

## Introduction

L'espace des configurations de  $k$  points d'un espace topologique  $X$  est le sous-espace de  $X^k$ , défini par

$$F(X; k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

L'espace  $F(\mathbb{R}^3; 10)$  nous est tous familier. En effet, l'évolution de notre système solaire, composé de 9 planètes et du soleil, s'identifie à un chemin dans  $F(\mathbb{R}^3; 10)$ . Pourvu que ça dure...

Les espaces de configurations trouvent des applications dans de nombreux domaines, allant de la théorie des noeuds à la mécanique.

En 1962, E.Fadell et J.Van Buskirk prouvent notamment que le groupe des tresses pures à  $k$  brins est isomorphe au groupe fondamental de  $F(\mathbb{R}^2; k)$ , [5].

Dans un tout autre contexte, l'étude des invariants homotopiques de l'espace des lacets libres  $F(\mathbb{R}^n; k)^{S^1}$ , permet de déduire l'existence de solutions périodiques pour certains systèmes Hamiltoniens.

Dans ce texte, nous focalisons notre attention sur les espaces de configurations dans les variétés. Pour rappel, une variété  $M$  de dimension  $n$ , est un espace topologique séparé et localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . La détermination du lien entre le type d'homotopie de  $M$  et celui de  $F(M; k)$ , fait l'objet de nombreuses recherches évoquées dans le deuxième chapitre de ce texte.

Notre travail s'inscrit lui dans la théorie de l'homotopie rationnelle. Dans ce cadre précis, l'objectif primordial est de déterminer le lien entre le type d'homotopie rationnel de  $F(M; k)$ , et celui de  $M$ .

Au niveau rationnel, l'objet algébrique le plus naturel associé à  $F(M; k)$  est l'algèbre différentielle suivante, introduite par I.Kriz [14] et B.Totaro [23] en 1993 :

$$A(M; k) := ((H^*(M; \mathbb{Q})^{\otimes k} \otimes \Lambda(x_{ij}, 1 \leq i, j \leq k))/I, d),$$

où les  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq k$  sont de degré  $n - 1$ , où  $I$  est l'idéal différentiel engendré par les éléments

$$\begin{cases} x_{ij} - x_{ji}, x_{ij}^2, \\ p_i^*(x)x_{ij} - p_j^*(x)x_{ij}, x \in H^*(M; \mathbb{Q}), \\ x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij}, \end{cases}$$

et où la différentielle  $d$  est définie par

$$d(x_{ij}) = p_{ij}^*(\Delta) \in (H^*(M; \mathbb{Q}))^{\otimes k},$$

les applications  $p_i : M^k \rightarrow M$  et  $p_{ij} : M^k \rightarrow M^2$  désignant respectivement les projections sur le facteur d'indice  $i$ , et sur les facteurs d'indice  $i$  et  $j$ .

Si  $M$  est une variété projective complexe, l'algèbre différentielle  $A(M; k)$  est un modèle commutatif de  $F(M; k)$ , et en général, pour une variété compacte et connexe, cette algèbre différentielle apparaît comme le terme  $E_2$  de la suite spectrale de Cohen et Taylor [3], qui converge vers l'algèbre  $H^*(F(M; k); \mathbb{Q})$ .

Plus récemment, P.Lambrechts et D.Stanley [15] ont obtenu un modèle commutatif de  $F(M; 2)$ , pour une variété  $M$  simplement connexe, compacte sans bord et telle que  $H^2(M; \mathbb{Q}) = 0$ .

Toutefois, la détermination du modèle minimal de Sullivan de  $F(M; k)$  reste, à ce jour, un problème totalement ouvert.

Au cœur de ce problème, notre travail a pour but d'étudier certains invariants d'homotopie rationnelle de  $F(M; k)$ . En particulier, nous nous intéressons à l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle  $\pi_*\Omega(F(M; k)) \otimes \mathbb{Q}$ , que nous noterons souvent  $L_{F(M; k)}$ . La variété  $M$  sera toujours supposée simplement connexe, compacte et sans bord.

En premier lieu, nous abordons le problème dans le cas particulier de  $F(M; 2)$ . Dans ce cas précis, la suite spectrale de cohomologie de Cohen et Taylor, dégénère en un isomorphisme

$$H^*(F(M; 2); \mathbb{Q}) \cong H^*(M; \mathbb{Q}) \otimes H^*(M; \mathbb{Q})/(\Delta)$$

où  $(\Delta)$  désigne l'idéal engendré par la classe diagonale  $\Delta$ . D'autre part, le théorème de Fadell et Neuwirth [7], indique que la projection sur le premier facteur  $p : F(M; 2) \rightarrow M$ , est un fibré localement trivial, de fibre  $M \setminus m_0$ , où  $m_0$  désigne un point fixé de  $M$ .

Dans notre étude, nous distinguons deux familles de variétés : l'une regroupant les variétés dont l'algèbre de cohomologie rationnelle est engendrée par un seul élément, et l'autre, regroupant les variétés dont l'algèbre de cohomologie rationnelle de  $M$  nécessite au moins deux générateurs.

Quand  $M$  appartient à la première famille, le modèle minimal de  $F(M; 2)$  peut-être calculé explicitement à partir de l'isomorphisme de Cohen et Taylor. En particulier, nous avons obtenu le

**Théorème 1.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]/x^k$ , avec  $|x| = 2l$ , alors le modèle minimal de Sullivan de  $F(M; 2)$  est l'algèbre de cochaines

$$(\Lambda(a, b, a', c), D)$$

où  $|a| = |a'| = 2l$ ,  $Da = Da' = 0$ ,  $Db = a^k$  et  $Dc = \sum_{i=0}^{k-1} a^i a'^{k-i-1}$ .

L'étude de la deuxième famille de variétés, nettement plus nombreuse, s'avère beaucoup plus intéressante. Dans ce cas précis, notre point de départ est l'espace  $M \setminus m_0$ , qui a été fortement étudié en homotopie rationnelle. La structure de l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de cet espace, a été donnée par Halperin et Lemaire. Dans [12], ils démontrent que la longue suite exacte associée à la fibration homotopique

$$F_0 \longrightarrow M \setminus m_0 \xrightarrow{i_0} M,$$

induit la suite exacte d'algèbres de Lie graduées

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(R) \longrightarrow \pi_* \Omega M \setminus m_0 \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi_* \Omega i_0} \pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

où  $R \cong s^{n-2} H_*(\Omega M; \mathbb{Q})$ . En particulier, ils prouvent que  $F_0$  a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères. Le lien entre  $M \setminus m_0$  et  $F(M; 2)$ , donné par l'application  $b : M \setminus m_0 \rightarrow F(M; 2) : m \mapsto (m, m_0)$ , nous a amenés au premier résultat, décrivant la fibration homotopique

$$F_2 \longrightarrow F(M; 2) \xrightarrow{i_2} M \times M :$$

**Théorème 2.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, alors l'algèbre de Lie graduée  $\pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q}$  s'inscrit dans la suite exacte d'algèbres de Lie graduées

$$0 \longrightarrow L_{F_2} \longrightarrow L_{F(M; 2)} \xrightarrow{i_{2*}} L_{M \times M} \longrightarrow 0.$$

En outre, l'algèbre de Lie graduée  $L_{F_2}$  est une algèbre de Lie graduée libre :  $L_{F_2} \cong \mathbb{L}(R')$ , engendrée par  $R' \cong s\tilde{H}_*(F_2; \mathbb{Q})$ .

Ce premier résultat indique en particulier que, tout comme  $F_0$ , la fibre homotopique  $F_2$  de l'inclusion  $i_2 : F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$ , a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères. Le modèle de Sullivan des fibrations admettant une telle fibre, hérite de propriétés particulières. Leur compréhension nous a permis d'établir les faits suivants.

Notons  $(\Lambda V, d)$  le modèle minimal de Sullivan de  $M$ ,  $\overline{V} = sV$  la suspension de l'espace vectoriel gradué  $V$ , et  $T = s^{-n+1}(\Lambda \overline{V})$ .

**Proposition 1.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, alors il existe un diagramme commutatif d'adgc, dont la deuxième ligne est un modèle de l'injection  $i_0 : M \setminus m_0 \hookrightarrow M$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda T, d) & \longrightarrow & (\Lambda T, \bar{d}) \\
 \downarrow Id & & \downarrow \eta & & \downarrow \bar{\eta} \\
 (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) & \longrightarrow & (\Lambda W, \bar{D}) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 A_{PL}(M) & \xrightarrow{A_{PL}(i_0)} & A_{PL}(M \setminus m_0), & & 
 \end{array}$$

jouissant des propriétés suivantes :

- (1)  $(\Lambda T, \bar{d}) = (\Lambda T, 0)$ ,
- (2)  $\eta$  est un plongement qui est une  $2n - 3$  équivalence,
- (3)  $H^*(\bar{\eta}) : T \rightarrow \tilde{H}^*(\Lambda W, \bar{D})$  est un isomorphisme.

De plus, la réalisation géométrique du rectangle supérieur de ce diagramme est un diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longrightarrow & Z_M & \longrightarrow & M_0 \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi & & \uparrow Id \\
 F_0 & \longrightarrow & (M \setminus m_0)_0 & \longrightarrow & M_0
 \end{array}$$

tel que

- (1)  $K$  est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane,
- (2)  $\tilde{H}_*(F_0; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*^S(K; \mathbb{Q})$ , où  $H^S$  désigne l'homologie sphérique,
- (3) L'application  $\varphi : M \setminus m_0 \rightarrow Z_M$  est surjective en homotopie.

La construction de la sous-algèbre minimale  $(\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$ , qui approxime le modèle minimal de Sullivan de  $M \setminus m_0$ , nous a inspiré dans l'étude de l'injection  $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$ . De manière similaire, nous déterminons une algèbre de Sullivan minimale qui s'injecte dans  $m_{F(M; 2)}$ , le modèle minimal de Sullivan de  $F(M; 2)$ , et dont les propriétés s'énoncent comme suit :

**Théorème 3.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, alors il existe un diagramme commutatif d'adgc

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda V \otimes \Lambda V', d) & \xrightarrow{id} & (\Lambda V \otimes \Lambda V', d) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D) & \xrightarrow{\theta} & m_{F(M;2)} \\
 \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\
 (\Lambda T, 0) & \xrightarrow{\bar{\theta}} & (\Lambda W, d)
 \end{array}$$

dans lequel  $\theta$  est injectif. L'inclusion  $i_2 : F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$  factorise via  $E_M$ , la réalisation de  $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D)$ , et ceci donne un diagramme commutatif dont les lignes sont des fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longrightarrow & E_M & \longrightarrow & M_0 \times M_0 \\
 \uparrow \bar{g} & & \uparrow g & & \uparrow \\
 F_2 & \longrightarrow & F(M; 2)_0 & \xrightarrow{i_2} & M_0 \times M_0,
 \end{array}$$

et dans lequel

- (1)  $K$  est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane,
- (2) L'application  $\bar{g}$  induit un isomorphisme en homologie sphérique.

La partie quadratique de la différentielle de l'algèbre de Sullivan minimale  $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D)$  est calculable. Celle-ci permet de mieux comprendre la structure d'algèbre de Lie de  $L_{F(M;2)}$ . Nous avons établi une relation de cette algèbre de Lie graduée, impliquant un élément particulier de  $\pi_{n-2}\Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q}$ , défini de la manière suivante :

Le choix d'un homéomorphisme entre  $D^n$  et un voisinage de  $m_0$  dans  $M$  induit une application continue  $g : S^{n-1} \rightarrow M \setminus m_0$  par restriction au bord du disque. En composant l'application  $g : S^{n-1} \rightarrow M \setminus m_0$  avec l'application

$$b : M \setminus m_0 \rightarrow F(M; 2) : m \mapsto (m, m_0),$$

nous obtenons une application  $t : S^{n-1} \rightarrow F(M; 2)$  et par adjonction, une application

$$\tilde{t} : S^{n-2} \rightarrow \Omega F(M; 2).$$

Pour un élément  $a \in \pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q}$ , notons  $a$  l'élément de  $\pi_* \Omega(M \times \{m_0\}) \otimes \mathbb{Q}$  correspondant et  $a'$  celui de  $\pi_* \Omega(\{m_0\} \times M) \otimes \mathbb{Q}$ . Nous démontrons le

**Théorème 4.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, alors pour toute section linéaire  $\sigma$  de  $i_{2*}$ , on a

$$[\tilde{t}, \sigma(a)] = -[\tilde{t}, \sigma(a')] \mod \mathbb{L}^{\geq 2}(R').$$

Des exemples simples montrent que la projection  $i_{2*}$  n'admet pas toujours de section d'algèbre de Lie. Nous avons cependant démontré le

**Théorème 5.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre et si  $M$  est une variété coformelle de catégorie de Lusternik-Schnirelmann rationnelle  $> 2$ , alors  $i_{2*}$  admet une section d'algèbre de Lie. De plus,

$$L_{F(M;2)} = L_M \oplus L_M \amalg \mathbb{L}(\tilde{t})/I$$

où  $I$  est l'idéal engendré par les éléments  $[a + a', \tilde{t}]$ ,  $a \in L_M$ .

Dans le cas général de  $F(M; k)$ , nous avons pu généraliser une partie des résultats obtenus dans le cas  $k = 2$ . Notons  $F_k$  la fibre homotopique de l'inclusion  $i_k : F(M; k) \hookrightarrow M^k$ . Nous démontrons tout d'abord la

**Proposition 2.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, alors pour chaque  $k \geq 2$ , la fibre homotopique  $F_k$  de l'inclusion  $i_k : F(M; k) \hookrightarrow M^k$ , s'inscrit dans une fibration homotopique

$$\Sigma_k \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1},$$

où

$$\Sigma_k \approx_0 (\Sigma_{n-1}(\Omega M \vee S^0))^{\vee(k-1)}.$$

Celle-ci entraîne le résultat suivant, généralisant la dernière assertion du Théorème 2 :

**Théorème 6.** Si  $H^*(M; \mathbb{Q})$  nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, la catégorie rationnelle de la fibre homotopique de l'inclusion  $F(M; k) \hookrightarrow M^k$ , est inférieure à  $k - 1$ .

Notre texte est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre regroupe les principaux outils nécessaires à notre étude rationnelle des espaces de configurations. Nous y introduisons entre autres les modèles de Sullivan, les modèles minimaux relatifs, la structure d'algèbre de Lie d'homotopie et sa relation avec les modèles, l'opération d'holonomie dans les fibrations et la catégorie de Lusternik-Schnirelmann. En outre, nous y établissons bon nombre de propriétés indispensables dans notre dissertation.

Nous entamons le deuxième chapitre par une brève introduction aux espaces de configurations. Ensuite nous étudions certaines propriétés de l'homologie et de la cohomologie des espaces de configurations dans les variétés.

Dans le troisième chapitre, nous déterminons le modèle minimal de Sullivan de l'espace des configurations de deux points des variétés dont l'algèbre de cohomologie rationnelle est engendrée par un seul élément. Cette famille de variétés comprend notamment les sphères et les espaces projectifs  $\mathbb{C}P(n)$ .

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons au cas d'une variété  $M$  compacte simplement connexe de dimension  $n$ , dont l'algèbre de cohomologie rationnelle nécessite au moins deux générateurs. Nous prouvons tout d'abord que la fibre homotopique de l'inclusion  $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$  a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères, en appliquant les résultats de Halperin et Lemaire [12] à l'attachement  $M = M \setminus m_0 \cup_g D^n$ . Nous décrivons ensuite le modèle rationnel de  $F(M; 2)$  construit par Lambrechts et Stanley [15], et construisons une algèbre de Sullivan minimale qui s'injecte dans le modèle minimal de Sullivan de  $F(M; 2)$ . Pour ce faire, nous déterminons une résolution semi-libre du modèle minimal de Sullivan de  $M$ , via laquelle nous donnons une expression explicite du modèle de Lambrechts et Stanley. Enfin dans le cas où  $M$  est formelle, nous construisons le modèle minimal bigradué de  $F(M; 2)$ .

Le chapitre 5 conclut notre discussion concernant les espaces de configurations de deux points. Premièrement nous y démontrons le Théorème 4, exhibant une relation de  $L_{F(M; 2)}$  dans le cas général. Deuxièmement nous y déterminons la structure complète d'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de  $F(M; 2)$  pour les variétés coformelles.

Enfin c'est dans le chapitre 6 que nous nous intéressons aux espaces de configurations de  $k \geq 3$  points. Nous calculons tout d'abord l'homologie d'une algèbre différentielle généralisant celle de I.Kriz et B.Totaro. Ensuite, nous démontrons le Théorème 6. Pour conclure, nous déterminons explicitement l'algèbre de Lie graduée  $L_{F(\mathbb{C}P(n); 3)}$ .