{3.53}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{s_y}{s_x}. \tag{3.54}$$

Grâce à la trigonométrie sphérique, on peut calculer la longitude du nœud du plan équatorial du satellite par rapport à l'orbite, $\mu$, comptée à partir du nœud de l'orbite par rapport au plan de Laplace, en considérant que les angles $\vartheta$ et $\varepsilon$ sont petits :

$$\sin\mu \cong \frac{\vartheta\sin(\Theta-\Omega)}{\varepsilon}. \tag{3.55}$$

Or, on peut montrer à partir des équations (3.47), (3.52), (3.53) et (3.54) que

$$\sin(\Theta-\Omega) \cong \delta/\vartheta \tag{3.56}$$

et donc que

$$\mu \cong \arcsin(\delta/\varepsilon). \tag{3.57}$$

Cette dernière équation quantifie le lien entre la déviation et la longitude $\mu$. On pouvait déjà observer à partir de la figure (3.10) que pour une valeur donnée de l'obliquité $\varepsilon$, du nœud $\Omega$ et de la déviation $\delta$, il n'existe qu'une seule solution pour l'inclinaison $\vartheta$ et les longitudes $\Theta$ et $\mu$. Si la déviation est du même ordre de grandeur que l'obliquité, suite à une amplification par résonance, la longitude $\mu$ peut être grande, même si les inclinaisons et obliquités restent petites.

| $j$ | $i_j$ (deg) | $\dot{\Omega}_j$ (rad/an) | $T_j$ (années) | $\gamma_j$ (deg) | $\varepsilon_j$ (deg) | $fr_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.463007 | −0.207903 | −30.2218 | −78.2534 | 0.0550361 | 1.11887 |
| 2 | 0.025215 | −0.0456245 | −137.175 | 52.9069 | 0.000601899 | 1.02387 |
| 3 | 0.00676408 | −0.0111626 | −562.877 | 203.887 | 0.0000388043 | 1.00574 |
| 4 | −0.00120351 | −0.845589 | −7.43054 | 21.945 | −0.000915706 | 1.76086 |
| 5 | −0.00117961 | −9.22056 | −0.681432 | −89.6391 | 0.00149742 | 1.26942 |
| 6 | 0.000831874 | 1.05936 | 5.93112 | 180.303 | −0.000292163 | – |
| 7 | 0.000210828 | −0.529634 | −11.8633 | −121.964 | 0.000078232 | 1.37107 |

TAB. 3.1 – Précession de l'orbite d'Europe (amplitudes d'inclinaison, fréquences, périodes et phases), amplitudes d'obliquité et facteurs de résonance pour le cas rigide. Dans Lainey et al. (2006), la précession orbitale est donnée dans un référentiel lié au plan équatorial de Jupiter et l'époque J1950 est utilisé comme temps de départ. Nous ne changeons pas la date de départ, mais nous exprimons la précession orbitale par rapport à un plan orbital moyen dont l'orientation est donnée par la partie constante de la décompositon fréquentielle donnée dans Lainey et al. (2006). Nous assimilons ce plan au plan de Laplace, bien que ce dernier puisse être défini de différentes façons (voir Noyelles et al, 2009 pour une discussion concernant le plan de Laplace de Callisto). D'après Lainey et al. (2006), notre plan de Laplace a un nœud de $\Omega_{LP} = 138.282557^\circ$ et une inclinaison ($i_{LP}$ appelée *tilt*) de $0.0190513^\circ$ par rapport au plan équatorial de Jupiter. Puisque le tilt est petit, les fréquences et amplitudes sont presque les mêmes si on les exprime par rapport au plan de Laplace ou au plan équatorial de Jupiter. L'axe x du repère lié au plan de Laplace est pris comme étant le nœud du plan de Laplace sur la plan équatorial de Jupiter.

| $j$ | $i_j$ (deg) | $\dot{\Omega}_j$ (rad/an) | $T_j$ (années) | $\gamma_j$ (deg) | $\varepsilon_j$ (deg) | $fr_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.182576 | −0.0456245 | −137.715 | 52.9125 | 0.0309606 | 1.16958 |
| 2 | 0.04026 | −0.0111624 | −562.888 | 203.898 | 0.00148066 | 1.03678 |
| 3 | −0.0165233 | −0.207903 | −30.2218 | −78.2478 | −0.0321738 | 2.94718 |
| 4 | 0.00180254 | 1.05936 | 5.93112 | 180.311 | −0.00138973 | – |
| 5 | 0.000288346 | −0.529633 | −11.8633 | −121.96 | −0.000710451 | 2.46388 |
| 6 | 0.000234188 | 0.529663 | 11.8626 | −37.1349 | −0.000146909 | – |
| 7 | 0.00020561 | 1.58901 | 3.95416 | 122.814 | −0.000171623 | – |
| 8 | 0.000156054 | −9.22056 | −0.681432 | −89.6335 | −0.000161568 | 1.03533 |

TAB. 3.2 – Précession de l'orbite de Ganymède (amplitudes d'inclinaison, fréquences, périodes et phases) et amplitudes d'obliquité et facteurs de résonance pour le cas rigide. Comme pour Europe (tableau 3.1), la précession orbitale est exprimée par rapport au plan de Laplace. La longitude du nœud du plan de Laplace par rapport au plan équatorial de Jupiter est de $138.276960^\circ$ et son tilt est de $0.0977821^\circ$.

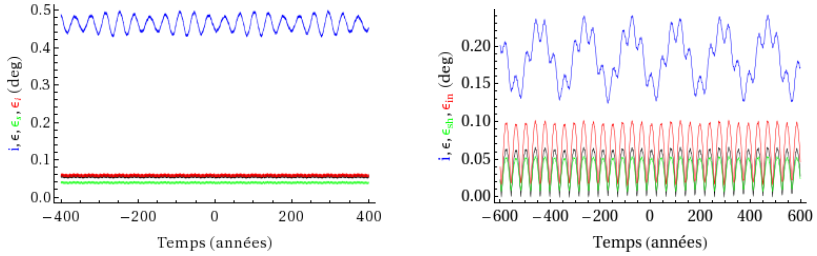


FIG. 3.11 – Inclinaison et obliquité d'Europe (gauche) et de Ganymède (droite) au cours du temps. L'inclinaison est en bleu. L'obliquité du cas rigide est en noir. L'obliquité de la coquille et de l'intérieur, pour les modèles de structure interne défini par les figures (2.2) et (2.3) sont en vert et en rouge, respectivement, dans le cas avec océan. Les courbes rouge et noir sont quasiment confondues pour Europe.

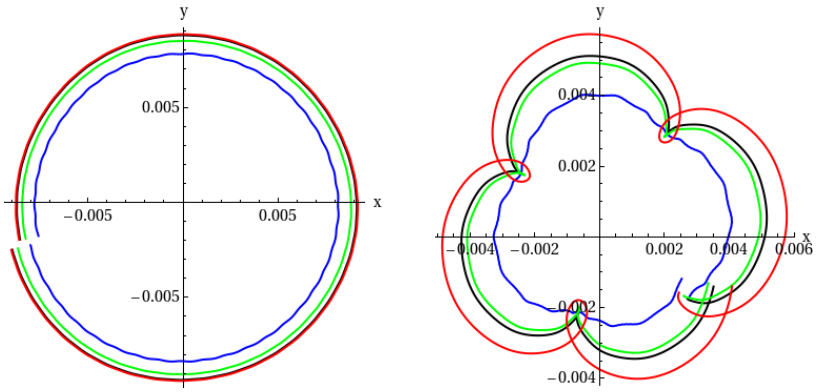


FIG. 3.12 – Projections de la normale à l'orbite (bleu) et de l'axe de rotation sur le plan de Laplace, pour Europe (gauche) et Ganymède (droite), sur une période correspondant à la période de précession moyenne (30 et 140 ans). Les courbes noires correspondent au cas rigide. Les courbes vertes et rouges correspondent à la coquille et à l'intérieur, respectivement, pour les modèles de structure interne défini par les figures (2.2) et (2.3), dans le cas avec océan. On voit que la coplanarité entre l'axe de rotation et les normales au plan de Laplace et à l'orbite est bien respectée pour Europe, mais pas pour Ganymède. Les courbes rouge et noir sont quasiment confondues pour Europe.

### Application à Europe et Ganymède

Les développements en série de la précession de l'orbite d'Europe et de Ganymède proviennent des éphémérides des satellites galiléens de Lainey et al.

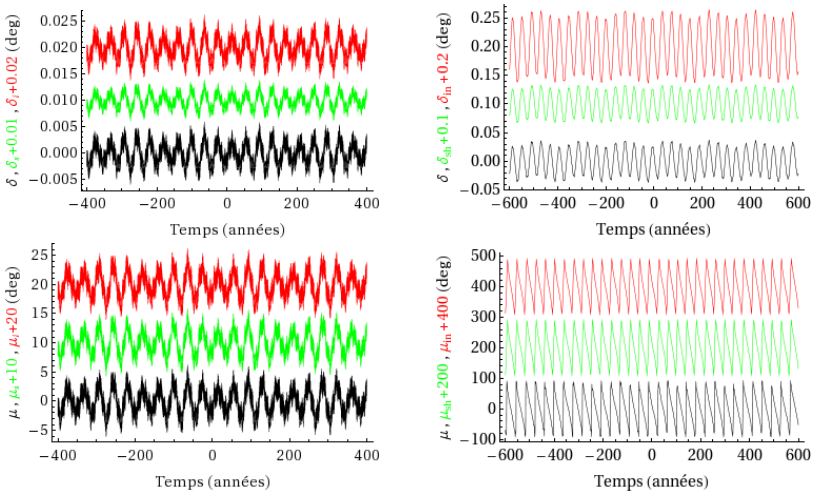


FIG. 3.13 – Déviations $\delta$ (haut) et longitude $\mu$ du plan équatorial du satellite (bas) pour Europe (gauche) et Ganymède (droite) au cours du temps. Les courbes noires correspondent au cas rigide. Les courbes vertes et rouges correspondent à la coquille et à l'intérieur, respectivement, pour les modèles de structure interne défini par les figures (2.2) et (2.3), dans le cas avec océan. Les courbes vertes et rouges ont été décalées vers le haut pour une meilleure lisibilité.

(2006). Les amplitudes d'obliquité correspondant à chaque terme du développement sont données dans les tableaux (3.1) et (3.2), pour Europe et Ganymède, respectivement.

La période du mode propre, $T_f$, est de 3.21 ans pour Europe. La période négative de précession la plus proche est celle du quatrième terme du forçage (et donc de la solution) pour lequel le facteur de résonance est de 1.76. Néanmoins, l'amplitude d'obliquité $\varepsilon_4$ est négligeable devant celle correspondant à la précession moyenne, $\varepsilon_1$, car l'amplitude d'inclinaison $i_4$ est faible. De manière générale, au plus $j$ sera grand, au plus $i_j$ sera petit, et au plus il faudra une grande valeur de $fr_j$ pour que $\varepsilon_j$ rivalise avec $\varepsilon_1$. Par conséquent, l'obliquité d'Europe dans le cas rigide reste proche de $\varepsilon_1 = 0.055^\circ$ (voir Figure 3.11, courbe noire). La variation au cours du temps autour de cette valeur sera de 6% au maximum. Pour Ganymède la période du mode propre est de 19.97 ans et permet une amplification significative de l'amplitude d'obliquité correspondant au troisième terme de la solution, $\varepsilon_3$. On observe alors une forte variation de l'obliquité au cours du temps (entre $0.003^\circ$ et $0.067^\circ$, voir figure 3.11).

Pour Europe, étant donné que la précession moyenne domine la solution, la

déviation $\delta$ est environ dix fois plus petite que l'obliquité et peut être négligée (figure 3.13). De plus, si on considère l'équation (3.57), vu que le rapport $\delta/\varepsilon$ est petit, la longitude $\mu$ du plan équatorial du satellite est relativement petite. En effet, elle est comprise entre $-5^\circ$ et $5^\circ$ peut être négligée dans les équations (1.20-1.23). La situation est différente pour Ganymède. A cause de l'amplification du troisième terme de la solution, la déviation peut être du même ordre que l'obliquité, et la longitude $\mu$ peut atteindre la valeur maximale de 90 degrés (Figure 3.13). Il en résulte que la coplanarité entre l'axe de rotation, la normale à l'orbite et la normale au plan de Laplace est quasiment respectée pour Europe, mais pas pour Ganymède (Figure 3.12).

### 3.2.2 Effet d'un océan interne global

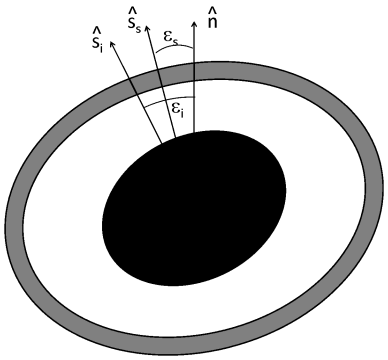


FIG. 3.14 – En présence d'un océan interne global, l'obliquité de la coquille et de l'intérieur peuvent être différentes.

Considérons maintenant un satellite, à l'équilibre hydrostatique, fait d'une coquille de glace (indicée par $s$, pour *shell*), d'un océan interne liquide ($o$, pour *ocean*) et d'un intérieur rigide ($i$ pour *interior*). L'orientation de l'axe de rotation de chaque couche peut être différente, comme illustré dans la figure (3.14).

Comme dans le cas des librations, des couplages internes gravitationnels et de pression vont s'exercer entre les différentes couches. Ces couples dépendront des rayons, densités et aplatissements des différentes couches. Leur calcul fait appel à des raisonnements similaires à ceux réalisés pour modéliser les librations d'un satellite avec un océan interne (section précédente). C'est pourquoi nous n'allons pas détailler[14] ce calcul ici. En résumé, la différence par rapport aux librations est que les couplages dépendent des facteurs $(C-A)$ et $(\alpha+\beta/2)$ des différentes couches. Comme pour les librations, le couple total sur l'océan est

[14]Pour plus de détails, voir Baland et al. (2011), repris dans l'annexe G

nul, en conséquence de l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique. Il ne reste alors que deux équations à résoudre, une pour la coquille et une pour l'intérieur :

$$C_s \frac{dS_s}{dt} = I\kappa'_s(N - S_s) - IK(S_i - S_s), \tag{3.58}$$

$$C_i \frac{dS_i}{dt} = I\kappa'_i(N - S_i) + IK(S_i - S_s), \tag{3.59}$$

avec $\kappa'_s$ et $\kappa'_i$ qui représentent l'intensité des couplages gravitationnels externes, modifiés par la pression, sur la coquille et l'intérieur, respectivement. $K$ représente l'intensité du couplage gravitationnel interne, modifié par la pression, entre la coquille et l'intérieur. $S_s$ et $S_i$ sont les projections sur le plan de Laplace des vecteurs unitaires de rotation de la coquille et de l'intérieur, qui s'expriment comme suit :

$$S_s = \sum_j (i_j + \varepsilon_{j,s}) e^{I(\dot{\Omega}_j t + \gamma_j - \pi/2)}, \tag{3.60}$$

$$S_i = \sum_j (i_j + \varepsilon_{j,i}) e^{I(\dot{\Omega}_j t + \gamma_j - \pi/2)}, \tag{3.61}$$

avec $\varepsilon_{j,s}$ et $\varepsilon_{j,i}$ les amplitudes d'obliquité de la coquille et de l'intérieur, données par

$$\varepsilon_{j,s} = \frac{i_j \dot{\Omega}_j (K(C_s + C_i) - C_s \kappa'_i - C_i\, C_s\, \dot{\Omega}_j)}{C_i C_s (\omega_+ + \dot{\Omega}_j)(\omega_- + \dot{\Omega}_j)}, \tag{3.62}$$

$$\varepsilon_{j,i} = \frac{i_j \dot{\Omega}_j (K(C_s + C_i) - C_i \kappa'_s - C_i\, C_s\, \dot{\Omega}_j)}{C_i C_s (\omega_+ + \dot{\Omega}_j)(\omega_- + \dot{\Omega}_j)}. \tag{3.63}$$

Les fréquences $\omega_+$ et $\omega_-$ correspondent aux deux modes propres du système d'équations (3.58-3.59). On peut également définir l'obliquité réelle de la coquille ($\varepsilon_s$) et de l'intérieur ($\varepsilon_i$), les facteurs de résonances $fr_j^{\pm}$, les déviations $\delta_s$ et $\delta_i$ et les longitudes $\mu_s$ et $\mu_i$ de la même manière que pour le cas rigide.

Pour Europe et Ganymède, nous allons calculer la solution pour l'ensemble des modèles de structure interne définis dans les tableaux (2.3) et (2.4) du chapitre 2. Nous discuterons de la possibilité de contraindre la structure interne du satellite, et en particulier l'épaisseur de la coquille de glace, à partir de la mesure des paramètres géophysiques liés à l'orientation des axes de rotation ($\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$, $\mu_s$, $\mu_i$, $C^s_{20}$ et $C^s_{22}$) et qui interviennent dans le potentiel gravitationnel statique de degré deux du satellite (voir chapitre 1).

### Application à Europe

La période du premier mode propre, $T_+$, est comprise entre 3.10 et 3.70 ans (figure 3.15). Cet intervalle contient la période du mode propre du cas rigide

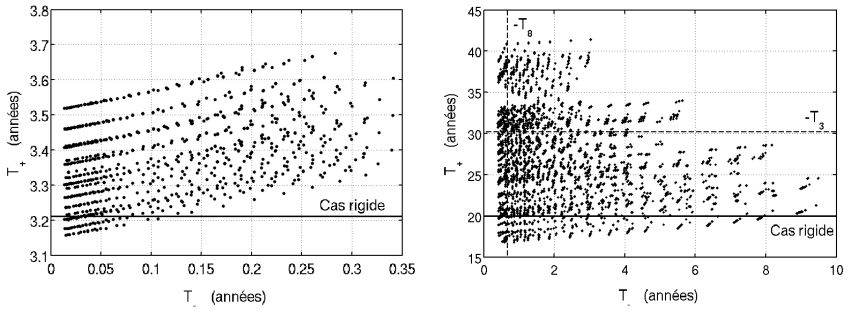


FIG. 3.15 – Périodes du premier mode propre, $T_+$, en fonction de la période du second, $T_-$, pour Europe (gauche) et Ganymède (droite). Chaque point correspond à un modèle de structure interne défini dans les balayages du chapitre 2 (voir tableaux 2.3 et 2.4). Les lignes continues correspondent à la période du mode propre dans le cas rigide, $T_f$. Pour Ganymède, les lignes en tirets correspondent aux périodes de forçage pour lesquelles la solution peut être amplifiée par une résonance.

(3.21 ans), ce qui est normal puisque le premier mode propre correspond au cas où l'intérieur et la coquille précessent librement en phase l'un avec l'autre, la précession libre rigide étant équivalente au cas particulier où les deux couches précessent avec la même amplitude. La période du second mode propre, $T_-$, est comprise entre 0.01 et 0.34 ans. Ce mode correspond au cas où les deux couches précessent librement en opposition de phase.

| $j$ | $T_j$ (années) | $\varepsilon_{j,sh}$ (deg) | $\varepsilon_{j,in}$ (deg) | $fr_j^+$ | $fr_j^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −30.2218 | 0.0383995 | 0.0581005 | 1.12308 | 1.00672 |
| 2 | −137.175 | 0.000419754 | 0.000633446 | 1.02464 | 1.00147 |
| 3 | −562.877 | 0.0000270603 | 0.0000408139 | 1.00592 | 1.00036 |
| 4 | −7.43054 | −0.000645517 | −0.000987146 | 1.80415 | 1.02790 |
| 5 | −0.681432 | 0.000801774 | 0.0015262 | 1.25905 | 1.42035 |
| 6 | 5.93112 | −0.000204683 | −0.00030368 | – | – |
| 7 | −11.8633 | 0.0000547434 | 0.0000832696 | 1.38731 | 1.01729 |

TAB. 3.3 – Solution détaillée pour le modèle de structure interne d'Europe de la figure (2.2).

Comme dans le cas rigide, les fréquences des modes propres ne sont pas suffisamment proches des fréquences de forçage pour obtenir une amplification significative des amplitudes d'obliquité par résonance. Par conséquent, les amplitudes d'obliquité correspondant à la précession moyenne, $\varepsilon_{s,1}$ et $\varepsilon_{i,1}$,

dominent la solution pour Europe. A titre d'exemple, nous donnons dans le tableau (3.3) la solution détaillée pour le modèle de structure interne de la figure (2.2). Les périodes de ses modes libres sont $T_+ = 3.312$ et $T_- = 0.202$ ans. La valeur moyenne de l'obliquité de la coquille et de l'intérieur ($0.038^\circ$ et $0.058^\circ$) sont respectivement plus petite et plus grande que la valeur moyenne de l'obliquité dans le cas rigide ($0.055^\circ$), comme on pourrait le constater pour des couches parfaitement découplées. L'obliquité de l'intérieur est relativement proche de celle du cas rigide car l'intérieur comporte la majeure partie de la masse d'Europe. La variation maximale dans le temps de l'obliquité de la coquille et de l'intérieur par rapport à leur valeur moyenne est de l'ordre de 6% ($0.002^\circ$ et $0.003^\circ$), comme dans le cas rigide (figure 3.11). La différence entre les variations temporelles des deux obliquités (coquille et intérieur) ou entre celles de la coquille et du cas rigide sera de l'ordre de $0.001^\circ$ car les variations sont en phase.

Cette prédominance du premier terme de la solution peut aussi être observée dans les figures (3.13) et (3.12) puisque les angles de déviation $\delta_s$ et $\delta_i$, environ dix fois plus petites que $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$, et les longitudes $\mu_s$ et $\mu_i$, de l'ordre de quelques degrés, peuvent être négligés, comme dans le cas rigide. Les angles $\mu_s$ et $\mu_i$ font en principe partie des paramètres géophysiques liés à la rotation définis dans le chapitre 1, mais nous pourrons ne pas les prendre en compte dans le cas d'une sonde en orbite autour d'Europe.

Par conséquent, nous nous intéressons uniquement à la dépendance des amplitudes d'obliquité $\varepsilon_{s,1}$ et $\varepsilon_{i,1}$ vis-à-vis de la structure interne, et en particulier, par rapport à l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$. Ces amplitudes ont tendance à être d'autant plus grandes que la coquille est épaisse (figure 3.16). Néanmoins, alors que l'amplitude de libration de la coquille, $g_s$, dépendait principalement de $h_s$, les amplitudes d'obliquité $\varepsilon_{s,1}$ et $\varepsilon_{i,1}$ dépendent également d'autres paramètres de la structure interne. En effet, différents modèles de structure interne ayant la même épaisseur $h_s$ peuvent avoir des valeurs très différentes de $\varepsilon_{s,1}$ et $\varepsilon_{i,1}$. Nous cherchons donc une solution approximée qui rende compte des principales dépendances par rapport aux paramètres libres du balayage des modèles de structure interne ($h_s$, $R_m$, $R_s$, $\rho_s$ et $\rho_o$,), comme nous l'avions fait pour $g_s$ (équation 3.38).

Puisque loin de la résonance, nous avons que $\dot{\Omega}_1 << \omega_\pm$, l'approximation de la solution (3.62-3.63) aura au dénominateur le produit $\omega_+\omega_- = (-K(\kappa'_i + \kappa'_s) + \kappa'_i\kappa'_s)/(C_iC_s)$. Dans ce produit on trouve la somme $(\kappa'_i + \kappa'_s)$ qui est égale à $\kappa$, l'intensité du couplage externe dans le cas rigide. De plus, pour tous les

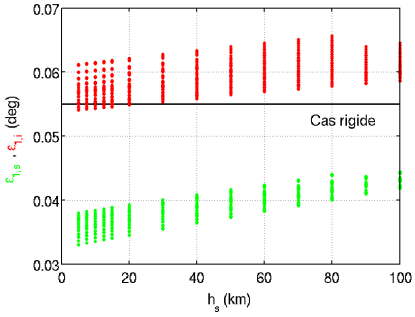


FIG. 3.16 – Amplitudes d'obliquités $\varepsilon_{s,1}$ et $\varepsilon_{i,1}$ pour Europe, en fonction de l'épaisseur de la coquille $h_s$, pour les différents modèles de structure interne défini dans le tableau (2.3).

modèles du balayage, $C_i\, C_s\, \dot{\Omega}_j << K(C_s + C_i)$, de sorte que :

$$\varepsilon_{j,s} \simeq \frac{i_j \dot{\Omega}_j (K(C_s + C_i) - C_s \kappa'_i)}{-K\kappa + \kappa'_i \kappa'_s}, \tag{3.64}$$

$$\varepsilon_{j,i} \simeq \frac{i_j \dot{\Omega}_j (K(C_s + C_i) - C_i \kappa'_s)}{-K\kappa + \kappa'_i \kappa'_s}. \tag{3.65}$$

Dans la solution approximée pour $g_s$, les termes contenant $K_{int}$, l'intensité du couplage interne modifié par la pression, étaient négligeables, ce qui menait à la conclusion que la coquille « libre » essentiellement comme un corps rigide découplé de l'intérieur (équation 3.37). De la même façon, si nous négligions les termes contenant $K$ dans les équations précédentes, nous arriverions à la conclusion que la coquille et l'intérieur précessent essentiellement comme des corps rigides découplés l'un de l'autre. Or, les termes contenant $K$ ne peuvent être négligés et la coquille et l'intérieur précessent essentiellement comme des couches couplées. Étant donné que la précession est un mouvement lent, on peut supposer que le couplage interne est plus efficace pour réaligner les différentes couches que dans le cas des librations, qui sont des variations rapides.

Revenons aux équations (3.64-3.65). Étant donné que $\alpha_m + \beta_m/2 \simeq \alpha_o + \beta_o/2 \simeq \alpha_s + \beta_s/2$ (voir par exemple la figure 2.2), que $\alpha$ et $\beta$ sont $<< 1$, que les termes contenant $R_c^5$ sont négligeables devant les termes qui contiennent $R_m^5$, et que $R_o^5 \simeq (R^5 - 5R^4 h_s)$, on trouve que

$$\varepsilon_{1,s} \simeq -i_1 \dot{\Omega}_1 \frac{32\pi G\rho_o[5\rho_s R^4 h_s + \rho_m R_m^5] + \frac{150 n^2 \rho_s R^4 h_s}{(\alpha_s + \beta_s/2)}}{60G\rho_o\kappa + 45n^3[\rho_o R^5 - 5(\rho_o - \rho_s)R^4 h_s]}, \tag{3.66}$$

$$\varepsilon_{1,i} \simeq -i_1 \dot{\Omega}_1 \frac{32\pi G\rho_o[5\rho_s R^4 h_s + \rho_m R_m^5] + \frac{30 n^2 [\rho_o R^5 - 5(\rho_o - \rho_s)R^4 h_s]\rho_m}{(\alpha_s + \beta_s/2)(\rho_m - \rho_o)}}{60G\rho_o\kappa + 45n^3[\rho_o R^5 - 5(\rho_o - \rho_s)R^4 h_s]}. \tag{3.67}$$

La densité du manteau, $\rho_m$, est calculée à partir des contraintes de masse $\mathcal{M}$, de rayon $R$ et de moment d'inertie $I$ et des paramètres libres du balayage. Après résolution des équations (2.14-2.15), puisque $R_c^5 << R_m^5$ et que $R_o^5 \simeq (R^5 - 5R^4 h_s)$, une expression approximée pour $\rho_m$ est donnée par

$$\rho_m \simeq \frac{-15I + 6\mathcal{M}R_c^2 + 8\pi[\rho_o(R^5 - R_m^5) - 5(\rho_o - \rho_s)R^4 h_s]}{8\pi R_m^3 (R_c^2 - R_m^2)}. \quad (3.68)$$

Avec cette expression pour $\rho_m$, la solution approximée (3.66-3.67) ne dépend plus que des paramètres libres du balayage. Les quantités $I$, $\mathcal{M}$, $R$, $\kappa$ et $(\alpha_s + \beta_s/2)$ ont la même valeur pour tous les modèles de structure interne considérés. Dès lors, la solution approximée dépend de façon non-négligeable de $\rho_s$, $\rho_o$, $h_s$, $R_m$ et $R_c$, c'est-à-dire de tous les paramètres libres du balayage.

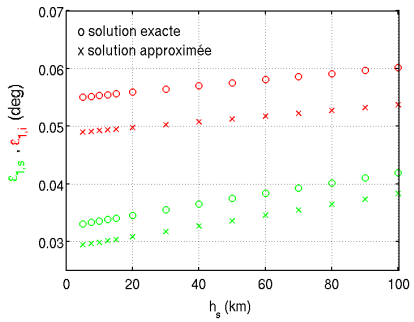


FIG. 3.17 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximée pour Europe, en fonction de l'épaisseur de la coquille $h_s$, pour $R_m$, $\rho_s$, $\rho_o$ et $R_c$ fixés aux valeurs du modèle de la figure 2.2.

La solution approximée ne peut pas être utilisée pour la modélisation précise de $\varepsilon_{1,s}$ et $\varepsilon_{1,i}$, car les approximations successives, et en particulier la première qui consistait à négliger toute amplification par résonance, conduisent à sous-estimer $\varepsilon_{1,s}$ d'environ $0.005^\circ$ et $\varepsilon_{1,i}$ d'environ $0.007^\circ$. Ces différences sont environ deux fois plus grandes que les variations temporelles des deux obliquités et ne peuvent donc être négligées. Par contre, le comportement de la solution approximée vis-à-vis des paramètres $h_s$, $R_m$, $\rho_s$, $\rho_o$ et $R_c$ est similaire à celui de la solution exacte car le fait de négliger l'amplification par résonance n'altère en rien la dépendance par rapport à ces paramètres si on est loin de la résonance exacte. En effet, si on fixe tous les paramètres sauf un, et que l'on trace les solutions exacte et approximée en fonction du dernier paramètre libre, on observe la même croissance ou décroissance (voir par exemple la figure 3.17 pour $h_s$ libre, les autres paramètres sont fixés aux valeurs du modèle de la figure 2.2).

Puisque la solution approximée a la même sensibilité aux paramètres libres du balayage que la solution exacte, nous en concluons que la solution exacte dépend significativement de chacun de ces paramètres. Par conséquent, la mesure de l'obliquité de la coquille ou de l'intérieur ne permettrait pas de contraindre les détails de la structure interne.

Il ne sera pas possible de retrouver les valeurs individuelles de $\varepsilon_s$ et de $\varepsilon_i$ à partir de leur effet cumulé sur l'observable Doppler, car leur effet individuels sont similaires (chapitre 6). Par contre, à partir d'images de la surface, il sera peut-être possible de mesurer l'obliquité de la surface du satellite, comme cela a été réalisé pour Titan (Stiles et al. 2008 et 2010) et pourra être fait pour Mercure (Pfyffer et al. 2011). Cette obliquité sera celle de la coquille si Europe possède un océan interne. En principe, pour peu que la précision sur les images soit grande (quelques mètres par pixel), il est possible d'obtenir une très grande précision sur la mesure de l'obliquité ($0.0001^\circ$). Mais l'incertitude sur l'orientation de l'orbite[15] du satellite pourrait entraîner une perte de précision d'un ou deux ordres de grandeur (voir Baland et al. 2011 pour une discussion des résultats de Stiles et al. pour Titan).

Si les détails de la structure interne ne peuvent pas être contraints par la mesure de l'obliquité de la surface, elle peut néanmoins apporter une preuve de la présence de l'océan liquide interne. La condition à satisfaire est que l'obliquité de la surface $\varepsilon_s^{mes}$ soit différente de l'obliquité calculée pour le cas rigide ($\simeq \varepsilon_1$), dans la limite des barres d'erreur au niveau 3-sigma ($|\varepsilon_1 - \varepsilon_s^{mes}| > 3\sigma_{\varepsilon_s}$). La différence $|\varepsilon_1 - \varepsilon_s^{mes}|$ est modélisée par $|\varepsilon_1 - \varepsilon_{1,s}|$ qui vaut[16] entre $0.0106^\circ$ et $0.0220^\circ$. La précision nécessaire pour établir la présence d'un océan interne est relativement faible ($\sigma_{\varepsilon_s}$ de l'ordre de $0.0035^\circ$ à $0.0073^\circ$) et pourrait donc être atteinte lors d'une détermination de l'obliquité par des images de la surface.

En prenant en compte l'orientation des axes de rotation pour l'expression des coefficients du potentiel gravitationnel statique de degré deux (chapitre 1), nous avons également introduit, en plus des obliquité $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$ et des longitudes $\mu_s$ et $\mu_i$, les paramètres géophysiques liés à la rotation $C_{20}^s$ et $C_{22}^s$. Nous avons déjà considéré $C_{22}^s$ à cause des librations et nous sommes arrivés à la conclusion que ce coefficient ne dépend pas principalement de l'épaisseur de la coquille de glace, mais de la densité de l'océan. Il en va de même pour le coefficient $C_{20}^s$,

[15] Notons que les éphémérides du satellite naturel, et donc l'orientation de son orbite, seront peut-être déterminées avec une meilleure précision grâce à la mesure des variations de la distance de la sonde (ranging).

[16] Négliger la différence de $0.001^\circ$ entre les variations temporelles de l'obliquité de la coquille et de l'obliquité rigide est alors justifié.

dont l'expression est la suivante

$$C_{20}^{s} = -\frac{8\pi}{15\mathcal{M}R^2}(\rho_s R^5 \alpha_s + (\rho_o - \rho_s) R_o^5 \alpha_o) \quad (3.69)$$

$$\simeq -\frac{8\pi\alpha_s}{15\mathcal{M}R^2}(\rho_o R^5 - 5(\rho_o - \rho_s) R^4 h_s). \quad (3.70)$$

**Application à Ganymède**

Pour les modèles de structure interne définis par le tableau (2.4), la période $T_+$ est comprise dans l'intervalle $17-42$ ans, qui contient la valeur du cas rigide (19.97 ans). La période $T_-$ est comprise entre 0.04 et 9.5 ans. En traçant le graphe de $T_+$ en fonction de $T_-$, on peut déterminer facilement quelles sont les possibilités de résonance (Figure 3.15) :

- Comme dans le cas rigide, on peut obtenir une amplification pour le troisième terme de la solution grâce au premier mode propre. Mais cette amplification peut être très importante. En principe, pour un modèle de structure interne choisi dans ce but, cette amplification pourrait même mener à une amplitude d'obliquité infinie, mais ce ne serait pas physiquement réaliste. En effet, au-delà de quelques degrés, notre modèle n'est plus valide car nous avons pris comme hypothèse que les amplitudes d'obliquité sont de petites quantités. De plus rien n'indique à ce jour que l'obliquité de Ganymède puisse être très grande.

- Il est possible de rencontrer plusieurs résonances pour un même modèle de structure interne. En effet, un modèle peut être à la fois tel que $\omega_-$ soit suffisamment proche de $-\dot{\Omega}_8$ pour que les amplitudes $\varepsilon_{8,s}$ et $\varepsilon_{8,i}$ rivalisent avec $\varepsilon_{1,s}$ et $\varepsilon_{1,i}$, et tel que $\omega_+$ soit suffisamment proche de $-\dot{\Omega}_3$ pour amplifier significativement $\varepsilon_{3,s}$ et $\varepsilon_{3,i}$. Par conséquent, la solution peut être dominée, en plus du terme correspondant à la précession moyenne, par un ou deux ou trois autres termes, en fonction du nombre d'amplifications significatives rencontrées.

Nous donnons dans le tableau (3.4) la solution détaillée pour le modèle de structure interne de la figure (2.2). Les périodes de ses modes libres sont $T_+ = 23.15$ et $T_- = 2.023$ ans. On observe une résonance significative avec la troisième période du forçage. Cette amplification est plus prononcée que dans le cas rigide car $T_+$ est plus proche de la troisième période de forçage (30.22 ans) que $T_f$, période du mode libre du cas rigide. L'obliquité de la coquille varie entre $0.006^\circ$ et $0.055^\circ$, tandis que l'obliquité de l'intérieur varie entre $0.014^\circ$ et $0.103^\circ$ (figure 3.11). A cause de cette résonance, la déviation peut être de l'ordre de l'obliquité et l'angle $\mu$ peut atteindre jusqu'à $90^\circ$ (figures 3.13 et 3.12). En fait, l'amplitude du troisième terme de la solution joue un rôle important car son facteur de résonance $fr_3^+$ est égal à 4.27. Mais même si le facteur de résonance

| $j$ | $T_j$ (années) | $\varepsilon_{j,sh}$ (deg) | $\varepsilon_{j,in}$ (deg) | $fr_j^+$ | $fr_j^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −137.715 | 0.0215409 | 0.0397609 | 1.20210 | 1.01491 |
| 2 | −562.888 | 0.00101622 | 0.00185951 | 1.04290 | 1.00361 |
| 3 | −30.2218 | −0.0303344 | −0.058556 | 4.27558 | 1.07175 |
| 4 | 5.93112 | −0.000996145 | −0.00151672 | – | – |
| 5 | −11.8633 | −0.000298963 | −0.000645813 | 2.05078 | 1.20560 |
| 6 | 11.8626 | −0.000100598 | −0.000164959 | – | – |
| 7 | 3.95416 | −0.000127973 | −0.000184496 | – | – |
| 8 | −0.681432 | −0.000194276 | −0.000154546 | 1.03032 | 1.50789 |

TAB. 3.4 – Solution détaillée pour le modèle de structure interne de Ganymède de la figure (2.3).

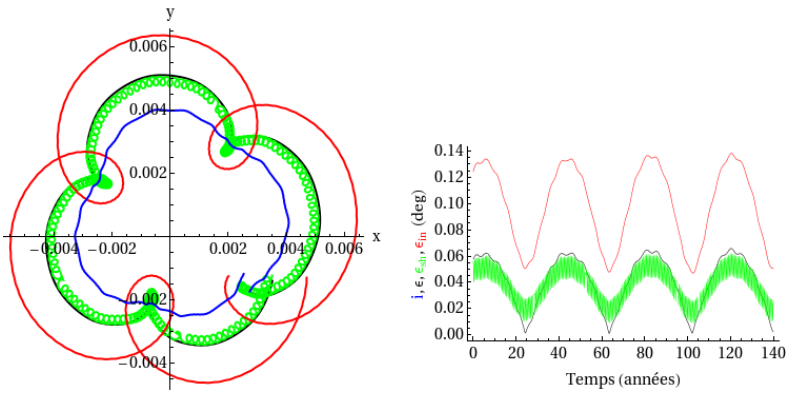


FIG. 3.18 – Gauche : projections des trajectoires de la normale à l'orbite (bleu), de l'axe de rotation de la coquille (vert) et de l'intérieur (rouge) dans le plan de Laplace et sur une période correspondant à la période de précession moyenne (140 ans), pour un modèle de structure interne présentant une résonance avec le huitième terme du forçage. Les périodes libres du modèle sont $T_+ = 25.56$ et $T_- = 0.6896$ ans. Droite : obliquités de l'axe de rotation de la coquille (vert) et de l'intérieur (rouge) correspondant aux trajectoires de la figure de gauche. La courbe noire correspond à l'obliquité du cas rigide.

$fr_3^+$ peut être petit (sa valeur minimale pour les modèles de structure interne du balayage défini par le tableau 2.4 est de 2.25), tous les modèles de structure interne considérés (balayage du tableau 2.4) présentent une amplification significative de $\varepsilon_{3,s}$ et $\varepsilon_{3,i}$ et l'obliquité de la coquille et de l'intérieur varient entre deux valeurs fort éloignées l'une de l'autre (voir figure 3.19).

Les trajectoires des axes de rotation pour les différents modèles de structure interne envisagés peuvent être très variées, à cause de l'amplification de cer-

tains termes de la solution. La trajectoire, pour un modèle présentant en plus de l'amplification du troisième terme, une amplification du huitième terme, est présentée dans la figure (3.18).

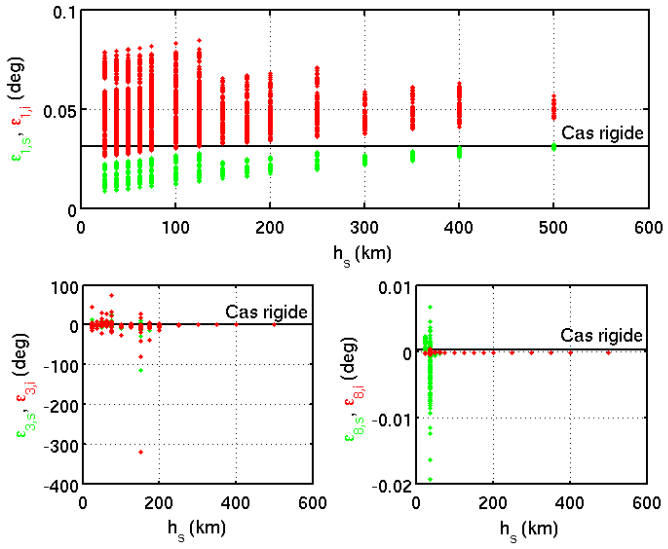


FIG. 3.19 – Amplitudes d'obliquité susceptibles de dominer la solution pour Ganymède ($\varepsilon_{1,s/i}$, $\varepsilon_{3,s/i}$, $\varepsilon_{8,s/i}$), en fonction de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$, pour les différents modèles de structure interne définis dans le tableau (2.4).

Comme pour Europe, aucune des amplitudes d'obliquité susceptibles de dominer la solution dans le cas avec océan ne dépend principalement de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$ (figure 3.19). Il est donc impossible de déterminer $h_s$, ou tout autre paramètre de la structure interne, à partir de la mesure de l'obliquité de la coquille. Même en considérant la mesure simultanée de l'obliquité et de la déviation (ou ce qui revient au même, de la longitude $\mu_s$, voir équation 3.57), plusieurs modèles de structure interne, très différents les uns des autres, permettraient, dans les limites de la barre d'erreur, de coller[17] aux observations. De la même façon, la mesure de l'obliquité de l'intérieur et de sa déviation (et donc de sa longitude $\mu_i$) ne permettrait pas de contraindre la structure interne.

[17] C'est le cas de Titan pour lequel la mesure de l'obliquité et de la déviation de la coquille ne permet pas de contraindre la structure interne, à cause d'un résonance (Baland et al., 2011).

Et donc, comme pour Europe, la mesure de l'obliquité de la surface à un instant donné peut seulement aider à déterminer la présence éventuelle d'un océan interne. En présence d'un océan et en un temps donné, l'obliquité de Ganymède peut être plus petite ou plus grande que dans le cas rigide (figure 3.18). Pour déterminer la présence d'un océan, il faut que l'obliquité mesurée en un temps donné soit différente de l'obliquité du cas rigide pour le même temps, dans la limite des barres d'erreur au niveau 3-sigma. Par exemple, au $1^{er}$ janvier 2030, l'obliquité de la coquille pour le modèle de structure interne de la figure (2.3) est de $0.052^{\circ}$. Imaginons que cette valeur soit la valeur mesurée, avec une barre d'erreur $\sigma_{\varepsilon_s}$. Il faut que $\sigma_{\varepsilon_s} < 0.004^{\circ}$ pour pouvoir affirmer qu'un océan est présent, car la valeur du cas rigide est de $0.063^{\circ}$. Cette précision est du même ordre que celle requise pour déterminer la présence d'un océan pour Europe. Néanmoins, la précision requise peut être plus faible et il peut être facile de détecter la présence d'un océan à l'intérieur de Ganymède, pour peu que le temps de la mesure et la structure interne réelle correspondent à une valeur éloignée de la valeur du cas rigide.

Enfin, comme pour Europe, les paramètres géophysiques liés à la rotation $C^s_{20}$ et $C^s_{22}$ ne dépendent pas principalement de l'épaisseur de la coquille de glace, mais de la densité de l'océan.

# Deuxième partie

# Problème direct

# Chapitre 4

# Perturbations des éléments orbitaux de la sonde

## Sommaire


**4.1 Équations du mouvement . . . . . 86**
**4.2 Équations de Lagrange . . . . . 87**
4.2.1 Orbite keplerienne . . . . . 87
4.2.2 Orbite perturbée . . . . . 88
**4.3 Potentiels perturbateurs . . . . . 90**
4.3.1 Potentiel perturbateur statique $\mathcal{R}_{gr}$ . . . . . 90
4.3.2 Potentiel perturbateur de marée $\mathcal{R}_{tid}$ . . . . . 91
4.3.3 Potentiel perturbateur de troisième corps (Jupiter) $\mathcal{R}_J$ . . . . . 93
**4.4 Intégration numérique des équations de Lagrange 93**
**4.5 Intégration analytique : méthode de Kaula . . . . 95**
**4.6 Méthode de Kaula modifiée . . . . . 97**
4.6.1 Solution primaire . . . . . 98
Résolution de l'équation pour $a_S$ : . . . . . 99
Résolution de l'équation pour $i_S$ : . . . . . 100
Résolution de l'équation pour $\Omega_S$ : . . . . . 103
Résolution de l'équation pour $\omega_S$ : . . . . . 104
Résolution de l'équation pour $e_S$ : . . . . . 105
Résolution de l'équation pour $M_S$ : . . . . . 106
4.6.2 Solution additionnelle . . . . . 107
4.6.3 Solution approximée . . . . . 107
**4.7 Validité de la nouvelle méthode d'intégration . . 108**
4.7.1 Date . . . . . 108
4.7.2 Demi-grand axe, excentricité et inclinaison . . . . 108

4.7.3 Longitudes du nœud, du péricentre et anomalie moyenne113
4.7.4 Ganymède . . . . . 113
**4.8 Effet des paramètres liés à la rotation . . . . . 114**
**4.9 Effet de la dissipation . . . . . 115**

Dans la première partie, nous avons étudié les paramètres géophysiques et leur lien avec la structure interne des satellites Europe et Ganymède. Dans cette seconde partie, nous allons établir comment ces paramètres influencent le décalage Doppler sur le signal radio émis par une sonde en orbite autour d'un de ces satellites et reçu par une station d'observation située sur Terre. La première étape, qui est le sujet du présent chapitre, est de déterminer l'influence des paramètres géophysiques sur la trajectoire de la sonde décrite par ses éléments orbitaux.

## 4.1 Équations du mouvement

La trajectoire de la sonde doit être décrite dans un repère supposé connu, à savoir un repère centré au centre de masse du satellite et d'axes fixes dans l'espace. Le plan défini par les axes x et y est confondu avec le plan orbital du satellite naturel. L'axe x est orienté dans la direction de l'intersection du plan orbital et de l'équateur de L'ICRF. Ce repère sera nommé **RO** pour **R**epère-**O**rbite. Il s'agit de la version fixe du ROT (Repère Orbite Tournant) défini dans le chapitre 1. Son orientation est donnée dans les rapports de l'IAU (Seidelmann et al. 2007 et Archinal et al. 2011), sur base des éphémérides de Lieske (1998). Elle peut être recalculée plus précisément à partir d'éphémérides plus récentes des satellites galiléens (Lainey et al. 2006), comme nous le verrons dans la section (5.2).

Dans ce repère, la position et la vitesse du satellite à tout instant peuvent être décrites par les coordonnées cartésiennes $\vec{r} = (x, y, z)$ et leur dérivée temporelle $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. La trajectoire est alors la solution de l'équation de la dynamique

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{4.1}$$

où $m$ est la masse de la sonde, $\ddot{\vec{r}}$ est son accélération et $\vec{F}$ est l'ensemble des forces qui s'appliquent sur la sonde. Si on considère que les forces $\vec{F}$ dérivent d'un potentiel $U$, il faut intégrer un système de trois équations différentielles du second ordre

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.2}$$

Pour intégrer le système (4.2), nous avons besoin de six conditions initiales (les composantes de la position et de la vitesse de la sonde au temps zéro de

l'intégration) et de connaître les forces prises en compte.

Il existe une force gravitationnelle due à l'attraction du satellite naturel et qui dépend des paramètres géophysiques définis dans le chapitre 1. Une autre force gravitationnelle est due à l'attraction directe de Jupiter sur la sonde. Des forces non gravitationnelles dues à la pression de radiation solaire sur les différentes surfaces de la sonde, au frottement éventuel avec la haute atmosphère du satellite naturel, ou aux accélérations résultants des manœuvres effectuées par la sonde, peuvent également intervenir. Si toutes ces forces sont considérées, le système (4.2) doit être intégré numériquement car il n'existe pas de solution analytique exacte. Le temps de calcul est alors élevé et la recherche d'une configuration de mission intéressante pour la détermination des paramètres géophysiques est difficile à réaliser. Cette approche devrait être réservée à l'analyse de données réelles ou à un affinement des résultats obtenus avec une solution analytique approximée. Cette dernière est obtenue en se limitant aux premiers termes des développements en harmonique sphérique des forces gravitationnelles et en négligeant les forces non gravitationnelles. Nous allons donc considérer uniquement l'approche analytique et les forces gravitationnelles par la suite.

## 4.2 Équations de Lagrange

### 4.2.1 Orbite keplerienne

La trajectoire de la sonde est proche d'une orbite keplerienne, c'est-à-dire de la trajectoire en forme d'ellipse du problème à deux corps où ces derniers sont deux masses ponctuelles isolées du monde extérieur, orbitant autour de leur centre de gravité commun. La masse de la sonde étant négligeable devant celle du satellite naturel, on peut considérer que le centre de masse du système est confondu avec celui du satellite. Le potentiel du système (4.2) est la partie centrale du potentiel gravitationnel du satellite et s'écrit

$$U = \frac{G\mathcal{M}}{r} \tag{4.3}$$

et ne dépend donc pas des paramètres géophysiques et de la présence de Jupiter. Plutôt que de décrire la position et la vitesse avec les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$, on préfère utiliser des quantités en rapport avec la forme particulière de la trajectoire, et appelées *éléments orbitaux* (figure 4.1). Les éléments orbitaux[1] décrivant les dimensions et la forme de cette ellipse keplerienne sont le *demi-grand axe* $a_S$ et l'*excentricité* $e_S$ qui ne varient pas avec le temps. Son orientation par rapport au RO est donnée par la *longitude du nœud ascendant* $\Omega_S$, l'*inclinaison* $i_S$ et la *longitude du péricentre* $\omega_S$, qui sont également constantes. La position de la

[1] L'indice $S$ indique qu'il s'agit des éléments orbitaux de la Sonde.

sonde sur l'ellipse varie avec le temps et est donnée par l'*anomalie vraie* $\nu_S$, bien que l'on préfère utiliser l'*anomalie moyenne* $M_S$ qui serait l'anomalie de la sonde si l'excentricité de son orbite était nulle (voir annexe D). Le taux de variation de $M_S$, ou *moyen mouvement*, est constant et est noté $n_S$.

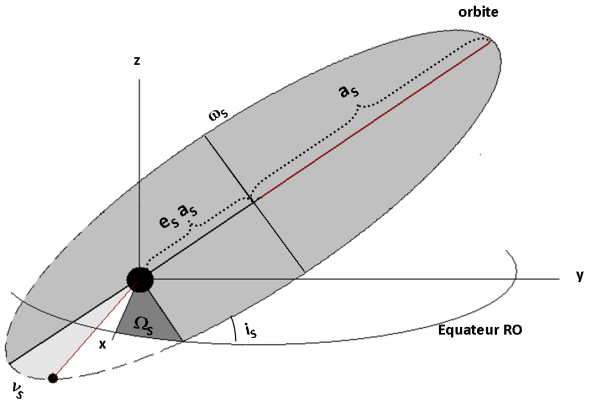


FIG. 4.1 – Éléments orbitaux d'une sonde en orbite autour d'un satellite naturel, pour une orbite keplerienne.

### 4.2.2 Orbite perturbée

Dans la réalité, le mouvement de la sonde est perturbé par l'écart par rapport à la symétrie sphérique de la répartition des masses à l'intérieur du satellite naturel et par la présence de Jupiter. Si la perturbation de la trajectoire est suffisamment lente, on peut considérer que l'orbite de la sonde est keplerienne de façon instantanée et garder la définition des éléments orbitaux, mais en les autorisant à varier dans le temps. On les appelle alors *éléments osculateurs*. On passe des équations du mouvement exprimées en coordonnées cartésiennes (équation 4.2) à un système de six équations différentielles du premier ordre, exprimées en fonction des éléments orbitaux, et appelées *équations de Lagrange* (Kaula, 1966) :

$$\frac{da_S}{dt} = \frac{2}{n_S a_S}\frac{\partial F}{\partial M_S}, \tag{4.4}$$

$$\frac{de_S}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e_S^2}}{n_S a_S^2 e_S}\frac{\partial F}{\partial \omega_S} + \frac{1-e_S^2}{n_S a_S^2 e_S}\frac{\partial F}{\partial M_S}, \tag{4.5}$$

$$\frac{di_S}{dt} = -\frac{1}{n_S a_S^2 \sqrt{1-e_S^2}\sin i_S}\frac{\partial F}{\partial \Omega_S} + \frac{\cos i_S}{n_S a_S^2 \sqrt{1-e_S^2}\sin i_S}\frac{\partial F}{\partial \omega_S}, \tag{4.6}$$

$$\frac{d\Omega_S}{dt} = \frac{1}{n_S a_S^2 \sqrt{1-e_S^2}\sin i_S}\frac{\partial F}{\partial i_S}, \tag{4.7}$$

$$\frac{d\omega_S}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_S^2}}{n_S a_S^2 e_S}\frac{\partial F}{\partial e_S} - \frac{\cos i_S}{n_S a_S^2 \sqrt{1-e_S^2}\sin i_S}\frac{\partial F}{\partial i_S}, \tag{4.8}$$

$$\frac{dM_S}{dt} = -\frac{2}{n_S a_S}\frac{\partial F}{\partial a_S} - \frac{1-e_S^2}{n_S a_S^2 e_S}\frac{\partial F}{\partial e_S}, \tag{4.9}$$

avec $F = U - T$, où $T = G\mathcal{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_S}\right)$ est l'énergie cinétique de la sonde sur son orbite et $U$ est le potentiel des forces qui s'exercent sur la sonde et qui est exprimé dans le RO. Ces équations sont intégrées à l'aide de six conditions initiales qui sont les éléments orbitaux au temps zéro de l'intégration.

Les équations de Lagrange sont évidemment valides pour un problème à deux corps. En utilisant l'équation (4.3), on obtient que $F = \frac{\mu}{2a_S}$. Si on insère cette expression dans les équations de Lagrange, on trouve, comme attendu, que la forme et la position de l'ellipse ne varient pas au cours du temps. Seule la position de la sonde sur son orbite évolue et la dérivée temporelle de l'anomalie moyenne est bien donnée par le moyen mouvement. Les éléments orbitaux correspondant à l'orbite keplerienne seront dorénavant appelées les *éléments orbitaux non perturbés*. Ils serviront de conditions initiales (au temps $t_0$) pour le calcul des éléments orbitaux perturbés/osculateurs. On leur ajoutera l'indice $o$ pour les distinguer des éléments osculateurs :

$$\frac{da_{So}}{dt} = \frac{de_{So}}{dt} = \frac{di_{So}}{dt} = \frac{d\Omega_{So}}{dt} = \frac{d\omega_{So}}{dt} = 0, \qquad \frac{dM_{So}}{dt} = n_{So}. \tag{4.10}$$

Dans le cas de l'orbite perturbée, on peut écrire le potentiel $U$ comme la somme du potentiel central (équation 4.3) et d'un potentiel perturbateur $\mathcal{R} \neq 0$ qui dépendra de la position de la sonde, et donc de ses éléments orbitaux :

$$U = \frac{G\mathcal{M}}{r} + \mathcal{R}. \tag{4.11}$$

L'intégration des équations de Lagrange est plus compliquée que dans le cas keplerien puisque les membres de droite des équations de Lagrange dépendent eux-mêmes des éléments orbitaux.

## 4.3 Potentiels perturbateurs

Dans notre modélisation, le potentiel perturbateur $\mathcal{R}$ est la somme

- de $\mathcal{R}_{gr}$, potentiel gravitationnel statique de degré deux du satellite naturel, qui dépend de la valeur moyenne des coefficients de degré deux et des paramètres liés à la rotation (section 1.1),
- de $\mathcal{R}_{tid}$, potentiel gravitationnel variable de degré deux du satellite naturel, qui dépend des paramètres de marée (section 1.2),
- et de $\mathcal{R}_J$, potentiel gravitationnel de la planète Jupiter, considérée comme ponctuelle.

Dans un premier temps, pour nous aider à trouver une solution analytique approximée des équations de Lagrange, nous allons négliger l'effet des librations et des obliquités sur le potentiel gravitationnel statique, de sorte que $C_{22} = \bar{C}_{22}$, $S_{22} = C_{21} = S_{21} = 0$ (équation 1.9). Le BF (Body Frame ou repère principal d'inertie) est donc confondu avec le ROT. Nous allons aussi négliger l'effet de la dissipation sur le potentiel gravitationnel variable et ne garder que l'effet du nombre de Love $k_2$. Nous reviendrons par la suite sur l'influence des paramètres liés à la rotation et de la dissipation sur la solution (sections 4.8 et 4.9).

### 4.3.1 Potentiel perturbateur statique $\mathcal{R}_{gr}$

Le potentiel gravitationnel statique de degré deux du satellite naturel peut être écrit en fonction des coordonnées cartésiennes de la sonde (équation 1.7) ou de ses coordonnées sphériques $r$, $\theta$ et $\lambda$ (équation 1.8) dans le ROT. Pour utiliser ce potentiel dans les équations de Lagrange, Kaula (1966) a réalisé des changements de variables successifs, de façon à l'exprimer en fonction des éléments orbitaux de la sonde définis par rapport au RO. En premier lieu, la longitude $\lambda$ dans le ROT est remplacée par la différence de l'ascension droite $\alpha$ de la sonde dans le RO et de l'angle de rotation $\phi$ du ROT par rapport au RO. Ensuite, les angles $\alpha$ et $\theta$ qui situent « angulairement » la sonde dans le RO peuvent être remplacés par $\Omega_S$, $i_S$ et $(\omega_S + \nu_S)$. Cette substitution amène l'introduction de fonctions d'inclinaison $F_{lmp}(i)$. Enfin, $r = r_S$ et $\nu_S$ sont exprimés en fonction de $a_S$, $e_S$ et $M_S$, ce qui entraine l'introduction de fonctions d'excentricité $G_{lpq}(e)$. Le potentiel perturbateur statique selon Kaula est donc donné par

$$\mathcal{R}_{gr} = \frac{G\mathcal{M}}{a_S}\left(\frac{R}{a_S}\right)^2 \sum_{m=0}^{2}\sum_{p=0}^{2} F_{2mp}(i_S) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{2pq}(e_S)\mathcal{S}_{2mpq}(M_S, \omega_S, \Omega_S, \phi), \tag{4.12}$$

$$\text{avec, } \begin{cases} \text{si } (2-m) \text{ est pair,} & \mathcal{S}_{2mpq} = C_{2m}\cos\psi_{2mpq} + S_{2m}\sin\psi_{2mpq}, \\ \text{si } (2-m) \text{ est impair,} & \mathcal{S}_{2mpq} = -S_{2m}\cos\psi_{2mpq} + C_{2m}\sin\psi_{2mpq}, \end{cases}$$

$$\text{et } \psi_{2mpq} = (2-2p+q)M_S + (2-2p)\omega_S + m(\Omega_S - \phi).$$

Étant donné la définition du ROT, la variation de l'angle $\phi$ est uniforme et $\dot{\phi} = n$, le moyen mouvement de l'orbite du satellite autour de Jupiter, car le satellite naturel est en résonance $(1:1)$. Les fonctions d'inclinaison $F_{2mp}(i_S)$ et d'excentricité $G_{2pq}(e_S)$ sont données dans Kaula (1966) sous forme analytique, mais également sous la forme de tableaux, en fonction des indices[2] $m, p$ et $q$. Les fonctions $G_{2pq}(e_S)$ sont des développements de l'ordre $|q|$ en $e_S$.

A chaque jeu d'indices $(m, p, q)$ correspond la *fréquence de perturbation orbitale*

$$\dot{\psi}_{2mpq} = (2-2p+q)n_S + (2-2p)\dot{\omega}_S + m(\dot{\Omega}_S - n). \tag{4.13}$$

Pour $(m, p, q) = (0, 1, 0)$, cette fréquence est nulle et le terme correspondant du potentiel perturbateur $\mathcal{R}_{gr}$ sera qualifié de *séculaire*. Les autres jeux d'indices correspondent à des termes *périodiques*.

### 4.3.2 Potentiel perturbateur de marée $\mathcal{R}_{tid}$

Le potentiel perturbateur de marée est en fait le potentiel gravitationnel variable de la section (1.2), équation (1.38). Pour exprimer le potentiel gravitationnel variable, il faut éliminer[3] les termes statiques du potentiel générateur de marée (équation 1.37). Ce dernier a été donné en fonction des coordonnées sphériques de Jupiter $(r_J, \theta_J, \lambda_J)$ et du point $P$ du satellite naturel $(r, \theta, \lambda)$ en lequel il est évalué (équation 1.36). Il est plus commode de décrire la position de la planète en fonction de ses éléments orbitaux $(a_J, e_J, i_J, \Omega_J, \omega_J, M_J$, avec $\dot{M}_J = n)$, si on la considère comme en orbite autour du satellite, pour obtenir[4]

[2] Certaines de ces fonctions sont données dans les équations (4.34-4.35).

[3] En effet, comme nous l'avons évoqué dans la section (1.2) et expliqué plus en détail dans le chapitre 2, les marées statiques sont incluses dans le potentiel gravitationnel (perturbateur) statique.

[4] Notons que l'angle de rotation du ROT par rapport au RO, $\phi$, est égal à $(\Omega_J + \omega_J + M_J)$, en vertu de la synchronicité de la rotation et de la révolution du satellite et du fait que par définition du RO, l'inclinaison de Jupiter $i_J$ doit être nulle. Néanmoins, il n'est pas nécessaire d'utiliser cette relation car le développement du potentiel perturbateur n'est pas terminé et l'angle $\phi$ disparait de son expression lorsqu'on exprime la position de la sonde en fonction de ses éléments orbitaux, car l'indice $m$ multiplie en réalité $(\Omega_S - \phi) - (\Omega_J - \phi) = (\Omega_S - \Omega_J)$ (équation 4.17).

(Trinh, 2007)

$$V_{gm}(r,\theta,\lambda) = \frac{GM_J}{a_J}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\sum_{p'=0}^{l}\sum_{q'=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{a_J}\right)^l (2-\delta_{m0})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$
$$\times P_l^m(\cos\theta)F_{lmp'}(i_J)G_{lp'q'}(e_J)\begin{cases}\cos\psi^{gm}_{2mp'q'} & \text{si } l-m \text{ est pair,}\\ \sin\psi^{gm}_{2mp'q'} & \text{si } l-m \text{ est impair,}\end{cases} \quad (4.14)$$

avec

$$\psi^{gm}_{lmp'q'} = (l-2p'+q')M_J + (l-2p')\omega_J + m(\Omega_J - \phi - \lambda). \quad (4.15)$$

Puisque sur une période de temps relativement courte[5], telle que la durée de mission d'une sonde, c'est-à-dire quelques mois, les variations des autres éléments orbitaux de la planète sont négligeables devant celle de $M_J$, on peut considérer que $\dot{a}_J = \dot{e}_J = \dot{i}_J = \dot{\omega}_J = \dot{\Omega}_J = 0$. La position du point P est constante et $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\lambda} = 0$. La condition pour obtenir les termes statiques (indépendants du temps) se réduit alors à $\dot{\psi}^{gm}_{lmp'q'} = 0$, ou encore à $(l-2p'+q'-m=0)$, et la partie périodique, à l'ordre deux, du potentiel générateur de marée s'écrit

$$V^{per,l=2}_{gm}(r,\theta,\lambda) = \frac{GM_J}{a_J}\underbrace{\sum_{m=0}^{2}\sum_{p'=0}^{2}\sum_{q'=-\infty}^{\infty}}_{2-2p'+q'-m\neq 0}\left(\frac{r}{a_J}\right)^2 (2-\delta_{m0})\frac{(2-m)!}{(2+m)!}$$
$$\times P_2^m(\cos\theta)F_{2mp'}(i_J)G_{2p'q'}(e_J)\begin{cases}\cos\psi^{gm}_{2mp'q'} & \text{si } 2-m \text{ est pair,}\\ \sin\psi^{gm}_{2mp'q'} & \text{si } 2-m \text{ est impair.}\end{cases} \quad (4.16)$$

Le potentiel perturbateur de marée à l'ordre deux qui s'exerce au point occupé par la sonde est le produit du potentiel générateur $V^{per,l=2}_{gm}$ évalué en surface ($r = R$), multiplié par le nombre de Love $k_2$ et par le facteur $\left(\frac{R}{r}\right)^3$ où $r$ est cette fois la coordonnée radiale de la sonde (voir l'équation 1.38).

Comme dans le cas du potentiel perturbateur statique, on souhaite exprimer ce potentiel en fonction des éléments orbitaux de la sonde plutôt qu'en fonction de ses coordonnées sphériques. On a alors (Deleflie, 2000)

$$\mathcal{R}_{tid} = \frac{G\mathcal{M}_J}{a_J}\left(\frac{R}{a_J}\right)^2\left(\frac{R}{a_S}\right)^3 k_2 \underbrace{\sum_{m=0}^{2}\sum_{p=0}^{2}\sum_{p'=0}^{2}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{q'=-\infty}^{+\infty}}_{2-2p'+q'-m\neq 0}(2-\delta_{m0})$$
$$\times\frac{(2-m)!}{(2+m)!}F_{2mp}(i_S)F_{2mp'}(i_J)G_{2pq}(e_S)G_{2p'q'}(e_J)\cos\psi'_{2mpp'qq'}, \quad (4.17)$$

[5]A court terme, nous considérons que l'orbite du satellite naturel est keplerienne. Par conséquent la trajectoire de la planète par rapport au satellite l'est également.

avec

$$\begin{aligned}\psi'_{2mpp'qq'} &= (2-2p+q)M_S-(2-2p'+q')M_J \\ &\quad +(2-2p)\omega_S-(2-2p')\omega_J+m(\Omega_S-\Omega_J). \qquad (4.18)\end{aligned}$$

A cause de l'élimination des termes statiques du potentiel générateur de marée, le potentiel perturbateur ne comprend pas de termes séculaires mais uniquement des termes périodiques. En effet, les termes séculaires seraient tels que $(m,p,p',q,q') = (0,1,1,0,0)$, ce qui n'est pas compatible avec la condition $(2-2p'+q'-m \neq 0)$.

### 4.3.3 Potentiel perturbateur de troisième corps (Jupiter) $\mathcal{R}_J$

Le potentiel perturbateur lié à l'influence directe de Jupiter sur la sonde est également obtenu à partir du potentiel générateur de marée[6] (équation 4.14) à l'ordre $l = 2$, mais en considérant cette fois les termes statiques et périodiques. De plus la position de la sonde est encore une fois décrite par ses éléments orbitaux. On obtient alors le développement suivant (Deleflie, 2000) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_J &= \frac{G\mathcal{M}_J}{a_J}\left(\frac{a_S}{a_J}\right)^2 \sum_{m=0}^{2}\sum_{p=0}^{2}\sum_{p'}^{2}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{q'=-\infty}^{+\infty}(2-\delta_{m0})\frac{(2-m)!}{(2+m)!} \\ &\quad \times F_{2mp}(i_S)F_{2mp'}(i_J)H_{2pq}(e_S)G_{2p'q'}(e_J)\cos\psi'_{2mpp'qq'}, \qquad (4.19)\end{aligned}$$

avec le même argument $\psi'$ que pour $\mathcal{R}_{tid}$. $H_{2pq}$ est une autre fonction d'excentricité appelée fonction de Hansen (Giacaglia, 1976). L'unique terme séculaire correspond au jeu d'indices $(m,p,p',q,q') = (0,1,1,0,0)$.

## 4.4 Intégration numérique des équations de Lagrange

Il est utile d'intégrer numériquement[7] les équations de Lagrange, avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{gr}+\mathcal{R}_{tid}+\mathcal{R}_J$, dans le but d'obtenir une solution de référence à laquelle comparer la solution analytique approximée que nous allons chercher ensuite. On

[6] qui n'est finalement que le potentiel gravitationnel de Jupiter en un point dont la position est décrite par rapport au satellite naturel, ce qui est bien le cas de la sonde. Il n'est donc pas question de distinguer les termes statiques des termes périodiques.

[7] Il ne s'agit pas ici de réaliser une intégration numérique poussée suivie d'une recherche de stratégie de mission. En effet, nous ne considérons que les potentiels gravitationnels tronqués au degré deux. Nous n'avons pas mis en place un algorithme pour cette intégration, puisque nous utilisons la commande d'intégration numérique **NDSolve** du logiciel Mathematica. Remarquons également qu'il faut remplacer $n_S(t)$ par $\sqrt{G\mathcal{M}/a_S^3(t)}$ dans les équations avant de réaliser l'intégration numérique, pour ne pas avoir plus d'inconnues que d'équations.

sait que l'excentricité de Jupiter[8], $e_J$, est petite et elle est considérée comme constante dans notre modélisation, donc on peut s'arrêter à $|q'| = 1$ dans le développement des potentiels. L'excentricité de la sonde, $e_S$, varie dans le temps et peut éventuellement augmenter au-delà de sa valeur initiale. Nous allons donc considérer les indices tels que $|q| \leq 3$, car nous n'avons pas observé de différences significatives en prenant en compte des indices plus élevés.

Nous choisissons par exemple une orbite autour d'Europe avec pour éléments orbitaux non perturbés servant de conditions initiales (voir équation 4.10)

$$\begin{aligned} &a_{So} = 1\,960\,km,\ e_{So} = 0.09,\ i_{So} = 88^\circ \\ &\Omega_{So} = 0^\circ,\ \omega_{So} = 0^\circ,\ M_{So}(t) = M_{So}(t_0) + n_{So}\,t,\ M_{So}(t_0) = 0^\circ. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Cette orbite est quasi-circulaire et quasi-polaire, comme cela est prévu en général dans les missions d'exploration, et en particulier pour la mission vers Europe et Ganymède. Cette orbite nous servira de référence pour la comparaison avec d'autres orbites légèrement différentes, c'est pourquoi nous l'appelons *orbite nominale*.

L'angle de rotation d'Europe $\phi$ et la position de Jupiter dans le RO (via ses éléments orbitaux) dépendent du temps de début d'intégration choisi $t_0$. Dans un premier temps, nous avions choisi de commencer l'intégration au premier janvier 2025 (JD 2460676.5), en accord avec la définition de la mission EJSM. Dans la section (4.6), nous allons donc expliquer comment la solution approximée a été obtenue à partir de l'étude de cette orbite, que nous notons **OrbNom2025**, pour Orbite Nominale en 2025. Néanmoins, la définition de la mission, désormais appelée JUICE, a évolué au cours des derniers mois et la date d'arrivée est prévue aux alentours de 2030 et un orbiteur autour d'Europe n'est plus d'actualité. Nous vérifierons donc, dans la section (4.7), si la solution approximée convient pour d'autres temps $t_0$ et pour d'autres types d'orbites qui diffèrent selon les conditions initiales (4.20). Nous vérifierons aussi la validité de la solution pour des orbites autour de Ganymède.

L'intégration numérique de l'orbite OrbNom2025 indique que la sonde entre en collision avec Europe après environ treize jours (figure 4.2). A ce moment son excentricité est d'environ 0.2. Dans la réalité, des manœuvres régulières permettraient d'éviter cette collision, en empêchant l'excentricité d'augmenter autant. Étant donné que ces manœuvres ne sont pas introduites dans notre modélisation, nous allons considérer un arc d'observation de dix jours. Les éléments orbitaux varient au cours de la durée de l'arc (figure 4.3, courbes noires). On observe des variations séculaires ou à longues périodes de $e_S, \Omega_S, \omega_S$

[8]Rappelons qu'il s'agit de l'excentricité de Jupiter considéré comme en orbite autour du satellite naturel. Elle est donc égale à l'excentricité du satellite naturel et est de l'ordre de $10^{-2}$ pour Europe et de l'ordre de $10^{-3}$ pour Ganymède (équations 5.18 et 5.19).

et $(M_S - n_{So}t)$. Tous les éléments orbitaux présentent des variations à courtes périodes d'amplitudes variées.

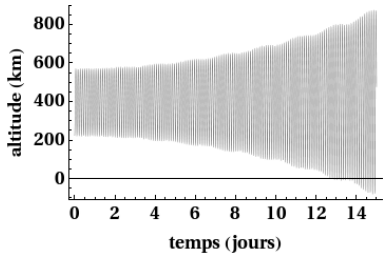


FIG. 4.2 – Évolution de l'altitude sur une période de quinze jours (intégration numérique de l'orbite OrbNom2025). L'altitude est une fonction du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'anomalie moyenne (voir annexe D). La sonde entre en collision avec Europe après environ treize jours.

## 4.5 Intégration analytique : méthode de Kaula

Nous désirons une solution analytique aussi proche que possible de la solution de l'intégration numérique, sur l'arc d'observation de dix jours. En général, les équations de Lagrange sont résolues analytiquement en suivant la *méthode de Kaula* (Kaula, 1966). Les différentes étapes de cette méthode sont

1. Une première intégration en ne prenant que les termes séculaires de $\mathcal{R}$ pour obtenir la *solution séculaire* :

$$a_S(t) = a_{So}, \quad e_S(t) = e_{So}, \quad i_S(t) = i_{So}. \tag{4.21}$$

Le demi-grand axe, l'inclinaison et l'excentricité restent constants et égaux à leur valeur initiale. En effet, les termes séculaires des équations (4.12 et 4.19) ne dépendent pas des éléments $\Omega_S$, $\omega_S$ et $M_S$, et les membres de droite des équations de Lagrange pour $a_S$, $e_S$ et $i_S$ (4.4-4.6) sont nuls. Par conséquent, en vertu de la troisième loi de Kepler, le moyen mouvement est également constant $(n_S(t) = n_{So})$. On peut injecter la solution (4.21) pour les trois premiers éléments dans les membres de droite des équations de Lagrange (4.7-4.9) et trouver que les trois derniers éléments orbitaux présentent une variation séculaire :

$$\begin{aligned} \Omega_S(t) &= \Omega_{So} + \dot{\Omega}_{sec}\, t, \\ \omega_S(t) &= \omega_{So} + \dot{\omega}_{sec}\, t, \\ M_S(t) &= M_{So}(t_0) + n_{So}\, t + \dot{M}_{sec}\, t, \end{aligned} \tag{4.22}$$

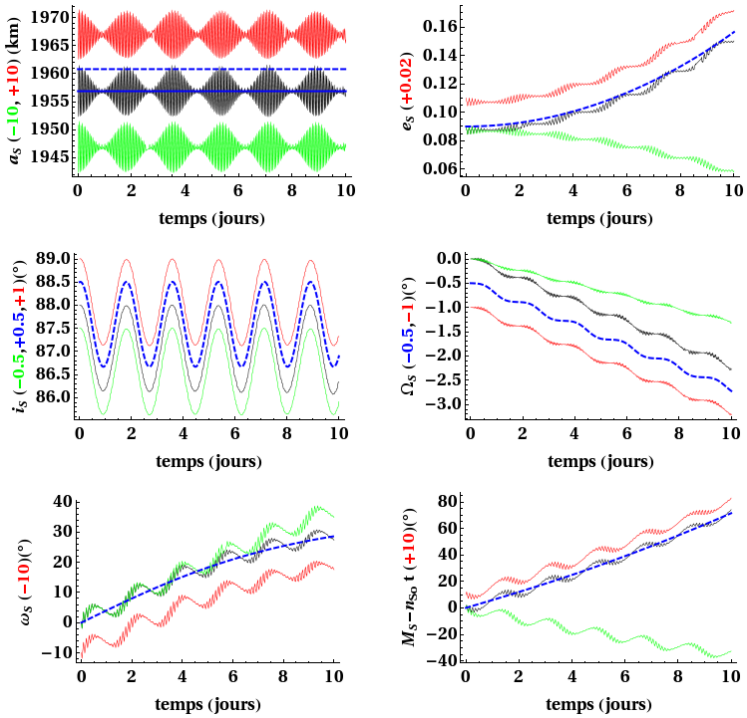


FIG. 4.3 – Évolution des éléments orbitaux sur une période de dix jours (Orb-Nom2025) : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne. Les courbes vertes, bleues et rouges ont été décalées lorsqu'elles ne pouvaient pas être distinguées de la courbe noire à la fin de l'arc de 10 jours.

où $\dot{\Omega}_{sec}, \dot{\omega}_{sec}$ et $\dot{M}_{sec}$ sont des constantes (données dans l'annexe C).

2. Une seconde intégration est ensuite réalisée en remplaçant les éléments orbitaux dans les membres de droite des équations de Lagrange (4.4-4.9) par la solution séculaire (équations 4.21-4.22) et en ne considérant que les termes périodiques de $\mathcal{R}$. Les équations de Lagrange étant linéaires selon $\mathcal{R}$, on peut calculer les variations des éléments orbitaux pour chaque composante des perturbations périodiques et ensuite additionner ces différentes variations. On obtient ainsi la *solution périodique*.

3. La solution finale (*solution de Kaula*) est la somme des solutions séculaire et périodique (figure 4.3, courbes vertes).

Cette méthode est assez simple à mettre en œuvre. Les éléments $a_S$ et $i_S$ semblent correctement restitués, contrairement aux autres éléments orbitaux. La cause du problème réside dans la méthode elle-même, car, comme nous allons le voir dans la section suivante, elle ne tient pas correctement compte de

- l'importance de l'effet de troisième corps de Jupiter qui rend la distinction entre les termes séculaires et périodiques moins pertinente,
- du caractère quasi-polaire de l'orbite,
- des variations du demi-grand axe de l'orbite.

Pour obtenir une solution analytique exploitable dans notre modélisation de l'observable Doppler du chapitre 5, il est nécessaire de modifier la méthode de Kaula pour prendre correctement en compte ces différents effets. Ce sera l'objet de la section suivante.

## 4.6 Méthode de Kaula modifiée

Une fois les trois potentiels perturbateurs $\mathcal{R}_{gr}$ (équation 4.12), $\mathcal{R}_{tid}$ (4.17) et $\mathcal{R}_J$ (4.19) introduits dans les équations de Lagrange (4.4-4.9), l'équation pour chaque élément orbital (EO) se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dEO(t)}{dt} &= \sum_{m,p,q} \alpha_{m,p,q} \left\{ \begin{array}{l} \cos\psi_{2mpq} \\ \sin\psi_{2mpq} \end{array} \right\} \\ &+ \underbrace{\sum_{m,p,p',q,q'}}_{2-2p'+q'-m\neq 0} \beta_{m,p,p',q,q'} \left\{ \begin{array}{l} \cos\psi'_{mpp'qq'q} \\ \sin\psi'_{mpp'qq'q} \end{array} \right\} \\ &+ \sum_{m,p,p',q,q'} \gamma_{m,p,p',q,q'} \left\{ \begin{array}{l} \cos\psi'_{mpp'qq'q} \\ \sin\psi'_{mpp'qq'q} \end{array} \right\}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

avec les coefficients $\alpha$ , $\beta$ et $\gamma$ liés aux potentiels perturbateurs statique, de marée et de troisième corps, respectivement. Dans la suite, ces coefficients seront nommés *facteurs de perturbation* et seront différents pour chaque éléments orbital. Par exemple, les facteurs $\alpha_{mpq}$ non nuls (c'est-à-dire tels que $m \neq 1$, puisque nous avons posé que $C_{21} = S_{21} = 0$) pour le demi-grand axe sont donnés par

$$\alpha_{0pq} = -C_{20}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_S a_S^4} F_{20p}(i_S) G_{2pq}(e_S)(2-2p+q), \tag{4.24}$$

$$\alpha_{2pq} = -C_{22}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_S a_S^4} F_{22p}(i_S) G_{2pq}(e_S)(2-2p+q), \tag{4.25}$$

et sont en facteur devant un sinus dans l'équation (4.23).

Comme nous allons le montrer par la suite, certains facteurs correspondant à des perturbations périodiques peuvent être au moins du même ordre de grandeur que ceux correspondants aux perturbations séculaires. On réalise donc une intégration en trois étapes qui sont légèrement différentes de celles de la méthode de Kaula :

1. calcul d'une *solution primaire* en ne considérant que les facteurs de perturbation séculaires, ainsi que les facteurs de perturbation périodiques que l'on ne peut négliger par rapport aux séculaires,
2. calcul d'une *solution additionnelle* en insérant une approximation de la solution primaire dans les membres de droite et en considérant les facteurs de perturbation négligés auparavant,
3. la solution finale (*solution approximée*) est obtenue en sommant les solutions primaire et additionnelle.

Les solutions primaire et additionnelle dépendent toutes deux des paramètres géophysiques. Il n'est donc pas suffisant de considérer uniquement la solution primaire.

### 4.6.1 Solution primaire

Nous allons chercher à restituer le comportement général des éléments orbitaux en simplifiant[9] au maximum les équations de Lagrange. L'évaluation des ordres de grandeur des facteurs de perturbation permet de déterminer quels sont les termes dominants. Les facteurs de perturbation ne dépendent que des éléments orbitaux $a_S$, $e_S$ et $i_S$. Comme l'ordre de grandeur de $a_S$, $e_S$ et $i_S$ ne varie pas beaucoup au cours de l'arc d'observation, on pourra se contenter de prendre $a_{So}$, $e_{So}$ et $i_{So}$ pour évaluer l'ordre de grandeur des facteurs de perturbation. Par exemple, les facteurs $\alpha_{mpq}$ non nuls pour le demi-grand axe (équations 4.24-4.25) deviendraient

$$\alpha_{0pq} \simeq -C_{20}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{20p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q), \tag{4.26}$$

$$\alpha_{2pq} \simeq -C_{22}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{22p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q). \tag{4.27}$$

Les valeurs des facteurs de perturbation pour l'orbite OrbNom2025 sont données dans les tables de l'annexe C. Les équations de Lagrange qui décrivent

[9] L'équation simplifiée sera plus compliquée que celle obtenue avec la méthode de Kaula pour la solution séculaire, sauf pour le demi-grand axe.

la variation de $i_S$ (4.6) et de $\omega_S$ (4.8) sont composées de deux parties. La seconde partie est beaucoup plus petite que le première car elle contient $\cos i_S$ qui est très petit pour une orbite quasi-polaire. Par conséquent, on définit deux jeux de facteurs de perturbation distincts pour $i_S$ ($\alpha^\Omega, \beta^\Omega$ et $\gamma^\Omega$ pour la partie qui contient la dérivée par rapport à $\Omega_S$ et $\alpha^\omega, \beta^\omega$ et $\gamma^\omega$ pour la partie qui contient la dérivée par rapport à $\omega_S$) et pour $\omega_S$ ($\alpha^e, \beta^e$ et $\gamma^e$ pour la partie qui contient la dérivée par rapport à $e_S$ et $\alpha^i, \beta^i$ et $\gamma^i$ pour la partie qui contient la dérivée par rapport à $i_S$).

Les équations de Lagrange doivent être résolues une à une et dans un certain ordre. Il faut résoudre l'équation du demi-grand axe $a_S$ en premier lieu, et en déduire $n_S$ par la troisième loi de Kepler, car nous verrons que l'équation pour $a_S$ peut être résolue sans connaissance de l'évolution des autres éléments orbitaux. Ensuite l'équation pour l'inclinaison doit être résolue avant celle pour la longitude du nœud, car les variations de l'inclinaison ne peuvent pas être négligées dans le membre de droite de l'équation pour $\Omega_S$. L'équation pour $\omega_S$ devra être considérée avant celle pour l'excentricité $e_S$, qui lui est couplée. Enfin, on pourra intégrer l'équation pour $M_S$ qui est couplée avec celle pour l'excentricité.

**Résolution de l'équation pour $a_S$ :**

Les termes de $\mathcal{R}_{gr}$, $\mathcal{R}_{tid}$ et $\mathcal{R}_J$ tels que $(2 - 2p + q = 0)$ ne contiennent pas $M_S$ (voir les équations 4.12, 4.17 et 4.19). Par conséquent la dérivée de ces termes par rapport à $M_S$ est nulle, ainsi que les facteurs de perturbation associés. Dans l'équation de Lagrange (4.4), il n'y aura donc que des perturbations correspondant à une fraction de la période de révolution de la sonde, selon la valeur de la combinaison $(2 - 2p + q \neq 0)$. Selon la valeur des autres indices $(m, p', q')$, le moyen mouvement de la sonde peut être modulé par le moyen mouvement d'Europe et/ou par les taux de variation de la longitude du nœud et de la longitude du péricentre de la sonde qui sont également présents dans les fréquences de perturbations $\dot{\psi}_{2mpq}$ et $\dot{\psi}'_{2mpp'qq'}$. Des battements entre des termes dont les fréquences sont très proches les unes des autres et qui ont des amplitudes similaires se produisent, comme on peut le voir sur la figure (4.3).

Par conséquent, il n'y a pas de perturbations dominantes, contrairement à $i_S$ par exemple, pour lequel un comportement global peut être distingué, comme nous le verrons plus loin. On peut le vérifier grâce à l'estimation des facteurs de perturbation donnés dans le tableau (C.1). Les plus grands sont $\gamma_{2,0,0,0,0} = -0.99\text{ms}^{-1}$, $\gamma_{2,2,0,0,0} = 0.86\text{ms}^{-1}$ et $\gamma_{0,0,1,0,0} = -\gamma_{0,2,1,0,0} = -0.93\text{ms}^{-1}$ et ont des fréquences de perturbations $\dot{\psi}'_{2mpp'qq'}$ assez proches les unes des autres. Il existe encore une quinzaine d'autres facteurs de perturbation légèrement plus petits. Mais à partir de la solution numérique, on voit que les variations sur

dix jours sont de moins de 1% de la valeur initiale. On peut donc considérer que le demi-grand axe est constant et que l'équation de Lagrange se simplifie sous la forme

$$\frac{da_S(t)}{dt} = 0, \tag{4.28}$$

avec pour solution « primaire »

$$a_{Sprim}(t) = a_{So}. \tag{4.29}$$

Il serait plus rigoureux de considérer le valeur moyenne de $a_S(t)$, plutôt que $a_{So}$, mais cette valeur moyenne a une expression très compliquée et ne sera utile que lors du calcul de la solution pour l'anomalie moyenne $M_S(t)$, comme nous le verrons par la suite. Par la troisième loi de Kepler, on a alors que

$$n_{Sprim}(t) = n_{So}. \tag{4.30}$$

**Résolution de l'équation pour $i_S$ :**

Les variations de l'inclinaison sont de l'ordre de 2%, comme on peut l'observer sur le graphe de la solution numérique (figure 4.3). On pourrait penser que comme dans le cas du demi-grand axe, il est possible de prendre comme solution primaire la valeur initiale de l'élément orbital, comme dans la solution de Kaula. Or, l'inclinaison apparait dans des fonctions trigonométriques dans les équations de Lagrange (en particulier dans celle pour la longitude du nœud, équation 4.7). Pour l'orbite nominale, nous avons choisi une inclinaison quasi-polaire de 88°. Si $\sin i_S(t)$ est correctement approximé par $\sin i_{So}$ (erreur de 0.2%), ce n'est pas le cas pour $\cos i_S(t)$ où cette approximation entrainerait une erreur de 50%. Il est donc nécessaire de trouver une solution qui induit une erreur acceptable sur le cosinus de l'inclinaison.

L'équation de Lagrange pour l'inclinaison (4.6) contient une dérivée par rapport à $\omega_S$ et une autre par rapport à $\Omega_S$. Les termes séculaires des potentiels perturbateurs $\mathcal{R}_{gr}$ (équation 4.12) et $\mathcal{R}_J$ (4.19) sont tels que $(2-2p) = m = 0$ et sont donc indépendants de $\omega_S$ et de $\Omega_S$, de sorte que les facteurs de perturbation associés seront nuls. Les plus grands facteurs de perturbation[10] sont de l'ordre de $10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ (voir tableaux C.2 et C.3) et correspondent à des courtes périodes :

– $\gamma^{\Omega}_{2,1,0,0,0} = 4.9\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ et $\alpha^{\Omega}_{2,1,0} = 1.7\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ (moitié de la période orbitale d'Europe),

[10] Il n'y a pas de facteurs de perturbation $\beta$ dominants. En fait, les facteurs $\beta$ qui correspondraient aux mêmes fréquences que les facteurs $\gamma$ dominants n'existent pas car, comme nous l'avons vu dans la section (4.3), les termes statiques du potentiel générateur de marée ont été éliminés pour obtenir le potentiel perturbateur de marée, tandis qu'ils ont étés conservés pour obtenir le potentiel perturbateur de troisième corps.

– $\gamma^{\Omega}_{2,0,0,0,0} = 2.5\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ et $\gamma^{\Omega}_{2,2,0,0,0} = 2.2\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ (moitié de la période orbitale de la sonde).

L'équation de Lagrange simplifiée est donc

$$\begin{aligned}\frac{di_S}{dt} &= \alpha^{\Omega}_{210}\sin\psi_{2210} + \gamma^{\Omega}_{21000}\sin\psi'_{221000} \\ &\quad +\gamma^{\Omega}_{20000}\sin\psi'_{220000} + \gamma^{\Omega}_{22000}\sin\psi'_{222000}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Le membre de droite dépend de chacun des éléments orbitaux de la sonde et l'équation est encore trop compliquée pour être résolue simplement. Il faut encore réaliser quelques approximations visant à rendre le membre de droite indépendant des variations temporelles de éléments orbitaux, tout en obtenant une solution satisfaisante :

– Premièrement, nous considérons que $\sin i_S = \sin i_{So}$ (le membre de droite ne dépend pas de $\cos i_S$).
– Deuxièmement, on peut utiliser la solution primaire pour le demi-grand axe et le moyen mouvement et remplacer $a_S$ et $n_S$ par $a_{So}$ et $n_{So}$, car leurs variations temporelles ont peu d'influence sur l'ordre de grandeur du membre de droite de l'équation de Lagrange.
– Troisièmement, nous allons considérer que $e_S = e_{So}$ car l'excentricité apparait au moins au second ordre dans les facteurs de perturbation[11]. Il est donc inutile de considérer ses variations temporelles.
– Enfin, l'intégration numérique montre que le comportement global de longitude du nœud de la sonde est une variation lente de l'ordre de -0.2 degrés par jour. Par conséquent, on néglige la variation de $\Omega_S$ devant celles de $\phi$ et de $M_J$, dont les variations sont plus rapides (101 degrés par jour), de sorte que $\Omega_S = \Omega_{So}$.

Grâce à ces approximations, les facteurs de perturbation ne dépendent plus du temps. On pourrait intégrer facilement l'équation (4.31) pour obtenir une solution de la forme suivante

$$\begin{aligned} i_S(t) - i_{So} &= \frac{\alpha^{\Omega}_{210}}{2n}[\sin\psi_{2210}(t) - \sin\psi_{2210}(t_0)] \\ &\quad +\frac{\gamma^{\Omega}_{21000}}{2n}[\sin\psi'_{221000}(t) - \sin\psi'_{221000}(t_0)] \\ &\quad -\frac{\gamma^{\Omega}_{20000}}{2(n_{So}-n)}[\sin\psi'_{220000}(t) - \sin\psi'_{220000}(t_0)] \\ &\quad +\frac{\gamma^{\Omega}_{22000}}{2(n_{So}+n)}[\sin\psi'_{222000}(t) - \sin\psi'_{222000}(t_0)]. \end{aligned} \tag{4.32}$$

[11] Les facteurs de perturbation dépendent de $G_{210}(e_S)/\sqrt{1-e_S^2} \simeq 1 + 2e_S^2$, $H_{210}(e_S)/\sqrt{1-e_S^2} \simeq 1 + 2e_S^2$ et $H_{200}(e_S)/\sqrt{1-e_S^2} \simeq 1 - 2e_S^2$.

Les deux premiers termes du membre de droite induisent des variations correspondant à la demi-période orbitale d'Europe et dont les amplitudes sont de l'ordre de $(\gamma,\alpha)^{\Omega}/(2n) = \mathcal{O}(1^\circ)$. Tandis que les variations selon la demi-période orbitale de la sonde ont une amplitude beaucoup plus petite de l'ordre de $\gamma^{\Omega}/(2n_{So}\pm 2n) = \mathcal{O}(0.01^\circ)$, car $n_{So} >> n$. Les termes en $\gamma^{\Omega}_{2,0,0,0,0}$ et $\gamma^{\Omega}_{2,2,0,0,0}$ peuvent donc être négligés dans l'équation (4.31). On observe d'ailleurs sur le graphe de la solution numérique (figure 4.3) que la période du comportement global est bien de la moitié de la période orbitale d'Europe. L'équation à résoudre devient

$$\frac{di_S}{dt} = \alpha^{\Omega}_{210}\sin\psi_{2210} + \gamma^{\Omega}_{21000}\sin\psi'_{221000}. \tag{4.33}$$

Étant données les différentes approximations réalisées, et vu que

$$F_{221}(i_S) = \frac{3\sin^2 i_S}{2},\ G_{210}(e_S) = \frac{1}{(1-e_S^2)^{3/2}},\ H_{210}(e_S) = 1+\frac{3e_S^2}{2}, \tag{4.34}$$

$$F_{220}(i_J = 0) = 3,\ G_{200}(e_J) = 1, \tag{4.35}$$

l'équation s'écrit dans sa forme développée

$$\begin{aligned}\frac{di_S}{dt} &= \frac{3\sin i_{So}}{n_{So}\sqrt{1-e_{So}^2}}\left[\frac{G\mathcal{M}R_E^2C_{22}}{a_{So}^5\,(1-e_{So}^2)^{3/2}}\sin[2(\Omega_{So}-\phi(t_0)-nt)]\right.\\ &\left.+\frac{G\mathcal{M}_J}{4a_P^3}\left(1+\frac{3e_{So}^2}{2}\right)\sin\left[2(\Omega_{So}-\Omega_J-\omega_J-M_J(t_0)-nt)\right]\right],\end{aligned} \tag{4.36}$$

ou encore, en regroupant les termes,

$$\frac{di_S(t)}{dt} \simeq A_i\sin[2(B_i-nt)] + C_i\sin[2(D_i-nt)]. \tag{4.37}$$

Les expressions des constantes $A_i, B_i, C_i$ et $D_i$ sont obtenues en comparant les équations (4.36) et (4.37) et sont données dans l'annexe C. La solution primaire

$$\begin{aligned}i_{Sprim}(t) &= i_{So} + \frac{A_i(\cos[2(B_i-nt)] - \cos[2B_i])}{2n}\\ &\quad + \frac{C_i(\cos[2(D_i-nt)] - \cos[2D_i])}{2n}\\ &= i_{So} + C_1(\cos 2nt - 1) + C_2\sin 2nt\end{aligned} \tag{4.38}$$

est tracée dans la figure (4.3) et est assez proche de la solution numérique. Les constantes $C_1$ et $C_2$ sont données dans l'annexe C et sont petites devant $i_{So}$. Cette solution permettra de remplacer $\cos i_S$ par une expression relativement simple, mais réaliste, dans l'équation pour la longitude du nœud (4.7) :

$$\begin{aligned}\cos i_{Sprim}(t) &\simeq \cos(i_{So}-C_1)\cos(C_1\sin i_{So}\cos 2nt - C_2\sin i_{So}\sin 2nt)\\ &\quad -\sin(i_{So}-C_1)\sin(C_1\sin i_{So}\cos 2nt - C_2\sin i_{So}\sin 2nt)\\ &\simeq \cos(i_{So}-C_1) - C_1\sin i_{So}\cos 2nt - C_2\sin i_{So}\sin 2nt.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Avec cette expression, l'erreur sur le cosinus est d'environ 4%. Enfin, remarquons que la correction par rapport à la méthode de Kaula, c'est-à-dire le fait que $i_{Sprim}(t) \neq i_{So}$, ne provient pas uniquement de l'effet direct de Jupiter, puisque qu'un facteur de perturbation lié au potentiel perturbateur statique est également impliqué dans la solution primaire (voir l'équation 4.33).

**Résolution de l'équation pour $\Omega_S$ :**

Les variations séculaires correspondent aux facteurs de perturbation $\alpha_{010}$ et $\gamma_{01100}$ dont la somme vaut $\dot{\Omega}_{sec} = -2.67\,10^{-8}\mathrm{s}^{-1}$, c'est-à-dire $-0.13°$/jour (voir le tableau C.4). Or, la solution numérique (figure 4.3) montre une pente d'environ $-0.23°$/jour, soit près du double. Le comportement global de $\Omega_S$ ne peut donc pas être expliqué uniquement par les termes séculaires des potentiels perturbateurs.

Certains facteurs de perturbation, tels que $(2 - 2p + q \neq 0)$ dans les arguments $\psi$ et $\psi'$ des équations (4.12) et (4.17), correspondent à une courte période égale à une fraction de la période orbitale de la sonde et sont plus grands ou de même ordre que la somme des facteurs séculaires. Or, comme dans le cas de l'inclinaison, les variations dues à ces facteurs sont négligeables devant les variations correspondant à d'autres périodes plus longues (comme celle de révolution d'Europe par exemple). On pourra donc se concentrer sur les facteurs tels que $(2 - 2p + q = 0)$. Les facteurs de perturbation périodiques dominants correspondent aux mêmes fréquences de perturbation que pour $i_S$, ce qui n'est pas surprenant vu le couplage[12] entre les équations de Lagrange pour $i_S$ et $\Omega_S$ :

– $\gamma_{2,1,0,0,0} = 1.7\,10^{-8}\mathrm{s}^{-1}$ et $\alpha_{2,1,0} = 5.8\,10^{-9}\mathrm{s}^{-1}$.

L'équation simplifiée qui en résulte,

$$\frac{d\Omega_S}{dt} = \alpha_{010} + \gamma_{01100} + \alpha_{210}\cos\psi_{2210} + \gamma_{21000}\cos\psi'_{221000}, \tag{4.40}$$

reste difficile à résoudre dans sa forme développée, car le membre de droite dépend des variations temporelles de éléments orbitaux. On réalise alors les mêmes approximations que dans le cas de l'inclinaison. La dernière difficulté est la présence, dans chacun des facteurs de perturbation considérés, de $\cos i_S$ que l'on remplace par $\cos i_{Sprim}$ (équation 4.39). L'équation devient

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega(t)}{dt} &= (A_o - B_o\cos 2nt - B'_o\sin 2nt) \\ &\quad \times(E_o + C_o\cos 2(D_i - nt) + F_o\cos 2(B_i - nt)).\end{aligned} \tag{4.41}$$

[12]Le membre de droite de l'équation de Lagrange pour l'inclinaison contient une dérivée par rapport à la longitude du nœud, et vice-versa. Le facteur devant les dérivées est le même pour les deux équations (voir équations 4.6-4.7).

Les expressions des constantes $A_o, B_o, B'_o$ et $C_o$ sont données dans l'annexe C. La solution primaire est

$$\begin{aligned}\Omega_{Sprim}(t) &= \Omega_{So} + \dot{\Omega}^{cor}_{sec}\, t \\ &\quad + \frac{1}{8n}\left[C^{\Omega}_1(1-\cos(2nt)) + C^{\Omega}_2 \sin(2nt)\right. \\ &\quad \left. + C^{\Omega}_3(1-\cos(4nt)) + C^{\Omega}_4 \sin(4nt)\right] \qquad (4.42)\end{aligned}$$

et est en bon accord avec la solution numérique, comme on peut le voir sur la figure (4.3). Les constantes $\dot{\Omega}^{cor}_{sec}$, $C^{\Omega}_1, \ldots, C^{\Omega}_4$ sont données dans l'annexe C. On voit que la solution comprend bien un terme séculaire, mais la pente $\dot{\Omega}^{cor}_{sec}$ est différente de $\dot{\Omega}_{sec}$. Cela s'explique par le fait que la valeur moyenne de l'inclinaison est égale à $(i_{So} - C_1)$ et non à $i_{So}$ et par le fait que les produits des termes en sinus et en cosinus dans l'équation (4.41) fournissent des termes[13] constants. On peut en conclure que les variations périodiques de l'inclinaison induisent une variation séculaire additionnelle de la longitude du nœud, qui n'est pas négligeable dans le cas d'une orbite quasi-polaire.

**Résolution de l'équation pour $\omega_S$ :**

La somme des facteurs séculaires, $\alpha^e_{010}$, $\alpha^i_{010}$, $\gamma^e_{01100}$ et $\gamma^i_{01100}$, est de $\dot{\omega}_{sec} = -3.8\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ ou de $-1.9°$/jour (voir tableaux C.6 et C.5). Notons que sur la figure (4.3), la solution de Kaula semble avoir une pente différente de $\dot{\omega}_{sec}$. Cela est dû aux termes à longues périodes, et tels que $(m, p, p', q, q') = (0, 2, 1, 2, 0)$ et $(0, 0, 1, -2, 0)$, du potentiel perturbateur de troisième corps $\mathcal{R}_J$ (équation 4.19). Après quelques jours, la solution de Kaula n'est plus en accord avec la solution numérique, signe que la méthode de Kaula n'est pas adaptée aux traitements des longues périodes induites par le troisième corps.

Les facteurs de perturbation longues-périodes non-négligeables sont donc $\gamma^e_{0,2,1,2,0} = \gamma^e_{0,0,1,-2,0} = 6.0\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$. Ces facteurs correspondent à une fréquence de perturbation de $\pm 2\dot{\omega}_S$. Nous allons donc négliger les variations correspondant aux périodes de révolution d'Europe et de la sonde, même dans le cas où leur facteur de perturbation est important, puisqu'elles vont mener à des variations beaucoup plus petites en amplitude que celles dues aux termes à longues périodes. Notons que les facteurs $\beta^e$ et $\alpha^e$ qui correspondent à la même fréquence de perturbations que $\gamma^e_{0,2,1,2,0}$ et $\gamma^e_{0,0,1,-2,0}$ sont nuls[14].

En reprenant, comme dans le cas de l'inclinaison et de la longitude du nœud, les approximations $a_S = a_{So}$, $n_S = n_{So}$ et $e_S = e_{So}$, l'équation de Lagrange

[13] par exemple, le produit de $\cos 2nt$ avec $\cos(2D_i - 2nt)$ donne un terme proportionnel à $\cos^2 2nt = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4nt}{2}$.

[14] La raison est que les facteurs $\beta^e$ et $\alpha^e$ dépendent de la fonction d'excentricité $G_{lpq}$, tandis que les facteurs $\gamma^e$ dépendent de la fonction d'excentricité $H_{lpq}$. Quand $G_{lpq} = 0$, $H_{lpq}$ peut ne pas être nul.

s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_S(t)}{dt} &= (\alpha^e_{010} + \alpha^i_{010} + \gamma^e_{01100} + \gamma^i_{01100}) \\ &\quad +\gamma^e_{0,2,1,2,0}\cos 2\omega_S + \gamma^e_{0,0,1,-2,0}\cos 2\omega_S \qquad (4.43)\\ &= \dot{\omega}_{sec} + \gamma\cos 2\omega_S, \qquad (4.44)\end{aligned}$$

avec $\dot{\omega}_{sec}$ et $\gamma$ donné dans l'annexe C. La solution primaire[15] est

$$\omega_{Sprim}(t) = \arctan\left(\frac{(\gamma+\dot{\omega}_S^{sec})\tanh\left[t(\gamma^2-(\dot{\omega}_S^{sec})^2)+\operatorname{arctanh}\left[\frac{(\gamma-\dot{\omega}_S^{sec})\tan\omega_{So}}{\sqrt{\gamma^2-(\dot{\omega}_S^{sec})^2}}\right]\right]}{\sqrt{\gamma^2-(\dot{\omega}_S^{sec})^2}}\right). \qquad (4.45)$$

On peut voir à partir de la courbe noire pour le graphe de $\omega_S$ sur la figure (4.3) que les termes séculaires et à longues périodes se combinent pour former une variation qui ressemble à une variation séculaire.

**Résolution de l'équation pour $e_S$ :**

Comme nous l'avons déjà noté dans le cadre de la résolution des équations de Lagrange pour le demi-grand axe et l'inclinaison, les termes séculaires des potentiels perturbateurs sont par définition indépendant de $\omega_S$ et de $M_S$. Les facteurs de perturbation séculaires du membre de droite de l'équation (4.5) sont donc nuls. On peut montrer, par le même raisonnement que pour $\omega_S$, que les facteurs de perturbation périodiques à retenir sont $\gamma_{0,2,1,2,0}$ et $\gamma_{0,0,1,-2,0}$, ce qui n'est pas étonnant vu que les équations de Lagrange pour l'excentricité et la longitude du péricentre sont couplées[16]. Avec comme hypothèses que $a_S = a_{So}$, $n_S = n_{So}$ et $\omega_S = \omega_{Sprim}$, l'équation à intégrer s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{de_S(t)}{dt} &= -(\gamma_{0,2,1,2,0} - \gamma_{0,0,1,-2,0})\sin 2\omega_S \qquad (4.46)\\ &= \gamma\, e_S \sin 2\omega_{Sprim}, \qquad (4.47)\end{aligned}$$

où le membre de droite dépend également de $e_S(t)$. La constante $\gamma$ est la même que celle rencontrée dans l'équation (4.44). La solution de cette équation d'ap-

[15] voir Scheeres et al. (2001), qui présentent une résolution des équations de Lagrange uniquement pour l'excentricité et la longitude du péricentre, en vue de déterminer si un orbite mène rapidement ou non à une collision avec Europe

[16] Rappelons que ces facteurs ont la même notation pour $e_S$ et $\omega_S$, qu'ils correspondent à la même fréquence de perturbation, mais qu'ils n'ont pas la même expression.

parence simple est en fait assez compliquée :

$$e_{Sprim} = e_{So}\sqrt{\frac{-\dot{\omega}_{sec}+\gamma\cosh\left[2\left(t\sqrt{\gamma^2-\dot{\omega}_{sec}^2}+\operatorname{arctanh}\left[\frac{(\gamma-\dot{\omega}_{sec})\tan\omega_{So}}{\sqrt{\gamma^2-\dot{\omega}_{sec}^2}}\right]\right)\right]}{-\dot{\omega}_{sec}+\gamma\cosh\left[2\operatorname{arctanh}\left[\frac{(\gamma-\dot{\omega}_{sec})\tan\omega_{So}}{\sqrt{\gamma^2-\dot{\omega}_{sec}^2}}\right]\right]}}. \quad (4.48)$$

La solution primaire prend correctement en compte l'effet des longues périodes du potentiel perturbateur de troisième corps, contrairement à la méthode de Kaula (figure 4.3). On remarque que l'effet direct de Jupiter se fait plus rapidement ressentir sur l'excentricité que sur la longitude du péricentre. En effet, il faut environ deux jours au lieu de cinq pour voir la solution approximée diverger de la solution de Kaula.

**Résolution de l'équation pour $M_S$ :**

L'équation de Lagrange pour $M_S$ (équation 4.9) est particulière, puisqu'elle contient un terme qui provient du potentiel central, il s'agit du moyen mouvement $n_S$. Les potentiels perturbateurs induisent la présence de facteurs séculaires, $\alpha_{010}$ et $\gamma_{01100}$, dont la somme $\dot{M}_{sec}$ vaut $4.3\,10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ ou 2.1°/jour (voir tableau C.8). Cette pente n'est pas celle observée sur le graphe de la solution numérique (figure 4.3). Comme pour la longitude du périastre et l'excentricité, les facteurs dominants sont $\gamma_{0,2,1,2,0}$ et $\gamma_{0,0,1,-2,0}$ et vont rendre compte d'un effet à longue période dû à Jupiter. L'équation à intégrer s'écrit

$$\frac{dM_S(t)}{dt} = n_S + \alpha_{010} + \gamma_{01100} + \gamma_{0,2,1,2,0}\cos 2\omega_S + \gamma_{0,0,1,-2,0}\cos 2\omega_S. \quad (4.49)$$

Nous allons prendre comme hypothèses que $\omega_S = \omega_{Sprim}$. Dans les facteurs de perturbation, nous pouvons considérer que $a_S = a_{So}$, $n_S = n_{So}$ et $e_S = e_{So}$, c'est-à-dire négliger leur variation temporelle. Par contre, on ne peut pas remplacer le premier terme du membre de droite par $n_{So}$. En effet, ce terme est beaucoup plus grand que les facteurs de perturbation et même une petite approximation peut causer une grande différence sur la solution obtenue. On peut considérer la valeur moyenne de $n_S$, $\bar{n}_S$, qui découle elle-même de la valeur moyenne de $a_S$, $\bar{a}_S$, sur l'intervalle de dix jours. L'équation devient alors

$$\frac{dM_S(t)}{dt} = \bar{n}_S + \dot{M}_{sec} - \gamma\cos 2\omega_{Sprim}, \quad (4.50)$$

avec $\bar{n}_S$, $\gamma$ et $\dot{M}_{sec}$ donnés dans l'annexe C. La solution primaire est

$$M_{Sprim} = M_S(t_0) + (\bar{n}_S + \dot{M}_{sec} + \dot{\omega}_{sec})t + \omega_{So} - \omega_{Sprim}(t). \quad (4.51)$$

La valeur moyenne du moyen mouvement $\bar{n}_S$ vaut $6,537\,10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$. La différence entre $\bar{n}_S$ et $n_{So}$ est de $2.0\,10^{-6}\mathrm{s}^{-1}$ (9.8°/jour), ce qui n'est pas négligeable par

rapport à $\dot{M}_{sec} = 2.1°/\text{jour}$ et $\dot{\omega}_{sec} = -1.9°/\text{jour}$. Si nous avions malgré tout remplacé le premier terme du membre de droite de l'équation (4.49) par $n_{So}$, nous aurions obtenu un comportement global similaire à celui obtenu avec la méthode de Kaula (courbe verte de la figure 4.3). Donc, la méthode de Kaula ne permet pas de décrire correctement l'effet des variations du demi-grand axe sur l'anomalie moyenne. Enfin, nous remarquons que cette modification du moyen mouvement n'est pas due à l'effet direct de Jupiter uniquement, mais également à l'effet du potentiel perturbateur statique (via $\dot{\omega}_{sec}$ et $\bar{n}_S$).

### 4.6.2 Solution additionnelle

Jusqu'ici, nous avons calculé une solution ayant un comportement global correct. Mais il faut encore calculer les petites variations qui s'additionnent à ce comportement global. On considère alors les termes des potentiels perturbateurs qui ont été négligés dans le cadre du calcul de la solution primaire. Ces petites perturbations seront calculées en remplaçant les éléments orbitaux dans les membres de droite des équations de Lagrange par une approximation de la solution primaire :

$$a_S = a_{So}, \quad i_S = i_{So}, \quad e_S = e_{So}, \tag{4.52}$$
$$\Omega_S = \Omega_{So} + \dot{\Omega}^{cor}_{sec} t, \tag{4.53}$$
$$\omega_S = \omega_{So} + (\partial_t \omega_{Sprim}(t)|_{t_0})t, \tag{4.54}$$
$$M_S = M_S(t_0) + (\bar{n}_S + \dot{M}_{sec} + \dot{\omega}_{sec} - \partial_t\, \omega_{Sprim,1}(t)|_{t_0})t. \tag{4.55}$$

Pour résoudre les équations de Lagrange ainsi construites, il faudra réaliser des intégrations du type

$$\int_{t_0}^{t} \alpha \left\{ \begin{array}{c} \cos\psi \\ \sin\psi \end{array} \right\} dt \qquad \text{ou} \qquad \int_{t_0}^{t} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cos\psi' \\ \sin\psi' \end{array} \right\} dt. \tag{4.56}$$

Ces intégrations sont faciles à réaliser car, dans le cadre des hypothèses retenues, les facteurs $(\alpha, \beta, \gamma)$, qui dépendent de $a_S, e_S$ et $i_S$, ne dépendent pas des variations temporelles de ces trois éléments orbitaux. De plus, les arguments $(\psi, \psi')$ qui dépendent de $\Omega_S, \omega_S$ et $M_S$ sont linéaires par rapport au temps.

### 4.6.3 Solution approximée

La solution finale/approximée est alors la somme de la solution primaire et de la solution additionnelle. Par exemple, la solution approximée pour le

demi-grand axe est donnée par

$$\begin{aligned} a_S(t) &= a_{So} - \sum_{m,p,q} \alpha_{mpq} \frac{\cos\psi_{2mpq}(t) + \cos\psi_{2mpq}(t_0)}{\dot{\psi}_{2mpq}} \\ &\quad - \sum_{\underbrace{m,p,p',q,q'}_{2-2p'+q'-m\neq 0}} \beta_{mpp'qq'} \frac{\cos\psi'_{2mpp'qq'}(t) + \cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_0)}{\dot{\psi}'_{2mpp'qq'}} \\ &\quad - \sum_{m,p,p',q,q'} \gamma_{mpp'qq'} \frac{\cos\psi'_{2mpp'qq'}(t) + \cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_0)}{\dot{\psi}'_{2mpp'qq'}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

La solution approximée pour les six éléments orbitaux est en bon accord avec la solution numérique (courbes rouges de la figure 4.3).

## 4.7 Validité de la nouvelle méthode d'intégration

Nous disposons d'une expression pour la solution analytique approximée (voir par exemple l'équation 4.57 pour le demi-grand axe). Comme cette expression a été obtenue en étudiant l'orbite OrbNom2025, il est nécessaire de vérifier qu'elle peut être utilisée également pour d'autres orbites qui diffèrent soit par la date de départ, soit par les conditions initiales (éléments orbitaux non perturbés). Nous allons également vérifier que cette solution approximée est valide pour une sonde en orbite autour de Ganymède.

### 4.7.1 Date

Pour commencer, nous gardons les éléments orbitaux non perturbés de l'orbite nominale mais nous changeons la date de début de l'arc, $t_0$, pour le premier janvier 2030 (JD 2462502.5, OrbNom2030) ou 2035 (JD 2464328.5, OrbNom2035). La solution approximée est en bon accord avec la solution numérique pour les deux dates (figure 4.4). En particulier, l'augmentation de l'excentricité à cause de l'effet direct de Jupiter est également bien restituée. Par la suite, nous allons garder 2030 comme date de départ pour les orbites autour d'Europe.

### 4.7.2 Demi-grand axe, excentricité et inclinaison

Nous testons maintenant un demi-grand axe tel que $(a_{So} - R)$ vaut 200 ou 600 km (Orb2030Alt200 et Orb2030Alt600, figure 4.5) au lieu de 400 km, ce qui se traduit par une altitude plus basse ou plus haute de la sonde par rapport à Europe. La solution approximée est en bon accord avec la solution numérique pour les deux valeurs du demi-grand axe. Pour l'orbite basse, l'arc

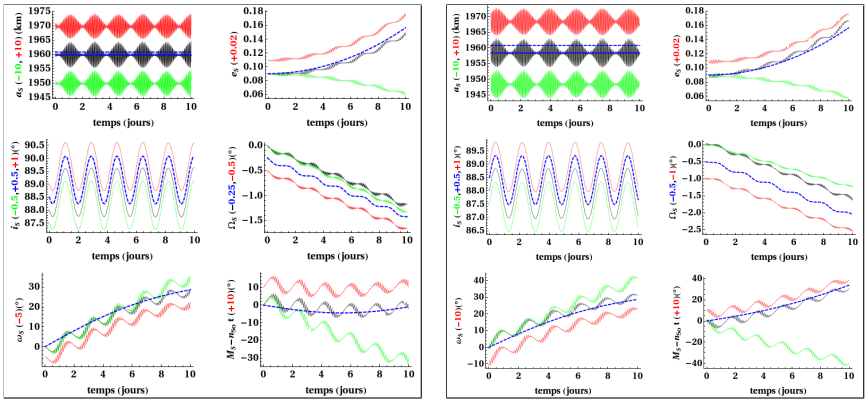


FIG. 4.4 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite OrbNom2030 (gauche) et de l'orbite OrbNom2035 (droite) : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

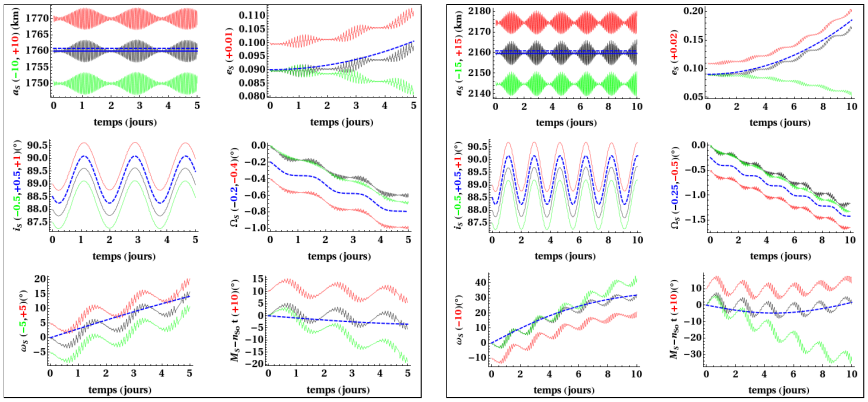


FIG. 4.5 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite Orb2030Alt200 et de l'orbite Orb2030Alt600 : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

d'observation est plus court (cinq jours), car la collision avec Europe se produit plus rapidement. Pour l'orbite haute, on pourrait s'attendre à ce que la collision survienne plus tard que pour l'orbite nominale. Néanmoins, l'effet direct de Jupiter sur l'excentricité est plus important et cause une augmentation plus rapide de l'excentricité, menant à une collision après environ 13 jours,

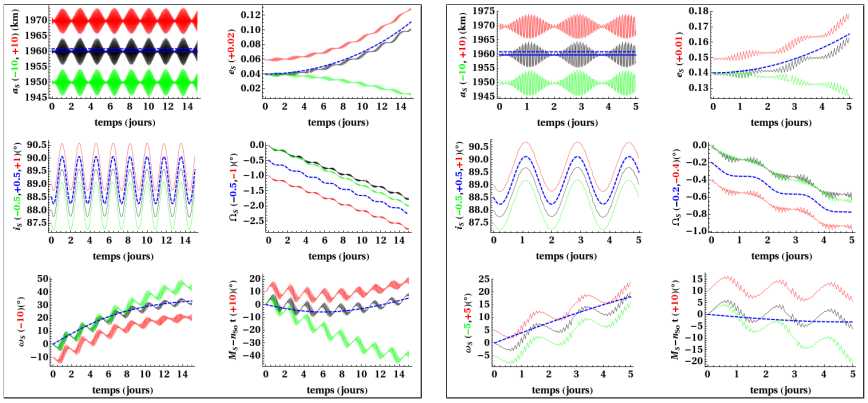

FIG. 4.6 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite Orb2030Ex04 et de l'orbite Orb2030Ex14 : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

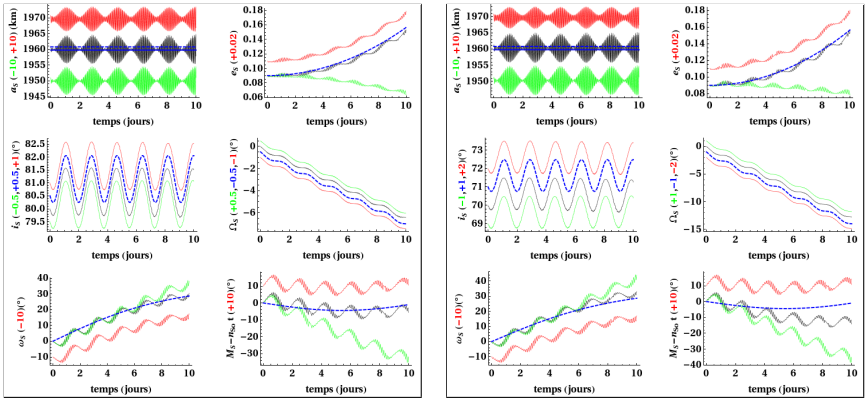

FIG. 4.7 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite Orb2030Inc80 et de l'orbite Orb2030Inc70 : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

comme dans le cas de l'orbite nominale. La durée de l'arc d'observation est donc également de dix jours pour l'orbite haute.

On peut également tester différentes valeurs de l'excentricité : $e_{So} = 0.04$ ou 0.14 (Orb2030Ex04 et Orb2030Ex14, figure 4.6) au lieu 0.09, ce qui se tra-

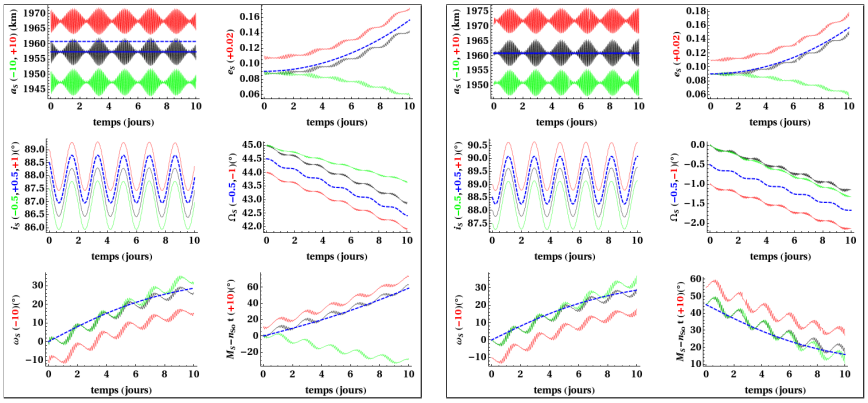


FIG. 4.8 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite Orb2030Nd45 et de l'orbite Orb2030M45 : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

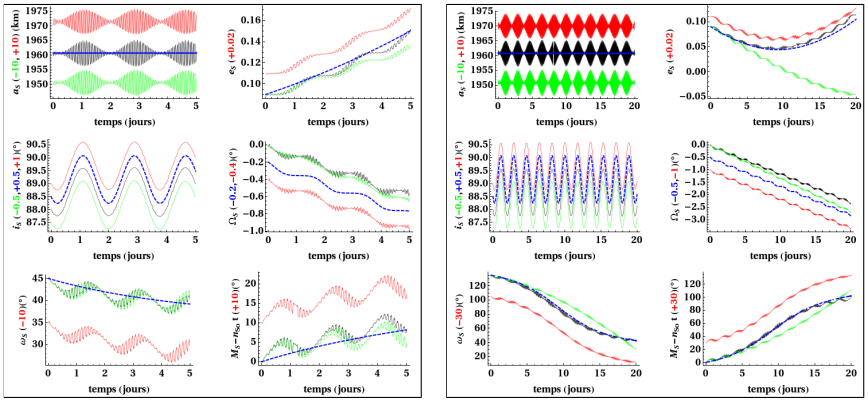


FIG. 4.9 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite Orb2030w45 et de l'orbite Orb2030w135 : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

duit par des variations d'altitude plus petites ou plus grandes de la sonde. La solution approximée est en bon accord avec la solution numérique dans les deux cas. L'arc d'observation pourra être d'autant plus long que l'excentricité de départ est petite (quinze et cinq jours). Malgré tout, même pour de faible excentricité, il serait peut-être judicieux de s'arrêter à dix jours, car au-delà les

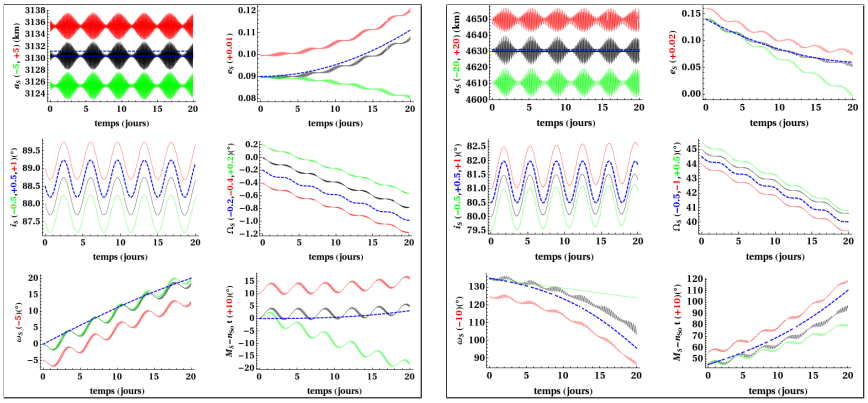


FIG. 4.10 – Évolution des éléments orbitaux de l'orbite OrbGany2030 et de l'orbite OrbGany2035 : intégration numérique (noir), solution de Kaula (vert), solution analytique primaire (tirets bleu), solution analytique approximée (rouge). La ligne continue bleue sur le graphe du demi grand-axe correspond à la valeur moyenne.

petites variations sont de plus en plus mal restituées, à cause des approximations réalisées pour calculer la solution additionnelle (équations 4.52-4.55).

La solution approximée a été développée pour une orbite quasi polaire. On peut la tester pour des orbites moins inclinées avec $i_{So} = 80$ ou $70°$ (Orb2030Inc80 et Orb2030Inc70, figure 4.7). Nous remarquons que la complication engendrée par le fait de ne pas remplacer $\cos i_S$ par $\cos i_{So}$ mais par l'équation (4.39) est inutile. En effet la solution de Kaula est tout aussi satisfaisante que la solution approximée en ce qui concerne l'inclinaison et la longitude du nœud. Par contre, le comportement séculaire de l'anomalie moyenne est d'autant plus mal restitué que l'inclinaison est petite. En fait ce comportement séculaire dépend de la valeur moyenne du demi-grand axe qui a été calculée en considérant[17] que $i_S = 90°$ (annexe C). Par conséquent, au plus on s'éloigne de l'orbite polaire, au moins notre solution approximée telle que présentée précédemment est valide.

[17] Il est tout à fait possible de calculer une expression pour la valeur moyenne du demi-grand axe sans prendre comme hypothèse que $i_S = 90°$, mais cette dernière serait très compliquée et rendrait le calcul des dérivées partielles (chapitre 6) par rapport aux paramètres à inverser fastidieux. Comme nous ne désirons tester que des configurations de mission quasi-polaires (chapitre 7), nous nous contenterons de cette approximation.

### 4.7.3 Longitude du nœud, longitude du péricentre et anomalie moyenne

Le fait de modifier la longitude initiale du nœud ou l'anomalie moyenne initiale influe essentiellement sur la valeur moyenne du demi-grand axe (voir annexe C) et donc sur le comportement global de l'anomalie moyenne (équation 4.51), comme on peut le voir si on pose, par exemple, $\Omega_{So} = 45°$ ou $M_{So}(t_0) = 45°$ (Orb2030Nd45 et Orb2030M45, figure 4.8). Dans les deux cas, la durée de l'arc d'observation n'est pas affectée.

Par contre une modification de la longitude initiale du péricentre va grandement influencer le comportement de l'excentricité (équation 4.48) et la durée de l'arc, selon que la collision avec Europe se produit plus ou moins vite. Par exemple, pour $\omega_{So} = 45°$ ou $135°$ (Orb2030w45 ou Orb2030w135, figure 4.9), on pourra considérer un arc d'environ cinq ou vingt jours, respectivement. Néanmoins, dans le second cas, il serait peut-être mieux de ne considérer que dix jours, car au-delà les petites variations sont de plus en plus mal restituées, comme dans le cas de l'excentricité faible discuté précédemment.

### 4.7.4 Ganymède

Pour tester simplement la validité de la solution approximée dans le cas d'une orbite autour de Ganymède, nous allons considérer deux orbites différentes l'une de l'autre, que ce soit par la date de départ ou par les éléments orbitaux non perturbés. La première orbite commence au premier janvier 2030 (JD 2462502.5, OrbGany2030) et a pour conditions initiales :

$$\begin{aligned} &a_{So} = 3\,131.2\,km,\ e_{So} = 0.09,\ i_{So} = 88° \\ &\Omega_{So} = 0°,\ \omega_{So} = 0°,\ M_{So}(t) = M_{So}(t_0) + n_{So}\,t,\ M_{So}(t_0) = 0°. \end{aligned} \quad (4.58)$$

La seconde commence au premier janvier 2035 (JD 2464328.5, OrbGany2035) et est telle que

$$\begin{aligned} &a_{So} = 4\,631,2\,km,\ e_{So} = 0.14,\ i_{So} = 80° \\ &\Omega_{So} = 45°,\ \omega_{So} = 135°,\ M_{So}(t) = M_{So}(t_0) + n_{So}\,t,\ M_{So}(t_0) = 45°. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pour les deux orbites, la durée de l'arc est de vingt jours et la solution approximée est plus satisfaisante que la solution de Kaula (figure 4.10). Donc, même si Ganymède est plus éloigné de Jupiter qu'Europe, l'effet direct de la planète est aussi significatif que l'effet du potentiel gravitationnel statique. Ce n'est pas si étrange si on se rappelle que les coefficients du potentiel statique sont d'autant plus petits que la distance à la planète est grande. En fait, l'influence du potentiel de troisième corps diminue dans les mêmes proportions que l'influence du potentiel gravitationnel statique lorsque l'on s'éloigne de Jupiter

car

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gr} &\propto G\mathcal{M}C_{2m} \propto q_r \propto n^2 \\ \mathcal{R}_J &\propto \frac{G\mathcal{M}_{\mathcal{J}}}{a_J^3} \propto n^2. \end{aligned} \tag{4.60}$$

## 4.8 Effet des paramètres liés à la rotation

Pour faciliter le raisonnement, nous avions négligé les paramètres liés à la rotation pour trouver l'expression de la solution analytique approximée, c'est-à-dire que nous avions considéré que $C_{22} = \bar{C}_{22}, S_{22} = C_{21} = S_{21} = 0$. Mais nous souhaitons modéliser ces coefficients comme étant fonction du temps et des paramètres liés à la rotation (chapitre 1, équations 1.24-1.27) :

$$C_{22} = \bar{C}_{22} - 2FC_{22}\sin^2 M, \tag{4.61}$$
$$S_{22} = 2FS_{22}\sin M, \tag{4.62}$$
$$C_{21} = FC_{21}^{sin}\sin(\omega^* - \pi + M) - FC_{21}^{cos}\cos(\omega^* - \pi + M), \tag{4.63}$$
$$S_{21} = FS_{21}^{sin}\sin(\omega^* - \pi + M) + FS_{21}^{cos}\cos(\omega^* - \pi + M), \tag{4.64}$$

avec $M$, l'anomalie moyenne du satellite naturel, qui contient la dépendance par rapport au temps, et $\omega^*$, la longitude du périjove par rapport au plan de Laplace. L'intégration des équations de Lagrange est légèrement modifiée par la présence des paramètres lié à la rotation et cachés dans les fonctions $FC_{22}, \ldots, FS_{21}^{cos}$.

Si on associait un facteur de perturbation à chacune de ces fonctions, de la même façon que nous avions attribué les facteurs $\alpha_{mpq}$ aux paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ (équation 4.23), nous verrions que ces facteurs ne seraient jamais dominants dans les équations de Lagrange. Il ne faudra donc tenir compte des paramètres liés à la rotation que dans la solution additionnelle. Les paramètres liés à la rotation auront néanmoins un effet sur la solution primaire, via la valeur moyenne du demi-grand axe $\bar{a}_S$ utilisée pour la solution primaire de $M_S$ (équation 4.51) et qui dérive d'une approximation de la solution additionnelle pour $a_S$ (voir annexe C.3).

Finalement, pour la solution additionnelle, plusieurs types d'intégration doivent être réalisées :

- $\int_{t_0}^{t} \cos\psi\, dt$ et $\int_{t_0}^{t} \sin\psi\, dt$ (comme précédemment, pour $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$),
- $\int_{t_0}^{t} \cos\psi'\, dt$ et $\int_{t_0}^{t} \sin\psi'\, dt$ (comme précédemment, pour $k_2$ et Jupiter),
- $\int_{t_0}^{t} \sin^2 M \cos\psi\, dt$ et $\int_{t_0}^{t} \sin^2 M \sin\psi\, dt$ (pour la partie temporelle de $C_{22}$),

– $\int_{t_0}^{t} \sin M \cos\psi \, dt$ et $\int_{t_0}^{t} \sin M \sin\psi \, dt$ (pour $S_{22}$),
– $\int_{t_0}^{t} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega^* - \pi + M) \\ \cos(\omega^* - \pi + M) \end{array} \right\} \cos\psi \, dt$ et $\int_{t_0}^{t} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega^* - \pi + M) \\ \cos(\omega^* - \pi + M) \end{array} \right\} \sin\psi \, dt$ (pour $C_{21}$ et $S_{21}$).

L'effet de la rotation sur la solution additionnelle et sur $\bar{a}_S$ est de l'ordre de 1% de l'effet de $\bar{C}_{22}$ seul. Il est intéressant que la rotation ait un effet « séculaire » sur l'anomalie moyenne, en plus de ses effets périodiques sur l'ensemble des éléments orbitaux, car à moyen terme, des effets séculaires peuvent être plus facile à détecter que des effets périodiques.

## 4.9 Effet de la dissipation

A cause de la non-élasticité des matériaux et de la dissipation d'énergie qui en découle, la réaction d'un corps aux marées levées par un autre corps n'est pas instantanée.

Le cas des marées terrestres dues à la Lune est bien connu. En principe, le bourrelet de marée devrait être orienté selon l'axe reliant la Terre et la Lune. Mais à cause de la dissipation, il n'apparait qu'après un temps de retard par rapport à l'excitation. La vitesse angulaire de rotation de la Terre étant plus élevée que la vitesse angulaire de révolution de la Lune, le bourrelet de marée est alors en avance par rapport à la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. L'angle formé par la direction du bourrelet et la direction de la Lune est appelé *déphasage de marée* et dépend de la quantité d'énergie dissipée à cause de la non-élasticité.

Le cas des marées des satellites galiléens est un peu plus difficile à envisager intuitivement, à cause de la synchronicité de la rotation et de la révolution. En effet, il faut enlever les termes statiques du potentiel générateur de marée pour obtenir le potentiel générateur du bourrelet périodique donné par l'équation (4.16). Si dans cette équation, on remplace l'inclinaison $i_J$ de Jupiter vu comme en orbite autour du satellite naturel par 0 et l'angle de rotation $\phi$ du ROT par rapport au RO par $\Omega_J + \omega_J + M_J$, on trouve, au premier ordre en $e_J$ :

$$V_{gm}^{per,l=2}(r,\theta,\lambda) = \frac{GM_J r^2 e_J}{a_J^3} \left[ \frac{3}{2} \cos M_J (3\sin^2\theta\cos^2\lambda - 1) + 3\sin^2\theta \sin 2\lambda \sin M_J \right] . \quad (4.65)$$

Ce potentiel est symétrique par rapport à $\theta = \pi/2$. Le premier terme (« radial tide ») est symétrique par rapport à $\lambda = 0$ et $\lambda = \pi/2$. Le second terme (« librational tide ») est symétrique par rapport à $\lambda = \pm\pi/4$. L'amplitude des deux termes varie dans le temps. Au final, le bourrelet qui résulte du potentiel

générateur périodique a une amplitude variable et son maximum fait le tour du satellite en une période égale à la période de révolution/rotation de ce dernier (comme le bourrelet de marée de la Terre qui en fait le tour en à peu près une journée terrestre). Par conséquent, le bourrelet de marée n'est pas aligné avec la direction vers Jupiter. On ne peut donc pas parler d'avance ou de retard par rapport à la direction satellite-Jupiter. Par contre, on peut toujours parler de retard/déphasage par rapport à l'excitation.

Supposons que $\Delta t$ soit le temps de réaction dû à la dissipation. Nous allons prendre en compte ce retard dans le potentiel perturbateur de marée. Pour ce faire, suivant Deleflie (2000), on utilise le potentiel générateur de marée $V_{gm}^{per,l=2}$ (équation 4.16) évalué au temps $(t - \Delta t)$ au lieu du temps $t$ pour dériver le potentiel perturbateur de marée $\mathcal{R}_{tid}(t)$ de l'équation (4.17). Dans la pratique, nous remplaçons l'argument

$$\psi_{2mp'q'}^{gm} = (2 - 2p' + q')M_J + (2 - 2p')\omega_J + m(\Omega_J - \phi - \lambda) \tag{4.66}$$

de l'équation (4.16) par

$$\begin{aligned}&\psi_{2mp'q'}^{gm} - \dot{\psi}_{2mp'q'}^{gm}\Delta t = \\ &(2 - 2p' + q')(M_J - n\Delta t) + (2 - 2p')\omega_J + m(\Omega_J - (\phi - n\Delta t) - \lambda).\end{aligned} \tag{4.67}$$

Pour chaque jeu d'indices, le facteur de dissipation est défini comme étant la valeur absolue de l'inverse du déphasage dû à la dissipation : $Q_{2mp'q'} = 1/(|\dot{\psi}_{2mp'q'}^{gm}|\Delta t)$, de sorte que

$$\psi_{2mp'q'}^{gm} - \dot{\psi}_{2mp'q'}^{gm}\Delta t = \psi_{2mp'q'}^{gm} + \frac{sign(\dot{\psi}_{2mp'q'}^{gm})}{Q_{2mp'q'}}. \tag{4.68}$$

En principe, le temps de réponse du corps peut dépendre de la fréquence du forçage auquel il est soumis, et il faut remplacer $\Delta t$ par

$$\Delta t_{2mp'q'} = \mathcal{E}^{-\alpha}|\dot{\psi}_{2mp'q'}^{gm}|^{-(\alpha+1)}, \tag{4.69}$$

avec $\alpha = 0.3 \pm 0.1$ et $\mathcal{E}$ qui est un paramètre dépendant de la rhéologie (Efroimsky et Lainey, 2007). Le facteur de dissipation devient

$$Q_{2mp'q'} = \mathcal{E}^{\alpha}|\dot{\psi}_{2mp'q'}^{gm}|^{\alpha}. \tag{4.70}$$

L'avantage de cette reformulation est que la dissipation n'est plus paramétrée par un ensemble de plusieurs facteurs de dissipation $Q_{2mp'q'}$, correspondant aux différentes fréquences considérées, mais par le seul paramètre $\mathcal{E}$. Or, étant donné que nous avons considéré une inclinaison $i_J$ nulle pour Jupiter[18], la seule

[18]L'inclinaison de Jupiter, vu comme en orbite autour d'un satellite naturel, dans un référentiel dont le plan (x,y) est le plan orbital du satellite naturel, est nulle.

fréquence pour laquelle le potentiel générateur de marée ne s'annule pas est la fréquence principale (fréquence de révolution/rotation d'Europe et $(2-2p'+q'-m)=\pm 1$). Il n'est donc pas nécessaire de considérer ici la dépendance en fréquence de $Q$ et de $\Delta t$. Nous allons donc considérer que :

$$\psi^{gm}_{2mp'q'} - \dot{\psi}^{gm}_{2mp'q'}\Delta t = \psi^{gm}_{2mp'q'} + \frac{sign(\dot{\psi}^{gm}_{2mp'q'})}{Q}. \tag{4.71}$$

Dans $\mathcal{R}_{tid}(t)$ (équation 4.17), l'argument $\psi'_{2mpp'qq'}$ doit alors être remplacé par

$$\begin{aligned}\psi'_{2mpp'qq'} &= (2-2p+q)M_S - (2-2p'+q')M_J + (2-2p)\omega_S \\ &\quad -(2-2p')\omega_J + m(\Omega_S - \Omega_J) + sign(2-2p'+q'-m)/Q. \end{aligned}\tag{4.72}$$

Les conséquences sur la solution approximée sont les suivantes :

- Le facteur de dissipation n'aura pas d'effet sur la solution primaire, puisque le potentiel perturbateur de marée n'intervient pas dans la solution primaire.

- La solution additionnelle est affectée par la dissipation. Les termes de la solution additionnelle dérivant du potentiel perturbateur de marée seront simplement légèrement déphasés par rapport à la solution sans dissipation.

# Chapitre 5

# Modélisation de l'observable Doppler et signature des paramètres géophysiques

## Sommaire


**5.1 Définition de l'observable Doppler . . . . . 120**
**5.2 Valeurs numériques des constantes . . . . . 124**
5.2.1 Éléments orbitaux . . . . . 124
5.2.2 Paramètres d'orientation . . . . . 126
5.2.3 Longitude du périjove d'Europe et de Ganymède par rapport au plan de Laplace . . . . . 127
5.2.4 Angles de rotation . . . . . 128
**5.3 Sensibilité de l'observable Doppler aux paramètres géophysiques . . . . . 129**
5.3.1 Observable Doppler pour une sonde en orbite keplerienne . . . . . 129
5.3.2 Effet de Jupiter sur l'observable Doppler . . . . . 131
5.3.3 Effet total des paramètres géophysiques . . . . . 132
5.3.4 Effets individuels des paramètres géophysiques . . 133
**5.4 Visibilité de la sonde, orbite face-on ou edge-on et angle $\beta$ . . . . . 139**


Dans le chapitre précédent, nous avons établi comment les paramètres géophysiques influencent le mouvement de la sonde. Nous allons maintenant estimer leur effet sur une quantité qui peut être mesurée et qui dépend de ce mouvement. Cette quantité est le décalage en fréquence perçu par une station d'observation terrestre sur le signal radio émis par la sonde. Ce décalage est dû

à l'effet Doppler induit par les variations de la vitesse relative de la sonde par rapport à la station. Pour modéliser cette quantité mesurable (ou observable), nous utiliserons donc la vitesse relative projetée sur la ligne reliant la sonde et la station, qui est proportionnelle au décalage en fréquence, et que nous appellerons *observable Doppler*.

## 5.1 Définition de l'observable Doppler

La trajectoire de la sonde est représentée par la variation au cours du temps des composantes du *vecteur Station-Sonde* $\overrightarrow{DS}$ donnant la position de l'orbiteur par rapport à la station terrestre. Comme illustré dans la figure (5.1), ce vecteur peut être calculé comme la somme de plusieurs vecteurs :

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{TH} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GS}, \tag{5.1}$$

avec

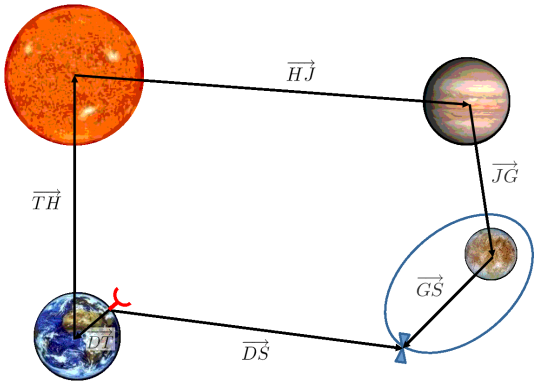


FIG. 5.1 – Définition des vecteurs intervenant dans la définition du vecteur Station-Sonde $\vec{DS}$.

- $D$ (pour Doppler), la station d'observation située à la surface de la Terre,
- $T$, le centre de masse de la Terre,
- $H$, le centre de masse du Soleil,
- $J$, le centre de masse de Jupiter,
- $G$, le centre de masse du satellite galiléen considéré (Europe ou Ganymède),
- et $S$, la Sonde/orbiteur.

Nous exprimerons les composantes de chaque vecteur dans un même référentiel inertiel lié au plan de l'écliptique à l'époque $J2000$.

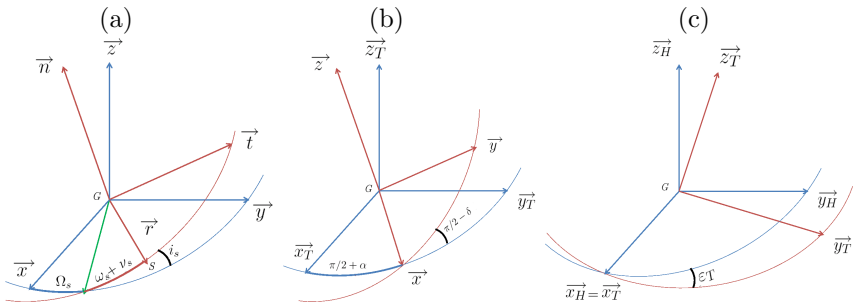


FIG. 5.2 – Définition des angles de passage entre les différents repères dans lesquels le vecteur $\overrightarrow{GS}$ est exprimé (passage d'un repère lié à la sonde à un repère lié au satellite naturel, passage de ce dernier à l'ICRF, et enfin passage dans le repère lié à l'écliptique).

Le vecteur $\overrightarrow{GS}$ est calculé au moyen des éléments orbitaux de la sonde qui ont été introduits dans le chapitre précédent. On définit le repère $\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}\}$ comme étant le repère centré sur Europe ou Ganymède, avec (voir figure 5.2)

- $\overrightarrow{r}$, l'axe orienté selon la direction Europe/Ganymède-Sonde,
- $\overrightarrow{t}$, l'axe orienté selon la tangente à la trajectoire de la sonde,
- $\overrightarrow{n}$, l'axe normal au plan orbital de la sonde.

Ce repère dépend donc de la position de la sonde au cours du temps et le vecteur $\overrightarrow{GS}$ y a une expression simple

$$\overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{r},\overrightarrow{t},\overrightarrow{n}\}} = \begin{pmatrix} r_S(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

avec $r_S(t)$ la distance du satellite à la sonde, et qui dépend du demi-grand axe $a_S$, de l'excentricité $e_s$ et de l'anomalie excentrique $E_s(t)$ de la sonde (voir annexe D). Nous allons ensuite exprimer ce vecteur dans un repère d'axes fixes et dont le plan équatorial est le plan de l'orbite du satellite naturel au début de l'arc d'observation (le RO, ou Repère-Orbite, défini au début du chapitre précédent), $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\}$. Le changement est facile à réaliser car le nouveau repère est celui par rapport auquel les éléments orbitaux de la sonde sont définis. On obtient alors

$$\overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\}} = R_z[-\Omega_s]R_x[-i_s]R_z[-(\omega_s + \nu_s(t))] \quad \overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{r},\overrightarrow{t},\overrightarrow{n}\}}, \tag{5.3}$$

avec $\nu_s(t)$ l'anomalie vraie de la sonde, et $R_x$ et $R_z$ les matrices de rotation définies par l'équation (1.11). On passera ensuite dans un repère d'axes fixes lié au plan équatorial de la Terre, l'ICRF à l'époque J2000, noté $\{\overrightarrow{x_T}, \overrightarrow{y_T}, \overrightarrow{z_T}\}$. Nous

utilisons les paramètres d'orientation de l'axe de l'orbite du satellite naturel, c'est-à-dire son ascension droite $\alpha$ et sa déclinaison $\delta$ (voir aussi section 5.2.2) :

$$\overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{x_T},\overrightarrow{y_T},\overrightarrow{z_T}\}} = R_z[-(\pi/2+\alpha)]R_x[-(\pi/2-\delta)] \quad \overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\}}. \tag{5.4}$$

Deux rotations sont suffisantes car nous avons défini l'axe $\vec{x}$ comme étant l'intersection du plan de l'orbite d'Europe et du plan équatorial de l'ICRF, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nœud entre les deux plans (voir figure 5.2b). Enfin, nous passons dans le repère de l'écliptique J2000, noté $\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}$, en tenant simplement compte de l'obliquité de la Terre $\varepsilon_T$ à l'époque J2000[1] :

$$\overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} = R_x[\varepsilon_T] \quad \overrightarrow{GS}_{\{\overrightarrow{x_T},\overrightarrow{y_T},\overrightarrow{z_T}\}}. \tag{5.5}$$

Nous suivons un raisonnement similaire pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{JG}$ dans le repère inertiel :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JG}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} &= R_x[\varepsilon_T] \quad R_z[-(\frac{\pi}{2}+\alpha_J)]R_x[-(\frac{\pi}{2}-\delta_J)] \\ &\quad R_z[-\Omega]R_x[-i]R_z[-(\omega+\nu(t))] \quad \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5.6}$$

avec $\Omega$, $i$, $\omega$, $\nu(t)$, $a$, $e$ et $r(t)$, les éléments orbitaux du satellite naturel considéré comme étant en orbite keplerienne autour de Jupiter (voir section 5.2.1), définis par rapport à un repère lié à l'équateur de Jupiter à l'époque J2000. Les angles $\alpha_J$ et $\delta_J$ permettent d'orienter ce dernier par rapport à l'ICRF (section 5.2.2).

Les éléments orbitaux de Jupiter (indicés[2] par ♃) et de la Terre (indicés par $T$), dans leur mouvement autour du Soleil, sont définis par rapport au repère inertiel de l'écliptique J2000 (voir aussi section 5.2.1). Par conséquent, nous avons que

$$\overrightarrow{HJ}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} = R_z[-\Omega_♃]R_x[-i_♃]R_z[-(\omega_♃+\nu_♃(t))] \begin{pmatrix} r_♃(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TH}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} &= -\overrightarrow{HT}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} \\ &= -R_z[-\Omega_T]R_x[-i_T]R_z[-(\omega_T+\nu_T(t))] \begin{pmatrix} r_T(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

[1] Il n'y a pas de signe moins devant l'obliquité car elle est définie positivement du plan de l'équateur terrestre au plan de l'écliptique, puisque le point vernal (direction de $\vec{x}_T = \vec{x}_H$) est défini comme étant le nœud ascendant de l'orbite terrestre par rapport au plan équatorial terrestre.

[2] L'indice $J$ a déjà été utilisé dans le chapitre précédent pour définir les éléments orbitaux de Jupiter vu comme en mouvement autour du satellite naturel.

La position de la station d'observation dans un repère fixé à la Terre (repère tournant) est donnée par ses coordonnées sphériques (rayon $r_D$, latitude $\theta_D$ et longitude $\lambda_D$) ou par ses coordonnées cartésiennes ($r_D \cos\theta_D \cos\lambda_D, r_D \cos\theta_D \sin\lambda_D, r_D \sin\theta_D$). Les coordonnées cartésiennes sont définies, dans le repère tournant, par rapport à un méridien de référence, le méridien de Greenwich. Pour passer dans un repère d'axes fixes dans l'espace, il faut effectuer la rotation $R_z[-\phi_T]$, avec $\phi_T$, l'angle de rotation du méridien de référence par rapport au nœud de l'équateur du repère tournant sur l'équateur de l'ICRF. Pour passer dans l'ICRF, il faut encore effectuer deux rotations : $R_z[-(\frac{\pi}{2}+\alpha_T)]R_x[-(\frac{\pi}{2}-\delta_T)]$, avec $\alpha_T$ et $\delta_T$, les paramètres d'orientation de l'axe de rotation de la Terre, au début de l'arc d'observation, par rapport à l'ICRF. Le vecteur $\overrightarrow{TD}$ est donc donné par

$$\overrightarrow{TD}_{\{\overrightarrow{x_T},\overrightarrow{y_T},\overrightarrow{z_T}\}} = R_z[-(\frac{\pi}{2}+\alpha_T)]R_x[-(\frac{\pi}{2}-\delta_T)]R_z[-\phi_T] \begin{pmatrix} r_D \cos\theta_D \cos\lambda_D \\ r_D \cos\theta_D \sin\lambda_D \\ r_D \sin\theta_D \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

dans l'ICRF, et par

$$\overrightarrow{DT}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} = -\overrightarrow{TD}_{\{\overrightarrow{x_H},\overrightarrow{y_H},\overrightarrow{z_H}\}} = -R_x[\varepsilon_T] \quad \overrightarrow{TD}_{\{\overrightarrow{x_T},\overrightarrow{y_T},\overrightarrow{z_T}\}} \tag{5.10}$$

dans le référentiel inertiel (écliptique J2000).

Nous avons défini toutes les composantes de l'équation (5.1). Le vecteur Station-Sonde dépend du temps via

- les anomalies vraies et excentriques d'Europe (ou Ganymède), de Jupiter et de la Terre, qui décrivent des orbites kepleriennes dans notre modèle,
- les éléments orbitaux de la sonde, qui décrit une orbite keplerienne perturbée (ces éléments ont été calculés dans le chapitre précédent en fonction du temps et des paramètres géophysiques),
- l'angle de rotation de la Terre, qui varie de façon uniforme dans notre modèle.

Les anomalies vraies et excentriques $\nu(t)$ et $E(t)$ des différents corps n'ont pas d'expression simple en fonction du temps mais elles peuvent s'exprimer en fonction de l'anomalie moyenne $M(t) = M(t_o) + nt$ (voir annexe D).

La distance Station-Sonde est la norme du vecteur Station-Sonde :

$$\mathbf{DS} = ||\overrightarrow{DS}|| = ||\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{TH} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GS}||. \tag{5.11}$$

Dans la pratique, la distance peut être mesurée à partir du temps de parcours du signal radio émis par l'orbiteur et reçu par un observateur terrestre (on parle

de *Ranging*). Le vecteur vitesse, dans un référentiel inertiel, peut être calculé comme étant la dérivée temporelle du vecteur Station-Sonde

$$\overrightarrow{V} = \frac{d(\overrightarrow{DS})}{dt}. \tag{5.12}$$

L'observable Doppler, $\mathbf{V_{rel}}$, est la projection du vecteur vitesse le long de la ligne de visée ou, de manière équivalente, sur le vecteur Station-Sonde normalisé (Yseboodt et al., 2003) :

$$\mathbf{V_{rel}} = \frac{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{DS}}{\mathbf{DS}}. \tag{5.13}$$

## 5.2 Valeurs numériques des constantes apparaissant dans l'observable Doppler

L'obliquité de la Terre à l'époque J2000 vaut (Ahrens, 1995) :

$$\varepsilon_T = 23^\circ 26' 21''.4119. \tag{5.14}$$

Nous avons choisi la station de poursuite située à Goldstone (USA) dont les coordonnées sphériques sont (Sniffin 2005)

$$r_D = 6\,372\,125.096\,\mathrm{m},\ \theta_D = 35.0660180^\circ,\ \lambda_D = 243.2055410^\circ. \tag{5.15}$$

Notons que le choix de la station importe peu[3] dans le cadre de notre étude.

### 5.2.1 Éléments orbitaux

#### Terre et Jupiter

Les éléments orbitaux moyens de la Terre et de Jupiter, dans un référentiel inertiel lié à l'écliptique à l'époque J2000, sont donnés sous forme de développement linéaire par rapport au temps (Ahrens, 1995) :

[3]Une autre station correspondrait simplement à d'autres temps de mesures. Puisque la période orbitale de la sonde (quelques heures) est plus petite que la période de non-visibilité due à la rotation de la Terre (environ 12 heures, voir section 5.4), l'information contenue dans les mesures, c'est-à-dire la façon dont la trajectoire de la sonde est affectée par les paramètres géophysiques, serait équivalente.

$$
\begin{aligned}
a_T &= (1.00000011 - 0.00000005\,T)\,\mathrm{UA},\\
e_T &= 0.01671022 - 0.00003804\,T,\\
i_T &= (0.00005 - 46.94\,T/3600)^\circ,\\
\Omega_T &= (-11.26064 - 18228.25\,T/3600)^\circ,\\
\omega_T &= (114.20783 + 19426.53\,T/3600)^\circ,\\
M_T &= (357.52716 + 129596541.72\,T/3600)^\circ,\\
n_T &= 1.99106\,10^{-7}\,\mathrm{rad/s},
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{\mathrm{♃}} &= (5.20336301 + 0.00060737\,T)\,\mathrm{UA},\\
e_{\mathrm{♃}} &= 0.04839266 - 0.00012880\,T,\\
i_{\mathrm{♃}} &= (1.30530 - 4.15\,T/3600)^\circ,\\
\Omega_{\mathrm{♃}} &= (100.55615 + 1217.17\,T/3600)^\circ,\\
\omega_{\mathrm{♃}} &= (274.19770 - 377.24\,T/3600)^\circ,\\
M_{\mathrm{♃}} &= (19.65053 + 10924238.42\,T/3600)^\circ,\\
n_{\mathrm{♃}} &= 1.67926\,10^{-8}\,\mathrm{rad/s}.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

où $T$ est le temps (en siècles juliens) écoulés depuis l'époque J2000. Il est facile de calculer la valeur de ces éléments orbitaux en $t_o$, date de début de l'arc d'observation. On considèrera ensuite que les orbites sont keplériennes, car sur l'échelle de temps considérée (au maximum dix ou vingt jours pour Europe et Ganymède respectivement, voir chapitre précédent), les variations temporelles des éléments $a, e, i, \Omega, \omega$ et $n$ pour la Terre et Jupiter peuvent être négligées.

**Europe et Ganymède**

Les éléments orbitaux d'Europe et de Ganymède au temps $t_o$ sont obtenus à partir des éphémérides des satellites galiléens de Lainey et al. (2006). On considèrera ensuite que l'orbite du satellite naturel est keplerienne[4]. Par exemple, les éléments orbitaux d'Europe pour $t_o$ pris au premier janvier 2030 (JD 2462502.5) sont

$$
\begin{aligned}
&a = 671\,243\,\mathrm{km}, \quad e = 9.63\,10^{-3}, \quad i = 0^\circ.4508,\\
&\Omega = 187^\circ.081, \quad \omega = 217^\circ.823, \quad M = 23^\circ.189 + n\,t,\\
&n = 2.0471\,10^{-5}\,\mathrm{rad/s},
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

[4]On néglige donc la variation de la longitude du péricentre due à la résonance de Laplace et qui est relativement importante pour Europe (0.7°/jour, voir Lainey et al. 2006), mais négligeable devant le moyen mouvement (101°/jour).

et ceux de Ganymède sont donnés par

$$\begin{aligned} &a = 1\,070\,514\,\text{km}, \quad e = 1.65\,10^{-3}, \quad i = 0^{\circ}.1323, \\ &\Omega = 348^{\circ}.613, \quad \omega = 345.851^{\circ}, \quad M = 1^{\circ}.440 + n\,t, \\ &n = 1.0164\,10^{-5}\,\text{rad/s}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

### 5.2.2 Paramètres d'orientation

Les paramètres d'orientation d'un corps sont les coordonnées équatoriales dans l'ICRF (ascension droite $\alpha$ et déclinaison $\delta$) d'un vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation du corps considéré, ou à la normale à son orbite si l'orientation de son axe de rotation n'est pas connue. Les coordonnées cartésiennes correspondantes sont :

$$x = \cos\delta\cos\alpha, \quad y = \cos\delta\sin\alpha, \quad z = \sin\delta. \tag{5.20}$$

Les paramètres d'orientation d'un corps varient dans le temps à cause de la précession de son axe de rotation ou de son orbite.

#### Terre

L'axe de rotation de la Terre précesse avec une période d'environ 258 siècles autour d'une position moyenne. Dans les conventions de l'IAU (Seidelmann et al., 2007 et Archinal et al. 2011), les paramètres d'orientation de la Terre sont exprimés par rapport à son orientation en J2000 (qui définit d'ailleurs l'ICRF) et non par rapport à la position moyenne. De plus, ils sont linéarisés autour de l'époque J2000, c'est pourquoi la période de précession n'apparait pas explicitement dans l'expression des paramètres d'orientation :

$$\alpha_T = -0^{\circ}.641T \quad \text{et} \quad \delta_T = 90^{\circ} - 0^{\circ}.557T. \tag{5.21}$$

#### Jupiter

Étant donné que nous utilisons les éphémérides de Lainey et al. (2006) pour décrire le mouvement des satellites galiléens, il est logique d'utiliser l'orientation du pôle de Jupiter à l'époque J2000 associée à ces éphémérides et donnée dans Lainey et al. (2004) :

$$\alpha_J = 268.070^{\circ} \quad \text{et} \quad \delta_J = 64.498^{\circ}. \tag{5.22}$$

Ces valeurs sont proches de celles des conventions de l'IAU pour la même époque ($\alpha_J = 268.057^{\circ}$ et $\delta_J = 64.496^{\circ}$).

**Europe et Ganymède**

L'orientation de l'axe de rotation des satellites galiléens n'est pas connue à ce jour. C'est pourquoi nous avons décrit le mouvement de la sonde dans un repère lié à l'orbite du satellite naturel (RO) et non à son axe de rotation. Les paramètres d'orientation des axes normaux aux orbites des satellites galiléens peuvent alors être calculés à partir des éphémérides qui décrivent leur mouvement. En effet, leur orbite est décrite dans un repère centré sur Jupiter et d'axes fixes, dont l'orientation est donnée en (5.22). Dans ce repère, on peut définir une ascension droite et une déclinaison qui sont liées à la longitude du nœud et à l'inclinaison de l'orbite données en (5.18-5.19) :

$$\tilde{\alpha} = -\frac{\pi}{2} + \Omega, \tag{5.23}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\pi}{2} - i, \tag{5.24}$$

et en déduire des coordonnées cartésiennes $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ grâce à l'équation (5.20). On passe alors du repère équatorial Jovien à l'ICRF en effectuant une rotation d'angle $(-\pi/2 - \alpha_J)$ selon l'axe $z$ suivie d'une rotation d'angle $(-\pi/2 + \delta_J)$ selon l'axe $x$, pour obtenir les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ dans l'ICRF. En inversant l'équation (5.20), on obtient alors l'ascension droite et la déclinaison dans l'ICRF :

$$\alpha = 267.939^\circ \quad \text{et} \quad \delta = 64.9453^\circ \quad \text{pour Europe,} \tag{5.25}$$

$$\alpha = 268.010^\circ \quad \text{et} \quad \delta = 64.3683^\circ \quad \text{pour Ganymède.} \tag{5.26}$$

Ces valeurs sont assez proches de celles des conventions de l'IAU pour la même époque ($\alpha = 267.915^\circ$ et $\delta = 64.9504^\circ$ pour Europe, $\alpha = 267.855^\circ$ et $\delta = 64.3911^\circ$ pour Ganymède). Leur avantage est qu'elles sont cohérentes avec le modèle orbital choisi (Lainey et al. 2006).

### 5.2.3 Longitude du périjove d'Europe et de Ganymède par rapport au plan de Laplace

Pour calculer l'effet des paramètres liés à la rotation sur les éléments orbitaux de la sonde, il faut connaître la valeur du périjove de l'orbite du satellite naturel, par rapport au plan de Laplace. Nous avons vu dans le chapitre 1 que cette longitude est donnée par

$$\omega^* \simeq \omega + \Omega - (\Omega_{LP} + \Omega^*), \tag{5.27}$$

avec $\Omega^*$ la longitude du nœud de l'orbite du satellite naturel par rapport au plan de Laplace et $\Omega_{LP}$ la longitude du plan de Laplace par rapport au repère équatorial de Jupiter. A partir des coordonnées cartésiennes $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ de la normale à l'orbite dans le repère équatorial de Jupiter, on réalise deux rotations

($R_z[\Omega_{LP}]$, suivie de $R_x[i_{LP}]$, avec $i_{LP}$ l'inclinaison du plan de Laplace par rapport au plan équatorial de Jupiter) pour se ramener dans un repère lié au plan de Laplace. On obtient alors les coordonnées $(x^*, y^*, z^*)$ à partir desquelles on retrouve une ascension droite $\alpha^*$ et la longitude du nœud $\Omega^*$. La longitude $\omega^*$ peut alors être calculée.

La longitude du nœud et l'inclinaison du plan de Laplace sont obtenues à partir de Lainey et al. (2006). Pour Europe, $\Omega_{LP} = 138.283^\circ$, $i_{LP} = 0.019^\circ$ et par conséquent $\Omega^* = 50.672^\circ$ et $\omega^* = 215.950^\circ$. Pour Ganymède, $\Omega_{LP} = 138.277^\circ$, $i_{LP} = 0.098^\circ$, $\Omega_* = 197.497^\circ$ et $\omega^* = 358.691^\circ$.

### 5.2.4 Angles de rotation

**Terre**

Comme ses paramètres d'orientation, l'angle de rotation de la Terre est également donné dans les conventions de l'IAU

$$\phi_T = 190.147 + 360.9856235^\circ d, \tag{5.28}$$

avec $d$ le temps en jours[5] depuis J2000. Sa valeur en $t_o$ est de $10^\circ.1165$.

**Europe et Ganymède**

L'angle de rotation de l'axe $x$ du ROT (Repère Orbite Tournant) par rapport à l'ICRF est égal à l'angle de la rotation moyenne du satellite naturel considéré par rapport à l'ICRF. Cet angle n'apparait pas explicitement dans la section (5.1). En fait, tout comme la longitude $\omega^*$, il est caché dans le calcul des perturbations des éléments orbitaux de la sonde (chapitre 4). Comme pour les paramètres d'orientation, il est possible de calculer les angles de rotation des satellites galiléens à partir des éphémérides. Au temps $t_o$, l'angle de rotation vaut

$$\phi(t_o) = \tau + \omega + M(t_o), \tag{5.29}$$

avec, puisque $\alpha_J > \alpha$, $\tau$ tel que[6] (voir figure 5.3)

$$\frac{\sin\tau}{\sin(\pi/2 + \delta_J)} = \frac{\sin(\alpha_J - \alpha)}{\sin i} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(\Omega + \pi)}{\sin(\pi/2 - \delta)}. \tag{5.30}$$

On trouve alors les valeurs suivantes

$$\phi(t_o) = 248.213^\circ, \quad \text{pour Europe,} \tag{5.31}$$

$$\phi(t_o) = 237.008^\circ, \quad \text{pour Ganymède,} \tag{5.32}$$

[5] 1 jour= 86400 secondes et la fréquence de rotation de la Terre correspond à la période de rotation sidérale de $23h56m4.1s$, c'est pourquoi le facteur devant $d$ n'est pas égal à $360^\circ$.

[6] En principe la solution de l'arc sinus est double : $\varrho$ et $\pi - \varrho$. Nous avons choisi la solution qui donne le résultat le plus proche des valeurs obtenues à partir de conventions de l'IAU.

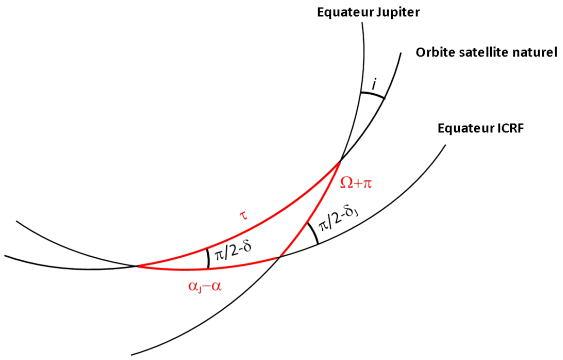


FIG. 5.3 – Définition de l'angle $\tau$ qui permet de calculer l'angle du rotation du satellite naturel (voir équation 5.29)

qui sont assez proches des valeurs fournies par les conventions de l'IAU (249.702° et 239.451°, respectivement). L'angle de rotation en fonction du temps est défini par

$$\phi = 248.213^\circ + n\,t, \quad \text{pour Europe,} \tag{5.33}$$
$$\phi = 237.008^\circ + n\,t, \quad \text{pour Ganymède,} \tag{5.34}$$

avec $t$ le temps depuis $t_o$ et $n$ donné par les équations (5.18) ou (5.19).

## 5.3 Sensibilité de l'observable Doppler aux paramètres géophysiques

### 5.3.1 Distance et observable Doppler pour une sonde en orbite keplerienne

Pour évaluer l'effet de Jupiter et des paramètres géophysiques sur l'observable Doppler, il est nécessaire de connaître le comportement de l'observable en l'absence de ces sources de perturbations. Nous calculons donc la distance station-sonde et l'observable Doppler pour le cas non réaliste où la sonde garde un mouvement keplerien autour d'Europe ou de Ganymède. Se ramener au cas keplerien dans les équations (5.11) et (5.13) revient à annuler les trois potentiels perturbateurs dans (4.11). C'est équivalent à annuler, d'une part, les paramètres géophysiques, et d'autre part, le potentiel perturbateur lié à l'in-

fluence directe de Jupiter sur la sonde :

$$\mathbf{DS^{Kep}} = \mathbf{DS}(\{C_{20}, \bar{C}_{22}, g_s, g_i, \varepsilon_s, \varepsilon_i, \mu_s, \mu_i, C^s_{20}, C^s_{22}, k_2, Q\} = 0 \,\text{et}\, \mathcal{R}_J = 0), \tag{5.35}$$

$$\mathbf{V^{Kep}_{rel}} = \mathbf{V_{rel}}(\{C_{20}, \bar{C}_{22}, g_s, g_i, \varepsilon_s, \varepsilon_i, \mu_s, \mu_i, C^s_{20}, C^s_{22}, k_2, Q\} = 0 \,\text{et}\, \mathcal{R}_J = 0). \tag{5.36}$$

Nous prenons comme date de départ le 1er janvier 2030 (JD 2462502.5). Les conditions initiales sont données en (4.20) pour l'orbite autour d'Europe et en (4.58) pour l'orbite autour de Ganymède. Il s'agit en fait des versions non perturbées des orbites **OrbNom2030** et **OrbGany2030** définies dans le chapitre précédent. Nous considérons des arcs d'observation de dix et vingt jours pour l'orbite autour d'Europe et de Ganymède, respectivement. Il est inutile de considérer des arcs plus longs car nous souhaitons comparer ces observables « keplerienne » avec les observables qui résultent des orbites perturbées commençant à la même date avec les mêmes conditions initiales et pour lesquelles la collision avec le satellite naturel se produit peu après la fin de l'arc (voir section 4.3).

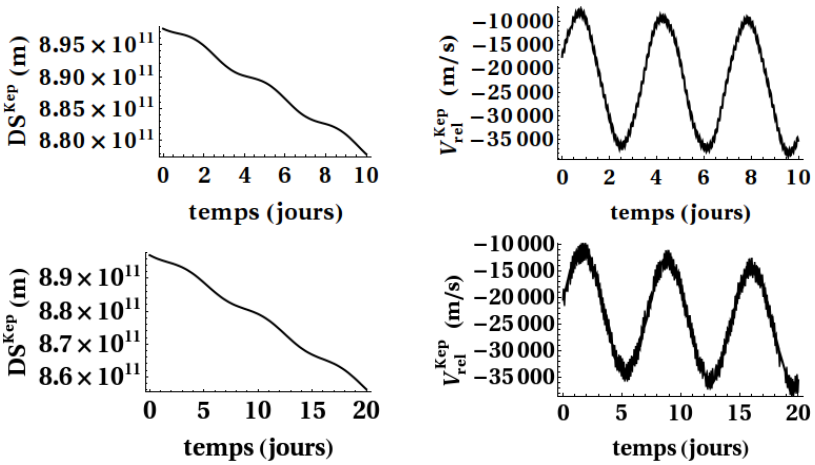


FIG. 5.4 – Évolution de la distance Station-Sonde **DS** (gauche) et de l'observable Doppler $\mathbf{V_{rel}}$ (droite) durant l'arc d'observation, pour une sonde en orbite keplerienne autour d'Europe (haut) ou de Ganymède (bas).

Que ce soit pour l'orbite autour d'Europe ou celle autour de Ganymède, la distance station-sonde est de l'ordre de grandeur du demi-grand axe de Jupiter par rapport au Soleil (figure 5.4, gauche). Globalement la distance décroit au cours du temps car la Terre et Jupiter se rapprochent l'une de l'autre durant l'arc d'observation. On observe une variation dont la période est celle de

révolution du satellite naturel considéré (3.55 jours pour l'orbite autour d'Europe, 7.15 jours pour Ganymède) et dont l'amplitude est de l'ordre de son grand axe ($\sim 10^9$ m pour Europe, $\sim 2\,10^9$ m pour Ganymède). La période orbitale de la sonde (2h41min autour d'Europe et 3h05min autour de Ganymède) n'apparait pas distinctement sur les graphes de la distance car l'amplitude associée est de l'ordre de $2a_{So} = 4\,10^6$ et $6\,10^6$ m, respectivement. Cette amplitude est en effet au moins deux ordres de grandeurs plus petite que l'amplitude du mouvement du satellite naturel.

En ce qui concerne l'observable Doppler, on observe à nouveau la périodicité de 3.55 ou 7.15 jours (figure 5.4, droite). De plus, le mouvement de la sonde est perceptible grâce à sa relative rapidité. Par exemple, la vitesse de la sonde en orbite autour d'Europe est de 1.3 km/s, soit environ dix fois moins que la vitesse d'Europe dans son mouvement autour de Jupiter (14 km/s). L'observable Doppler est donc plus sensible au mouvement de la sonde que l'observable distance. Cette conclusion sera valable également pour le cas d'une orbite perturbée. Par conséquent, l'observable Doppler sera également plus sensible à l'effet de la structure interne du satellite naturel et est plus appropriée que la mesure de la distance pour contraindre cette structure interne[7]. En fait, puisque l'observable Doppler est une dérivée temporelle, elle donne plus d'importance que la distance aux variations à haute fréquence. Par la suite, nous allons donc uniquement considérer l'observable Doppler.

### 5.3.2 Effet de Jupiter sur l'observable Doppler

Pour obtenir une observable plus réaliste que dans le cas de l'orbite keplerienne, nous commençons par prendre en compte l'effet de Jupiter sur le mouvement de la sonde, puisque nous avons vu que celui-ci est dominant (chapitre 4). Dans la pratique, cela revient à annuler tout les paramètres géophysiques dans le calcul des perturbations des éléments orbitaux de la sonde (ce qui revient à dire qu'Europe ou Ganymède est considéré comme sphérique, homogène et non déformable). L'observable Doppler perturbée par Jupiter est donnée par

$$\mathbf{V^J_{rel}} = \mathbf{V_{rel}}(\{C_{20}, \bar{C}_{22}, g_s, g_i, \varepsilon_s, \varepsilon_i, \mu_s, \mu_i, C^s_{20}, C^s_{22}, k_2, Q\} = 0 \,\text{et}\, \mathcal{R}_J \neq 0). \tag{5.37}$$

A la fin de l'arc d'observation, l'effet de Jupiter sur l'observable, qui peut être estimé par

$$\Delta J = \mathbf{V^J_{rel}} - \mathbf{V^{Kep}_{rel}}, \tag{5.38}$$

est de l'ordre de 500 m/s (figure 5.5) pour l'orbite autour d'Europe et également pour celle autour de Ganymède, c'est-à-dire de l'ordre de 1.5% du maximum de l'amplitude des variations de l'observable keplerienne. Dans l'ensemble, l'effet de Jupiter augmente, en valeur absolue, avec le temps. Ceci est dû à l'effet

[7] La mesure de distance (ranging) serait plus appropriée pour vérifier les éphémérides d'Europe, de Ganymède ou de Jupiter.

séculaire de Jupiter sur la longitude du nœud $\Omega_S$, la longitude du péricentre $\omega_s$ et l'anomalie moyenne $M_S$ de la sonde (voir chapitre précédent). Les variations périodiques des éléments orbitaux dues à Jupiter conduisent alors aux variations périodiques de l'effet de Jupiter sur l'observable.

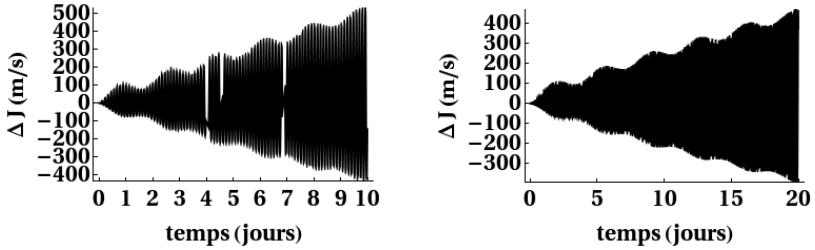


FIG. 5.5 – Effet de Jupiter $\Delta J$ sur l'observable Doppler durant l'arc d'observation, pour une sonde en orbite autour d'Europe (gauche) ou de Ganymède (droite).

### 5.3.3 Effet total des paramètres géophysiques

Nous estimons ensuite l'effet total des paramètres géophysiques en calculant la différence entre l'observable perturbée par Jupiter et ces paramètres, $\mathbf{V^{J,p}_{rel}}$, et l'observable perturbée uniquement par Jupiter, $\mathbf{V^{J}_{rel}}$ :

$$\mathbf{V^{J,p}_{rel}} = \mathbf{V_{rel}}(\{C_{20}, \bar{C}_{22}, g_s, g_i, \varepsilon_s, \varepsilon_i, \mu_s, \mu_i, C^s_{20}, C^s_{22}, k_2, Q\} \neq 0 \,\text{et}\, \mathcal{R}_J \neq 0), \tag{5.39}$$

$$\Delta p = \mathbf{V^{J,p}_{rel}} - \mathbf{V^{J}_{rel}}. \tag{5.40}$$

Il faut attribuer une valeur aux paramètres géophysiques. Les valeurs de $C_{20}$ et de $\bar{C}_{22}$ correspondent aux valeurs estimées grâce à la mission Galileo (chapitre 2, tableau 2.1). Pour $k_2$ et $Q$, nous prenons les valeurs qui résultent des modèles présentés dans le chapitre 1. Pour les paramètres liés à la rotation, nous considérons des approches différentes pour Europe et pour Ganymède :

- Pour Europe, nous avons pris leur valeur moyenne pour tous les modèles de structure interne de notre balayage tels que $h_s = 5$ km (voir tableau 2.3 et chapitre 3). En effet cette épaisseur est la plus favorable pour obtenir un effet important des librations.
  Notons que la précession des axes de rotation de la coquille et de l'intérieur d'Europe peuvent être approximée par leur précession moyenne, ce qui revient à négliger les paramètres $\mu_s$ et $\mu_i$ et à considérer des obliquités $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$ constantes (voir section 3.2.2) indépendantes du choix de $t_o$.
- Pour Ganymède, il est impossible de considérer une valeur moyenne des obliquités de la coquille et de l'intérieur pour un ensemble de modèles

de structure interne. En effet, les différents modèles de structure interne présentent une ou plusieurs résonances et les obliquités dépendent du choix de $t_o$ (section 3.2.2). Par ailleurs, les paramètres $\mu_s$ et $\mu_i$ ne peuvent être négligés.
Nous avons donc considéré, à titre d'exemple, les valeurs des paramètres liés à la rotation pour un modèle de structure interne particulier (celui présenté dans la figure 2.3), au temps $t_o$, et considéré qu'ils restent constants durant l'arc d'observation dont la durée est très petite par rapport à l'échelle de temps des variations de l'orientation de l'axe de rotation de Ganymède.

Les valeurs des paramètres géophysiques utilisées pour réaliser les tests de sensibilité sont reprises dans le tableau (5.1).

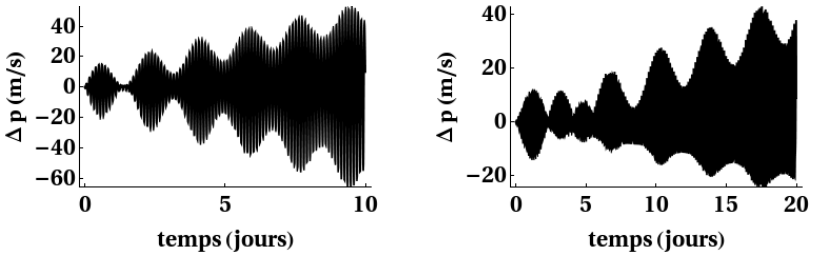


FIG. 5.6 – Effet total des paramètres géophysiques, $\Delta p$ , sur l'observable Doppler, pour une sonde en orbite autour d'Europe (gauche) ou de Ganymède (droite).

A la fin de l'arc d'observation, l'effet total des paramètres géophysiques est de l'ordre de 60 m/s pour l'orbite autour d'Europe et de l'ordre de 40 m/s pour l'orbite autour de Ganymède (figure 5.6). On observe également la superposition d'un comportement séculaire et d'un comportement périodique, reflet des effets séculaires et périodiques des paramètres géophysiques sur les éléments orbitaux de la sonde (chapitre 4). Avec son effet de 500 m/s, Jupiter domine l'effet des paramètres géophysiques sur l'observable Doppler, de la même façon qu'il dominait les perturbations des éléments orbitaux de la sonde.

### 5.3.4 Effets individuels des paramètres géophysiques

Nous allons maintenant déterminer l'effet individuel de chaque paramètre géophysique en comparant $\mathbf{V}_{\mathbf{rel}}^{\mathbf{J,p}}$ avec une observable pour laquelle ce paramètre

a été annulé. Par exemple, pour l'effet individuel de $C_{20}$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{rel}}^{\mathbf{C_{20}}} = \mathbf{V}_{\mathbf{rel}}(C_{20}=0), \tag{5.41}$$

$$\Delta C_{20} = \mathbf{V}_{\mathbf{rel}}^{\mathbf{J,p}} - \mathbf{V}_{\mathbf{rel}}^{\mathbf{C_{20}}}. \tag{5.42}$$

L'ordre de grandeur de l'effet des paramètres géophysiques pour une sonde en orbite autour d'Europe ou autour de Ganymède est résumé dans le tableau (5.1). Nous allons maintenant décrire le comportement de ces différents effets.

| Paramètre géophysique | Europe | Effet sur $V_{rel}$ (m/s) | Ganymède | Effet sur $V_{rel}$ (m/s) |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{C_{20}}$ | $-0.0004355$ | 200 | $-0.00012753$ | 150 |
| $\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{22}}$ | 0.0001315 | 250 | 0.00003826 | 110 |
| $\mathbf{g_s}(\times R)$ | $-17698.47$m | 1 | $-54.13$m | 0.003 |
| $\mathbf{g_i}(\times R)$ | $-68.62$m | 0.005 | $-5.22$m | 0.00015 |
| $\boldsymbol{\varepsilon_s}$ | $0.035864^\circ$ | 0.06 | $0.0517563^\circ$ | 0.11 |
| $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ | $0.057174^\circ$ | 0.16 | $0.0978968^\circ$ | 0.13 |
| $\boldsymbol{\mu_s}$ | - | - | $18.8059^\circ$ | 0.01 |
| $\boldsymbol{\mu_i}$ | - | - | $19.082^\circ$ | 0.01 |
| $\mathbf{C_{20}^s}$ | $-0.0001760$ | 0.04 | $-0.00007746$ | 0.1 |
| $\mathbf{C_{22}^s}$ | 0.0000528 | 1 | 0.00002324 | 0.0025 |
| $\mathbf{k_2}$ | 0.25 | 0.15 | 0.5 | 0.08 |
| $\mathbf{Q}$ | 15 | 0.015 | 120 | 0.0003 |

TAB. 5.1 – Valeurs des paramètres géophysiques d'Europe et de Ganymède utilisées pour les tests de sensibilité et estimation de leur effet sur l'observable Doppler.

**Potentiel statique moyen**

Les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ induisent, après Jupiter, les perturbations les plus importantes des éléments orbitaux de la sonde. Par conséquent, ils doivent expliquer à eux seuls la majeure partie des 60 m/s (ou des 40 m/s) dû à l'ensemble des paramètres géophysiques sur l'observable Doppler pour l'orbite autour d'Europe (ou de Ganymède). Or, les effets individuels de $C_{20}$ et de $\bar{C}_{22}$ sont de 200 m/s et 250 m/s (ou de 150 m/s et 110 m/s), respectivement, et sont plus grands que l'effet de l'ensemble des paramètres (figure 5.7). Cela peut sembler contradictoire au premier abord. Mais la somme de ces deux effets individuels est en bon accord avec l'effet cumulé des paramètres. En fait, pour ce choix particulier de $t_o$, les effets des deux paramètres sont en opposition de phase et ont tendance à se compenser (comparer les figures 5.6 et 5.8 pour l'orbite autour d'Europe).

L'effet de $C_{20}$ et celui de $\bar{C}_{22}$ sur l'observable Doppler présentent tous deux un comportement séculaire qui est dû aux variations séculaires de certains

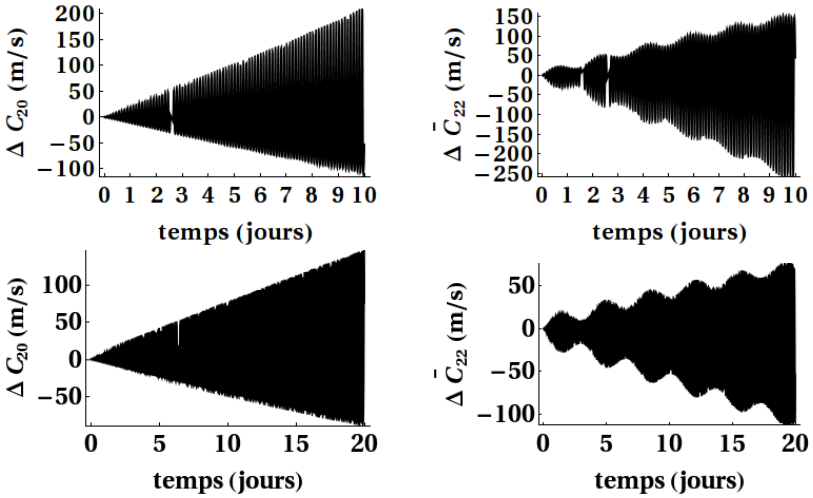


FIG. 5.7 – Effets individuels de $C_{20}$ (gauche) et de $\bar{C}_{22}$ (droite) sur l'observable Doppler, pour une sonde en orbite autour d'Europe (haut) ou de Ganymède (bas).

des éléments orbitaux induites par ces paramètres. Pour rappel, ces variations séculaires des éléments orbitaux ont trois origines :
(1) la partie séculaire du potentiel perturbateur statique (équation 4.12) dépend de $C_{20}$ et induit des perturbations séculaires de $\Omega_S$, $\omega_S$ et $M_S$,
(2) $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ influent sur la valeur moyenne du demi-grand axe et donc sur la correction du comportement séculaire de $M_S$ qui lui est associée (section 4.6.1),
(3) le caractère quasi-polaire de l'orbite et $\bar{C}_{22}$ entrainent une variation séculaire de $\Omega_S$ (toujours dans la section 4.6.1).

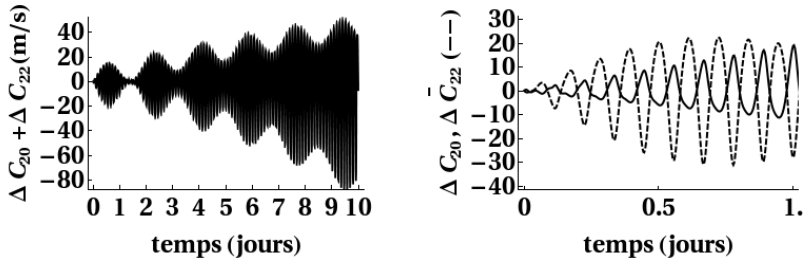


FIG. 5.8 – Somme des effets individuels de $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ (gauche) et comparaison entre l'effet de $C_{20}$ et de $\bar{C}_{22}$ sur la première journée (droite), pour une sonde en orbite autour d'Europe.

**Paramètres liés à la rotation**

Les paramètres liés à la rotation interviennent dans l'expression des coefficients du potentiel gravitationnel statique (équations 1.28-1.33). Ces coefficients ont un effet sur les éléments orbitaux de la sonde (section 4.8) qui, à leur tour, influent sur l'observable.

Commençons par le cas de l'orbite autour d'Europe. Les effets les plus importants, de l'ordre de 1 m/s, sont ceux de l'amplitude de libration de la coquille, $g_s$, et du coefficient $C^s_{22}$. Tous les autres paramètres liés à la rotation ont un effet au moins dix fois plus petit (figure 5.9).

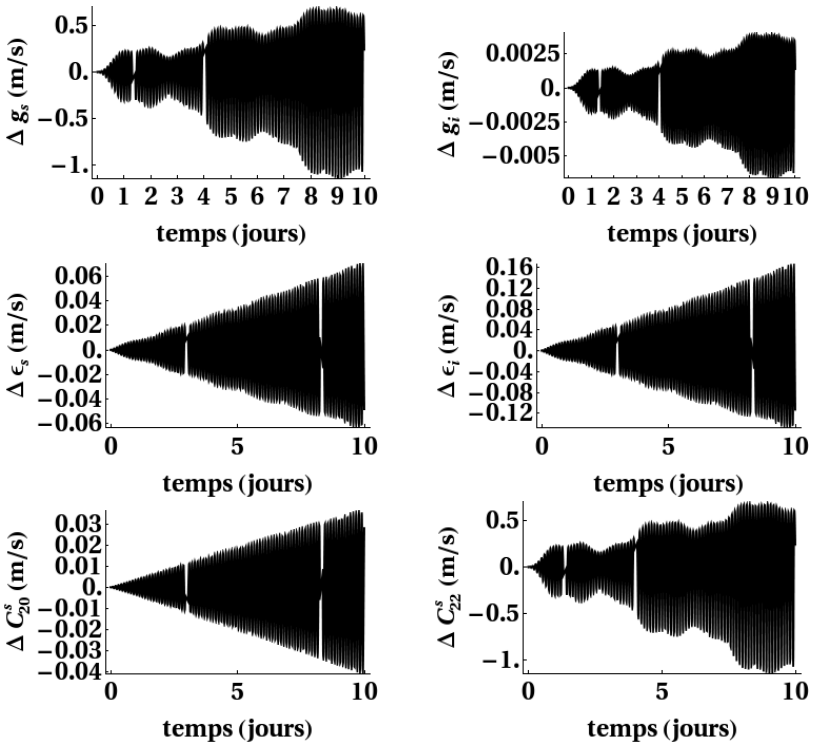


FIG. 5.9 – Effets individuels des paramètres liés à la rotation sur l'observable Doppler, pour l'orbite autour d'Europe.

Comme on peut l'observer sur la figure (5.9), les comportements des effets de $g_s$ et de $C^s_{22}$ sont similaires. En effet, si on néglige les autres paramètres liés à la rotation, on se rend compte qu'annuler $g_s$ revient au même qu'annuler $C^s_{22}$, puisqu'ils se multiplient l'un l'autre dans les équations (1.28-1.29). L'enveloppe

de l'effet de l'amplitude de libration de l'intérieur, $g_i$, a une forme similaire à celle des effets de $g_s$ et de $C^s_{22}$, mais son amplitude est 200 fois plus petite. La similitude de la forme est due au fait que ces trois paramètres apparaissent combinés dans les équations (1.28-1.29). La différence en amplitude est due au fait que $g_i$ est petit devant $g_s$.

De la même façon, les paramètres $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $C^s_{20}$ apparaissent combinés les uns avec les autres dans les équations (1.30-1.33). C'est pourquoi la forme de l'enveloppe de leur effet sur l'observable est similaire (figure 5.9). L'effet de $C^s_{22}$ lié à sa présence dans les équations (1.30-1.33) a une enveloppe similaire à celle de l'effet de $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $C^s_{20}$, mais il est masqué par la grande amplitude de l'effet lié à la présence de $C^s_{22}$ dans les équations (1.28-1.29).

L'effet sur l'observable des paramètres $g_s$, $g_i$ et $C^s_{22}$ est la combinaison d'un effet séculaire et d'effets périodiques. L'effet séculaire est dû à l'influence de ces paramètres sur la valeur moyenne du demi-grand axe de la sonde et donc sur le comportement séculaire de son anomalie moyenne. Pour les conditions initiales choisies (équation 4.20), les paramètres $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $C^s_{20}$ n'ont pas d'effet sur la valeur moyenne du demi-grand axe de la sonde. D'un autre côté, les perturbations périodiques des éléments orbitaux associées aux paramètres liés à la rotation et telles que $(p, q) = (1, 0)$ peuvent avoir une fréquence très petite (multiple du taux de variation de la longitude du nœud) et prendre l'apparence d'une perturbation séculaire sur la période de l'arc d'observation. C'est le cas pour $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $C^s_{20}$ et dans une moindre mesure pour $g_s$, $g_i$ et $C^s_{22}$, pour lesquels cet effet est masqué par celui lié à la valeur moyenne du demi-grand axe.

Nous ne présentons pas ici les graphes des effets des paramètres liés à la rotation pour l'orbite autour de Ganymède, car leur comportement s'explique de la même façon que pour l'orbite autour d'Europe. Leur ordre de grandeur est donné dans le tableau (5.1).

**Paramètres de marée**

Nous passons maintenant à la description de l'effet des paramètres de marée. Le paramètre $k_2$ n'a pas d'effet séculaire. Son effet sur l'observable Doppler est de 0.15 m/s pour l'orbite autour d'Europe et 0.08 m/s pour l'orbite autour de Ganymède (figure 5.10). L'effet de la dissipation $Q = 1/\varepsilon$ est plus petit et présente un comportement périodique dont l'amplitude peut atteindre 0.015 m/s (Europe) ou 0.0003 m/s (Ganymède).

**Perspectives pour la contrainte de la structure interne**

L'effet individuel des paramètres géophysiques est résumé dans le tableau (5.1).

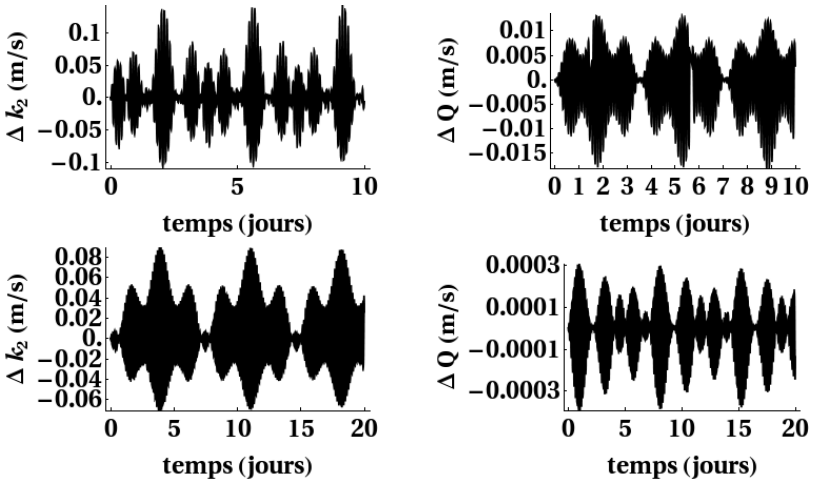


FIG. 5.10 – Effets individuels de $k_2$ (gauche) et de $Q$ (droite) sur l'observable Doppler, pour une sonde en orbite autour d'Europe (haut) ou de Ganymède (bas).

Pour l'orbite autour d'Europe, chaque paramètre induit un effet perceptible sur l'observable Doppler (si on considère une précision de $10^{-4} m/s$ sur la mesure, classique pour les instruments de radioscience actuels). La mesure du signal Doppler devrait donc fournir de l'information sur ces paramètres et donc, sur la structure interne d'Europe, à condition que la corrélation entre les différents paramètres ne soit pas trop élevée.

Malheureusement, nous nous attendons à des corrélations élevées entre $C_{20}$, $\bar{C}_{22}$ et $k_2$, à cause de leur comportement similaire en fréquence. Pour la même raison, les paramètres $g_s$, $g_i$ et $C^s_{22}$ devraient être corrélés entre eux. C'est également le cas pour les paramètres $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $C^s_{20}$. Les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ peuvent également être corrélés avec les paramètres liés à la rotation, à cause des expressions (1.28-1.33) pour les coefficients du potentiel gravitationnel statique. Enfin, $Q$ ayant seulement une influence périodique sur l'observable, il pourrait être corrélé avec tous les autres paramètres. Nous y reviendrons lors de l'analyse des corrélations à partir de l'inversion par les moindres carrés (chapitre 6).

Ces corrélations peuvent également exister pour Ganymède. De plus les paramètres $\mu_s$ et $\mu_i$ peuvent être corrélés avec les paramètres $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $C^s_{20}$. Enfin, certains paramètres géophysiques de Ganymède ($g_i$, $\mu_s$, $\mu_i$ et $Q$) semblent avoir un effet trop faible pour être détectable. Néanmoins ces paramètres ne présentaient pas une dépendance forte vis-à-vis des détails de la structure in-

terne de Ganymède. Par conséquent, la possibilité de contraindre la structure interne ne sera pas réellement altérée par leur manque d'effet sur l'observable.

## 5.4 Visibilité de la sonde depuis la station Doppler, orbite face-on ou edge-on, et angle $\beta$

A partir de l'expression des différents vecteurs intervenant dans la définition du vecteur station-sonde (équation 5.1), nous pouvons déterminer si le satellite galiléen considéré, Jupiter, le Soleil, ou même la Terre, s'interposent entre la sonde et la station Doppler et rendent impossible la réception par la station du signal émis par la sonde. Nous allons examiner une à une les différentes possibilités.

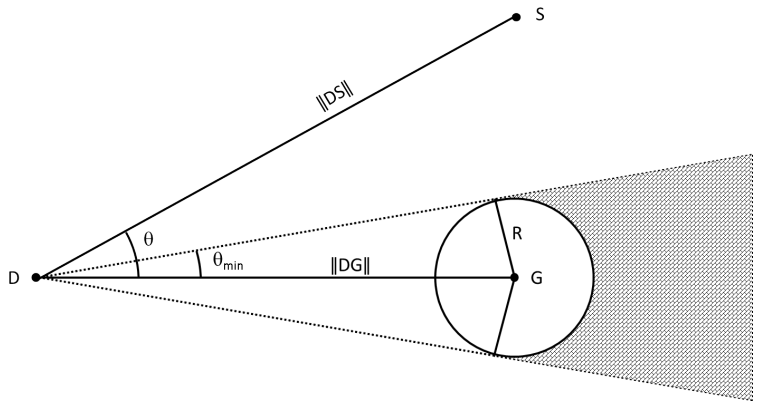


FIG. 5.11 – Plan contenant la Station $D$, la sonde $S$ et le centre du satellite galiléen $G$. La station ne peut pas recevoir le signal émis par la sonde si cette dernière se trouve dans la zone grise. On peut remplacer le satellite ($G$) par Jupiter ($J$) ou le Soleil ($H$).

La figure (5.11) représente le plan contenant la station Doppler ($D$), la sonde ($S$) et le centre du satellite naturel considéré ($G$). La sonde est visible depuis la station si elle se trouve hors de la zone grise. Pour cela, il faut que $\theta$, l'angle $\langle SDG \rangle$, soit plus grand que l'angle $\theta_{min}$ ou que la sonde se trouve à l'avant-plan par rapport à Europe. Puisque le rayon $R$ du satellite naturel est petit devant la distance $||DG||$, la condition de visibilité liée au satellite naturel peut se résumer par :

$$C_G^{vis} = \left\{ \frac{\vec{DS}.\vec{DG}}{\sqrt{||DG||^2 - R^2}} < ||DS|| \quad \text{ou} \quad ||DS|| < ||DG|| \right\}. \tag{5.43}$$

Par un raisonnement similaire, la condition de visibilité liée à Jupiter est donnée par

$$C_J^{vis} = \left\{ \frac{\vec{DS}.\vec{DJ}}{\sqrt{||DJ||^2 - R_J^2}} < ||DS|| \quad \text{ou} \quad ||DS|| < ||DJ|| \right\}, \tag{5.44}$$

avec $R_J$, le rayon de Jupiter, et où l'on pourrait approximer le vecteur $\vec{DS}$ par le vecteur $\vec{DG}$, puisque la question de savoir si Jupiter cache la sonde peut presque se ramener à la question de savoir si Jupiter cache le satellite galiléen.

La sonde ne peut pas se trouver à l'avant plan du Soleil, puisque la sonde est dans le système de Jupiter, qui est plus éloigné du Soleil que la Terre. La condition de visibilité liée au Soleil est donc relativement simple :

$$C_H^{vis} = \frac{\vec{DS}.\vec{DH}}{||DH||} < ||DS||. \tag{5.45}$$

La station se trouve à la surface de la Terre. Il faut donc que l'angle $\theta' = \langle TDS \rangle$ soit plus grand que $90^\circ$, comme on peut le voir sur la figure (5.12). La condition de visibilité correspondante est donnée par

$$C_T^{vis} = \vec{DS}.\vec{DT} < 0. \tag{5.46}$$

L'angle $\theta'$ varie essentiellement à cause de la rotation de la Terre.

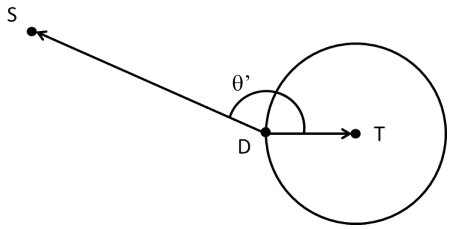


FIG. 5.12 – Plan contenant la station $D$, le centre de la Terre $T$ et la sonde $S$. La station recevra le signal émis par la sonde si $\theta' > 90^\circ$.

Nous pouvons maintenant définir une condition générale de visibilité

$$C^{vis} = \left\{ C_E^{vis} \quad \text{et} \quad C_J^{vis} \quad \text{et} \quad C_T^{vis} \quad \text{et} \quad C_H^{vis} \right\} \tag{5.47}$$

qui sera utile par la suite pour déterminer si un temps choisi correspond ou non à une possibilité de mesure (voir section 6.4).

Nous vérifions la condition générale de visibilité au cours de l'arc d'observation de dix jours pour l'orbite autour d'Europe. La condition liée à Europe, $C_E^{vis}$, est toujours satisfaite, car les éléments orbitaux initiaux choisis sont tels que le plan de l'orbite de la sonde est plus proche d'être perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{DG}$ que parallèle. Par contre, Europe passant régulièrement derrière Jupiter, la sonde est régulièrement cachée par Jupiter. Ces occultations ne représentent qu'une petite partie du temps (environ 3 %), comme on peut le voir sur la figure (5.13). La Terre cache la sonde environ 56 % du temps, à cause de sa rotation. Enfin le Soleil ne joue aucun rôle dans la condition de visibilité vu que pendant d'observation choisie, la Terre et Jupiter sont du même côté du Soleil.

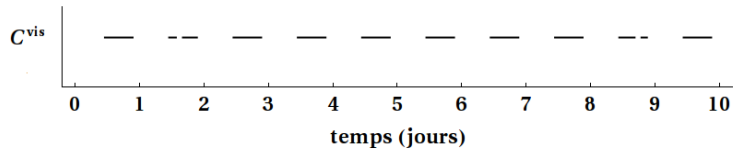


FIG. 5.13 – Condition de visibilité pendant l'arc d'observation de dix jours pour l'orbite autour d'Europe. Les lignes continues indiquent les périodes où la sonde est visible depuis la station. La sonde alterne des périodes de visibilité et de non-visibilité d'environ 10 heures 40 minutes et 13 heures 20 minutes, respectivement, à cause de la rotation de la Terre et de la position de la station. Le passage d'Europe derrière Jupiter tous les 3.55 jours est décelable un peu avant les deuxième et neuvième jours de l'arc d'observation.

Il n'est pas possible de choisir une configuration de mission, c'est-à-dire les conditions initiales, telle que Jupiter et la Terre ne cachent jamais la sonde, puisqu'on ne peut empêcher la Terre de tourner sur elle-même et le satellite naturel de tourner autour de Jupiter. Par conséquent, et puisque l'orbite est quasi-polaire, il est plus simple de choisir une configuration de mission en considérant uniquement par l'orientation du plan de l'orbite de la sonde par rapport à la ligne de visée. On parle alors d'orbite *face on* pour une orbite quasi-perpendiculaire à la ligne de visée ou d'orbite *edge on* si cette dernière est vue par la tranche. L'orbite considérée pour réaliser la figure (5.13) est dans une situation intermédiaire, mais néanmoins un peu plus proche du cas face-on, c'est pourquoi Europe ne cache jamais la sonde. On pourrait choisir des éléments orbitaux initiaux pour la sonde qui correspondent à une orbite edge on, de sorte que la sonde soit régulièrement occultée par Europe. Nous perdrions en temps de visibilité mais peut-être que la sensibilité de l'observable par rapport aux paramètres serait plus grande. Cela sera à vérifier lors de la recherche de la configuration de mission la plus favorable (chapitre 7).

Si l'énergie de la sonde est fournie par des panneaux solaires, on peut se poser la question de son éclairement. En effet, si la sonde passe dans le cône d'ombre de Jupiter, alors ses panneaux ne seront pas éclairés et la sonde ne sera pas alimentée en énergie. Il n'est pas très compliqué de définir une condition d'éclairement puisqu'il s'agit en fait d'une condition de visibilité depuis le Soleil. Mais encore une fois, on ne peut empêcher le satellite naturel de passer régulièrement derrière Jupiter. Il est donc plus simple de caractériser l'orbite par son orientation par rapport à la ligne de visée $\vec{HS}$. Dans ce cas, plutôt que de parler d'orbite face ou edge-on, on utilise la notion d'angle $\beta$. Il s'agit de l'angle du vecteur $\vec{GH}$ par rapport au plan orbital de la sonde et que l'on peut aussi exprimer de la façon suivante (voir figure 5.14) :

$$\beta = \min\left[\langle HGS\rangle, \pi - \langle HGS\rangle\right], \tag{5.48}$$

$$\cos\langle HGS\rangle = \frac{\vec{GH}.\vec{GS}}{||GH||||GS||}, \tag{5.49}$$

de sorte que $\beta$ est toujours compris entre 0 et 90°. Il existe une valeur minimale

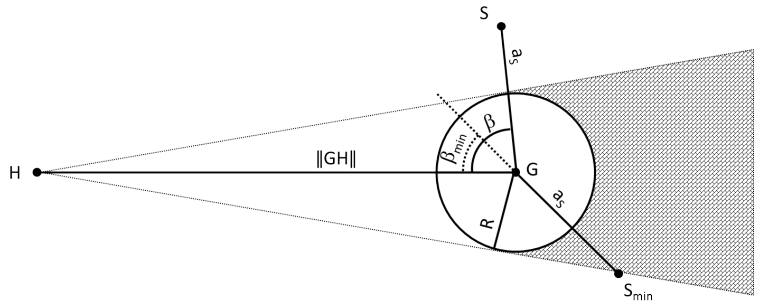


FIG. 5.14 – Plan contenant le soleil $H$, la satellite naturel $G$ et la sonde $S$. Si la sonde est dans la zone grise, elle n'est pas éclairée par le Soleil. La position $S_{min}$ de la sonde est caractérisée par un angle $\beta_{min}$. Si l'angle $\beta$ défini pour la position $S$ est plus grand que $\beta_{min}$, la sonde est éclairée en permanence.

de cet angle $\beta_{min}$, telle que si $\beta > \beta_{min}$, alors la sonde est toujours éclairée par le Soleil (sauf lors des passages derrière Jupiter). Étant donné que $R_E << ||HE||$ et que $a_S \simeq a_{So}$, on peut montrer que

$$\beta_{min} \simeq \arccos\left[\frac{\sqrt{a_{So}^2 - R_E^2}}{a_{So}}\right]. \tag{5.50}$$

L'angle $\beta_{min}$ dépend donc essentiellement de l'altitude de la sonde et vaut 52.75° pour l'orbite autour d'Europe étudiée dans ce chapitre.

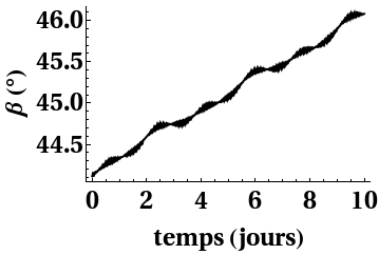


FIG. 5.15 – Angle $\beta$ au cours de l'arc d'observation de dix jours pour une sonde en orbite autour d'Europe.

L'angle $\beta$ va varier significativement au cours du temps, puisque l'orbite de la sonde précesse. On peut donc s'attendre à ce que $\dot{\beta} \simeq -\dot{\Omega}_S$. En comparant les figures (4.4) et (5.15), nous observons que le comportement périodique de $\beta$ est similaire à celui de $-\Omega_S$. Par contre la variation séculaire de $\beta$ est d'environ $0.2^\circ$/jour là où celle de $\Omega$ n'est que de $-0.1^\circ$/jour. La différence s'explique par les variations au cours du temps de la distance $||GH||$.

Étant donné que pour l'orbite autour d'Europe, $\beta < \beta_{min}$ tout au long de la durée de l'arc, la sonde ne sera pas éclairée en permanence. Ce n'est pas important si la sonde a sa propre source d'énergie. Pour la sonde autour de Ganymède, le projet de mission actuellement à l'étude (JUICE) ne prévoit pas de source d'énergie propre et il faudra tenir compte d'une condition d'éclairement construite d'une façon similaire à la condition de visibilité (5.47).

# Troisième partie

# Problème Inverse

# Chapitre 6

# Méthode d'inversion

## Sommaire


**6.1 Choix des paramètres à inverser . . . . . 148**
6.1.1 Paramètres issus du problème direct . . . . . 148
6.1.2 Nouveau choix de paramètres . . . . . 152
**6.2 Bruit sur les mesures : erreurs a posteriori et corrélations . . . . . 154**
**6.3 Absorption du signal par les conditions initiales de l'orbite . . . . . 156**
**6.4 Effet de la visibilité et du nombre de mesures . . 160**
**6.5 Les nouveaux paramètres et la structure interne 163**
6.5.1 Europe . . . . . 165
6.5.2 Ganymède . . . . . 169


Nous avons vu dans la partie précédente, concernant le problème direct, que les paramètres géophysiques liés à la structure interne peuvent influencer de manière non négligeable l'observable Doppler. Peut-on réaliser le chemin inverse ? C'est-à-dire déterminer la valeur des paramètres géophysiques à partir de données réelles pour l'observable. Plusieurs difficultés se présentent :

- le modèle analytique pour l'observable n'est qu'une approximation de la réalité,
- les données sont entachées d'erreurs de mesure,
- tous les paramètres interviennent simultanément dans la réalité (nous n'avons pas tenu compte de ce fait lors de l'étude de sensibilité du chapitre précédent).

Le but final de notre travail consiste en une étude de faisabilité pour d'éventuelles missions futures. Par conséquent, nous ne disposons pas de données réelles

pour l'observable Doppler. C'est pourquoi nous allons les simuler à partir du modèle analytique de l'observable développé dans la partie précédente. En procédant de la sorte, nous supposons implicitement que notre modèle décrit parfaitement la réalité. Nous partirons de valeurs raisonnables pour les paramètres (celles du tableau 5.1) et nous ajouterons ensuite aux mesures simulées un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma$ sur les données obtenues ($10^{-4}$ m/s, pour les instruments de radioscience actuels). Les valeurs raisonnables des paramètres joueront alors le rôle des vraies valeurs, c'est-à-dire celles que nous tenterons de retrouver à partir des données simulées.

Pour déterminer les valeurs individuelles de paramètres qui agissent simultanément dans la réalité, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'inversion par les moindres carrés (voir annexe E). Nous verrons qu'il sera nécessaire de redéfinir les paramètres géophysiques pour pouvoir appliquer cette méthode d'inversion. L'application de cette méthode nécessite le calcul des dérivées partielles de l'observable par rapport aux paramètres à inverser. Elle nécessite également une idée a priori de la valeur des paramètres. Ces valeurs a priori ne seront en fait pas très éloignées des valeurs raisonnables/vraies, puisqu'elles proviennent également de la connaissance actuelle des coefficients du potentiel gravitationnel statique (chapitre 2) et de ce qu'on pense connaître de sa rotation (grâce aux modèles développés dans le chapitre 3) et de ses marées (modèles présentés dans le chapitre 1).

A cause du bruit sur les données, il ne sera pas possible de retrouver les valeurs exactes des (nouveaux) paramètres. En fait, dans le meilleur des cas, nous obtiendrons des valeurs proches des valeurs vraies, avec une barre d'erreur/écart-type résultant de la propagation du bruit.

## 6.1 Choix des paramètres à inverser

### 6.1.1 Paramètres issus du problème direct

Dans la première partie de notre travail, nous avons identifié des paramètres qui influencent l'observable Doppler via leur effet sur le potentiel gravitationnel du satellite naturel. En fonction de ces paramètres, le vecteur de l'équation (E.1) est donné par

$$\mathbf{p} = (C_{20}, \bar{C}_{22}, g_s, g_i, \varepsilon_s, \varepsilon_i, \mu_s, \mu_i, C^s_{20}, C^s_{22}, k_2, \varepsilon). \tag{6.1}$$

Pour choisir ces paramètres, nous avons été guidés par leur signification physique (amplitude de libration, obliquité,...). Nous n'avons pas tenu compte de la façon dont ils interviennent dans le modèle pour l'observable Doppler $\mathbf{V_{rel}}$ (équation 5.13, noté $f$ dans l'annexe E).

Les paramètres liés à la rotation apparaissent, dans le potentiel gravitationnel du satellite, sous forme de combinaisons de sommes et/ou de produits dans les coefficients notés $FC_{22}$, $FS_{22}$, $FC_{21}^{sin}$, $FC_{21}^{cos}$, $FS_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ (chapitre 1, équations 1.28-1.33). Ces coefficients apparaissent tels quels dans l'expression des perturbations du mouvement de la sonde et donc dans l'expression de l'observable. Cela peut rendre difficile la détermination des paramètres liés à la rotation, car leurs effets individuels sur l'observable ne sont pas tout à fait indépendants les uns des autres (voir également le chapitre 5). En effet, imaginons les 'modèles-jouets'

$$g = abt \quad \text{et} \quad h = (c+d)t, \tag{6.2}$$

avec $a$ et $b$ ou $c$ et $d$ qui sont les paramètres à ajuster. Soit deux mesures aux temps $t_1$ et $t_2$. Il n'est pas possible de déterminer les valeurs individuelles des paramètres $a$ et $b$ ou $c$ et $d$ à partir de ces mesures. En fait, une infinité de solutions existe, tant que le produit $ab$ pour le modèle $g$, ou la somme $(c+d)$ pour le modèle $h$, garde la même valeur. Si nous tentons malgré tout d'appliquer la méthode d'inversion par les moindres carrés à ces modèles, nous obtenons les matrices normales

$$N_g = (t_1^2 + t_2^2) \begin{pmatrix} b^2 & ab \\ ab & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_h = (t_1^2 + t_2^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

qui ne sont pas inversibles, car leur rang[1] est inférieur à leur nombre de lignes.

De plus si les paramètres liés à la rotation apparaissent sous forme de produit les uns des autres, par exemple, le modèle manque de linéarité par rapport aux paramètres. Or, l'inversion par les moindres carrés est d'autant plus efficace que le modèle est linéaire par rapport à ses paramètres, de sorte à ce que l'effet du choix de la solution a priori ait le moins d'influence possible.

### Inversion idéalisée (sans bruit)

Pour tester la possibilité de retrouver les paramètres (6.1) à partir d'observations, nous réalisons une inversion idéalisée pour une orbite autour d'Europe. Les paramètres $\mu_s$ et $\mu_i$ ne sont pas d'application car nous avons montré qu'ils pouvaient être négligés pour Europe (chapitre 3). Comme pour l'étude de sensibilité du chapitre précédent, la date de départ est le 1$^{\text{er}}$ janvier 2030 (JD 2462502.5) et les conditions initiales sont données en (4.20). Il s'agit donc de l'orbite notée *OrbNom2030* dans le chapitre 4. Nous ne tenons pas compte de l'éventuelle non visibilité de la station ni du bruit sur les mesures simulées.

[1]Le rang d'une matrice carrée est égal à son nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes les unes des autres. Une matrice carrée est inversible si son rang est égal à son nombre de ligne.

Pour simuler les données $y_i$, nous utilisons comme valeurs vraies des paramètres, $\mathbf{p}^{vrai}$, les valeurs du tableau (5.1), qui correspondent à une coquille de 5 km pour les paramètres liés à la rotation, et nous posons $y_i = f(t_i, \mathbf{p}^{vrai})$. Pour l'inversion, nous partons de la solution a priori $\mathbf{p}^0$ choisie arbitrairement et différente de $\mathbf{p}^{vrai}$ (voir tableau 6.1). Par exemple, il convient de choisir une valeur a priori de $C_{20}$ différente de la valeur vraie mais qui soit compatible avec l'estimation de Anderson et al. (1998), dans les limites de la barre d'erreur de $8.2\,10^{-6}$. Pour les paramètres qui n'ont pas encore été mesurés, mais modélisés pour différentes structures internes, nous choisissons une valeur différente de la valeur vraie, mais qui soit également plausible pour une coquille épaisse de 5 km.

| $\mathbf{p}$ | $\mathbf{p}^{vrai}$ | $\mathbf{p}^0$ | $\mathbf{p}^{sol}$ | $\sigma^{prior}$ | $\mathbf{p}^{sol}_{stab}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{C}_{20}$ | $-0.0004355$ | $-0.0004300$ | $-0.0004354$ | $8.2\,10^{-6}$ | $-0.0004358$ |
| $\bar{C}_{22}$ | $0.0001315$ | $0.0001350$ | $0.0001315$ | $2.5\,10^{-6}$ | $0.0001315$ |
| $g_s(\times R)$ | $-17698.47m$ | $-15000.00m$ | $56039.9m$ | $-12500m$ | $-13728.4m$ |
| $g_i(\times R)$ | $-68.62m$ | $-50.00m$ | $-19952.8m$ | $-40m$ | $-52.4768m$ |
| $\varepsilon_s$ | $0.035864^\circ$ | $0.037^\circ$ | $0.856^\circ$ | $0.003^\circ$ | $0.086^\circ$ |
| $\varepsilon_i$ | $0.057174^\circ$ | $0.054^\circ$ | $0.136^\circ$ | $0.003^\circ$ | $0.004^\circ$ |
| $C^s_{20}$ | $-0.0001760$ | $-0.0001740$ | $-0.0129327$ | $8.2\,10^{-6}$ | $-0.0002292$ |
| $C^s_{22}$ | $0.0000528$ | $0.0000540$ | $0.0023823$ | $2.5\,10^{-6}$ | $0.0000682$ |
| $k_2$ | $0.25$ | $0.22$ | $0.254$ | $0.05$ | $0.25$ |
| $\varepsilon$ | $\frac{1}{15}$ $(3.82^\circ)$ | $\frac{1}{17}$ $(3.37^\circ)$ | $0.0965$ $(5.53^\circ)$ | $0.01$ $(0.57^\circ)$ | $0.0656$ $(3.76^\circ)$ |

TAB. 6.1 – Valeurs vraies des paramètres $\mathbf{p}^{vrai}$, solution a priori $\mathbf{p}^0$, solution de l'inversion idéalisée $\mathbf{p}^{sol}$, erreurs a priori $\sigma^{prior}$ et solution de l'inversion stabilisée $\mathbf{p}^{sol}_{stab}$ à la quatrième itération. Les angles sont donnés en mètres ($g_s$ et $g_i$) ou en degrés ($\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$ et $\varepsilon$) dans le tableau mais ont été inversés en tant que quantités exprimées en radians

Pour l'orbite OrbNom2030, nous avons vu que la sonde entrait en collision avec Europe après environ 13 jours (voir chapitre 4). Des manœuvres seraient nécessaires pour éviter cette collision. Par conséquent nous avions décidé que la durée maximale de l'arc d'observation, c'est-à-dire une période sans manœuvre et pour laquelle les conditions initiales gardent un sens, était de maximum 10 jours. Étant donné que nous avons dix paramètres, considérer une mesure par jour pendant dix jours est en principe suffisant pour retrouver la vraie valeur des paramètres, si ces derniers sont bien choisis. Nous avons alors $N = 11$ observations $y_i$ pour des temps $t_i = \{t_o, t_o + 1\,\text{jour}, \ldots, t_o + 10\,\text{jours}\}$. La moyenne de la valeur absolue du vecteur des résidus a priori, c'est-à-dire la différence entre les données simulées $y_i$ et les sorties du modèle a priori $f(t_i, \mathbf{p}^0)$, est de l'ordre de 1 m/s.

La solution $\mathbf{p}^{sol}$ est calculée comme indiqué dans l'équation (E.9) et est très

éloignée de la solution a priori $\mathbf{p}^0$ et des valeurs vraies des paramètres $\mathbf{p}^{vrai}$ (voir tableau 6.1). En particulier, la solution pour les paramètres liés à la rotation n'a pas le bon ordre de grandeur et/ou le bon signe. Les résidus a posteriori sont de l'ordre de 47 m/s et sont beaucoup plus grands que les résidus a priori. Cela indique que l'inversion ne s'est pas déroulée correctement, puisqu'elle est supposée fournir une solution qui minimise ces résidus.

En fait, le logiciel utilisé pour réaliser l'inversion de la matrice normale indique que cette dernière est mal conditionnée[2], ce qui peut mener à des erreurs numériques lors de son inversion. Une simple vérification montre d'ailleurs que le produit de la matrice normale par son inverse obtenue avec le logiciel ne donne pas la matrice unité. Par conséquent, nous concluons que les effets individuels des paramètres liés à la rotation sur l'observable ne sont pas suffisamment indépendants les uns des autres pour mener à bien l'inversion. Le problème est donc le même que pour les paramètres $a$ et $b$ des modèles-jouets $g$ et $h$.

**Inversion stabilisée**

Il est possible de stabiliser la matrice normale, c'est à dire de la rendre mieux conditionnée et inversible, en utilisant des hypothèses a priori sur l'intervalle de valeurs dans lesquels les paramètres peuvent se trouver. On parlera d'erreur a priori sur les paramètres, $\sigma^{prior}$. La solution est alors donnée par l'équation (E.16). Le choix de la valeur de $\sigma^{prior}$ pour chaque paramètre est délicat. En effet, si on choisit une erreur trop petite, l'inversion aura tendance à fournir une solution $\mathbf{p}^{sol}$ plus proche de la solution a priori $\mathbf{p}^0$ que des valeurs vraies $\mathbf{p}^{vrai}$. Par contre, si on choisit une erreur a priori trop grande, l'inversion donnera un résultat similaire à celui obtenu sans la stabilisation, c'est-à-dire une matrice normale non inversible et une solution erronée.

Un compromis raisonnable est d'utiliser la connaissance que nous avons de ces paramètres et qui nous a d'ailleurs permis de choisir les valeurs $\mathbf{p}^0$ proches de $\mathbf{p}^{vrai}$. Par exemple, pour $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$, nous choisissons $\sigma^{prior} = 8.2\,10^{-6}$ et $2.5\,10^{-6}$, qui sont les barres d'erreur sur l'estimation actuelle de ces paramètres (Anderson et al. 1998). L'erreur sur $C^s_{20}$ ou $C^s_{22}$, les paramètres équivalents pour la coquille, sera la même que l'erreur sur $C_{20}$ ou $\bar{C}_{22}$, respectivement. Pour les paramètres liés à la rotation (amplitudes de librations et obliquités) et aux marées (nombre de Love et facteur de dissipation), qui n'ont pas encore été mesurés, il faut se référer aux modèles existants. Par exemple, étant donné que $g_s \times R$ est compris entre $-15$ et $-40$ km (figure 3.7), on peut considérer que $\sigma^{prior} \times R \simeq 10$ km. La valeur des erreurs a priori pour l'ensemble des

[2]Le logiciel est Mathematica et la commande utilisée est simplement la fonction **Inverse**. Une matrice mal conditionnée a un 'rang numérique' inférieur à son nombre de lignes. Le rang numérique d'une matrice est le rang calculé par le logiciel, dans la limite des erreurs numériques réalisées par ce logiciel lors de ses opérations.

paramètres est donnée dans le tableau (6.1).

La matrice normale est désormais inversible. La solution obtenue, $\mathbf{p}^{sol}_{stab}$, est meilleure que la solution $\mathbf{p}^{sol}$, car elle est plus proche des valeurs $\mathbf{p}^{vrai}$ et les résidus a posteriori sont de l'ordre de 0.10 m/s. Nous posons alors $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^{sol}_{stab}$, nous recommençons l'inversion, et ainsi de suite jusqu'à ce que la valeur des résidus se stabilise, à la cinquième itération, autour de 0.01 m/s. La solution se stabilise également et sa valeur à la quatrième itération est donnée dans le tableau (6.1). Certains paramètres restent proches de leur valeur a priori, tandis que les autres s'en éloignent, mais ne convergent pas pour autant vers les valeurs vraies.

Stabiliser la matrice normale ne suffit donc pas à résoudre le problème des paramètres qui ont un effet individuel similaire sur l'observable. Néanmoins, même si les valeurs séparées des paramètres liés à la rotation ne sont pas bonnes, les coefficients[3] $FC_{22}, FS_{22}, FC^{sin}_{21}$ et $FS^{cos}_{21}$ ont des valeurs proches de celles obtenues avec les valeurs vraies des paramètres (voir tableau 6.2). L'ensemble de paramètres $\mathbf{p}$ semble donc un mauvais choix. Il vaut peut-être mieux directement utiliser les coefficients $FC_{22}, FS_{22}, FC^{sin}_{21}$ et $FS^{cos}_{21}$, à la place des paramètres liés à la rotation, comme paramètres à inverser. Le modèle sera plus linéaire par rapport à ces nouveaux paramètres.

| Coefficient | à partir de $\mathbf{p}^{vrai}$ | à partir de $\mathbf{p}^0$ | à partir de $\mathbf{p}^{sol}_{stab}$ |
|---|---|---|---|
| $FC_{22}$ | $6.78923\,10^{-9}$ | $4.98757\,10^{-9}$ | $5.27391\,10^{-9}$ |
| $FS_{22}$ | $-6.02178\,10^{-7}$ | $-5.21559\,10^{-7}$ | $-6.01718\,10^{-7}$ |
| $FC^{sin}_{21}$ | $5.9228\,10^{-7}$ | $5.76063\,10^{-7}$ | $5.68637\,10^{-7}$ |
| $FS^{cos}_{21}$ | $1.4595\,10^{-7}$ | $1.31214\,10^{-7}$ | $1.4413\,10^{-7}$ |

TAB. 6.2 – Valeurs des combinaisons $FC_{22}, FS_{22}, FC^{sin}_{21}$ et $FS^{cos}_{21}$ des paramètres liés à la rotation, pour les valeurs vraies des paramètres, la solution a priori et la solution stabilisée.

### 6.1.2 Nouveau choix de paramètres

Nous tentons maintenant une inversion pour la même orbite que dans la section précédente (autour d'Europe) avec pour paramètres

$$\mathbf{p}' = (C_{20}, \bar{C}_{22}, k_2, \varepsilon, FC_{22}, FS_{22}, FC^{sin}_{21}, FS^{cos}_{21}). \tag{6.4}$$

L'inversion est encore une fois idéalisée, c'est-à-dire que le bruit sur les données n'a pas été inclus et que l'on ne tient pas compte de la visibilité ou non de la station depuis la sonde. Pour nous mettre dans les mêmes conditions que dans la section précédente, nous considérons une mesure par jour pendant dix jours.

[3]Les combinaisons $FC^{cos}_{21}$ et $FS^{sin}_{21}$ sont égales à 0 pour Europe puisque $\mu_s = \mu_i = 0$.

Les résidus a priori sont de l'ordre de 1 m/s, comme avec l'ancien choix de paramètres, ce qui est tout à fait normal, puisque la valeur a priori des nouveaux paramètres découle directement de la valeur a priori des anciens paramètres.

La matrice normale est inversible et la solution est calculée comme indiqué dans l'équation (E.9). Nous avons réalisé sept itérations[4], et à chaque fois les résidus a posteriori diminuent significativement (figure 6.1). A chaque itération, la solution se rapproche de plus en plus des valeurs vraies des paramètres, comme on peut le voir sur les graphes de l'erreur absolue (ou *erreur vraie*)

$$E_{abs}(p') = \mathbf{p}'^{sol} - \mathbf{p}'^{vrai} \tag{6.5}$$

sur les paramètres, en fonction du nombre d'itération (figure 6.2). La solution de la septième itération est donnée dans le tableau (6.3).

Les nouveaux paramètres semblent donc un bon choix pour réaliser l'inversion par moindres carrés dans de bonnes conditions, c'est-à-dire en convergeant vers les vraies valeurs des paramètres et sans devoir stabiliser la matrice normale.

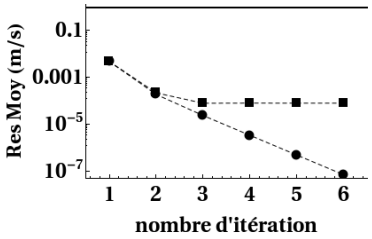


FIG. 6.1 – Moyenne des résidus de l'inversion pour les nouveaux paramètres et avec une mesure par jour, en fonction du nombre d'itération :
• → inversion idéalisée (pas de bruit sur les mesures)
■ → pour une inversion réalisée à partir de données bruitées
La ligne horizontale indique la valeur moyenne des résidus a priori qui est de 0.96 m/s (l'écart-type du bruit étant de 0.0001 m/s, et le bruit étant de moyenne nulle, les résidus a priori tendent vers la même valeur, que les données soient bruitées ou non).

[4]Nous n'avons pas recalculé la matrice des dérivées partielles à chaque itération, car la solution de la première itération semblait déjà se rapprocher des valeurs vraies des paramètres. Ce qui est normal puisque les valeurs a priori ont été choisies relativement proches des valeurs vraies. L'avantage de cette procédure simplifiée est un gain de temps de calcul.

| $\mathbf{p}'$ | $\mathbf{p}'^{vrai}$ | $\mathbf{p}'^{0}$ | $\mathbf{p}'^{sol}$ | $\mathbf{p}'^{sol}_{bruit}$ | $\sigma^{post}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_{20}$ | $-0.0004355$ | $-0.0004300$ | $-0.0004355$ | $-0.000435522$ | $1.2\,10^{-8}$ |
| $C_{22}$ | $0.0001315$ | $0.0001350$ | $0.0001315$ | $0.000131506$ | $3\,10^{-9}$ |
| $k_2$ | $0.25$ | $0.22$ | $0.25$ | $0.251149$ | $0.000652$ |
| $\varepsilon$ | $\frac{1}{15}$ $(3.82^{\circ})$ | $\frac{1}{17}$ $(3.37^{\circ})$ | $0.066667$ $(3.82^{\circ})$ | $0.0707173$ $(4.05^{\circ})$ | $0.002432$ $(0.14^{\circ})$ |
| $FC_{22}$ | $6.7892\,10^{-9}$ | $4.9876\,10^{-9}$ | $6.7892\,10^{-9}$ | $1.1154\,10^{-9}$ | $3.0488\,10^{-9}$ |
| $FS_{22}$ | $-6.0218\,10^{-7}$ | $-5.2156\,10^{-7}$ | $-6.0218\,10^{-7}$ | $6.0175\,10^{-7}$ | $4.4\,10^{-10}$ |
| $FC_{21}^{sin}$ | $5.9228\,10^{-7}$ | $5.7606\,10^{-7}$ | $5.9228\,10^{-7}$ | $5.8773\,10^{-7}$ | $4.439\,10^{-9}$ |
| $FS_{21}^{cos}$ | $1.4595\,10^{-7}$ | $1.3121\,10^{-7}$ | $1.4595\,10^{-7}$ | $1.5024\,10^{-7}$ | $4.809\,10^{-9}$ |

TAB. 6.3 – Inversion pour 1 mesure par jour, avec les nouveaux paramètres : valeurs vraies des paramètres, solution a priori, solution de l'inversion idéalisée (sans bruit, septième itération), solution de l'inversion avec données bruitées (septième itération) et son erreur a postériori associée.

## 6.2 Effet du bruit sur les mesures : erreurs a posteriori et corrélations

Dans le but de nous rapprocher d'une situation plus réaliste que dans l'inversion idéalisée réalisée précédemment avec les nouveaux paramètres, nous rajoutons un bruit d'écart-type $\sigma = 0.1mm/s$ sur les mesures simulées. La solution est alors donnée par l'équation (E.12).

L'inversion converge après six itérations, c'est-à-dire que les résidus a posteriori varient de moins de 1% entre la cinquième et la sixième itération. Nous n'avons pas recalculé les dérivées partielles pour les itérations 2 à 6. Nous itérons alors l'inversion une septième fois en calculant à nouveau la matrice des dérivées partielles, dans le but de calculer par la suite les erreurs a posteriori qui résultent de la propagation du bruit sur les mesures. Les résidus a posteriori sont de l'ordre de $5\ 10^{-5}$ m/s, comme on peut le voir sur la figure (6.1). Comme attendu, cette valeur est légèrement inférieure à l'écart-type du bruit introduit sur les mesures, $\sigma = 10^{-4}$ m/s. La solution converge vers une valeur qui est proche de la valeur vraie des paramètres (figure 6.2), le paramètre le moins bien restitué étant $FC_{22}$, qui est celui qui a le moins d'influence sur l'observable Doppler. La solution de la septième itération est donnée dans le tableau (6.3).

Maintenant que nous prenons en compte le bruit sur les mesures, la matrice normale joue un rôle supplémentaire. Son inverse est la matrice de variance-covariance entre les paramètres, qui permet de calculer l'*erreur a posteriori* (ou *erreur formelle*) sur la détermination des paramètres et la corrélations entre les différents paramètres (équations E.13 et E.15). Les erreur a posteriori sont données dans la dernière colonne du tableau (6.3). On peut comparer les erreurs a posteriori, $\sigma^{post}(p')$, avec l'erreur absolue de la solution pour

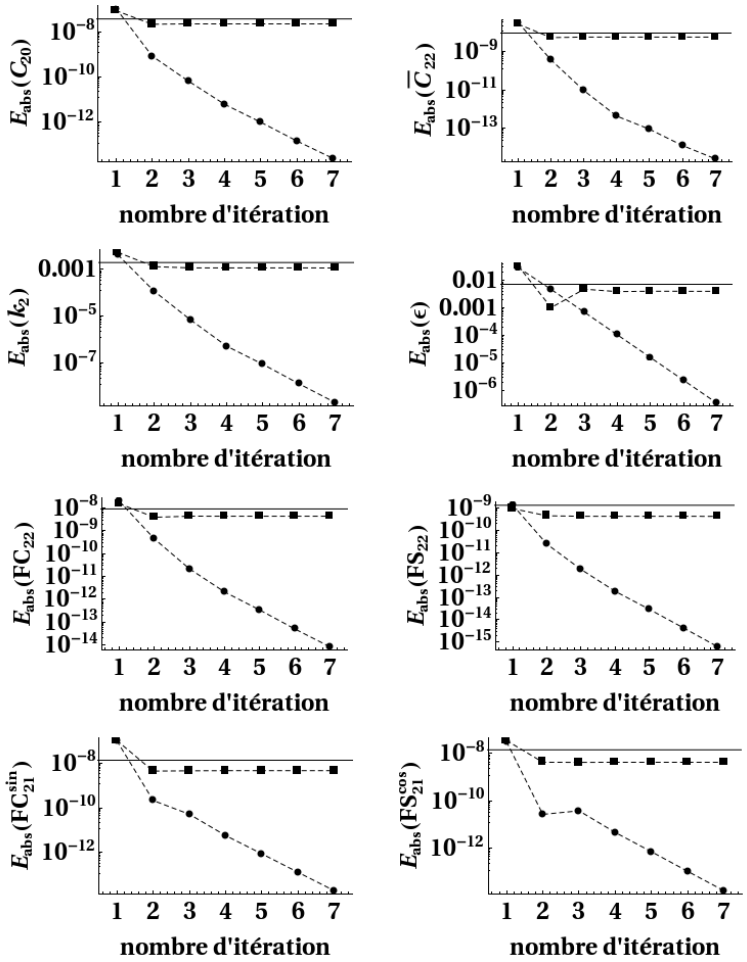


FIG. 6.2 – Erreur absolue de la solution pour chaque paramètre, en fonction du nombre d'itération, pour l'inversion avec les nouveaux paramètres et pour une mesure par jour :
• → inversion idéalisée (pas de bruit sur les mesures)
■ → pour une inversion réalisée à partir de données bruitées
Les lignes horizontales indiquent le niveau de $3\sigma^{post}$ (erreur a posteriori) pour chaque paramètre.

chaque paramètre, $E_{abs}(p')$ définie par l'équation 6.5. On trouve que $E_{abs}(p')$ est inférieur à $3\sigma^{post}(p')$ pour tous les paramètres, ce qui indique que l'inversion s'est passée correctement (figure 6.2). La matrice de corrélation, donnée par la figure (6.3), indique, par exemple, que les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ sont

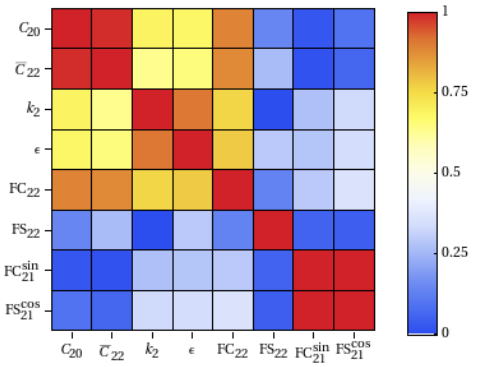


FIG. 6.3 – Matrice de corrélation pour l'inversion avec les nouveaux paramètres et pour une mesure (bruitée) par jour.

fortement corrélés entre eux, c'est-à-dire qu'ils ont un effet similaire sur l'observable pour les temps de mesure choisis. Pour un autre ensemble de temps de mesures différents, les corrélations peuvent être très différentes.

## 6.3 Absorption du signal par les conditions initiales de l'orbite

Après avoir ajouté le bruit sur le mesures, la prochaine étape pour se rapprocher d'une inversion réaliste est de considérer l'incertitude sur la position initiale de la sonde. En effet, dans la réalité, la position de la sonde au début de l'arc d'observation ne peut pas être connue parfaitement, et il faut considérer les éléments orbitaux initiaux de la sonde comme des paramètres à ajuster, en plus des paramètres géophysiques. Il se peut en effet qu'une petite modification de la position initiale agisse de façon similaire à une petite variation de la valeur des paramètres géophysiques, ce qui empêcherait alors la détermination précise de ces derniers. On dit alors que les conditions initiales *absorbent le signal*, c'est-à-dire l'effet des paramètres géophysiques.

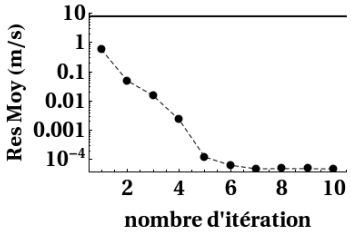


FIG. 6.4 – Moyenne des résidus de l'inversion pour les nouveaux paramètres géophysiques et les conditions initiales, en fonction du nombre d'itération. La ligne horizontale indique la valeur moyenne des résidus a priori qui est de 7.5 m/s.

| $\mathbf{p}_{CI}$ | $\mathbf{p}_{CI}^{vrai}$ | $\mathbf{p}_{CI}^{0}$ | $\mathbf{p}_{CI}^{sol}$ | $\sigma_{CI}^{post}$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_{20}$ | $-0.0004355$ | $-0.0004300$ | $-0.00043553$ | $2\,10^{-8}$ |
| $\bar{C}_{22}$ | 0.0001315 | 0.0001350 | 0.0001315 | $3\,10^{-9}$ |
| $k_2$ | 0.25 | 0.22 | 0.249808 | 0.000362 |
| $\varepsilon$ | $\frac{1}{15}$ (3.82°) | $\frac{1}{17}$ (3.37°) | 0.066569 (3.81°) | 0.001286 (0.07°) |
| $FC_{22}$ | $6.7892\,10^{-9}$ | $4.9876\,10^{-9}$ | $4.6409\,10^{-9}$ | $2.4663\,10^{-9}$ |
| $FS_{22}$ | $-6.0218\,10^{-7}$ | $-5.2156\,10^{-7}$ | $-6.0188\,10^{-7}$ | $3.7\,10^{-10}$ |
| $FC_{21}^{sin}$ | $5.9228\,10^{-7}$ | $5.7606\,10^{-7}$ | $5.9870\,10^{-7}$ | $6.974\,10^{-9}$ |
| $FS_{21}^{cos}$ | $1.4595\,10^{-7}$ | $1.3121\,10^{-7}$ | $1.4934\,10^{-7}$ | $3.926\,10^{-9}$ |
| $a_{So}$ | 1960.8km | 1960.9km | 1960.8km | 0.00002km |
| $e_{So}$ | 0.09 | 0.088 | 0.09 | $3\,10^{-7}$ |
| $i_{So}$ | 88° | 87.8° | 88° | 0.0001° |
| $\omega_{So}$ | 0° | +0.5° | 0.00001° | 0.0003° |
| $\Omega_{So}$ | 0° | −0.3° | −0.00001° | 0.00006° |
| $M_{So}(t_o)$ | 0° | −0.3° | −0.00002° | 0.00037° |

TAB. 6.4 – Inversion avec les éléments orbitaux initiaux considérés comme paramètres : valeurs vraies, solution a priori, résultat de l'inversion (dixième itération) et erreurs a posteriori.

Étant donné que nous avons maintenant 14 paramètres à inverser,

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{CI} \quad = \quad & (C_{20}, \bar{C}_{22}, k_2, \varepsilon, FC_{22}, FS_{22}, FC_{21}^{sin}, FS_{21}^{cos}, \\ & a_{So}, e_{So}, i_{So}, \omega_{So}, \Omega_{So}, M_{So}(t_o)),\end{aligned} \tag{6.6}$$

nous considérons deux mesures par jour sur un arc de dix jours, toujours pour la même orbite autour d'Europe que celle considérée dans les sections précédentes, et toujours sans considérer la condition de visibilité. Nous avons au total 21 mesures. Les résidus a priori sont de l'ordre de 8 m/s.

Nous suivons la même stratégie pour l'inversion que dans la section précédente, c'est-à-dire que l'on calcule la matrice des dérivées partielles à la première

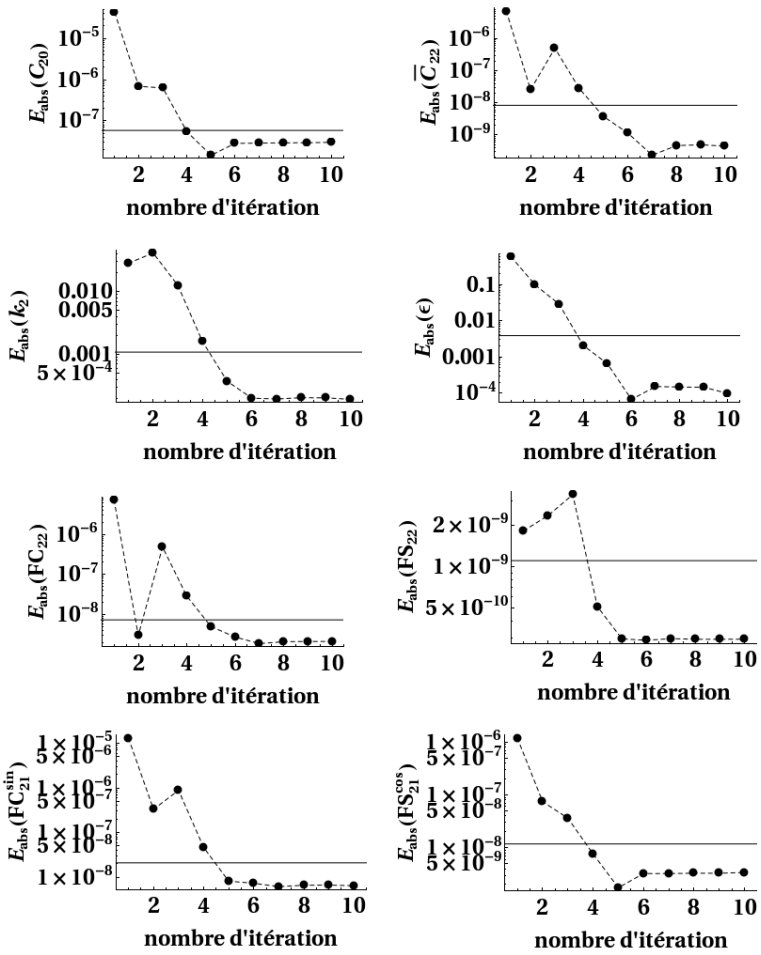


FIG. 6.5 – Erreurs absolues de la solution pour chaque paramètre géophysique, en fonction du nombre d'itération, dans le cas où les conditions initiales de l'orbite sont considérées comme paramètres à inverser. Les lignes horizontales indiquent, pour chaque paramètre, le niveau de $3\sigma^{post}$.

itération. On itère ensuite jusqu'à ce que les résidus varient de moins de 1% (figure 6.4) et on itère une dernière fois en recalculant les dérivées. Nous itérons donc l'inversion à dix reprises. La solution converge bien (figures 6.5 et 6.6). Lorsque les conditions initiales n'étaient pas considérées comme paramètres, six itérations étaient suffisantes, mais les résidus a priori étaient alors plus petits. La solution finale et l'erreur a posteriori associée sont présentées dans le tableau (6.4) tandis que la matrice des corrélations est présentée dans la figure (6.7).

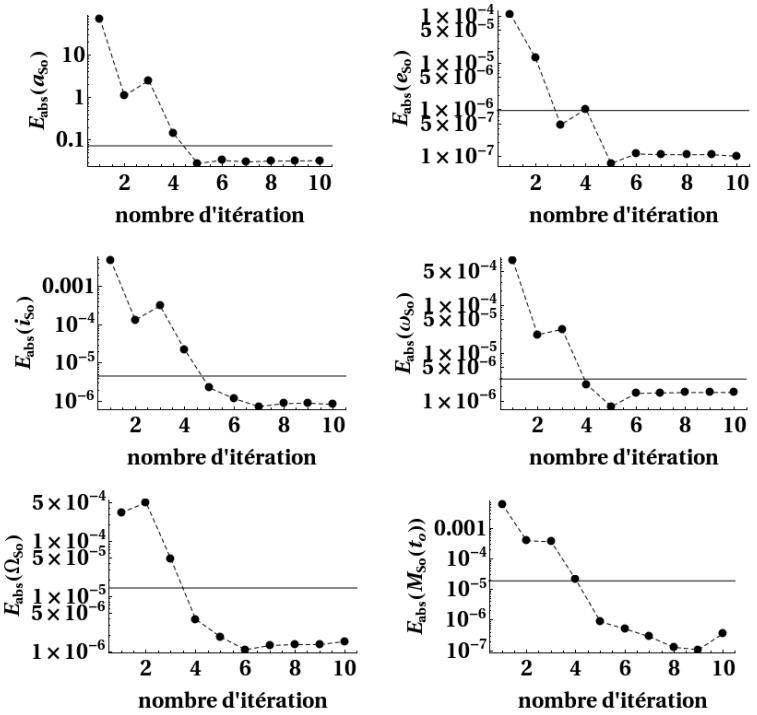


FIG. 6.6 – Erreurs absolues de la solution pour les éléments orbitaux initiaux, en fonction du nombre d'itération, pour l'inversion avec les nouveaux paramètres géophysiques et les éléments orbitaux initiaux considérés comme paramètres. Les lignes horizontales indiquent, pour chaque paramètre, le niveau de $3\sigma_{CI}^{post}$.

Dans l'ensemble, l'ordre de grandeur des erreurs a posteriori sur les paramètres géophysiques n'est pas trop affecté par l'ajout des conditions initiales de l'orbite dans les paramètres à inverser. Certaines erreurs augmentent à cause de l'effet des conditions initiales, tandis que d'autres diminuent car plus de temps de mesures ont été considérés. On remarque que les corrélations entre les paramètres sont affectées par les conditions initiales, mais cela est aussi en partie le résultat des temps de mesure qui sont différents (21 mesures au lieu de 11). En conclusion, nous préférons par la suite garder les conditions initiales comme paramètres à inverser, car il est difficile d'anticiper quel peut être leur effet exact sur l'inversion.

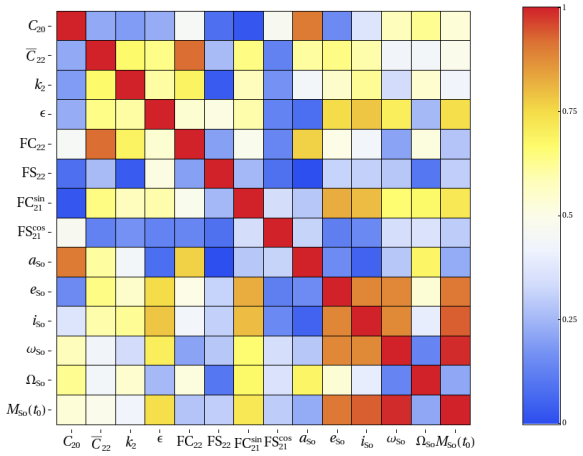


FIG. 6.7 – Matrice de corrélation pour l'inversion avec les nouveaux paramètres géophysiques et les conditions initiales considérées comme paramètres

## 6.4 Effet de la visibilité et du nombre de mesures

La dernière chose à considérer si on souhaite se rapprocher d'une situation réaliste est la visibilité de la sonde depuis la station d'observation sur Terre. En effet, pour l'orbite autour d'Europe considérée jusqu'à présent dans ce chapitre (et notée OrbNom2030, voir chapitre 5), la sonde n'est visible que 45% du temps environ, à cause de la rotation de la Terre (voir la figure 5.13). La visibilité de la sonde influe donc sur le nombre de mesures qu'il est possible de réaliser.

Supposons que l'on puisse tenter $N_m$ mesures par jour, également espacées dans le temps, à partir de $t_o$, date de début de l'arc d'observation. Si la durée de l'arc d'observation est $D_a$, cela revient en principe à considérer un nombre total de mesures $N_t$ égal à $(D_a N_m + 1)$. Mais si nous tenons compte de la visibilité, $N_t$ est environ égal à $0.45(D_a N_m + 1)$. La valeur exacte de $N_t$ peut être obtenue en utilisant la condition (5.47).

Nous souhaitons tester plusieurs valeurs de $N_m$ et $D_a$. Pour $N_m$, on commence avec une mesure par jour. Nous multiplions par après ce nombre par deux et ainsi de suite jusqu'à $N_m = 64$. On prend des durées d'arc $D_a$ égales à $2, 4, 6, 8$ ou $10$ jours. Sans tenir compte de la visibilité, nous aurions au maximum $N_t = 641$ mesures. Ce nombre est réduit à 262 lorsque la visibilité de la sonde rentre en jeu (voir tableau 6.5).

| $N_m \backslash D_a$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 2 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 4 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 |
| 8 | 17 | 33 | 49 | 65 | 81 |
| 16 | 33 | 65 | 97 | 129 | 161 |
| 32 | 65 | 129 | 193 | 257 | 321 |
| 64 | 129 | 257 | 385 | 513 | 641 |

↓

condition de visibilité (5.47)

↓

| $N_m \backslash D_a$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 19 |
| 8 | 7 | 15 | 23 | 31 | 37 |
| 16 | 13 | 27 | 41 | 55 | 66 |
| 32 | 25 | 53 | 81 | 109 | 132 |
| 64 | 49 | 103 | 158 | 214 | 262 |

TAB. 6.5 – Nombre total de mesures $N_t$ en fonction du nombre de mesures par jour $N_m$ et de la durée de l'arc $D_a$, en tenant compte (droite) ou non (gauche) de la visibilité. Les valeurs de $N_t$ situées dans la partie encadrée du tableau de droite correspondent aux paires $(N_m, D_a)$ pour lesquelles l'inversion est possible. Les valeurs dans les zones grises correspondent à des cas où l'inversion n'est pas possible, malgré le nombre de mesures plus grand que le nombre de paramètres à inverser (14).

Pour pouvoir réaliser une inversion par les moindres carrés sur l'ensemble des 8 paramètres géophysiques retenus et des 6 conditions initiales de l'orbite, il faut en principe que $N_t \geq 14$. Néanmoins, nous avons remarqué pour certaines paires $(N_m, D_a)$ ayant $N_t > 14$, il est impossible de réaliser l'inversion. Les résidus a priori ne convergent pas vers l'ordre de grandeur du bruit sur les mesures et la solution obtenue n'a pas de sens. Il y a deux raisons à cela :

- Premièrement, il est d'autant plus difficile de s'affranchir de l'effet du bruit sur les mesures que le nombre de mesures est petit. Par conséquent, pour être en mesure de réaliser l'inversion, il vaut mieux utiliser un peu plus de mesures que le nombre minimal théoriquement nécessaire. Cette explication s'applique aux cas $N_t = 15$ et 16.
- Deuxièmement, les perturbations de l'orbite de la sonde, et donc les effets

> des paramètres géophysiques sur l'observable, comportaient une composante séculaire et une composante périodique. La période impliquée dans les perturbations périodiques significatives étaient celle de révolution/rotation du satellite naturel (3.55 jours pour Europe) et la moitié de cette dernière. Par conséquent, pour des durées d'arc trop courtes, il est difficile d'ajuster les paramètres de façon à reproduire ces perturbations périodiques. Cette explication s'applique aux cas $N_t = 25$ et 49, pour lesquels $D_a = 2$ jours$<$ 3.55 jours.

Il nous reste donc plusieurs possibilités pour les paires $(N_m, D_a)$, allant de $N_t = 23$ à 262 mesures et avec $D_a \geq 4$ jours. Notons que le temps $t_o + D_a$ ne correspond pas nécessairement à un moment où la sonde est visible. C'est-à-dire que le temps correspondant à la dernière mesure $t_{N_t}$ est différent de $(t_o + D_a)$. Par conséquent, nous définissons la durée effective de l'arc, $D_a^{ef} = t_{N_t} - t_o$. Les erreurs a posteriori sur les paramètres géophysiques sont d'autant plus petites que le nombre de mesures par jour $N_m$ et que la durée de l'arc $D_a$ sont grands.

Les erreurs a posteriori sur les paramètre ne dépendent quasiment pas de la valeur exacte du bruit ajouté sur chaque mesure, mais uniquement de l'écart-type $\sigma$ de ce bruit. Par contre, l'erreur absolue dépend bien du bruit ajouté à chaque mesure. Dans une étude de faisabilité, seule l'erreur a posteriori nous intéresse vraiment. En fait, avec des mesures réelles, nous ne pourrions même pas connaître la valeur de l'erreur absolue sur les paramètres, celle-ci n'est accessible qu'en simulation. Le calcul de l'erreur absolue permet seulement de valider l'inversion. De plus, notons que les erreurs a posteriori décroissent avec le nombre de mesures considérées, tandis que les erreurs absolues ne doivent pas nécessairement remplir cette condition. Pour les inversions réalisées ici, l'erreur absolue sur les paramètres est compatible avec les erreurs a posteriori, c'est-à-dire que $E_{abs} \lesssim 3\sigma^{post}$ pour tous les paramètres (figure 6.8), signe que la solution obtenue a bien un sens. Par conséquent, pour $4 \leq D_a \leq 10$ si $N_m = 16, 32$ et 64 et pour $6 \leq D_a \leq 10$ si $N_m = 8$, on peut extrapoler et considérer que l'inversion serait valide quelque soit la valeur de $D_a$ (et donc de $N_t$ et de $D_a^{ef}$) considérée.

Comme précédemment, nous avons réalisé l'inversion par itérations successives, sans recalculer les dérivées partielles évaluées lors de la première itération, jusqu'à ce que les résidus a posteriori varient de moins de 1%. Ensuite, nous avons itéré l'inversion une dernière fois en recalculant la matrice des dérivées partielles. Cette dernière nous a alors fourni les erreurs a posteriori sur les paramètres (les cercles sur la figure 6.8). Nous avons constaté que les erreurs a posteriori calculées à partir de la première matrice sont similaires à celles obtenues avec la seconde, car les valeurs a priori des paramètres sont relativement proches des valeurs vraies. Nous pouvons donc calculer les erreurs a posteriori à partir de la première matrice pour toutes les durées effectives d'arc (de maxi-

mum 10 jours) qu'il est possible d'envisager pour $N_m = 8, 16, 32$ et 64. Nous obtenons les courbes de la figure (6.8).

L'intérêt de ce 'raccourci' est d'obtenir des résultats similaires à ceux des inversions, tout en réduisant considérablement le temps de calcul. Dans la pratique, puisque les différentes valeurs de $N_m$ sont des puissances de 2, il est facile[5] d'extraire la matrice des dérivées partielles correspondant à n'importe quel couple $(N_m, D_a^{ef})$ à partir de la matrice pour $(N_m = 64, D_a = 10)$. Il suffit donc de calculer une seule matrice pour tracer les courbes de la figure (6.8). Le temps de calcul pour obtenir ces courbes est environ cinq fois plus petit[6] que pour obtenir les cercles correspondant aux 14 inversions réalisées. De plus, toutes les durées effectives de l'arc $D_a^{ef}$ sont considérées.

On observe clairement que les erreurs a posteriori diminuent avec le nombre de mesures par jour $N_m$ et avec la durée effective de l'arc $D_a^{ef}$. Par exemple, passer de $N_m = 1$ à $N_m = 16$ pour une même valeur de $D_a^{ef}$ permet de diminuer d'environ un facteur 4 l'erreur sur $C_{20}$, tandis que passer d'un arc de 4 jours à un arc de 10 jours sans changer la fréquence de mesure permet de gagner environ un facteur 2. La différence entre le cas le plus défavorable ($N_m = 8, D_a = 8$ et $\sigma_{C_{20}}^{post} = 1.5\,10^{-8}$) et le cas le plus favorable ($N_m = 16, D_a = 10$ et $\sigma_{C_{20}}^{post} = 3.2\,10^{-9}$) est d'un facteur 5, ce qui n'est pas négligeable.

En conclusion, pour pouvoir réaliser une inversion en vue de déterminer les paramètres géophysiques, il faut que la durée de l'arc soit au moins égale à la période de révolution du satellite naturel et avoir un nombre suffisant de données. Pour améliorer la précision de l'inversion et mieux contraindre la structure interne du satellite considéré, il faut augmenter la fréquence de mesure et/ou la durée de l'arc.

## 6.5 Les nouveaux paramètres géophysiques : lien avec la structure interne et sensibilité de l'observable

Dans la première section de ce chapitre, nous avons montré que les paramètres géophysiques liés à la rotation et identifiés dans le chapitre 1 ($g_s$, $g_i$, $\varepsilon_s$, $\varepsilon_i$, $\mu_s$, $\mu_i$, $C_{20}^s$ et $C_{22}^s$) ne conviennent pas pour réaliser une inversion des mesures de l'observable Doppler vers les paramètres géophysiques. En effet, certains de ces paramètres ont des effets similaires sur l'observable Doppler. Par conséquent, la solution de l'inversion a tendance à ne pas être unique, ce

[5] En fait les valeurs de $N_m$ ont été choisies dans ce but.

[6] Il faut compter environ 10h pour le code développé sous Mathematica7 et utilisé avec une machine relativement récente...

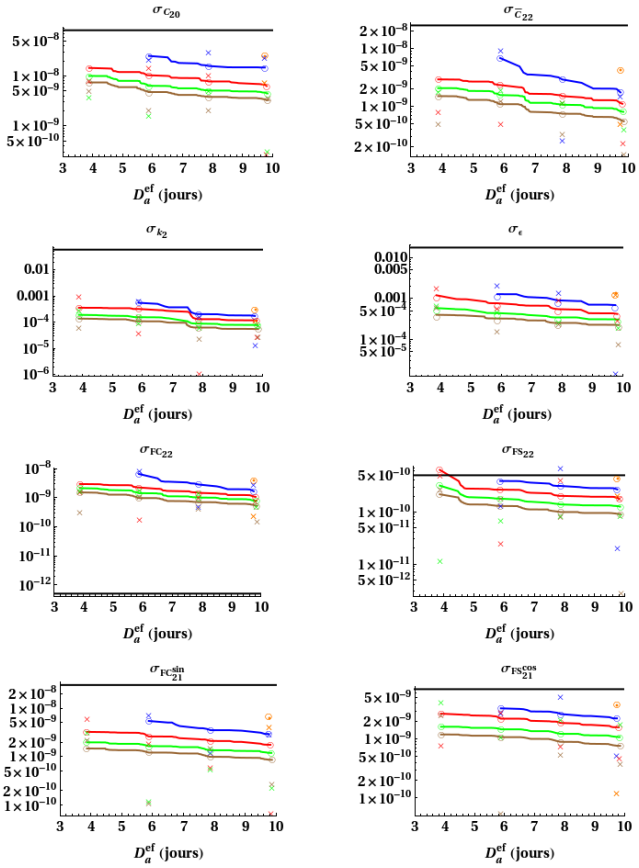


FIG. 6.8 – Erreurs a posteriori $\sigma^{post}$ pour l'inversion la plus réaliste possible (bruit sur les mesures, conditions initiales comme paramètres ajustables et condition de visibilité), en fonction de la durée effective de l'arc $D_a^{ef}$ :
$\circ \rightarrow \sigma^{post}$ calculé à partir de la matrice normale issue de la dernière itération pour les inversions réalisées avec succès (nombre total de mesures $N_t$ allant de 27 à 262 et durée de l'arc $D_a > 2$ jours).
$\times \rightarrow$ Erreur absolue $E_{abs}$ sur les paramètres, pour ces mêmes inversions.
Les différentes courbes correspondent aux erreurs a posteriori calculées à partir de la matrice normale qui dérive de la solution a priori.
Les différentes couleurs correspondent à une valeur différente du nombre de mesures par jour $N_m$ (orange, bleu, rouge, vert et brun pour $N_m = 4, 8, 16, 32$ et 64, respectivement).
Les lignes horizontales pointillées indiquent le niveau de précision nécessaire pour contraindre la structure interne d'Europe à un niveau raisonnable (voir chapitre 7).

qui entraîne l'itération de l'inversion vers une solution qui est fausse.

En fait, ces paramètres décrivent plus la rotation elle-même que l'effet de la rotation sur les coefficients du potentiel gravitationnel du satellite naturel considéré. C'est pourquoi nous avons décidé d'utiliser un nouvel ensemble de paramètres liés la rotation et qui sont des combinaisons des anciens paramètres : $FC_{22}, FS_{22}, FC_{21}^{sin}, FC_{21}^{cos}, FS_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ (chapitre 1, équations 1.28-1.33). $FC_{22}$ et $FS_{22}$ décrivent respectivement l'effet des librations sur les coefficients $C_{22}$ et $S_{22}$. Les autres combinaisons décrivent l'effet de l'orientation de la coquille et de l'intérieur sur $C_{21}$ et $S_{21}$.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié le lien entre les anciens paramètres liés à la rotation et la structure interne. Mais au vu de ce qui précède, il est plus pertinent de considérer directement le lien entre les nouveaux paramètres et la structure interne. De même, pour être en mesure de mieux comprendre pourquoi certains paramètres sont mieux inversés que d'autres, il est nécessaire d'étudier la sensibilité de l'observable Doppler par rapport aux nouveaux paramètres, comme cela a été réalisé pour les anciens paramètres dans le chapitre 5. Pour ce faire, nous nous baserons sur les résultats des chapitres 3 et 5.

### 6.5.1 Europe

Dans la section (3.2.2), nous avons montré qu'on peut négliger les variations autour de la précession orbitale moyenne d'Europe. On peut donc négliger les longitudes $\mu_s$ et $\mu_i$ des nœuds du BF de la coquille et de l'intérieur par rapport à l'orbite, comptées à partir du nœud de l'orbite sur la plan de Laplace (figure 3.10), et qui dépendent uniquement de ces variations. Les paramètres $FC_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{sin}$ sont donc nuls (voir les équations 1.31 et 1.32).

Les valeurs de $FC_{22}, FS_{22}, FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ sont calculées pour tous les modèles de structure interne du balayage défini par le tableau (2.3) et sont présentées en fonction de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$ dans la figure (6.9). $FC_{22}$ et $FS_{22}$ montrent une dépendance nette vis-à-vis de $h_s$, tandis que $FC_{21}$ et $FS_{21}$ ne dépendent que peu de $h_s$, ce qui est la conséquence directe de la façon dont les anciens paramètres dépendent de $h_s$. Pour rappel, l'amplitude de libration de la coquille $g_s$ dépend essentiellement de $h_s$, l'épaisseur de la coquille de glace, et dans une moindre mesure de la différence $(\rho_o - \rho_s)$ entre la densité de l'océan et de la coquille (équation 3.38). L'effet de l'amplitude de libration de l'intérieur $g_i$ sur les combinaisons $FC_{22}$ et $FS_{22}$ est masqué par l'effet de $g_s$, comme nous l'avions anticipé dans la section (3.1.2). Les obliquités $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$ ne dépendent pas uniquement de $h_s$ de façon significative (équations 3.66-3.67). Les coefficients $C_{20}^s$ et $C_{22}^s$ des potentiels des masses de la coquille et de l'océan supérieur d'une part, et des masses de l'intérieur de l'océan inférieur d'autre part, exprimés dans les **BF** respectifs de la coquille et de l'intérieur,

dépendent principalement de la densité de l'océan $\rho_o$ et dans une moindre mesure de la différence $(\rho_o - \rho_s)$ (équations 3.41 et 3.69).

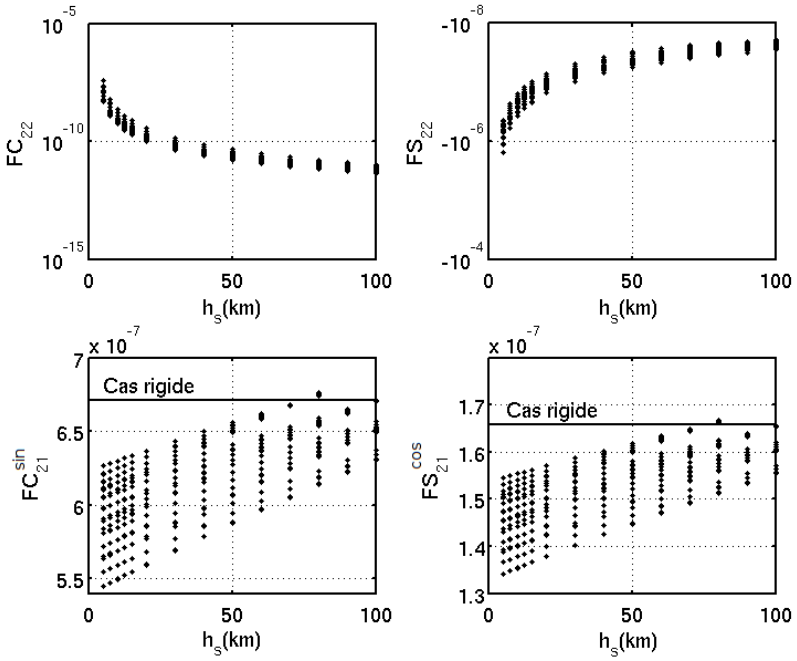


FIG. 6.9 – Valeurs des paramètres $FC_{22}, FS_{22}, FC_{21}$ et $FS_{21}$ en fonction de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$, pour les différents modèles de structure interne du balayage pour Europe.

Pour les nouveaux paramètres, il est possible de dériver des expressions approximées qui rendent compte de leurs principales dépendances par rapport à la structure interne. Les approximations obtenues pour les anciens paramètres dans le chapitre 3 seront très utiles.

Commençons par les paramètres $FC_{22}$ et $FS_{22}$. Dans les équations (1.28-1.29), nous négligeons $g_i$ devant $g_s$, de sorte que

$$FC_{22} \simeq C^s_{22} g_s^2, \tag{6.7}$$
$$FS_{22} \simeq C^s_{22} g_s. \tag{6.8}$$

Si dans les équations (3.38) et (3.41) pour $g_s$ et $C^s_{22}$ on néglige la différence

$(\rho_o - \rho_s)$, on obtient que

$$FC_{22} \simeq \frac{24e^2\pi\beta_s^3 R^5 \rho_s}{125 h_s^2 \mathcal{M}}, \tag{6.9}$$

$$FS_{22} \simeq \frac{-4e\pi\beta_s^2 R^4 \rho_s}{25 h_s \mathcal{M}}, \tag{6.10}$$

où $h_s$ et $\rho_s = \rho_o$ sont les seuls paramètres dépendant de la structure interne. Le comportement de ces approximations, pour $h_s \gtrsim 30$ km, est similaire à celui des expressions exactes. On peut donc estimer l'erreur $\sigma_{h_s}$ sur la détermination de $h_s$ qui provient de l'erreur $\sigma_{FC_{22}}$ ou $\sigma_{FS_{22}}$ sur l'estimation de $FC_{22}$ ou de $FS_{22}$, si on suppose que tous les autres paramètres de la structure interne (dont $\rho_s$) sont connus. A partir des équations (6.9-6.10), on trouve que

$$\sigma_{h_s} \approx \left| \frac{\sigma_{FC_{22}}}{\partial_{h_s} FC_{22}} \right| = \left| \frac{h_s}{2FC_{22}} \sigma_{FC_{22}} \right|, \tag{6.11}$$

$$\sigma_{h_s} \approx \left| \frac{\sigma_{FS_{22}}}{\partial_{h_s} FS_{22}} \right| = \left| \frac{h_s}{FS_{22}} \sigma_{FS_{22}} \right|. \tag{6.12}$$

Nous avons vu dans le chapitre 3 que l'amplitude de libration de la coquille $g_s$ pourrait être mesurée avec une précision de l'ordre du mètre grâce à l'analyse d'images de la surface. Si tous les autres paramètres libres étaient connus, cela reviendrait à déterminer $h_s$ avec une précision de l'ordre de la dizaine ou de la centaine de mètres sur $h_s$ (voir l'équation 3.40 et la figure 9 de Baland et Van Hoolst 2010, en annexe F). Pour obtenir ce niveau de précision à partir de l'estimation des nouveaux paramètres via leur effet sur le potentiel gravitationnel, il faut que $\sigma_{FC_{22}}$ soit de l'ordre de $10^{-14}$ ou que $\sigma_{FS_{22}}$ soit de l'ordre de $10^{-11}$ (figure 6.10). Mais la méconnaissance des autres paramètres de structure interne entraîne une erreur additionnelle sur $h_s$ de l'ordre de 20 km (elle n'était que de 10 km avec $g_s$). Cette erreur additionnelle est dominante tant que $\sigma_{FC_{22}} \lesssim 5\,10^{-13}$ ou $\sigma_{FS_{22}} \lesssim 5\,10^{-10}$. Par conséquent obtenir $\sigma_{FC_{22}} \simeq 5\,10^{-13}$ ou $\sigma_{FS_{22}} \simeq 5\,10^{-10}$ est suffisant pour contraindre au mieux l'épaisseur de la coquille de glace. Ces niveaux de précision peuvent aussi s'appliquer pour $5 \lesssim h_s \lesssim 30$ km, car le fait que la dépendance des paramètres $FC_{22}$ et $FS_{22}$ par rapport à $h_s$ est plus marquée est compensé par le fait que l'erreur additionnelle est plus petite.

Les paramètres $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ ont des expressions approximées compliquées à cause de la complexité des expressions pour $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$ (équations 3.66-3.67). Nous n'allons donc pas écrire ces approximations ici. Il suffit de savoir que $FC_{21}$ et $FS_{21}$ dépendent significativement de tous les paramètres libres du balayage des modèles de structure interne. La méconnaissance des autres paramètres libres entraine l'impossibilité de contraindre la structure interne à partir des valeurs de $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$. La seule chose que l'on peut faire est de comparer les valeurs mesurées avec les valeurs du cas rigide, pour déterminer la présence

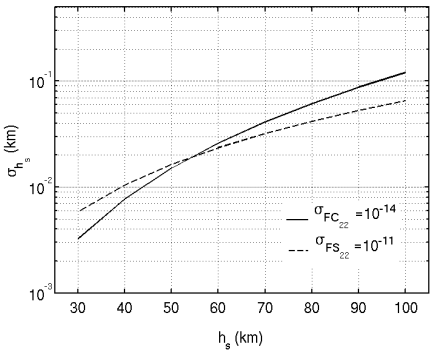


FIG. 6.10 – Erreur attendue sur la détermination de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$ qui résulte d'une erreur sur la détermination de $FC_{22}$ ou $FS_{22}$ en fonction de l'épaisseur de la coquille, pour Europe.

ou non d'un océan liquide. Pour pouvoir affirmer qu'un océan est présent, il faut que la valeur mesurée du paramètre soit différente de la valeur du cas rigide, dans la limite des barres d'erreur au niveau $3\sigma$ :

$$\sigma_F < \frac{|F^{mes} - F^{rigid}|}{3} \quad \text{avec} \quad F = FC_{21}^{sin} \quad \text{ou} \quad FS_{21}^{cos}. \tag{6.13}$$

Le niveau de précision requis dépend donc de la valeur mesurée. Par exemple, pour satisfaire cette condition pour les valeurs moyennes de $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ pour $h_s = 5$ km (voir tableau 6.3), il faut que $\sigma_{FC_{21}^{sin}} \lesssim 3\,10^{-8}$ ou que $\sigma_{FS_{21}^{sin}} \lesssim 7\,10^{-9}$. Notons que le cas d'un océan recouvert d'une coquille épaisse sera plus difficile à discerner du cas rigide, car la valeur du cas rigide des paramètres $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ est comprise dans l'intervalle des valeurs possibles du cas avec océan pour une coquille épaisse.

Quelle est la sensibilité de l'observable Doppler par rapport aux nouveaux paramètres ? Puisque la contribution de $g_i$ à $FC_{22}$ et $FS_{22}$ est négligeable, l'effet cumulé de $FC_{22}$ et de $FS_{22}$ est similaire à l'effet de $g_s$ qui est de l'ordre de 1 m/s. Puisque $FC_{22}$ est environ 100 fois plus petit que $FS_{22}$, l'effet de $FC_{22}$ est de l'ordre de 0.01 m/s tandis que celui de $FS_{22}$ est de l'ordre de 1 m/s. La somme des effets de $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ sur l'observable doit être du même ordre de grandeur que la somme des effets de $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$, c'est-à-dire de l'ordre de 0.22 m/s. Puisque $FC_{21}^{sin}$ vaut environ[7] quatre fois $FS_{21}^{cos}$, l'effet de $FC_{21}^{sin}$ sur l'observable est de 0.18 m/s et celui de $FS_{21}^{cos}$ est de 0.04 m/s.

[7] C'est une conséquence de l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique utilisée pour définir le balayage des modèles de structure interne.

De façon générale, un paramètre est d'autant mieux inversé que son effet sur l'observable est grand (figure 6.11). Parmi les quatre nouveaux paramètres, $FC_{22}$ est celui qui a le moins d'influence sur l'observable et est donc celui qui a tendance à être le plus mal résolu par l'inversion des données Doppler. On peut en effet remarquer sur la figure (6.8) que l'erreur a posteriori sur ce paramètre est de l'ordre de 7% de la valeur du paramètre dans le cas le plus favorable (avec 262 mesures) , tandis que l'erreur sur $FS_{22}$ est de l'ordre de l'ordre de 0.02% et que celles sur $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ sont de l'ordre de 0.2% et 0.5%.

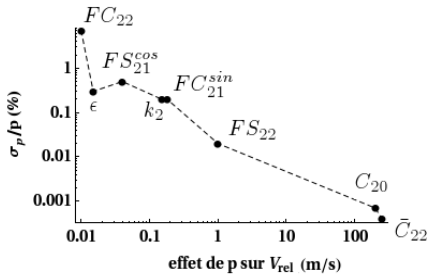


FIG. 6.11 – Erreur a posteriori relative sur les paramètres géophysiques $p$ pour le cas à 262 mesures en fonction de l'effet des paramètres sur l'observable Doppler $V_{rel}$.

### 6.5.2 Ganymède

Les valeurs des paramètres $FC_{22}$ et $FS_{22}$ pour les modèles de structure interne du balayage défini dans le tableau (2.4) sont données dans la figure (6.12). Comme pour Europe, on observe une dépendance nette par rapport à l'épaisseur de la coquille de glace et les équations (6.9-6.12) sont valables.

Comme on peut l'observer sur la figure (6.13), si tous les paramètres de la structure interne de Ganymède (dimension et densité des différentes couches) étaient connus à l'exception de $h_s$, il faudrait une précision $\sigma_{FC_{22}}$ de l'ordre de $10^{-16}$ ou $\sigma_{FS_{22}}$ de l'ordre de $10^{-11}$ pour obtenir une précision $\sigma_{h_s}$ de l'ordre de quelques kilomètres sur l'épaisseur de la coquille, c'est-à-dire une précision équivalente à celle que l'on pourrait obtenir avec une erreur de 1 m sur $g_s$ (figure 9 de l'annexe F). Néanmoins, la méconnaissance de ces paramètres entraine une erreur additionnelle de l'ordre de 50 km (au lieu de 20 km avec $g_s$). C'est-à-dire que la précision est dégradée d'un ordre de grandeur. $\sigma_{FC_{22}} \simeq 10^{-16}$ et $\sigma_{FS_{22}} \simeq 10^{-11}$ peuvent donc être considérés comme les niveaux de précision nécessaires pour contraindre au mieux l'épaisseur de la coquille.

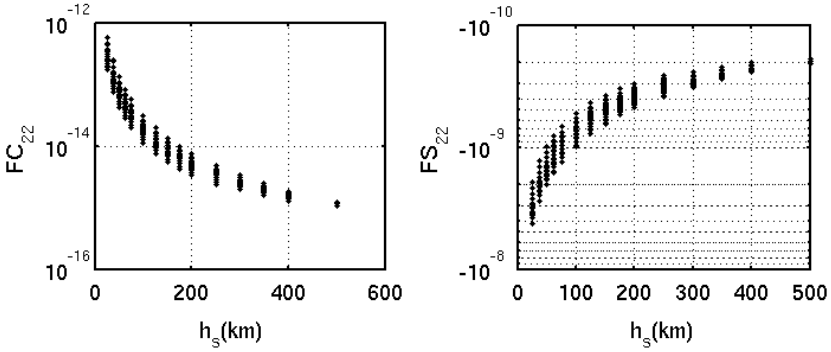


FIG. 6.12 – Valeurs des paramètres $FC_{22}$ et $FS_{22}$ en fonction de l'épaisseur de la coquille de glace $h_s$, pour les différents modèles de structure interne du balayage pour Ganymède.

Néanmoins, nous pouvons déjà anticiper qu'il ne sera en aucun cas possible d'atteindre la précision requise pour $FC_{22}$. Par exemple, pour le modèle de structure interne de la figure (2.3), $FC_{22} = 9.8948\,10^{-15}$ et $FS_{22} = -5.079\,10^{-10}$. L'effet cumulé de $FC_{22}$ et de $FS_{22}$ est similaire à l'effet de $g_s$ qui est de l'ordre de 0.003 m/s. Puisque $FC_{22}$ est environ 50000 fois plus petit que $FS_{22}$, l'effet de $FS_{22}$ est de l'ordre de 0.003 m/s et l'effet de $FC_{22}$ est de l'ordre de $10^{-7}$ et est complètement négligeable devant le bruit dont l'écart-type est de 0.0001 m/s. En fait, lors de la recherche d'une configuration de mission favorable pour une orbite autour de Ganymède (chapitre suivant), nous allons négliger le paramètre $FC_{22}$.

Passons maintenant aux paramètres liés à l'orientation de l'axe de rotation des différentes couches. Dans la section (3.2.2), nous avons montré que les angles $\mu_s$ et $\mu_i$ ne pouvaient être négligés pour Ganymède, à cause d'une amplification par résonance d'un ou plusieurs termes de la solution pour l'orientation de l'axe de rotation. Les paramètres $FC_{21}^{sin}, FC_{21}^{cos}, FS_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ sont donc tous non nuls, que ce soit dans le cas rigide ou dans le cas avec océan. Ils dépendent du temps, à long terme, mais peuvent être considérés comme constants durant un arc d'observation de l'ordre de quelques dizaines de jours. Les obliquités $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_i$ et les longitudes $\mu_s$ et $\mu_i$ ne dépendaient significativement d'aucun des paramètres de la structure interne de Ganymède (dimension et densité des différentes couches). Il ne sera donc pas possible de contraindre précisément la structure interne de Ganymède à partir de la mesure de $FC_{21}^{sin}, FC_{21}^{cos}, FS_{21}^{sin}$ ou $FS_{21}^{cos}$. Pour déterminer la présence ou non d'un océan, il faut que les valeurs mesurées soient différentes des valeurs du cas rigide dans la limite des barres d'erreur au niveau $3\sigma$. Cette précision requise dépend de la valeur mesurée (et

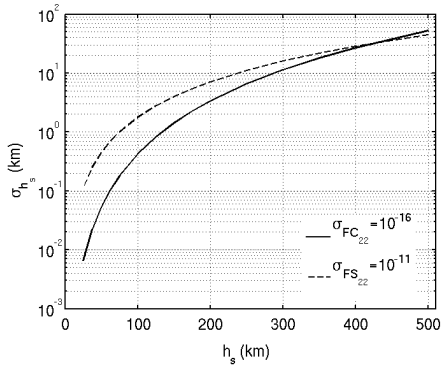


FIG. 6.13 – Erreur attendue sur la détermination de l'épaisseur de la coquille de glace qui résulte d'une erreur sur la détermination de $FC_{22}$ ou $FS_{22}$ en fonction de l'épaisseur de la coquille, pour Ganymède.

donc de la structure interne elle-même) et du temps de la mesure. Par exemple, pour le modèle de structure interne avec océan de la figure (2.3), les valeurs des nouveaux paramètres au $1^{er}$ janvier 2030 sont données dans le tableau (6.6). Ce tableau comprend aussi les valeurs du cas rigide pour la même date et le niveau de précision requis pour décider de la présence ou non d'un océan si les valeurs mesurées sont celles du cas avec océan.

| Paramètre | Cas rigide | Cas océan | $\sigma$ requise | Effet sur $V_{rel}$ (m/s) |
|---|---|---|---|---|
| $FC_{21}^{sin}$ | $2.16667\,10^{-7}$ | $2.35337\,10^{-7}$ | $6.22346\,10^{-9}$ | 0.14 |
| $FC_{21}^{cos}$ | $6.33103\,10^{-8}$ | $8.08391\,10^{-8}$ | $5.84295\,10^{-9}$ | 0.05 |
| $FS_{21}^{sin}$ | $1.58268\,10^{-8}$ | $2.02097\,10^{-8}$ | $1.46098\,10^{-9}$ | 0.01 |
| $FS_{21}^{cos}$ | $5.4164\,10^{-8}$ | $5.8834\,10^{-8}$ | $1.55667\,10^{-9}$ | 0.04 |

TAB. 6.6 – De gauche à droite : valeurs des nouveaux paramètres liés à l'orientation des axes de rotation des différentes couches au $1^{er}$ janvier 2030 dans le cas rigide, valeurs dans le cas avec océan pour le modèle de structure interne de la figure (2.3), précision requise pour établir la présence d'un océan et effet individuel sur l'observable Doppler.

Pour ce même modèle de structure interne et pour cette même date, nous avons également estimé l'effet des nouveaux paramètres sur l'observable Doppler. Nous avons utilisé l'effet des anciens paramètres (tableau 5.1) et l'expression des nouveaux paramètres (équations 1.30-1.33). La somme des effets des nouveaux paramètres doit être égale à la somme des effets des obliquités de l'intérieur et de la coquille, c'est-à-dire à 0.24 m/s. On a que[8] $FC_{21}^{sin} \simeq 4FS_{21}^{cos}$

[8]en raison de l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique.

et $FC_{21}^{cos} \simeq 4FS_{21}^{sin}$. Mais on a également que[9] $FC_{21}^{sin} \simeq 2.9FC_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{cos} \simeq 2.9FS_{21}^{sin}$. Par conséquent, on peut attribuer à chaque nouveau paramètre sa contribution à l'effet total de 0.24 m/s. Les résultats sont donnés dans le tableau (6.6). Connaître la sensibilité de l'observable Doppler aux paramètres liés à l'orientation de l'axe de rotation nous permettra de mieux comprendre les résultats de l'inversion dans le cas d'une orbite autour de Ganymède (voir chapitre suivant), de la même façon que cela nous permis d'expliquer pourquoi le paramètre $FC_{22}$ était le plus mal restitué pour une orbite autour d'Europe (section 6.4).

[9] car $\cos\mu_s / \sin\mu_s \simeq \cos\mu_i / \sin\mu_i \simeq 2.9$ dans ce cas précis.

# Chapitre 7

# Recherche d'une stratégie de mission favorable

## Sommaire


**7.1 Europe . . . . . 174**
7.1.1 Précision requise sur les paramètres . . . . . 174
7.1.2 Bilan de la configuration nominale . . . . . 176
7.1.3 Comparaison de différentes configurations de mission 176
**7.2 Ganymède . . . . . 183**
7.2.1 Précision requise sur les paramètres . . . . . 183
7.2.2 Comparaison de différentes configurations de mission 184
**7.3 Choix de la configuration de mission la plus favorable . . . . . 188**


Dans le chapitre 6, nous avons décrit la procédure d'inversion pour déterminer les paramètres géophysiques à partir de mesures simulées de l'observable Doppler. Nous avions pris pour exemple une orbite autour d'Europe, l'orbite Orb-Nom2030 (voir chapitre 4) qui est l'orbite nominale servant de référence à laquelle comparer les autres orbites. Un ensemble de paramètres géophysiques adaptés à l'inversion a été choisi. Nous avons ensuite considéré le bruit sur les mesures. Les conditions initiales, c'est-à-dire les éléments orbitaux au temps de début de l'arc d'observation, ont été inclus dans les paramètres à inverser. Finalement, la visibilité de la sonde et l'effet du nombre de mesures effectuées ont été pris en compte.

L'inversion présentée dans le section (6.4) constitue ce que nous allons appeler par la suite la *simulation nominale*. Nous parlons de « simulation » car notre but est de simuler la précision que l'on pourrait obtenir sur la détermination des paramètres géophysiques à partir de vraies données. Dans ce chapitre, nous

allons réaliser des simulations pour d'autres configurations de missions, c'est-à-dire pour des orbites qui diffèrent de l'orbite nominale par leurs conditions initiales, et comparer les résultats avec ceux de la simulation nominale. Nous allons également réaliser quelques simulations pour des orbites autour de Ganymède. Notre but est de décider quel type d'orbite est le plus adapté pour contraindre la structure interne d'Europe ou de Ganymède.

## 7.1 Europe

Pour les différentes simulations, nous avons gardé les mêmes valeurs vraies et a priori pour les paramètres géophysiques. Il s'agit des valeurs utilisées pour la simulation nominale (tableau 6.4). Elles correspondent à une coquille mince de l'ordre de 5 kilomètres d'épaisseur. Seules les conditions initiales de l'orbite changent. Dans un souci de simplicité, l'écart entre les valeurs vraies et a priori des conditions initiales sera le même pour toutes les simulations.

### 7.1.1 Précision requise sur les paramètres

Lors de chaque simulation, pour un nombre de mesure donné, nous obtenons pour chacun des paramètres géophysiques une valeur (la solution) accompagnée d'une barre d'erreur (l'erreur a posteriori). En situation réelle, on pourrait contraindre la structure interne d'Europe à partir de la solution et de son erreur, grâce à la dépendance des paramètres géophysiques par rapport à la structure interne (voir la Partie I et le chapitre 6.5). Pour chaque paramètre, nous définissons un niveau de précision minimal, c'est-à-dire une erreur a posteriori maximale, qui permet d'atteindre un objectif donné en ce qui concerne l'amélioration de la connaissance de la structure interne. Pour cela, nous nous basons sur les discussions de la section (1.2) et du chapitre 2 et sur les résultats du chapitre 3 et de la section (6.5).

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre 2, les coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ ont déjà été estimés auparavant (Anderson et al. 1998). Ils ne permettent pas de déterminer la présence ou non d'un océan interne, car les densités de l'eau et de la glace sont trop similaires. Par contre, la solution pour ces paramètres a permis de montrer que l'épaisseur de la couche eau/glace ($h_s + h_o$) est comprise entre 80 et 170 kilomètres. L'erreur sur l'estimation de $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ entraine une erreur de l'ordre de 10 kilomètres sur l'estimation des bornes de cette gamme de valeurs. Il est donc souhaitable qu'une mission future, à défaut de pouvoir réduire la gamme de valeurs pour ($h_s + h_o$), puisse réduise l'erreur sur les bornes, de façon à rendre cette erreur négligeable devant la largeur de la gamme. Pour cela, il faut une amélioration de deux ordres de grandeur sur la précision de la détermination de $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$. Cet objectif semble raisonnable car les estimations actuelles proviennent de l'analyse de quatre flybys, tandis

que nous envisageons ici l'analyse des données d'une sonde orbitant pendant dix jours et qui permettrait d'obtenir plus d'informations à analyser. Notons également que la détermination de Anderson et al. (1998) impliquait a priori la relation de l'équilibre hydrostatique ($C_{20} = -\frac{10}{3}\bar{C}_{22}$) pour palier au manque de données, ce qui n'est pas le cas dans nos simulations. En fait, une sonde en orbite inclinée permettra de déterminer indépendamment $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ et de vérifier l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique.

Comme nous l'avons montré dans la section (6.5), les paramètres $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ qui dépendent de l'orientation de la coquille et de l'intérieur peuvent être utiles pour confirmer la présence de l'océan dans le cas d'une coquille mince. Dans le cas d'une coquille épaisse, le déphasage $\varepsilon$ sera peut-être plus indiqué (chapitre 1).

Le nombre de Love $k_2$ contraint le produit de l'épaisseur et de la rigidité de la coquille. Wahr et al. (2006) indiquent que la détermination individuelle de $k_2$ ne peut pas permettre de contraindre précisément l'épaisseur $h_s$ de la coquille (voir discussion du chapitre 1). Nous prendrons donc comme objectif la détection de l'océan interne à partir de la mesure de $k_2$.

| Paramètre | $\sigma$ maximal requis | Objectif |
|---|---|---|
| $C_{20}$ | $8.2\,10^{-8}$ | 0.1 km sur les bornes de $h_s + h_o$ |
| $\bar{C}_{22}$ | $2.5\,10^{-8}$ | 0.1 km sur les bornes de $h_s + h_o$ |
| $k_2$ | 0.06 | détecter océan |
| $\varepsilon$ | $1^\circ$ pour une coquille épaisse | détecter océan |
| $FC_{22}$ | $5\,10^{-13}$ | 20 km sur $h_s$ |
| $FS_{22}$ | $5\,10^{-10}$ | 20 km sur $h_s$ |
| $FC_{21}^{sin}$ | $3\,10^{-8}$ pour une coquille mince | détecter océan |
| $FS_{21}^{cos}$ | $7\,10^{-9}$ pour une coquille mince | détecter océan |

TAB. 7.1 – Précision requise sur la détermination des paramètres géophysiques d'Europe et l'objectif en terme de contrainte de structure interne auquel cette précision correspond.

Les paramètres $FC_{22}$ et $FS_{22}$, qui dépendent des librations de la coquille (voir chapitre 6.5), peuvent aider à contraindre l'épaisseur de la coquille de glace. Malheureusement, même pour une très grande précision sur l'estimation de ces paramètres, l'épaisseur de la coquille ne peut pas être contrainte plus précisément à partir de ces paramètres qu'avec une erreur de l'ordre de 20 km, à cause de la méconnaissance de la différence entre la densité de l'océan et la coquille.

Le niveau de précision requis sur chaque paramètre géophysique ainsi que l'objectif en terme de contrainte de structure interne auquel ils correspondent

est rappelé dans le tableau (7.1). Une configuration de mission sera considérée comme favorable si elle permet d'atteindre ces niveaux de précision et, si possible, pour un nombre restreint de mesures et/ou une durée d'arc réduite, sachant que le nombre de mesure doit être supérieur au nombre de paramètres à inverser et que la durée de l'arc ne peut être inférieure à environ 4 jours, comme nous l'avons vu dans la section (6.4).

### 7.1.2 Bilan de la configuration nominale

A partir de la figure (6.8), on observe que quelque soit la durée de l'arc et la fréquence de mesures, la précision obtenue sur le paramètre $FC_{22}$ ($5\,10^{-10}$ au mieux) est insuffisante pour atteindre l'objectif fixé ($5\,10^{-13}$). Il faut se rappeler que ce paramètre est celui qui a l'influence la plus faible sur l'observable Doppler (0.01 m/s) et est donc celui qui est le plus difficile à extraire du bruit. Vu le comportement de l'erreur sur $FC_{22}$ en fonction de la fréquence de mesure et de la durée de l'arc, il n'est pas possible d'atteindre l'objectif en augmentant raisonnablement le nombre de mesures.

Par contre, dans l'ensemble, la configuration nominale permet, pour les autres paramètres géophysiques, d'atteindre un niveau de précision supérieur au niveau requis. Pour $FS_{22}$, il faut une cinquantaine ou une vingtaine de mesures selon que l'arc est court (4 jours) ou long (10 jours). Pour $C_{20}$, $\bar{C}_{22}$, $k_2$, $\varepsilon$, $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$, une vingtaine de mesures suffisent, quelque soit la durée de l'arc.

### 7.1.3 Comparaison de différentes configurations de mission

Pour la configuration nominale, si la fréquence d'observation $N_m$ définie dans la section (6.4) vaut 64, la précision sur les coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ est de l'ordre de $10^{-9}$ et correspond à la précision qui était attendue pour la sonde JEO de l'ancien projet de mission EJSM (Dougherty at al. 2011a). Par conséquent, nous pouvons estimer que le cas $N_m = 64$ est réaliste[1], c'est-à-dire ni trop optimiste, ni trop pessimiste. Nous allons donc comparer les erreurs a posteriori sur les paramètres géophysiques obtenues avec la configuration nominale avec celles obtenues pour d'autres configurations, en considérant uniquement le cas $N_m = 64$.

[1] Cela ne signifie pas nécéssairement que 64 mesures seront effectuées par jour dans la réalité, mais que dans le cadre de notre simulation où les mesures sont régulièrement réparties dans le temps, où les forces non gravitationnelles ont été négligées et où un seul arc de mesure a été considéré, cette valeur de $N_m$ donne la précision attendue sur les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$. Par conséquent, on peut supposer que la précision obtenue sur les autres paramètres est raisonablement proche de la réalité.

Pour faire varier significativement les erreurs a posteriori sur les paramètres, il faut que la géométrie (forme et orientation) de l'orbite de la sonde soit différente de celle de l'orbite nominale. En effet, une modification de l'anomalie moyenne initiale (par exemple $M_{So}(t_o) = 45^\circ$ au lieu de $0^\circ$) ne change quasiment pas les erreurs a posteriori. Pour changer la forme de l'orbite, on peut modifier son demi-grand axe initial ou son excentricité initiale. L'orientation de l'orbite est déterminée par la longitude du nœud, la longitude du péricentre et l'inclinaison.

**Demi-grand axe initial (altitude moyenne)**

Le demi-grand axe initial de l'orbite nominale était égal au rayon d'Europe additionné de 400 km. Pour tester l'effet de l'altitude sur les erreurs a posteriori, nous considérons les orbites Orb2030Alt200 et Orb2030Alt600 définies dans le chapitre 4, caractérisées respectivement par un demi-grand axe égal au rayon d'Europe additionné de 200 et de 600 km. Pour ces deux orbites, l'altitude moyenne de la sonde est plus ou moins égale au demi-grand axe initial. Les erreurs a posteriori pour ces deux orbites ainsi que celles de l'orbite nominale, pour une même fréquence d'observation ($N_m = 64$), sont présentées dans la figure (7.1), en fonction de la durée de l'arc. Les deux orbites permettent d'atteindre les niveaux de précision requis définis dans le tableau (7.1), à l'exception de celui pour $FC_{22}$, comme dans le cas de l'orbite nominale.

L'altitude moyenne de 600 km permet de réaliser le même nombre de mesures que l'altitude nominale, c'est-à-dire 262 au maximum (voir tableau 6.5), car la durée maximale de l'arc reste identique à celle de l'orbite nominale, c'est-à-dire dix jours. Pour l'orbite basse, la durée maximale de l'arc est de cinq jours, à cause de l'augmentation rapide de l'excentricité qui mène plus vite à une collision avec Europe (voir figure 4.5). Il en résulte un nombre de mesures possible maximal plus petit pour l'orbite basse (119 au lieu de 262).

La figure (7.1) montre que si on considère l'arc d'observation en entier (5 jours pour l'orbite basse et 10 jours pour les deux autres), l'orbite nominale fournit les meilleurs résultats. Par exemple, l'erreur sur $k_2$ à la fin de l'arc est de $5.5\,10^{-5}$ pour l'orbite nominale, tandis qu'elle est de $8.7\,10^{-5}$ et de $7.9\,10^{-5}$ pour les orbites basses et hautes, respectivement. Néanmoins, pour un nombre identique de mesures, et donc pour une même durée de l'arc (par exemple 4 jours), l'orbite basse donne de meilleurs résultats ($\sigma_{k_2} = 9.4\,10^{-5}$) que l'orbite haute ($\sigma_{k_2} = 1.9\,10^{-4}$) et que l'orbite nominale ($\sigma_{k_2} = 1.4\,10^{-4}$). En fait, l'influence du satellite naturel, et donc des paramètres géophysiques, est d'autant plus grande que l'orbite et basse, et une plus grande sensibilité de l'observable à un paramètre se traduit par une meilleure détermination de ce dernier.

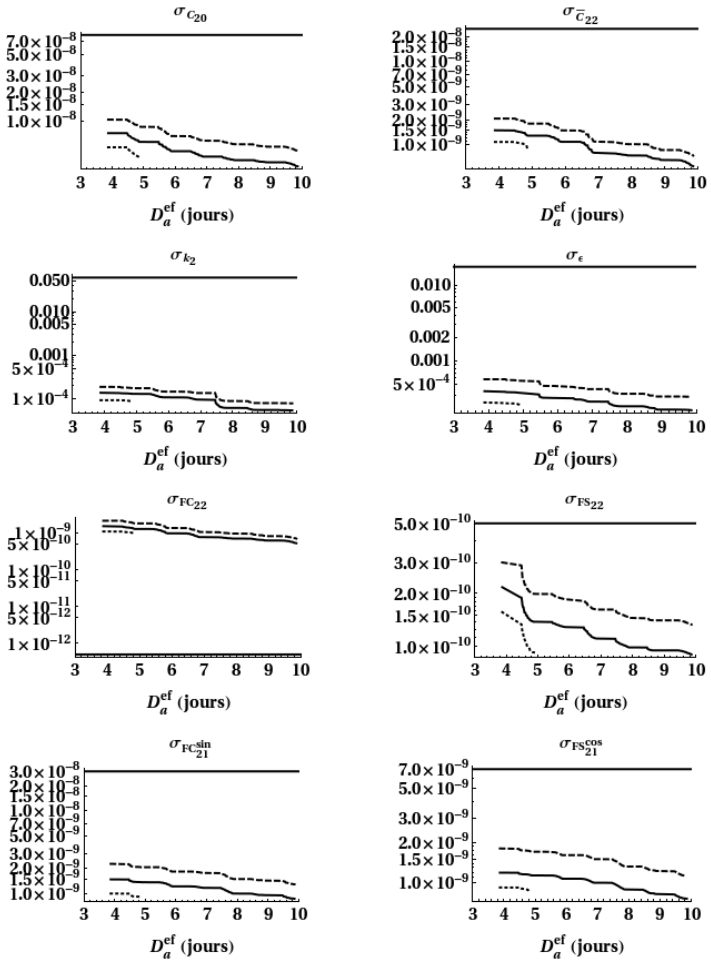


FIG. 7.1 – Influence de l'altitude de l'orbite sur les erreurs a posteriori des paramètres géophysiques : erreur a posteriori en fonction de la durée de l'arc pour l'orbite OrbNom2030 (lignes continues), l'orbite Orb2030Alt600 (tirets) et l'orbite Orb2030Alt200 (pointillés). Les lignes horizontales indiquent le niveau de précision nécessaire pour contraindre la structure interne (voir tableau 7.1).

### Excentricité

L'excentricité initiale de l'orbite nominale était de 0.09. Puisque nous souhaitons tester des configurations de mission pour des orbites quasi-circulaires, nous avons testé les orbites Orb2030Ex04 et OrbEx14 définies dans le chapitre 4, caractérisées resepctivement par des excentricités initiales relativement

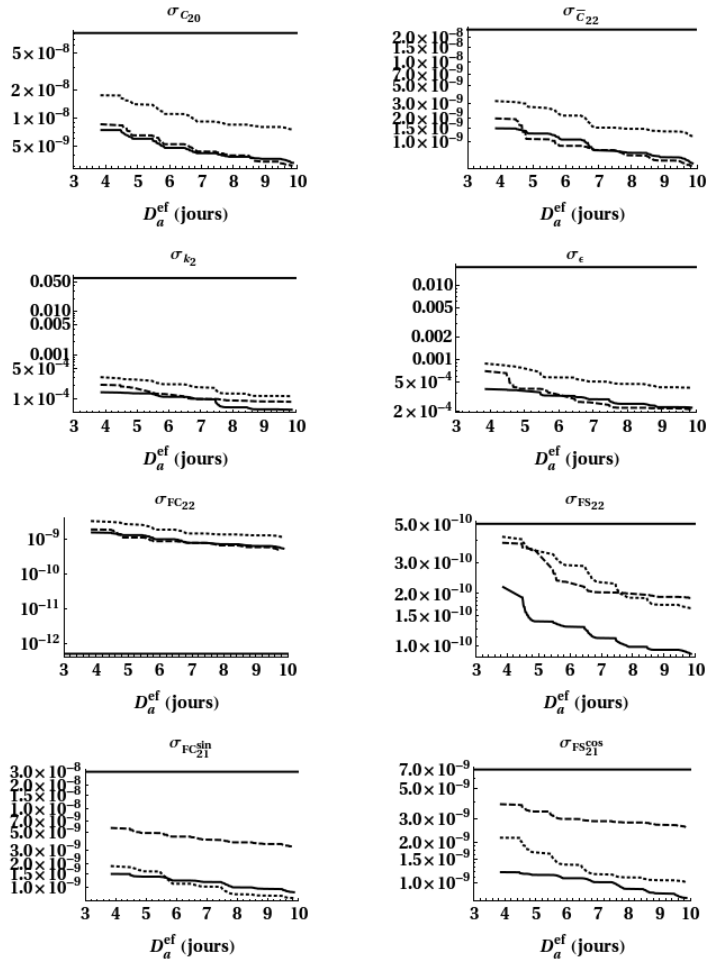


FIG. 7.2 – Influence de la longitude du nœud sur les erreurs a posteriori des paramètres géophysiques : erreur a posteriori en fonction de la durée de l'arc pour l'orbite OrbNom2030 (lignes continues), l'orbite Orb2030Nd45 ou edge-on (tirets) et l'orbite Orb2030Nd135 ou face-on (pointillés). Les lignes horizontales indiquent le niveau de précision nécessaire pour contraindre la structure interne (voir tableau 7.1).

faibles de 0.04 et 0.14. Pour rappel, la durée maximale de l'arc est respectivement de 10 et 5 jours pour ces deux orbites (voir figure 4.6).

Pour un même nombre de mesures, les erreurs a posteriori sont similaires à celles de l'orbite nominale, c'est pourquoi nous ne présentons pas les graphes

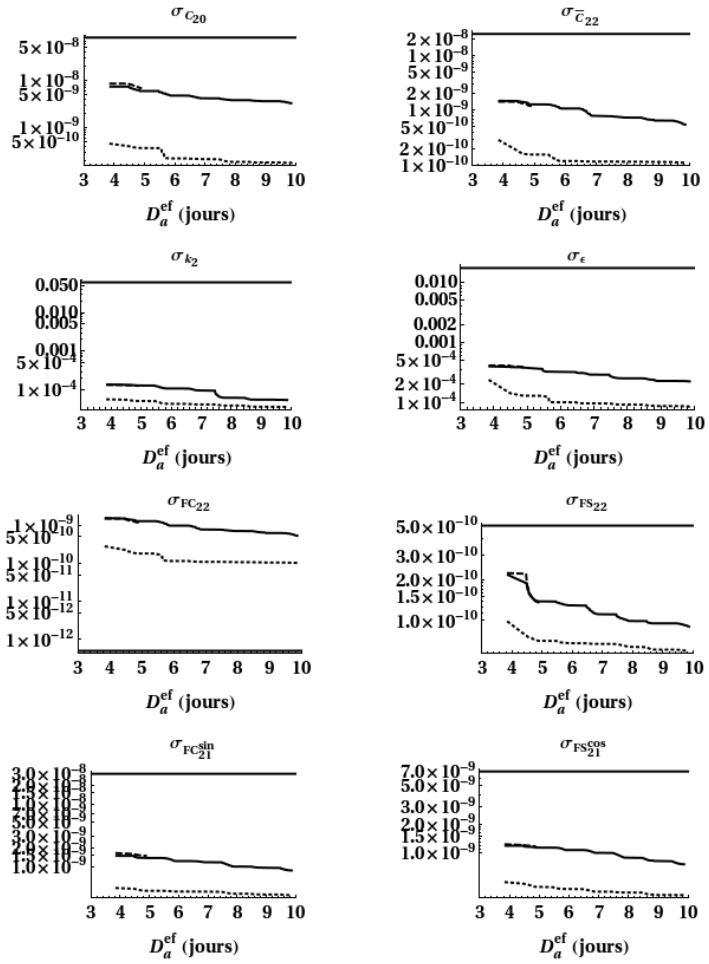


FIG. 7.3 – Influence de la longitude du péricentre sur les erreurs a posteriori des paramètres géophysiques : erreur a posteriori en fonction de la durée de l'arc pour l'orbite OrbNom2030 (lignes continues), l'orbite Orb2030w45 (tirets) et l'orbite Orb2030w135 (pointillés). Les lignes horizontales indiquent le niveau de précision nécessaire pour contraindre la structure interne (voir tableau 7.1).

correspondant aux résultats de ces deux simulations. Par conséquent, l'excentricité initiale de l'orbite nominale, ou tout autre excentricité initiale relativement faible qui ne réduit pas la durée de l'arc convient à la détermination des paramètres géophysiques.

### Inclinaison

Puisque nous souhaitons tester des configurations de mission pour des orbites quasi-polaires, nous considérons des orbites avec une inclinaison de 85 ou 89 degrés (l'orbite nominale a une inclinaison de 88 degrés). Tout comme pour l'excentricité, une légère variation de l'inclinaison initiale n'entraine pas de modifications significatives des erreurs a posteriori pour un même nombre de mesures. De plus, la durée de l'arc n'est pas affectée par l'inclinaison. Les graphes correspondants à ces deux simulations ne sont donc pas présentés. Par conséquent, l'inclinaison initiale de l'orbite nominale, ou tout autre valeur proche de $\pi/2$, convient à la détermination des paramètres géophysiques.

### Longitude du nœud

L'orbite nominale n'est ni tout à fait « face-on », ni tout à fait « edge-on ». En fait, la plan de son orbite fait environ un angle de $45^\circ$ par rapport à la ligne de visée. En effet, l'angle entre la ligne Terre-Europe et la plan de l'orbite de la sonde est du même ordre de grandeur que l'angle $\beta$ (figure 5.15) entre la ligne Soleil-Europe et le plan de l'orbite. L'étude de la visibilité de la sonde depuis la Terre a montré que pour cette orbite, la sonde n'est jamais occultée par Europe (section 5.4). Cela signifie que l'orbite nominale est juste un peu plus proche d'une configuration face-on que d'une configuration edge-on.

Nous considérons maintenant des orbites clairement edge-on ($\Omega_{So} = 45^\circ$) et face-on ($\Omega_{So} = 135^\circ$), que nous notons Orb2030Nd45 et Orb2030Nd135, respectivement. Pour l'orbite face-on, la sonde n'est jamais cachée par Europe, et pour $N_m = 64$, on a entre $N_t = 103$ et 262 mesures au total, selon la durée de l'arc, comme pour l'orbite nominale. Pour l'orbite edge-on, le nombre total de mesures pour la même fréquence d'observation est compris entre 70 et 179, selon la durée de l'arc.

A première vue, l'orbite edge-on est défavorisée par son plus petit nombre potentiel de mesures, qui induit une augmentation des erreurs a posteriori par rapport à l'orbite face-on. D'un autre côté, l'observable est plus sensible aux paramètres géophysiques, à l'exception de $FC_{21}$ et $FS_{21}$, dans le cas de l'orbite edge-on. Par exemple, la sensibilité de l'observable vis-à-vis de $C_{20}$ est de 350 ou 60 m/s selon que l'orbite est edge-on ou face-on, tandis que la sensibilité vis-à-vis de $FC_{21}$ est de 0.05 ou 0.12 m/s. Une plus grande sensibilité correspond, à nombre de mesures égal, à une erreur a posteriori plus petite.

A partir de la figure (7.2), on peut observer que pour une même durée d'arc, et donc un plus petit nombre de mesure, l'orbite edge-on apporte une meilleure précision sur les paramètres $C_{20}, \bar{C}_{22}, k_2$, $\varepsilon$ et $FC_{22}$ que l'orbite face-on. C'est donc l'augmentation de la sensibilité qui prime. Par exemple, après 10 jours,

$\sigma_{C_{20}} = 3.0\,10^{-9}$ pour l'orbite edge-on et $\sigma_{C_{20}} = 7.2\,10^{-9}$ pour l'orbite face-on. Pour le paramètre $FS_{22}$, il n'y a pas de différences significatives entre les deux orbites, ce qui signifie que les deux effets se compensent. Par contre, les paramètres $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ sont mieux déterminés avec l'orbite face-on, puisqu'avec l'orbite edge-on, le nombre de mesures et la sensibilité sont tous deux réduits. Étant donné qu'une précision accrue sur $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ ne permet pas de mieux contraindre la structure interne, on peut considérer que l'orbite edge-on est dans l'ensemble meilleure que l'orbite face-on.

Par contre, l'orbite nominale est dans l'ensemble meilleure que l'orbite edge-on. En effet, elle combine l'avantage d'un caractère quelque peu edge on, tout en gardant le nombre de mesures plus élevé de la configuration face-on. Cela est particulièrement visible pour les paramètres $k_2$ et $FS_{22}$. Par exemple, la précision après 10 jours sur $k_2$ est de $5.5\,10^{-5}$ pour l'orbite nominale contre $8.4\,10^{-5}$ pour l'orbite edge-on.

**Longitude du péricentre**

On observe de grandes différences selon la longitude initiale du péricentre. Par exemple, pour $\omega_{So} = 135^{\circ}$ (Orb2030w135), la précision obtenue est meilleure pour tous les paramètres, en comparaison avec l'orbite nominale ($\omega_{So} = 0^{\circ}$). Par contre, pour une orbite telle que $\omega_{So} = 45^{\circ}$ (Orb2030w45) et pour un même nombre de mesures, la précision obtenue est similaire à celle obtenue avec l'orbite nominale (figure 7.3). Par exemple, la précision sur $\bar{C}_{22}$ est de $1.1\,10^{-10}$ pour $\omega_{So} = 135^{\circ}$ et de $5.46\,10^{-10}$ pour l'orbite nominale, après 10 jours.

La principale caractéristique de l'orbite Orb2030w135 par rapport aux deux autres orbites est que son excentricité diminue au cours de l'arc de 10 jours (voir figure 4.9), contrairement à l'excentricité de toutes les autres configurations testées et pour lesquelles l'excentricité monte jusque 0.10-0.18. Cette diminution de l'excentricité entraine une diminution des variations de l'altitude autour de sa valeur moyenne et une diminution de la variation de l'écart de l'anomalie vraie par rapport à l'anomalie moyenne. Il est donc plus facile, à partir d'une même quantité d'information/mesures, de déterminer les conditions initiales de l'orbite de la sonde. Nous voyons que ce n'est pas l'excentricité initiale qui est importante, mais plutôt son comportement au cours du temps.

Par exemple, la figure (7.4) montre que le demi-grand axe initial est déterminé avec une précision de l'ordre du mètre pour $\omega_{So} = 135^{\circ}$ et avec une précision de l'ordre de 10 m pour l'orbite nominale. A partir du moment où les conditions initiales sont mieux déterminées, les paramètres géophysiques le sont également. Grossièrement, on peut imaginer qu'une partie plus grande de l'information est disponible pour la détermination des paramètres géophysiques, car il en faut moins pour déterminer l'orbite de la sonde.

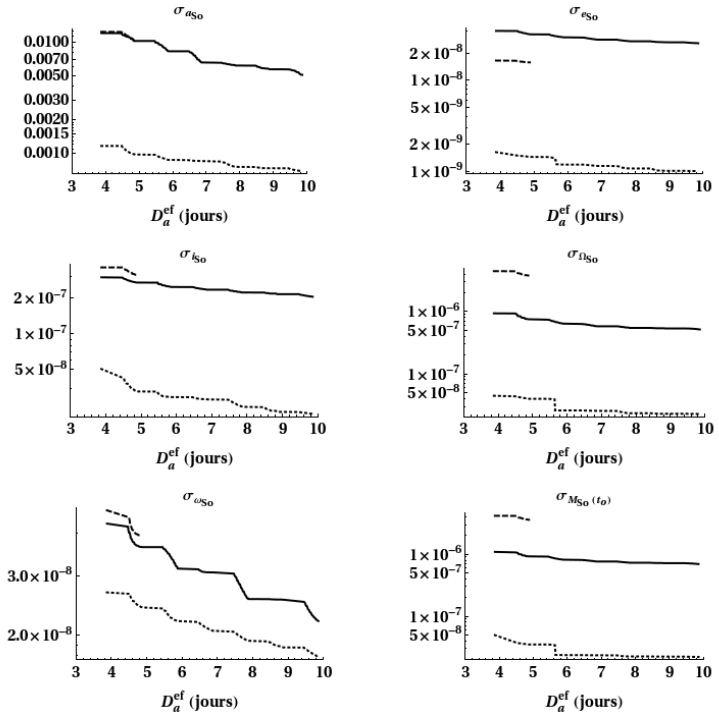


FIG. 7.4 – Influence de la longitude du péricentre sur les erreurs a posteriori des conditions initiale : erreur a posteriori en fonction de la durée de l'arc pour l'orbite OrbNom2030 (lignes continues), l'orbite Orb2030w45 (tirets) et l'orbite Orb2030w135 (pointillés).

On remarquera qu'un autre avantage d'une orbite dont l'excentricité a tendance à diminuer (avant de réaugmenter inéluctablement) est qu'elle mène moins rapidement à une collision avec le satellite naturel et qu'elle nécessite donc moins de manœuvres pour être maintenue (voir Scheeres et al. 2001).

## 7.2 Ganymède

### 7.2.1 Précision requise sur les paramètres

Comme pour Europe, nous partons des discussions présentées dans les chapitres 1, 2, 3 et 6 pour déterminer un niveau de précision sur chacun des paramètres géophysiques qui correspond à un objectif pertinent en terme de contrainte de la structure interne. Ces niveaux de précision et objectifs sont

résumés dans le tableau (7.2). Nous présentons brièvement le raisonnement effectué :

- Il est souhaitable de diminuer l'erreur sur les bornes de la gamme de valeurs possibles pour l'épaisseur de la couche eau/glace. Avec une amélioration d'un ordre de grandeur par rapport à la précision actuelle sur $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ (Anderson et al. 1996), les bornes seraient déterminées avec une précision de 2 km qui est négligeable devant la gamme qui va de 710 à 1240 km.
- La preuve de la présence d'un océan interne peut être obtenue si la précision sur l'estimation du nombre de Love $k_2$ est inférieure ou égale à 0.1. Pour le déphasage $\varepsilon$, la précision requise est d'environ $1^\circ$. La précision nécessaire sur les paramètres liés à l'obliquité de la coquille et de l'intérieur $FC_{21}^{sin}$, $FC_{21}^{cos}$, $FS_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ pour détecter la présence de l'océan est donnée dans le tableau (6.6).
- Si la présence de l'océan est confirmée, l'épaisseur $h_s$ de la coquille pourrait être contrainte par la mesure du paramètre $FS_{22}$ lié aux librations de la coquille. Une précision de l'ordre de $10^{-11}$ sur $FS_{22}$ est suffisante pour contraindre $h_s$ avec une précision de l'ordre de 50 km. Une meilleure précision sur $h_s$ ne peut être obtenue à partir de la mesure de $FS_{22}$ car les autres paramètres de la structure interne de Ganymède (dimensions et densités des différentes couches) sont inconnus.

| Paramètre | $\sigma$ maximal requis | Objectif |
|---|---|---|
| $C_{20}$ | $2.9\,10^{-7}$ | 2 km sur les bornes de $h_s + h_o$ |
| $\bar{C}_{22}$ | $0.87\,10^{-7}$ | 2 km sur les bornes de $h_s + h_o$ |
| $k_2$ | 0.1 | détecter océan |
| $\varepsilon$ | $1^\circ$ | détecter océan |
| $FS_{22}$ | $10^{-11}$ | 50 km sur $h_s$ |
| $FC_{21}^{sin}$ | $6.2\,10^{-9}$ | détecter océan |
| $FC_{21}^{cos}$ | $5.8\,10^{-9}$ | détecter océan |
| $FS_{21}^{sin}$ | $1.5\,10^{-9}$ | détecter océan |
| $FS_{21}^{cos}$ | $1.6\,10^{-9}$ | détecter océan |

TAB. 7.2 – Précision requise sur la détermination des paramètres géophysiques de Ganymède et l'objectif en terme de contrainte de structure interne auquel cette précision correspond.

### 7.2.2 Comparaison de différentes configurations de mission

Lors de la recherche d'une configuration de mission favorable à la détermination des paramètres géophysiques d'Europe, nous avons vu que seules trois des six conditions initiales de l'orbite de la sonde étaient susceptibles d'influen-

cer significativement les erreurs a posteriori sur les paramètres. Il s'agit des valeurs initiales du demi-grand axe, de la longitude du nœud et de la longitude du péricentre. En ce qui concerne Ganymède, nous n'allons donc tester que des configurations de missions qui diffèrent par ces caractéristiques, puisque nous savons déjà que l'inclinaison et l'anomalie moyenne initiales influent très peu sur les erreurs a posteriori. L'excentricité initiale influence la durée maximale de l'arc, mais elle n'influence pas les erreurs a posteriori pour un nombre de mesure donné.

L'orbite qui nous servira de référence pour la comparaison des différentes configurations de mission est l'orbite OrbGany2030 définie dans le chapitre 4 (voir figure 4.10), pour laquelle la durée de l'arc peut être de 20 jours au maximum. Nous comparerons les erreurs a posteriori pour le cas où la fréquence d'observation $N_m$ vaut 32 mesures par jours. En tenant compte de la visibilité et de l'éclairement de la sonde (section 5.4), cette fréquence d'observation correspond en réalité à un peu moins d'une quinzaine de mesures par jour, à cause essentiellement de la rotation de la Terre. Pour les orbites autour d'Europe, il fallait considérer une durée d'arc $D_a \gtrsim 4$ jours pour inverser correctement les paramètres géophysiques liés à des perturbations périodiques de l'orbite de la sonde dont la période était celle de révolution du satellite naturel (3.55 jours). Pour Ganymède, dont la période de révolution est le double de celle d'Europe, nous allons considérer un arc minimal de 8 jours. On aura donc un nombre total de mesures $N_t$ compris entre 87 et 217 pour l'orbite de référence et pour une durée d'arc comprise entre 8 et 20 jours. Pour un arc de 20 jours, les erreurs a posteriori sur $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ pour l'orbite OrbGany2030 sont $\lesssim 10^{-9}$, comme attendu[2] pour une sonde en orbite autour de Ganymède.

**Demi-grand axe initial (altitude moyenne)**

Le demi-grand axe initial de l'orbite OrbGany2030 correspond à une altitude moyenne d'environ 500 km. Pour tester l'effet de l'altitude, nous considérons des orbites caractérisées par un demi-grand axe égal au rayon de Ganymède additionné de 200 et de 2000 km, respectivement. Notons qu'avec l'altitude de 200 km, il est absolument nécessaire de considérer une excentricité initiale plus petite que celle de l'orbite OrbGany2030, afin que les variations d'altitude (qui se produiraient même pour orbite keplerienne non perturbée d'excentricité constante) n'entrainent pas une collision quasi immédiate avec Ganymède. Nous prenons $e_{So} = 0.04$ au lieu de 0.09. Les erreurs a posteriori pour les trois altitudes, pour une même fréquence d'observation ($N_m = 32$), sont présentées dans la figure (7.5), en fonction de la durée de l'arc.

Comme dans le cas d'une sonde en orbite autour d'Europe, on observe qu'au plus l'altitude est petite, au mieux les paramètres géophysiques sont inversés.

[2] *EJSM-Laplace assessment study report*

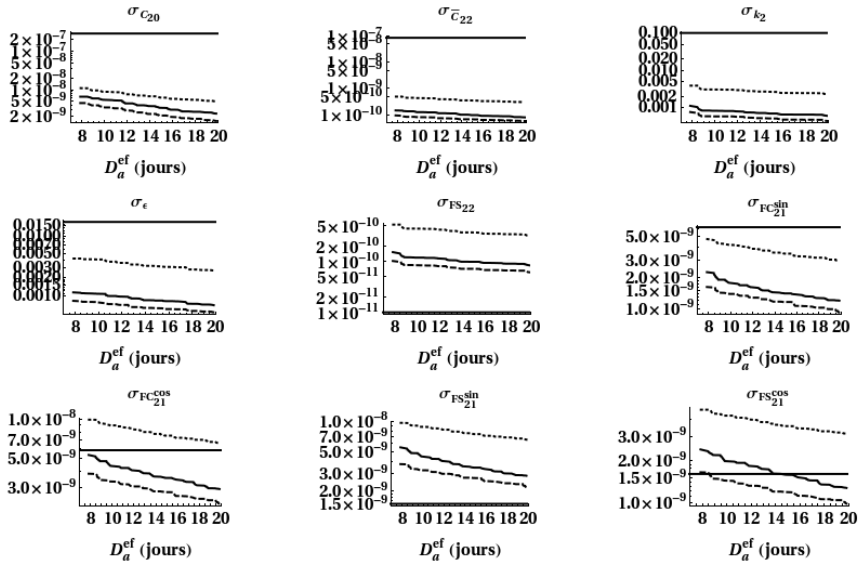


FIG. 7.5 – Influence de l'altitude sur les erreurs a posteriori des paramètres géophysiques : erreur a posteriori en fonction de la durée de l'arc pour une altitude de 500km (lignes continues), de 200 km (tirets) et de 2000 km (pointillés). Les lignes horizontales indiquent le niveau de précision nécessaire pour contraindre la structure interne (voir tableau 7.2).

La précision requise sur tous les paramètres géophysiques, à l'exception de $FS_{22}$ et $FS_{21}^{sin}$, est atteinte au bout de 20 jours pour les altitudes moyennes de 200 et 500 km. L'altitude de 2000 km empêche d'atteindre la précision requise sur les paramètres $FC_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{cos}$. Il faut se rappeler que $FS_{22}$, $FS_{21}^{sin}$, $FC_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{cos}$ ont une influence relativement faible sur l'observable Doppler.

En particulier, le paramètre $FS_{22}$ est déterminé avec une précision relative d'à peine 15 % pour l'altitude de 500 km et après vingt jours, à cause de la faible sensibilité de l'observable par rapport à ce paramètre (0.003 m/s), ce qui est loin d'être suffisant par rapport à la précision requise qui est d'environ 2%. Par conséquent, nous en concluons que si la coquille de glace est relativement épaisse et ne permet pas une amplification résonante de la libration, cette dernière ne pourra pas être détectée avec une précision suffisante pour contraindre l'épaisseur de la coquille. Pour rappel, le modèle de structure interne envisagé pour Ganymède dans les simulations est celui de la figure (2.3), dont l'épaisseur de la coquille est de 125 km et dont l'amplitude de libration vaut 54 m à l'équateur. Pour Europe nous avions considéré la valeur moyenne de l'amplitude de libration (17698 m) pour les modèles de structure interne tels

que $h_s = 5$ km.

### Longitude du nœud

Tout comme l'orbite nominale autour d'Europe, l'orbite de référence autour de Ganymède (**OrbGany2030**) n'est ni tout à fait face-on, ni tout à fait edge-on. Le plan de son orbite fait environ un angle de 45° par rapport à la ligne de visée. Pour cette orbite, depuis la Terre, la sonde n'est jamais occultée par Ganymède et c'est la rotation de la Terre qui est essentiellement responsable des moments de non-visibilité. Par contre, elle n'est pas toujours éclairée par le Soleil, comme on peut le voir sur la figure (7.6). Pour rappel, la condition d'éclairement n'avait pas été prise en compte pour les orbites autour d'Europe.

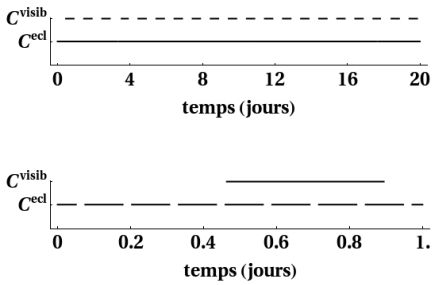


FIG. 7.6 – Conditions de visibilité $C^{visib}$ et d'éclairement $C^{ecl}$ pendant l'arc d'observation de vingt jours (haut) pour l'orbite autour de Ganymède (OrbGany2030) et zoom sur la première journée (bas). Les lignes continues indiquent les périodes où la sonde est visible depuis la station d'observation terrestre ou éclairée par le Soleil.

Nous considérons maintenant des orbites clairement edge-on ($\Omega_{So} = 45^\circ$) et face-on ($\Omega_{So} = 135^\circ$). Pour l'orbite face-on, la sonde n'est jamais cachée par Ganymède et est toujours éclairée par le Soleil, de sorte que pour $N_m = 32$, on a entre $N_t = 110$ et 264 mesures au total, selon la durée de l'arc comprise entre 8 et 20 jours. Pour l'orbite edge-on, le nombre total de mesures est compris entre 73 et 171, selon la durée de l'arc. L'orbite de référence a donc moins de temps de mesure possible que l'orbite face-on, à cause de la condition d'éclairement.

A l'exception de $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$, les paramètres géophysiques sont mieux déterminés avec l'orbite edge-on qu'avec l'orbite face-on, pour une même durée d'arc, et donc un plus petit nombre de mesures (figure 7.7). L'effet est particulièrement intéressant sur $k_2$ où l'erreur au bout de vingt jours est de 0.00024 avec l'orbite edge-on au lieu de 0.00075 avec l'orbite face-on. Nous avons vu que l'orbite de référence pour Europe, orientée de façon intermédiaire entre les cas edge-on et face-on, était meilleure que l'orbite Edge-on, car elle cumulait

l'avantage de la configuration Edge-on tout en ayant le nombre de mesures élevé de la configuration face-on. Ce n'est pas le cas pour l'orbite de référence autour de Ganymède, car le nombre de mesures n'est pas aussi élevé que dans le cas face-on, à cause de la condition d'éclairement. Pour l'orbite de référence, $\sigma_{k_2} = 0.00056$ au bout de vingt jours.

#### Longitude du péricentre

Nous testons également une orbite qui diffère de l'orbite de référence uniquement par la longitude initiale de son péricentre ($\omega_{So} = 135^\circ$ au lieu de $0^\circ$). Cette orbite est telle que l'excentricité de la sonde diminue au cours du temps (voir figure 4.10 par exemple, pour une autre orbite telle que $\omega_{So} = 135^\circ$). Les erreurs a posteriori sur les paramètres géophysiques sont présentées sur la figure (7.7). Comme pour Europe, cette configuration fournit une bonne précision pour l'ensemble des paramètres car elle correspond à une orbite plus « stable », avec moins de variations d'altitude par rapport à l'altitude moyenne et avec moins de variations de l'anomalie vraie par rapport à l'anomalie moyenne.

## 7.3 Choix de la configuration de mission la plus favorable

En résumé, nous concluons qu'une configuration de mission quasi-polaire et quasi-circulaire favorable à la détermination des paramètres géophysiques d'Europe ou de Ganymède, et donc à la contrainte de la structure interne du satellite considéré, doit avoir pour conditions initiales :

- Une altitude basse de l'ordre de 200 km. Une altitude encore plus faible serait très instable et aurait tendance à mener à une collision trop rapide.
- Une excentricité initiale la plus petite possible, pour augmenter le temps disponible avant de devoir manœuvrer pour éviter la collision, ce qui permet de considérer des arcs d'observation plus long.
- Une longitude du nœud qui lui donne une orientation intermédiaire par rapport à la ligne de visée, telle que l'orbite soit la plus "edge-on" possible tout en gardant le même nombre de mesures que dans le cas face-on.
- Une longitude du péricentre qui permet à l'excentricité de ne pas trop augmenter au cours de l'arc, voir si possible de diminuer, pour obtenir une orbite la plus circulaire possible.

L'inclinaison de l'orbite quasi-polaire et l'anomalie moyenne initiale n'ont que peu d'importance sur le choix de la configuration de mission.

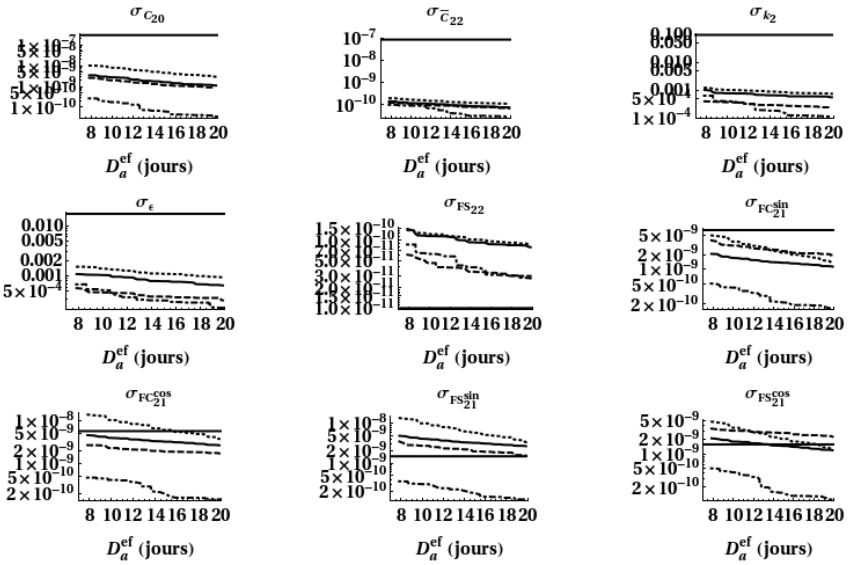


FIG. 7.7 – Influence de la longitude du nœud et de la longitude du péricentre sur les erreurs a posteriori des paramètres géophysiques : erreur a posteriori en fonction de la durée de l'arc pour l'orbite OrbGany2030 (lignes continues), une orbite edge-on (tirets), une orbite face-on (pointillés) et une orbite telle que l'excentricité diminue au cours du temp (tirets-pointillés). Les lignes horizontales indiquent le niveau de précision nécessaire pour contraindre la structure interne (voir tableau 7.2).

# Conclusions et perspectives

Europe et Ganymède ont très probablement une couche d'eau liquide, appelée océan interne global, sous une coquille externe de glace. Notre travail consistait en une étude de faisabilité en vue de préparer les missions spatiales futures vers Europe et/ou Ganymède, comme la mission JUICE (JUpiter ICy moon Explorer) à destination de Ganymède, actuellement à l'étude à l'ESA.

Nous avons considéré comme type de mesure le décalage en fréquence, dû à l'effet Doppler, sur le signal émis par une sonde en orbite quasi-polaire et quasi-circulaire autour d'Europe ou de Ganymède et reçu sur Terre. Nous avons modélisé analytiquement ces mesures par une fonction appelée *observable Doppler* et qui est la vitesse relative de la sonde par rapport à la station d'observation, projetée sur la ligne de visée. Pour ce faire, nous avons modélisé la trajectoire de la sonde en résolvant les équations de Lagrange qui expriment la variation des éléments orbitaux de la sonde, en fonction du potentiel gravitationnel du satellite naturel et de celui de Jupiter. Nous avons construit une variante de la méthode d'intégration de Kaula (1966), qui n'était pas adaptée au cas d'un troisième corps aussi influent que l'est Jupiter.

L'observable Doppler ainsi construite à partir de la trajectoire de la sonde dépend de *paramètres géophysiques* apparaissant dans le potentiel gravitationnel du satellite naturel considéré et dépendant de sa structure interne. Parmi les paramètres géophysiques que nous avons essayé de déterminer au départ de mesures Doppler, on trouve les coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ du potentiel gravitationnel statique moyen du satellite naturel. Viennent ensuite les paramètres liés à la rotation et qui représentent l'amplitude des variations temporelles des coefficients du potentiel gravitationnel statique : d'une part $FC_{22}$ et $FS_{22}$ pour les variations de $C_{22}$ et $S_{22}$ dues aux librations de la coquille et de l'intérieur, et d'autre part $FC_{21}^{sin}$, $FC_{21}^{cos}$, $FS_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{sin}$ pour les variations de $C_{21}$ et $S_{21}$ dues à l'orientation des axes de rotation de la coquille et de l'intérieur. Enfin, nous avons les paramètres du potentiel gravitationnel variable, c'est-à-dire les paramètres liés aux marées périodiques levées par Jupiter : le nombre de Love $k_2$ et le déphasage $\varepsilon$, ce dernier étant l'inverse du facteur de dissipation $Q$. Parmi les paramètres retenus, $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ sont les seuls connus actuellement.

Ils permettent de contraindre l'épaisseur cumulée de la couche eau-glace, mais pas de confirmer la présence d'un océan interne ni d'estimer l'épaisseur individuelle de la coquille. L'épaisseur cumulée de la couche eau-glace d'Europe est actuellement estimée entre 80 et 170 km, la précision sur ces valeurs limites étant de l'ordre de 10 km. Pour Ganymède, l'épaisseur cumulée est comprise entre 710 et 1240 km, avec une précision de l'ordre de 20 km sur ces bornes.

Nous avons cherché l'orbite la plus favorable à la détermination des paramètres géophysiques. Celle-ci est un compromis entre une bonne visibilité de la sonde depuis la Terre et une bonne sensibilité de l'observable aux paramètres géophysiques. Pour cela, nous avons réalisé plusieurs simulations, basées sur la méthode d'inversion par les moindres carrés, qui ont indiqué qu'une orbite favorable doit avoir une altitude relativement faible et rester la plus circulaire possible, tout en étant orientée de façon intermédiaire entre une configuration edge-one (plan de l'orbite parralèle avec la ligne de visée) et une configuration face-on (plan de l'orbite perpendiculaire). Grâce à ces simulations, nous avons montré que des mesures Doppler d'une sonde en orbite autour d'Europe ou de Ganymède permettront d'améliorer la connaissance sur les paramètres $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ du satellite, de façon à réduire fortement l'erreur sur les bornes de la gamme de valeurs possibles pour l'épaisseur cumulée de leur couche eau-glace (moins de 100 m pour Europe et moins de 2 km pour Ganymède) et ainsi la rendre négligeable devant l'ordre de grandeur de l'épaisseur cumulée. Pour une orbite favorable, la détermination de $k_2$ et de $\varepsilon$ sera suffisemment précise pour détecter la présence de l'océan, que ce soit pour Europe ou Ganymède. Le paramètre $FS_{22}$ pourra être déterminé avec une précision suffisante pour contraindre l'épaiseur de la coquille de glace avec une précision de l'ordre de 20 km et de 50 km pour Europe et Ganymède, respectivement. Le paramètre $FC_{22}$ ne poura être estimé suffisemment précisemment pour contraindre l'épaisseur de la coquille d'Europe. Ce paramètre peut même être négligé d'emblée lors de la modélisation de l'observable Doppler dans la cas de Ganymède, à cause de sa faible influence sur cette dernière. Dans le cas d'Europe, la détermination de $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$ apportera une indication supplémentaire sur la présence éventuelle de l'océan (les paramètres $FC_{21}^{cos}$, $FS_{21}^{cos}$ peuvent être négligés a priori dans la modélisation). Pour Ganymède, la détermination des paramètres $FC_{21}^{sin}$, $FC_{21}^{cos}$, $FS_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{sin}$ permettra de déterminer la présence d'un océan interne si leur valeur sont différentes de celles du cas solide. Si ces valeurs sont compatibles avec celles du cas solide, cela ne signifie par pour autant que Ganymède ne possède pas d'océan interne. En effet, à cause d'une amplification par résonance d'un ou plusieurs termes de la solution pour l'orientation des axes de rotation de la coquille et de l'intérieur de Ganymède, les valeurs de $FC_{21}^{sin}$, $FC_{21}^{cos}$, $FS_{21}^{cos}$ et $FS_{21}^{sin}$ pour certains temps de mesure et pour certaines possibilités de structure interne avec océan sont similaires avec celles du cas solide. Un telle amplification par résonance n'existe pas pour Europe, et la présence ou l'absence d'océan interne sera déterminée sans ambiguité par la

détermination précise de $FC_{21}^{sin}$ et $FS_{21}^{cos}$.

Ces simulations ont donc démontré l'intérêt d'estimer les paramètres liés à la rotation lors de l'analyse de données Doppler futures. Ces paramètres dépendent des amplitudes de *librations* de la coquille et de l'intérieur et de l'orientation de leur axe de rotation respectif vis-à-vis de l'orbite du satellite (*Etat de Cassini*). Nous avons étudié en détails ces deux aspects de la rotation des satellites synchrones que sont Europe et Ganymède, en prenant en compte l'effet de la présence de l'océan, qui permet de découpler partiellement la coquille et l'intérieur :

- Nous avons montré que l'amplitude de libration de la coquille dépend fortement de l'épaisseur de cette dernière, et dans une moindre mesure, de la différence de densité entre l'océan et la coquille. L'amplitude de libration de l'intérieur ne dépend pas significativement des propriétés de la couche eau/glace et est petite devant l'amplitude de libration de la coquille. L'étude des librations a également été étendue aux cas de Io et de Callisto, les deux autres satellites galiléens (Baland et Van Hoolst, 2010, en annexe F). On suppose que Io possède un noyau liquide sous un manteau rocheux et que Callisto pourrait, tout comme Europe et Ganymède, abriter un océan interne global. Les conclusions pour Callisto sont similaires à celles pour Europe et Ganymède, tandis que les librations de Io dépendent de l'épaisseur de manteau.
- L'état de Cassini fait référence à l'orientation de l'axe de rotation de la coquille et à celle de l'axe de rotation de l'intérieur. L'orientation d'un axe de rotation est en partie définie par l'angle, appelé *obliquité*, qui le sépare de l'axe normal au plan de l'orbite du satellite. Nous avons montré que l'obliquité de la coquille et celle de l'intérieur ne dépendent pas spécifiquement des caractéristiques de la couche eau/glace. Néanmoins, la connaissance de l'orientation de l'axe de rotation de la coquille d'Europe ou de Ganymède peut apporter une preuve de la présence d'un océan interne.

Comme nous l'avons montré, la confrontation du modèle de librations et de l'état de Cassini des satellites naturels synchrones avec des observations de la rotation permet de contraindre la stucture interne. Ces observations peuvent être déduites de mesures Doppler, comme envisagé dans cette thèse, mais l'obliquité et l'amplitude de libration en surface peuvent aussi être obtenues par la comparaison d'images de la surface du satellite naturel prises à des moments différents par une sonde. Cette méthode a déjà été utilisée sur Titan pour déterminer l'obliquité, avec des images constituées par les échos radar de la surface lors des différents flybys de la sonde Cassini. Nous avons confronté notre modèle de l'état de Cassini avec ces observations de Titan. Notre modèle indique alors la présence probable d'un océan interne sous une coquille de glace, mais ne permet pas de contraindre les détails de la structure de la couche eau/glace

(Baland et al. 2011, en annexe G). L'obliquité et l'amplitude de librations en surface d'Europe et de Ganymède seront bientôt obtenues à partir de mesures radar effectuées depuis la Terre (Margot 2011). Cette méthode, bien que moins précise que la précédente, est plus rapide à mettre en œuvre puisqu'elle ne nécessite pas l'envoi d'une sonde vers le corps considéré. Une confrontation des mesures ainsi obtenues avec notre modèle permettra de déterminer la présence d'un océan interne pour Europe. Dans le cas de Ganymède, la non détection de l'océan à partir de la mesure de son état de rotation ne signifiera pas pour autant son absence, comme nous l'avons rappelé précédemment.

Notre étude de faisabilité est basée sur un modèle analytique pour l'observable Doppler. Celui-ci ne peut évidemment pas servir pour le traitement de vraies données. Une étude analytique permet de balayer relativement rapidement un grand nombre de configurations de mission, car le modèle est basé sur un plus grand nombre d'hypothèses qu'un modèle numérique qui servirait à la même étude de faisabilité et/ou au traitement de vraies données. Certaines de ces hypothèses pourraient modifier la précision obtenue sur la détermination des paramètres géophysiques, sans toutefois contredire nos conclusions majeures. Ces hypothèses sont, par exemple :

- A l'exception de celle de la sonde, toutes les orbites ont été considérées comme étant parfaitement keplerienne. Les perturbations de ces orbites changeraient quelque peu les positions relatives des corps les uns par rapport aux autres, en comparaison de ce que prévoit notre modèle. L'orbite de la sonde, bien que non keplerienne, n'est pas pour autant calculée parfaitement, puisque nous avons posé des hypothèses pour résoudre les équations de Lagrange.
- Nous avons considéré un modèle de force relativement simple où le satellite naturel a un potentiel gravitationnel tronqué au degré deux, où Jupiter est considéré comme un corps à symétrie sphérique et où les forces non-gravitationnelles sont négligées. Prendre en compte les effets négligés dans le modèle de force pourrait nécessiter l'ajout de paramètres supplémentaires à la liste des paramètres à inverser, qui comprend dans notre étude analytique les paramètres géophysiques et les conditions initiales de l'orbite de la sonde. Par exemple, les coefficients de degré $\geq 3$ du satellite naturel, le coefficient $C_{20}$ de Jupiter, ainsi qu'un coefficient qui traduit le freinage de la sonde par une atmosphère ténue devraient également être estimés à partir des données.
- Notons encore que pour garder son caractère relativement simple à notre étude, nous n'avons considéré qu'une seule station d'observation sur Terre. Nous n'avons également considéré qu'un seul arc de mesure, pour ne pas prendre en compte l'effet des maœuvres régulières qui introduisent à chaque fois de nouvelles conditions initiales pour chaque arc.

Il serait assez compliqué de corriger notre modèle analytique pour s'affranchir de nos hypothèses de départ. De plus, nous perdrions ainsi sa relative simplicité qui est son principal atout. Une étude numérique indépendante de ces hypothèses devra à l'avenir confirmer le choix de la stratégie de mission favorable à la détermination de la structure interne établi à partir de notre étude analytique. La première partie de notre travail concernant l'identification des paramètres géophysiques dans le potentiel gravitationnel du satellite naturel sera toujours valide dans le cas d'une étude numérique.

Que l'amplitude de librations d'Europe ou de Ganymède soit estimée grâce à des mesures Doppler, grâce à la comparaison d'images de la surface prises par une sonde spatiale ou grâce aux mesures radar effectuées depuis la Terre, il faudra considérer avec précaution une des hypothèses de notre modèle. En effet, nous n'avons considéré que les librations se produisant avec la même période que la période de révolution/rotation du satellite naturel, puisque nous avons supposé que l'orbite de ce dernier était keplerienne. Néanmoins, les perturbations de l'orbite de ces satellites naturels induisent des librations pour d'autres périodes (Henrard 2005). Rambaux et al. (2011) ont montré que ces dernières dépendent peu de la structure interne du satellite. Par conséquent, la libration mesurée sera en réalité le reflet d'une composition de plusieurs mouvements de libration de périodes différentes. Il faudra prendre soin d'isoler l'amplitude de la contribution correspondant à la période de révolution pour tenter de contraindre la structure interne.

Une des perspectives de notre travail concerne le lien entre la structure interne d'Europe ou de Ganymède et les paramètres géophysiques. Nous avons défini un niveau de précision, pour la mesure de chaque paramètre géophysique, qui permettrait de contraindre au mieux la structure interne. Pour ce faire, nous avons supposé que chaque paramètre serait interprété séparément. Par exemple, si nous avions à notre disposition une mesure du nombre de Love $k_2$ et une mesure de l'amplitude de libration de la coquille $g_s$, nous aurions deux estimations indépendantes de l'épaisseur de la coquille $h_s$, puisque $k_2 \propto \mu_s h_s$ et $g_s \propto (\rho_o - \rho_s)/h_s$. Ces estimations seraient affectées d'une erreur provenant de l'incertitude sur les mesures de $k_2$ et $g_s$ et de la méconnaissance de $\mu_s$, la rigidité de la glace, et de $(\rho_o - \rho_s)$, la différence de densité entre l'océan et la coquille. Si les modèles théoriques pour le nombre de Love et la libration de la coquille sont corrects, ces deux estimations de l'épaisseur de la coquille devraient être compatibles entre elles, dans la limite des barres d'erreur. L'inconvénient à procéder de la sorte est que l'on utilise deux informations différentes pour déterminer une seule caractéristique de la structure interne, alors que la seconde information pourrait être utile pour estimer la rigidité de la coquille et/ou le contraste de densité entre la glace et l'eau. Pour utiliser au mieux l'information qui provient de la mesure de différents paramètres géophysiques, il est donc préférable de réaliser une *inversion jointe* de ces derniers vers les caractéristiques de la

structure interne (voir Rivoldini et al. 2011 pour une application à Mars). Cette inversion permettrait de définir plus précisément les niveaux de précision requis sur la détermination des paramètres géophysiques et pourrait indiquer quelles autres caractéristiques de la structure interne d'Europe ou de Ganymède pourraient être déterminées grâce aux missions futures.

Une autre perspective serait d'appliquer l'étude des librations et de l'état de Cassini à d'autres satellites synchrones possédant peut-être une couche liquide interne. Nous pensons notamment à Encelade, dont les librations ont été étudiées récemment en supposant que ce corps est rigide (Rambaux et al. 2010). Pour Titan, on ne parle pas de librations, mais de variations de la longueur du jour car, comme pour la Terre, la vitesse de rotation est influencée par un couplage avec l'atmosphère (Karatekin et al. 2008 ou Van Hoolst et al. 2009 par exemple). La vitesse de rotation peut également être influencée par un mouvement du pôle d'amplitude importante (Noyelles 2008). A l'avenir, l'effet de l'atmosphère sur l'obliquité ou le mouvement du pôle pourrait être étudié plus en détail, dans le cas où Titan possède un océan. Le mouvement du pôle de Titan a été abordé dans Tokano et al. (2011), mais la coquille a été considérée comme étant entièrement découplée de l'intérieur. La modélisation du mouvement du pôle des satellites synchrones pourra peut-être bénéficier de l'étude des couplages internes que les différentes couches exercent les unes sur les autres et réalisée pour modéliser les librations et l'état de Cassini.

Nous terminerons en remarquant que notre étude de faisabilité concernant les mesures Doppler peut également être appliquée à d'autres satellites synchrones, comme Callisto ou Titan, au cas où des missions d'exploration leur seraient un jour dédiées. La principale précaution à prendre sera de vérifier que la solution analytique des équations de Lagrange pour la trajectoire de la sonde est toujours valide. En effet, nous avons développé cette solution spécifiquement pour une sonde en orbite autour d'Europe, avant de montrer qu'elle était également valide pour une sonde en orbite autour de Ganymède. Dans le cas où la solution ne serait pas valide, il devrait être possible d'adapter la solution en suivant la même méthode que celle présentée dans ce travail, c'est-à-dire en cherchant quelles sont les perturbations dominantes sur le mouvement de la sonde.

# Bibliographie


Ahrens, T. J., editor (1995). *Global Earth physics : a handbook of physical constants*. American Geophysical Union, Washington, DC. 376 p.

Anderson, J. D., Jacobson, R. A., Lau, E. L., Moore, W. B., and Schubert, G. (2001a). Io's gravity field and interior structure. *Journal of Geophysical Research*, 106 :32963–32970.

Anderson, J. D., Jacobson, R. A., McElrath, T. P., Moore, W. B., Schubert, G., and Thomas, P. C. (2001b). Shape, mean radius, gravity field, and interior structure of Callisto. *Icarus*, 153 :157–161.

Anderson, J. D., Lau, E. L., Sjogren, W. L., Schubert, G., and Moore, W. B. (1996). Gravitational constraints on the internal structure of Ganymede. *Nature*, 384 :541–543.

Anderson, J. D., Lau, E. L., Sjogren, W. L., Schubert, G., and Moore, W. B. (1997). Europa's differentiated internal structure : inferences from two Galileo encounters. *Science*, 276 :1236–1239.

Anderson, J. D., Null, G. W., and Wong, S. K. (1974). Gravity results from Pioneer 10 Doppler data. *J. Geophys. Res.*, 79 :3661–3664.

Anderson, J. D., Schubert, G., Jacobson, R. A., Lau, E. L., Moore, W. B., and Sjogren, W. L. (1998). Europa's differentiated internal structure : inferences from four Galileo encounters. *Science*, 281 :2019–2022.

Archinal, B. A., A'Hearn, M. F., Bowell, E., Conrad, A., Consolmagno, G. J., Courtin, R., Fukushima, T., Hestroffer, D., Hilton, J. L., Krasinsky, G. A., Neumann, G., Oberst, J., Seidelmann, P. K., Stooke, P., Tholen, D. J., Thomas, P. C., and Williams, I. P. (2011). Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements : 2009. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 109 :101–135.

Baland, R.-M. and Van Hoolst, T. (2010). Librations of the Galilean satellites : The influence of global internal liquid layers. *Icarus*, 209 :651–664.

Baland, R.-M., Van Hoolst, T., Yseboodt, M., and Karatekin, Ö. (2011). Titan's obliquity as evidence of a subsurface ocean ? *Astronomy and Astrophysics*, 530 :A141 (6 pp.).

Bills, B. G. (2005). Free and forced obliquities of the Galilean satellites of Jupiter. *Icarus*, 175 :233–247.

Bills, B. G. and Nimmo, F. (2008). Forced obliquity and moments of inertia of Titan. *Icarus*, 196 :293–297.

Brouwer, D. (1924). A new determination of the mass of Titan by Hill's method. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 2 :119–120.

Campbell, J. K. (1984). Determination of satellite gravity harmonics from Galileo radio tracking data. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 16 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 705.

Campbell, J. K. and Anderson, J. D. (1989). Gravity field of the Saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data. *Astronomical Journal*, 97 :1485–1495.

Campbell, J. K. and Synnott, S. P. (1985). Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data. *Astronomical Journal*, 90 :364–372.

Carlson, R. W., Bhattacharyya, J. C., Smith, B. A., Johnson, T. V., Hidayat, B., Smith, S. A., Taylor, G. E., O'Leary, B., and Brinkmann, R. T. (1973). An atmosphere on Ganymede from its occultation of SAO 186800 on 7 june 1972. *Science*, 182 :53–55.

Carr, M. H., Belton, M. J. S., Chapman, C. R., Davies, M. E., Geissler, P., Greenberg, R., McEwen, A. S., Tufts, B. R., Greeley, R., Sullivan, R., Head, J. W., Pappalardo, R. T., Klaasen, K. P., Johnson, T. V., Kaufman, J., Senske, D., Moore, J., Neukum, G., Schubert, G., Burns, J. A., Thomas, P., and Veverka, J. (1998). Evidence for a subsurface ocean on Europa. *Nature*, 391 :363.

Castillo, J. (2000). Détecter la présence d'un océan dans Europe à partir de mesures altimétriques et gravimétriquesDetecting a deep ocean within Europa by means of geodetic measurements. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIA - Earth and Planetary Science*, 330 :659–666.

Cole, D. M. and Durell, G. D. (1995). The cyclic loading of saline ice. *Philosophical magazine. A. Physics of condensed matter. Defects and mechanical properties*, 72 :209–229.

Coulot, D. (2002). *Initiation théorique et pratique à la méthode d'estimation par moindres carrés (Notes de Cours)*. Ecole d'été du GRGS. 110 pp.

de Sitter, W. (1931). Jupiter's Galilean satellites (George Darwin Lecture). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91 :706–738.

Dehant, V., Rosenblatt, P., and Bergeot, N. (2011). *Cours de géophysique interne (LPHY2160)*. UCL.

Deleflie, F. (2000). Développement du potentiel perturbateur de troisième corps. *Note technique GERGA*.

D'Hoedt, S., Noyelles, B., Dufey, J., and Lemaitre, A. (2009). Determination of an instantaneous Laplace plane for Mercury's rotation. *Advances in Space Research*, 44 :597–603.

Dollfus, A. (1970). Diamètre des planètes et satellites. In *Surfaces and Interiors of Planets and Satellites*, pages 45–139.

Dougherty, M. K., Grasset, O., Bunce, E., Coustenis, A., Titov, D., Erd, C., Blanc, M., Coates, A., Coradini, A., Drossart, P., Fletcher, L., Hussmann, H., Jaumann, R., Krupp, N., Prieto- Ballesteros, O., Tortora, P., Tosi, F., Van Hoolst, T., and Lebreton, J.-P. (2011b). JUICE (JUpiter ICy moon Explorer) : a European-led mission to the Jupiter system. In *EPSC-DPS Joint Meeting 2011*, page 1343.

Dougherty, M. K. and the EJSM Laplace Joint Science Definition Team. (2011a). EJSM-laplace assessment study report (yellow book). Technical report, European Space Agency. 128 p.

Efroimsky, M. and Lainey, V. (2007). Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution. *Journal of Geophysical Research*, 112 :E12.

Finocchiaro, S., Iess, L., Racioppa, P., and Tortora, P. (2010). Numerical simulations of the EJSM/Laplace gravity experiment. In *European Planetary Science Congress 2010*, page 776.

Giese, B., Helfenstein, P., Hurford, T. A., Neukum, G., and Porco, C. C. (2011). Observation of cycloidal features on Enceladus. In *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, volume 42 of *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, page 2007.

Goldreich, P. and Peale, S. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. *The Astronomical Journal*, 71 :425–438.

Henrard, J. (2005). The rotation of Europa. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91 :131–149.

Hubbard, W. B. and Anderson, J. D. (1978). Possible flyby measurements of Galilean satellite interior structure. *Icarus*, 33 :336–341.

Iess, L., Rappaport, N. J., Jacobson, R. A., Racioppa, P., Stevenson, D. J., Tortora, P., Armstrong, J. W., and Asmar, S. W. (2010). Gravity field, shape, and moment of inertia of Titan. *Science*, 327 :1367–1369.

Iess, L., Rappaport, N. J., Tortora, P., Lunine, J., Armstrong, J. W., Asmar, S. W., Somenzi, L., and Zingoni, F. (2007). Gravity field and interior of Rhea from Cassini data analysis. *Icarus*, 190 :585–593.

Jeffreys, H. (1959). *The Earth. Its origin, history and physical construction.* Cambridge : University Press. 420 p.

Karatekin, Ö., Van Hoolst, T., and Tokano, T. (2008). Effect of internal gravitational coupling on Titan's non-synchronous rotation. *Geophysical Research Letters*, 351 :16202.

Kaula, W. M. (1966). *Theory of Satellite Geodesy.* Dover Publications, Mineola, New York. 124 pp.

Khurana, K. K., Kivelson, M. G., Stevenson, D. J., Schubert, G., Russell, C. T., Walker, R. J., and Polanskey, C. (1998). Induced magnetic fields as evidence for subsurface oceans in Europa and Callisto. *Nature*, 395 :777–780.

Kivelson, M. G., Khurana, K. K., and Volwerk, M. (2002). The permanent and inductive magnetic moments of Ganymede. *Icarus*, 157 :507–522.

Kuiper, G. P. (1944). Titan : a satellite with an atmosphere. *Astrophysical Journal*, 100 :378–383.

Lainey, V., Arlot, J. E., and Vienne, A. (2004). New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. II. Fitting the observations. *Astronomy and Astrophysics*, 427 :371–376.

Lainey, V., Duriez, L., and Vienne, A. (2006). Synthetic representation of the Galilean satellites' orbital motions from L1 ephemerides. *Astronomy and Astrophysics*, 456 :783–788.

Lewis, J. S. (1971a). Satellites of the outer planets : their physical and chemical Nature. *Icarus*, 15 :174–185.

Lewis, J. S. (1971b). Satellites of the outer planets : thermal models. *Science*, 172 :1127–1128.

Lieske, J. H. (1998). Galilean satellite ephemerides E5. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 129 :205–217.

Lorenz, R. D., Stiles, B. W., Kirk, R. L., Allison, M. D., Persi del Marmo, P., Iess, L., Lunine, J. I., Ostro, S. J., and Hensley, S. (2008). Titan's rotation reveals an internal ocean and changing zonal winds. *Science*, 319 :1649–1651.

Ma, C., Arias, E. F., Eubanks, T. M., Fey, A. L., Gontier, A.-M., Jacobs, C. S., Sovers, O. J., Archinal, B. A., and Charlot, P. (1998). The International Celestial Reference Frame as realized by Very Long Baseline Interferometry. *The astronomical Journal*, 116 :516–546.

Margot, J. L. (2011). High-precision measurements of planetary spin states : Mercury, Venus, Galilean Satellites. In *EPSC-DPS Joint Meeting 2011*, page 305.

Melchior, P. (1973). *Physique et dynamique planétaire, géodynamique. Volume 4. Chapitre 1 : le freinage séculaire de la rotation de la Terre.* Vander, Louvain, Belgique. 257 pp.

Moore, W. B. and Schubert, G. (2000). Note : the tidal response of Europa. *Icarus*, 147 :317–319.

Moore, W. B. and Schubert, G. (2003). The tidal response of Ganymede and Callisto with and without liquid water oceans. *Icarus*, 166 :223–226.

Morabito, L. A., Synnott, S. P., Kupferman, P. N., and Collins, S. A. (1979). Discovery of currently active extraterrestrial volcanism. *Science*, 204 :972.

Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press.

Noyelles, B. (2008). Titan's rotational state. The effects of a forced "free" resonant wobble. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101 :13–30.

Noyelles, B. (2009). Expression of Cassini's third law for Callisto, and theory of its rotation. *Icarus*, 202 :225–239.

Null, G. W. (1976). Gravity field of Jupiter and its satellite from Pioneer 10 and Pioneer 11 tracking data. *Astronomical Journal*, 81 :1153–1161.

Null, G. W., Lau, E. L., Biller, E. D., and Anderson, J. D. (1981). Saturn gravity results obtained from Pioneer 11 tracking data and Earth-based Saturn satellite data. *Astronomical Journal*, 86 :456–468.

Peale, S. J. (2005). The free precession and libration of Mercury. *Icarus*, 178 :4–18.

Peale, S. J., Cassen, P., and Reynolds, R. T. (1979). Melting of Io by tidal dissipation. *Science*, 203 :892–894.

Pfyffer, G., Van Hoolst, T., and Dehant, V. (2011). Librations and obliquity of Mercury from the BepiColombo radio-science and camera experiments. *Planetary and Space Science*, 59 :848–861.

Pilcher, C. B., Ridgway, S. T., and McCord, T. B. (1972). Galilean satellites : identification of water frost. *Science*, 178 :1087–1089.

Porco, C. C., Helfenstein, P., Thomas, P. C., Ingersoll, A. P., Wisdom, J., West, R., Neukum, G., Denk, T., Wagner, R., Roatsch, T., Kieffer, S., Turtle, E., McEwen, A., Johnson, T. V., Rathbun, J., Veverka, J., Wilson, D., Perry, J., Spitale, J., Brahic, A., Burns, J. A., Del Genio, A. D., Dones, L., Murray, C. D., and Squyres, S. (2006). Cassini observes the active south pole of Enceladus. *Science*, 311 :1393–1401.

Rambaux, N., Castillo-Rogez, J. C., Williams, J. G., and Karatekin, Ö. (2010). Librational response of Enceladus. *Geophysical Research Letters*, 370 :L04202.

Rambaux, N., Van Hoolst, T., and Karatekin, Ö. (2011). Librational response of Europa, Ganymede, and Callisto with an ocean for a non-Keplerian orbit. *Astronomy and Astrophysics*, 527 :A118 (10 pp.).

Rappaport, N. J., Iess, L., Wahr, J., Lunine, J. I., Armstrong, J. W., Asmar, S. W., Tortora, P., di Benedetto, M., and Racioppa, P. (2008). Can Cassini detect a subsurface ocean in Titan from gravity measurements ? *Icarus*, 194 :711–720.

Rivoldini, A., Van Hoolst, T., Verhoeven, O., Mocquet, A., and Dehant, V. (2011). Geodesy constraints on the interior structure and composition of Mars. *Icarus*, 213 :451–472.

Scheeres, D. J., Guman, M. D., and Villac, B. (2001). Stability analysis of planetary satellite orbiters : application to the Europa Orbiter. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No 4 :778–787.

Schubert, G., Anderson, J. D., Spohn, T., and McKinnon, W. B. (2004). *Interior composition, structure and dynamics of the Galilean satellites*, pages 281–306.

Schubert, G., Limonadi, D., Anderson, J. D., Campbell, J. K., and Giampieri, G. (1994). Gravitational coefficients and internal structures of the icy Galilean satellites : an assessment of the Galileo Orbiter mission. *Icarus*, 111 :433–440.

Segatz, M., Spohn, T., Ross, M. N., and Schubert, G. (1988). Tidal dissipation, surface heat flow, and figure of viscoelastic models of Io. *Icarus*, 75 :187–206.

Seidelmann, P. K., Archinal, B. A., A'Hearn, M. F., Conrad, A., Consolmagno, G. J., Hestroffer, D., Hilton, J. L., Krasinsky, G. A., Neumann, G., Oberst, J., Stooke, P., Tedesco, E. F., Tholen, D. J., Thomas, P. C., and Williams, I. P. (2007). Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements : 2006. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 98 :155–180.

Smith, B. A., Soderblom, L., Batson, R. M., Bridges, P. M., Inge, J. L., Masursky, H., Shoemaker, E., Beebe, R. F., Boyce, J., Briggs, G., Bunker, A., Collins, S. A., Hansen, C., Johnson, T. V., Mitchell, J. L., Terrile, R. J., Cook, A. F., Cuzzi, J. N., Pollack, J. B., Danielson, G. E., Ingersoll, A. P., Davies, M. E., Hunt, G. E., Morrison, D., Owen, T., Sagan, C., Veverka, J., Strom, R., and Suomi, V. E. (1982). A new look at the Saturn system - The Voyager 2 images. *Science*, 215 :504–537.

Smith, B. A., Soderblom, L., Beebe, R. F., Boyce, J. M., Briggs, G., Bunker, A., Collins, S. A., Hansen, C., Johnson, T. V., Mitchell, J. L., Terrile, R. J., Carr, M. H., Cook, A. F., Cuzzi, J. N., Pollack, J. B., Danielson, G. E., Ingersoll, A. P., Davies, M. E., Hunt, G. E., Masursky, H., Shoemaker, E. M., Morrison, D., Owen, T., Sagan, C., Veverka, J., Strom, R., and Suomi, V. E. (1981). Encounter with Saturn - Voyager 1 imaging science results. *Science*, 212 :163–191.

Smith, B. A., Soderblom, L. A., Beebe, R., Boyce, J., Briggs, G., Carr, M., Collins, S. A., Johnson, T. V., Cook, II, A. F., Danielson, G. E., and Morrison, D. (1979a). The Galilean satellites and Jupiter - Voyager 2 imaging science results. *Science*, 206 :927–950.

Smith, B. A., Soderblom, L. A., Johnson, T. V., Ingersoll, A. P., Collins, S. A., Shoemaker, E. M., Hunt, G. E., Masursky, H., Carr, M. H., Davies, M. E., Cook, A. F., Boyce, J. M., Owen, T., Danielson, G. E., Sagan, C., Beebe, R. F., Veverka, J., McCauley, J. F., Strom, R. G., Morrison, D., Briggs, G. A., and Suomi, V. E. (1979b). The Jupiter system through the eyes of Voyager 1. *Science*, 204 :951–957.

Sniffin (2005). Dsms telecommunications link. design handbook. Technical report.

Stiles, B. W., Kirk, R. L., Lorenz, R. D., Hensley, S., Lee, E., Ostro, S. J., Allison, M. D., Callahan, P. S., Gim, Y., Iess, L., Perci del Marmo, P., Hamilton,

G., Johnson, W. T. K., West, R. D., and The Cassini RADAR Team (2008). Determining Titan's spin state from Cassini radar images. *The Astronomical Journal*, 135 :1669–1680.

Stiles, B. W., Kirk, R. L., Lorenz, R. D., Hensley, S., Lee, E., Ostro, S. J., Allison, M. D., Callahan, P. S., Gim, Y., Iess, L., Perci del Marmo, P., Hamilton, G., Johnson, W. T. K., West, R. D., and The Cassini RADAR Team (2010). Erratum : "Determining Titan's spin state from Cassini radar images". *The Astronomical Journal*, 139 :311.

Tobie, G. (2003). *Impact du chauffage de marée sur l'évolution géodynamique d'Europe et de Titan.* PhD thesis.

Tobie, G., Grasset, O., Lunine, J. I., Mocquet, A., and Sotin, C. (2005a). Titan's internal structure inferred from a coupled thermal-orbital model. *Icarus*, 175 :496–502.

Tobie, G., Mocquet, A., and Sotin, C. (2005b). Tidal dissipation within large icy satellites : applications to Europa and Titan. *Icarus*, 177 :534–549.

Tokano, T., Van Hoolst, T., and Karatekin, Ö. (2011). Polar motion of Titan forced by the atmosphere. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 116 :E05002.

Trinh, A. (2007). *Effet des marées de Mercure sur les mesures altimétriques de la mission spatiale BepiColombo (mémoire).* UCL.

Van Hoolst, T., Rambaux, N., Karatekin, Ö., and Baland, R.-M. (2009). The effect of gravitational and pressure torques on Titan's length-of-day variations. *Icarus*, 200 :256–264.

Van Hoolst, T., Rambaux, N., Karatekin, Ö., Dehant, V., and Rivoldini, A. (2008). The librations, shape, and icy shell of Europa. *Icarus*, 195 :386–399.

Vaughan, D. G. (1995). Tidal flexure at ice shelf margins. *Journal of Geophysical Research*, 100 :6213–6224.

Vienne, A. and Duriez, L. (1995). TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites. *Astronomy and Astrophysics*, 297 :588–605.

Wahr, J. M., Zuber, M. T., Smith, D. E., and Lunine, J. I. (2006). Tides on Europa, and the thickness of Europa's icy shell. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 111 :E12005.

Wu, X., Bar-Sever, Y. E., Folkner, W. M., Williams, J. G., and Zumberge, J. F. (2001). Probing Europa's hidden ocean from tidal effects on orbital dynamics. *Geophysical Research Letters*, 28 :2245–2248.

Yseboodt, M., Barriot, J.-P., and Dehant, V. (2003). Analytical modeling of the Doppler tracking between a lander and a Mars orbiter in terms of rotational dynamics. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 108 :5076.

Yseboodt, M. and Margot, J.-L. (2006). Evolution of Mercury's obliquity. *Icarus*, 181 :327–337.

# Annexe A

# Vecteur rotation - Forces d'inertie - Pesanteur/Marées

Soit un repère tournant $(OXYZ)$ ayant le même centre $O$ que le repère $(Oxyz)$ dont les axes sont fixes par rapport à un repère inertiel de centre $o$ et noté $(oxyz)$. Les angles d'Euler du repère $(OXYZ)$ par rapport au repère $(Oxyz)$ sont $\psi, \theta$ et $\phi$ (Figure A.1), de sorte que la matrice de changement de repère permettant de passer du premier au second est donnée par

$$M = Rz[-\psi]Rx[-\theta]Rz[-\phi].$$

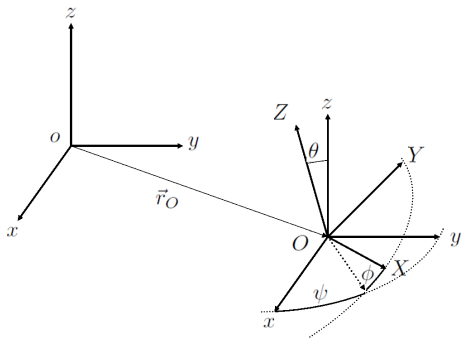


FIG. A.1 – Position et orientation du repère $(Oxyz)$ par rapport au repère $(oxyz)$.

Les vecteurs position, vitesse et accélération du point $O$ sont notés

$$\begin{cases} \vec{r}_O, \quad \vec{v}_O = \dot{\vec{r}}_O \quad \text{et} \quad \vec{a}_O = \ddot{\vec{r}}_O & \text{dans le repère inertiel,} \\ \vec{R}_O = 0, \quad \vec{V}_O = M^{-1}\vec{v}_O \quad \text{et} \quad \vec{A}_O = M^{-1}\vec{a}_O & \text{dans le repère tournant.} \end{cases}$$

Soit un point $P$ de coordonnées $\vec{R} = (X, Y, Z)$ dans le repère tournant et $\vec{r} = \vec{r}_O + M\vec{R}$ dans le repère inertiel. La deuxième loi de la dynamique liant l'accélération à la dérivée seconde de la position n'est valable que dans un référentiel inertiel et s'écrit

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}},$$

avec $\vec{a}$ la force par unité de masse, ou accélération, exercée sur le point $P$ et qui résulte de forces d'interaction. Par exemple, dans le cas d'un système planète-satellite, un point $P$ du satellite en rotation subira l'attraction gravitationnelle de la planète. La vitesse, dans le référentiel inertiel, est définie comme étant la primitive de l'accélération :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}.$$

Dans la pratique, pour définir la pesanteur par exemple, il est utile d'écrire la vitesse et l'accélération dans le repère tournant :

$$\vec{V} = M^{-1}\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{A} = M^{-1}\vec{a},$$

ce qui mène à la définition de la loi de composition des vitesses et du vecteur rotation d'une part, et de la loi de composition des accélérations et des forces d'inertie d'autre part.

## A.1 Composition des vitesses

La vitesse dans le repère tournant peut s'écrire comme

$$\vec{V} = M^{-1}\vec{v} = M^{-1}\dot{\vec{r}} = M^{-1}(\vec{v}_O + \dot{M}\vec{R} + M\dot{\vec{R}}) = \vec{V}_O + \dot{\vec{R}} + M^{-1}\dot{M}\vec{R}.$$

La matrice $M^{-1}\dot{M}$ est antisymétrique et vaut

$$M^{-1}\dot{M} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} p = & \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi \\ q = & -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi \\ r = & \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}.$$

Une propriété remarquable de $M^{-1}\dot{M}$ est qu'il est possible de définir un vecteur $\vec{\Omega} = (p, q, r)$, dans le repère tournant, tel que

$$M^{-1}\dot{M}\vec{R} = \vec{\Omega} \wedge \vec{R}.$$

Étant donné que les composantes de ce vecteur représentent la rotation instantanée du repère tournant dans le repère inertiel, on l'appelle *vecteur rotation*. La vitesse dans le repère tournant s'écrit alors de façon plus intuitive

$$\vec{V} = \vec{V}_O + \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{R}$$

comme la somme de la vitesse du centre du repère tournant, de la *vitesse relative* $\dot{\vec{R}}$ de $P$ dans $OXYZ$ et de la *vitesse d'entrainement* $\vec{\Omega} \wedge \vec{R}$ du repère tournant par rapport au repère inertiel. $\vec{V}$ est appelée *vitesse absolue* (par opposition à la vitesse relative). La loi de composition des vitesses est d'ailleurs le plus souvent écrite de la façon suivante

$$\vec{v}_{abs} = \vec{V}_O + \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{ent}.$$

La vitesse relative est la vitesse du point $P$ vue par un observateur au repos dans le repère tournant et la vitesse absolue est la vitesse du point $P$ vue par un observateur au repos dans le repère inertiel.

## A.2 Composition des accélérations

L'accélération dans le repère tournant peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \vec{A} &= M^{-1}\vec{a} = M^{-1}\dot{\vec{v}} = M^{-1}(\dot{M}\vec{V} + M\dot{\vec{V}}) \\ &= \vec{A}_O + \ddot{\vec{R}} + 2M^{-1}\dot{M}\dot{\vec{R}} + M^{-1}\dot{M}M^{-1}\dot{M}\vec{R} + (\dot{M^{-1}}\dot{M} + M^{-1}\ddot{M})\vec{R}, \end{aligned}$$

ou encore, en utilisant le définition du vecteur rotation :

$$\vec{A} = \vec{A}_O + \ddot{\vec{R}} + 2\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{R}.$$

L'*accélération absolue* dans le repère tournant ($\vec{A}$) est donc la somme de l'accélération du centre du repère tournant ($\vec{A}_0$), de l'*accélération relative* ($\ddot{\vec{R}}$), de l'*accélération de Coriolis* ($2\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{R}}$), de l'*accélération centrifuge* ($\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})$) et d'un terme nul dans le cas d'une rotation uniforme ($\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{R}$). Pour une rotation uniforme, on écrit la loi de composition des accélérations de la façon suivante :

$$\vec{a}_{abs} = \vec{A}_0 + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{cent}.$$

En l'absence d'accélération absolue (pas de force d'interaction), un observateur situé au point $P$ percevra son accélération comme étant non nulle, puisque $\vec{a}_{rel} = -\vec{A}_0 - \vec{a}_{cor} - \vec{a}_{cent}$. Ces accélérations, ou forces par unité de masse, ne proviennent donc pas d'une force d'interaction mais sont dues à la résistance/inertie du point $P$ à une modification de sa trajectoire instantanée dans le référentiel inertiel. C'est pourquoi on les appelle forces fictives ou *forces d'inerties*.

## A.3 Pesanteur et marées en un point quelconque d'un satellite

Reprenons l'exemple du système Planète-Satellite. Considérons un point $P = (X, Y, Z)$ au repos dans un repère tournant à la vitesse moyenne de rotation

du satellite et dont le centre est le centre de masse du satellite. Les forces d'interactions qui s'exercent au point $P$ sont les forces gravitationnelles de la planète $\vec{a}_{plan}$ et du satellite lui même $\vec{a}_{sat}$. L'accélération relative au point $P$ est donc égale à

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{plan} + \vec{a}_{sat} - \vec{A}_0 - \vec{a}_{cent}.$$

Dans cet exemple, l'accélération du centre de masse du satellite, $\vec{A}_0$, est due à l'attraction gravitationnelle de la planète et est donc égale à $\vec{a}_{plan}$ au point $P = (0, 0, 0)$. Par conséquent, notons $\vec{A}_0 = \vec{a}_{plan,0}$,

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{sat} + \vec{a}_{cent} + (\vec{a}_{plan} - \vec{a}_{plan,0}).$$

L'accélération relative au point $P$ est donc une combinaison de

- l'accélération due à l'attraction du satellite et de l'accélération centrifuge qui sont constantes au point $P$
- l'accélération due à la différence d'attraction de la planète entre le centre de masse du satellite et le point $P$. Cette accélération est constante pour un satellite en rotation synchrone et d'excentricité nulle mais comprend une partie périodique si l'orbite du satellite est elliptique.

La partie constante/statique de l'accélération relative est appelée pesanteur, tandis que la partie variable/périodique constituera ce que l'on appelle les marées. Chaque composante de l'accélération relative peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel.

Le potentiel statique est responsable de la forme aplatie à l'équilibre du satellite (voir théorie de Clairaut, annexe B) tandis que le potentiel variable est responsable des déformations périodiques du satellite.

# Annexe B

# Équations de Clairaut et Radau pour un satellite en rotation synchrone

## B.1 Théorie de Clairaut

On peut mettre en relation les coefficients $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ du potentiel gravitationnel statique avec la forme à l'équilibre de la surface du satellite, c'est-à-dire l'expression de $r$, rayon des points de la surface. Le potentiel total qui s'exerce sur les éléments de masse de la surface du satellite est la somme du potentiel gravitationnel statique moyen (2.3), du potentiel centrifuge (2.1) et de la partie statique du potentiel générateur de marée de degré 2 (2.2) :

$$\begin{aligned} V_{Tot}(r,\theta,\lambda) &= \frac{G\mathcal{M}}{r} + \bar{W}^{l=2}(r,\theta,\lambda) + V_r(r,\theta,\lambda) + V_{gm}^{stat,l=2}(r,\theta,\lambda) \\ &= \frac{G\mathcal{M}}{r}\left[1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(C_{20}P_2^0(\cos\theta) + \bar{C}_{22}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda\right)\right. \\ &\quad + \frac{q_r}{3R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(1 - P_2^0(\cos\theta)\right) \\ &\quad \left. + \frac{q_t}{6R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(P_2^0(\cos\theta) - \frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans le facteur entre crochet, remplaçons le rayon $r$ des points de la surface par $a(1+e)$, avec $a$ la rayon équatorial de la surface, dans la direction alignée avec la planète et $e$ une petite quantité qui exprime l'écart du rayon des points de la surface par rapport à $a$. On développe ensuite le facteur entre crochet à

l'ordre 1 en $e$, et on trouve que cela revient à remplacer $r$ par $a$.

$$\begin{aligned} V_{Tot}(r,\theta,\lambda) &= \frac{G\mathcal{M}}{r}\left[1+\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(C_{20}P_2^0(\cos\theta)+\bar{C}_{22}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda\right)\right. \\ &\quad +\frac{q_r}{3R}\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(1-P_2^0(\cos\theta)\right) \\ &\quad \left.+\frac{q_t}{6R}\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(P_2^0(\cos\theta)-\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda\right)\right]. \end{aligned}$$

A l'équilibre, la surface du satellite est une équipotentielle, donc $V_{Tot}(r,\theta,\lambda)$ est égale à une constante que l'on va noter $E$ et que l'on peut évaluer à l'équateur ($r=a$, le rayon équatorial, $\theta=\pi/2, \lambda=0$).

$$\begin{aligned} E &= \frac{G\mathcal{M}}{a}\left[1+\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(C_{20}P_2^0(0)+\bar{C}_{22}P_2^2(0)\right)+\right. \\ &\quad \left.\frac{q_r}{3R}\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(1-P_2^0(0)\right)+\frac{q_t}{6R}\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(P_2^0(0)-\frac{1}{2}P_2^2(0)\right)\right]. \end{aligned}$$

On peut alors écrire $V_{Tot}(r,\theta,\lambda)-E=0$ et en extraire l'expression de $r/a$, en supposant que $q_r, q_t, C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ sont des petites quantités :

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1+\frac{3}{2}C_{20}\cos^2\theta+\bar{C}_{22}(3\sin^2\theta\cos 2\lambda-3)+q_r(\frac{1}{2}\sin^2\theta-\frac{1}{2}) \\ &\quad +q_t(\frac{1}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos 2\lambda+\frac{1}{4}). \end{aligned}$$

Cette équation est à comparer avec l'équation d'un ellipsoïde triaxial de rayon principaux $a>b>c$ :

$$\frac{r}{a}=1-\alpha\cos^2\theta+\frac{\beta}{2}(\sin^2\theta\cos 2\lambda-1),$$

avec

$$\alpha=\frac{\frac{a+b}{2}-c}{\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad \beta=\frac{a-b}{a},$$

les aplatissements polaire et équatorial de l'ellipsoïde, respectivement. On trouve alors :

$$\alpha=-\frac{3}{2}C_{20}+\frac{q_r}{2}-\frac{q_t}{4} \quad \text{et} \quad \beta=6\bar{C}_{22}-\frac{q_t}{2},$$

ce qui revient à dire que l'aplatissement équatorial du satellite n'est dû qu'aux marées tandis que l'aplatissement polaire est dû à la fois à la rotation et aux marées. Avec la relation $q_t=-3q_r$ pour un satellite synchrone, on peut encore écrire

$$\alpha=-\frac{3}{2}C_{20}+\frac{5q_r}{4} \quad \text{et} \quad \beta=6\bar{C}_{22}+\frac{3q_r}{2},$$

et on trouve que

$$\beta=\frac{6}{5}\alpha.$$

## B.2 Equation différentielle de Clairaut

L'idée de la théorie de Clairaut pour la forme de la surface du satellite peut également être appliquée pour toute équipotentielle de rayon moyen $r_o$ située à l'intérieur du satellite. L'aplatissement polaire $\alpha$ en $r_o$ est alors donné par une équation différentielle du second degré, appelée équation différentielle de Clairaut (Jeffreys, 1959) :

$$\frac{d^2\alpha}{{dr_o}^2} + \frac{6}{r_o}\frac{\rho}{\bar{\rho}}\frac{d\alpha}{dr_o} - \frac{6}{{r_o}^2}\left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)\alpha \quad = \quad 0,$$

avec $\bar{\rho}$ la densité moyenne de la matière située sous le niveau $r_o$. Pour pouvoir résoudre cette équation du second ordre, il lui faut utiliser la condition aux frontières

$$\frac{d\alpha}{dr_o}(R) \quad = \quad \frac{1}{R}\left[\frac{25}{4}q_r - 2\alpha(R)\right].$$

Comme pour la surface, il suffira de multiplier $\alpha(r_o)$ par $\frac{6}{5}$ pour obtenir $\beta(r_o)$.

## B.3 Equation de Radau : moment d'inertie moyen

Nous pouvons maintenant en venir au lien entre $C_{20}$ et $\bar{C}_{22}$ et le moment d'inertie moyen $I$, grâce à l'approximation de Radau de l'équation de Clairaut. Radau a d'abord défini une nouvelle variable

$$\eta = \frac{r_o}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr_o},$$

permettant de réécrire l'équation différentielle de Clairaut sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dr_o}\left(\bar{\rho}r_o^5\sqrt{1+\eta}\right) = 5\bar{\rho}r_o^4\psi(\eta),$$
$$\psi(\eta) = \frac{1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}},$$

aussi appelée équation de Radau. Cette équation différentielle du premier ordre semble au premier abord plus compliquée à résoudre que l'équation de Clairaut. Mais $\psi(\eta)$ est en fait très proche de 1, ce qui permet d'obtenir l'équation de Radau approximée :

$$\frac{d}{dr_o}\left(\bar{\rho}r_o^5\sqrt{1+\eta}\right) = 5\bar{\rho}r_o^4.$$

D'un autre coté, on peut montrer que le moment d'inertie moyen est égal, au premier ordre en $\alpha$ et $\beta$, à

$$I = \frac{A+B+C}{3} = \frac{8\pi}{3}\int_0^R \rho r_o^4\, dr_o = \frac{8\pi}{9}\left[\bar{\rho}(R)R^5 - 2\int_0^R \bar{\rho}r^4 dr_o\right].$$

Il suffit donc d'intégrer l'équation de Radau approximée pour faire le lien avec $I$ :

$$I = \frac{8\pi}{9}\left[\bar{\rho}(R)R^5 - \frac{2}{5}\bar{\rho}(R)R^5\sqrt{1+\eta(R)}\right].$$

Il faut maintenant réexprimer $\eta(R)$ en fonction des conditions au frontière de l'équation différentielle de Clairaut pour obtenir :

$$\frac{I}{\mathcal{M}R^2} = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{2}{5}\left(\frac{25}{4}\frac{q_r}{-\frac{3}{2}C_{20} + \frac{5}{4}q_r} - 1\right)^{1/2}\right].$$

# Annexe C

# Résolution des équations de Lagrange

## C.1 Facteurs de perturbation

Nous donnons dans les tableaux qui suivent la valeur numérique des facteurs de perturbation $\alpha, \beta$ et $\gamma$, correspondant à chaque équation de Lagrange, pour l'OrbNom2025. Ces facteurs permettent de déterminer les effets dominants dans les équations de Lagrange. Les facteurs utilisés dans la discussion du chapitre 4 sont mis en évidence dans les tableaux.

Les unités des facteurs dépendent de l'équation de Lagrange considérée. Il s'agit de radians par seconde ($s^{-1}$) pour les variables angulaires ($i_S$, $\Omega_S$, $\omega_S$ et $M_S$) et de mètres par seconde ($m/s$) pour le demi-grand axe $a_S$. Les facteurs de perturbation pour l'excentricité $e_S$ sont sans unités.

| $\alpha_{m,p,q}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $0.40\,10^{-5}$ | 0 | $0.12\,10^{-1}$ | −0.52 | −0.25 | $-0.73\,10^{-1}$ | $-0.17\,10^{-1}$ |
| 0 | 1 | $-0.13\,10^{-2}$ | $-0.64\,10^{-2}$ | $-0.24\,10^{-1}$ | 0 | $0.24\,10^{-1}$ | $0.64\,10^{-2}$ | $0.13\,10^{-2}$ |
| 0 | 2 | $0.17\,10^{-1}$ | $0.73\,10^{-1}$ | 0.25 | 0.52 | $-0.12\,10^{-1}$ | 0 | $-0.40\,10^{-5}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $0.26\,10^{-5}$ | 0 | $0.77\,10^{-2}$ | −0.34 | −0.16 | $-0.47\,10^{-1}$ | $-0.11\,10^{-1}$ |
| 2 | 1 | $0.23\,10^{-2}$ | $0.12\,10^{-1}$ | $0.44\,10^{-1}$ | 0 | $-0.44\,10^{-1}$ | $-0.12\,10^{-1}$ | $-0.23\,10^{-2}$ |
| 2 | 2 | $0.96\,10^{-2}$ | $0.41\,10^{-1}$ | 0.14 | 0.29 | $-0.67\,10^{-2}$ | 0 | $-0.23\,10^{-5}$ |

| | | | $\beta_{m,p,p',q,q'}$ | | | $\gamma_{m,p,p',q,q'}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $0.84\,10^{-8}$ | - | $0.84\,10^{-8}$ | $-0.15\,10^{-5}$ | $-0.10\,10^{-3}$ | $-0.15\,10^{-5}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −1 | $0.25\,10^{-4}$ | - | $0.25\,10^{-4}$ | $0.19\,10^{-2}$ | 0.13 | $0.19\,10^{-2}$ |
| 0 | 1 | 0 | $-0.11\,10^{-2}$ | - | $-0.11\,10^{-2}$ | $-0.13\,10^{-1}$ | −0.93 | $-0.13\,10^{-1}$ |
| 0 | 1 | 1 | $-0.51\,10^{-3}$ | - | $-0.51\,10^{-3}$ | $-0.18\,10^{-2}$ | −0.13 | $-0.18\,10^{-2}$ |
| 0 | 1 | 2 | $-0.15\,10^{-3}$ | - | $-0.15\,10^{-3}$ | $-0.22\,10^{-3}$ | $-0.15\,10^{-1}$ | $-0.22\,10^{-3}$ |
| 0 | 1 | 3 | $-0.35\,10^{-4}$ | - | $-0.35\,10^{-4}$ | $-0.26\,10^{-4}$ | $-0.18\,10^{-2}$ | $-0.26\,10^{-4}$ |
| 1 | 1 | −3 | $-0.27\,10^{-5}$ | - | $-0.27\,10^{-5}$ | $0.13\,10^{-5}$ | $0.86\,10^{-4}$ | $0.13\,10^{-5}$ |
| 1 | 1 | −2 | $-0.13\,10^{-4}$ | - | $-0.13\,10^{-4}$ | $0.19\,10^{-4}$ | $0.13\,10^{-2}$ | $0.19\,10^{-4}$ |
| 1 | 1 | −1 | $-0.50\,10^{-4}$ | - | $-0.50\,10^{-4}$ | $0.41\,10^{-3}$ | $0.28\,10^{-1}$ | $0.41\,10^{-3}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | $0.50\,10^{-4}$ | - | $0.50\,10^{-4}$ | $-0.41\,10^{-3}$ | $-0.28\,10^{-1}$ | $-0.41\,10^{-3}$ |
| 1 | 1 | 2 | $0.13\,10^{-4}$ | - | $0.13\,10^{-4}$ | $-0.19\,10^{-4}$ | $-0.13\,10^{-2}$ | $-0.19\,10^{-4}$ |
| 1 | 1 | 3 | $0.27\,10^{-5}$ | - | $0.27\,10^{-5}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $-0.86\,10^{-4}$ | $-0.13\,10^{-5}$ |
| 2 | 1 | −3 | $0.35\,10^{-4}$ | - | $0.35\,10^{-4}$ | $0.26\,10^{-4}$ | $0.18\,10^{-2}$ | $0.26\,10^{-4}$ |
| 2 | 1 | −2 | $0.15\,10^{-3}$ | - | $0.15\,10^{-3}$ | $0.22\,10^{-3}$ | $0.15\,10^{-1}$ | $0.22\,10^{-3}$ |
| 2 | 1 | −1 | $0.51\,10^{-3}$ | - | $0.51\,10^{-3}$ | $0.18\,10^{-2}$ | 0.13 | $0.18\,10^{-2}$ |
| 2 | 1 | 0 | $0.11\,10^{-2}$ | - | $0.11\,10^{-2}$ | $0.13\,10^{-1}$ | 0.93 | $0.13\,10^{-1}$ |
| 2 | 1 | 1 | $-0.25\,10^{-4}$ | - | $-0.25\,10^{-4}$ | $-0.19\,10^{-2}$ | −0.13 | $-0.19\,10^{-2}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | $-0.84\,10^{-8}$ | - | $-0.84\,10^{-8}$ | $0.15\,10^{-5}$ | $0.10\,10^{-3}$ | $0.15\,10^{-5}$ |
| **m = 1** | | | 0 ou − | | | 0 | | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $-0.30\,10^{-8}$ | - | $0.21\,10^{-7}$ | $0.52\,10^{-6}$ | $-0.11\,10^{-3}$ | $-0.37\,10^{-5}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | −1 | $-0.88\,10^{-5}$ | - | $0.62\,10^{-4}$ | $-0.66\,10^{-3}$ | 0.14 | $0.46\,10^{-2}$ |
| 0 | 0 | 0 | $0.39\,10^{-3}$ | - | $-0.27\,10^{-2}$ | $0.48\,10^{-2}$ | −0.99 | $-0.34\,10^{-1}$ |
| 0 | 0 | 1 | $0.18\,10^{-3}$ | - | $-0.13\,10^{-2}$ | $0.65\,10^{-3}$ | −0.13 | $-0.46\,10^{-2}$ |
| 0 | 0 | 2 | $0.54\,10^{-4}$ | - | $-0.38\,10^{-3}$ | $0.80\,10^{-4}$ | $-0.16\,10^{-1}$ | $-0.56\,10^{-3}$ |
| 0 | 0 | 3 | $0.13\,10^{-4}$ | - | $-0.88\,10^{-4}$ | $0.93\,10^{-5}$ | $-0.19\,10^{-2}$ | $-0.65\,10^{-4}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $-0.27\,10^{-5}$ | - | $0.19\,10^{-4}$ | $0.13\,10^{-5}$ | $-0.26\,10^{-3}$ | $-0.88\,10^{-5}$ |
| 1 | 0 | −2 | $-0.13\,10^{-4}$ | - | $0.94\,10^{-4}$ | $0.19\,10^{-4}$ | $-0.38\,10^{-2}$ | $-0.13\,10^{-3}$ |
| 1 | 0 | −1 | $-0.50\,10^{-4}$ | - | $0.35\,10^{-3}$ | $0.41\,10^{-3}$ | $-0.85\,10^{-1}$ | $-0.29\,10^{-2}$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $0.50\,10^{-4}$ | - | $-0.35\,10^{-3}$ | $-0.41\,10^{-3}$ | $0.85\,10^{-1}$ | $0.29\,10^{-2}$ |
| 1 | 0 | 2 | $0.13\,10^{-4}$ | - | $-0.94\,10^{-4}$ | $-0.19\,10^{-4}$ | $0.38\,10^{-2}$ | $0.13\,10^{-3}$ |
| 1 | 0 | 3 | $0.27\,10^{-5}$ | - | $-0.19\,10^{-4}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $0.26\,10^{-3}$ | $0.88\,10^{-5}$ |
| 2 | 0 | −3 | $-0.11\,10^{-4}$ | - | $0.77\,10^{-4}$ | $-0.81\,10^{-5}$ | $0.17\,10^{-2}$ | $0.57\,10^{-4}$ |
| 2 | 0 | −2 | $-0.47\,10^{-4}$ | - | $0.33\,10^{-3}$ | $-0.69\,10^{-4}$ | $0.14\,10^{-1}$ | $0.49\,10^{-3}$ |
| 2 | 0 | −1 | $-0.16\,10^{-3}$ | - | $0.11\,10^{-2}$ | $-0.57\,10^{-3}$ | 0.12 | $0.40\,10^{-2}$ |
| 2 | 0 | 0 | $-0.34\,10^{-3}$ | - | $0.23\,10^{-2}$ | $-0.42\,10^{-2}$ | 0.86 | $0.29\,10^{-1}$ |
| 2 | 0 | 1 | $0.77\,10^{-5}$ | - | $-0.54\,10^{-4}$ | $0.58\,10^{-3}$ | −0.12 | $-0.40\,10^{-2}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 3 | $0.26\,10^{-8}$ | - | $-0.18\,10^{-7}$ | $-0.46\,10^{-6}$ | $0.94\,10^{-4}$ | $0.32\,10^{-5}$ |

TAB. C.1 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{da_S(t)}{dt}$**

| $\alpha^{\Omega}_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{q}}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0, 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $0.13\,10^{-11}$ | 0 | $-0.40\,10^{-8}$ | $0.86\,10^{-7}$ | $0.27\,10^{-7}$ | $0.61\,10^{-8}$ | $0.11\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | $0.40\,10^{-9}$ | $0.30\,10^{-8}$ | $0.22\,10^{-7}$ | $0.17\,10^{-6}$ | $0.22\,10^{-7}$ | $0.30\,10^{-8}$ | $0.40\,10^{-9}$ |
| 2 | 2 | $0.98\,10^{-9}$ | $0.53\,10^{-8}$ | $0.24\,10^{-7}$ | $0.75\,10^{-7}$ | $-0.34\,10^{-8}$ | 0 | $0.12\,10^{-11}$ |

| | | | $\beta^{\Omega}_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{p'},\mathbf{q},\mathbf{q'}}$ | | | $\gamma^{\Omega}_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{p'},\mathbf{q},\mathbf{q'}}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0, 1** | | | 0 ou − | | | 0 | | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $-0.15\,10^{-14}$ | - | $0.11\,10^{-13}$ | $0.27\,10^{-12}$ | $-0.55\,10^{-10}$ | $-0.19\,10^{-11}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.26\,10^{-10}$ | $0.53\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | −1 | $0.45\,10^{-11}$ | - | $-0.32\,10^{-10}$ | $0.34\,10^{-9}$ | $-0.70\,10^{-7}$ | $-0.24\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-0.99\,10^{-10}$ | - | $0.69\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-8}$ | $0.25\,10^{-6}$ | $0.86\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 1 | $-0.31\,10^{-10}$ | - | $0.22\,10^{-9}$ | $-0.11\,10^{-9}$ | $0.23\,10^{-7}$ | $0.78\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | 2 | $-0.69\,10^{-11}$ | - | $0.49\,10^{-10}$ | $-0.10\,10^{-10}$ | $0.21\,10^{-8}$ | $0.71\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | 3 | $-0.13\,10^{-11}$ | - | $0.90\,10^{-11}$ | $-0.96\,10^{-12}$ | $0.20\,10^{-9}$ | $0.67\,10^{-11}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $-0.45\,10^{-12}$ | - | $0.32\,10^{-11}$ | $0.21\,10^{-12}$ | $-0.44\,10^{-10}$ | $-0.15\,10^{-11}$ |
| 1 | 0 | −2 | $-0.34\,10^{-11}$ | - | $0.24\,10^{-10}$ | $0.48\,10^{-11}$ | $-0.98\,10^{-9}$ | $-0.33\,10^{-10}$ |
| 1 | 0 | −1 | $-0.26\,10^{-10}$ | - | $0.18\,10^{-9}$ | $0.21\,10^{-9}$ | $-0.44\,10^{-7}$ | $-0.15\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | 0 | $-0.19\,10^{-9}$ | - | $0.13\,10^{-8}$ | $-0.24\,10^{-8}$ | $0.49\,10^{-6}$ | $0.17\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 1 | $-0.26\,10^{-10}$ | - | $0.18\,10^{-9}$ | $0.21\,10^{-9}$ | $-0.44\,10^{-7}$ | $-0.15\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | 2 | $-0.34\,10^{-11}$ | - | $0.24\,10^{-10}$ | $0.48\,10^{-11}$ | $-0.98\,10^{-9}$ | $-0.33\,10^{-10}$ |
| 1 | 0 | 3 | $-0.45\,10^{-12}$ | - | $0.32\,10^{-11}$ | $0.21\,10^{-12}$ | $-0.44\,10^{-10}$ | $-0.15\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | −3 | $-0.11\,10^{-11}$ | - | $0.79\,10^{-11}$ | $-0.83\,10^{-12}$ | $0.17\,10^{-9}$ | $0.58\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | −2 | $-0.60\,10^{-11}$ | - | $0.42\,10^{-10}$ | $-0.89\,10^{-11}$ | $0.18\,10^{-8}$ | $0.62\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | −1 | $-0.27\,10^{-10}$ | - | $0.19\,10^{-9}$ | $-0.97\,10^{-10}$ | $0.20\,10^{-7}$ | $0.68\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 0 | $-0.86\,10^{-10}$ | - | $0.60\,10^{-9}$ | $-0.11\,10^{-8}$ | $0.22\,10^{-6}$ | $0.75\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 1 | $0.39\,10^{-11}$ | - | $-0.28\,10^{-10}$ | $0.29\,10^{-9}$ | $-0.61\,10^{-7}$ | $-0.21\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.22\,10^{-10}$ | $0.46\,10^{-8}$ | $0.16\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 3 | $-0.13\,10^{-14}$ | - | $0.93\,10^{-14}$ | $0.23\,10^{-12}$ | $-0.48\,10^{-10}$ | $-0.16\,10^{-11}$ |

TAB. C.2 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{\mathbf{dis(t)}}{\mathbf{dt}}$, partie en $\frac{\partial}{\partial\Omega_S}$**

| $\alpha^{\omega}_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{q}}$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $-0.72\,10^{-13}$ | 0 | $0.21\,10^{-9}$ | $-0.47\,10^{-8}$ | $-0.15\,10^{-8}$ | $-0.33\,10^{-9}$ | $-0.61\,10^{-10}$ |
| 0, 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | $0.61\,10^{-10}$ | $0.33\,10^{-9}$ | $0.15\,10^{-8}$ | $0.47\,10^{-8}$ | $-0.21\,10^{-9}$ | 0 | $0.72\,10^{-13}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $-0.47\,10^{-13}$ | 0 | $0.14\,10^{-9}$ | $-0.30\,10^{-8}$ | $-0.95\,10^{-9}$ | $-0.21\,10^{-9}$ | $-0.39\,10^{-10}$ |
| 2 | 2 | $0.34\,10^{-10}$ | $0.18\,10^{-9}$ | $0.83\,10^{-9}$ | $0.26\,10^{-8}$ | $-0.12\,10^{-9}$ | 0 | $0.41\,10^{-13}$ |

| | | | $\beta^{\omega}_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q},\mathbf{q}'}$ | | | $\gamma^{\omega}_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q},\mathbf{q}'}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $-0.15\,10^{-15}$ | - | $-0.15\,10^{-15}$ | $0.26\,10^{-13}$ | $0.18\,10^{-11}$ | $0.26\,10^{-13}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.25\,10^{-11}$ | $-0.17\,10^{-9}$ | $-0.25\,10^{-11}$ |
| 0 | 1 | −1 | $0.44\,10^{-12}$ | - | $0.44\,10^{-12}$ | $0.33\,10^{-10}$ | $0.23\,10^{-8}$ | $0.33\,10^{-10}$ |
| 0 | 1 | 0 | $-0.96\,10^{-11}$ | - | $-0.96\,10^{-11}$ | $-0.12\,10^{-9}$ | $-0.83\,10^{-8}$ | $-0.12\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | 1 | $-0.30\,10^{-11}$ | - | $-0.30\,10^{-11}$ | $-0.11\,10^{-10}$ | $-0.75\,10^{-9}$ | $-0.11\,10^{-10}$ |
| 0 | 1 | 2 | $-0.68\,10^{-12}$ | - | $-0.68\,10^{-12}$ | $-1.00\,10^{-12}$ | $-0.68\,10^{-10}$ | $-1.00\,10^{-12}$ |
| 0 | 1 | 3 | $-0.13\,10^{-12}$ | - | $-0.13\,10^{-12}$ | $-0.93\,10^{-13}$ | $-0.64\,10^{-11}$ | $-0.93\,10^{-13}$ |
| 1 | 1 | −3 à 3 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | −3 | $0.13\,10^{-12}$ | - | $0.13\,10^{-12}$ | $0.93\,10^{-13}$ | $0.64\,10^{-11}$ | $0.93\,10^{-13}$ |
| 2 | 1 | −2 | $0.68\,10^{-12}$ | - | $0.68\,10^{-12}$ | $1.00\,10^{-12}$ | $0.68\,10^{-10}$ | $1.00\,10^{-12}$ |
| 2 | 1 | −1 | $0.30\,10^{-11}$ | - | $0.30\,10^{-11}$ | $0.11\,10^{-10}$ | $0.75\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | 0 | $0.96\,10^{-11}$ | - | $0.96\,10^{-11}$ | $0.12\,10^{-9}$ | $0.83\,10^{-8}$ | $0.12\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | 1 | $-0.44\,10^{-12}$ | - | $-0.44\,10^{-12}$ | $-0.33\,10^{-10}$ | $-0.23\,10^{-8}$ | $-0.33\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | $0.25\,10^{-11}$ | $0.17\,10^{-9}$ | $0.25\,10^{-11}$ |
| 2 | 1 | 3 | $0.15\,10^{-15}$ | - | $0.15\,10^{-15}$ | $-0.26\,10^{-13}$ | $-0.18\,10^{-11}$ | $-0.26\,10^{-13}$ |
| **m = 1** | | | 0 ou − | | | 0 | | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $0.53\,10^{-16}$ | - | $-0.37\,10^{-15}$ | $-0.94\,10^{-14}$ | $0.19\,10^{-11}$ | $0.65\,10^{-13}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $0.89\,10^{-12}$ | $-0.18\,10^{-9}$ | $-0.62\,10^{-11}$ |
| 0 | 0 | −1 | $-0.16\,10^{-12}$ | - | $0.11\,10^{-11}$ | $-0.12\,10^{-10}$ | $0.24\,10^{-8}$ | $0.83\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | 0 | $0.34\,10^{-11}$ | - | $-0.24\,10^{-10}$ | $0.43\,10^{-10}$ | $-0.89\,10^{-8}$ | $-0.30\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | 1 | $0.11\,10^{-11}$ | - | $-0.76\,10^{-11}$ | $0.39\,10^{-11}$ | $-0.80\,10^{-9}$ | $-0.27\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | 2 | $0.24\,10^{-12}$ | - | $-0.17\,10^{-11}$ | $0.36\,10^{-12}$ | $-0.73\,10^{-10}$ | $-0.25\,10^{-11}$ |
| 0 | 0 | 3 | $0.45\,10^{-13}$ | - | $-0.32\,10^{-12}$ | $0.33\,10^{-13}$ | $-0.69\,10^{-11}$ | $-0.23\,10^{-12}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 à 3 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | −3 | $-0.39\,10^{-13}$ | - | $0.27\,10^{-12}$ | $-0.29\,10^{-13}$ | $0.60\,10^{-11}$ | $0.20\,10^{-12}$ |
| 2 | 0 | −2 | $-0.21\,10^{-12}$ | - | $0.15\,10^{-11}$ | $-0.31\,10^{-12}$ | $0.64\,10^{-10}$ | $0.22\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | −1 | $-0.95\,10^{-12}$ | - | $0.66\,10^{-11}$ | $-0.34\,10^{-11}$ | $0.70\,10^{-9}$ | $0.24\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | 0 | $-0.30\,10^{-11}$ | - | $0.21\,10^{-10}$ | $-0.37\,10^{-10}$ | $0.77\,10^{-8}$ | $0.26\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 1 | $0.14\,10^{-12}$ | - | $-0.96\,10^{-12}$ | $0.10\,10^{-10}$ | $-0.21\,10^{-8}$ | $-0.72\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.77\,10^{-12}$ | $0.16\,10^{-9}$ | $0.54\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | 3 | $-0.46\,10^{-16}$ | - | $0.33\,10^{-15}$ | $0.81\,10^{-14}$ | $-0.17\,10^{-11}$ | $-0.57\,10^{-13}$ |

TAB. C.3 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{\mathbf{di_S(t)}}{\mathbf{dt}}$, partie en $\frac{\partial}{\partial \omega_S}$**

| $\alpha_{\mathbf{m,p,q}}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $0.72\,10^{-13}$ | 0 | $-0.21\,10^{-9}$ | $0.47\,10^{-8}$ | $0.15\,10^{-8}$ | $0.33\,10^{-9}$ | $0.61\,10^{-10}$ |
| 0 | 1 | $-0.23\,10^{-10}$ | $-0.17\,10^{-9}$ | $-0.13\,10^{-8}$ | $-0.96\,10^{-8}$ | $-0.13\,10^{-8}$ | $-0.17\,10^{-9}$ | $-0.23\,10^{-10}$ |
| 0 | 2 | $0.61\,10^{-10}$ | $0.33\,10^{-9}$ | $0.15\,10^{-8}$ | $0.47\,10^{-8}$ | $-0.21\,10^{-9}$ | 0 | $0.72\,10^{-13}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $-0.13\,10^{-11}$ | 0 | $0.38\,10^{-8}$ | $-0.83\,10^{-7}$ | $-0.26\,10^{-7}$ | $-0.58\,10^{-8}$ | $-0.11\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | $0.14\,10^{-10}$ | $0.10\,10^{-9}$ | $0.78\,10^{-9}$ | $0.58\,10^{-8}$ | $0.78\,10^{-9}$ | $0.10\,10^{-9}$ | $0.14\,10^{-10}$ |
| 2 | 2 | $0.10\,10^{-8}$ | $0.55\,10^{-8}$ | $0.25\,10^{-7}$ | $0.78\,10^{-7}$ | $-0.36\,10^{-8}$ | 0 | $0.12\,10^{-11}$ |

| | | | $\beta_{\mathbf{m,p,p',q,q'}}$ | | | $\gamma_{\mathbf{m,p,p',q,q'}}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $0.15\,10^{-15}$ | - | $0.15\,10^{-15}$ | $-0.26\,10^{-13}$ | $-0.18\,10^{-11}$ | $-0.26\,10^{-13}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | $0.25\,10^{-11}$ | $0.17\,10^{-9}$ | $0.25\,10^{-11}$ |
| 0 | 1 | −1 | $-0.44\,10^{-12}$ | - | $-0.44\,10^{-12}$ | $-0.33\,10^{-10}$ | $-0.23\,10^{-8}$ | $-0.33\,10^{-10}$ |
| 0 | 1 | 0 | $0.96\,10^{-11}$ | - | $0.96\,10^{-11}$ | $0.12\,10^{-9}$ | $0.83\,10^{-8}$ | $0.12\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | 1 | $0.30\,10^{-11}$ | - | $0.30\,10^{-11}$ | $0.11\,10^{-10}$ | $0.75\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-10}$ |
| 0 | 1 | 2 | $0.68\,10^{-12}$ | - | $0.68\,10^{-12}$ | $1.00\,10^{-12}$ | $0.68\,10^{-10}$ | $1.00\,10^{-12}$ |
| 0 | 1 | 3 | $0.13\,10^{-12}$ | - | $0.13\,10^{-12}$ | $0.94\,10^{-13}$ | $0.64\,10^{-11}$ | $0.94\,10^{-13}$ |
| 1 | 1 | −3 | $-0.48\,10^{-13}$ | - | $-0.48\,10^{-13}$ | $0.22\,10^{-13}$ | $0.15\,10^{-11}$ | $0.22\,10^{-13}$ |
| 1 | 1 | −2 | $-0.36\,10^{-12}$ | - | $-0.36\,10^{-12}$ | $0.50\,10^{-12}$ | $0.34\,10^{-10}$ | $0.50\,10^{-12}$ |
| 1 | 1 | −1 | $-0.27\,10^{-11}$ | - | $-0.27\,10^{-11}$ | $0.22\,10^{-10}$ | $0.15\,10^{-8}$ | $0.22\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | 0 | $-0.20\,10^{-10}$ | - | $-0.20\,10^{-10}$ | $-0.25\,10^{-9}$ | $-0.17\,10^{-7}$ | $-0.25\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | 1 | $-0.27\,10^{-11}$ | - | $-0.27\,10^{-11}$ | $0.22\,10^{-10}$ | $0.15\,10^{-8}$ | $0.22\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | 2 | $-0.36\,10^{-12}$ | - | $-0.36\,10^{-12}$ | $0.50\,10^{-12}$ | $0.34\,10^{-10}$ | $0.50\,10^{-12}$ |
| 1 | 1 | 3 | $-0.48\,10^{-13}$ | - | $-0.48\,10^{-13}$ | $0.22\,10^{-13}$ | $0.15\,10^{-11}$ | $0.22\,10^{-13}$ |
| 2 | 1 | −3 | $0.13\,10^{-12}$ | - | $0.13\,10^{-12}$ | $0.94\,10^{-13}$ | $0.64\,10^{-11}$ | $0.94\,10^{-13}$ |
| 2 | 1 | −2 | $0.68\,10^{-12}$ | - | $0.68\,10^{-12}$ | $1.00\,10^{-12}$ | $0.68\,10^{-10}$ | $1.00\,10^{-12}$ |
| 2 | 1 | −1 | $0.30\,10^{-11}$ | - | $0.30\,10^{-11}$ | $0.11\,10^{-10}$ | $0.75\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | 0 | $0.96\,10^{-11}$ | - | $0.96\,10^{-11}$ | $0.12\,10^{-9}$ | $0.83\,10^{-8}$ | $0.12\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | 1 | $-0.44\,10^{-12}$ | - | $-0.44\,10^{-12}$ | $-0.33\,10^{-10}$ | $-0.23\,10^{-8}$ | $-0.33\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | $0.25\,10^{-11}$ | $0.17\,10^{-9}$ | $0.25\,10^{-11}$ |
| 2 | 1 | 3 | $0.15\,10^{-15}$ | - | $0.15\,10^{-15}$ | $-0.26\,10^{-13}$ | $-0.18\,10^{-11}$ | $-0.26\,10^{-13}$ |
| **m = 1** | | | | 0 ou − | | | 0 | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $0.15\,10^{-14}$ | - | $-0.10\,10^{-13}$ | $-0.26\,10^{-12}$ | $0.53\,10^{-10}$ | $0.18\,10^{-11}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $0.25\,10^{-10}$ | $-0.51\,10^{-8}$ | $-0.17\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | −1 | $-0.44\,10^{-11}$ | - | $0.31\,10^{-10}$ | $-0.33\,10^{-9}$ | $0.67\,10^{-7}$ | $0.23\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 0 | $0.95\,10^{-10}$ | - | $-0.67\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-8}$ | $-0.25\,10^{-6}$ | $-0.84\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 1 | $0.30\,10^{-10}$ | - | $-0.21\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-9}$ | $-0.22\,10^{-7}$ | $-0.75\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | 2 | $0.67\,10^{-11}$ | - | $-0.47\,10^{-10}$ | $0.99\,10^{-11}$ | $-0.20\,10^{-8}$ | $-0.69\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | 3 | $0.12\,10^{-11}$ | - | $-0.87\,10^{-11}$ | $0.92\,10^{-12}$ | $-0.19\,10^{-9}$ | $-0.65\,10^{-11}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $-0.16\,10^{-13}$ | - | $0.11\,10^{-12}$ | $0.75\,10^{-14}$ | $-0.15\,10^{-11}$ | $-0.52\,10^{-13}$ |
| 1 | 0 | −2 | $-0.12\,10^{-12}$ | - | $0.84\,10^{-12}$ | $0.17\,10^{-12}$ | $-0.34\,10^{-10}$ | $-0.12\,10^{-11}$ |
| 1 | 0 | −1 | $-0.89\,10^{-12}$ | - | $0.63\,10^{-11}$ | $0.74\,10^{-11}$ | $-0.15\,10^{-8}$ | $-0.52\,10^{-10}$ |
| 1 | 0 | 0 | $-0.66\,10^{-11}$ | - | $0.46\,10^{-10}$ | $-0.83\,10^{-10}$ | $0.17\,10^{-7}$ | $0.58\,10^{-9}$ |
| 1 | 0 | 1 | $-0.89\,10^{-12}$ | - | $0.63\,10^{-11}$ | $0.74\,10^{-11}$ | $-0.15\,10^{-8}$ | $-0.52\,10^{-10}$ |
| 1 | 0 | 2 | $-0.12\,10^{-12}$ | - | $0.84\,10^{-12}$ | $0.17\,10^{-12}$ | $-0.34\,10^{-10}$ | $-0.12\,10^{-11}$ |
| 1 | 0 | 3 | $-0.16\,10^{-13}$ | - | $0.11\,10^{-12}$ | $0.75\,10^{-14}$ | $-0.15\,10^{-11}$ | $-0.52\,10^{-13}$ |
| 2 | 0 | −3 | $-0.12\,10^{-11}$ | - | $0.81\,10^{-11}$ | $-0.86\,10^{-12}$ | $0.18\,10^{-9}$ | $0.60\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | −2 | $-0.62\,10^{-11}$ | - | $0.44\,10^{-10}$ | $-0.92\,10^{-11}$ | $0.19\,10^{-8}$ | $0.64\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | −1 | $-0.28\,10^{-10}$ | - | $0.20\,10^{-9}$ | $-0.10\,10^{-9}$ | $0.21\,10^{-7}$ | $0.70\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 0 | $-0.89\,10^{-10}$ | - | $0.62\,10^{-9}$ | $-0.11\,10^{-8}$ | $0.23\,10^{-6}$ | $0.78\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 1 | $0.41\,10^{-11}$ | - | $-0.29\,10^{-10}$ | $0.31\,10^{-9}$ | $-0.63\,10^{-7}$ | $-0.21\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.23\,10^{-10}$ | $0.47\,10^{-8}$ | $0.16\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 3 | $-0.14\,10^{-14}$ | - | $0.96\,10^{-14}$ | $0.24\,10^{-12}$ | $-0.50\,10^{-10}$ | $-0.17\,10^{-11}$ |

TAB. C.4 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{\mathbf{d\Omega_S(t)}}{\mathbf{dt}}$**

| $\alpha^e_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{q}}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $0.38\,10^{-9}$ | 0 | $-0.37\,10^{-6}$ | $-0.34\,10^{-6}$ | $0.25\,10^{-5}$ | $0.11\,10^{-5}$ | $0.32\,10^{-6}$ |
| 0 | 1 | $-0.40\,10^{-7}$ | $-0.20\,10^{-6}$ | $-0.77\,10^{-}$ | $-0.14\,10^{-6}$ | $-0.77\,10^{-6}$ | $-0.20\,10^{-6}$ | $-0.40\,10^{-7}$ |
| 0 | 2 | $0.32\,10^{-6}$ | $0.11\,10^{-5}$ | $0.25\,10^{-5}$ | $-0.34\,10^{-6}$ | $-0.37\,10^{-6}$ | 0 | $0.38\,10^{-9}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $0.25\,10^{-9}$ | 0 | $-0.24\,10^{-6}$ | $-0.22\,10^{-6}$ | $0.16\,10^{-5}$ | $0.74\,10^{-6}$ | $0.21\,10^{-6}$ |
| 2 | 1 | $0.73\,10^{-7}$ | $0.37\,10^{-6}$ | $0.14\,10^{-5}$ | $0.25\,10^{-6}$ | $0.14\,10^{-5}$ | $0.37\,10^{-6}$ | $0.73\,10^{-7}$ |
| 2 | 2 | $0.18\,10^{-6}$ | $0.64\,10^{-6}$ | $0.14\,10^{-5}$ | $-0.19\,10^{-6}$ | $-0.21\,10^{-6}$ | 0 | $0.21\,10^{-9}$ |

| | | | $\beta^e_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q},\mathbf{q}'}$ | | | $\gamma^e_{\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q},\mathbf{q}'}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $0.79\,10^{-12}$ | - | $0.79\,10^{-12}$ | $-0.14\,10^{-9}$ | $-0.94\,10^{-8}$ | $-0.14\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | $0.87\,10^{-8}$ | $0.60\,10^{-6}$ | $0.87\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | −1 | $-0.77\,10^{-9}$ | - | $-0.77\,10^{-9}$ | $-0.58\,10^{-7}$ | $-0.39\,10^{-5}$ | $-0.58\,10^{-7}$ |
| 0 | 1 | 0 | $-0.70\,10^{-9}$ | - | $-0.70\,10^{-9}$ | $-0.87\,10^{-8}$ | $-0.60\,10^{-6}$ | $-0.87\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | 1 | $0.51\,10^{-8}$ | - | $0.51\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-7}$ | $0.13\,10^{-5}$ | $0.18\,10^{-7}$ |
| 0 | 1 | 2 | $0.24\,10^{-8}$ | - | $0.24\,10^{-8}$ | $0.35\,10^{-8}$ | $0.24\,10^{-6}$ | $0.35\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | 3 | $0.66\,10^{-9}$ | - | $0.66\,10^{-9}$ | $0.49\,10^{-9}$ | $0.34\,10^{-7}$ | $0.49\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | −3 | $-0.83\,10^{-10}$ | - | $-0.83\,10^{-10}$ | $0.39\,10^{-10}$ | $0.27\,10^{-8}$ | $0.39\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | −2 | $-0.42\,10^{-9}$ | - | $-0.42\,10^{-9}$ | $0.58\,10^{-9}$ | $0.40\,10^{-7}$ | $0.58\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | −1 | $-0.16\,10^{-8}$ | - | $-0.16\,10^{-8}$ | $0.13\,10^{-7}$ | $0.88\,10^{-6}$ | $0.13\,10^{-7}$ |
| 1 | 1 | 0 | $-0.28\,10^{-9}$ | - | $-0.28\,10^{-9}$ | $-0.35\,10^{-8}$ | $-0.24\,10^{-6}$ | $-0.35\,10^{-8}$ |
| 1 | 1 | 1 | $-0.16\,10^{-8}$ | - | $-0.16\,10^{-8}$ | $0.13\,10^{-7}$ | $0.88\,10^{-6}$ | $0.13\,10^{-7}$ |
| 1 | 1 | 2 | $-0.42\,10^{-9}$ | - | $-0.42\,10^{-9}$ | $0.58\,10^{-9}$ | $0.40\,10^{-7}$ | $0.58\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | 3 | $-0.83\,10^{-10}$ | - | $-0.83\,10^{-10}$ | $0.39\,10^{-10}$ | $0.27\,10^{-8}$ | $0.39\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | −3 | $0.66\,10^{-9}$ | - | $0.66\,10^{-9}$ | $0.49\,10^{-9}$ | $0.34\,10^{-7}$ | $0.49\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | −2 | $0.24\,10^{-8}$ | - | $0.24\,10^{-8}$ | $0.35\,10^{-8}$ | $0.24\,10^{-6}$ | $0.35\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | −1 | $0.51\,10^{-8}$ | - | $0.51\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-7}$ | $0.13\,10^{-5}$ | $0.18\,10^{-7}$ |
| 2 | 1 | 0 | $-0.70\,10^{-9}$ | - | $-0.70\,10^{-9}$ | $-0.87\,10^{-8}$ | $-0.60\,10^{-6}$ | $-0.87\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | 1 | $-0.77\,10^{-9}$ | - | $-0.77\,10^{-9}$ | $-0.58\,10^{-7}$ | $-0.39\,10^{-5}$ | $-0.58\,10^{-7}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | $0.87\,10^{-8}$ | $0.60\,10^{-6}$ | $0.87\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | 3 | $0.79\,10^{-12}$ | - | $0.79\,10^{-12}$ | $-0.14\,10^{-9}$ | $-0.94\,10^{-8}$ | $-0.14\,10^{-9}$ |
| **m = 0, 1** | | | 0 ou − | | | 0 | | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $-0.28\,10^{-12}$ | - | $0.20\,10^{-11}$ | $0.49\,10^{-10}$ | $-0.10\,10^{-7}$ | $-0.34\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.31\,10^{-8}$ | $0.64\,10^{-6}$ | $0.22\,10^{-7}$ |
| 0 | 0 | −1 | $0.28\,10^{-9}$ | - | $-0.19\,10^{-8}$ | $0.21\,10^{-7}$ | $-0.42\,10^{-5}$ | $-0.14\,10^{-6}$ |
| 0 | 0 | 0 | $0.25\,10^{-9}$ | - | $-0.17\,10^{-8}$ | $0.31\,10^{-8}$ | $-0.64\,10^{-6}$ | $-0.22\,10^{-7}$ |
| 0 | 0 | 1 | $-0.18\,10^{-8}$ | - | $0.13\,10^{-7}$ | $-0.65\,10^{-8}$ | $0.13\,10^{-5}$ | $0.46\,10^{-7}$ |
| 0 | 0 | 2 | $-0.85\,10^{-9}$ | - | $0.59\,10^{-8}$ | $-0.12\,10^{-8}$ | $0.26\,10^{-6}$ | $0.87\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 3 | $-0.24\,10^{-9}$ | - | $0.17\,10^{-8}$ | $-0.18\,10^{-9}$ | $0.36\,10^{-7}$ | $0.12\,10^{-8}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $-0.83\,10^{-10}$ | - | $0.58\,10^{-9}$ | $0.39\,10^{-10}$ | $-0.81\,10^{-8}$ | $-0.28\,10^{-9}$ |
| 1 | 0 | −2 | $-0.42\,10^{-9}$ | - | $0.29\,10^{-8}$ | $0.58\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-6}$ | $-0.41\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | −1 | $-0.16\,10^{-8}$ | - | $0.11\,10^{-7}$ | $0.13\,10^{-7}$ | $-0.27\,10^{-5}$ | $-0.90\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 0 | $-0.29\,10^{-9}$ | - | $0.20\,10^{-8}$ | $-0.35\,10^{-8}$ | $0.72\,10^{-6}$ | $0.24\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 1 | $-0.16\,10^{-8}$ | - | $0.11\,10^{-7}$ | $0.13\,10^{-7}$ | $-0.27\,10^{-5}$ | $-0.90\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 2 | $-0.42\,10^{-9}$ | - | $0.29\,10^{-8}$ | $0.58\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-6}$ | $-0.41\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | 3 | $-0.83\,10^{-10}$ | - | $0.58\,10^{-9}$ | $0.39\,10^{-10}$ | $-0.81\,10^{-8}$ | $-0.28\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | −3 | $-0.21\,10^{-9}$ | - | $0.14\,10^{-8}$ | $-0.15\,10^{-9}$ | $0.31\,10^{-7}$ | $0.11\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | −2 | $-0.74\,10^{-9}$ | - | $0.52\,10^{-8}$ | $-0.11\,10^{-8}$ | $0.22\,10^{-6}$ | $0.76\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | −1 | $-0.16\,10^{-8}$ | - | $0.11\,10^{-7}$ | $-0.57\,10^{-8}$ | $0.12\,10^{-5}$ | $0.40\,10^{-7}$ |
| 2 | 0 | 0 | $0.22\,10^{-9}$ | - | $-0.15\,10^{-8}$ | $0.27\,10^{-8}$ | $-0.56\,10^{-6}$ | $-0.19\,10^{-7}$ |
| 2 | 0 | 1 | $0.24\,10^{-9}$ | - | $-0.17\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-7}$ | $-0.37\,10^{-5}$ | $-0.13\,10^{-6}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.27\,10^{-8}$ | $0.56\,10^{-6}$ | $0.19\,10^{-7}$ |
| 2 | 0 | 3 | $-0.24\,10^{-12}$ | - | $0.17\,10^{-11}$ | $0.43\,10^{-10}$ | $-0.88\,10^{-8}$ | $-0.30\,10^{-9}$ |

TAB. C.5 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{\mathbf{d}\omega_{\mathbf{S}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}$, partie en $\frac{\partial}{\partial e_S}$**

| $\alpha^i_{\mathbf{m,p,q}}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $-0.25\,10^{-14}$ | 0 | $0.75\,10^{-11}$ | $-0.16\,10^{-9}$ | $-0.51\,10^{-10}$ | $-0.11\,10^{-10}$ | $-0.21\,10^{-11}$ |
| 0 | 1 | $0.80\,10^{-12}$ | $0.60\,10^{-11}$ | $0.45\,10^{-10}$ | $0.34\,10^{-9}$ | $0.45\,10^{-10}$ | $0.60\,10^{-11}$ | $0.80\,10^{-12}$ |
| 0 | 2 | $-0.21\,10^{-11}$ | $-0.11\,10^{-10}$ | $-0.51\,10^{-10}$ | $-0.16\,10^{-9}$ | $0.75\,10^{-11}$ | 0 | $-0.25\,10^{-14}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $0.45\,10^{-13}$ | 0 | $-0.13\,10^{-9}$ | $0.29\,10^{-8}$ | $0.92\,10^{-9}$ | $0.20\,10^{-9}$ | $0.38\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | $-0.48\,10^{-12}$ | $-0.36\,10^{-11}$ | $-0.27\,10^{-10}$ | $-0.20\,10^{-9}$ | $-0.27\,10^{-10}$ | $-0.36\,10^{-11}$ | $-0.48\,10^{-12}$ |
| 2 | 2 | $-0.35\,10^{-10}$ | $-0.19\,10^{-9}$ | $-0.86\,10^{-9}$ | $-0.27\,10^{-8}$ | $0.12\,10^{-9}$ | 0 | $-0.42\,10^{-13}$ |

| | | | $\beta^i_{\mathbf{m,p,p',q,q'}}$ | | | $\gamma^i_{\mathbf{m,p,p',q,q'}}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $-0.52\,10^{-17}$ | - | $-0.52\,10^{-17}$ | $0.91\,10^{-15}$ | $0.63\,10^{-13}$ | $0.91\,10^{-15}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.87\,10^{-13}$ | $-0.60\,10^{-11}$ | $-0.87\,10^{-13}$ |
| 0 | 1 | −1 | $0.15\,10^{-13}$ | - | $0.15\,10^{-13}$ | $0.12\,10^{-11}$ | $0.79\,10^{-10}$ | $0.12\,10^{-11}$ |
| 0 | 1 | 0 | $-0.34\,10^{-12}$ | - | $-0.34\,10^{-12}$ | $-0.42\,10^{-11}$ | $-0.29\,10^{-9}$ | $-0.42\,10^{-11}$ |
| 0 | 1 | 1 | $-0.11\,10^{-12}$ | - | $-0.11\,10^{-12}$ | $-0.38\,10^{-12}$ | $-0.26\,10^{-10}$ | $-0.38\,10^{-12}$ |
| 0 | 1 | 2 | $-0.24\,10^{-13}$ | - | $-0.24\,10^{-13}$ | $-0.35\,10^{-13}$ | $-0.24\,10^{-11}$ | $-0.35\,10^{-13}$ |
| 0 | 1 | 3 | $-0.44\,10^{-14}$ | - | $-0.44\,10^{-14}$ | $-0.33\,10^{-14}$ | $-0.22\,10^{-12}$ | $-0.33\,10^{-14}$ |
| 1 | 1 | −3 | $0.17\,10^{-14}$ | - | $0.17\,10^{-14}$ | $-0.78\,10^{-15}$ | $-0.54\,10^{-13}$ | $-0.78\,10^{-15}$ |
| 1 | 1 | −2 | $0.13\,10^{-13}$ | - | $0.13\,10^{-13}$ | $-0.17\,10^{-13}$ | $-0.12\,10^{-11}$ | $-0.17\,10^{-13}$ |
| 1 | 1 | −1 | $0.94\,10^{-13}$ | - | $0.94\,10^{-13}$ | $-0.77\,10^{-12}$ | $-0.53\,10^{-10}$ | $-0.77\,10^{-12}$ |
| 1 | 1 | 0 | $0.70\,10^{-12}$ | - | $0.70\,10^{-12}$ | $0.87\,10^{-11}$ | $0.60\,10^{-9}$ | $0.87\,10^{-11}$ |
| 1 | 1 | 1 | $0.94\,10^{-13}$ | - | $0.94\,10^{-13}$ | $-0.77\,10^{-12}$ | $-0.53\,10^{-10}$ | $-0.77\,10^{-12}$ |
| 1 | 1 | 2 | $0.13\,10^{-13}$ | - | $0.13\,10^{-13}$ | $-0.17\,10^{-13}$ | $-0.12\,10^{-11}$ | $-0.17\,10^{-13}$ |
| 1 | 1 | 3 | $0.17\,10^{-14}$ | - | $0.17\,10^{-14}$ | $-0.78\,10^{-15}$ | $-0.54\,10^{-13}$ | $-0.78\,10^{-15}$ |
| 2 | 1 | −3 | $-0.44\,10^{-14}$ | - | $-0.44\,10^{-14}$ | $-0.33\,10^{-14}$ | $-0.22\,10^{-12}$ | $-0.33\,10^{-14}$ |
| 2 | 1 | −2 | $-0.24\,10^{-13}$ | - | $-0.24\,10^{-13}$ | $-0.35\,10^{-13}$ | $-0.24\,10^{-11}$ | $-0.35\,10^{-13}$ |
| 2 | 1 | −1 | $-0.11\,10^{-12}$ | - | $-0.11\,10^{-12}$ | $-0.38\,10^{-12}$ | $-0.26\,10^{-10}$ | $-0.38\,10^{-12}$ |
| 2 | 1 | 0 | $-0.34\,10^{-12}$ | - | $-0.34\,10^{-12}$ | $-0.42\,10^{-11}$ | $-0.29\,10^{-9}$ | $-0.42\,10^{-11}$ |
| 2 | 1 | 1 | $0.15\,10^{-13}$ | - | $0.15\,10^{-13}$ | $0.12\,10^{-11}$ | $0.79\,10^{-10}$ | $0.12\,10^{-11}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.87\,10^{-13}$ | $-0.60\,10^{-11}$ | $-0.87\,10^{-13}$ |
| 2 | 1 | 3 | $-0.52\,10^{-17}$ | - | $-0.52\,10^{-17}$ | $0.91\,10^{-15}$ | $0.63\,10^{-13}$ | $0.91\,10^{-15}$ |
| **m = 0, 1** | | | | 0 ou − | | | 0 | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $-0.52\,10^{-16}$ | - | $0.36\,10^{-15}$ | $0.90\,10^{-14}$ | $-0.19\,10^{-11}$ | $-0.63\,10^{-13}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.86\,10^{-12}$ | $0.18\,10^{-9}$ | $0.60\,10^{-11}$ |
| 0 | 0 | −1 | $0.15\,10^{-12}$ | - | $-0.11\,10^{-11}$ | $0.11\,10^{-10}$ | $-0.24\,10^{-8}$ | $-0.80\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-0.33\,10^{-11}$ | - | $-0.23\,10^{-10}$ | $-0.42\,10^{-10}$ | $0.86\,10^{-8}$ | $0.29\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | 1 | $-0.11\,10^{-11}$ | - | $0.74\,10^{-11}$ | $-0.38\,10^{-11}$ | $0.77\,10^{-9}$ | $0.26\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | 2 | $-0.23\,10^{-12}$ | - | $0.16\,10^{-11}$ | $-0.34\,10^{-12}$ | $0.71\,10^{-10}$ | $0.24\,10^{-11}$ |
| 0 | 0 | 3 | $-0.44\,10^{-13}$ | - | $0.30\,10^{-12}$ | $-0.32\,10^{-13}$ | $0.66\,10^{-11}$ | $0.23\,10^{-12}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $0.55\,10^{-15}$ | - | $-0.39\,10^{-14}$ | $-0.26\,10^{-15}$ | $0.54\,10^{-13}$ | $0.18\,10^{-14}$ |
| 1 | 0 | −2 | $0.42\,10^{-14}$ | - | $-0.29\,10^{-13}$ | $-0.58\,10^{-14}$ | $0.12\,10^{-11}$ | $0.41\,10^{-13}$ |
| 1 | 0 | −1 | $0.31\,10^{-13}$ | - | $-0.22\,10^{-12}$ | $-0.26\,10^{-12}$ | $0.53\,10^{-10}$ | $0.18\,10^{-11}$ |
| 1 | 0 | 0 | $0.23\,10^{-12}$ | - | $-0.16\,10^{-11}$ | $0.29\,10^{-11}$ | $-0.60\,10^{-9}$ | $-0.20\,10^{-10}$ |
| 1 | 0 | 1 | $0.31\,10^{-13}$ | - | $-0.22\,10^{-12}$ | $-0.26\,10^{-12}$ | $0.53\,10^{-10}$ | $0.18\,10^{-11}$ |
| 1 | 0 | 2 | $0.42\,10^{-14}$ | - | $-0.29\,10^{-13}$ | $-0.58\,10^{-14}$ | $0.12\,10^{-11}$ | $0.41\,10^{-13}$ |
| 1 | 0 | 3 | $0.55\,10^{-15}$ | - | $-0.39\,10^{-14}$ | $-0.26\,10^{-15}$ | $0.54\,10^{-13}$ | $0.18\,10^{-14}$ |
| 2 | 0 | −3 | $0.41\,10^{-13}$ | - | $-0.28\,10^{-12}$ | $0.30\,10^{-13}$ | $-0.62\,10^{-11}$ | $-0.21\,10^{-12}$ |
| 2 | 0 | −2 | $0.22\,10^{-12}$ | - | $-0.15\,10^{-11}$ | $0.32\,10^{-12}$ | $-0.66\,10^{-10}$ | $-0.22\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | −1 | $0.98\,10^{-12}$ | - | $-0.69\,10^{-11}$ | $0.35\,10^{-11}$ | $-0.72\,10^{-9}$ | $-0.24\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | 0 | $0.31\,10^{-11}$ | - | $-0.22\,10^{-10}$ | $0.39\,10^{-10}$ | $-0.80\,10^{-8}$ | $-0.27\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 1 | $-0.14\,10^{-12}$ | - | $1.00\,10^{-12}$ | $-0.11\,10^{-10}$ | $0.22\,10^{-8}$ | $0.75\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $0.80\,10^{-12}$ | $-0.17\,10^{-9}$ | $-0.56\,10^{-11}$ |
| 2 | 0 | 3 | $0.48\,10^{-16}$ | - | $-0.34\,10^{-15}$ | $-0.84\,10^{-14}$ | $0.17\,10^{-11}$ | $0.59\,10^{-13}$ |

TAB. C.6 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{\mathbf{d}\omega_{\mathbf{S}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}$, partie en $\frac{\partial}{\partial i_S}$**

| $\alpha_{m,p,q}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $0.34\,10^{-10}$ | 0 | $-0.34\,10^{-7}$ | $0.60\,10^{-8}$ | $-0.23\,10^{-6}$ | $-0.10\,10^{-6}$ | $-0.29\,10^{-7}$ |
| 0 | 1 | $-0.36\,10^{-8}$ | $-0.18\,10^{-7}$ | $-0.68\,10^{-7}$ | 0 | $0.68\,10^{-7}$ | $0.18\,10^{-7}$ | $0.36\,10^{-8}$ |
| 0 | 2 | $0.29\,10^{-7}$ | $0.10\,10^{-6}$ | $0.23\,10^{-6}$ | $-0.60\,10^{-8}$ | $0.34\,10^{-7}$ | 0 | $-0.34\,10^{-10}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $0.22\,10^{-10}$ | 0 | $-0.22\,10^{-7}$ | $0.39\,10^{-8}$ | $-0.15\,10^{-6}$ | $-0.66\,10^{-7}$ | $-0.19\,10^{-7}$ |
| 2 | 1 | $0.65\,10^{-8}$ | $0.33\,10^{-7}$ | $0.12\,10^{-6}$ | 0 | $-0.12\,10^{-6}$ | $-0.33\,10^{-7}$ | $-0.65\,10^{-8}$ |
| 2 | 2 | $0.16\,10^{-7}$ | $0.58\,10^{-7}$ | $0.13\,10^{-6}$ | $-0.34\,10^{-8}$ | $0.19\,10^{-7}$ | 0 | $-0.19\,10^{-10}$ |

| | | | $\beta_{m,p,p',q,q'}$ | | | $\gamma_{m,p,p',q,q'}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $0.71\,10^{-13}$ | - | $0.71\,10^{-13}$ | $-0.12\,10^{-10}$ | $-0.85\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-10}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | $0.79\,10^{-9}$ | $0.54\,10^{-7}$ | $0.79\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | −1 | $-0.70\,10^{-10}$ | - | $-0.70\,10^{-10}$ | $-0.52\,10^{-8}$ | $-0.36\,10^{-6}$ | $-0.52\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | 0 | $0.12\,10^{-10}$ | - | $0.12\,10^{-10}$ | $0.15\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-7}$ | $0.15\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | 1 | $-0.47\,10^{-9}$ | - | $-0.47\,10^{-9}$ | $-0.17\,10^{-8}$ | $-0.12\,10^{-6}$ | $-0.17\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | 2 | $-0.21\,10^{-9}$ | - | $-0.21\,10^{-9}$ | $-0.31\,10^{-9}$ | $-0.21\,10^{-7}$ | $-0.31\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | 3 | $-0.59\,10^{-10}$ | - | $-0.59\,10^{-10}$ | $-0.44\,10^{-10}$ | $-0.30\,10^{-8}$ | $-0.44\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | −3 | $-0.74\,10^{-11}$ | - | $-0.74\,10^{-11}$ | $0.35\,10^{-11}$ | $0.24\,10^{-9}$ | $0.35\,10^{-11}$ |
| 1 | 1 | −2 | $-0.37\,10^{-10}$ | - | $-0.37\,10^{-10}$ | $0.52\,10^{-10}$ | $0.36\,10^{-8}$ | $0.52\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | −1 | $-0.14\,10^{-9}$ | - | $-0.14\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-8}$ | $0.79\,10^{-7}$ | $0.12\,10^{-8}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | $0.14\,10^{-9}$ | - | $0.14\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-8}$ | $-0.79\,10^{-7}$ | $-0.12\,10^{-8}$ |
| 1 | 1 | 2 | $0.37\,10^{-10}$ | - | $0.37\,10^{-10}$ | $-0.52\,10^{-10}$ | $-0.36\,10^{-8}$ | $-0.52\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | 3 | $0.74\,10^{-11}$ | - | $0.74\,10^{-11}$ | $-0.35\,10^{-11}$ | $-0.24\,10^{-9}$ | $-0.35\,10^{-11}$ |
| 2 | 1 | −3 | $0.59\,10^{-10}$ | - | $0.59\,10^{-10}$ | $0.44\,10^{-10}$ | $0.30\,10^{-8}$ | $0.44\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | −2 | $0.21\,10^{-9}$ | - | $0.21\,10^{-9}$ | $0.31\,10^{-9}$ | $0.21\,10^{-7}$ | $0.31\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | −1 | $0.47\,10^{-9}$ | - | $0.47\,10^{-9}$ | $0.17\,10^{-8}$ | $0.12\,10^{-6}$ | $0.17\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | 0 | $-0.12\,10^{-10}$ | - | $-0.12\,10^{-10}$ | $-0.15\,10^{-9}$ | $-0.11\,10^{-7}$ | $-0.15\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | 1 | $0.70\,10^{-10}$ | - | $0.70\,10^{-10}$ | $0.52\,10^{-8}$ | $0.36\,10^{-6}$ | $0.52\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.79\,10^{-9}$ | $-0.54\,10^{-7}$ | $-0.79\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | 3 | $-0.71\,10^{-13}$ | - | $-0.71\,10^{-13}$ | $0.12\,10^{-10}$ | $0.85\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-10}$ |
| **m = 1** | | | | 0 ou − | | | 0 | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $-0.25\,10^{-13}$ | - | $0.18\,10^{-12}$ | $0.44\,10^{-11}$ | $-0.91\,10^{-9}$ | $-0.31\,10^{-10}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.28\,10^{-9}$ | $0.58\,10^{-7}$ | $0.20\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | −1 | $0.25\,10^{-10}$ | - | $-0.18\,10^{-9}$ | $0.19\,10^{-8}$ | $-0.39\,10^{-6}$ | $-0.13\,10^{-7}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-0.44\,10^{-11}$ | - | $0.31\,10^{-10}$ | $-0.55\,10^{-10}$ | $0.11\,10^{-7}$ | $0.39\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | 1 | $0.17\,10^{-9}$ | - | $-0.12\,10^{-8}$ | $0.61\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-6}$ | $-0.42\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 2 | $0.76\,10^{-10}$ | - | $-0.53\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-9}$ | $-0.23\,10^{-7}$ | $-0.78\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | 3 | $0.21\,10^{-10}$ | - | $-0.15\,10^{-9}$ | $0.16\,10^{-10}$ | $-0.32\,10^{-8}$ | $-0.11\,10^{-9}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $-0.75\,10^{-11}$ | - | $0.52\,10^{-10}$ | $0.35\,10^{-11}$ | $-0.73\,10^{-9}$ | $-0.25\,10^{-10}$ |
| 1 | 0 | −2 | $-0.38\,10^{-10}$ | - | $0.26\,10^{-9}$ | $0.52\,10^{-10}$ | $-0.11\,10^{-7}$ | $-0.37\,10^{-9}$ |
| 1 | 0 | −1 | $-0.14\,10^{-9}$ | - | $0.98\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-8}$ | $-0.24\,10^{-6}$ | $-0.81\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $0.14\,10^{-9}$ | - | $-0.98\,10^{-9}$ | $-0.12\,10^{-8}$ | $0.24\,10^{-6}$ | $0.81\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | 2 | $0.38\,10^{-10}$ | - | $-0.26\,10^{-9}$ | $-0.52\,10^{-10}$ | $0.11\,10^{-7}$ | $0.37\,10^{-9}$ |
| 1 | 0 | 3 | $0.75\,10^{-11}$ | - | $-0.52\,10^{-10}$ | $-0.35\,10^{-11}$ | $0.73\,10^{-9}$ | $0.25\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | −3 | $-0.18\,10^{-10}$ | - | $0.13\,10^{-9}$ | $-0.14\,10^{-10}$ | $0.28\,10^{-8}$ | $0.96\,10^{-10}$ |
| 2 | 0 | −2 | $-0.66\,10^{-10}$ | - | $0.46\,10^{-9}$ | $-0.97\,10^{-10}$ | $0.20\,10^{-7}$ | $0.68\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | −1 | $-0.15\,10^{-9}$ | - | $0.10\,10^{-8}$ | $-0.53\,10^{-9}$ | $0.11\,10^{-6}$ | $0.37\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 0 | $0.38\,10^{-11}$ | - | $-0.27\,10^{-10}$ | $0.48\,10^{-10}$ | $-0.99\,10^{-8}$ | $-0.34\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | 1 | $-0.22\,10^{-10}$ | - | $0.15\,10^{-9}$ | $-0.16\,10^{-8}$ | $0.34\,10^{-6}$ | $0.11\,10^{-7}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $0.24\,10^{-9}$ | $-0.50\,10^{-7}$ | $-0.17\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 3 | $0.22\,10^{-13}$ | - | $-0.15\,10^{-12}$ | $-0.38\,10^{-11}$ | $0.79\,10^{-9}$ | $0.27\,10^{-10}$ |

TAB. C.7 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{\mathbf{de_S(t)}}{\mathbf{dt}}$**

| $\alpha_{m,p,q}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m** | **p** | **q = −3** | **q = −2** | **q = −1** | **q = 0** | **q = 1** | **q = 2** | **q = 3** |
| 0 | 0 | $-0.37\,10^{-9}$ | 0 | $0.35\,10^{-6}$ | $0.73\,10^{-6}$ | $-0.23\,10^{-5}$ | $-0.11\,10^{-5}$ | $-0.31\,10^{-6}$ |
| 0 | 1 | $0.39\,10^{-7}$ | $0.20\,10^{-6}$ | $0.73\,10^{-6}$ | $-0.14\,10^{-6}$ | $0.73\,10^{-6}$ | $0.20\,10^{-6}$ | $0.39\,10^{-7}$ |
| 0 | 2 | $-0.31\,10^{-6}$ | $-0.11\,10^{-5}$ | $-0.23\,10^{-5}$ | $0.73\,10^{-6}$ | $0.35\,10^{-6}$ | 0 | $-0.37\,10^{-9}$ |
| 1 | 0, 1, 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $-0.24\,10^{-9}$ | 0 | $0.23\,10^{-6}$ | $0.47\,10^{-6}$ | $-0.15\,10^{-5}$ | $-0.72\,10^{-6}$ | $-0.20\,10^{-6}$ |
| 2 | 1 | $-0.71\,10^{-7}$ | $-0.36\,10^{-6}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $0.25\,10^{-6}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $-0.36\,10^{-6}$ | $-0.71\,10^{-7}$ |
| 2 | 2 | $-0.18\,10^{-6}$ | $-0.63\,10^{-6}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $0.41\,10^{-6}$ | $0.20\,10^{-6}$ | 0 | $-0.21\,10^{-9}$ |

| | | | $\beta_{m,p,p',q,q'}$ | | | $\gamma_{m,p,p',q,q'}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **m = 0** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0, 1, 2 | 0, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −3 | $-0.77\,10^{-12}$ | - | $-0.77\,10^{-12}$ | $0.14\,10^{-9}$ | $0.95\,10^{-8}$ | $0.14\,10^{-9}$ |
| 0 | 1 | −2 | 0 | - | 0 | $-0.88\,10^{-8}$ | $-0.61\,10^{-6}$ | $-0.88\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | −1 | $0.73\,10^{-9}$ | - | $0.73\,10^{-9}$ | $0.59\,10^{-7}$ | $0.41\,10^{-5}$ | $0.59\,10^{-7}$ |
| 0 | 1 | 0 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $0.15\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-8}$ | $0.13\,10^{-6}$ | $0.18\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | 1 | $-0.49\,10^{-8}$ | - | $-0.49\,10^{-8}$ | $-0.19\,10^{-7}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $-0.19\,10^{-7}$ |
| 0 | 1 | 2 | $-0.23\,10^{-8}$ | - | $-0.23\,10^{-8}$ | $-0.35\,10^{-8}$ | $-0.24\,10^{-6}$ | $-0.35\,10^{-8}$ |
| 0 | 1 | 3 | $-0.65\,10^{-9}$ | - | $-0.65\,10^{-9}$ | $-0.50\,10^{-9}$ | $-0.34\,10^{-7}$ | $-0.50\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | −3 | $0.81\,10^{-10}$ | - | $0.81\,10^{-10}$ | $-0.40\,10^{-10}$ | $-0.27\,10^{-8}$ | $-0.40\,10^{-10}$ |
| 1 | 1 | −2 | $0.41\,10^{-9}$ | - | $0.41\,10^{-9}$ | $-0.59\,10^{-9}$ | $-0.40\,10^{-7}$ | $-0.59\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | −1 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $0.15\,10^{-8}$ | $-0.13\,10^{-7}$ | $-0.91\,10^{-6}$ | $-0.13\,10^{-7}$ |
| 1 | 1 | 0 | $-0.28\,10^{-9}$ | - | $-0.28\,10^{-9}$ | $0.82\,10^{-8}$ | $0.56\,10^{-6}$ | $0.82\,10^{-8}$ |
| 1 | 1 | 1 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $0.15\,10^{-8}$ | $-0.13\,10^{-7}$ | $-0.91\,10^{-6}$ | $-0.13\,10^{-7}$ |
| 1 | 1 | 2 | $0.41\,10^{-9}$ | - | $0.41\,10^{-9}$ | $-0.59\,10^{-9}$ | $-0.40\,10^{-7}$ | $-0.59\,10^{-9}$ |
| 1 | 1 | 3 | $0.81\,10^{-10}$ | - | $0.81\,10^{-10}$ | $-0.40\,10^{-10}$ | $-0.27\,10^{-8}$ | $-0.40\,10^{-10}$ |
| 2 | 1 | −3 | $-0.65\,10^{-9}$ | - | $-0.65\,10^{-9}$ | $-0.50\,10^{-9}$ | $-0.34\,10^{-7}$ | $-0.50\,10^{-9}$ |
| 2 | 1 | −2 | $-0.23\,10^{-8}$ | - | $-0.23\,10^{-8}$ | $-0.35\,10^{-8}$ | $-0.24\,10^{-6}$ | $-0.35\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | −1 | $-0.49\,10^{-8}$ | - | $-0.49\,10^{-8}$ | $-0.19\,10^{-7}$ | $-0.13\,10^{-5}$ | $-0.19\,10^{-7}$ |
| 2 | 1 | 0 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $0.15\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-8}$ | $0.13\,10^{-6}$ | $0.18\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | 1 | $0.73\,10^{-9}$ | - | $0.73\,10^{-9}$ | $0.59\,10^{-7}$ | $0.41\,10^{-5}$ | $0.59\,10^{-7}$ |
| 2 | 1 | 2 | 0 | - | 0 | $-0.88\,10^{-8}$ | $-0.61\,10^{-6}$ | $-0.88\,10^{-8}$ |
| 2 | 1 | 3 | $-0.77\,10^{-12}$ | - | $-0.77\,10^{-12}$ | $0.14\,10^{-9}$ | $0.95\,10^{-8}$ | $0.14\,10^{-9}$ |
| **m = 1** | | | | 0 ou − | | | 0 | |
| **m = 2** | | | | | | | | |
| **p** | **p′** | **q** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** | **q′ = −1** | **q′ = 0** | **q′ = 1** |
| 0 | 0 | −3 | $0.28\,10^{-12}$ | - | $-0.19\,10^{-11}$ | $-0.50\,10^{-10}$ | $0.10\,10^{-7}$ | $0.35\,10^{-9}$ |
| 0 | 0 | −2 | 0 | - | 0 | $0.32\,10^{-8}$ | $-0.65\,10^{-6}$ | $-0.22\,10^{-7}$ |
| 0 | 0 | −1 | $-0.26\,10^{-9}$ | - | $0.18\,10^{-8}$ | $-0.21\,10^{-7}$ | $0.44\,10^{-5}$ | $0.15\,10^{-6}$ |
| 0 | 0 | 0 | $-0.54\,10^{-9}$ | - | $0.38\,10^{-8}$ | $-0.65\,10^{-9}$ | $0.13\,10^{-6}$ | $0.46\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 1 | $0.17\,10^{-8}$ | - | $-0.12\,10^{-7}$ | $0.67\,10^{-8}$ | $-0.14\,10^{-5}$ | $-0.47\,10^{-7}$ |
| 0 | 0 | 2 | $0.82\,10^{-9}$ | - | $-0.58\,10^{-8}$ | $0.13\,10^{-8}$ | $-0.26\,10^{-6}$ | $-0.89\,10^{-8}$ |
| 0 | 0 | 3 | $0.23\,10^{-9}$ | - | $-0.16\,10^{-8}$ | $0.18\,10^{-9}$ | $-0.36\,10^{-7}$ | $-0.12\,10^{-8}$ |
| 0, 1, 2 | 1, 2 | −3 à 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −3 | $0.82\,10^{-10}$ | - | $-0.57\,10^{-9}$ | $-0.40\,10^{-10}$ | $0.81\,10^{-8}$ | $0.28\,10^{-9}$ |
| 1 | 0 | −2 | $0.41\,10^{-9}$ | - | $-0.29\,10^{-8}$ | $-0.59\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-6}$ | $0.41\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | −1 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $-0.11\,10^{-7}$ | $-0.13\,10^{-7}$ | $0.27\,10^{-5}$ | $0.93\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 0 | $-0.28\,10^{-9}$ | - | $0.20\,10^{-8}$ | $0.82\,10^{-8}$ | $-0.17\,10^{-5}$ | $-0.58\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 1 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $-0.11\,10^{-7}$ | $-0.13\,10^{-7}$ | $0.27\,10^{-5}$ | $0.93\,10^{-7}$ |
| 1 | 0 | 2 | $0.41\,10^{-9}$ | - | $-0.21\,10^{-8}$ | $-0.59\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-6}$ | $0.41\,10^{-8}$ |
| 1 | 0 | 3 | $0.82\,10^{-10}$ | - | $-0.57\,10^{-9}$ | $-0.40\,10^{-10}$ | $0.81\,10^{-8}$ | $0.28\,10^{-9}$ |
| 2 | 0 | −3 | $0.20\,10^{-9}$ | - | $-0.14\,10^{-8}$ | $0.15\,10^{-9}$ | $-0.32\,10^{-7}$ | $-0.11\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | −2 | $0.72\,10^{-9}$ | - | $-0.50\,10^{-8}$ | $0.11\,10^{-8}$ | $-0.23\,10^{-6}$ | $-0.77\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | −1 | $0.15\,10^{-8}$ | - | $-0.11\,10^{-7}$ | $0.59\,10^{-8}$ | $-0.12\,10^{-5}$ | $-0.41\,10^{-7}$ |
| 2 | 0 | 0 | $-0.47\,10^{-9}$ | - | $0.33\,10^{-8}$ | $-0.57\,10^{-9}$ | $0.12\,10^{-6}$ | $0.40\,10^{-8}$ |
| 2 | 0 | 1 | $-0.23\,10^{-9}$ | - | $0.16\,10^{-8}$ | $-0.18\,10^{-7}$ | $0.38\,10^{-5}$ | $0.13\,10^{-6}$ |
| 2 | 0 | 2 | 0 | - | 0 | $0.28\,10^{-8}$ | $-0.57\,10^{-6}$ | $-0.19\,10^{-7}$ |
| 2 | 0 | 3 | $0.24\,10^{-12}$ | - | $-0.17\,10^{-11}$ | $-0.43\,10^{-10}$ | $0.89\,10^{-8}$ | $0.30\,10^{-9}$ |

TAB. C.8 – **Facteurs de perturbations pour l'équation $\frac{dM_S(t)}{dt}$**

## C.2 Constantes

La solution approchée contient un certain nombre de constantes, reprises ci-après :

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{3\bar{C}_{22}G\mathcal{M}R^2\sin i_{So}}{n_{So}a_{So}^5(1-e_{So}^2)^2},\\
C_i &= \frac{G\mathcal{M}_J\sin i_{So}}{4a_J^3 n_{So}\sqrt{1-e_{So}^2}}\left(1+\frac{3e_{So}^2}{2}\right),\\
B_i &= \Omega_{So}-\phi(t_o),\\
D_i &= \Omega_{So}-\Omega_J-\omega_J-M_J(t_o),\\
C_1 &= (A_i\cos[2B_i]+C_i\cos[2D_i])/(2n),\\
C_2 &= (A_i\sin[2B_i]+C_i\sin[2D_i])/(2n),\\
A_o &= cos(i_{So}-C_1),\\
B_o &= C_1\sin i_{So},\\
B'_o &= C_2\sin i_{So},\\
C_o &= 3C_i/\sin i_{So},\\
E_o &= \frac{3C_{20}R^2G\mathcal{M}}{2a_{So}^5 n_{So}\left(1-e_{So}^2\right)^2}-\frac{3G\mathcal{M}_J}{4a_J^3 n_{So}\left(1-e_J^2\right)^{3/2}\sqrt{1-e_{So}^2}}(1+\frac{3e_{So}^2}{2}),\\
F_o &= A_i/\sin i_{So},\\
\dot{\Omega}_{sec}^{cor} &= \frac{1}{2}(2A_oE_o-B_oF_o\cos(2B_i)-B_oC_oCos[2D_o]-\\
&\quad B'_oF_o\sin(2B_i)-B'_oC_o\sin(2D_o)),\\
\dot{\Omega}_{sec} &= E_o\cos i_{So},\\
C_1^{\Omega} &= 4A_oF_o\sin 2Bi+4A_oC_o\sin 2Di-4B'_oE_o,\\
C_2^{\Omega} &= 4A_oF_o\cos 2Bi+4A_oC_o\cos 2Di-4B_oE_o,\\
C_3^{\Omega} &= -B'_oF_o\cos 2Bi-B'_oC_o\cos 2Di-B_oF_o\sin 2Bi-B_oC_o\sin 2Di,\\
C_4^{\Omega} &= B'_oF_o\sin 2Bi+B'_oC_o\sin 2Di-B_oF_o\cos 2Bi-B_oC_o\cos 2Di,\\
\dot{\omega}_{sec} &= \frac{3\,C_{20}G\mathcal{M}\,R^2}{4\,a_{So}^5 n_{So}\left(1-e_{So}^2\right)^2}-\frac{3G\mathcal{M}_J}{8a_J^3 n_{So}\left(1-e_J^2\right)^{3/2}}\sqrt{1-e_{So}^2},\\
\gamma &= \frac{15\,G\mathcal{M}_J\sqrt{1-e_{So}^2}}{8n_{So}a_J^3\left(1-e_J^2\right)^{3/2}},\\
\dot{M}_{sec} &= \frac{3C_{20}R^2\,G\mathcal{M}}{4a_{So}^5 n_{So}\left(1-e_{So}^2\right)^{3/2}}\\
&\quad +\frac{G\mathcal{M}_J}{2n_{So}a_J^3\left(1-e_J^2\right)^{3/2}}\left(1+\frac{3}{2}e_{So}^2\right)+\frac{3\,G\mathcal{M}_J}{8n_{So}a_J^3\left(1-e_J^2\right)^{3/2}}\left(1-e_{So}^2\right).
\end{aligned}
$$

## C.3 Valeurs moyennes du demi-grand axe et du moyen mouvement

Nous avons besoin d'une expression analytique pour la valeur moyenne du demi-grand axe, en vue de modéliser correctement le comportement séculaire de l'anomalie moyenne. Cette expression sera en fait une approximation de la solution approximée (4.57). Dans le membre de droite de l'équation de Lagrange pour $a_S$, on considère que $\dot{M}_S = n_{So}$ et on néglige les variations des autres variables angulaires. On ne considère alors que les facteurs de perturbations $\alpha, \beta$ et $\gamma$ tels que $2-2p+q \neq 0$. La solution devient

$$
\begin{aligned}
a_S(t) = a_{So} &- \sum_{\underbrace{m,p,q}_{2-2p+q\neq 0}} \alpha_{mpq} \frac{(\cos\psi_{2mpq}(t) - \cos\psi_{2mpq}(t_o))}{(2-2p+q)n_{So}} \\
&- \sum_{\underbrace{m,p,p',q,q'}_{2-2p'+q'-m\neq 0 \, et \, 2-2p+q\neq 0}} \beta_{mpp'qq'} \frac{(\cos\psi'_{2mpp'qq'}(t) - \cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_o))}{(2-2p+q)n_{So}} \\
&- \sum_{\underbrace{m,p,p',q,q'}_{2-2p+q\neq 0}} \gamma_{mpp'qq'} \frac{(\cos\psi'_{2mpp'qq'} - \cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_o))}{(2-2p+q)n_{So}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{2mpq}(t) &= (2-2p+q)M_S + (2-2p)\omega_{So} + m(\Omega_{So} - \phi(t_o)), \\
\psi'_{2mpp'qq'}(t) &= (2-2p+q)M_S - (2-2p'+q')M_J(t_o) + (2-2p)\omega_{So} \\
&\quad -(2-2p')\omega_J + m(\Omega_{So} - \Omega_J), \\
\psi_{2mpq}(t_o) &= (2-2p+q)M_S(t_o) + (2-2p)\omega_{So} + m(\Omega_{So} - \phi(t_o)), \\
\psi'_{2mpp'qq'}(t_o) &= (2-2p+q)M_S(t_o) - (2-2p'+q')M_J(t_o) + (2-2p)\omega_{So} \\
&\quad -(2-2p')\omega_J + m(\Omega_{So} - \Omega_J),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{0pq} &= -C_{20}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4} F_{20p}(i_{So}) G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q), \\
\alpha_{2pq} &= -\bar{C}_{22}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4} F_{22p}(i_{So}) G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q), \\
\alpha_{1pq} &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{mpp'qq'} &= -\frac{2G\mathcal{M}_J R^5}{n_{So}a_{So}^4 a_J^3} k_2(2-\delta_{m0})\frac{(2-m)!}{(2+m)!}F_{2mp}(i_{So})F_{2mp'}(i_J=0) \\
&\quad G_{2pq}(e_{So})G_{2p'q'}(e_J)(2-2p+q), \\
\gamma_{mpp'qq'} &= -\frac{2G\mathcal{M}_J a_{So}}{n_{So}a_J^3} k_2(2-\delta_{m0})\frac{(2-m)!}{(2+m)!}F_{2mp}(i_{So})F_{2mp'}(i_J=0) \\
&\quad H_{2pq}(e_{So})G_{2p'q'}(e_J)(2-2p+q).
\end{aligned}
$$

Les battements entre les fréquences proches les unes des autres sont donc négligés. La solution ainsi obtenue n'est en aucun cas une approximation correcte de la solution approximée, mais leur valeur moyenne sont similaires. La moyenne des fonctions $\cos\psi_{mpq}$ et $\cos\psi'_{mpp'qq'}$ est nulle, de sorte que :

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_S &= a_{So} + \underbrace{\sum_{m,p,q}}_{2-2p+q\neq 0} \frac{\alpha_{mpq}}{(2-2p+q)n_{So}}\cos\psi_{2mpq}(t_o) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{m,p,p',q,q'}}_{2-2p'+q'-m\neq 0\ et\ 2-2p+q\neq 0} \frac{\beta_{mpp'qq'}}{(2-2p+q)n_{So}}\cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_o) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{m,p,p',q,q'}}_{2-2p+q\neq 0} \frac{\gamma_{mpp'qq'}}{(2-2p+q)n_{So}}\cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_o).
\end{aligned}
$$

Nous désirons une expression relativement simple pour ne pas alourdir le calcul des dérivées partielles de l'observable par rapport aux paramètres géophysiques. Nous allons donc nous restreindre à l'ordre 2 en $e_S$ et à l'ordre 0 en $e_J$ et considérer $a_S = a_{So}$, $e_S = e_{So}$ et $i_S = \pi/2$ dans le membre de droite, car nous travaillons avec des orbites quasi-polaires. On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_S &= a_{So} + \frac{3R^2G\mathcal{M}}{4a_{So}^4 n_{So}^2}\left(C_{20}(-a_1+a_2) - 2\bar{C}_{22}(3a_1+a_2)\cos[2B_i]\right) \\
&\quad + \frac{G\mathcal{M}_J}{8a_J^3 a_{So}^4 n_{So}^2}((a_3+3a_4)+3(-a_3+a_4)\cos[2Di]),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2e_{So}co_{10} + 3e_{So}^2 co_{20}, \\
a_2 &= \left(2-5e_{So}^2\right)co_{22} + e_{So}(-co_{12}+7co_{32}) + 17e_{So}^2 co_{22}, \\
a_3 &= -4e_{So}a_{So}^5 co_{10} - e_{So}^2 a_{So}^5 co_{20}, \\
a_4 &= \left(-2+5e_{So}^2\right)a_{So}^5 co_{22} + 3e_{So}\left(2a_{So}^5 co_{12} - a_{So}^5 co_{32}\right) - 3e_{So}^2\left(2a_{So}^5\right)co_{42}, \\
co_{ij} &= \cos[iM_S(t_o) + j\omega_{So}], \\
si_{ij} &= \sin[iM_S(t_o) + j\omega_{So}].
\end{aligned}
$$

Il n'y a pas de termes en $k_2$ dans l'expression de $\bar{a}_S$. En effet, nous nous sommes restreints à $q' = 0$. La condition $(2 - 2p' + q' - m \neq 0)$ devient alors $(2 - 2p' - m \neq 0)$, ce qui laisse les possibilités $(m, p') = (0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$. Pour ces combinaisons d'indices, étant donné que l'inclinaison $i_J$ de Jupiter par rapport au plan de l'orbite d'un de ses satellites naturels est par définition nulle, les fonctions d'inclinaison $F_{2mp'}(i_J = 0)$ sont nulles, ainsi que les facteurs $\beta_{mpp'qq'}$ qui en dépendent.

Ensuite, $\bar{n}_S$ est obtenu grâce à la troisième loi de Kepler.

### C.3.1 Effet des paramètres liés à la rotation

La rotation ayant un effet sur la solution additionnelle, elle aura également un effet sur la valeur moyenne du demi-grand axe. Il faut redéfinir les facteurs de perturbation $\alpha_{mpq}$ :

$$
\begin{aligned}
\alpha_{0pq} &= -C_{20}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{20p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{2pq} &= -\bar{C}_{22}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{22p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{pq}^{FC_{22}} &= 2FC_{22}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{22p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{pq}^{FS_{22}} &= 2FS_{22}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{22p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{pq}^{FC_{21}^{sin}} &= FC_{21}^{sin}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{21p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{pq}^{FC_{21}^{cos}} &= -FC_{21}^{cos}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{21p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{pq}^{FS_{21}^{sin}} &= FS_{21}^{sin}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{21p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q),\\
\alpha_{pq}^{FS_{21}^{cos}} &= FS_{21}^{cos}\frac{2G\mathcal{M}R^2}{n_{So}a_{So}^4}F_{21p}(i_{So})G_{2pq}(e_{So})(2-2p+q).
\end{aligned}
$$

La valeur moyenne devient :

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_S \;=\; a_{So} + \underbrace{\sum_{p,q}}_{2-2p+q\neq 0} \Bigg[ & \frac{\alpha_{0pq}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi_{20pq}(t_o) \\
& + \frac{\alpha_{2pq}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi_{22pq}(t_o) \\
& + \frac{\alpha_{pq}^{FC_{22}}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi_{22pq}(t_o)\sin^2 M_J(t_o) \\
& - \frac{\alpha_{pq}^{FS_{22}}}{(2-2p+q)n_{So}} \sin\psi_{22pq}(t_o)\sin M_J(t_o) \\
& - \frac{\alpha_{pq}^{FC_{21}^{sin}}}{(2-2p+q)n_{So}} \sin\psi_{22pq}(t_o)\sin\left(M_J(t_o)+\omega\right) \\
& - \frac{\alpha_{pq}^{FC_{21}^{cos}}}{(2-2p+q)n_{So}} \sin\psi_{22pq}(t_o)\cos\left(M_J(t_o)+\omega\right) \\
& + \frac{\alpha_{pq}^{FS_{21}^{sin}}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi_{22pq}(t_o)\sin\left(M_J(t_o)+\omega\right) \\
& + \frac{\alpha_{pq}^{FS_{21}^{cos}}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi_{22pq}(t_o)\cos\left(M_J(t_o)+\omega\right) \Bigg] \\
+ & \underbrace{\sum_{m,p,p',q,q'}}_{2-2p'+q'-m\neq 0\; et\; 2-2p+q\neq 0} \frac{\beta_{mpp'qq'}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_o) \\
+ & \underbrace{\sum_{m,p,p',q,q'}}_{2-2p+q\neq 0} \frac{\gamma_{mpp'qq'}}{(2-2p+q)n_{So}} \cos\psi'_{2mpp'qq'}(t_o),
\end{aligned}
$$

ou encore, en suivant le même raisonnement que précédemment :

$$\begin{aligned}
\bar{a}_S &= a_{So} + \frac{3R^2G\mathcal{M}}{4a_{So}^4 n_{So}^2}\left(C_{20}(-a_1+a_2) - 2\bar{C}_{22}(3a_1+a_2)\cos\left[2B_i\right]\right) \\
&+ \frac{3R^2G\mathcal{M}}{a_{So}^4 n_{So}^2}(3a_1+a_2) \\
&\quad \times[FC_{22}\cos\left(2Bi\right)\sin^2 M_J(t_o) - FS_{22}\sin\left(2Bi\right)\sin M_J(t_o)] \\
&- \frac{3R^2G\mathcal{M}}{2a_{So}^4 n_{So}^2}a_2'\cos\left(2Bi\right)[FC_{21}^{sin}\sin\left(M_J(t_o)+\omega\right) - FC_{21}^{cos}\cos\left(M_J(t_o)+\omega\right)] \\
&- \frac{3R^2G\mathcal{M}}{2a_{So}^4 n_{So}^2}a_2'\sin\left(2Bi\right)[FS_{21}^{sin}\sin\left(M_J(t_o)+\omega\right) + FS_{21}^{cos}\cos\left(M_J(t_o)+\omega\right)] \\
&+ \frac{G\mathcal{M}_J}{8a_J^3 a_{So}^4 n_{So}^2}((a_3+3a_4) + 3(-a_3+a_4)\cos\left[2Di\right]),
\end{aligned}$$

avec

$$a_2' = \left(2-5e_{So}^2\right)si_{22} + e_{So}(-si_{12}+7si_{32}) + 17e_{So}^2 si_{22}.$$

# Annexe D

# Équation de Kepler

Dans l'expression du vecteur Station-Sonde (équation 5.1), on trouve les anomalies vraie $\nu(t)$ et excentrique $E(t)$ de différents corps. Celles-ci n'ont pas d'expression simple en fonction du temps mais elle peuvent s'exprimer en fonction de l'anomalie moyenne $M(t)$ dont l'expression est simplement

$$M(t) = M(t_0) + nt,$$

avec $n$ le moyen mouvement. L'anomalie moyenne $M(t)$ est reliée à l'anomalie excentrique $E(t)$ par l'équation de Kepler

$$M(t) = E(t) - e \sin E_i(t),$$

avec $e$ l'excentricité de l'orbite. Cette équation peut être résolue en utilisant les fonctions de Bessel de $1^{er}$ ordre

$$E(t) = M(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}J_n(ne)\sin\left(nM(t)\right)\right).$$

La distance entre le corps en orbite et le centre de masse du corps autour duquel il évolue est donnée par :

$$r(t) = a/\left[2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos\left(nM(t)\right)\right].$$

On peut s'arrêter à l'ordre 1 si on considère que les excentricités des différents corps sont petites. On trouve alors que $r = a(1 - e\cos M)$. L'anomalie excentrique est aussi reliée à l'anomalie vraie via

$$\tan\frac{\nu(t)}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E(t)}{2}.$$

Il sera donc possible d'écrire $\nu(t)$ en fonction de $E(t)$ et donc de l'anomalie moyenne $M(t)$. On trouve, à l'ordre 1, que $\nu = M + 2e\sin M$.

# Annexe E

# Inversion par la méthode des moindres carrés

L'inversion par les moindres carrés est une méthode souvent utilisée pour extraire de l'information à partir de mesures et d'un modèle supposé rendre compte de celles-ci. Nous allons présenter ici la partie théorique qui est nécessaire à notre travail, plus de détails pouvant être trouvés dans Coulot (2002) par exemple.

Soit $N$ observations $(y_i)_{i=1,\ldots,N}$ en des temps $(t_i)_{i=1,\ldots,N}$ d'une quantité mesurable (ou observable). Supposons que l'on dispose d'un modèle analytique $f$ pour cette observable. Ce modèle peut comporter des approximations par rapport à la situation réelle et donc ne pas être parfaitement réaliste. La fonction $f$ dépend du temps $t$ mais aussi des $M$ paramètres $p_j$ qui interviennent dans la modélisation et que l'on peut regrouper dans le vecteur ligne suivant

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_M). \tag{E.1}$$

On écrira donc le modèle sous la forme :

$$f(t, \mathbf{p}). \tag{E.2}$$

Le but de la méthode d'inversion présentée dans cette annexe est d'expliquer comment ajuster la valeur de $\mathbf{p}$ de façon à minimiser la différence entre les observations $y_i$ et les valeurs prédites par le modèle pour les temps d'observations $f(t_i, \mathbf{p})$, au sens des moindres carrés. Cette différence s'écrit :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - f(t_i, \mathbf{p})\right)^2. \tag{E.3}$$

## Cas linéaire

Si le modèle $f$ est linéaire par rapport aux paramètres $p_j$, on peut écrire

$$f(t, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{M} p_j \frac{\partial f(t, \mathbf{p})}{\partial p_j}, \tag{E.4}$$

et l'équation (E.3) devient

$$\chi^2 = (\mathbf{AP} - \mathbf{Y})^T \cdot (\mathbf{AP} - \mathbf{Y}), \tag{E.5}$$

avec

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_M \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(t_1, \mathbf{p})}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial f(t_1, \mathbf{p})}{\partial p_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(t_N, \mathbf{p})}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial f(t_N, \mathbf{p})}{\partial p_M} \end{pmatrix}.$$

Pour minimiser $\chi^2$, il faut que

$$\mathbf{AP} \simeq \mathbf{Y}. \tag{E.6}$$

Étant donné que la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement carrée ($N \neq M$), elle n'est pas inversible. Il faut donc multiplier les deux membres de l'équation précédente par $\mathbf{A}^T$ et ensuite inverser le produit $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ qui est une matrice carrée, pour obtenir la solution

$$(\mathbf{p}^{sol})^T = \mathbf{P} \simeq (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}. \tag{E.7}$$

On appellera $\mathbf{Y}$ le *vecteur des observations*, $\mathbf{P}$ le *vecteur des paramètres* et $\mathbf{A}$ la *matrice des dérivées partielles*. Le produit $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est appelé *matrice normale*. La différence entre les sorties du modèle obtenues avec la solution, $\mathbf{AP}$, et le vecteur des observations, $\mathbf{Y}$, est le *vecteur des résidus* $\mathbf{R} = \mathbf{AP} - \mathbf{Y}$. Les résidus reflètent l'éventuel manque de réalisme du modèle analytique pour l'observable et/ou le manque de précision des mesures (bruit).

## Cas non linéaire

Si le modèle $f$ n'est pas linéaire par rapport aux paramètres, l'équation (E.4) n'est plus valide et il n'est pas possible d'isoler le vecteur des paramètres. Pour s'en sortir, il faut linéariser le modèle autour d'une valeur raisonnable des paramètres, que l'on va appeler *solution a priori* et noter $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, \ldots, p_M^0)$ :

$$f(t_i, \mathbf{p}) \simeq f(t_i, \mathbf{p}^0) + \sum_{j=1}^{M} \left[ \frac{\partial f(t_i, \mathbf{p})}{\partial p_j} \right]_{\mathbf{p}^0} (p_j - {p_j}^0). \tag{E.8}$$

L'équation (E.5) est encore valide à condition de redéfinir le vecteur des observations, la matrice des dérivées partielles et le vecteur des paramètres :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 - f(t_1, \mathbf{p}^0) \\ \vdots \\ y_N - f(t_N, \mathbf{p}^0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 - p_1^0 \\ \vdots \\ p_M - p_M^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial f(t_1,\mathbf{p})}{\partial p_1}\right]_{\mathbf{p}^0} & \cdots & \left[\frac{\partial f(t_1,\mathbf{p})}{\partial p_M}\right]_{\mathbf{p}^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\frac{\partial f(t_N,\mathbf{p})}{\partial p_1}\right]_{\mathbf{p}^0} & \cdots & \left[\frac{\partial f(t_N,\mathbf{p})}{\partial p_M}\right]_{\mathbf{p}^0} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des observations peut également être interprété comme étant le vecteur des résidus a priori. La solution est alors donnée par

$$(\mathbf{p}^{sol})^T = \mathbf{P} + (\mathbf{p}^0)^T \simeq (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y} + (\mathbf{p}^0)^T \tag{E.9}$$

et les résidus a posteriori $\mathbf{R} = \mathbf{AP} - \mathbf{Y}$ sont dus à la linéarisation du modèle et aux choix de la solution a priori, en plus de l'éventuel manque de réalisme du modèle et/ou au bruit sur les mesures. L'influence du choix de $\mathbf{p}^0$ sera d'autant plus importante que le modèle manque de linéarité par rapport à ses paramètres.

La solution $\mathbf{p}^{sol}$ peut à son tour être utilisée comme solution approchée de l'inversion. Si le modèle $f$ ne manque pas trop de linéarité, c'est-à-dire si les dérivées partielles du modèle par rapport aux paramètres ne dépendent pas trop de la valeur des paramètres, il est possible d'itérer l'inversion jusqu'à ce que les résidus atteignent une précision de l'ordre de grandeur du bruit sur les mesures et que la solution converge vers une valeur stable.

De plus, si les résidus a posteriori de la première itération sont significativement plus petits que les résidus a priori, il n'est pas forcément nécessaire de recalculer la matrice des dérivées partielles à chaque itération. En effet cela signifie que la solution a priori est peut-être relativement proche des valeurs vraies des paramètres. Lorsque la solution converge après quelques itérations, on peut réaliser une itération supplémentaire en calculant une seconde fois la matrice des dérivées partielles. Cette dernière peut alors servir au calcul des erreurs a posteriori et des corrélations (voir section suivante).

## Bruit sur les mesures, erreur a posteriori et corrélations

Les observations étant affectées par les erreurs de mesures, elles sont données avec une marge d'erreur, l'écart-type $\sigma_i$, sur les valeurs de $y_i$. Pour donner

plus d'importance aux observations qui ont la meilleure précision, c'est-à-dire pondérer les mesures, on écrit la quantité à minimiser de la façon suivante

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{y_i - f(t_i, \mathbf{p})}{\sigma_i} \right)^2, \tag{E.10}$$

ou encore

$$\chi^2 = (\mathbf{AP} - \mathbf{Y})^T \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{AP} - \mathbf{Y}), \tag{E.11}$$

avec $\mathbf{S}$ la *matrice de poids*,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & \frac{1}{\sigma_{N-1}^2} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{\sigma_N^2} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des paramètres devient

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T\mathbf{SA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{SY}, \tag{E.12}$$

avec $(\mathbf{A}^T\mathbf{SA})$ la nouvelle matrice normale. Si l'erreur sur toutes les mesures est la même, cette solution sera la même que dans le cas sans bruit (E.9). Par contre, si on souhaite également prendre en compte les erreurs a priori sur les paramètres (voir section suivante), la matrice de pondération affecte quand même la solution.

La solution pour les paramètres est aussi affectée par une erreur (écart-type) appelée *erreur a posteriori* $\sigma^{post}$. Elle résulte de la propagation des erreurs de mesure et est donnée par la racine carrée des éléments diagonaux de l'inverse de la matrice normale, appelée *matrice de variance-covariance* :

$$\mathbf{VarCov} = (\mathbf{A}^T\mathbf{SA})^{-1}, \tag{E.13}$$

$$\sigma^{post}(j) = \sqrt{\mathbf{VarCov}(j,j)}. \tag{E.14}$$

Les autres éléments la matrice **VarCov** sont les covariances des paramètres entre eux, directement liée aux corrélations. En effet la corrélation entre deux paramètres $p_j$ et $p_k$ est égale à

$$\mathbf{Cor}(j,k) = \left| \frac{\mathbf{VarCov}(j,k)}{\mathbf{VarCov}(j,j)\mathbf{VarCov}(k,k)} \right|. \tag{E.15}$$

La corrélation entre deux paramètres est comprise entre 0 et 1. Une corrélation élevée signifie que deux paramètres ont un effet similaire sur les sorties du modèle, ou encore que le modèle manque de linéarité par rapport à ces paramètres.

## Stabilisation de la matrice normale

Lorsque les effets individuels des paramètres sur le modèle sont trop dépendants les uns des autres, la matrice normale tend à avoir un rang inférieur à ses dimensions et donc à ne plus être inversible. On dit aussi que la matrice normale est mal conditionnée. Une façon de résoudre ce problème est de prendre en compte la connaissance des *erreurs a priori* sur les paramètres que l'on ajuste. Ces erreurs a priori peuvent provenir de la solution d'un autre modèle ajusté à d'autres mesures qui auraient été réalisées par le passé, ou provenir d'hypothèses supposées réalistes. Le vecteur des paramètres prend alors la forme suivante

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{C}_p^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{Y}, \tag{E.16}$$

avec $\mathbf{C}_p$ la matrice de dimensions $(M \times M)$ dont les éléments diagonaux sont les variances a priori sur les paramètres à ajuster. Les autres éléments seraient les covariances a priori sur les paramètres, mais on considère en général qu'ils sont nuls, car on manque d'information à ce sujet. La matrice normale est alors $(\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{C}_p^{-1})^{-1}$ et son inverse donne encore la matrice variance/covariance a posteriori sur les paramètres.