

Chapitre 5

Spectre directionnel

5.1 Introduction

La dernière caractéristique des spectres, qui n'a pas été encore analysée dans ce travail, est leur fonction angulaire. Dans la première partie de ce chapitre, le spectre directionnel pour les radars est défini et un modèle UCL-3 est proposé après comparaison avec le modèle Elfo.

Ensuite, les résultats obtenus lors des stages de l'auteur à la subdivision des Etudes Générales (B1) du Service Technique des Phares et Balises (STPB, France)¹ sont présentés. Ces stages ont consisté en une initiation aux mesures des états de mer², leur

¹ Stages organisés dans le cadre d'une collaboration entre le Professeur A. Guissard et C. Baufays (TELE, UCL) et Dr R. Ezraty (IFREMER, France) et Dr J.F. Racapé (STPB, France)

² Bouées non directionnelles

Les bouées non directionnelles constituent le premier type d'instruments de mesure des états de mer. Elles fournissent les grandeurs caractéristiques des états de mer telles que la hauteur significative, la longueur d'onde au pic du spectre...

Bouées directionnelles: voir 5.2

interprétation et l'application de ces mesures au spectre directionnel par l'utilisation d'un algorithme de traitement.

La troisième partie, la plus originale, compare le spectre directionnel de la bouée avec le spectre directionnel qu'un satellite aurait mesuré en passant au-dessus de la bouée. L'ambiguïté à 180° qui existait dans les mesures radars et les mesures en mer est levée. Nous émettons des hypothèses qui expliquent les différences entre eux. En particulier, celles-ci proviennent des bandes de fréquence différentes dans lesquelles le radar et la bouée effectuent leurs mesures.

Finalement, la dernière partie de ce chapitre concerne l'algorithme de traitement des mesures d'une bouée. C'est un algorithme d'ajustement des modèles analytiques du spectre directionnel à un ensemble de données d'une bouée de mesure. Il a été développé par le STPB, en collaboration avec le centre IFREMER de Brest. Nous l'avons appliqué aux données expérimentales de la bouée-phare BEATRICE, ce qui n'avait pas encore été effectué, et nous en avons analysé les caractéristiques, particulièrement l'importance des contraintes de minimisation. L'apport original dans cette partie est constitué

- de l'introduction de deux nouveaux modèles « a priori », comme modèles initiaux de l'algorithme ;
- de l'analyse de l'impact du modèle « a priori » sur le spectre directionnel ajusté ;
- de la définition des critères de rejet de certains modèles « a priori » ;
- de la sélection des critères pour le choix du spectre le plus satisfaisant, c'est-à-dire le plus proche du spectre mesuré, sur base d'une analyse systématique des spectres directionnels obtenus par l'application de l'algorithme aux données de la bouée-phare BEATRICE. En effet, le tri effectué sur les modèles « a priori » ne permettait pas toujours d'en déterminer un seul qui fournisse un spectre ajusté statistiquement valide.

5.2 Fonction de distribution angulaire pour la télédétection

Le spectre de surface $\gamma(\vec{K})$ est défini comme la transformée de Fourier de la fonction de covariance $\Gamma(\vec{r})$ (équation (3.21.a)) des déplacements verticaux ζ . Le spectre en nombre d'ondes $\gamma(K, \alpha)$ est le produit de deux facteurs : le spectre en module de nombre d'onde $S(K)$ divisé par $K/2\pi$ et la fonction angulaire qui varie avec le nombre d'onde, $F(K, \alpha)$:

$$\gamma(K, \alpha) = 2\pi/K S(K) F(K, \alpha) \quad (3.39)$$

avec

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(K, \alpha) d\alpha = 1 \quad (3.40.b)$$

L'approche la plus générale pour relier $\gamma(K, \alpha)$ et $S(K)$ mène au développement en série de Fourier de la fonction angulaire (annexe 3.1) :

$$F(K, \alpha) = 1/2\pi \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(K) \cos(2n\alpha) \right) \quad (3.40.a)$$

Les impulsions radars sont si brèves que l'on peut supposer la surface comme « gelée » et, donc, il n'y a pas de dépendance temporelle pour la fonction de covariance $\Gamma(\vec{r}, t)$. C'est sous l'hypothèse d'homogénéité spatiale pour la fonction de covariance $\Gamma(r)$ que le spectre est une fonction symétrique dans l'espace des nombres d'onde, $\vec{K}$, et c'est pourquoi seules les harmoniques paires sont conservées. Cette fonction est généralement tronquée au premier ordre. Elle se simplifie donc en

$$F(K, \alpha) = 1/2\pi (1 + a_1 \cos(2\alpha)) \quad (5.1)$$

Une méthode souvent utilisée pour déterminer le coefficient a_1 du développement en série de Fourier est basée sur les mesures de variance des pentes de la surface. Le coefficient a_1 est supposé être indépendant du nombre d'onde. La différence entre le spectre avec le vent et perpendiculaire au vent est donnée, en première approximation, par le coefficient a_1 .

En effet, par les équations (6.10.a) à (6.10.c) avec (3.39) et (3.40), on a

$$\sigma^2_c = \frac{1}{2} (1-a_1/2) \sigma^2_{tot} \quad (5.2.a)$$

$$\sigma^2_u = \frac{1}{2} (1+a_1/2) \sigma^2_{tot} \quad (5.2.b)$$

Dès lors, a_1 peut être relié à la différence entre les variances des pentes dans les directions avec le vent et perpendiculaire au vent. La seule séparation disponible de la variance totale, σ^2_{tot} , en la composante avec le vent, σ^2_u , et la composante perpendiculaire au vent, σ^2_c , est celle de Cox & Munk, notée R_{CM} :

$$R_{CM} = (\sigma^2_c/\sigma^2_u)_{Cox\&Munk} \quad (6.14)$$

Finalement :

$$a_1 = 2 (1-R_{CM})/(1+R_{CM}) \quad (5.3)$$

Comme R_{CM} peut être évalué comme une fonction de la vitesse du vent $U_{12,5}$ donnée par Cox & Munk ((6.4.a) et (6.4.b)), cette méthode fournit une valeur moyenne de a_1 sur le domaine en nombre d'onde couvert par les expériences de Cox & Munk (maximum aux environs de $K = 10 \text{ cm}^{-1}$) et pour une vitesse de vent maximale de 14 ms^{-1} .

Ce modèle est donc valable pour des vagues de gravité et des vagues capillo-gravifiques longues (le domaine capillo-gravifique s'étend de $0,5$ à 25 cm^{-1} , annexe 2.4).

Elfouhaily et al. (1997) ont proposé un modèle « full-range ». Selon une revue de fonctions angulaires, les auteurs ont résumé leurs observations dans une expression unique du paramètre a_1 de (5.1) donnée par :

$$a_1 = \tanh \left(\ln(2)/4 + 4(c/c_p)^{2,5} + 0,13 (u^*/c^{\min}) (c^{\min}/c)^{2,5} \right) \quad (5.4)$$

où

- c est la vitesse de phase de la vague donnée par (2.43),
- $c^{\min}$ est la vitesse de phase minimale donnée par (2.52) ; elle vaut $23,2 \text{ cms}^{-1}$ (2.53),

- c_p est la vitesse de phase de la vague au pic du spectre en nombre d'onde³.

Ce paramètre a_1 évolue de telle façon que la directionnalité des vagues de gravité diminue quand leur longueur d'onde diminue et devient faible pour les vagues de gravité courtes. D'autre part, les vagues capillo-gravifiques sont plus directionnelles que les vagues de gravité courtes, ce qui est cohérent avec les observations des radars (Caudal et al., 1996) et les mesures stéréophotographiques. Cependant, comme souligné par Lemaire (1998), la fonction proposée reproduit qualitativement un grand nombre d'observations, mais c'est une formule empirique dont le choix des différents termes n'est pas justifié. Il faut souligner que le choix de la fonction « tangente hyperbolique » pour modéliser a_1 présente un intérêt certain : cette fonction a comme valeur maximale l'unité. Dès lors, la fonction $F(K, \alpha)$ donnée par (5.1) est toujours positive.

Lemaire compare le paramètre a_1 de Cox & Munk avec celui de Elfouhaily et al. (figure 5.1).

Pour les deux modèles, l'anisotropie du spectre augmente avec la vitesse du vent. De grandes différences apparaissent principalement dans le domaine gravifique. Cependant, comme le modèle électromagnétique nécessite la connaissance de paramètres statistiques des vagues considérées comme « grandes » (chapitre 6), domaine correspondant aux vagues capillo-gravifiques, on peut considérer que, sur ce domaine, les deux modèles sont équivalents. En effet, Cox & Munk nous donnent une valeur moyenne sur le domaine capillo-gravifique, car leurs mesures correspondent aux petites longueurs d'onde (figure 6.6).

³ $c_p = \sqrt[4]{\frac{m}{m+1}} c_0$ où m est la pente du spectre et où $c_0 = g/\omega_0$, avec ω_0 la fréquence au pic du spectre en fréquence

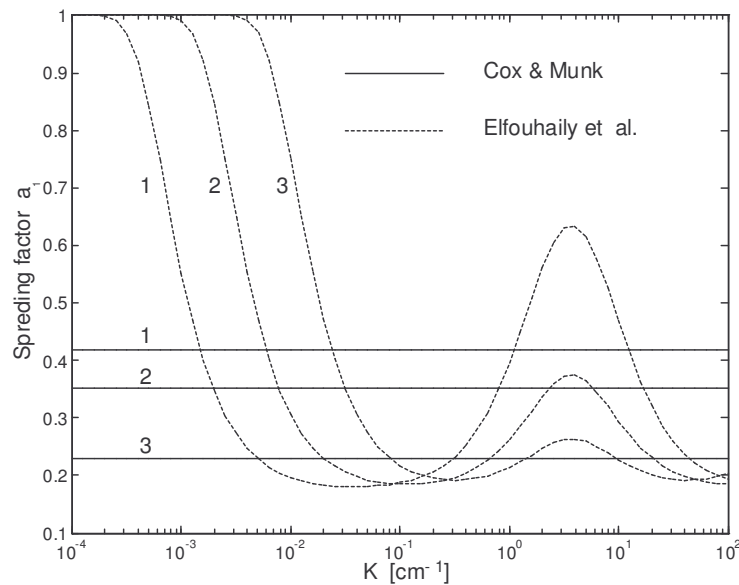


Figure 5.1 : Coefficient de Fourier de premier ordre de la fonction angulaire : 1 : $U_{10} = 20 \text{ ms}^{-1}$; 2 : $U_{10} = 10 \text{ ms}^{-1}$; 3 : $U_{10} = 5 \text{ ms}^{-1}$ (Lemaire, 1998)

Comme le modèle basé sur les mesures de Cox & Munk est plus simple, que le coefficient a_1 a la même valeur pour les bandes de fréquence utilisées par les radars et que tous les termes du modèle d'Elfouhaily et al. ne sont pas justifiés, c'est le modèle (5.3) - UCL-3 - qui est adopté.

5.3 Spectre directionnel de la bouée BEATRICE

5.3.1 La bouée BEATRICE

5.3.1.1 Situation

Le Service Technique des Phares et Balises (STPB, Bonneuil-sur-Marne⁴, France) a développé des bouées géantes. Avec le soutien

⁴ Installé depuis 1990 à Brest (Finistère, France)

Elle a un flotteur circulaire de 11,50 m de diamètre, un tirant d'eau⁵ de 1,18 m et une hauteur au-dessus du niveau de la mer de 13,20 m. Son poids total en charge est d'environ 80 tonnes et elle est ancrée au fond au moyen d'un amarrage composé de chaînes se terminant par une ancre de 4 tonnes (figure 5.3).



5 - 7

5.3.1.2 Instrumentation

Le système expérimental (figure 5.3) se compose de trois sous-systèmes implantés respectivement sur la bouée, à la tour radar du STIFF (Ouessant) et au centre Corsen (côte du Finistère). L'instrumentation de la bouée BEATRICE comprend un capteur de comportement permettant d'obtenir le pilonnement, le roulis, le tangage de la bouée (section 5.3.1.3) et un compas magnétique qui indique sa position par rapport au Nord (section 5.3.1.4).

Les signaux en provenance de ces 2 capteurs sont numérisés au niveau de la bouée : une centrale assure leur codage, leur formatage, ainsi que la répétition des messages. Cette centrale est destinée à améliorer la probabilité de bonne liaison vers un système de relais sur la tour du radar installée à la pointe du STIFF sur l'île d'Ouessant à une hauteur de 129 m au-dessus du niveau de la mer et à une distance de 31 milles nautiques de la bouée. Les messages sont répétés à des temps suffisamment espacés pour s'affranchir des parasites radioélectriques ponctuels et des ruptures de la portée optique dues aux mouvements de la bouée sous l'effet de la houle.

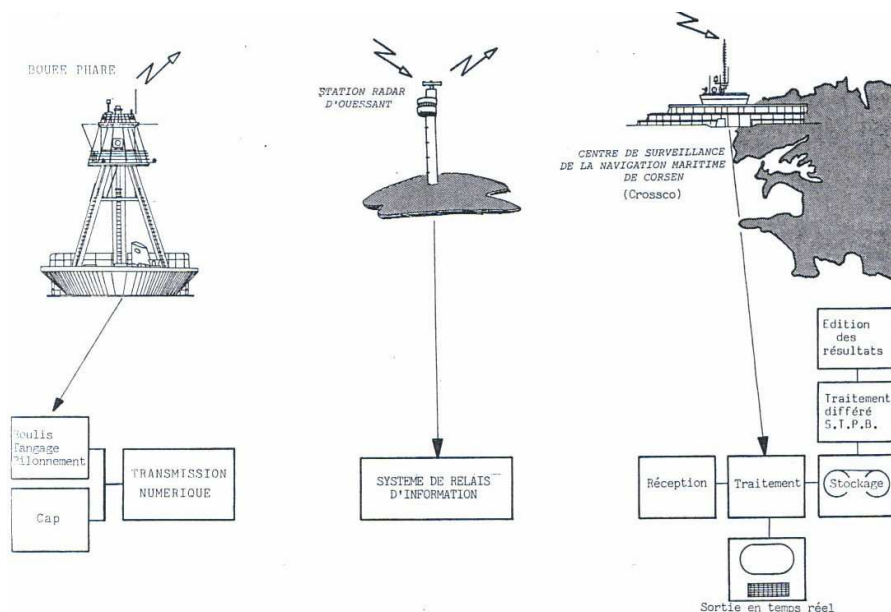


Figure 5.3: Système expérimental de la bouée BEATRICE (Racapé & Ezraty, 1987)

Les signaux reçus à la tour du STIFF sont acheminés par un faisceau hertzien jusqu'au centre de traitement de Corsen, le CROSSCO (Centre Régional Opérationnel de Surveillance et de Sauvetage de Corsen – Ouessant). C'est une infrastructure de surveillance et de sauvetage à la pointe de Corsen face à Ouessant.

Une permanence de 24 heures sur 24 a permis d'assurer l'acquisition des données, le traitement en temps réel de l'information, la gestion et le stockage des données. Les données stockées sont ensuite traitées au STPB.

5.3.1.3 Capteur de pilonnement, roulis et tangage

Le pilonnement (« heave » en anglais) est le déplacement vertical de la bouée, le roulis (« roll » en anglais), le déplacement bâbord - tribord et le tangage (« pitch » en anglais), le déplacement avant - arrière (figure 5.4).

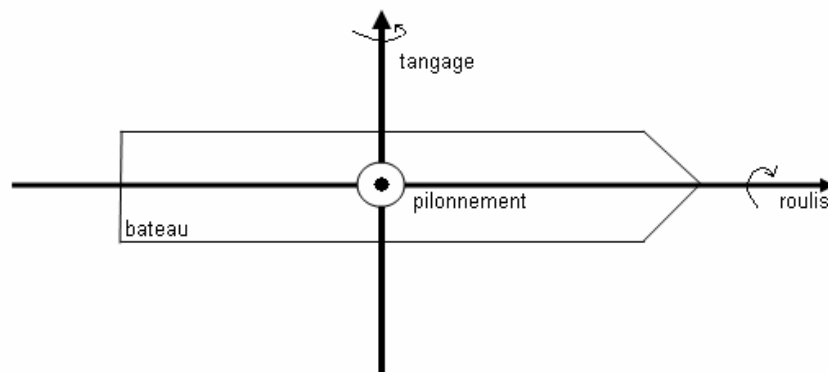


Figure 5.4 : Trois axes du mouvement d'un objet à la surface de l'eau (vue du dessus)

Les éléments sensibles du pilonnement, du roulis et du tangage sont regroupés sur une plate-forme stabilisée horizontalement de période propre de 40 secondes. L'ensemble baigne dans un liquide amortisseur électriquement résistif. Le pilonnement est obtenu par la double intégration analogique d'un signal d'accélération verticale délivré par un accéléromètre installé sur la plate-forme stabilisée. Par convention, l'angle de roulis est positif pour un soulèvement côté

bâbord et l'angle de tangage est positif pour un soulèvement de l'arrière. Les données de pilonnement, roulis et tangage sont échantillonnées à la fréquence de 2 Hz.

5.3.1.4 Compas magnétométrique

Le compas magnétométrique fournit l'orientation de la bouée par rapport au Nord magnétique terrestre. Il mesure les composantes horizontales du champ magnétique terrestre suivant deux axes perpendiculaires et fournit donc le sinus et le cosinus du cap de la bouée par rapport au Nord magnétique. Les deux informations fournies par le compas sont de la forme :

$$X = k \sin \alpha$$

$$Y = k \cos \alpha$$

avec

α : l'angle par rapport au Nord (cap)

k : coefficient de proportionnalité

Le cap est obtenu en calculant :

$$\alpha = \arctg X/Y$$

Les données de sinus et cosinus du cap sont échantillonnées à la fréquence de 1/3 Hz, c'est-à-dire que les mesures issues du compas sont considérées comme constantes au cours des trois secondes séparant deux prises d'échantillons sur ce capteur.

5.3.1.5 Traitement des signaux en temps réel

La phase de traitement débute par le calcul des nombres d'ondes pour les différentes raies du spectre. Après l'élimination des gites moyennes⁶ en roulis et tangage, les mesures correspondantes sont

⁶ On élimine du roulis et du tangage, la moyenne qui n'est pas nécessairement nulle

traduites en termes de pentes de la surface libre par passage du repère lié à la bouée au repère d'axes fixes par rapport à la terre ($X = \text{Est}$, $Y = \text{Nord}$, $Z = \text{Zénith}$), le pilonnement de la bouée étant alors assimilé au déplacement vertical de la surface libre.

Un contrôle du bon fonctionnement des capteurs est ensuite effectué par calcul des moyennes et écarts-types sur les signaux ainsi calculés (dénivellation et pentes de la surface libre, sinus et cosinus du compas).

Ensuite, les signaux sinus et cosinus du compas sont filtrés à six secondes afin de minimiser l'influence des signaux de pentes aux hautes fréquences.

Après transformée de Fourier rapide des signaux, et correction de l'atténuation et du déphasage en pilonnement introduits par le double intégrateur, les moments d'ordre zéro, m_0 , et d'ordre deux, m_2 , du spectre non directionnel sont calculés sur les 1024 raies supérieures à deux secondes. On en déduit la hauteur significative ($H_{1/3} = 4\sqrt{m_0}$) et la période moyenne ($T_m = \sqrt{m_0/m_2}$) de l'état de mer.

Les coefficients de chaque raie individuelle sont alors utilisés pour évaluer les co et quad-spectres (section 5.3.2).

Les résultats sont ensuite sommés sur 16 raies consécutives qui divisent l'intervalle de fréquence $[1/2048 ; 1/2]$ Hz en 64 bandes de largeur constante, égale à $1/128$ Hz, et de fréquence centrale égale à $(8,5 + 16(n-1)) / 2048$ Hz, n variant de 1 à 64 (annexe 5.1).

Cette procédure est présentée sous forme d'un organigramme à la figure 5.5.

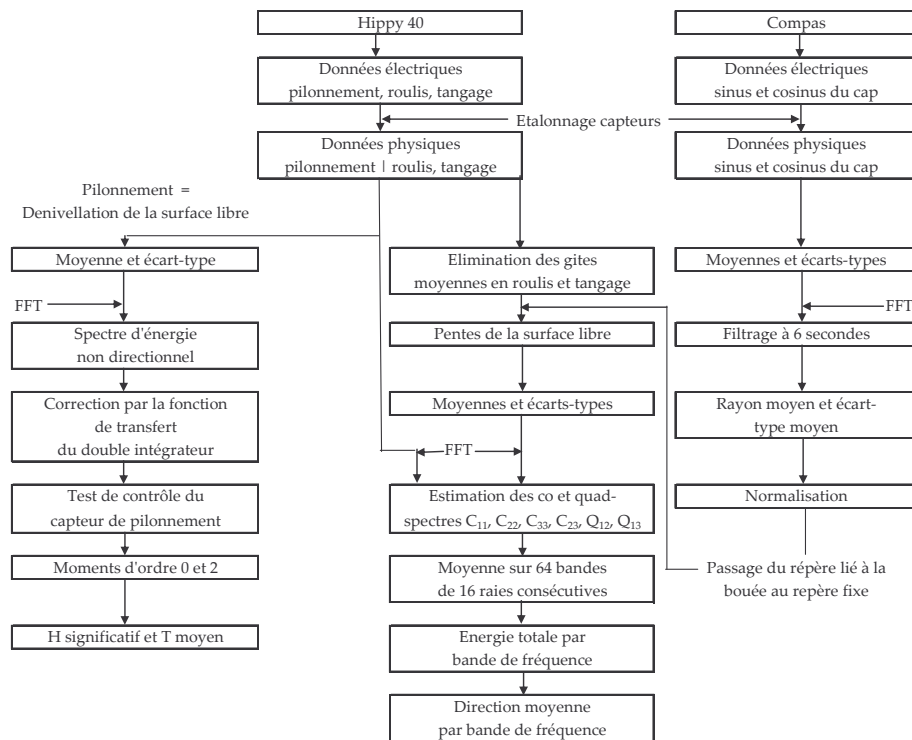


Figure 5.5 : Organigramme simplifié du traitement de houle directionnelle (Racapé & Ezraty, 1987)

5.3.1.6 Vent

Aux informations concernant la surface de la mer, s'ajoutent des informations sur le vent. Elles sont stockées en même temps et envoyées en même temps. Le vent est mesuré en amplitude et direction toutes les 3 secondes, à une hauteur d'environ 12,5 m au-dessus de la surface de la mer. Ces valeurs sont moyennées, au sens vectoriel, sur une minute. Le vent moyen par minute est transmis à la terre pendant les 34 minutes de transmission des données de surface, toutes les heures. Un vent moyen est alors calculé toutes les heures à partir des 34 vents moyens d'une minute. On conserve le vent moyen sur 34 minutes de toutes les heures et les vents moyens sur une minute toutes les 3 heures, en parallèle avec les données brutes de

surface qui sont conservées uniquement toutes les 3 heures. Les données conservées toutes les heures sont donc :

- « DVMOY » : direction du vent moyen sur 34 minutes ;
- « VVMOY » : amplitude du vent moyen sur 34 minutes ;
- « VNMOY » : valeur moyenne de toutes les valeurs des composantes Nord des 34 vents moyens sur une minute ;
- « VEMOY » : valeur moyenne de toutes les valeurs des composantes Est des 34 vents moyens sur une minute ;

De plus, chaque vent moyen sur une minute est décomposé en une composante dans la direction du vent moyen (direction X) et une composante dans la direction perpendiculaire au vent moyen (direction Y). L'écart-type de chaque distribution ainsi obtenue est calculé et conservé ; ce sont « ECARTTVX » et « ECARTTVY » qui renseignent sur la variabilité du vent.

5.3.2 Théorie classique du calcul du spectre directionnel à partir d'une bouée instrumentée

Le spectre directionnel des déplacements de la surface de la mer est obtenu classiquement par l'estimation de ses coefficients de Fourier à partir des co et quad-spectres, issus des mesures de pilonnement, roulis, tangage et cap de la bouée. C'est cette approche que nous décrivons ci-dessous.

Supposons un flotteur idéal suivant exactement les déplacements de la surface libre de la mer. Ceux-ci sont décrits comme la somme d'un grand nombre d'ondes monochromatiques de fréquences et de directions différentes et dont les phases sont prises indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$:

$$\zeta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos [K_i (x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i) - \omega_i t + \beta_i] \quad (5.5)$$

Pour une fréquence ω_i donnée, le nombre d'onde K_i est fixé par la relation de dispersion (2.45).

Pour décrire statistiquement l'état de la mer, le spectre directionnel $\mathcal{F}(\omega, \alpha)$ est utilisé. Pour une bande de fréquence fixée, centrée en ω ,

considérons le développement du spectre en série de Fourier suivant α sous la forme :

$$\mathcal{F}(\omega, \alpha) = A_0(\omega) + A_1(\omega) \cos(\alpha - \theta_1(\omega)) + A_2(\omega) \cos(2(\alpha - \theta_2(\omega))) \quad (5.6)$$

$$\mathcal{F}(\omega, \alpha) = e_0/2 + e_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha + e_2 \cos 2\alpha + b_2 \sin 2\alpha + \dots \quad (5.7)$$

où

$$e_n = \text{Re} \left[1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\alpha} \mathcal{F}(\omega, \alpha) d\alpha \right]$$

$$b_n = \text{Im} \left[1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\alpha} \mathcal{F}(\omega, \alpha) d\alpha \right]$$

Pour un spectre directionnel symétrique en direction, θ_1 et θ_2 sont égaux entre eux et peuvent être interprétés comme la direction moyenne de la composante centrée en ω (annexe 5.2). Le spectre directionnel peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{F}(\omega, \alpha) = \hat{\phi}(\omega) f(\alpha) \quad (5.8)$$

où $f(\alpha)$ représente $f(\omega, \alpha)$.

Il est possible d'estimer les cinq premiers coefficients de ce développement – soit A_0 , $A_1 \cos \theta_1$, $A_1 \sin \theta_1$, $A_2 \cos 2\theta_2$, $A_2 \sin 2\theta_2$ – à partir de la connaissance des déplacements et des pentes de la surface libre suivant deux axes orthogonaux. Ces déplacements et pentes sont obtenus respectivement à partir des signaux de pilonnement, de roulis-tangage et cap de la bouée, après passage d'un repère lié à la bouée à un repère fixe (annexe 5.2).

Les étapes essentielles du calcul du spectre directionnel à partir d'une bouée instrumentée sont schématisées à la figure 5.6. Ce programme de calcul a été mis au point par le STPB. Il utilise les mesures de la bouée BEATRICE (1) pour obtenir les déplacements et pentes de la surface (2). A partir de ceux-ci, les co et quad-spectres sont calculés (3). Ils permettent de calculer les cinq premiers coefficients en série de Fourier du spectre des déplacements, soit e_i , b_i (A5.2.3a à A5.2.3c et A5.2.4a à A5.2.4f), soit A_i , θ_i (A5.2.1a à A5.2.1e).

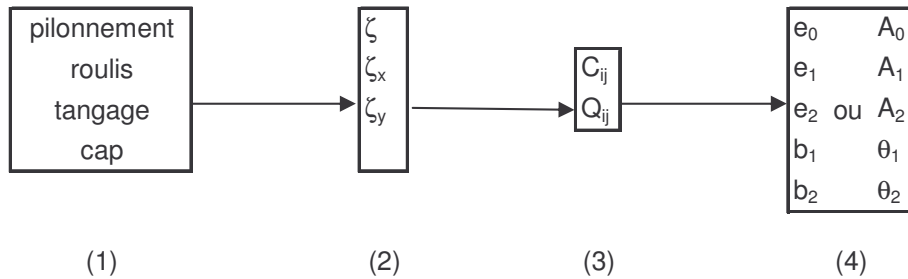


Figure 5.6 : Procédure de calcul du spectre directionnel à partir des mesures d’une bouée :

- (1) mesures de la bouée BEATRICE
- (2) déplacement et pentes de la surface
- (3) co et quad-spectres
- (4) développement en série de Fourier du spectre

De cette façon, un spectre directionnel en série de Fourier peut être calculé par bande de fréquences pour chaque fichier de mesure de la bouée. Cela permet une comparaison entre le spectre directionnel de la bouée BEATRICE, celui du modèle UCL-3 et celui du modèle Elfo. Même si nous devons garder en mémoire, comme souligné dans l’introduction, que nous comparons des spectres directionnels pour des bandes de fréquences différentes et que la « directionnalité » dépend du nombre d’onde de la vague considérée.

5.4 Comparaison entre la bouée BEATRICE, le modèle UCL-3 et le modèle Elfo

5.4.1 Comparaison entre $\mathcal{H}(\omega, \alpha)$, $\gamma(K, \alpha)$ et $\phi_0(\omega, \alpha)$

Nous souhaitons comparer le spectre directionnel de la bouée, $\mathcal{H}(\omega, \alpha)$ (équation (5.7)) avec le spectre directionnel qu’un satellite aurait mesuré en passant au-dessus de la bouée, $\gamma(K, \alpha)$ (équations (3.39) et (5.1)). Guissard (1993) a démontré que

$$\phi_0(\omega, \alpha) = \gamma(K, \alpha) \quad K/4\pi \quad dK/d\omega \quad (5.9)$$

$$\phi_0(\omega, \alpha) = (\mathcal{H}(\omega, \alpha) + \mathcal{H}(\omega, \alpha + \pi))/2 \quad (5.10)$$

Dès lors, en insérant l'équation (5.7) dans (5.10) et, avec (5.8), (A5.2.1a), (A5.2.1d), (A5.2.1e) et la normalisation (5.15.a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha = 1$, on obtient :

$$\phi_0(\omega, \alpha) = \hat{\phi}(\omega)/2\pi (1 + 2A_2/e_0 \cos(2(\alpha-\theta_2))) \quad (5.11)$$

où θ_2 est donné par (A5.2.6).

D'autre part, les équations (3.39) et (5.1), avec (3.49) dans (5.9) donnent

$$\phi_0(\omega, \alpha) = \hat{\phi}(\omega)/2\pi (1 + a_1 \cos 2\alpha) \quad (5.12)$$

Les mesures d'une bouée instrumentée fournissent les co et quad-spectres à partir desquels e_0 , A_2 et θ_2 sont estimés. Comme

$$\phi_0(\omega, \alpha) = \hat{\phi}(\omega) f(\omega, \alpha) \quad (5.13)$$

l'équation (5.11) fournit la distribution angulaire pour la bouée

$$f^{\text{bouée}}(\omega, \alpha) = 1/2\pi (1 + 2A_2/e_0 \cos(2(\alpha-\theta_2))) \quad (5.14)$$

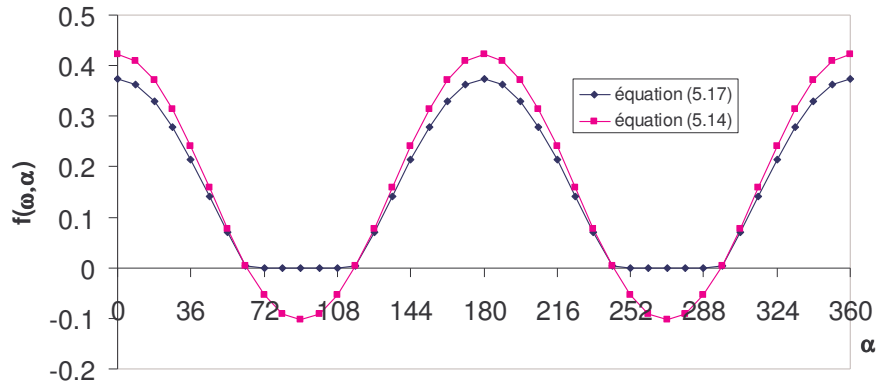


Figure 5.7 : Distribution angulaire pour la bouée BEATRICE, fichier 25_286 (19/11/1987 à 12h32) bande n°11. La courbe en gris clair est donnée par (5.14). La courbe en noir est la distribution angulaire utilisée pour la bouée

La figure 5.7 présente en gris clair la distribution angulaire obtenue pour le fichier 25_286 bande n°11 avec θ_2 pris à zéro. Cette distribution angulaire est obtenue par l'équation (5.10) avec $\mathcal{F}(\omega, \alpha)$ qui est représentée à la figure 5.25.

Avec le fichier 25_286 bande n°11, nous sommes dans un cas, relativement fréquent pour la bouée, où $2A_2/e_0$ est plus grand que un. Il en résulte que $f^{\text{bouée}}(\omega, \alpha)$ est parfois négatif. Une distribution angulaire négative pour certains angles n'a pas de sens physique et la distribution angulaire retenue pour la bouée sera celle où les parties négatives sont posées égales à zéro. Mais alors, la condition de normalisation sur f n'est plus rencontrée. Evaluons l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha \quad (5.15.a)$$

où

$$f(\alpha) = 1 + 2A_2/e_0 \cos 2\alpha \quad \text{si } 1 + 2A_2/e_0 \cos 2\alpha \geq 0 \quad (5.15.b)$$

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{si } 1 + 2A_2/e_0 \cos 2\alpha \leq 0 \quad (5.15.c)$$

On obtient

$$\text{Si } 2A_2/e_0 \geq 1 \quad I = 2\theta + 4A_2/e_0 \sin \theta \quad \text{où } \theta = \arccos(-e_0/2A_2) \quad (5.16.a)$$

$$\text{Si } 2A_2/e_0 \leq -1 \quad I = 2\pi - 2\theta - 4A_2/e_0 \sin \theta \quad \text{où } \theta = \arccos(-e_0/2A_2) \quad (5.16.b)$$

La distribution angulaire pour la bouée est alors égale, dans ce cas, à

$$f^{\text{bouée}}(\omega, \alpha) = 1/I (1 + 2A_2/e_0 \cos(2(\alpha - \theta_2))) \quad \text{si } f^{\text{bouée}}(\omega, \alpha) \geq 0 \quad (5.17.a)$$

$$= 0 \quad \text{si } f^{\text{bouée}}(\omega, \alpha) < 0 \quad (5.17.b)$$

Elle est illustrée pour le fichier 25_286 bande n°11 à la figure 5.7.

Comparons à présent la distribution angulaire de la bouée à la distribution angulaire du radar :

$$f^{\text{radar}}(\omega, \alpha) = 1/2\pi (1 + a_1 \cos 2\alpha) \quad (5.18)$$

avec a_1 donné par (5.3) pour le modèle UCL-3 et a_1 donné par (5.4) pour le modèle Elfo (Elfouhaily et al., 1997). Dans celui-ci, u^* est obtenu par les équations (2.16) à partir de $U_{12,5}$ de la bouée et $m = 4$.

La figure 5.8 présente les trois distributions angulaires pour le fichier 25_286 bande n°11. Cette bande de fréquence correspond à ce qu'on observe à la figure 5.1 vers 10^{-3} cm^{-1} .

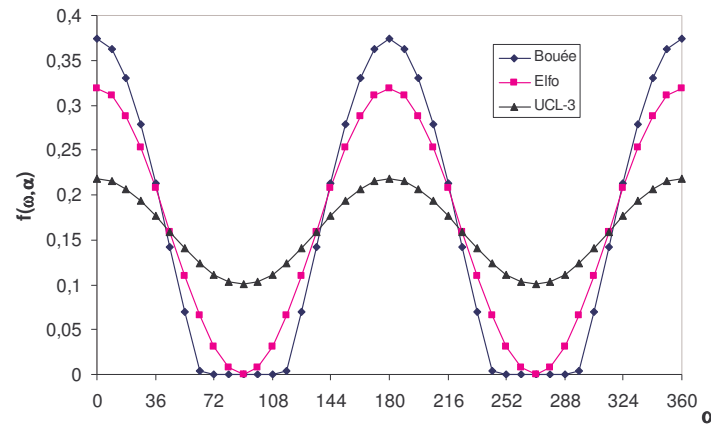


Figure 5.8 : Distribution angulaire pour la bouée et le radar selon les modèles UCL-3 ou Elfo, fichier 25_286 bande n°11

Cette figure a été choisie parmi l'ensemble des fichiers car elle est représentative de tous les fichiers. La tendance pour le modèle UCL-3 est une distribution angulaire présentant des oscillations moins marquées, tandis que le modèle Elfo se rapproche du modèle bouée, sauf qu'il est toujours positif. Le modèle UCL-3 a une distribution angulaire plus large que les modèles Elfo et « Bouée » qui sont plus directionnels. En effet, le modèle UCL-3 présente une énergie dans toutes les directions tandis que les bouées n'enregistrent que les grandes vagues plus directionnelles du système physique des vagues océaniques. Par ailleurs, il faut souligner que pour comparer le modèle Elfo aux modèles « Bouée » et UCL-3, nous avons effectué un choix d'état de mer, comme expliqué sous l'équation (5.4). Pour un autre choix d'état de mer, nous obtiendrions une autre courbe Elfo, pour les mêmes courbes UCL-3 et « Bouée » ; la comparaison n'est donc pas unique, ce qui en relativise les conclusions.

5.4.2 Comparaison entre la bouée BEATRICE et les modèles radar

En analysant la figure 5.8, ce qui frappe c'est la différence des valeurs au maximum de la distribution angulaire. C'est ce que nous choisissons donc comme élément discriminant pour la comparaison entre les distributions angulaires. Les figures suivantes présentent les valeurs au maximum pour quelques fichiers de la bouée BEATRICE. Pour chaque fichier, seules les bandes de fréquence, où l'énergie vaut au minimum le dixième de la valeur au pic, sont conservées. Dans les figures qui suivent, la bande, présentée par un numéro en abscisse, qui contient le pic en énergie est entourée pour la différencier des autres bandes de fréquence.

Nous avons choisi de présenter ces fichiers car ils illustrent les différents cas rencontrés. De plus, nous constatons que l'allure générale des courbes est la même pour des fichiers relatifs à des heures consécutives.

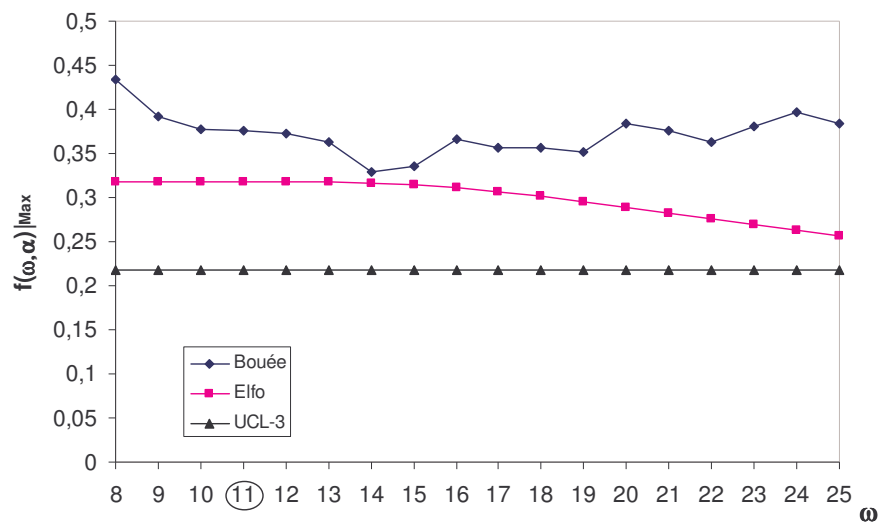


Figure 5.9 : Valeurs au maximum de la distribution angulaire pour la bouée, les modèles UCL-3 et Elfo. Fichier BEATRICE 25_286. La bande de fréquence est présentée par un numéro en abscisse et celle qui contient le pic en énergie est entourée

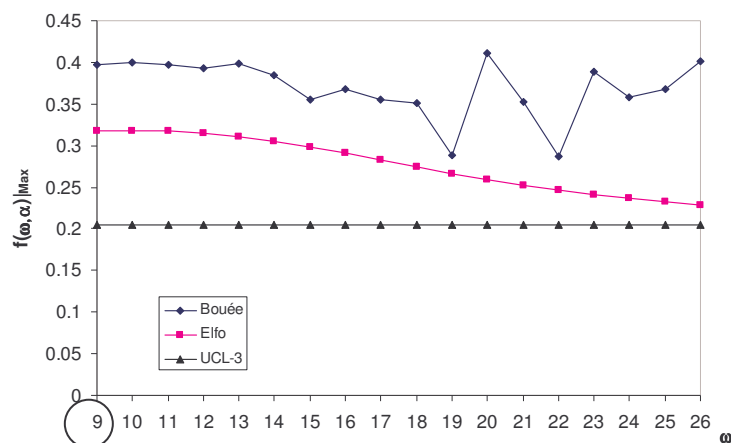


Figure 5.10 : Valeurs au maximum de la distribution angulaire pour la bouée, les modèles UCL-3 et Elfo. Fichier BEATRICE 25_309. La bande de fréquence est présentée par un numéro en abscisse et celle qui contient le pic en énergie est entourée

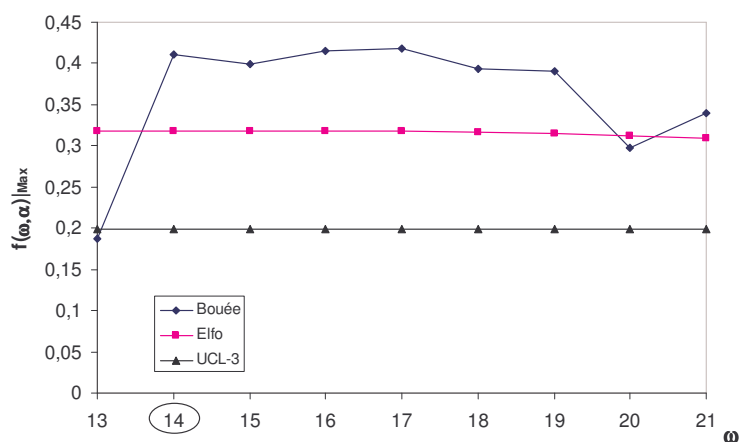


Figure 5.11 : Valeurs au maximum de la distribution angulaire pour la bouée, les modèles UCL-3 et Elfo. Fichier BEATRICE 28_63. La bande de fréquence est présentée par un numéro en abscisse et celle qui contient le pic en énergie est entourée

Le modèle UCL-3 est représenté par une ligne horizontale. En effet, le seul paramètre qui intervient est la vitesse du vent ; les valeurs au

maximum ne dépendent donc pas de la bande de fréquence. Par contre, le modèle UCL-3 a été choisi pour représenter la distribution angulaire dans la bande de fréquence des vagues de gravité courtes et des vagues capillo-gravifiques longues, soit à partir de la bande 30 environ. La comparaison entre le modèle UCL-3 et la bouée indique qu'ils ne sont pas semblables : UCL-3 est environ deux fois plus petit. Mais nous venons de souligner que le modèle UCL-3, lorsqu'il est utilisé dans les bandes de fréquence de la bouée, est en fait appliqué sur un domaine en fréquence pour lequel il n'est pas prévu. Ceci justifie la différence entre les deux modèles.

Cette remarque n'est pas valable pour le modèle Elfo car celui-ci varie en fonction de la fréquence (figure 5.1). Cette figure permet aussi de justifier la différence entre les modèles Elfo et UCL-3. Il faut souligner que les bandes de fréquence de la bouée correspondent à des valeurs de K comprises entre 10^{-4} à 10^{-3} cm^{-1} , bandes de fréquences où les deux modèles sont très différents.

Une autre remarque générale doit être formulée : le modèle bouée est un modèle dont les valeurs sont calculées à partir de données expérimentales alors que les modèles appliqués aux radars, UCL-3 et Elfo, sont des expressions analytiques. Nous comparons donc des données (bouée) avec des modèles (radars). Ceci est une autre source de différences entre la bouée et les radars. Elle explique aussi la variabilité des points « bouée » par rapport aux points « radar ».

Par ailleurs, les modèles UCL-3 et Elfo sont continus en fréquence, alors que les valeurs « bouée » sont des valeurs moyennes sur un intervalle en fréquence. Ceci introduit aussi une différence entre les deux approches.

De plus, nous avons étudié la variabilité des résultats en fonction de la valeur de l'angle θ_2 (A5.2.1d). En effet, celui-ci varie significativement d'une bande de fréquences à l'autre. Nous constatons que ceci n'a que peu d'impact sur la valeur au maximum du spectre de la bouée.

Enfin, le critère de suivi de la surface libre $H(\omega)$ (section 5.5.1), s'il est proche de 1, indique que le système bouée estime correctement les paramètres du spectre directionnel de la houle. Nous avons constaté

que les valeurs bouée sont proches du modèle Elfo lorsque le critère $H(\omega)$ est proche de 1.

En conclusion, le spectre directionnel de la bouée surestime systématiquement le spectre directionnel du satellite. Cependant, compte tenu de toutes les sources de différences, les valeurs du spectre de la bouée sont bien modélisées par le spectre Elfo. Par contre, nous confirmons, comme montré à la figure 5.1, que le modèle UCL-3 pour les radars ne peut être étendu au domaine en fréquence de la bouée (jusqu'à la bande 25 ou $1,5 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^{-1}$).

Nous recommandons un modèle pour la distribution angulaire du radar sur le domaine complet des fréquences, qui combine un spectre plus directionnel pour les grandes vagues, comme celles mesurées par la bouée (du type Elfo) et un spectre plus étalé pour les petites vagues (du type UCL-3).

5.5 Spectre directionnel de la bouée

La section suivante présente l'apport original de cette thèse dans le traitement des données d'une bouée instrumentée : d'une part, l'introduction de deux nouveaux modèles « a priori » comme modèles initiaux de l'algorithme, d'autre part, l'influence du choix du modèle « a priori » sur le spectre directionnel ajusté, ensuite, la procédure de sélection parmi les spectres « a priori » et, finalement, la définition des critères de choix parmi les spectres ajustés statistiquement valides. Pour la bouée BEATRICE, le nombre de spectres directionnels traités est de 550 : 22 fichiers, chacun comprenant 64 raies en fréquence, dont environ 25 contiennent suffisamment d'énergie pour être significatives (voir annexe 5.1). La table suivante reprend les dates et heures d'enregistrement des fichiers traités.

Nom de fichier	Date	Heure	Nom de fichier	Date	Heure
25_286	19/11/1987	12h32	27_96	25/11/1987	11h27
25_288	19/11/1987	14h27	27_97	25/11/1987	12h21
25_289	19/11/1987	15h25	27_98	25/11/1987	13h28
25_309	20/11/1987	11h15	28_16	30/11/1987	12h04
25_311	20/11/1987	12h52	28_32	2/12/1987	11h52
25_312	20/11/1987	14h06	28_41	3/12/1987	14h26
27_1	21/11/1987	13h12	28_47	4/12/1987	09h18
27_2	21/11/1987	14h03	28_48	4/12/1987	12h02
27_71	24/11/1987	10h24	28_56	5/12/1987	11h28
27_72	24/11/1987	11h23	28_63	6/12/1987	09h13
27_73	24/11/1987	12h21	28_64	6/12/1987	12h04

Table 5.1 : Dates et heures d'enregistrement des fichiers traités de la bouée BEATRICE

5.5.1 Etude du critère de suivi de la surface libre $H(\omega)$

Dans la description de la mesure du spectre directionnel de la surface de la mer à partir d'une bouée instrumentée (annexe 5.2), on a introduit les intégrales I_1 qui ne fait intervenir que le pilonnement (A5.2.4a), I_4 et I_6 qui ne font intervenir que les pentes donc le roulis et le tangage (A5.2.4b et A5.2.4c). Elles sont telles que :

$$I_1 = K^{-2} (I_4 + I_6)$$

sous l'hypothèse d'une relation de dispersion indépendante de α . On définit le critère de suivi de la surface libre, $H(\omega)$, par

$$H^2(\omega) = I_1 / (K^{-2} (I_4 + I_6)) \quad (5.19)$$

Il permet d'estimer la capacité de la bouée à suivre les mouvements de la surface libre, en comparant sa valeur mesurée à sa valeur théorique unité. Cette comparaison mettra en relief les éventuelles zones de fréquence pour lesquelles les informations fournies par le

système ne permettent pas d'estimer correctement les paramètres du spectre directionnel de la houle.

Ezraty & Cavanie (1981) ont montré sur des spectres théoriques et expérimentaux que $H(\omega)$ ne donne pas une estimation de la qualité des mesures pour des fréquences inférieures à une fréquence limite évaluée à $0,8 \omega$, ω étant la fréquence du maximum du spectre en fréquence des déplacements de la surface. Cette valeur limite est valable également pour la bouée BEATRICE (Racapé & Ezraty, 1987). Il a aussi été vérifié que, pour la gamme de mers observées avec la bouée BEATRICE, la valeur de la hauteur significative influence peu le comportement général de la fonction $H(\omega)$ (figure 5.12).

La figure 5.12 présente les critères de suivi de la surface libre, moyennés sur l'ensemble des séquences de hauteurs significatives respectivement supérieures ou égales à 4, 5, 6 et 7 mètres. Ces figures donnent, pour chaque bande de périodes centrées entre 4,06 et 17 secondes, la moyenne et l'écart-type de $H(\omega)$ ainsi que le nombre de séquences sur lesquelles ces valeurs ont été calculées.

La fonction $H(\omega)$ est plate et égale à 0,9 environ entre 6,9 et 13,4 secondes. Les mesures seront donc valides avec 10% d'erreur pour les spectres directionnels de la houle dans cette bande de fréquence (raie 10 à raie 19). Pour les périodes plus grandes, on observe une décroissance jusqu'à une valeur de l'ordre de 0,75. Pour les périodes plus petites, $H(\omega)$ décroît d'abord jusqu'à environ 0,65 pour 4,82 secondes puis remonte sensiblement pour les périodes encore plus basses.

La chute du critère de suivi de la surface libre $H(\omega)$ pour les périodes inférieures à 4,5 secondes est due à la chute de la fonction de transfert en pilonnement : ces périodes sont trop courtes pour être « vues » par la bouée ou l'énergie est trop faible pour exciter la bouée, c'est-à-dire que la bouée filtre l'énergie à ces périodes. La chute de $H(\omega)$ pour les périodes supérieures à 17 secondes est attribuée, d'une part, à un ajustement quelque peu approximatif de la fréquence en dessous de laquelle le calcul n'est plus significatif et, d'autre part, au fait que l'énergie en pilonnement présente dans cette zone de fréquence est trop faible pour être correctement mesurée.

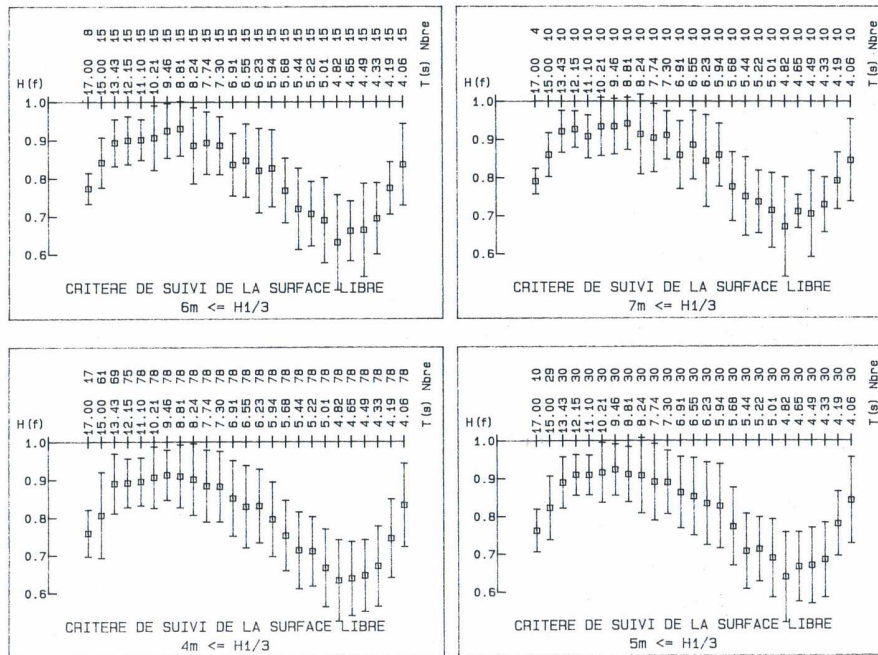


Figure 5.12 : Critères de suivi de la surface libre pour différentes classes de hauteurs significatives (Racapé & Ezraty, 1987)

5.5.2 Ajustement d'un modèle analytique de spectre directionnel à un ensemble de données issu d'une bouée de mesure

Par les co et quad-spectres issus des mesures de pilonnement, roulis, tangage et cap de la bouée, on peut estimer les coefficients de Fourier du spectre directionnel de la surface de la mer. Mais ce spectre directionnel de la surface de la mer, est-il celui qui modélise le mieux le spectre directionnel réel? En effet, il faut trouver un spectre directionnel qui soit correctement normalisé et qui s'ajuste statistiquement aux données.

En annexe 5.3, nous montrons comment, par bande de fréquences considérée, les intégrales I_1 à I_6 – qui sont des intégrales pondérées du spectre en fréquence directionnel – liées aux co et quad-spectres C_{ij} et Q_{ij} – qui sont obtenus à partir des enregistrements de la bouée – forment un ensemble de 4 équations linéairement indépendantes et

indépendantes du nombre d'onde K et, dès lors, de la relation de dispersion. Les équations (A5.3.1) à (A5.3.4) s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\mathbf{d} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \mathbf{b} \, d\alpha \quad (5.20)$$

où

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} Q_{12} / \sqrt{C_{11}(C_{22} + C_{33})} \\ Q_{13} / \sqrt{C_{11}(C_{22} + C_{33})} \\ C_{22} - C_{33} / (C_{22} + C_{33}) \\ 2C_{23} / (C_{22} + C_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

est un vecteur des données et $\mathbf{b}$ est le vecteur

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Le vecteur $\mathbf{d}$ correspond aux coefficients du développement en série de Fourier du spectre, limité au second ordre. Le premier coefficient est donné par :

$$\hat{\phi} = C_{11}/\omega^4$$

Comme les C_{ij} et Q_{ij} issus des mesures de la bouée sont une réalisation de la variable aléatoire correspondante, il en est de même pour le vecteur $\mathbf{d}$:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \varepsilon \quad (5.23)$$

où ε est une erreur aléatoire commise par l'estimation $\tilde{\mathbf{d}}$ du vecteur des données $\mathbf{d}$. Cette estimée $\tilde{\mathbf{d}}$ est obtenue par les équations (5.20), à partir de $\hat{f}_i(\alpha)$, une estimée du spectre angulaire. Les équations de données (5.20) peuvent dès lors se réécrire :

$$\varepsilon = \mathbf{d} - \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_i(\alpha) \mathbf{b} d\alpha \quad (5.24)$$

et on cherche donc $\hat{f}_i(\alpha)$ qui est correctement normalisé, qui satisfait (5.24), c'est-à-dire qui minimise ε .

Cela se fait selon la méthode de traitement proposée par Lawson & Long (1983) et développée ci-dessous : elle fournit une estimation du spectre directionnel de la surface dérivé des données d'une bouée. La méthode de Lawson & Long est aussi utilisée par d'autres laboratoires ayant participé au projet Cost (Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology ; Centre d'étude des Environnements Terrestres et Planétaires, France ; Proudman Oceanographic Laboratory, UK ; in Hauser et al., 2005).

La méthode de traitement a pour but de déterminer la meilleure estimée (au sens statistique) du spectre directionnel $\hat{f}_i(\alpha)$ en utilisant toute l'information disponible dans les enregistrements de bouée. Il faut donc trouver un $\hat{f}_i(\alpha)$ qui est correctement normalisé et qui satisfait l'équation (5.20). Cette tâche nécessite, premièrement, de prendre en compte les erreurs ε inconnues et, deuxièmement, de traiter l'indétermination de l'ensemble des équations (5.20).

La procédure souvent utilisée pour analyser les données de bouée résout ces difficultés en introduisant un modèle paramétrique pour $\hat{f}_i$ qui satisfait exactement la normalisation et qui a un nombre de paramètres libres égal ou plus petit aux nombres d'équations de (5.20). C'est le modèle « a priori », $f_i^a(\alpha)$, qui est indépendant des données. Les paramètres du modèle « a priori » sont alors corrigés de manière à satisfaire au mieux les équations aux données suivant un critère basé sur la minimisation d'une fonction de pénalisation, η .

Cette fonction de pénalisation doit inclure une condition relative à la qualité de l'estimée. La matrice 4X4 des covariances des erreurs de mesure $\mathbf{V}$ est

$$\mathbf{V} = [\langle \varepsilon \varepsilon^T \rangle]$$

et est donnée à la table 5.2.

$V_{11} = \frac{1}{2} [d_1^2 z_1 - 2d_1 d_2 d_4 - d_3(2d_1^2 - 1) + 1] v^{-1}$
$V_{22} = \frac{1}{2} [d_2^2 z_1 - 2d_1 d_2 d_4 + d_3(2d_2^2 - 1) + 1] v^{-1}$
$V_{12} = \frac{1}{2} [d_1 d_2 z_1 - d_4(d_1^2 + d_2^2 - 1)] v^{-1}$
$V_{13} = [d_1 d_3 z_2 - d_1(d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - 1) - d_2 d_4(d_3 + 1)] v^{-1}$
$V_{23} = [d_2 d_3 z_2 - d_2(d_1^2 - d_2^2 - d_3^2 + 1) - d_1 d_4(d_3 - 1)] v^{-1}$
$V_{14} = [d_1 d_4(z_2 - d_3) - d_2(2d_1^2 + d_4^2 - d_3 - 1)] v^{-1}$
$V_{24} = [d_1 d_4(z_2 + d_3) - d_1(2d_2^2 + d_4^2 + d_3 - 1)] v^{-1}$
$V_{33} = (d_3^2 - 1)(d_3^2 + d_4^2 - 1) v^{-1}$
$V_{44} = (d_4^2 - 1)(d_3^2 + d_4^2 - 1) v^{-1}$
$V_{34} = d_3 d_4(d_3^2 + d_4^2 - 1) v^{-1}$
$V_{ij} = V_{ji}$
où
$z_1 = 2(d_1^2 + d_2^2 - 1) + \frac{1}{2}(d_3^2 + d_4^2 - 1)$
$z_2 = (d_1^2 + d_2^2 - 1) + \frac{1}{2}(d_3^2 + d_4^2 + 1)$

Table 5.2 : Eléments de la matrice **V** des covariances des données pour des observations des bouées roulis – tangage. v désigne le nombre de degrés de liberté de l'estimation du spectre et les d_i sont donnés par (5.21) (Lawson & Long, 1983)

Sous l'hypothèse que f est la vraie fonction angulaire du spectre correspondant à $\mathbf{d}$, les éléments de ε sont approximativement des gaussiennes jointes et une mesure appropriée de la taille de ε est, dès lors,

$$\rho^2 = \varepsilon^T \mathbf{V}^{-1} \varepsilon \quad (5.25)$$

Le paramètre ρ^2 indique la qualité de l'estimée, c'est une mesure de l'écart aléatoire entre le spectre ajusté et le mesuré. Il est défini à l'aide de l'erreur ε des quantités $\mathbf{d}$, directement déduites des mesures.

La variable aléatoire ρ^2 est distribuée selon une loi du χ^2 à 4 degrés de liberté (annexe 5.4). Le test statistique du χ^2 vérifie que le spectre ajusté est le vrai. On rejettera l'hypothèse que le spectre proposé est le vrai si ρ^2 est trop grand, c'est-à-dire supérieur à une valeur qui n'a qu'une probabilité p d'être dépassée par une variable χ^2_4 . Si on

choisit un intervalle de confiance de 80 %, l'hypothèse sera rejetée si $\rho^2 > 5,99^7$, valeur qui a une probabilité 0,20 d'être dépassée par la χ^2_4 . Le choix de l'intervalle de confiance à 80% procure un test de validité raisonnablement discriminant et implique que l'on rejette l'hypothèse dans 20% des cas où elle est, en fait, vraie. C'est un bon compromis entre discrimination et confiance statistique.

La fonction de pénalisation, η , doit aussi faire intervenir la minimisation de l'écart entre l'estimée $\hat{f}_i$ et le spectre « a priori » f_i^a et une condition qui impose que $\hat{f}_i$ soit partout positif.

Lawson & Long (1983) ne retiennent pas le test du χ^2 pour la contrainte sur ρ^2 mais ils imposent comme contrainte avec le multiplicateur de Lagrange τ :

$$\rho^2 = 5,99 \quad (5.26)$$

L'autre contrainte sur la normalisation est introduite avec le multiplicateur de Lagrange γ . La fonction de pénalisation prend la forme :

$$\eta = \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{f}_i - f_i^a)^2 d\alpha + \beta \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{f}_i - |\hat{f}_i|)^2 d\alpha + \tau \rho^2 + \gamma \left(1 - \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_i d\alpha\right) \quad (5.27)$$

La première partie de (5.27) pénalisera n'importe quel $\hat{f}_i$ qui présente de grandes déviations par rapport à f_i^a . La constante positive β donne un poids à la deuxième partie de (5.27) : elle interdit des valeurs négatives de $\hat{f}_i$. Le coefficient de Lagrange τ est celui qui est affecté à la grandeur du bruit des mesures. Le coefficient de Lagrange γ assure la normalisation de $\hat{f}_i$.

Cette fonction de pénalisation, η , est minimisée pour une variation arbitraire $\delta \hat{f}_i$ de $\hat{f}_i$.

Considérons d'abord le cas où $\hat{f}_i$ est partout positif, ce qui entraîne que le terme en β de (5.27) est nul. On obtient :

⁷ valeur donnée par la table des fractiles de la loi du χ^2 , pour $p = 0,80$ et quatre degrés de liberté

$$\partial\eta = 2 \int_{-\pi}^{\pi} [(\hat{f}_i - f_i^a) - \tau \varepsilon^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} - 0.5 \gamma] \partial \hat{f}_i d\alpha$$

Pour que la variation $\partial\eta$ s'annule pour une variation $\partial \hat{f}_i$ arbitraire, il faut que :

$$\hat{f}_i = f_i^a + \lambda^T \mathbf{b} + \lambda_5 \quad 0 \leq \hat{f}_i \quad (5.28.a)$$

où

$$\lambda = \tau \mathbf{V}^{-1} \varepsilon \quad (5.28.b)$$

et

$$\lambda_5 = 0,5 \gamma \quad (5.28.c)$$

Plus explicitement, si λ_i , $i = 1$ à 4 , sont les éléments du vecteur λ , on a encore :

$$\hat{f}_i = f_i^a + \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha + \lambda_3 \cos 2\alpha + \lambda_4 \sin 2\alpha + \lambda_5$$

Autrement dit, la correction appliquée à f_i^a prend la forme d'un développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2 dont les cinq coefficients sont donnés par (5.28.b) et (5.28.c).

Examinons ensuite le cas où $\hat{f}_i$ présente des valeurs négatives ; pour ces valeurs, $(\hat{f}_i - |\hat{f}_i|)^2 = 4 \hat{f}_i^2$. On obtient :

$$\partial\eta = 2 \int_{-\pi}^{\pi} [(\hat{f}_i - f_i^a) - \tau \varepsilon^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b} - 0,5 \gamma + 4 \beta \hat{f}_i] \partial \hat{f}_i d\alpha$$

dont l'annulation donne :

$$\hat{f}_i = (f_i^a + \lambda^T \mathbf{b} + \lambda_5)/(1+4\beta) \quad 0 > \hat{f}_i \quad (5.29)$$

Cette relation impose de faire tendre le paramètre β vers l'infini, si l'on veut que $\hat{f}_i$ se réduise à zéro dans les intervalles où il est négatif.

En conclusion, partant d'un spectre a priori f_i^a , on obtient l'estimée $\hat{f}_i$ du spectre en corrigeant f_i^a par un développement en série de Fourier tronqué dont les coefficients sont donnés par (5.28.b), (5.28.c), (5.31.b)

et (5.32), et en forçant $\hat{f}_i$ à zéro dans les intervalles où il est négatif. Les équations (5.28.a) et (5.29) deviennent :

$$\hat{f}_i = (f_i^a + \lambda^T \mathbf{b} + \lambda_5) H \quad (5.30.a)$$

où H est une fonction de masquage :

$$H = 0 \text{ quand } (f_i^a + \lambda^T \mathbf{b} + \lambda_5) < 0 \quad (5.30.b)$$

$$H = 1 \quad \text{sinon} \quad (5.30.c)$$

Le vecteur λ et le scalaire λ_5 représentent 5 paramètres libres qui sont fixés par la contrainte de normalisation (5.31.b) et les équations aux données (5.24). Utilisant (5.28.a), (5.29), (5.30.a), (5.30.b) et (5.30.c) dans ces dernières, nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{d}} = \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_i \mathbf{b} d\alpha = \tau^{-1} \mathbf{V} \lambda + \int_{-\pi}^{\pi} (f_i^a + \lambda^T \mathbf{b} + \lambda_5) H \mathbf{b} d\alpha \quad (5.31.a)$$

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_i^a + \lambda^T \mathbf{b} + \lambda_5) H d\alpha \quad (5.31.b)$$

Le multiplicateur de Lagrange τ se déduit de la contrainte (5.25), avec (5.28.b). Comme $\mathbf{V}$ est symétrique, nous obtenons :

$$\rho^2 = 1/\tau^2 \lambda^T \mathbf{V} \lambda \quad (5.32)$$

Résoudre les équations (5.31.a), (5.31.b) et (5.32), c'est trouver $\hat{f}_i$ qui les satisfait. Il s'agit d'un problème non linéaire implicite car H et $\mathbf{V}$ dépendent de la solution elle-même. En particulier, les éléments de $\mathbf{V}$ sont déterminés par les écarts ε entre le vecteur des données $\mathbf{d}$ et l'estimation $\tilde{\mathbf{d}}$ du vecteur des données, qui, elle-même, est calculée à partir de la solution recherchée – le spectre estimé - $\hat{f}_i$.

La stratégie numérique proposée par Long & Hasselman (Lawson & Long, 1983) est efficace pour cette application :

1. avec le spectre « a priori » f_i^a , ρ^2 est estimé par (5.25) ; on l'appelle $\rho^2_{\text{départ}}$;
2. une estimation initiale de λ_i ($i = 1$ à 5) fournit une solution initiale pour $\hat{f}_i$ et H via l'équation (5.30) et pour $\mathbf{V}$ via la table 5.2 ;

3. avec ces $\mathbf{V}$ et $\mathbf{H}$, on calcule une première estimation de τ qui réduit (5.31.a) et (5.31.b) en un système linéaire en λ_i ; celui-ci est résolu ;
4. à partir de ces nouveaux λ_i et en gardant τ fixé, on cherche le couple (τ, λ_i) tel que la contrainte en ρ^2 , évaluée par (5.32) et appelée ρ^2_λ soit égale à $5,99 \pm 5\%$;
5. aux λ_i solutions de l'étape 4, correspond un $\hat{f}_i$ et un ρ^2 estimé par (5.25) et appelé ρ^2_d ;
6. ρ^2_d plus grand (petit) que 5,99 indique une valeur τ trop petite (grande). Le paramètre τ est réestimé et les itérations sur λ_i sont réalisées à nouveau ; en d'autres termes, la réponse de ρ^2_d aux valeurs précédentes de τ est utilisée pour interpoler ou extrapoler la nouvelle estimation de τ ;
7. on considère que $\hat{f}_i$ est la solution recherchée lorsque ρ^2_λ et ρ^2_d se trouvent dans l'intervalle $5,99 \pm 5\%$ et sont donc pratiquement égaux; on les appelle ρ^2_{final} .

En général, six ou sept itérations sont requises pour fixer λ_i pour un τ fixé et quatre ou cinq itérations sur τ sont nécessaires pour parvenir à une solution satisfaisante, c'est-à-dire telle que à la fois $\varepsilon^T \mathbf{V}^{-1} \varepsilon$ et $1/\tau^2 \lambda^T \mathbf{V} \lambda$ soient égaux à 5,99. En pratique, l'algorithme demande qu'ils se trouvent, tous les deux, dans l'intervalle $5,99 \pm 5\%$.

En conclusion, cette méthode détermine le spectre directionnel $f(\alpha)$ correctement normalisé et satisfaisant (5.20). Un modèle « a priori » pour f , appelé f_i^a , est choisi. Son nombre de paramètres libres est égal ou plus petit au nombre d'équations de (5.20). Les paramètres du modèle sont alors ajustés jusqu'à ce que les erreurs ε soient minimisées. La solution ainsi trouvée est satisfaisante si ρ^2 (5.25) et (5.32) se trouve dans l'intervalle $5,99 \pm 5\%$. Un programme basé sur la méthode de traitement de Lawson & Long a été mis au point par Racapé au STPB. L'objectif de ce programme est de faire évoluer un modèle de fonction de distribution angulaire pour l'ajuster au mieux aux données mesurées par les bouées.

Une interprétation géométrique de la stratégie numérique de Lawson & Long (1983) est la suivante : on visualise le vecteur des données

observées $\mathbf{d}$ comme un point dans l'espace à 4 dimensions de tous les vecteurs possibles de données. Dans cet espace, une surface ellipsoïdale contient tous les points de données pour lesquels $\rho^2 = 5,99$, chacun correspondant à une distribution angulaire statistiquement acceptable et vraie, selon le χ^2 . Généralement, le point des données correspondant à $\mathbf{f}$ ne se trouve pas dans ce volume. Le traitement des données, selon l'algorithme, fournit alors le spectre $\hat{f}_i$ qui appartient à cette surface.

5.5.3 Influence du choix du modèle « a priori » sur le spectre directionnel ajusté

Cette section étudie la variabilité du spectre ajusté $\hat{f}_i$ en fonction du modèle choisi comme modèle initial de la procédure de calcul ou modèle « a priori » f_i^a . Dans un premier temps, nous définirons les spectres « a priori » utilisés dont deux nouveaux par rapport à ceux proposés par le programme du STPB. Ensuite, nous analyserons l'influence du modèle « a priori » sur le spectre ajusté.

Les deux spectres « a priori » proposés par le STPB sont le modèle de Mitsuyasu (annexe 5.5) et le modèle isotropique (aucune direction n'est privilégiée). Nous avons introduit un troisième spectre « a priori », le modèle développé en série de Fourier à partir des C_{ij} et Q_{ij} expérimentaux. Ce dernier modèle a été écarté par Long (1980) pour la raison suivante. Il est toujours possible de réduire les erreurs ε à zéro en utilisant un modèle avec un nombre de degrés de liberté identique à celui des équations aux données (5.20). Une telle procédure n'est pas intéressante parce que, même si le résultat est automatiquement statistiquement valide (tel que $\rho^2_{\text{départ}}$ inférieur à 5,99), un ajustement parfait à des données bruitées peut produire une version très distordue du vrai spectre. Toutefois, l'algorithme de Lawson & Long considère comme modèle « a priori » non pas exactement une série de Fourier, mais une série de Fourier dans laquelle les valeurs négatives sont forcées à zéro (figure 5.13). Nous avons montré, au travers de nombreux cas, qu'en forçant ces valeurs négatives à zéro, nous obtenons un spectre qui n'est pas nécessairement statistiquement valide (i.e. $\rho^2_{\text{départ}}$ peut être supérieur

à 5,99) et qui peut donc être retenu comme spectre « a priori ». Par ailleurs, nous avons aussi montré que, pour les cas où la série de Fourier est (pratiquement) toujours positive, ce spectre « a priori » est statistiquement valide et est généralement distordu, comme montré aux figures 5.14, 5.15 et 5.16 et annoncé par Long. En conclusion, le modèle en série de Fourier peut être accepté lorsqu'il présente des valeurs négatives, car en les forçant à zéro, nous obtenons un modèle « a priori » qui n'est pas nécessairement statistiquement valide.

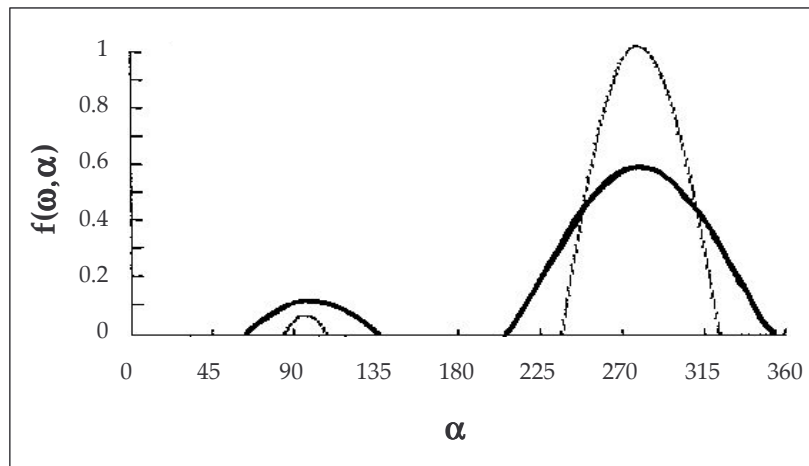


Figure 5.13 : Spectre « a priori » série de Fourier (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 25_309 (20/11/1987 à 11h15) bande n° 9 – $\rho^2_{\text{départ}} = 25,2 - \tau_{\text{fin}} = 1,4 \cdot 10^{-2}$

Un quatrième modèle « a priori » a aussi été introduit : l'échelon. Il est centré sur la direction moyenne du modèle de Mitsuyasu, α_0 (annexe 5.5) et de largeur π . C'est un modèle intermédiaire entre celui de Mitsuyasu et le modèle isotropique. Les résultats du traitement ne sont pas satisfaisants ; l'algorithme est très sensible aux discontinuités du modèle « a priori ». Le modèle échelon est tout de suite rejeté par le programme, selon le critère du χ^2 . Nous avons décidé de l'éliminer du choix des modèles « a priori ».

Il nous reste donc trois modèles « a priori » : le modèle de Mitsuyasu, le modèle isotropique et le modèle série de Fourier. Ils peuvent être comparés du point de vue du temps de calcul, celui-ci est plus long quand le traitement nécessite plus d'itérations :

$$T^{\text{calcul}}_{\text{Fourier}} < T^{\text{calcul}}_{\text{isotropique}} < T^{\text{calcul}}_{\text{Mitsuyasu}}$$

Considérons à présent l'influence du spectre « a priori » sur le spectre ajusté. Les exemples de l'estimation du spectre directionnel pour un même fichier mais avec différents spectres « a priori » sont présentés aux figures 5.14, 5.15 et 5.16. Ils montrent clairement l'influence du spectre « a priori » sur le spectre ajusté :

- modèle de Mitsuyasu : l'amplitude à l'endroit du pic moyen unique est amplifiée (figure 5.14) ;
- modèle isotropique : l'amplitude des pics est diminuée (figure 5.15). On pourrait supposer que le spectre isotropique est celui qui donnera le meilleur résultat car il ne privilégie aucune direction particulière, mais nous verrons, par la suite, que ce n'est pas toujours celui-ci qui est choisi comme spectre « a priori », parce qu'il ne conduit pas toujours au meilleur spectre ajusté ;
- modèle série de Fourier : deux pics à π l'un de l'autre apparaissent (figure 5.16).

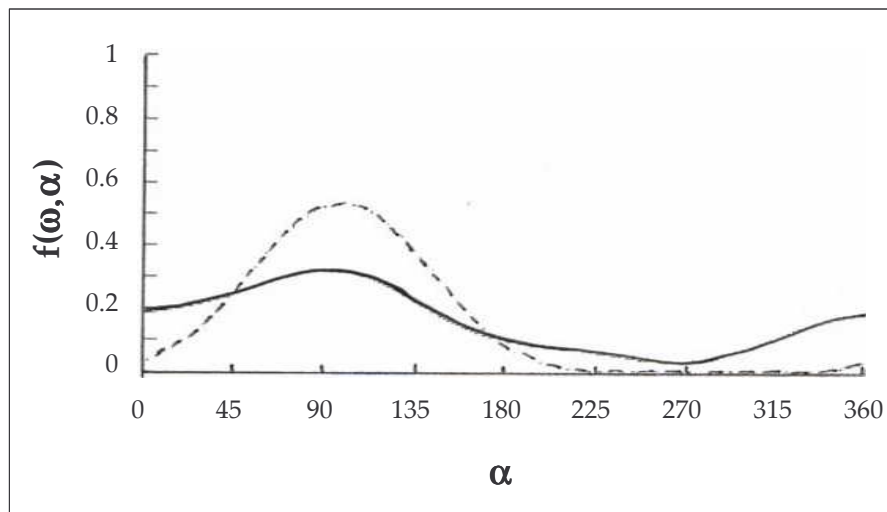


Figure 5.14 : Spectre « a priori » de Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_63 (06/12/1987 à 09h13)
bande n° 25 – $\rho^2_{\text{départ}} = 765,1$ – $\tau_{\text{fin}} = 1,1 \cdot 10^{-2}$

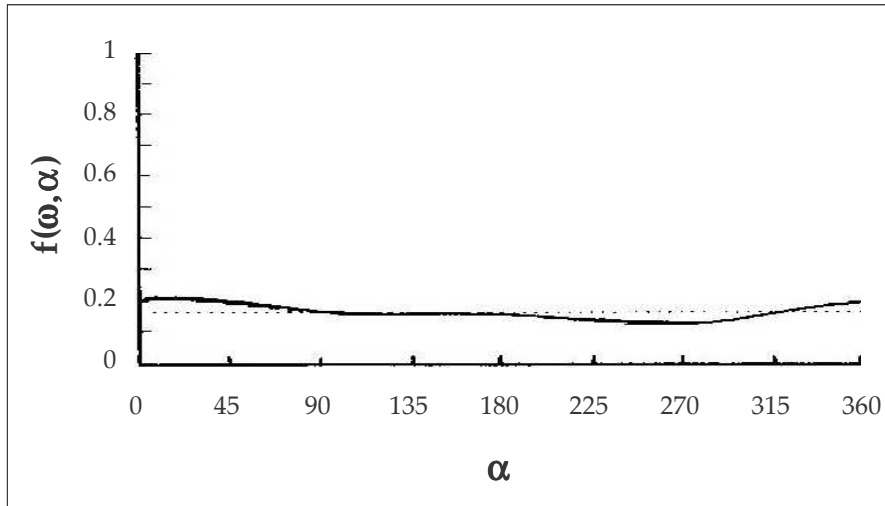


Figure 5.15 : Spectre « a priori » isotropique (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_63 (06/12/1987 à 09h13)
bande n° 25 – $\rho^2_{\text{départ}} = 10,8 - \tau_{\text{fin}} = 1,9 \cdot 10^{-3}$

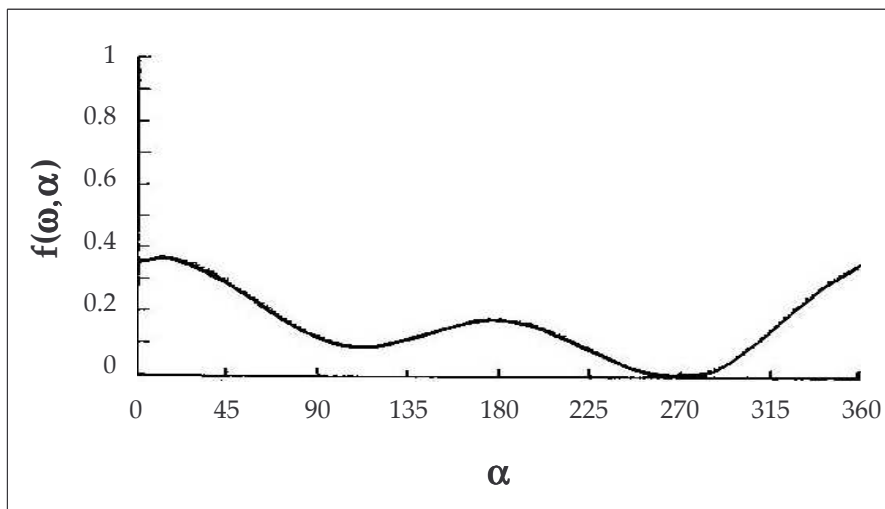


Figure 5.16 : Spectre « a priori » série de Fourier (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_63 (06/12/1987 à 09h13)
bande n° 25 – $\rho^2_{\text{départ}} = 3,3 \cdot 10^{-4}$

Parmi ces trois spectres estimés, lequel va-t-on retenir comme étant le meilleur ? C'est l'objet de la section 5.5.5. Mais avant d'aborder ce point, nous avons observé, grâce aux nombreux cas rencontrés, que

certaines spectres « a priori » peuvent d'emblée être éliminés. C'est ce qui est présenté ci-après.

5.5.4 Procédure de sélection parmi les spectres « a priori »

Le spectre ajusté $\hat{f}_i$ dépend du spectre « a priori ». Mais avant d'appliquer l'algorithme de Lawson & Long aux différents spectres « a priori », nous pouvons en écarter certains. Trois cas de figures sont possibles. Nous allons présenter les cas rencontrés à l'aide de plusieurs exemples représentatifs.

Dans un premier temps (premier cas), nous analysons la situation où $\rho^2_{\text{départ}}$ est inférieur à $5,99 + 5\%$. Ce modèle est immédiatement statistiquement valide, mais, en accord avec Long (1980), nous ne le retenons pas. Toutefois, lorsque tous les spectres « a priori » sont tels que $\rho^2_{\text{départ}}$ est inférieur à $5,99 + 5\%$, nous choisissons le spectre pour lequel $\rho^2_{\text{départ}}$ est le plus proche de 5,99 comme solution. Nous n'appliquons pas le traitement de Lawson & Long.

Ensuite (deuxième cas), nous avons constaté qu'il est préférable de rejeter les spectres « a priori » pour lesquels $\rho^2_{\text{départ}}$ est trop grand. Sur base des cas rencontrés, le seuil de rejet a été fixé, de manière empirique, à 1 000. En effet, au-delà de cette valeur, les spectres ajustés sont soit distordus, soit ne correspondent pas à ceux obtenus à des moments rapprochés et dans les bandes de fréquences voisines. Ceci est illustré aux figures 5.17, 5.18 et 5.19. A la figure 5.17, le spectre ajusté est distordu : trois pics existent, qui ne peuvent se justifier physiquement. A la figure 5.18, le spectre ajusté à partir du spectre « a priori » Mitsuyasu ne reproduit pas ce qu'indiquent les spectres ajustés à partir du spectre « a priori » isotropique (figure 5.19) et du spectre « a priori » série de Fourier (figure 5.13) : l'existence d'énergie à 180° du pic principal. Son existence peut s'expliquer par la présence d'une houle qui se serait réfléchi sur l'île d'Ouessant. Ce pic est donc significatif, le modèle « a priori » Mitsuyasu doit donc être rejeté.

Enfin (troisième cas), l'expérience montre qu'un spectre ajusté avec un modèle « a priori » de Mitsuyasu (figure 5.20) trop plat (le

paramètre s est petit) présente un point anguleux, qui est inexistant pour le spectre ajusté avec un modèle « a priori » isotropique (figure 5.21). Empiriquement, nous avons fixé le seuil minimal de s à 0,75.

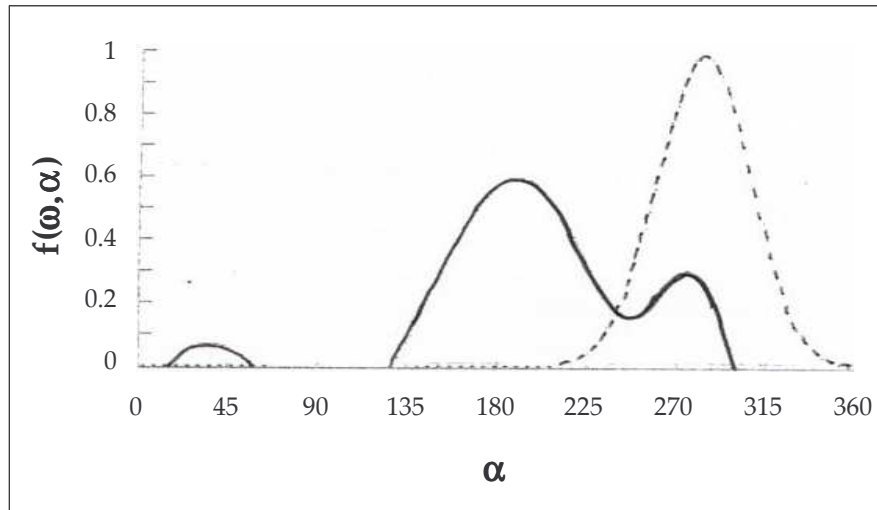


Figure 5.17 : Spectre « a priori » de Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_63 (06/12/1987 à 09h13) bande n° 15 – $\rho^2_{\text{départ}} = 94\,108$ – $\tau_{\text{fin}} = 3,4\,10^{-2}$

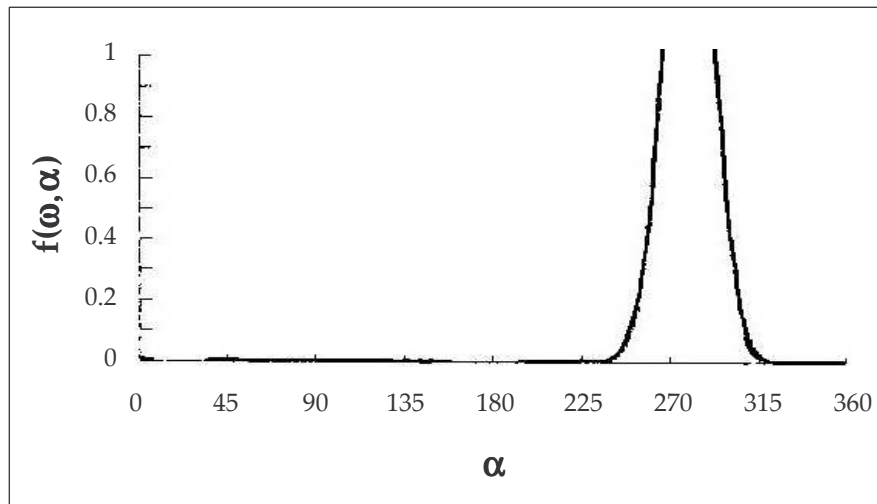


Figure 5.18 : Spectre « a priori » de Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 25_309 (20/11/1987 à 11h15) bande n° 9 – $\rho^2_{\text{départ}} = 53\,200$ – $\tau_{\text{fin}} = 8,8\,10^{-6}$

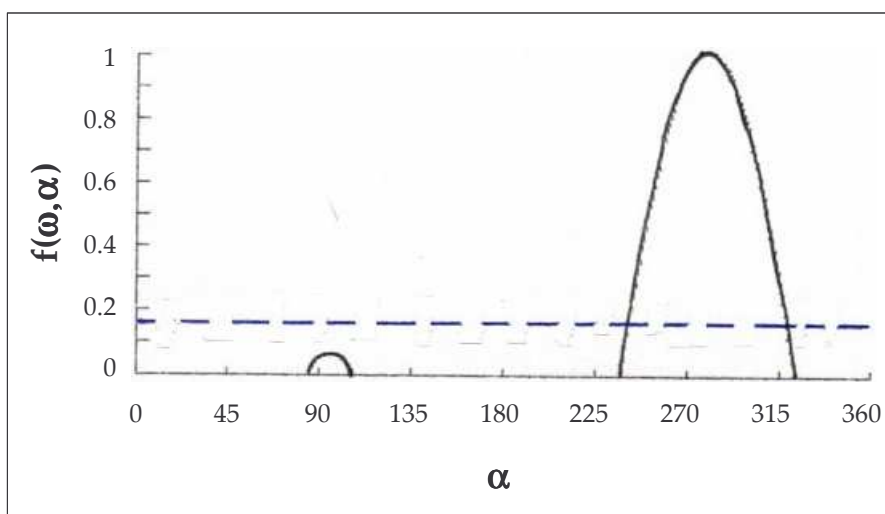


Figure 5.19 : Spectre « a priori » isotropique (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 25_309 (20/11/1987 à 11h15) bande n° 9 – $\rho^2_{\text{départ}} = 169,7$ – $\tau_{\text{fin}} = 2,0 \cdot 10^{-2}$

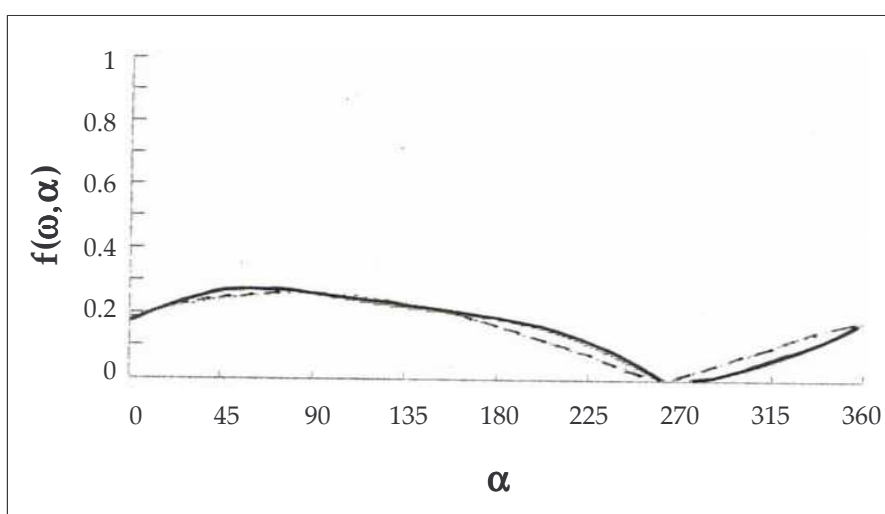


Figure 5.20 : Spectre « a priori » de Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_63 (06/12/1987 à 09h13) bande n° 24 – $\rho^2_{\text{départ}} = 10,2$ – $\tau_{\text{fin}} = 1,7 \cdot 10^{-3}$

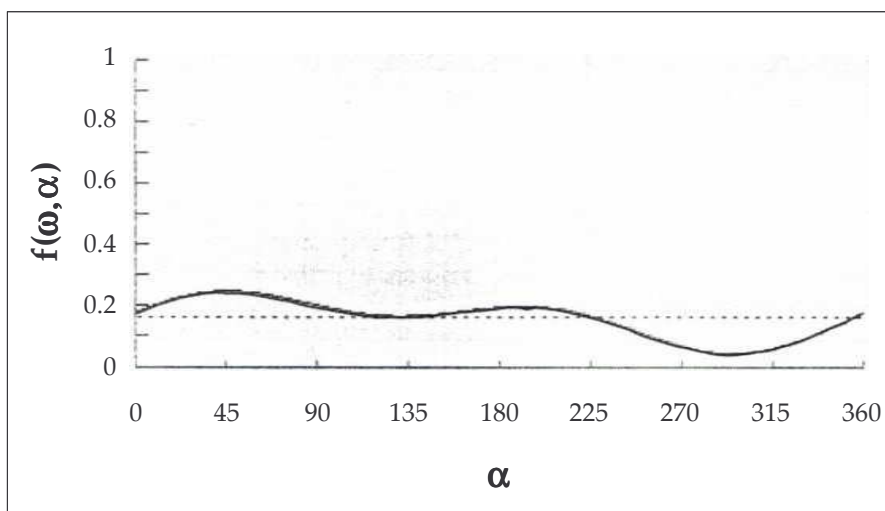


Figure 5.21 : Spectre « a priori » isotropique (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_63 (06/12/1987 à 09h13)
bande n° 24 – $\rho^2_{\text{départ}} = 15,8$ – $\tau_{\text{fin}} = 4,1 \cdot 10^{-3}$

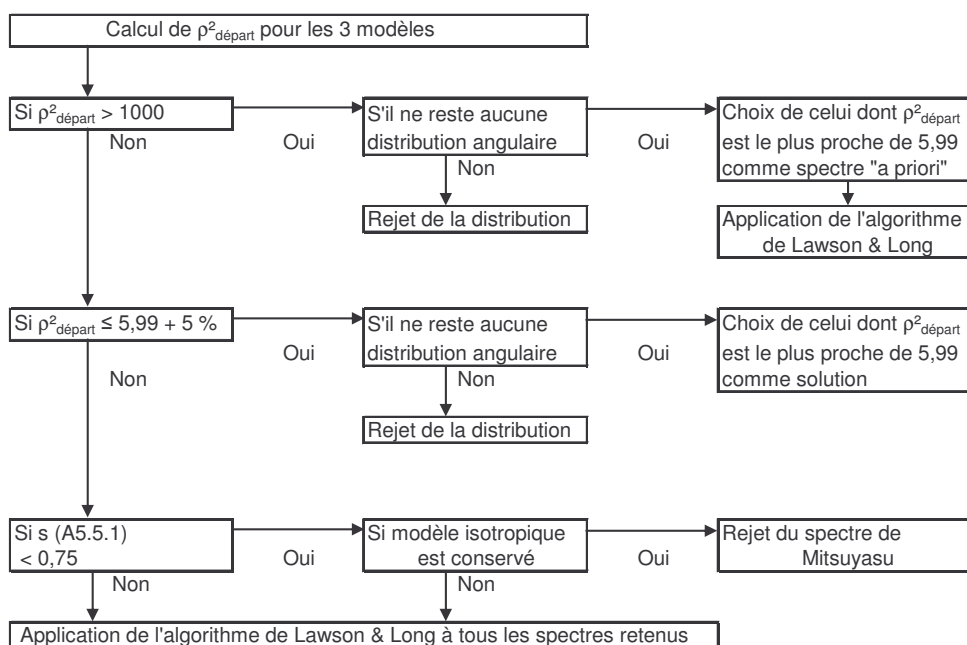


Figure 5.22 : Procédure de sélection parmi les spectres « a priori »

Sur base de cette analyse, nous avons mis au point une procédure de sélection au bout de laquelle 1,2 ou 3 spectres « a priori » sont retenus. Cette procédure de sélection est présentée à la figure 5.22. Il y a trois cas où le spectre « a priori » peut être écarté d'emblée :

- si le $\rho^2_{\text{départ}}$ est supérieur à 1000,
- si le $\rho^2_{\text{départ}}$ est inférieur à $5,99 + 5\%$,
- si s (paramètre du modèle de Mitsuyasu) est inférieur à 0,75.

5.5.5 Critères de choix parmi les spectres ajustés statistiquement valides

L'étude de la variabilité du spectre ajusté en fonction du modèle « a priori » amène une nouvelle question : quel critère peut être pris en compte afin de décider lequel parmi les spectres ajustés est le meilleur. En effet, ils auront tous été obtenus à partir de la minimisation de η (fonction de pénalisation (5.27)) sur base de $\rho^2 = 5,99 \pm 5\%$. Ils satisfont donc à ce dernier critère. De plus, ils sont semblables du point de vue énergétique, grâce à la normalisation :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha = 1 \quad (5.33)$$

Mais, ils sont différents par la valeur en α du maximum, son amplitude, sa largeur, ... Notre objectif est, cependant, de n'en retenir qu'un seul.

Un grand nombre d'analyses de spectres ajustés et de comparaisons de spectres ajustés obtenus à partir de différents spectres « a priori » nous ont permis de mettre au point une procédure de choix parmi ces spectres ajustés. Pour ce faire, d'autres informations ont été prises en compte : comparaison avec des spectres ajustés obtenus pour les mêmes bandes de fréquence à des moments proches, comparaison avec des spectres ajustés obtenus au même moment pour des bandes voisines, informations supplémentaires sur les particularités de la mer à l'endroit de la bouée (par exemple, connaissance préalable de l'existence d'une houle réfléchiée par la côte du continent en face de l'île d'Ouessant). Toutes ces informations permettent d'éliminer les spectres ajustés à partir de spectres « a priori » qui ne donnent pas le même nombre de pics ou des pics à des emplacements différents.

Grâce à ces analyses et comparaisons, nous avons pu établir, par tâtonnement, des critères de sélection, qui tiennent compte des informations complémentaires. Ces critères peuvent alors être utilisés, sans plus avoir recours aux informations complémentaires. Nous illustrons, ci-après, les différents critères de sélection retenus à l'aide d'exemples représentatifs.

Examinons d'abord le premier critère, à savoir $\tau_{\text{fin}} \geq 10^{-4}$. Les spectres ajustés statistiquement valides répondent au critère $\rho^2 \leq 5,99 + 5\%$. Le test statistique sur ρ^2 , la mesure de l'écart entre spectres ajusté et mesuré, sert de contrainte à la minimisation de η à l'aide des multiplicateurs de Lagrange β , τ et γ . L'équation (5.32) fournit la contrainte supplémentaire nécessaire pour fixer τ . On obtient ainsi un et un seul τ qui rend η minimum tout en conservant ϵ suffisamment petit (sa mesure est ρ^2). Les valeurs de ρ^2 et τ sont donc liées. Le traitement des données basé sur l'algorithme de Lawson & Long fournit deux indicateurs :

- $\rho^2_{\text{départ}}$ qui donne une estimation de l'écart entre le spectre « a priori » et le spectre mesuré,
- τ_{fin} qui donne une estimation de l'ajustement entre le spectre mesuré et le spectre ajusté.

Nous avons déjà abordé les valeurs acceptables de ρ^2 (5.5.4), mais il faut aussi que τ ne soit pas égal à zéro. Nous écarterons donc les spectres ajustés qui ont un τ_{fin} qui est plus petit que 10^{-4} . Le choix de ce seuil est arbitraire ; les cas analysés montrent qu'il est raisonnable. Les figures 5.23 à 5.25 illustrent l'application de ce critère : le spectre de la figure 5.23 est rejeté; il est clairement différent des deux autres : il possède un seul pic très étroit.

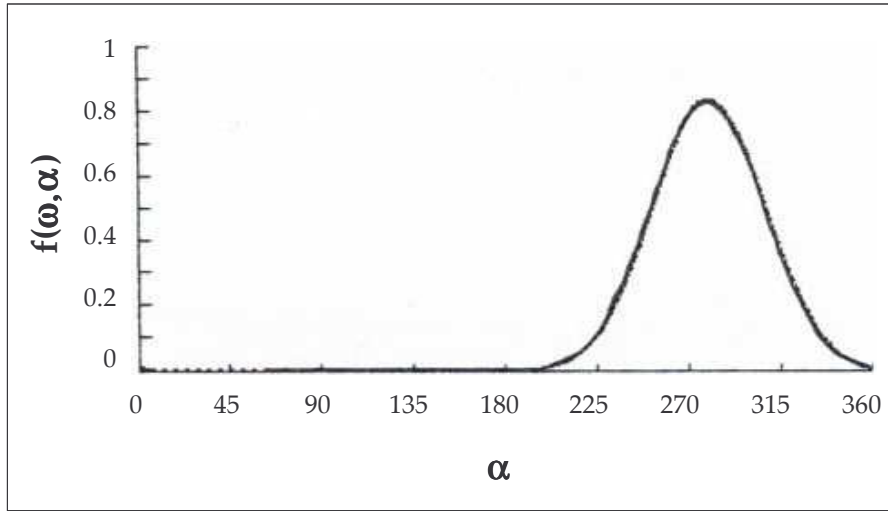


Figure 5.23 : Spectre « a priori » Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 25_286 (19/11/1987 à 12h32) bande n° 11 – $\rho^2_{\text{départ}} = 63,7$ – $\tau_{\text{fin}} = 2,4 \cdot 10^{-5}$

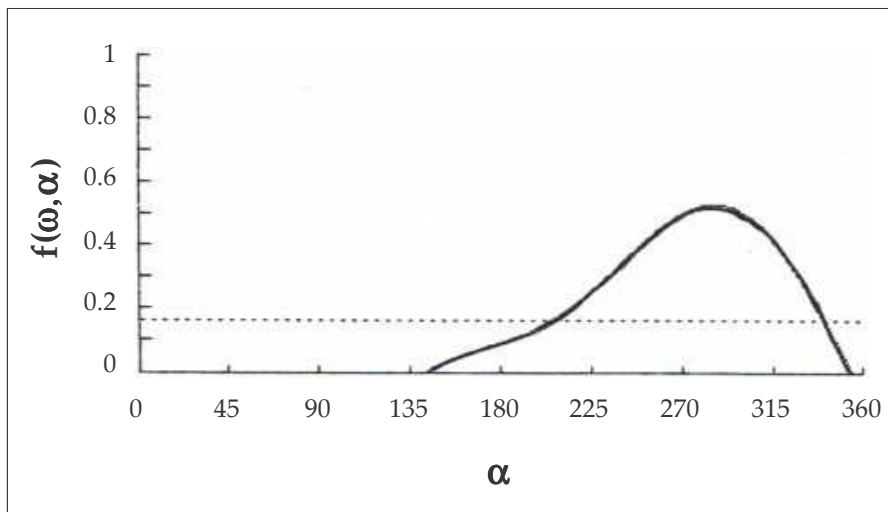


Figure 5.24 : Spectre « a priori » isotropique (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 25_286 (19/11/1987 à 12h32) bande n° 11 – $\rho^2_{\text{départ}} = 67,9$ – $\tau_{\text{fin}} = 1,3 \cdot 10^{-2}$

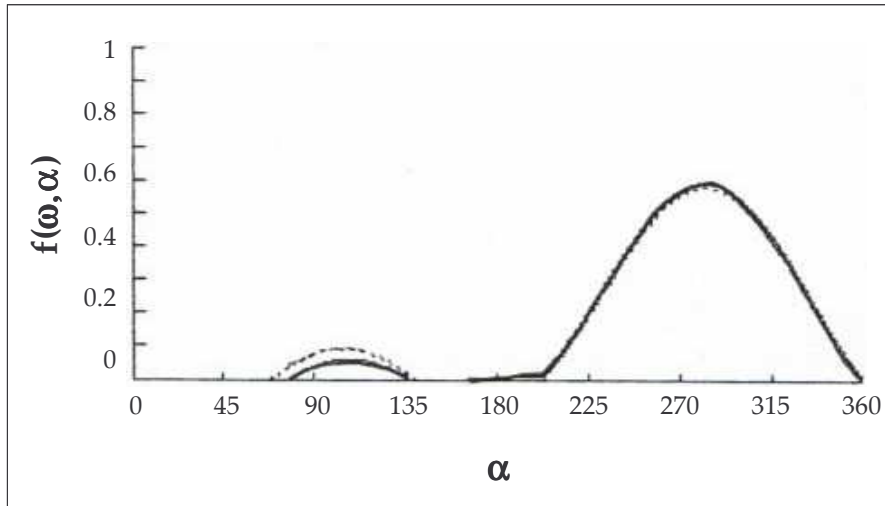


Figure 5.25 : Spectre « a priori » série de Fourier (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 25_286 (19/11/1987 à 12h32) bande n° 11 – $\rho^2_{\text{départ}} = 7,7 - \tau_{\text{fin}} = 4,2 \cdot 10^{-4}$

Poursuivons avec le deuxième critère, relatif aux nombres et emplacements des pics. Reprenons les figures 5.24 et 5.25. Selon le critère précédent, les deux spectres ajustés sont retenus. Cependant, le pic aux environs de 110° du spectre série de Fourier provient du modèle « a priori » série de Fourier mais ne correspond à aucun pic réel, ce que nous avons constaté par les analyses et comparaisons de spectres ajustés pour des moments ou des bandes de fréquence proches. C'est pourquoi nous privilégions le modèle isotropique par rapport au modèle série de Fourier, si le nombre et l'emplacement des pics de la série de Fourier ne correspondent pas à ceux de l'isotropique.

Le troisième et dernier critère permet de choisir le spectre ajusté lorsqu'il en reste deux ou trois : le spectre ajusté dont le modèle « a priori » se rapproche le plus possible de $5,99 \pm 5\%$ est choisi comme spectre directionnel. Considérons l'exemple, où deux spectres sont retenus (figures 5.26 et 5.27) ; c'est le spectre ajusté Mitsuyasu qui est retenu en vertu du troisième critère.

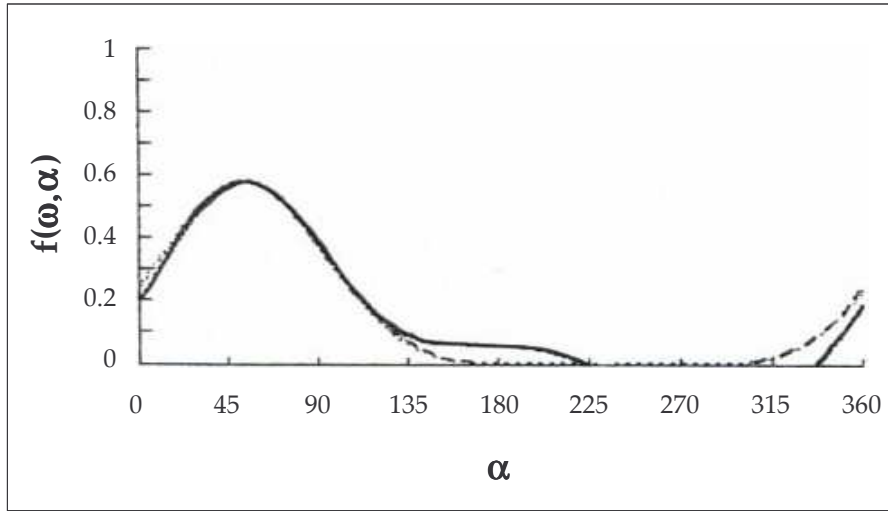


Figure 5.26 : Spectre « a priori » Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_32 (02/12/1987 à 11h52) bande n° 20 – $\rho^2_{\text{départ}} = 11,9$ – $\tau_{\text{fin}} = 1,1 \cdot 10^{-3}$

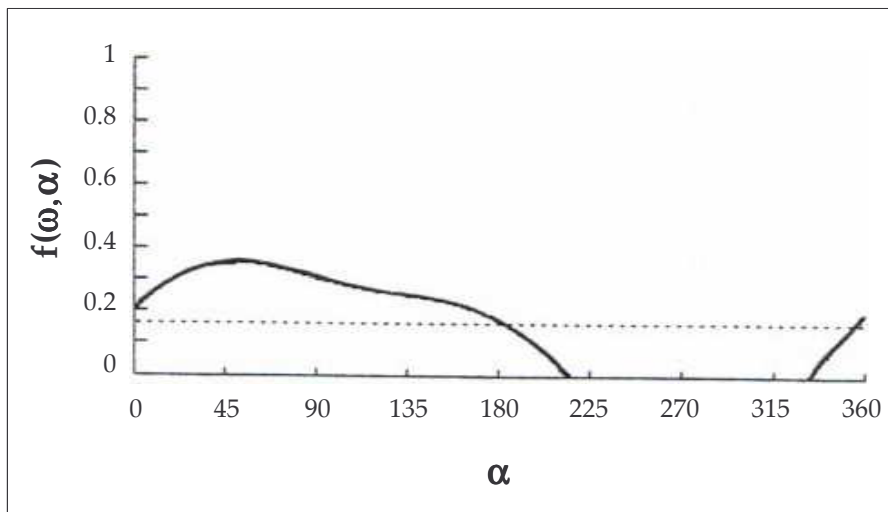


Figure 5.27 : Spectre « a priori » isotropique (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 28_32 (02/12/1987 à 11h52) bande n° 20 – $\rho^2_{\text{départ}} = 40,1$ – $\tau_{\text{fin}} = 5,8 \cdot 10^{-3}$

Un autre exemple de son application est présenté aux figures 5.28, 5.29 et 5.30. Notre critère choisit le spectre ajusté série de Fourier. On

remarquera, par ailleurs, que le spectre ajusté obtenu à partir du spectre « a priori » de Mitsuyasu (figure 5.28) est rejeté par le troisième critère et qu'il le serait aussi par la connaissance de la situation en mer. En effet, la situation en mer dicte le choix d'un modèle à deux lobes, l'isotropique (figure 5.29) ou le série de Fourier (figure 5.30), tandis que le spectre Mitsuyasu présente un seul lobe, qui est la moyenne des deux autres.

A travers ces exemples et ceux fournis par les autres fichiers de données de la bouée BEATRICE, il apparaît qu'il n'y a pas de spectre « a priori » qui fournit plus de spectres ajustés que les autres. Il faut cependant remarquer que le spectre série de Fourier est moins représenté car il est plus souvent éliminé immédiatement par la procédure de sélection parmi les spectres « a priori », pour les raisons expliquées en 5.5.3.

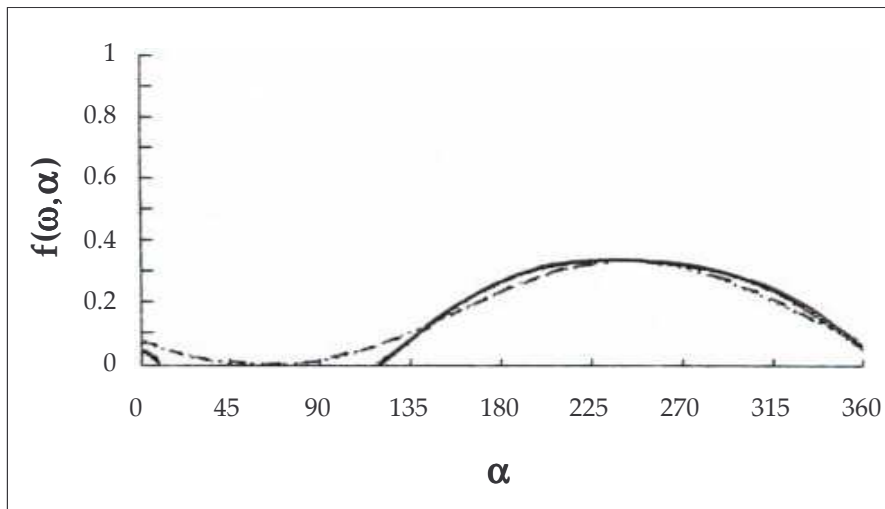


Figure 5.28 : Spectre « a priori » Mitsuyasu (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 17_142 (29/04/1987 à 18h17) bande n° 13 – $\rho^2_{\text{départ}} = 9,2 - \tau_{\text{fin}} = 1,6 \cdot 10^{-3}$

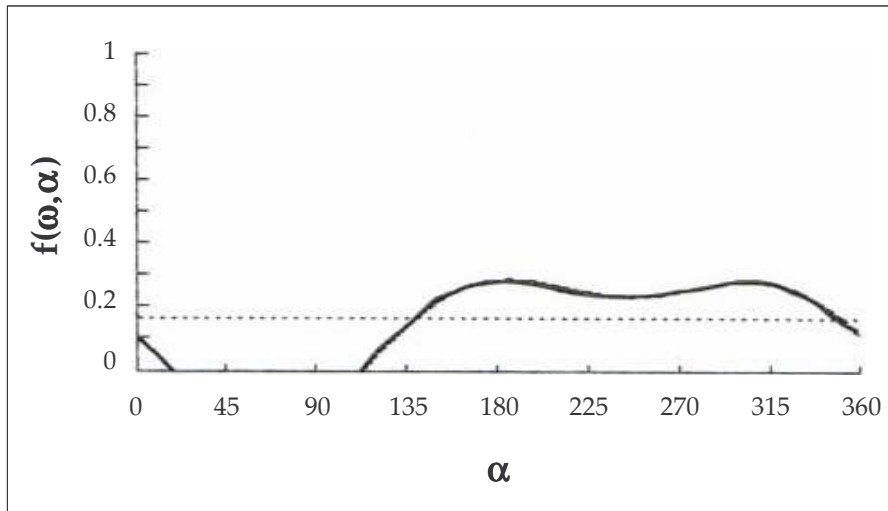


Figure 5.29 : Spectre « a priori » isotropique (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 17_142 (29/04/1987 à 18h17) bande n° 13 – $\rho^2_{\text{départ}} = 21,0$ – $\tau_{\text{fin}} = 4,3 \cdot 10^{-3}$

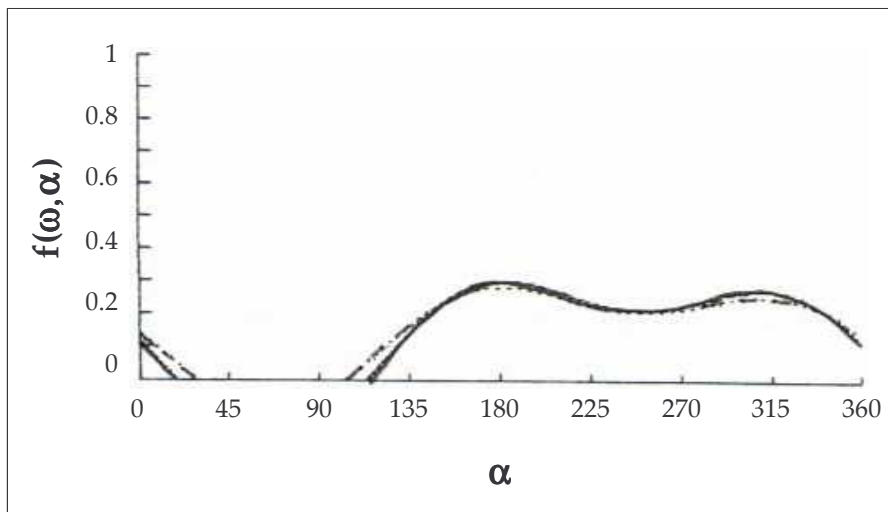


Figure 5.30 : Spectre « a priori » série de Fourier (traits pointillés) et spectre ajusté (traits pleins) pour le fichier 17_142 (29/04/1987 à 18h17) bande n° 13 – $\rho^2_{\text{départ}} = 7,29$ – $\tau_{\text{fin}} = 1,2 \cdot 10^{-3}$

La figure 5.31 résume les critères mis au point pour choisir, parmi les spectres ajustés, le spectre directionnel ajusté aux mesures de la bouée BEATRICE.

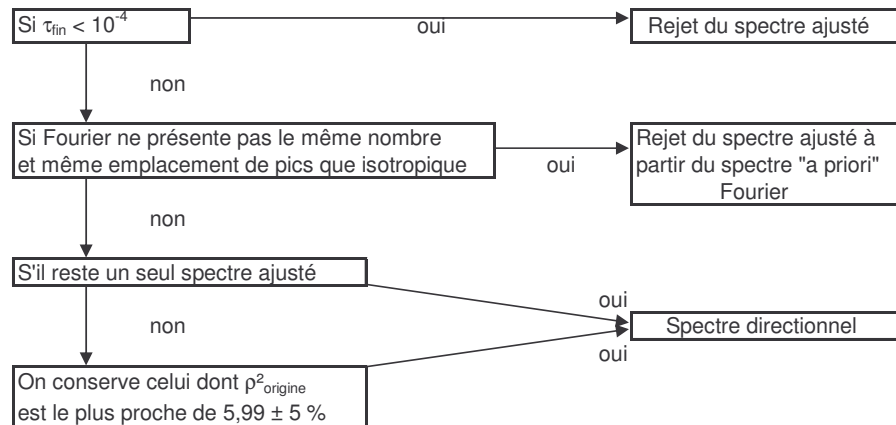


Figure 5.31 : Procédure de choix parmi les spectres ajustés

La procédure globale de calcul du spectre ajusté est basée sur l'algorithme de Lawson & Long, que nous avons étendu en introduisant un nouveau modèle « a priori » - le série de Fourier -, une sélection parmi les spectres « a priori » (figure 5.22) et un choix parmi les spectres ajustés (figure 5.31). Cette procédure permet de retrouver des houles croisées comme montré à travers ces exemples.

5.6 Conclusion

La fonction de distribution angulaire pour la télédétection est celle basée sur les mesures de Cox & Munk. C'est le modèle UCL-3 donné par (5.3). Nous le préférons au modèle Elfo, parce que

- 1) sur le domaine correspondant aux vagues capillo-gravifiques, domaine couvert par les radars, les deux modèles sont équivalents ;
- 2) comme souligné par Lemaire (1998), la fonction proposée reproduit qualitativement un grand nombre d'observations, mais c'est une formule empirique dont le choix des différents termes n'est pas justifié ;

- 3) le modèle tiré des résultats de Cox & Munk se base sur une réalité physique ;
- 4) le modèle Elfo est approprié pour décrire des mers cylindriques et le modèle UCL-3 pour des mers moins directionnelles ; or dans la réalité, les deux situations existent, mais les mers cylindriques constituent un cas plutôt rare.

Le modèle UCL-3 est donc bien approprié pour décrire le spectre directionnel mesuré par le radar.

La partie suivante qui compare les distributions angulaires de la bouée et des radars constitue l'apport le plus original du chapitre. Une comparaison exacte n'est pas possible car le radar, contrairement à la bouée, ne peut distinguer des directions opposées dans le spectre. Ce problème est contourné par la comparaison des spectres $\phi_0(\omega, \alpha)$ donnés par (5.9) et (5.10). Nous montrons que la distribution angulaire du radar sur le domaine complet des fréquences est donnée par la combinaison d'un spectre directionnel pour les grandes vagues, comme celles mesurées par la bouée (du type Elfo) et d'un spectre plus omnidirectionnel pour les petites vagues, comme celles mesurées par le radar (du type UCL-3).

Nous terminons par l'étude de la fonction de distribution angulaire pour la bouée BEATRICE, obtenue à partir des co et quad-spectres. Lors de stages au STPB, nous avons testé puis amélioré un algorithme de détermination du spectre directionnel des états de mer. L'objectif de ce programme, basé sur la méthode de traitement de Lawson & Long, est de faire évoluer un modèle de distribution angulaire, appelé modèle « a priori », pour l'ajuster au mieux aux données mesurées par les bouées. Le programme du STPB prévoit le choix entre deux spectres « a priori » : le modèle de Mitsuyasu (annexe 5.5) ou le modèle isotropique (aucune direction n'est privilégiée). Nous avons introduit un troisième spectre « a priori », le modèle développé en série de Fourier à partir des C_{ij} et Q_{ij} expérimentaux. L'analyse des performances de cet algorithme en fonction du modèle « a priori », que nous avons effectuée, a montré que tous ces modèles « a priori » ne sont pas nécessairement statistiquement valides. Dès lors, nous avons mis au point une procédure de sélection au bout de laquelle 1, 2 ou 3 spectres « a priori » sont retenus. Celle-ci est présentée à la figure 5.22. Lorsque nous retenons plusieurs spectres « a priori » qui

fournissent plusieurs spectres ajustés, nous devons fixer les critères qui permettent de choisir le meilleur parmi ceux-ci. La figure 5.31 résume les critères de choix du meilleur spectre directionnel, ajusté aux mesures de la bouée BEATRICE. Cette procédure permet de retrouver des houles croisées comme montré à travers divers exemples.

Ainsi, en ce qui concerne le traitement des données d'une bouée instrumentée, l'apport original de cette thèse est constitué, d'une part, par l'analyse de l'influence du choix du modèle « a priori » sur le spectre directionnel ajusté, d'autre part, par la mise au point de la procédure de sélection parmi les spectres « a priori » et, finalement, par la définition des critères de choix parmi les spectres ajustés statistiquement valides.

Annexe 5.1

Raies spectrales

Pour chaque raie spectrale, la fréquence est celle du milieu de la bande. L'intervalle en fréquence $[1/2048 ; 1/2]$ Hz est divisé en 64 bandes de largeur constante $1/128$ Hz, soit $[(1+(n-1)16)/2048 ; 16n/2048]$ pour n allant de 1 à 64. La relation de dispersion nous donne pour les grandes vagues :

$$\omega^2 = gK$$

soit

$$\Lambda = g/2\pi T^2 \approx 1,5613 T^2$$

Raie	Période T (s)	Fréquence ν (Hz)	Pulsation ω (Hz)	Longueur d'onde Λ (m)	Nombre d'onde K (m^{-1})
1	240,94	$4,150 \cdot 10^{-3}$	$2,608 \cdot 10^{-2}$	$9,064 \cdot 10^4$	$6,933 \cdot 10^{-5}$
2	83,59	$1,196 \cdot 10^{-2}$	$7,517 \cdot 10^{-2}$	$1,091 \cdot 10^4$	$5,759 \cdot 10^{-4}$
3	50,57	$1,977 \cdot 10^{-2}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$3,993 \cdot 10^3$	$1,572 \cdot 10^{-3}$
4	36,25	$2,759 \cdot 10^{-2}$	$1,733 \cdot 10^{-1}$	$2,052 \cdot 10^3$	$3,062 \cdot 10^{-3}$
5	28,25	$3,540 \cdot 10^{-2}$	$2,224 \cdot 10^{-1}$	$1,246 \cdot 10^3$	$5,042 \cdot 10^{-3}$
6	23,14	$4,321 \cdot 10^{-2}$	$2,715 \cdot 10^{-1}$	$8,360 \cdot 10^2$	$7,515 \cdot 10^{-3}$
7	19,60	$5,102 \cdot 10^{-2}$	$3,206 \cdot 10^{-1}$	$5,998 \cdot 10^2$	$1,048 \cdot 10^{-2}$
8	17,00	10^{-2}	10^{-1}	$4,512 \cdot 10^2$	10^{-2}
9	15,00	$6,667 \cdot 10^{-2}$	$4,189 \cdot 10^{-1}$	$3,513 \cdot 10^2$	$1,789 \cdot 10^{-2}$
10	13,43	10^{-2}	10^{-1}	$2,816 \cdot 10^2$	10^{-2}
11	12,15	$8,230 \cdot 10^{-2}$	$5,171 \cdot 10^{-1}$	$2,305 \cdot 10^2$	$2,726 \cdot 10^{-2}$
12	11,10	10^{-2}	10^{-1}	$1,924 \cdot 10^2$	10^{-2}
13	10,21	$9,794 \cdot 10^{-2}$	$6,154 \cdot 10^{-1}$	$1,628 \cdot 10^2$	$3,860 \cdot 10^{-2}$
14	9,46	$1,057 \cdot 10^{-1}$	$6,642 \cdot 10^{-1}$	$1,477 \cdot 10^2$	$4,497 \cdot 10^{-2}$

Raie	Période	Fréquence	Pulsation	Longueur d'onde	Nombre d'onde
	T (s)	ν (Hz)	ω (Hz)	Λ (m)	K (m^{-1})
15	8,81	$1,135 \cdot 10^{-1}$	$7,132 \cdot 10^{-1}$	$1,212 \cdot 10^2$	$5,185 \cdot 10^{-2}$
16	8,24	$1,214 \cdot 10^{-1}$	$7,625 \cdot 10^{-1}$	$1,060 \cdot 10^2$	$5,927 \cdot 10^{-2}$
17	7,74	$1,292 \cdot 10^{-1}$	$8,118 \cdot 10^{-1}$	9,354 10	$6,718 \cdot 10^{-2}$
18	7,30	10^{-1}	10^{-1}	8,320 10	10^{-2}
19	6,91	$1,447 \cdot 10^{-1}$	$9,093 \cdot 10^{-1}$	7,455 10	$8,428 \cdot 10^{-2}$
20	6,55	$1,527 \cdot 10^{-1}$	$9,593 \cdot 10^{-1}$	6,698 10	$9,380 \cdot 10^{-2}$
21	6,23	$1,605 \cdot 10^{-1}$	1,008	6,060 10	$1,037 \cdot 10^{-1}$
22	5,94	10^{-1}		5,509 10	10^{-1}
23	5,68	$1,761 \cdot 10^{-1}$	1,106	5,037 10	$1,247 \cdot 10^{-1}$
24	5,44	10^{-1}		4,620 10	10^{-1}
25	5,22	$1,916 \cdot 10^{-1}$	1,204	4,254 10	$1,477 \cdot 10^{-1}$
26	5,01	10^{-1}		3,919 10	10^{-1}
27	4,82	$2,075 \cdot 10^{-1}$	1,304	3,627 10	$1,732 \cdot 10^{-1}$
28	4,65	10^{-1}		3,376 10	10^{-1}
29	4,49	$2,227 \cdot 10^{-1}$	1,399	3,148 10	$1,996 \cdot 10^{-1}$
30	4,33	10^{-1}		2,927 10	10^{-1}
31	4,19	$2,387 \cdot 10^{-1}$	1,500	2,741 10	$2,992 \cdot 10^{-1}$
32	4,06	10^{-1}		2,574 10	10^{-1}
33	3,93	$2,544 \cdot 10^{-1}$	1,599	2,411 10	$2,606 \cdot 10^{-1}$
34	3,82	10^{-1}		2,278 10	10^{-1}
35	3,71	$2,695 \cdot 10^{-1}$	1,694	2,149 10	$2,924 \cdot 10^{-1}$
36	3,60	10^{-1}		2,023 10	10^{-1}
37	3,50	$2,857 \cdot 10^{-1}$	1,795	1,913 10	$3,285 \cdot 10^{-1}$
38	3,41	$2,933 \cdot 10^{-1}$	1,843	1,815 10	$3,461 \cdot 10^{-1}$
39	3,32	$3,012 \cdot 10^{-1}$	1,892	1,721 10	$3,651 \cdot 10^{-1}$
40	3,24	10^{-1}		1,639 10	10^{-1}
41	3,16	$3,165 \cdot 10^{-1}$	1,988	1,559 10	$4,030 \cdot 10^{-1}$
42	3,08	10^{-1}		1,481 10	10^{-1}
43	3,01	$3,322 \cdot 10^{-1}$	2,087	1,414 10	$4,442 \cdot 10^{-1}$
44	2,94	10^{-1}		1,349 10	10^{-1}
45	2,87	$3,484 \cdot 10^{-1}$	2,189	1,286 10	$4,886 \cdot 10^{-1}$
46	2,81	10^{-1}		1,233 10	10^{-1}
47	2,75	$3,636 \cdot 10^{-1}$	2,285	1,181 10	$5,321 \cdot 10^{-1}$
48	2,69	10^{-1}		1,130 10	10^{-1}
49	2,64	$3,788 \cdot 10^{-1}$	2,380	1,088 10	$5,774 \cdot 10^{-1}$
50	2,58	10^{-1}		1,039 10	10^{-1}

Raie	Période	Fréquence	Pulsation	Longueur d'onde	Nombre d'onde
	T (s)	ν (Hz)	ω (Hz)	Λ (m)	K (m^{-1})
51	2,53	$3,953 \cdot 10^{-1}$	2,483	9,994	$6,287 \cdot 10^{-1}$
52	2,48	10^{-1}		9,603	10^{-1}
53	2,44	$4,098 \cdot 10^{-1}$	2,575	9,295	$6,759 \cdot 10^{-1}$
54	2,39	10^{-1}		8,918	10^{-1}
55	2,35	$4,255 \cdot 10^{-1}$	2,674	8,622	$7,287 \cdot 10^{-1}$
56	2,31	10^{-1}		8,331	10^{-1}
57	2,26	$4,425 \cdot 10^{-1}$	2,780	7,974	$7,879 \cdot 10^{-1}$
58	2,22	10^{-1}		7,695	10^{-1}
59	2,19	$4,566 \cdot 10^{-1}$	2,869	7,488	$8,391 \cdot 10^{-1}$
60	2,15	10^{-1}		7,217	10^{-1}
61	2,11	$4,739 \cdot 10^{-1}$	2,978	6,951	$9,039 \cdot 10^{-1}$
62	2,08	10^{-1}		6,755	10^{-1}
63	2,05	$4,878 \cdot 10^{-1}$	3,065	6,561	$9,576 \cdot 10^{-1}$
64	2,01	$4,975 \cdot 10^{-1}$	3,126	6,308	$9,961 \cdot 10^{-1}$

Annexe 5.2

Mesure du spectre directionnel de la surface de la mer à partir d'une bouée instrumentée

Pour décrire statistiquement l'état de la mer, un spectre directionnel est utilisé. Il peut être estimé à partir de mesures en un point fixé où ζ , ζ_x et ζ_y sont enregistrés en fonction du temps, ce qui est le cas d'une bouée instrumentée. Considérons son développement en série de Fourier, donné par (5.7) :

$$\mathcal{H}(\omega, \alpha) = e_0/2 + e_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha + e_2 \cos 2\alpha + b_2 \sin 2\alpha + \dots$$

où

$$e_n = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\alpha} \mathcal{H}(\omega, \alpha) d\alpha \right]$$

$$b_n = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\alpha} \mathcal{H}(\omega, \alpha) d\alpha \right]$$

c'est-à-dire

$$e_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\omega, \alpha) d\alpha$$

$$e_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\omega, \alpha) \cos \alpha d\alpha \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\omega, \alpha) \sin \alpha d\alpha$$

$$e_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\omega, \alpha) \cos 2\alpha d\alpha \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\omega, \alpha) \sin 2\alpha d\alpha$$

Ce développement en série peut encore s'écrire sous la forme de l'équation (5.6):

$$\mathcal{H}(\omega, \alpha) = A_0 + A_1 \cos(\alpha - \theta_1) + A_2 \cos 2(\alpha - \theta_2)$$

avec :

$$e_0 = 2A_0 \quad (\text{A5.2.1a})$$

$$e_1 = A_1 \cos \theta_1 \quad (\text{A5.2.1b})$$

$$b_1 = A_1 \sin \theta_1 \quad (\text{A5.2.1c})$$

$$e_2 = A_2 \cos 2\theta_2 \quad (\text{A5.2.1d})$$

$$b_2 = A_2 \sin 2\theta_2 \quad (\text{A5.2.1e})$$

Si on pose les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(\omega, \alpha) d\alpha \quad (\text{A5.2.2a})$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} K \mathcal{H}(\omega, \alpha) \cos \alpha d\alpha \quad (\text{A5.2.2b})$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} K \mathcal{H}(\omega, \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (\text{A5.2.2c})$$

$$I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} K^2 \mathcal{H}(\omega, \alpha) \cos^2 \alpha d\alpha \quad (\text{A5.2.2d})$$

$$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} K^2 \mathcal{H}(\omega, \alpha) \cos \alpha \sin \alpha d\alpha \quad (\text{A5.2.2e})$$

$$I_6 = \int_{-\pi}^{\pi} K^2 \mathcal{H}(\omega, \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha \quad (\text{A5.2.2f})$$

on trouve que

$$e_0 = 1/\pi I_1 \quad (\text{A5.2.3a})$$

$$e_1 = I_2/\pi K \quad \text{et} \quad b_1 = I_3/\pi K \quad (\text{A5.2.3b})$$

$$e_2 = (I_4 - I_6)/\pi K^2 \quad \text{et} \quad b_2 = 2I_5/\pi K^2 \quad (\text{A5.2.3c})$$

Dès lors, pour connaître les (e_i, b_i) , il suffit de connaître les I_i . Ces intégrales seront connues à partir des mesures de dénivellation et de pentes de la surface libre. Analysons en détail le cas d'une onde monochromatique élémentaire.

Soit ζ , le déplacement de la surface libre :

$$\zeta(x,t) = \eta \cos(Kx \cos\alpha + Ky \sin\alpha - \omega t) + \beta \sin(Kx \cos\alpha + Ky \sin\alpha - \omega t)$$

et les pentes dans les directions X et Y :

$$\zeta_x(x,t) = \beta K \cos\alpha \cos(Kx \cos\alpha + Ky \sin\alpha - \omega t) - \eta K \cos\alpha \sin(Kx \cos\alpha + Ky \sin\alpha - \omega t)$$

$$\zeta_y(x,t) = \beta K \sin\alpha \cos(Kx \cos\alpha + Ky \sin\alpha - \omega t) - \eta K \sin\alpha \sin(Kx \cos\alpha + Ky \sin\alpha - \omega t)$$

A la fréquence ω considérée, on a donc pour les coefficients de Fourier de la hauteur :

$$f_1 = \eta \quad \text{et} \quad f_2 = -\beta$$

et ceux des pentes :

$$f_3 = \beta K \cos\alpha \quad \text{et} \quad f_4 = \eta K \cos\alpha$$

$$f_5 = \beta K \sin\alpha \quad \text{et} \quad f_6 = \eta K \sin\alpha$$

Analysons les co-spectres C_{ij} et les quad-spectres Q_{ij} de ces 3 quantités. Nous verrons qu'ils sont liés aux intégrales I_i à déterminer. Soient γ et ε deux quantités dont les transformées de Fourier sont Γ et Σ . On définit le co-spectre par

$$C_{\Gamma\Gamma} = \text{Re}[\Gamma\Gamma^*] \quad \text{ou} \quad C_{\Sigma\Sigma} = \text{Re}[\Sigma\Sigma^*]$$

Et le quad-spectre par

$$Q_{\Gamma\Sigma} = \text{Im}[\Gamma\Sigma^*]$$

Si on attache l'indice 1 à la hauteur, l'indice 2 aux pentes selon X et l'indice 3 aux pentes selon Y, on trouve :

$$\text{TF}(\zeta) = \eta - i\beta$$

$$\text{TF}(\zeta)^* = \eta + i\beta$$

$$\text{TF}(\zeta_x) = f_3 + if_4$$

$$\text{TF}(\zeta_x)^* = f_3 - if_4$$

$$\text{TF}(\zeta_y) = f_5 + if_6$$

$$\text{TF}(\zeta_y)^* = f_5 - if_6$$

Et dès lors :

$$C_{11} = \eta^2 + \beta^2$$

$$Q_{11} = 0$$

$$C_{22} = (\eta^2 + \beta^2) K^2 \cos^2 \alpha$$

$$Q_{22} = 0$$

$$C_{33} = (\eta^2 + \beta^2) K^2 \sin^2 \alpha$$

$$Q_{33} = 0$$

$$C_{12} = 0$$

$$Q_{12} = (\eta^2 + \beta^2) K \cos \alpha$$

$$C_{13} = 0$$

$$Q_{13} = (\eta^2 + \beta^2) K \sin \alpha$$

$$C_{23} = (\eta^2 + \beta^2) K^2 \cos \alpha \sin \alpha \quad Q_{23} = 0$$

Comme $(\eta^2 + \beta^2)$ est lié à la transformée de Fourier des déplacements ζ , dans le cas général continu, on peut remplacer $(\eta^2 + \beta^2)$ par $\mathcal{H}(\omega, \alpha)$ et on retrouve les intégrales I_i qui sont dès lors liées aux C_{ij} et Q_{ij} (Long, 1980) :

$$C_{11} = \omega^4 I_1 \quad (\text{A5.2.4a})$$

$$C_{22} = I_4 \quad (\text{A5.2.4b})$$

$$C_{33} = I_6 \quad (\text{A5.2.4c})$$

$$Q_{12} = \omega^2 I_2 \quad (\text{A5.2.4d})$$

$$Q_{13} = \omega^2 I_3 \quad (\text{A5.2.4e})$$

$$C_{23} = I_5 \quad (\text{A5.2.4f})$$

Si l'on revient au développement (5.6), on pourra connaître θ_1 et θ_2 par :

$$\text{tg } \theta_1 = \sin \theta_1 / \cos \theta_1 = b_1/e_1 = I_3/I_2 = Q_{13}/Q_{12}$$

d'où

$$\theta_1 = \text{arctg } (Q_{13}/Q_{12}) \quad (\text{A5.2.5})$$

et

$$\text{tg } 2\theta_2 = b_2/e_2 = 2I_5/(I_4 - I_6) = 2C_{23}/(C_{22} - C_{33})$$

d'où

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctg (2C_{23}/(C_{22}-C_{33})) \quad (A5.2.6)$$

Que signifient θ_1 et θ_2 ?

Posons

$$\mathcal{H}(\omega, \alpha) = \hat{\phi}(\omega) f(\omega, \alpha)$$

Soit pour un ω_i fixé :

$$\mathcal{H}(\omega_i, \alpha) = \hat{\phi}(\omega_i) f(\alpha)$$

Dès lors :

$$Q_{13} = \omega^2 I_3 = \omega^2 K \hat{\phi}(\omega_i) \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad (A5.2.7a)$$

$$Q_{12} = \omega^2 I_2 = \omega^2 K \hat{\phi}(\omega_i) \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \quad (A5.2.7b)$$

Faisons l'hypothèse qu'il existe une direction moyenne de propagation de l'énergie de la composante d'état de mer α_m ; on a alors :

$$\alpha = \alpha - \alpha_m + \alpha_m$$

et

$$Q_{13} = \omega^2 K \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin(\alpha - \alpha_m) \cos \alpha_m + \cos(\alpha - \alpha_m) \sin \alpha_m \} f(\alpha) \, d\alpha$$

$$Q_{12} = \omega^2 K \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(\alpha - \alpha_m) \cos \alpha_m - \sin(\alpha - \alpha_m) \sin \alpha_m \} f(\alpha) \, d\alpha$$

Faisons une seconde hypothèse : $f(\alpha)$ est symétrique par rapport à α_m . Dès lors comme $\sin(\alpha - \alpha_m)$ est une fonction antisymétrique par rapport à α_m , on a que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) \, d\alpha = 0$$

et il reste :

$$Q_{13} = \omega^2 K \hat{\phi} \sin \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha$$

$$Q_{12} = \omega^2 K \hat{\phi} \cos \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha$$

d'où l'on déduit :

$$\text{tg } \alpha_m = Q_{13}/Q_{12}$$

et

$$\theta_1 = \alpha_m$$

Procédons de même avec

$$2C_{23} = 2I_5 = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos \alpha \sin \alpha f(\alpha) d\alpha \quad (\text{A5.2.8a})$$

$$C_{22} = I_4 = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha f(\alpha) d\alpha \quad (\text{A5.2.8b})$$

$$C_{33} = I_6 = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \alpha f(\alpha) d\alpha \quad (\text{A5.2.8c})$$

On obtient :

$$2C_{23} = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\alpha f(\alpha) d\alpha$$

$$C_{22} - C_{33} = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\alpha f(\alpha) d\alpha$$

Nous pouvons encore développer ces expressions comme suit :

$$2C_{23} = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin 2(\alpha - \alpha_m) \cos 2\alpha_m + \cos 2(\alpha - \alpha_m) \sin 2\alpha_m \} f(\alpha) d\alpha$$

$$C_{22} - C_{33} = K^2 \hat{\phi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos 2(\alpha - \alpha_m) \cos 2\alpha_m - \sin 2(\alpha - \alpha_m) \sin 2\alpha_m \} f(\alpha) d\alpha$$

Or, si f est symétrique par rapport à α_m , on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha - \alpha_m) \cos(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha \neq 0$$

Il en résulte que :

$$2C_{23} = K^2 \hat{\phi}(\omega_i) \sin 2\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha$$

$$C_{22} - C_{33} = K^2 \hat{\phi}(\omega_i) \cos 2\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2(\alpha - \alpha_m) f(\alpha) d\alpha$$

et

$$\tan 2\alpha_m = 2C_{23}/(C_{22} - C_{33})$$

d'où

$$\theta_2 = \alpha_m \pm 180^\circ$$

C'est ce qui nous permet de dire que « dans la bande de fréquence considérée, pour un spectre directionnel symétrique en direction, $\theta_1 = \theta_2$ est la direction moyenne de propagation de l'énergie de la composante de l'état de mer ».

D'autre part, si on choisit $f(\omega, \alpha)$ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega, \alpha) d\alpha = 1$$

on en déduit que

$$I_1 = \hat{\phi}(\omega)$$

Et, dès lors, le spectre d'énergie non directionnel est

$$\hat{\phi}(\omega) = C_{11} / \omega^4 \quad (\text{A5.2.9})$$

où C_{11} est obtenu à partir du signal de pilonnement et après correction de celui-ci par la fonction de transfert en amplitude du capteur.

On peut ainsi obtenir

$$\alpha_{\text{rms}} = \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha - \alpha_m)^2 f(\alpha) d\alpha$$

car on peut montrer que

$$\alpha_{\text{rms}}^2 = 2 \left[1 - \sqrt{(Q_{12}^2 + Q_{13}^2) / (C_{11}(C_{22} + C_{23}))} \right]$$

Annexe 5.3

Les co et quad-spectres forment quatre équations linéairement indépendantes

Nous disposons de 6 équations pondérées du spectre directionnel (A5.2.2a) à (A5.2.2f) et de 6 co et quad-spectres fournis par les mesures de bouée. Ils sont reliés entre eux par (A5.2.7a), (A5.2.7b), (A5.2.8a) à (A5.2.8c) et (A5.2.9), sous l'hypothèse que $\mathcal{F}(\omega, \alpha) = \hat{\phi}(\omega) f(\omega, \alpha)$ et donc, pour chaque bande de fréquence ω_i , $\mathcal{F}(\omega_i, \alpha) = \hat{\phi}(\omega_i) f(\alpha)$.

On en déduit :

$$C_{22} + C_{33} = (A5.2.8b) + (A5.2.8c) = K^2 \hat{\phi}(\omega_i)$$

$$C_{22} - C_{33} = (A5.2.8b) - (A5.2.8c) = K^2 \hat{\phi}(\omega_i) \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos 2\alpha \, d\alpha$$

Dès lors

$$(C_{22} - C_{33}) / (C_{22} + C_{33}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos 2\alpha \, d\alpha \quad (A5.3.1)$$

et

$$2C_{23} = (A5.2.8a) = K^2 \hat{\phi}(\omega_i) \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin 2\alpha \, d\alpha$$

D'où

$$2C_{23} / (C_{22} + C_{33}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin 2\alpha \, d\alpha \quad (A5.3.2)$$

D'autre part :

$$C_{11}(C_{22} + C_{33}) = \omega^4 \hat{\phi}(\omega_i) K^2 \hat{\phi}(\omega_i)$$

On en déduit :

$$\sqrt{C_{11}(C_{22} + C_{33})} = \omega^2 K \hat{\phi}(\omega_i)$$

et donc

$$Q_{12}/\sqrt{C_{11}(C_{22} + C_{33})} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \quad (\text{A5.3.3})$$

$$Q_{13}/\sqrt{C_{11}(C_{22} + C_{33})} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \quad (\text{A5.3.4})$$

Les équations (A5.3.1) à (A5.3.4) forment quatre équations linéairement indépendantes. Ce sont les équations de données.

Annexe 5.4

ρ^2 suit une loi χ^2_4

Considérons la statistique ρ^2 définie comme suit :

$$\rho^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$$

où $\mathbf{V} = [\langle \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \rangle]$ est la matrice 4X4 de covariance des données

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} - \tilde{\mathbf{d}}$$

soit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

Cette statistique est une mesure de l'écart aléatoire entre le spectre ajusté et le vrai spectre. Comme $V_{ij} = V_{ji}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho^2 = & V_{11} \varepsilon_1^2 + V_{22} \varepsilon_2^2 + V_{33} \varepsilon_3^2 + V_{44} \varepsilon_4^2 + 2 V_{34} \varepsilon_3 \varepsilon_4 + 2 V_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2 V_{13} \varepsilon_1 \varepsilon_3 \\ & + 2 V_{23} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2 V_{14} \varepsilon_1 \varepsilon_4 + 2 V_{24} \varepsilon_2 \varepsilon_4 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que ρ^2 dépend 4 termes indépendants, ρ^2 a donc 4 degrés de liberté.

La matrice $\mathbf{V}$ introduit une métrique qui transforme les $\boldsymbol{\varepsilon}$ en $\boldsymbol{\varepsilon}'$, variables aléatoires indépendantes. En effet, étudions le cas de X et Y, deux variables aléatoires $\mathcal{N}(0,1)$ dont la covariance $C = \text{Cov}(X,Y) = E[XY]$. Dès lors, on a la matrice des variances-covariances :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & C \\ C & 1 \end{pmatrix}$$

et de même :

$$\mathbf{V}^{-1} = 1/(1-C^2) \begin{pmatrix} 1 & -C \\ -C & 1 \end{pmatrix}$$

Opérons un changement de variables aléatoires :

$$X' = aX + bY$$

$$Y' = bX + aY$$

Ce sont des variables aléatoires normales de covariance :

$$\begin{aligned} E[(aX+bY)(aY+bX)] &= a^2 E[XY] + ab E[X^2] + ba E[Y^2] + b^2 E[XY] \\ &= a^2 C + 2 ab + b^2 C \end{aligned}$$

Les valeurs a et b sont choisies de telle sorte que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 1/(1-C^2) \begin{pmatrix} 1 & -C \\ -C & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{-1}$$

c'est-à-dire $a^2+b^2 = 1$ et $2ab = -C$

d'où

$$a = (\sqrt{1-C} + \sqrt{1+C}) / 2\sqrt{1-C^2}$$

$$b = (\sqrt{1-C} - \sqrt{1+C}) / 2\sqrt{1-C^2}$$

et de plus $E[X'Y'] = 0$, X' et Y' sont indépendantes.

Dès lors

$$(X \ Y) \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X' \ Y') \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = X'^2 + Y'^2$$

Nous pouvons généraliser ceci à n variables aléatoires. En conclusion, le choix de ρ^2 comme mesure et donnée par $\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}$, nous indique que ρ^2 suit une loi du χ^2 à 4 degrés de liberté, car c'est la somme de quatre variables aléatoires indépendantes normales.

Annexe 5.5

Modèle de Mitsuyasu

Longuet-Higgins (1963) a suggéré une fonction paramétrique pour la fonction de distribution angulaire :

$$f(\omega, \alpha) = G(s) (\cos((\alpha - \alpha_0)/2))^{2s} \quad (\text{A5.5.1})$$

où α_0 est la direction du vent moyen,

$s = s(\omega)$ est l'étalement de la distribution angulaire,

$G(s)$ est le facteur de normalisation donné par :

$$G(s) = 2^{2s}/2\pi \Gamma^2(s+1)/\Gamma(2s+1) \quad (\text{A5.5.2})$$

et Γ est la fonction gamma.

Différents auteurs ont proposé plusieurs expressions empiriques pour le paramètre de dispersion s . Il est généralement une fonction de la fréquence et de la vitesse du vent.

La figure A5.5.1 montre que, quand s augmente, $f(\omega, \alpha)$ tend vers une distribution plus étroite. Pour les composantes des vagues qui ont des fréquences proches de la valeur du pic, la valeur de s est grande c'est-à-dire que la distribution angulaire est très étroite car les composantes du pic – les composantes qui contiennent le plus d'énergie – se propagent presque dans la même direction que celle du vent. Cela indique que les longues vagues de gravité ont tendance à se propager dans la direction du vent. La valeur de s diminue rapidement pour des fréquences plus grandes ou plus petites. Ce modèle prédit un spectre omnidirectionnel pour les grandes fréquences ou petites longueurs d'onde.

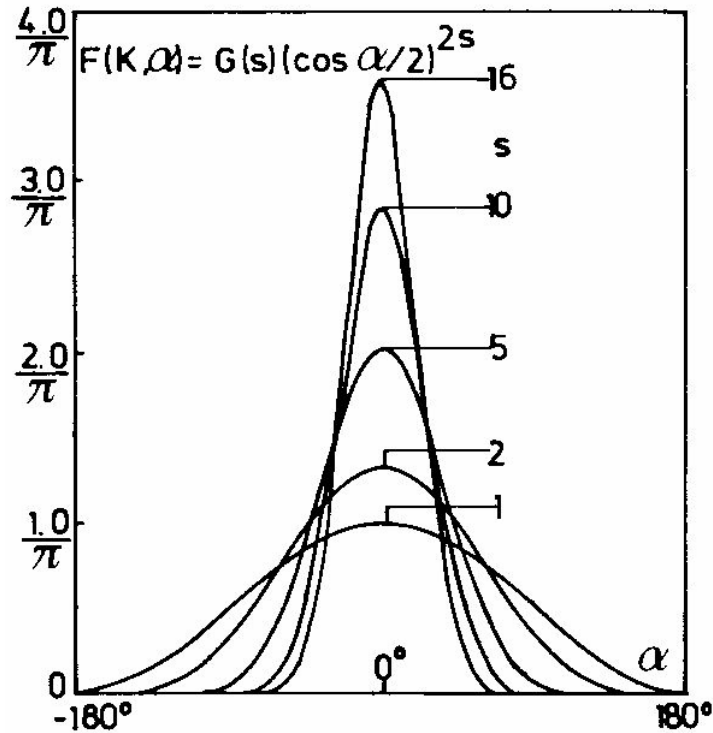


Figure A5.5.1 : Fonction de distribution angulaire (Mitsuyasu et al., 1975)

Cette fonction angulaire est basée sur des observations de bouées. Dès lors, elle s'applique aux vagues de gravité longues mais ne modélise pas correctement la dispersion des vagues de gravité courtes et capillo-gravifiques. Mitsuyasu et al. (1975) proposent une forme idéalisée pour la fonction de distribution angulaire (A5.5.1), mais avec

$$s = 11,5 (c/U)^{2,5} \text{ pour } A \leq U/c \quad (\text{A5.5.3a})$$

$$s = 11,5 A^{-7,5} (c/U)^5 \text{ pour } U/c \leq A \quad (\text{A5.5.3b})$$

où

$$A = 18,8 (u_*^2/gF)^{0,330} \quad (\text{A5.5.3c})$$

est la fréquence du pic (sans dimension) et F est la distance d'action.

La dépendance en la fréquence provient du rapport U/c car

$$U/c = 1/2\pi \omega U/g \quad (\text{A5.5.4})$$

L'équation (A5.5.1) peut aussi se réécrire:

$$f(\omega, \alpha) = G(s)/2^s (1 + \cos(\alpha - \alpha_0))^s \quad (\text{A5.5.5})$$

en utilisant la formule trigonométrique $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$.