

**MODÈLE RATIONNEL DU COMPLÉMENTAIRE
D'UN SOUS-POLYÈDRE DANS UNE VARIÉTÉ À
BORD ET APPLICATIONS AUX ESPACES DES
CONFIGURATIONS**

HECTOR CORDOVA BULENS

Modèle rationnel du complémentaire d'un sous-polyèdre dans une variété à bord et applications aux espaces des configurations

Hector Cordova Bulens

Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences,
le 20 juin 2013, à l'Institut de Recherche en Mathématique et Physique de l'Université catholique de Louvain, à Louvain-la-Neuve.

Promoteur : Pascal Lambrechts

Jury : Yves Félix (UCL)
Donald W. Stanley (Univ. Regina)
Daniel Tanré (Univ. Lille 1)
Enrico Vitale (UCL)
Michel Willem (UCL, président)

AMS Subject Classification (2010) : 55P62 (Rational homotopy theory),
55R80 (Configuration spaces)

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur, Pascal Lambrechts, pour sa gentillesse, sa disponibilité et toutes les idées qu'il a partagé avec moi pendant ces 6 dernières années. Sans lui ce travail n'aurait, tout simplement, pas pu exister. Je voudrais aussi remercier Yves Félix pour son amabilité à tout moment et aussi, pour l'apport important qu'il a eu dans certaines parties de cette thèse. Merci aussi à tous les membres du jury d'avoir accepté de faire partie de celui-ci et merci pour les différentes suggestions qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

Dans ce qui suit, j'aimerais exprimer ma gratitude à toutes les autres personnes qui m'ont aidé pendant que je faisais ce travail. J'ai l'impression, inévitablement, de devoir commencer par remercier Paul Arnaud Songhafouo Tsopméné, mon collègue de bureau, ex-colocataire, ex-voisin et meilleur ami, pour tout ce qu'il a fait pour moi, ce qui est, et il le sait mieux que personne, plus que ce que je ne pouvais demander. Tout aussi importants, bien que d'une autre façon, Jose et Abdoul Kader, avec qui on a passé tellement de bons moments. Mon seul regret sera finalement, malgré le fait d'avoir essayé, de ne pas pouvoir vous remercier comme je vous le dois.

Merci aussi à Damien Servais, mon premier collègue de bureau, de qui j'ai beaucoup appris. Merci à Gery qui m'a beaucoup aidé dans les débuts de mon parcours et qui est devenu, par la suite, un très bon ami.

Merci à Cathy, Carine et Martine pour leur gentillesse, sympathie, et leurs conversations pendant les temps de midi. Un merci tout particulier à Cathy qui m'a aidé à améliorer ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous mes collègues doctorants avec qui je m'entends très bien et tout particulièrement ceux avec qui j'ai pu tisser des liens d'amitié : Mathieu, Maguy, Valérian, Demba, Olivette, Stéphane, Corentin et Cécile.

Finalement, dans ce dernier paragraphe, je voudrais remercier Elisabet qui me rend meilleur chaque jour, remercier mes parents, à qui je dois tout, et remercier mes frères et ma petite sœur que j'admire et j'aime plus que tout.

Table des matières

Introduction	i
1 ADGC et DGmodules	1
1.1 Algèbres différentielles graduées commutatives	1
1.2 Modules gradués différentiels ou dgmodules	2
1.3 Modèles de Sullivan	3
1.4 Modèles relatifs de Sullivan	4
1.5 Cônes algébriques	4
1.6 Structures d'ADGC sur les cônes algébriques	6
2 Homotopie rationnelle	9
2.1 Rationalisation et type d'homotopie rationnelle	9
2.2 Foncteur A_{PL} et lien avec les ADGC	10
3 ADGC à dualité de Poincaré	13
3.1 Définition d'ADGC à dualité de Poincaré	13
3.2 Modèles à dualité de Poincaré	14
3.3 Modèle surjectif de source une ADGCDP	16
4 Modèle du complémentaire dans une variété fermée	19
4.1 Introduction	19
4.2 A_{PL} et l'isomorphisme d'excision	20
4.3 Modèle de $A_{PL}(W)$ -dgmodule du complémentaire	21
4.4 Modèle de $\hat{A}$ -dgmodule du complémentaire	23
4.5 Modèle d'ADGC du complémentaire	25
4.6 Modèle en utilisant la dualité de Poincaré	26
5 Modèle de $F(M, 2)$ quand M est 2-connexe	29
5.1 Introduction	29
5.2 La classe diagonale Δ et le morphisme $\Delta^!$	31
5.3 Modèle de $F(M, 2)$	34

6	Modèle de $F(M, 2)$ quand M est 1-connexe	37
6.1	Introduction	37
6.2	Modèle de $F(M, 2)$ pour une variété de dimension paire	39
6.2.1	Modèle de dgmodule de $A_{PL}(F(M, 2))$	39
6.2.2	Modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ pour une variété 1-connexe de dimension paire	40
6.3	Modèle pour une variété de dimension impaire	43
6.3.1	Les algèbres $C(\xi)$	43
6.3.2	Equivalences entre algèbres de la forme $C(\xi)$	45
6.3.3	L'exemple $A = H^*(S^2 \times S^3)$	47
6.3.4	Equivalence des ADGC $C(\xi)$	51
6.3.5	Modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ pour une variété 1-connexe de dimension impaire	54
6.4	Invariance par permutation des composantes	57
7	Modèle du complémentaire dans une variété à bord	61
7.1	Introduction	61
7.2	Noyau homotopique d'un morphisme de dgmodules	63
7.3	Modèle du complémentaire	67
7.3.1	Modèle de dgmodule du complémentaire	68
7.3.2	Un autre modèle de dgmodules	74
7.4	Modèle d'ADGC du complémentaire	76
7.4.1	Troncature d'un dgmodule	76
7.4.2	Troncature d'une ADGC	78
7.4.3	Modèle d'ADGC du complémentaire	80
8	Espaces des configurations dans une variété à bord	91
8.1	Introduction	91
8.2	Modèle d'ADGC de la diagonale de la paire $(W, \partial W)$	92
8.3	Modèle de dgmodule de $F(W, 2)$	98
8.4	Modèle de $F(M \setminus T, 2)$	101
8.4.1	Un premier modèle de $F(M \setminus T, 2)$	102
8.4.2	Modèle plus explicite de $F(M \setminus T, 2)$	103
8.5	Espaces des configurations dans des variétés ouvertes	109
8.6	Modèle de $F(\dot{M}, 2)$	110
8.7	Conjecture sur le modèle de $F(W, k)$	112
	Bibliographie	115

Introduction

L'espace des configurations de k points dans une variété M est l'espace

$$F(M, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in M \times \dots \times M \mid x_i \neq x_j \ \forall i, j \text{ tels que } i \neq j\}.$$

Ces espaces apparaissent souvent en mathématiques. Par exemple, l'espace des positions dans le "problème des k corps" dans une variété M est l'espace $F(M, k)$ puisqu'on y étudie les trajectoires de k planètes ou particules qui n'entrent pas en collision. Un autre exemple d'application est l'intégrale de Kontsevich qui est un invariant universel des nœuds défini à partir de certaines intégrales sur des espaces de configuration $F(\mathbb{R}^3, k)$. Plus généralement la théorie de Goodwillie-Weiss [13] permet de reconstruire les espaces de plongements lisses d'une variété M dans une autre variété W , $Emb(M, W)$, à partir des espaces de configuration $F(W, k)$. Nous avons encore de nombreuses autres applications, entre autres en géométrie algébrique (voir [12]).

Il est naturel de se demander si cette construction est un invariant homotopique, c'est-à-dire, est-ce que si M et M' sont des variétés qui ont même type d'homotopie (ce que nous noterons $M \simeq M'$), alors $F(M, k) \simeq F(M', k)$? Un exemple très simple montre que la réponse est négative. En effet, les variétés $M = \mathbb{R}^n$ et $M' = *$ sont deux variétés qui ont même type d'homotopie et nous voyons assez facilement que ce n'est pas le cas pour $F(M, 2) \simeq S^{n-1}$ et $F(M', 2) = \emptyset$. Néanmoins, si on impose la condition que la variété soit fermée, c'est-à-dire compacte et sans bord, alors cette question est encore partiellement ouverte.

Quelques résultats importants vont dans la direction d'une réponse positive. Par exemple, N. Levitt montre en 1995 [26] que pour les variétés fermées, 2-connexes, si $M \simeq M'$ alors $F(M, 2) \simeq F(M', 2)$. Levitt établit également que les espaces de lacets pointés des espaces de configurations sont des invariants homotopiques : $\Omega F(M, k) \simeq \Omega F(M', k)$. Cependant, en 2005, R. Longoni et P. Salvatore ont donné dans [27] une réponse négative à la question : ils décrivent deux variétés M et M' fermées, homotopiquement équivalentes, de dimension 3, non simplement connexes, telles que, pour tout $k \geq 2$, $F(M, k) \not\simeq F(M', k)$. La question encore ouverte est dès lors la suivante :

Question 1. Soient M et M' deux variétés fermées simplement connexes. A-t-on que $M \simeq M'$ implique que $F(M, k) \simeq F(M', k)$?

Dans ce travail nous allons aborder cette question d'un point de vue permettant de l'étudier avec des outils algébriques, à savoir du point de vue de l'homotopie rationnelle. Rappelons ce dont il s'agit. Il existe une relation d'équivalence sur les espaces topologiques plus faible que celle d'avoir même type d'homotopie, qui est d'avoir le même type d'homotopie rationnelle. Le grand avantage de cette notion est que le type d'homotopie rationnelle d'un espace simplement connexe est complètement encodé dans un objet algébrique qu'on appelle une ADGC (pour *algèbre différentielle graduée commutative*, ou plus précisément dans la classe de "quasi-isomorphisme" de cette ADGC). Pour déterminer le type d'homotopie rationnelle d'un espace X , il suffit donc de donner un "modèle" d'ADGC de celui-ci.

Un des objectifs de cette thèse est d'étudier la question 1 du point de vue de l'homotopie rationnelle. Pour simplifier le propos, commençons par le cas non trivial le plus simple, celui des espaces des configurations de deux points. Il est clair que

$$F(M, 2) = M \times M \setminus \Delta(M)$$

où

$$\Delta: M \hookrightarrow M \times M; x \mapsto (x, x)$$

est le plongement de la diagonale dans $M \times M$. L'espace des configurations $F(M, 2)$ est donc un espace complémentaire de l'image du plongement diagonal dans $M \times M$. La classe d'homotopie du plongement diagonal ne dépend que du type d'homotopie de M . Cependant, le type d'homotopie du complémentaire d'un plongement, n'est en général pas déterminé par la classe d'homotopie du plongement. Par exemple, le complémentaire du plongement trivial du cercle dans $\mathbb{R}^3$ (voir figure 1 (gauche)) n'a pas le même type d'homotopie que le complémentaire du plongement du cercle dans $\mathbb{R}^3$ correspondant au nœud de trèfle (voir figure 1 (droite)). Car on peut calculer que les groupes fondamentaux de ces deux complémentaires sont non isomorphes, alors que ces deux plongements sont évidemment homotopes.



FIGURE 1 – Deux plongements du cercle dans $\mathbb{R}^3$ non isotopes.

Par contre, il est facile de voir que le type d'homotopie du complémentaire ne dépend que de la classe d'*isotopie* du plongement. Aussi, on peut facilement montrer que deux plongements de cercles dans $\mathbb{R}^4$ sont toujours isotopes et donc les complémentaires ont même type d'homotopie. Plus généralement, un argument classique de position générale montre que si la codimension d'un plongement $f: K \hookrightarrow W$ est suffisamment grande sa classe

d'isotopie est complètement déterminée par la classe d'homotopie et donc le type d'homotopie de $W \setminus f(K)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f . C. T. C. Wall et J. F. P. Hudson ont raffiné les hypothèses sous lesquelles on a que la classe d'isotopie est complètement déterminée par la classe d'homotopie. Avant de préciser ces hypothèses rappelons qu'un plongement $f: K \hookrightarrow W$ est dit *r-connexe* si $\pi_i(f): \pi_i(K) \rightarrow \pi_i(W)$ est un isomorphisme pour $i < r$, et $\pi_r(f): \pi_r(K) \rightarrow \pi_r(W)$ est surjectif. Le théorème de Hudson-Wall sous l'hypothèse de dénouement (HD) suivante :

$$(HD) \quad \begin{cases} (i) & f: K \hookrightarrow W \text{ est } r\text{-connexe pour } r \geq 1, \text{ et} \\ (ii) & \dim W \geq 2 \dim K - r + 2, \end{cases}$$

affirme que la classe d'isotopie de f ne dépend que de sa classe d'homotopie, et ainsi le type d'homotopie de $W \setminus f(K)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f .

P. Lambrechts et D. Stanley développent dans [23] des techniques pour construire des modèles d'ADGC d'un espace complémentaire $W \setminus f(K)$ où $f: K \hookrightarrow W$ est l'inclusion d'un sous-polyèdre dans une variété fermée. Notons que nous avons une version "rationnelle" (HDQ) des hypothèses (HD) où on remplace (i) par " f est rationnellement r -connexe". Le résultat principal de [23], en analogie avec les résultats de Wall et Hudson, est que le type d'homotopie rationnelle du complémentaire est complètement déterminé par la classe d'homotopie rationnelle de l'inclusion sous les hypothèses (HDQ). Ils montrent, de plus, comment construire un modèle d'ADGC explicite de l'espace complémentaire à partir d'un modèle de l'inclusion f .

Les conditions (HDQ) sont vérifiées pour le plongement $\Delta: M \hookrightarrow M \times M$ lorsque la variété M est 2-connexe. Les méthodes développées dans [23] permettent ainsi de montrer dans [22] que, si M est une variété fermée, 2-connexe, le type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de M . De plus, un modèle explicite d'ADGC de l'espace des configurations de deux points dans M peut-être construit à partir d'un modèle de M .

Dans ce travail nous étudierons l'espace $F(M, 2)$ lorsque la variété fermée M est seulement 1-connexe. Sous cette hypothèse affaiblie de connexité les choses se compliquent tant du point de vue géométrique que du point de vue algébrique. En effet, nous n'avons plus de garantie que le type d'homotopie rationnelle du complémentaire soit déterminé par la classe d'homotopie rationnelle du plongement ce qui, d'ailleurs, ne permet pas d'obtenir directement le résultat via les méthodes algébriques développées dans [23]. Néanmoins, des arguments algébriques simples permettent de montrer que quand la dimension de la variété est paire, nous pouvons construire un modèle d'ADGC de l'espace $F(M, 2)$. Plus précisément nous avons le premier résultat suivant :

Théorème A (Théorème 6.1). *Soit M une variété fermée simplement connexe de dimension paire. Le type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de M . De plus un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ peut-être construit explicitement à partir d'un modèle d'ADGC de M .*

La situation est plus délicate en dimension impaire. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème B (Théorème 6.17). *Soit M une variété fermée simplement connexe de dimension impaire. Pour tout $x \in H_2(M; \mathbb{Q})$ nous pouvons construire, à partir d'un modèle d'ADGC de M , une ADGC explicite $C(x)$ et il existe $x \in H_2(M; \mathbb{Q})$ telle que $C(x)$ soit un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$.*

Des résultats de N. Habegger (voir [14]) entraînent que l'ensemble des classes d'isotopie d'applications homotopes à $\Delta: M \hookrightarrow M \times M$ est en bijection avec $H_2(M; \mathbb{Z})$. Ce résultat de Habegger donne un éclairage intéressant sur la signification potentielle de la classe $x \in H_2(M; \mathbb{Q})$ dans le théorème B. Cependant, nous ne connaissons pas d'argument, ni géométrique, ni algébrique, qui permette de déterminer l'élément $x \in H_2(M; \mathbb{Q})$ tel que $C(x)$ soit un modèle de $F(M, 2)$. Nous montrons que, en général, deux classes d'homologie différentes x et $y \in H_2(M; \mathbb{Q})$ donnent des ADGC $C(x)$ et $C(y)$ non équivalentes. Donc, la version rationnelle de la question 1 dans le cas où la variété est 1-connexe de dimension impaire reste encore ouverte.

Nous avons étendu notre étude de la question 1 pour les espaces des configurations dans une variété à bord :

Question 2. *Soit M une variété compacte à bord ∂M . Le type d'homotopie (rationnelle) de $F(M, k)$ est-il déterminé par le type d'homotopie (rationnelle) de la paire $(M, \partial M)$?*

Cette question nous ramène de nouveau à l'étude du type d'homotopie du complémentaire de l'inclusion $f: K \hookrightarrow W$ où K est un sous-polyèdre de W qui est, cette fois-ci, une variété compacte à bord. En effet, pour les espaces des configurations $F(M, k)$ on considère $W = M^k$ et K la "diagonale épaisse" dans M^k et alors $F(M, k) = W \setminus K$. Une simple observation montre que le type d'homotopie du complémentaire n'est pas déterminé, même en grande codimension, par la classe d'homotopie du plongement. En effet, regardons l'exemple simple de l'inclusion $f: * \hookrightarrow D^n$ d'un point dans un disque de dimension n :

- si $f(*)$ est un point intérieur à D^n alors $D^n \setminus f(*) \simeq S^{n-1}$;
- si $f(*)$ est un point du bord de D^n alors $D^n \setminus f(*) \simeq *$.

En fait, une étude plus approfondie du problème montre que le sous-polyèdre $K \cap \partial W$ joue un rôle fondamental dans la détermination du type d'homotopie de l'espace complémentaire $W \setminus K$. L'information permettant de déterminer, sous les hypothèses (HD) , le type d'homotopie du complémentaire $W \setminus K$ est le type d'homotopie du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K \cap \partial W & \hookrightarrow & \partial W \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \hookrightarrow & W. \end{array}$$

Un des résultats majeurs de cette thèse est d'établir une version rationnelle de ce principe :

Théorème C (Théorème 7.19 et théorème 7.23). *Sous les hypothèses (HDQ) pour le plongement $f: K \hookrightarrow W$ un modèle d'ADGC du complémentaire $W \setminus K$*

est complètement déterminé par un modèle d'ADGC du carré

$$\begin{array}{ccc} K \cap \partial W & \hookrightarrow & \partial W \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \hookrightarrow & W. \end{array}$$

Le théorème C s'applique entre autres aux exemples précédents du complémentaire de l'inclusion d'un point dans le disque (exemples qui sont détaillés à la fin du chapitre 7). En plus, ce résultat permet de répondre, sous certaines hypothèses sur la connexité de M et ∂M , à la version rationnelle de la question 2 lorsque $k = 2$.

Théorème D (Théorème 8.5 et corollaire 8.6). *Soit W une variété compacte à bord ∂W , telle que W et ∂W sont 2-connexes, et que $H^3(W) \rightarrow H^3(\partial W)$ est surjective. Le type d'homotopie rationnelle de $F(W, 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de la paire $(W, \partial W)$. De plus un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$ peut être construit à partir d'un modèle d'ADGC de l'inclusion $\partial W \hookrightarrow W$.*

De plus, pour certaines variétés à bord W , nous obtenons un modèle particulièrement élégant de $F(W, 2)$. Plus précisément, supposons qu'il existe une variété M , fermée 2-connexe de dimension n et un sous polyèdre $K \subset M$ tel que $\dim M \geq 2 \dim K + 3$. Soit $T \subset M$ un épaississement de K dans M , c'est-à-dire une sous variété compacte de codimension 0 ayant le type d'homotopie de K . Considérons la variété compacte à bord $W := \overline{M \setminus T}$.

Théorème E (Théorème 4.10). *Sous les hypothèses ci-dessus, W admet un modèle d'ADGC de la forme P/I où P est une ADGC à dualité de Poincaré et $I \subset P$ est un idéal différentiel.*

En conséquence, sous les mêmes hypothèses, on obtient un modèle d'ADGC particulièrement simple de $F(\overline{M \setminus T}, 2)$:

Théorème F (Théorème 8.12). *Soit M une variété fermée 2-connexe et $T \subset M$ est un épaississement d'un sous-polyèdre K tel que $\dim M \geq 2 \dim K + 3$. Si P/I est un modèle tel que dans le théorème E, alors $F(\overline{M \setminus T}, 2)$ admet un modèle d'ADGC de la forme*

$$(P/I \otimes P/I) \oplus_{\overline{\Delta}^!} ss^{-n}(P/I)$$

qui est le cône algébrique du morphisme induit par la multiplication par la classe diagonale $\overline{\Delta}^! : s^{-n}P/I \rightarrow P/I \otimes P/I$.

Il semble que les techniques développées dans ce travail permettent également de donner des informations précises, sinon complètes, sur le type d'homotopie rationnelle de $F(W, k)$ lorsque W est une variété compacte à bord et $k \geq 2$. En effet, inspirée par le résultat de [25], nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture G. *Soit W une variété compacte à bord. Un modèle de dgmodule de $F(W, k)$ peut-être déterminé à partir d'un modèle d'ADGC de $\partial W \hookrightarrow W$.*

Nous sommes confiants que la preuve de cette conjecture est une conséquence des résultats de ce travail et de [25].

Voici le plan de ce travail :

- Le chapitre 1 est un rappel des notions et résultats classiques sur les algèbres différentielles (dgmodules, ADGC, modèles de Sullivan, cônes algébriques, ...).
- Le chapitre 2 est un survol rapide de la théorie de l'homotopie rationnelle.
- Le chapitre 3 est consacré aux ADGC à dualité de Poincaré. Un résultat nouveau ici est un raffinement du théorème principal de [24] : nous montrons qu'une application $f: K \rightarrow M$ avec M une variété fermée 1-connexe et $\dim M \geq 2 \dim K + 3$, admet un modèle d'ADGC surjectif de la forme $\varphi: P \twoheadrightarrow Q$ où P est une ADGC à dualité de Poincaré.
- Le chapitre 4 rappelle les constructions de [23] des modèles d'ADGC (et de dgmodules) du complémentaire $M \setminus K$ d'un sous-polyèdre dans une variété fermée. Un résultat nouveau ici est le théorème E de l'introduction (théorème 4.10).
- Le chapitre 5 rappelle la construction de [22] d'un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ pour une variété fermée M 2-connexe.
- Le chapitre 6 est consacré à l'étude du type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ lorsque M est fermée et 1-connexe. Nous y démontrons les théorèmes A et B de l'introduction (théorèmes 6.1 et 6.17).
- Dans le chapitre 7 nous expliquons comment construire un modèle d'ADGC (ou de dgmodule) du complémentaire $W \setminus K$ d'un sous-polyèdre K dans une variété compacte à bord W . Le théorème C de l'introduction est établi dans ce chapitre (théorèmes 7.19 et 7.23).
- Le chapitre 8 est une application des résultats du chapitre 7 à l'étude du type d'homotopie rationnelle de $F(W, 2)$ lorsque W est une variété compacte à bord 2-connexe. Nous y établissons les théorèmes D et F de l'introduction (théorèmes 8.5 et 8.12). La conjecture G y est aussi précisée.

CHAPITRE 1

ADGC et DGmodules

Nous introduisons dans ce chapitre la plupart des outlis algébriques dont nous aurons besoin dans la suite. Le chapitre est principalement basé sur [9], [31] et [23, section 4].

1.1 Algèbres différentielles graduées commutatives

Commençons par quelques définitions de base.

Définition 1.1. *Un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué est une famille d'espaces vectoriels $A = \{A^n\}_{n \geq 0}$ indicés par les entiers positifs. Les éléments appartenant à A^n sont appelés éléments homogènes de degré n et on notera $|a| = n$ si $a \in A^n$.*

Définition 1.2. *Une $\mathbb{Q}$ -algèbre différentielle graduée commutative ou ADGC est une paire (A, d) où $A = \{A^n\}_{n \geq 0}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué muni d'une multiplication $A^p \otimes A^q \rightarrow A^{p+q}$ associative avec une unité $1 \in A^0$ et où $d : A^n \rightarrow A^{n+1}$ est une différentielle linéaire qui est une dérivation :*

$$d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot d(b),$$

et telle que, pour des éléments homogènes $a, b \in A$:

$$a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a.$$

Un morphisme d'ADGC $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$ est une famille d'applications linéaires $f : A^n \rightarrow B^n$ qui satisfait $df = fd$ et $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Définition 1.3. *Un quasi-isomorphisme d'ADGC est un morphisme d'ADGC $f : A \rightarrow B$ qui induit un isomorphisme en cohomologie. C'est-à-dire, tel que $H^*(f) : H^*(A) \xrightarrow{\cong} H^*(B)$ est un isomorphisme.*

Introduisons la notion d'équivalence faible d'ADGC

- Définition 1.4.** – Deux ADGC (A, d) , (B, d) sont faiblement équivalentes s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes reliant A et B .
- Deux morphismes d'ADGC $f: A \rightarrow B$ et $f': A' \rightarrow B'$ sont faiblement équivalents s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
 \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B'
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes.

1.2 Modules gradués différentiels ou dgmodules

Un autre objet indispensable dans la suite de notre exposé est la notion de module différentiel gradué ou dgmodule.

Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée.

Définition 1.5. Un A -dgmodule différentiel (M, d_M) est un complexe équipé avec une structure de A -module et tel que $d_M(a \cdot m) = da \cdot m + (-1)^{|a|} a \cdot d_M m$.

Un morphisme de A -dgmodules est une application $f: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ de A -modules qui commute à la différentielle.

Un quasi-isomorphisme de A -dgmodules est un morphisme de A -dgmodules qui induit un isomorphisme en cohomologie.

- Définition 1.6.** – Deux A -dgmodules (M, d_M) et (N, d_N) sont faiblement équivalents s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes de A -dgmodules reliant (M, d_M) à (N, d_N) .
- Deux morphismes de A -dgmodules $f: M \rightarrow N$ et $f': M' \rightarrow N'$ sont faiblement équivalents s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
 \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 M' & \xrightarrow{f'} & N'
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes de A -dgmodules.

Comme les A -dgmodules sont des complexes de chaînes, nous avons une notion d'homotopie :

Définition 1.7. Deux applications de A -dgmodules $f, g: M \rightarrow N$ sont homotopes, s'il existe une application de degré -1 , $h: M \rightarrow N$, vérifiant l'égalité $dh + hd = f - g$.

Donnons quelques exemples de dgmodules que nous utiliserons très souvent dans la suite. La k -ème suspension d'un A -dgmodule (M, d) est le A -dgmodule défini par $(s^k M)^i = M^{i+k}$ en tant qu'espace vectoriel, $a \cdot (s^k x) = (-1)^{k \cdot |a|} s^k(ax)$ pour $x \in M$, $a \in A$ et $d(s^k x) = (-1)^k s^k(dx)$.

Notons $\#V := \text{Hom}(V^{-k}, \mathbb{Q})$ le dual d'un espace vectoriel gradué V . Si (M, d) est un A -dgmodule. Nous pouvons munir $\#M$ d'une structure de A -module en posant

$$[a \cdot \varphi](m) = (-1)^{|\varphi||a|} \varphi(a \cdot m), \text{ pour } a \in A, \varphi \in \#M,$$

et nous pouvons munir $\#M$ d'une différentielle $d^\#$ définie par

$$(d^\# \varphi)(x) = -(-1)^{|x|} \varphi(dx)$$

pour $x \in M$ et $\varphi \in \#M$. Il est facile à voir que $(\#M, d^\#)$ est un A -dgmodule.

Finissons en donnant un résultat utile issu de la théorie des catégories modèles (voir, par exemple, [7] et [17] pour un aperçu détaillé de cette théorie) :

Lemme 1.8. Soit (A, d) une ADGC et soient (M, d_M) et $(M', d_{M'})$ deux A -dgmodules faiblement équivalents. Alors il existe $(\hat{M}, \hat{d})$ un A -dgmodule cofibrant tel que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes de A -dgmodules surjectifs

$$M \xleftarrow[\rho]{\simeq} \hat{M} \xrightarrow[\rho']{\simeq} M'$$

tel que $(\rho, \rho'): \hat{M} \rightarrow M \times M'$ est aussi une surjection.

Le résultat est encore vrai si M et M' sont des ADGC et nous trouvons alors $\hat{M}$ une ADGC cofibrante et ρ , ρ' et $\rho \oplus \rho'$ des morphismes d'ADGC.

Quand le contexte le permet nous noterons d toutes les différentielles, sans distinction.

1.3 Modèles de Sullivan

Soit V un espace vectoriel gradué. L'algèbre commutative libre sur V , ΛV , est le produit tensoriel de l'algèbre symétrique sur V^{paire} et l'algèbre extérieure sur V^{impaire} .

Définition 1.9. Une algèbre de Sullivan est une ADGC $(\Lambda V, d)$ telle que V admet une base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, où Ω est bien ordonné, telle que $d(x_\alpha) \in \Lambda(x_\beta)_{\beta < \alpha}$.

Une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est minimale si nous avons que $d(v) \in \Lambda^{\geq 2} V$, pour tout $v \in V$.

Remarquons que si $V = V^{\geq 2}$ et si $dv \in \Lambda^{\geq 2} V$ pour tout $v \in V$, alors $(\Lambda V, d)$ est de Sullivan.

Les objets $(\Lambda V, d)$ ont la remarquable propriété suivante :

Proposition 1.10. *Soit (A, d) une ADGC telle que $H^0(A) \cong \mathbb{Q}$, alors il existe une algèbre de Sullivan minimale $(\Lambda V, d)$ et un quasi-isomorphisme*

$$m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d).$$

En plus cette algèbre de Sullivan minimale est unique à isomorphisme près.

Ceci motive la définition suivante :

Définition 1.11. *Un modèle de Sullivan d'une ADGC (A, d) est la donnée d'une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ et d'un quasi-isomorphisme*

$$m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d).$$

1.4 Modèles relatifs de Sullivan

Les modèles relatifs que nous introduisons ci-dessous sont l'analogie des modèles de Sullivan pour les morphismes d'ADGC.

Définition 1.12. *Une ADGC relative est un morphisme d'ADGC de la forme*

$$i: (A, d) \rightarrow (A \otimes \Lambda V, D),$$

où $i(a) = a$, $D|_A = d_A$, et telle que V admet une base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, où Ω est bien ordonné, telle que $D(x_\alpha) \in A \otimes \Lambda(x_\beta)_{\beta < \alpha}$.

L'ADGC relative $(A \otimes \Lambda V, D)$ est minimale si $D(V) \subset (A^+ \otimes \Lambda V) \oplus \Lambda^{\geq 2} V$.

Théorème 1.13. *Soit $f: (A, d) \rightarrow (B, d)$ un morphisme d'ADGC. Nous avons alors un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow i \quad \nearrow m & \\ & (A \otimes \Lambda V, D) & \end{array}$$

où i est une ADGC relative minimale et m est un quasi-isomorphisme. De plus l'ADGC $(A \otimes \Lambda V, D)$ est unique à isomorphisme près. Nous appellerons une telle factorisation un modèle relatif minimal de f .

1.5 Cônes algébriques

Soit (A, d) une ADGC et soit $f: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ une morphisme de A -dgmodules. Le *cône algébrique* de l'application f est le A -dgmodule

$$C(f) = (N \oplus_f sM, \delta),$$

défini par $C(f) = N \oplus sM$ en tant que A -module, et

$$\delta(y, sx) = (d_N(y) + f(x), -sd_M(x)),$$

pour $x \in M$ et $y \in N$.

Nous avons des applications de A -dgm modules évidentes

$$i: N \rightarrow N \oplus_f sM ; y \mapsto (y, 0)$$

et

$$p: N \oplus_f sM \rightarrow sM ; (y, sx) \mapsto sx.$$

Le lemme suivant montre que cette construction est invariante par quasi-isomorphismes :

Lemme 1.14. *Soit le diagramme de A -dgm modules*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \simeq \downarrow \varphi & & \simeq \downarrow \psi \\ P & \xrightarrow{g} & Q \end{array}$$

les cônes $C(f)$ et $C(g)$ sont faiblement équivalents.

Démonstration. Définissons l'application de A -dgm modules

$$\begin{array}{ccc} \Phi: N \oplus_f sM & \rightarrow & Q \oplus_g sP \\ (y, sx) & \mapsto & (\psi(y), s\varphi(x)) \end{array}$$

Le diagramme commutatif de A -dgm modules ci-dessous commute,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & N \oplus_f sM & \xrightarrow{p} & sM \longrightarrow 0 \\ & & \simeq \downarrow \psi & & \downarrow \Phi & & \simeq \downarrow s\varphi \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{i} & Q \oplus_g sP & \xrightarrow{p} & sP \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le lemme des 5 implique le résultat. $\square$

Nous avons le même résultat si le carré commute seulement à homotopie près :

Lemme 1.15. *Soit un diagramme de A -dgm modules commutatif à homotopie près et dans lequel les applications verticales sont des quasi-isomorphismes*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \simeq \downarrow \varphi & \sim & \simeq \downarrow \psi \\ P & \xrightarrow{g} & Q. \end{array}$$

Alors, les cônes algébriques $C(f)$ et $C(g)$ sont faiblement équivalents.

Démonstration. Soit $H: M \rightarrow N$ une application de A -modules de degré -1 telle que $dH + Hd = \psi \circ f - g \circ \varphi$, autrement dit H est une homotopie entre $\psi \circ f$ et $g \circ \varphi$. Le morphisme

$$\begin{aligned} \Phi: N \oplus_f sM &\rightarrow Q \oplus_g sP \\ (y, sx) &\mapsto (\psi(y) + H(x), s\varphi(x)) \end{aligned}$$

commute à la différentielle. Nous avons le diagramme commutatif de A -dgmodules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & N \oplus_f sM & \xrightarrow{p} & sM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq \psi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \simeq s\varphi \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{i} & Q \oplus_g sP & \xrightarrow{p} & sP \longrightarrow 0 \end{array}$$

et le lemme des 5 entraîne que Φ est un quasi-isomorphisme. $\square$

Un des résultats les plus importants sur les cônes algébriques est le suivant :

Lemme 1.16. *Si on a une courte suite exacte de A -dgmodules*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

alors $C(f)$ est un A -dgmodule quasi-isomorphe à P .

Démonstration. En utilisant le lemme des 5, nous montrons assez facilement que $C(f) \rightarrow P ; (y, sx) \mapsto g(y)$ est un quasi-isomorphisme de A -dgmodules. $\square$

1.6 Structures d'ADGC sur les cônes algébriques

Cette section est basé sur la section 4 de [23].

Soit (A, d) une ADGC et $f: (Q, d) \rightarrow (A, d)$ une application de A -dgmodules. Nous pouvons munir le cône algébrique $C(f)$ d'une structure d'algèbre graduée commutative.

Définition 1.17. *Soit (A, d) une ADGC et $f: (Q, d) \rightarrow (A, d)$ une application de A -dgmodules. Notons $C(f)$ le cône algébrique de f . La multiplication*

$$\mu: C(f) \otimes C(f) \rightarrow C(f)$$

définie par, pour des éléments homogènes $x, x' \in Q$ et $a, a' \in A$,

- (i) $\mu(a \otimes a') = a \cdot a'$,
- (ii) $\mu(a \otimes sx') = (-1)^{|a|} sa \cdot x'$,
- (iii) $\mu(sx \otimes a') = (-1)^{|x||a'|} sa' \cdot x$,
- (iv) $\mu(sx \otimes sx') = 0$.

induit une structure d'algèbre graduée commutative sur $C(f)$. Nous appellerons celle-ci la structure semi-triviale d'AGC sur $C(f)$. Pour alléger les notations, nous noterons $(a, sx) \cdot (a', sx')$ au lieu de $\mu((a, sx) \otimes (a', sx'))$.

En général, la structure d'AGC semi-triviale sur le cône algébrique ne munit pas celui-ci d'une structure d'ADGC. Les lemmes suivants décrivent certaines situations où ceci est le cas.

Lemme 1.18 ([23], lemme 4.2). *Soit (A, d) une ADGC et $f : (Q, d) \rightarrow (A, d)$ une application de A -dgmmodules. Notons $C(f)$ le cône algébrique de f et soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(sQ)^{<k} = 0$ et $C(f)^{\geq 2k} = 0$, alors la structure semi-triviale définit une structure d'ADGC sur $C(f)$ et l'inclusion*

$$A \hookrightarrow C(f) = A \oplus_f sQ$$

est un morphisme d'ADGC.

Un résultat un peu plus général nous dit que sous certaines hypothèses le quotient d'un cône algébrique munit de la structure semi-triviale hérite d'une structure d'ADGC.

Lemme 1.19. *Soit (A, d) une ADGC et $f : (Q, d) \rightarrow (A, d)$ une application de A -dgmmodules. Notons $C(f)$ le cône algébrique de f et soit $I \subset C(f)$ un A -sous dgmmodule tel que $C(f)^{\geq 2k} \subset I$. Alors, si $(sQ)^{<k} = 0$ la multiplication semi-triviale sur le cône algébrique $C(f)$ induit une multiplication sur le quotient $C(f)/I$ qui munit celui-ci d'une structure d'ADGC, et la composée*

$$A \hookrightarrow C(f) = A \oplus_f sQ \xrightarrow{\pi} C(f)/I,$$

où $\pi : C(f) \rightarrow C(f)/I$ est la projection évidente, est un morphisme d'ADGC.

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe du lemme 4.3 dans [23]. $\square$

Lemme 1.20 ([23], lemme 4.5). *Soit $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$ un morphisme d'ADGC, soit $u : A \twoheadrightarrow A \otimes \Lambda V$ une algèbre de Sullivan relative et soit $\hat{f} : A \otimes \Lambda V \rightarrow B$ un morphisme de A -dgmmodules tel que $\hat{f}|_A = f$. Si $V^{<k} = 0$ et $B^{\geq 2k} = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ alors $\hat{f}$ est un morphisme d'ADGC.*

CHAPITRE 2

Homotopie rationnelle

La théorie de l'homotopie rationnelle étudie le type d'homotopie rationnelle des espaces topologiques. Connaître celui-ci permet une compréhension partielle du type d'homotopie. Un des avantages principaux de cette théorie est que l'on peut associer, à un espace, un objet algébrique (une ADGC) qui encode complètement le type d'homotopie rationnelle de cet espace.

Nous donnons, dans ce chapitre, quelques bases de cette théorie. Pour un aperçu complet de celle-ci et de ses applications, nous suggérons les références [8] et [9].

2.1 Rationalisation et type d'homotopie rationnelle

Commençons par les définitions de base :

Définition 2.1. *Un espace simplement connexe est dit rationnel si $\pi_*(X)$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel*

Soit Y un espace rationnel et $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces simplement connexes. Alors l'application

$$\pi_*(f): \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y)$$

induit de façon unique une application

$$\widetilde{\pi_*(f)}: \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_*(Y).$$

Définition 2.2. *Soit X un espace simplement connexe. Une rationalisation de X est la donnée d'un espace rationnel $X_{\mathbb{Q}}$ et d'une application*

$$\varphi: X \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$$

telle que l'application induite

$$\widetilde{\pi_*(\varphi)}: \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \pi_*(X_{\mathbb{Q}})$$

est un isomorphisme. Nous disons alors que $X_{\mathbb{Q}}$ est un rationalisé de X .

Le théorème suivant garantit l'existence et l'unicité du rationalisé :

Théorème 2.3. *Soit X un espace simplement connexe. Alors, il existe un espace rationnel $X_{\mathbb{Q}}$ et une rationalisation $\varphi: X \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$. De plus, si $Y_{\mathbb{Q}}$ est un espace rationnel simplement connexe, alors pour toute application continue $f: X \rightarrow Y_{\mathbb{Q}}$ il existe une application continue $g: X_{\mathbb{Q}} \rightarrow Y_{\mathbb{Q}}$ unique à homotopie près, telle que*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y_{\mathbb{Q}} \\ & \searrow \varphi & \nearrow g \\ & X_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

Ce théorème nous montre que si nous avons une application $f: X \rightarrow Y$ alors il existe une unique application à homotopie près entre les rationalisés, $f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \rightarrow Y_{\mathbb{Q}}$.

Théorème 2.4 (Whitehead-Serre). *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application entre espaces simplement connexes. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $\pi_*(f) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels ;
- $H_*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels ;
- $H^*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels.

Définition 2.5. *Une application $f: X \rightarrow Y$ telle que $\pi_*(f) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme est appelée une équivalence d'homotopie rationnelle.*

Définition 2.6. *Deux espaces X et Y simplement connexes ont le même type d'homotopie rationnelle s'il existe un zig-zag*

$$X \longleftarrow Z_1 \longrightarrow \cdots \longleftarrow Z_n \longrightarrow Y$$

d'équivalences d'homotopie rationnelle.

L'homotopie rationnelle étudie les types d'homotopie rationnelle des espaces et les propriétés qui sont invariantes par équivalence d'homotopie rationnelle.

2.2 Foncteur A_{PL} et lien avec les ADGC

Dans [28], D. Sullivan construit le foncteur

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}: & Top & \rightarrow ADGC \\ & X & \mapsto A_{PL}(X) \end{array}$$

des espaces topologique vers les ADGC. Le foncteur A_{PL} est tel que nous avons un isomorphisme naturel

$$H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H^*(A_{PL}(X)).$$

De plus, nous avons le résultat fondamental suivant :

Théorème 2.7. *Soient X et Y des espaces rationnels simplement connexes et dont la cohomologie est de type fini. Les espaces X et Y ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement si les ADGC $A_{PL}(X)$ et $A_{PL}(Y)$ sont faiblement équivalentes.*

Ce résultat nous dit que, pour X un espace simplement connexe, les ADGC $A_{PL}(X)$ encodent complètement le type d'homotopie rationnelle de X et de même, pour toute algèbre quasi-isomorphe à $A_{PL}(X)$. Ceci suggère de définir la notion de *modèle d'ADGC* d'un espace :

Définition 2.8. *Soit X un espace. L'ADGC (A, d) est un modèle de X s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes reliant A à $A_{PL}(X)$.*

Définition 2.9. *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Un modèle de f est un morphisme d'ADGC, $\varphi: A \rightarrow B$, telle que nous avons un diagramme commutatif d'ADGC*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\
 \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 A_{PL}(Y) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(X)
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes.

CHAPITRE 3

ADGC à dualité de Poincaré

Dans ce chapitre nous introduisons la notion d'ADGC à dualité de Poincaré. C'est-à-dire d'ADGC dont l'algèbre sous jacente est à dualité de Poincaré. Un des résultats les plus intéressants concernant ce type d'ADGC se trouve dans [24]. Les auteurs y montrent (entre autres) que toute variété fermée simplement connexe admet comme modèle une ADGC à dualité de Poincaré. Nous donnons dans ce chapitre un raffinement de ce résultat. Nous en déduisons que toute inclusion $f: K \hookrightarrow M$ d'un sous-polyèdre K de grande codimension dans une variété fermée M admet un modèle surjectif $\varphi: P \twoheadrightarrow Q$ tel que P est une ADGC à dualité de Poincaré de M .

3.1 Définition d'ADGC à dualité de Poincaré

Définition 3.1 ([24], définition 2.3). *Une orientation en degré n d'une ADGC (A, d) est la donnée d'une application linéaire*

$$\epsilon: A^n \rightarrow \mathbb{Q}$$

telle que $\epsilon(dA^{n-1}) = 0$ et il existe $\mu \in A^n \cap \ker d$ telle que $\epsilon(\mu) = 1$. Nous parlons alors de l'ADGC orientée (A, d, ϵ) .

Il est équivalent de dire que ϵ est un morphisme de complexes de cochaînes

$$\epsilon: A \rightarrow s^{-n}\mathbb{Q}$$

tel que $H^n(\epsilon)$ est surjectif, où $s^{-n}\mathbb{Q}$ est le complexe de cochaînes qui vaut $\mathbb{Q}$ en degré n et 0 ailleurs.

Définition 3.2 ([24], définition 2.2). *Une ADGC à dualité de Poincaré (ou ADGCDP) orientée de dimension formelle n est une ADGC (A, d) munie d'une orientation $\epsilon: A \rightarrow s^{-n}\mathbb{Q}$ de degré n telle que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, la forme bilinéaire*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \begin{array}{ccc} A^k \otimes A^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ a \otimes b & \longmapsto & \langle a, b \rangle = \epsilon(a \cdot b) \end{array}$$

est non dégénérée.

De façon équivalente :

Proposition 3.3. *L'ADGC orientée (A, d, ϵ) est à dualité de Poincaré de dimension formelle n si et seulement si l'application*

$$\theta : A \rightarrow s^{-n} \# A ; a \mapsto s^{-n} \langle a, - \rangle,$$

est un isomorphisme de A -dgmodules.

Nous introduisons ci-dessous la notion de *base Poincaré-duale* qui sera très utilisée dans les chapitres suivants :

Définition 3.4. *Soit (A, d, ϵ) une ADGCDP. Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ une base homogène de A . L'unique base homogène $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ de A caractérisée par*

$$\langle a_i, a_j^* \rangle = \delta_{ij},$$

est appelée la base Poincaré-duale de $\{a_i\}_{i=1}^N$.

3.2 Modèles à dualité de Poincaré

Dans cette section nous développons les techniques nécessaires pour montrer que toute algèbre de type fini telle que sa cohomologie est une algèbre à dualité de Poincaré est quasi-isomorphe à une ADGC qui, elle même, est à dualité de Poincaré.

Introduisons, pour commencer la notion d'orphelin :

Définition 3.5 ([24], définition 3.1). *Les orphelins d'une ADGC orientée (A, d, ϵ) forment l'idéal différentiel*

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(A, \epsilon) := \{a \in A \mid \forall b \in A : \epsilon(a \cdot b) = 0\}.$$

Soit (A, d, ϵ) une ADGC orientée en degré n . Notons que $\mathcal{O} \subset \ker \epsilon$ car si $a \in \mathcal{O}$ alors $\epsilon(a) = \epsilon(a \cdot 1) = 0$. Nous avons donc une application

$$\bar{\epsilon} : A/\mathcal{O} \rightarrow s^{-n} \mathbb{Q},$$

qui étend ϵ . Si de plus $H(A, d)$ est à dualité de Poincaré en degré n et si A est connexe de type fini, alors [24, Proposition 3.3] garantit que $(A/\mathcal{O}, \bar{d}, \bar{\epsilon})$ est une ADGCDP orientée de dimension formelle n .

Le résultat principal du chapitre est un raffinement du théorème [24, Théorème 1.1] :

Théorème 3.6. *Soit (A, d, ϵ) une ADGC de type fini orientée en degré n telle que $H(A, d)$ est une algèbre à dualité de Poincaré de dimension formelle n . Si A est 1-connexe et telle que $A^2 \subset \ker d$, alors il existe une ADGCDP connexe (P, δ) et un quasi-isomorphisme*

$$\varphi : (A, d) \xrightarrow{\simeq} (P, \delta),$$

tel que φ est un isomorphisme en degré $< n/2$. De plus (P, δ) admet une orientation $\bar{\epsilon}$ en degré n tel que $\epsilon = \bar{\epsilon} \circ \varphi$.

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.7. *Soit (A, d, ϵ) une ADGC de type fini orientée en degré n . Soit k un entier $\leq n/2$ tel que $\mathcal{O}^k(A, \epsilon) \neq 0$. Il existe alors un modèle de Sullivan relatif*

$$j: (A, d) \twoheadrightarrow (\tilde{A}, \tilde{d}),$$

et une orientation $\tilde{\epsilon}$ sur $(\tilde{A}, \tilde{d})$ en degré n telles que

- j est un quasi-isomorphisme,
- $\epsilon = \tilde{\epsilon} \circ j$,
- j est un isomorphisme en degré $< n - k$,
- $\dim \mathcal{O}^{\leq n/2}(\tilde{A}, \tilde{\epsilon}) < \dim \mathcal{O}^{\leq n/2}(A, \epsilon)$.

Démonstration. Choisissons $o \in \mathcal{O}^k(A, \epsilon)$ tel que $o \neq 0$. Posons le modèle de Sullivan relatif

$$(\tilde{A}, \tilde{d}) = (A \otimes \Lambda(x, y), \tilde{d})$$

avec $|x| = n - k \geq \frac{n}{2}$, $|y| = n - k + 1 > \frac{n}{2}$, $\tilde{d}|_A = d$, $\tilde{d}(x) = y$, $\tilde{d}(y) = 0$. Choisissons un sous-espace vectoriel $S \subset A$ supplémentaire de $\mathbb{Q} \cdot o$. C'est-à-dire tel que $S \oplus \mathbb{Q} \cdot o = A$. Définissons une application linéaire

$$\tilde{\epsilon}: \tilde{A} \rightarrow s^{-n}\mathbb{Q}$$

par

- $\tilde{\epsilon}(a) = \epsilon(a)$ pour $a \in A$,
- $\tilde{\epsilon}(o \otimes x) = 1$,
- $\tilde{\epsilon}(s \otimes x) = 0$ pour $s \in S$,
- $\tilde{\epsilon}(a \otimes y) = -(-1)^{|a|}\tilde{\epsilon}((da) \otimes x)$ pour $a \in A$ et
- $\tilde{\epsilon}(a \otimes x^i y^l) = 0$ si $a \in A$ et $i + l \geq 2$.

Nous vérifions par calcul que $\tilde{\epsilon}(\tilde{d}(\tilde{A})) = 0$, autrement dit

$$\tilde{\epsilon}: \tilde{A} \rightarrow s^{-n}\mathbb{Q}$$

est un morphisme de complexes de cochaînes. De plus si $\mu \in A \cap \ker d$ est tel que $\epsilon(\mu) = 1$ alors $\tilde{\epsilon}(\mu) = 1$. Donc $\tilde{\epsilon}$ est une orientation sur $(\tilde{A}, \tilde{d})$. Il est clair que $\mathcal{O}^{\leq n/2}(\tilde{A}) \subset \mathcal{O}^{\leq n/2}(A)$ et par construction de $(\tilde{A}, \tilde{d}, \tilde{\epsilon})$, $o \notin \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{\epsilon})$ et $o \in \mathcal{O}(A, \epsilon)$. Donc $\dim \mathcal{O}^{\leq n/2}(\tilde{A}, \tilde{\epsilon}) < \dim \mathcal{O}^{\leq n/2}(A, \epsilon)$. □

Prouvons le théorème 3.6 :

Démonstration du théorème 3.6. Soit (A, d, ϵ) une ADGC orientée en degré n , 1-connexe, de type fini, telle que $A^2 \subset \ker d$. En appliquant itérativement le lemme 3.7, nous construisons un modèle de Sullivan relatif

$$j: (A, d) \xrightarrow{\sim} (\tilde{A}, \tilde{d})$$

qui est un isomorphisme en degrés $< n/2$ et un quasi-isomorphisme, ainsi qu'une orientation $\tilde{\epsilon}$ sur $(\tilde{A}, \tilde{d})$ qui étend ϵ et telle que

$$\mathcal{O}^i(\tilde{A}, \tilde{\epsilon}) = 0 \text{ pour } i \leq n/2.$$

En utilisant les résultats [24, section 4 et proposition 5.1], nous trouvons une extension

$$\gamma: (\tilde{A}, \tilde{d}) \xrightarrow{\simeq} (\hat{A}, \hat{d}) = (\tilde{A} \otimes \Lambda V, \hat{d})$$

avec une orientation $\hat{\epsilon}: \hat{A} \rightarrow s^{-n}\mathbb{Q}$, $V = V^{\geq n/2}$ et γ un isomorphisme en degrés $< \frac{n}{2}$, de sorte que

- $\mathcal{O}^{< n/2}(\hat{A}) \subset \mathcal{O}^{< n/2}(\tilde{A}) = 0$,
- $\mathcal{O}(\hat{A})$ est acyclique.

Comme les orphelins forment un idéal différentiel, nous pouvons construire l'ADGC

$$(P, \delta) := (\hat{A}, \hat{d}) / \mathcal{O}(\hat{A}, \hat{\epsilon}).$$

Comme $H(\hat{A}, \hat{d}) \cong H(A, d)$ est à dualité de Poincaré, les résultats [24, proposition 3.3 et proposition 3.6] entraînent que (P, δ) est une ADGCDP avec une orientation $\bar{\epsilon}$ induite par $\hat{\epsilon}$ et donc qui étend ϵ .

Comme j et γ sont des isomorphismes en degré $< n/2$ et que la projection canonique $\pi: (\hat{A}, \hat{d}) \rightarrow (P, \delta)$ est un isomorphisme en degré $< n/2$ (puisque $\mathcal{O}^{< n/2}(\hat{A}, \hat{\epsilon}) = 0$), nous en déduisons que

$$\varphi = \pi \circ \gamma \circ j: (A, d) \rightarrow (P, d)$$

est un quasi-isomorphisme qui est isomorphisme en degré $< n/2$. □

3.3 Modèle surjectif de source une ADGCDP

Soit $f: K \hookrightarrow M$ l'inclusion d'un sous-polyèdre dans une variété fermée. Nous construisons ci-dessous un modèle surjectif de f en partant d'un modèle d'ADGC à dualité de Poincaré de M . Commençons par prouver le lemme ci-dessous :

Lemme 3.8. *Soit $f: K \hookrightarrow M$ une application et soit $r \geq 1$ un entier tels que*

- i. *M et K sont r -connexes,*
- ii. *$H^*(M; \mathbb{Q})$ et $H^*(K; \mathbb{Q})$ sont de type fini,*
- iii. *$H^{r+1}(f; \mathbb{Q})$ est surjective.*

Alors, l'inclusion $f: K \hookrightarrow M$ admet un modèle d'ADGC

$$\varphi: R \twoheadrightarrow Q,$$

tel que

1. $R^0 = \mathbb{Q}$, $R^1 = \dots = R^r = 0$, $R^{r+1} = R^{r+1} \cap \ker d$,
2. R est une ADGC de type fini,
3. φ est surjective.

Démonstration. Considérons un modèle de f ,

$$\psi: (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, \delta),$$

tel que $(\Lambda V, d)$ et $(\Lambda W, \delta)$ sont des modèles minimaux. Par connexité de M et K on a $V = V^{\geq r+1}$, $W = W^{\geq r+1}$ et $V^{r+1} \subset \ker d$ et $W^{r+1} \subset \ker d$. Comme $H^{r+1}(\psi)$ est surjective nous avons la surjection

$$\psi: V^{r+1} \rightarrow W^{r+1}.$$

Considérons les espaces vectoriels gradués Z et Z' tels que l'on ait

- $Z^k = 0$ et $Z'^{k+1} = 0$ pour $k \leq r+1$,
- des isomorphismes $\theta: Z^k \xrightarrow{\cong} W^k$ et $D: Z^k \xrightarrow{\cong} Z'^{k+1}$ pour $k \geq r+2$.

Nous avons alors une application d'ADGC

$$\Theta: (\Lambda(Z \oplus Z'), D) \rightarrow (\Lambda W, \delta)$$

définie par $\Theta(z) = \theta(z)$ et $\Theta(Dz) = \delta\theta(z)$. De plus Θ est surjective en degrés $\geq r+2$ et $(\Lambda(Z \oplus Z'))^+$ est concentré en degrés $\geq r+2$. Posons $R = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda(Z \oplus Z'), D)$, $Q = (\Lambda W, \delta)$ et

$$\varphi: R \rightarrow Q$$

définie par $\varphi(\omega \otimes \rho) = \psi(\omega) \cdot \Theta(\rho)$ pour $\omega \in \Lambda V$ et $\rho \in \Lambda(Z \oplus Z')$. Nous vérifions facilement que φ et R ont les propriétés voulues. $\square$

Nous pouvons maintenant construire un modèle surjectif de f de source une ADGCDP :

Proposition 3.9. *Soit M une variété fermée 1-connexe orientée de dimension n et soit $f: K \hookrightarrow M$ l'inclusion d'un sous-polyèdre 1-connexe K de dimension k . Si*

$$H^2(f; \mathbb{Q}): H^2(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(K; \mathbb{Q})$$

est surjective et si $n \geq 2k+3$, alors f admet un modèle d'ADGC

$$\varphi: (P, \delta) \twoheadrightarrow (Q, d_Q)$$

tel que

- (P, δ) est une ADGCDP;
- φ est surjectif;
- $Q^i = 0$ pour $i > k$.

Démonstration. Par le lemme 3.8 avec $r = 1$ nous pouvons construire

$$\tilde{\varphi}: R \twoheadrightarrow \tilde{Q},$$

un modèle d'ADGC de f tel que

1. $R^0 = \mathbb{Q}$, $R^1 = 0$, $R^2 = R^2 \cap \ker d$,
2. R est une ADGC de type fini,
3. φ est surjective.

Il existe alors un idéal différentiel acyclique $I \subset \tilde{Q}$ tel que $\tilde{Q}^{>k} \subset I$. Posons

$$(Q, d_q) = \tilde{Q}/I$$

qui est concentré en degrés $\leq k$ et est quasi-isomorphe à $\tilde{Q}$. Comme M est une variété fermée orientable, $H^*(R)$ est à dualité de Poincaré. Par le théorème 3.6 il existe un quasi-isomorphisme

$$\psi: R \xrightarrow{\simeq} P$$

où P est une ADGCDP et φ est un isomorphisme en degré $< n/2$. Comme $k < n/2$ et $Q^{>k} = 0$ nous avons un relèvement

$$\varphi: P \twoheadrightarrow Q$$

qui est le modèle recherché de f . □

CHAPITRE 4

Modèle du complémentaire dans une variété fermée

Ce chapitre est un exposé d'une partie des résultats prouvés dans [23] et présentés aussi dans [9, Chapitre 8, section 8.1]. Le résultat du théorème 4.10 à la fin du chapitre est nouveau.

4.1 Introduction

Soit $f: K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre K , connexe, de dimension k dans une variété W fermée, connexe, orientable de dimension n . L'objectif de ce chapitre est de donner un modèle de l'espace complémentaire $W \setminus K$.

Premièrement nous allons donner un modèle de $A_{PL}(W)$ -dgmodule de $A_{PL}(W \setminus K)$ sous la forme d'un cône algébrique. Plus précisément, nous montrerons que $A_{PL}(W \setminus K)$ est faiblement équivalent comme $A_{PL}(W)$ -dgmodule au cône algébrique de l'application

$$s^{-n} \# A_{PL}(f): s^{-n} \# A_{PL}(K) \longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W).$$

Pour construire un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$ nous partirons d'un modèle d'ADGC $\varphi: A \rightarrow B$ de $f: K \hookrightarrow W$. En prenant $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag

$$A \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(W)$$

nous pouvons munir les algèbres $A_{PL}(W)$, $A_{PL}(K)$, $A_{PL}(W \setminus K)$, A et B d'une structure de $\hat{A}$ -dgmodules. Soit $\varphi^!: Q \rightarrow A$ un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalent à

$$s^{-n} \# \varphi: s^{-n} \# B \rightarrow s^{-n} \# A.$$

Nous montrerons que le cône algébrique $C(\varphi^!) = A \oplus_{\varphi^!} sQ$ est un $\hat{A}$ -dgmodule faiblement équivalent à $A_{PL}(W \setminus K)$.

Sous l'hypothèse de grande codimension $n \geq 2k+3$, nous pouvons construire $\varphi^!$ de façon à que le cône algébrique $C(\varphi^!)$ muni de la structure semi-triviale

soit un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$. Ce résultat montre que si K et W sont 1-connexes et $n \geq 2k + 3$, le type d'homotopie rationnelle du complémentaire ne dépend que de la classe d'homotopie rationnelle du plongement $f: K \hookrightarrow W$.

Si nous ajoutons des hypothèses sur la connexité de l'application $H_*(f): H_*(K) \rightarrow H_*(W)$, Lambrechts et Stanley montrent [23, théorème 1.4] que nous pouvons affaiblir l'hypothèse de grande codimension et obtenir encore un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$ qui ne dépende que d'un modèle d'ADGC de l'inclusion f .

Nous finissons le chapitre par un nouveau résultat. En partant d'un modèle surjectif $\varphi: P \rightarrow Q$ de l'inclusion $f: K \hookrightarrow W$, avec P à dualité de Poincaré et Q tel que $Q^{>k} = 0$ et en supposant $n \geq 2k + 3$, nous construisons un idéal différentiel $I \subset P$ tel que P/I est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$.

4.2 A_{PL} et l'isomorphisme d'excision

Cette section est basé sur [25, Section 4].

Rappelons le théorème classique d'excision

Théorème 4.1 (Théorème d'excision). *Soient (X, A) une paire d'espaces topologiques et $U \subset X$ tel que $\bar{U} \subset \text{int } A$, alors l'inclusion*

$$i: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$$

induit un isomorphisme en cohomologie.

Le théorème implique que si nous avons (X, A) une paire d'espaces topologiques et $i: (X', A') \hookrightarrow (X, A)$ une inclusion de paires telle que $\bar{X} \setminus X' \subset \text{int } A$ et $A' = X' \cap A$ alors

$$A_{PL}(i): A_{PL}(X, A) \rightarrow A_{PL}(X', A')$$

est un quasi-isomorphisme.

Soit $\mathcal{K}$ la catégorie des complexes simpliciaux ordonnés, comme dans [25, section 4] nous définissons un foncteur

$$\widehat{A_{PL}}: \mathcal{K} \rightarrow ADGC; K \mapsto A_{PL}(K_\bullet),$$

où $K_\bullet$ est l'ensemble simplicial associé naturellement au complexe ordonné K tel que les simplexes non dégénérés de $K_\bullet$ sont exactement les simplexes de K . Si L est un sous-complexe du complexe simplicial ordonné K , nous posons $\widehat{A_{PL}}(K, L) = \ker \left(\widehat{A_{PL}}(K) \rightarrow \widehat{A_{PL}}(L) \right)$.

Proposition 4.2. *Le foncteur $\widehat{A_{PL}}$ vérifie les deux propriétés suivantes*

1. $A_{PL}(|K|) \simeq \widehat{A_{PL}}(K)$ pour tout complexe simplicial ordonné K .
2. **Propriété d'excision forte** : *Soit (K, L) une paire de complexes simpliciaux ordonnés. Soit $K' \subset K$ un sous-complexe et $L' = K' \cap L$. Si $K' \cup L = K$ alors l'inclusion $i: (K', L') \hookrightarrow (K, L)$ induit un isomorphisme*

$$\widehat{A_{PL}}(i): \widehat{A_{PL}}(K, L) \xrightarrow{\cong} \widehat{A_{PL}}(K', L').$$

Démonstration. 1. Soit $S_\bullet: Top \rightarrow sSet$ le foncteur simplicial singulier qui associe à un espace topologique X l'ensemble simplicial $S_\bullet(X)$ où $S_n(X) = \{f: \Delta^n \rightarrow X\}$. Il existe une équivalence faible

$$K_\bullet \xrightarrow{\sim} S_\bullet(|K_\bullet|)$$

qui induit un quasi-isomorphisme d'ADGC

$$A_{PL}(S_\bullet(|K_\bullet|)) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(K_\bullet).$$

Par définition, $A_{PL}(|K|) = A_{PL}(S_\bullet(|K|))$ et

$$A_{PL}(S_\bullet(|K|)) \cong A_{PL}(S_\bullet(|K_\bullet|)).$$

Nous avons alors la suite d'équivalences faibles d'ADGC

$$A_{PL}(|K|) \cong A_{PL}(S_\bullet(|K_\bullet|)) \simeq A_{PL}(K_\bullet) =: \widehat{A_{PL}}(K).$$

2. Un élément $\phi \in \widehat{A_{PL}}(K, L)$ est une application d'ensembles simpliciaux $\phi: K_\bullet \rightarrow (A_{PL})_\bullet$ qui s'annule sur les simplexes de L . Elle est complètement définie par ses valeurs sur les simplexes non dégénérés de $K_\bullet$, c'est-à-dire les simplexes de K .

(i) Montrons que $\widehat{A_{PL}}(i)$ est surjectif.

Soit $\phi' \in \widehat{A_{PL}}(K', L')$. Définissons un élément $\phi \in \widehat{A_{PL}}(K, L)$ en posant $\phi(\sigma) = \phi'(\sigma)$ si σ est un simplexe non dégénéré de K' et $\phi(\sigma) = 0$ si σ est un simplexe non dégénéré de L . L'élément ϕ est bien défini car $K' \cap L = L'$, et défini sur tout K , car $K' \cup L = K$. De plus, nous vérifions facilement que ϕ commute avec les différentielles et les dégénérescences. Il est clair que $\widehat{A_{PL}}(i)(\phi) = \phi'$.

(ii) Montrons que $\widehat{A_{PL}}(i)$ est injectif.

Soit $\phi \in \widehat{A_{PL}}(K, L)$ tel que $\phi(\sigma) = 0$ pour tout complexe non dégénéré σ dans K' . Alors $\phi(\sigma) = 0$ pour tout simplexe non dégénéré σ de K , car $K' \cup L = K$ et que par définition ϕ s'annule sur les simplexes de L . Donc $\widehat{A_{PL}}(i)(\phi) = 0$ implique $\phi = 0$. $\square$

4.3 Modèle de $A_{PL}(W)$ -dgmodule du complémentaire

Soit $f: K \hookrightarrow W$ le plongement d'un sous-polyèdre K connexe dans une variété W fermée, connexe, orientable de dimension n et notons $l: W \setminus K \rightarrow W$ l'inclusion du complémentaire. Les morphismes

$$A_{PL}(f): A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(K)$$

et

$$A_{PL}(l): A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(W \setminus K)$$

munissent $A_{PL}(K)$ et $A_{PL}(W \setminus K)$ d'une structure de $A_{PL}(W)$ -dgmodules. Le résultat suivant est prouvé dans [25, proposition 6.2]. Nous en donnons la preuve car elle illustre les méthodes que nous utiliserons pour prouver l'importante proposition 7.6.

Proposition 4.3. *Soit $f: K \hookrightarrow W$ le plongement d'un sous-polyèdre K de dimension k dans une variété W fermée, connexe, orientable de dimension n . Le cône algébrique de l'application de $A_{PL}(W)$ -dgm modules*

$$s^{-n} \# A_{PL}(f): s^{-n} \# A_{PL}(K) \longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W)$$

est faiblement équivalent en tant que $A_{PL}(W)$ -dgm module à $A_{PL}(W \setminus K)$.

Démonstration. Dans la section 4.2 nous avons construit un foncteur

$$\widehat{A_{PL}}: \mathcal{K} \rightarrow ADGC; K \rightarrow A_{PL}(K_\bullet)$$

où $\mathcal{K}$ est la catégorie des complexes simpliciaux ordonnés et $K_\bullet$ est l'ensemble simplicial associé naturellement au complexe ordonné K . Le foncteur $\widehat{A_{PL}}$ vérifie les deux propriétés de la proposition 4.2. En particulier, nous avons besoin de la deuxième propriété de ce foncteur pour prouver notre résultat.

Rappelons que K est un sous-polyèdre du polyèdre W . Remplaçons ces polyèdres par leurs secondes subdivisions barycentriques. Dans ce cas, l'étoile T de K (c'est-à-dire le sous complexe constitué de tous les simplexes dont une face est un simplexe de K) est un voisinage régulier de K dans W [19, chapitres 1 et 2] et donc, entre autres, une sous-variété compacte à bord de codimension 0 dans W qui se retracte par déformation sur K . Par exemple lorsque K est lui même une sous-variété, alors T est l'analogue d'un voisinage tubulaire.

Fixons un ordre arbitraire sur les sommets du complexe simplicial W de sorte que W et les sous-polyèdres T , ∂T , K et ∂K deviennent des complexes simpliciaux ordonnés. Nous pouvons leur appliquer le foncteur $\widehat{A_{PL}}$ qui est naturellement quasi-isomorphe à A_{PL} . Pour démontrer la proposition 4.3, il suffit de montrer que le cône algébrique $C(s^{-n} \# \widehat{A_{PL}}(f))$ est un modèle de $\widehat{A_{PL}}(W)$ -dgm module de $\widehat{A_{PL}}(\overline{W \setminus T})$. Nous pouvons donc travailler avec $\widehat{A_{PL}}$ au lieu de A_{PL} . Pour alléger les notations, dans la suite de cette preuve nous noterons A_{PL} au lieu de $\widehat{A_{PL}}$.

L'inclusion $i: T \hookrightarrow W$ et l'inclusion $f: K \hookrightarrow W$ induisent des applications $A_{PL}(i): A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(T)$ et $A_{PL}(f): A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(K)$ qui munissent les ADGC $A_{PL}(T)$ et $A_{PL}(K)$ de structures de $A_{PL}(W)$ -dgm modules.

Soit

$$\epsilon_W: A_{PL}(W) \rightarrow s^{-n} \mathbb{Q}$$

un morphisme de complexes de chaînes tel que $H^n(\epsilon_W)$ est un isomorphisme. L'application

$$\Phi_W: A_{PL}(W) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W); \alpha \mapsto \Phi_W(\alpha) := \epsilon(\alpha \cdot -)$$

est, par dualité de Poincaré de W , un quasi-isomorphisme de $A_{PL}(W)$ -dgm modules. L'inclusion $i_0: (T, \partial T) \hookrightarrow (W, \overline{W \setminus T})$ induit, par la propriété d'excision forte, un isomorphisme

$$A_{PL}(i_0): A_{PL}(T, \partial T) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(W, \overline{W \setminus T})$$

grâce auquel nous définissons le morphisme de complexe de chaînes

$$\epsilon_T: A_{PL}(T, \partial T) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(W, \overline{W \setminus T}) \xrightarrow{A_{PL}(incl)} A_{PL}(W) \xrightarrow{\epsilon_W} s^{-n} \mathbb{Q}$$

qui est tel que $H^n(\epsilon_T)$ est un isomorphisme. Définissons

$$\Phi_T: A_{PL}(T, \partial T) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(T) ; \alpha \mapsto \epsilon_T(\alpha \cdot -).$$

Par dualité de Poincaré de la paire $(T, \partial T)$, Φ_T est un quasi-isomorphisme de $A_{PL}(T)$ -dgmodules. Vu la construction de Φ_W et Φ_T , le diagramme de $A_{PL}(W)$ -dgmodules ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{PL}(W, \overline{W \setminus T}) & \longrightarrow & A_{PL}(W) & \longrightarrow & A_{PL}(\overline{W \setminus T}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \text{exc} & & \downarrow \Phi_W & & \\ & & A_{PL}(T, \partial T) & & & & \\ & & \downarrow \simeq \Phi_T & & & & \\ & & s^{-n} \# A_{PL}(T) & \longrightarrow & s^{-n} \# A_{PL}(W) & & \\ & & \downarrow \simeq & & \parallel & & \\ & & s^{-n} \# A_{PL}(K) & \xrightarrow{s^{-n} \# A_{PL}(f)} & s^{-n} \# A_{PL}(W). & & \end{array}$$

Les lemmes 1.16 et 1.14 sur les cônes algébriques impliquent que $A_{PL}(\overline{W \setminus T})$ est faiblement équivalent en tant que $A_{PL}(W)$ -dgmodule au cône algébrique de l'application $s^{-n} \# A_{PL}(f)$. $\square$

4.4 Modèle de $\hat{A}$ -dgmodule du complémentaire

Soit

$$f: K \hookrightarrow W \tag{4.1}$$

le plongement d'un sous-polyèdre K connexe dans une variété W fermée, connexe, orientable de dimension n . Soit

$$\varphi: A \rightarrow B \tag{4.2}$$

un modèle d'ADGC de f et soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes

$$A \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(W). \tag{4.3}$$

Ces morphismes induisent une structure de $\hat{A}$ -dgmodules sur $A_{PL}(W)$, $A_{PL}(K)$, $A_{PL}(W \setminus K)$, A et B . Les morphismes φ et $A_{PL}(f)$ sont des morphismes de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalents et donc les morphismes de $\hat{A}$ -dgmodules $s^{-n} \# \varphi$ et $s^{-n} \# A_{PL}(f)$ le sont aussi. Une conséquence immédiate de la proposition 4.3 est la suivante :

Proposition 4.4. *Dans le cadre des applications (4.1), (4.2) et du zig-zag (4.3) définis ci-dessus, le cône algébrique de l'application de $\hat{A}$ -dgmodules*

$$s^{-n} \# \varphi: s^{-n} \# B \rightarrow s^{-n} \# A$$

est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule à $A_{PL}(W \setminus K)$.

Rappelons que A est un modèle de W . Comme W est à dualité de Poincaré de dimension n , $H(A)$ est une algèbre à dualité de Poincaré de dimension formelle n et il existe un quasi-isomorphisme de A -dgmodules

$$\theta: A \xrightarrow{\simeq} s^{-n} \# A.$$

Une conséquence directe de la proposition précédente est le résultat suivant :

Proposition 4.5. *Dans le cadre des applications (4.1), (4.2) et du zig-zag (4.3) définis ci-dessus, soit $\varphi^!: Q \rightarrow A$ un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalent à $s^{-n} \# \varphi: s^{-n} \# B \rightarrow s^{-n} \# A$. Alors le cône algébrique*

$$C(\varphi^!) = A \oplus_{\varphi^!} sQ$$

est un $\hat{A}$ -dgmodule faiblement équivalent à $A_{PL}(W \setminus K)$.

L'existence d'un $\varphi^!$ comme dans la proposition 4.5 est garantie si nous prenons Q un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant faiblement équivalent à $s^{-n} \# B$. En effet, si Q est un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant, il existe un quasi-isomorphisme $Q \xrightarrow{\simeq} s^{-n} \# B$ et un relèvement de $\hat{A}$ -dgmodule $\varphi^!: Q \rightarrow A$ le long du quasi-isomorphisme $\theta: A \rightarrow s^{-n} \# A$. Le relèvement $\varphi^!$ est un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalent à $s^{-n} \# \varphi$.

Dans [23], les auteurs donnent une caractérisation de l'application $\varphi^!$ en termes de *shriek-map* (voir [23, définition 5.1]).

Définition 4.6 ([23], Définition 5.1). *Soit $\rho: \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A$ un quasi-isomorphisme d'ADGC avec $H^*(A)$ connexe à dualité de Poincaré en dimension n . Une shriek-map est un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules*

$$\varphi^!: Q \rightarrow A$$

tel que $H^n(\varphi^!)$ est un isomorphisme.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.7 ([23], Théorème 1.6). *Soit $K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre connexe de dimension k dans une variété fermée, connexe de dimension n . Supposons donné un zig-zag de quasi-isomorphismes*

$$A \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(W).$$

Soient

1. $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalent à $A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(K)$;
2. Q un $\hat{A}$ -dgmodule faiblement équivalent à $s^{-n} \# A_{PL}(K)$;
3. $\varphi^!: Q \rightarrow A$ une shriek-map de $\hat{A}$ -dgmodules.

Alors, le cône algébrique

$$A \oplus_{\varphi^!} sQ$$

est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule à $A_{PL}(W \setminus K)$.

4.5 Modèle d'ADGC du complémentaire

Soit $f: K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre K connexe dans une variété W fermée, connexe, orientable de dimension n . Notons k la dimension de K . Dans la section précédente nous avons construit un modèle de $\hat{A}$ -dgmodule du complémentaire sous la forme d'un cône algébrique. Sous l'hypothèse de grande codimension, $n \geq 2k + 3$, nous pouvons construire un modèle d'ADGC. C'est le propos du résultat suivant :

Théorème 4.8 (Théorème 1.2, [23]). *Considérons $f: K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre K de dimension k dans une variété W fermée, connexe, orientable de dimension n . Supposons K connexe et $n \geq 2k + 3$.*

Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un modèle d'ADGC de f tel que $A^{>n} = 0$ et $B^{>k} = 0$. Supposons avoir

- i. Q un A -dgmodule faiblement équivalent à $s^{-n}\#B$ tel que $Q^{>n+1} = 0$ et $Q^{<n-k} = 0$ et*
- ii. $\varphi^!: Q \rightarrow A$ une shriek-map de A -dgmodules.*

Alors, le cône algébrique $A \oplus_{\varphi^!} sQ$ munit de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$.

De plus, nous pouvons toujours construire A , B , Q , φ et $\varphi^!$ à partir de n'importe quel modèle de l'inclusion $f: K \hookrightarrow W$.

Idée de la démonstration. Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A \xleftarrow[\rho]{\simeq} \hat{A} \xrightarrow[\rho']{\simeq} A_{PL}(W).$$

Ces applications permettent de munir $A_{PL}(W)$, $A_{PL}(W \setminus K)$, $A_{PL}(K)$, A , B , Q d'une structure de $\hat{A}$ -dgmodules. Par le théorème 4.7, le cône algébrique $C(\varphi^!) = A \oplus_{\varphi^!} sQ$ est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule à $A_{PL}(W \setminus K)$. Notons $l: W \setminus K \hookrightarrow W$ l'inclusion du complémentaire et prenons un modèle relatif minimal de l'application $A_{PL}(l) \circ \rho'$,

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} & \xrightarrow{\rho'} & A_{PL}(W) & \xrightarrow{A_{PL}(l)} & A_{PL}(W \setminus K) \\ & \searrow & & \nearrow \simeq & \\ & & (\hat{A} \otimes \Lambda Z, D) & & \end{array}$$

Par minimalité, V est tel que $V^{<n-k-1} = 0$.

Comme $A_{PL}(W \setminus K)$ et $A \oplus_{\varphi^!} sQ$ sont faiblement équivalents en tant que $\hat{A}$ -dgmodules et que $(\hat{A} \otimes \Lambda V, D)$ est un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant nous avons un quasi-isomorphisme de $\hat{A}$ -dgmodules

$$\lambda: (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\simeq} C(\varphi^!).$$

Comme $V^{<n-k-1} = 0$, $A^{>n} = 0$ et $Q^{>n+1} = 0$, par le lemme 1.20, le morphisme λ est un morphisme d'ADGC.

Nous avons alors un zig-zag de morphismes d'ADGC

$$A \oplus_{\varphi!} sQ \xleftarrow{\simeq} (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\simeq} C(\varphi!).$$

Ce qui prouve le résultat $\square$

En ajoutant des hypothèses sur la connexité de l'application induite en homologie $H_*(f; \mathbb{Q}) : H_*(K; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(W; \mathbb{Q})$ nous pouvons affaiblir l'hypothèse de grande codimension.

Théorème 4.9 ([23], Théorème 1.4). *Considérons l'inclusion $f : K \hookrightarrow W$ d'un sous-polyèdre de dimension k , dans une variété W fermée, orientable de dimension n . Supposons f de codimension au moins 2 et K et W connexes. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $H^*(f)$ est r -connexe, c'est-à-dire que $H^i(f)$ est un isomorphisme pour $i < r$ et est une injection pour $i = r$. Si*

$$r \geq 2k - n + 2$$

alors nous pouvons construire un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$ à partir de tout modèle de l'inclusion $f : K \hookrightarrow W$.

Plus précisément, soient :

- i. $\varphi : A \rightarrow B$ un modèle de f avec A connexe ;*
- ii. Q un A -dgmodule faiblement équivalent à $s^{-n} \# B$ avec $Q^{<n-k} = 0$;*
- iii. $\varphi^! : Q \rightarrow A$ une shriek-map de A -dgmodules ;*
- iv. $I \subset A \oplus_{\psi} sQ$ un A -sousdgmodule acyclique tel que $I^{\leq n-r-2} = 0$ et $(A \oplus_{\varphi!} sQ)^{\geq n-r} \subset I$.*

Alors le cône algébrique tronqué $(R \oplus_{\varphi!} sQ)/I$ avec une structure multiplicative induite par la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$.

4.6 Modèle du complémentaire en prenant un modèle de W à dualité de Poincaré

Soit $f : K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre de dimension k , dans une variété W fermée, orientable de dimension n . Supposons K et W 1-connexes, $H^2(f) : H^2(W) \rightarrow H^2(K)$ surjective et $n \geq 2k + 3$. Par la proposition 3.9, il existe un modèle d'ADGC

$$\varphi : P \twoheadrightarrow Q$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i. P est une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n ;
- ii. φ est surjective ;
- iii. $Q^{>k} = 0$.

La surjectivité de l'application φ implique que l'application

$$s^{-n} \# \varphi : s^{-n} \# Q \rightarrow s^{-n} \# P$$

est un morphisme de P -dgmodules injectif. Comme P est une algèbre à dualité de Poincaré nous avons un isomorphisme de P -dgmodules

$$\theta_P : P \xrightarrow{\cong} s^{-n} \# P.$$

La composée

$$\varphi^! := (\theta_P^{-1} \circ s^{-n} \# \varphi) : s^{-n} \# Q \rightarrow s^{-n} \# P \xrightarrow{\cong} P$$

est un morphisme de P -dgmodules tel que $H^n(\varphi^!)$ est un isomorphisme. Si nous supposons $n \geq 2k + 3$, comme $P^{>n} = 0$, que $(s^{-n} \# Q)^{>n-k} = 0$ et que $(s^{-n} \# Q)^{>n+1} = 0$, par le théorème 4.8, le cône algébrique $C(\varphi^!)$ muni de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$.

Posons $I = \varphi^!(s^{-n} \# Q)$. L'application φ étant surjective $\varphi^!$ est injective et nous avons une courte suite exacte

$$0 \longrightarrow s^{-n} \# Q \xrightarrow{\varphi^!} P \xrightarrow{\pi} P/I \longrightarrow 0$$

où $\pi : P \rightarrow P/I$ est la projection. Le lemme 1.16 sur les cônes algébriques donne un quasi-isomorphisme de P -dgmodules

$$\pi \oplus 0 : P \oplus_{\varphi^!} s^{-n} \# Q \rightarrow P/I.$$

Nous vérifions facilement qu'il s'agit d'un quasi-isomorphisme d'ADGC. Nous venons de prouver le théorème suivant :

Théorème 4.10. *Soit $f : K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre de dimension k , dans une variété W fermée, orientable de dimension n . Supposons K et W 1-connexes, $H^2(f)$ surjective et $n \geq 2k + 3$. Soit $\varphi : P \rightarrow Q$ un modèle de $f : K \hookrightarrow W$ tel que*

- i. *P est une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n et notons $\theta_P : P \xrightarrow{\cong} s^{-n} \# P$ l'isomorphisme induit par la dualité de Poincaré ;*
- ii. *φ est surjective ;*
- iii. *$Q^{>k} = 0$.*

Notons

$$\varphi^! = (\theta_P^{-1} \circ s^{-n} \# \varphi) : s^{-n} \# Q \rightarrow P$$

et posons $I = \varphi^!(s^{-n} \# Q)$. Alors $\pi : P \rightarrow P/I$ est un modèle d'ADGC de $W \setminus K \hookrightarrow W$. De plus nous pouvons construire P , φ et Q à partir de n'importe quel modèle d'ADGC de type fini de $K \hookrightarrow W$.

CHAPITRE 5

Modèle de $F(M, 2)$ quand M est fermée et 2-connexe

5.1 Introduction

Soit M une variété. L'espace des configurations de k points dans M est l'espace

$$F(M, k) := \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

Différents auteurs se sont penchés sur l'étude du type d'homotopie de cet espace. Par exemple, quand M est une variété lisse, projective, complexe alors un modèle d'ADGC de $F(M, k)$ peut-être construit simplement à partir d'un modèle d'ADGC de $H^*(M, \mathbb{Q})$ (Voir [21], [29], [12] ou [2]). Plus précisément ce modèle est donné par une ADGC

$$F(H^*(M; \mathbb{Q}), k) := \left(\frac{H^*(M; \mathbb{Q})^{\otimes k} \otimes \Lambda(g_{ij} : 1 \leq i < j \leq k)}{(\text{relations d'équivalences})}, d(g_{ij}) = \pi_{ij}^*(\Delta) \right)$$

où les générateurs g_{ij} sont en degré $n - 1$,

$$\pi_i^*(a) = 1^{\otimes i-1} \otimes a \otimes 1^{\otimes k-i} \in H^*(M; \mathbb{Q})^{\otimes k}$$

et $\pi_{ij}^*(a \otimes b) = \pi_i^*(a) \cdot \pi_j^*(b)$. Les relations d'équivalences par lesquelles on quotiente l'ADGC $H^*(M; \mathbb{Q})^{\otimes k} \otimes \Lambda(g_{ij} : 1 \leq i < j \leq k)$ sont :

i. Les relations d'Arnold

$$g_{ij}g_{jl} + g_{jl}g_{li} + g_{li}g_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq k;$$

ii. Les relations de symétrie

$$(\pi_i^*(a) - \pi_j^*(a))g_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq k \text{ et } a \in H^*(M; \mathbb{Q});$$

iii. $g_{ij}^2 = 0$ pour $1 \leq i < j \leq k$.

Bendersky et Gitler ([1]) étudient la cohomologie $H^*(F(M, k); \mathbb{Q})$ dans le cas où M est une variété fermée. Ils montrent, dans ce cas-là, que la cohomologie de l'espace des configurations en tant qu'espace vectoriel peut-être calculée à partir d'un modèle d'ADGC de M . Ils construisent aussi une suite spectrale convergeant vers $H^*(F(M, k); \mathbb{Q})$:

$$H(F(H^*(M; \mathbb{Q}), k)) \Rightarrow H^*(F(M, k); \mathbb{Q}). \quad (5.1)$$

Cette suite spectrale dégénère si M est formelle (c'est-à-dire si $H^*(M, \mathbb{Q})$ est un modèle d'ADGC de M). Dans [11] Félix et Thomas, montrent que la suite spectrale (5.1) ne dégénère pas toujours.

En contraste, dans l'article [10], Félix et Tanré montrent que pour l'espace des configurations non ordonnés, c'est-à-dire $F(M, k)/\Sigma_k$ où Σ_k est le groupe des permutations de k lettres qui, en permutant les composantes, agit librement sur $F(M, k)$, nous avons bien que $H^*(F(M, k)/\Sigma_k; \mathbb{Q})$ ne dépend que de $H^*(M; \mathbb{Q})$.

Dans ce chapitre, nous regardons le cas de l'espace des configurations de deux points. Nous rappelons les résultats démontrés par Lambrechts et Stanley dans [22]. Dans cet article les auteurs montrent que pour une variété fermée, 2-connexe le type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de M . Plus précisément, soit M une variété fermée, 2-connexe de dimension n , l'espace des configurations de deux points dans M est

$$F(M, 2) := \{(x, y) \in M \times M \mid x \neq y\}.$$

Nous pouvons naturellement voir $F(M, 2)$ comme un espace complémentaire. En effet, soit $\Delta: M \rightarrow M \times M; x \mapsto (x, x)$, le plongement de la diagonale dans $M \times M$. Il est clair que

$$F(M, 2) = M \times M \setminus \Delta(M).$$

Nous allons utiliser les résultats des chapitre 3 et 4 pour donner un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$.

Soit A un modèle d'ADGC à dualité de Poincaré de M . En partant d'une base $\{a_i\}_{i=1}^N$ nous pouvons construire

$$\Delta = \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} (a_i \otimes a_i^*) \in (A \otimes A)^n,$$

où $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ est la base Poincaré-duale de $\{a_i\}_{i=1}^N$. Grâce à $\Delta \in (A \otimes A)^n$ nous pouvons définir une application de $A \otimes A$ -dgmmodules

$$\begin{aligned} \Delta^!: \quad s^{-n}A &\rightarrow A \otimes A \\ s^{-n}a &\mapsto \Delta(1 \otimes a) \end{aligned}$$

qui sera une shriek map. Si M est une variété fermée, 2-connexe, les hypothèses du théorème 4.9 sont vérifiées par le plongement $\Delta: M \hookrightarrow M \times M$ et si A est un modèle d'ADGC à dualité de Poincaré de M , le cône algébrique

$$C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$$

muni de la structure semi-triviale est une ADGC faiblement équivalente à $A_{PL}(F(M, 2))$. Une conséquence directe de ce résultat est que si M est 2-connexe et de $\dim M = n \geq 3$, alors le type d'homotopie rationnelle de l'espace $F(M, 2)$ est complètement déterminé par le type d'homotopie rationnelle de M .

5.2 La classe diagonale Δ et le morphisme $\Delta^!$

Soit (A, d, ϵ) une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n . Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ une base homogène de A et soit $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ sa base Poincaré-duale. Posons

$$\Delta = \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} (a_i \otimes a_i^*) \in (A \otimes A)^n.$$

Cette construction ne dépend pas du choix de la base ([22, Proposition 4.3]). Nous appellerons Δ la classe diagonale de $A \otimes A$. L'objet Δ a une propriété de symétrie décrite ci-dessous :

Proposition 5.1. *Soit (A, d, ϵ) une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n , alors pour tout $x \in A$,*

$$\Delta(1 \otimes x) = \Delta(x \otimes 1).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\Delta(1 \otimes a_j) = \Delta(a_j \otimes 1)$ pour $\{a_j\}_{j=1}^N$ une base homogène de A dont $\{a_j^*\}_{j=1}^N$ est la base Poincaré-duale.

Notons

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : A^k \otimes A^{n-k} \rightarrow \mathbb{Q} ; a \otimes b \mapsto \langle a, b \rangle = \epsilon(a \cdot b)$$

la forme bilinéaire associée à l'ADGC à dualité de Poincaré A . Soient $\mu_{ij}^k \in \mathbb{Q}$ définis par la relation $a_i a_j = \sum_{k=1}^N \mu_{ij}^k a_k$. Remarquons que $a_j a_k^* = \sum_{i=1}^N \mu_{ij}^k a_i^*$. En effet, pour tout $l \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \langle a_l, a_j a_k^* \rangle &= \langle a_l a_j, a_k^* \rangle = \left\langle \sum_{r=1}^N \mu_{lj}^r a_r, a_k^* \right\rangle = \sum_{r=1}^N \mu_{lj}^r \langle a_r, a_k^* \rangle \\ &= \mu_{lj}^k = \sum_{i=1}^N \mu_{ij}^k \langle a_l, a_i^* \rangle = \langle a_l, \sum_{i=1}^N \mu_{ij}^k a_i^* \rangle. \end{aligned}$$

Comme A est à dualité de Poincaré la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénérée et nous avons que $a_j a_k^* = \sum_{i=1}^N \mu_{ij}^k a_i^*$.

Calculons

$$\begin{aligned} \Delta \cdot (a_j \otimes 1) &= \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} (a_i \otimes a_i^*) (a_j \otimes 1) \\ &= \sum_{1 \leq i, k \leq N} (-1)^{|a_i| + |a_i^*| |a_j|} \mu_{ij}^k a_k \otimes a_i^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot (1 \otimes a_j) &= \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_k|} (a_k \otimes a_k^*) (1 \otimes a_j) \\
&= \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_k| + |a_k^*| |a_j|} a_k \otimes a_j a_k^* \\
&= \sum_{1 \leq i, k \leq N} (-1)^{|a_k| + |a_j| |a_k^*|} \mu_{ij}^k a_k \otimes a_i^*
\end{aligned}$$

Montrons que nous avons le même signe des deux côtés. Ceci revient à montrer que

$$|a_i| + |a_i^*| |a_j| = |a_k| + |a_j| |a_k^*| \pmod{2}$$

ou encore que

$$|a_i| + |a_i^*| |a_j| - |a_k| - |a_j| |a_k^*| = 0 \pmod{2}$$

De la relation $a_i a_j = \sum_{k=1}^N \mu_{ij}^k a_k$ nous déduisons que si $|a_k| \neq |a_i| + |a_j|$, $\mu_{ij}^k = 0$ et les termes contenant μ_{ij}^k n'apparaîtront dans aucune des deux sommes. Supposons donc $|a_k| = |a_i| + |a_j|$ et calculons

$$\begin{aligned}
|a_i| + |a_i^*| |a_j| - |a_k| - |a_j| |a_k^*| &= |a_i| + m |a_j| - |a_i| |a_j| - |a_i| + \\
&\quad |a_j| + m |a_j| - |a_j| (|a_i| + |a_j|) \\
&= |a_j| - |a_j|^2 \\
&= |a_j| (|a_j| - 1) \\
&= 0 \pmod{2}
\end{aligned}$$

□

Une autre propriété importante de la classe diagonale Δ est que $\Delta \in A \otimes A \cap \ker d_{A \otimes A}$.

Proposition 5.2 (Lemme 4.11 , [22]). *Soit (A, d, ϵ) une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n . La classe diagonale $\Delta \in (A \otimes A)^n$ est telle que $d_{A \otimes A}(\Delta) = 0$.*

Définissons l'application de $\mathbb{Q}$ -dgmodules

$$\begin{aligned}
\Delta^!: \quad s^{-n} A &\rightarrow A \otimes A \\
s^{-n} a &\mapsto \Delta(1 \otimes a).
\end{aligned}$$

Via la multiplication $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ nous pouvons munir A d'une structure de $A \otimes A$ -dgmodules.

Proposition 5.3 (Lemme 4.5 et lemme 5.1, [22]). *Soit (A, d, ϵ) une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n . L'application*

$$\begin{aligned}
\Delta^!: \quad s^{-n} A &\rightarrow A \otimes A \\
s^{-n} a &\mapsto \Delta(1 \otimes a)
\end{aligned}$$

est un morphisme de $A \otimes A$ -dgmodules tel que $H^n(\Delta^!)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Pour montrer que $\Delta^!$ est un morphisme de $A \otimes A$ -modules nous utilisons la propriété de symétrie de Δ décrite dans la proposition 5.1. En effet, soient $a, b, c \in A$ et posons $\epsilon = (-1)^{|a||c|+n(|b|+|c|)}$. D'un côté nous avons

$$\begin{aligned} \Delta((b \otimes c) \cdot s^{-n}a) &= \Delta^!(\epsilon s^{-n}bac) \\ &= \epsilon \Delta^!(s^{-n}bac) \\ &= \epsilon \Delta(1 \otimes bac) \\ &= \epsilon \Delta(1 \otimes b)(1 \otimes ac) \end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} (b \otimes c) \Delta^!(s^{-n}a) &= (b \otimes c) \Delta(1 \otimes a) \\ &= \epsilon \Delta(b \otimes c)(1 \otimes a) \\ &= \epsilon \Delta(b \otimes ac) \\ &= \epsilon \Delta(b \otimes 1)(1 \otimes ac) \\ \text{par la proposition 5.1} &= \epsilon \Delta(1 \otimes b)(1 \otimes ac). \end{aligned}$$

Montrons que $\Delta^!$ commute à la différentielle. Notons $D = d_{A \otimes A}$ la différentielle dans $A \otimes A$, d la différentielle dans A et δ la différentielle dans $s^{-n}A$. Calculons

$$D(\Delta^!(s^{-n}a)) = D(\Delta(1 \otimes a)) = (-1)^n \Delta(1 \otimes da)$$

et

$$\Delta^!(\delta s^{-n}a) = \Delta^!(-1)^n s^{-n}da = (-1)^n \Delta(1 \otimes da).$$

Pour finir montrons que $H^n(\Delta^!)$ est un isomorphisme. En effet, soit $\omega \in A^n$ un générateur, alors $(s^{-n}A)^{2n} = s^{-n}\omega \cdot \mathbb{Q}$, $(A \otimes A)^{2n} = \omega \otimes \omega \cdot \mathbb{Q}$ et $\Delta^!(s^{-n}\omega) = \omega \otimes \omega$. Comme $H^{2n}(s^{-n}A) \cong H^{2n}(A \otimes A) \cong \mathbb{Q}$, $H^n(\Delta^!)$ est un isomorphisme. $\square$

L'application $\Delta^!: s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$ est un morphisme de $A \otimes A$ -dgmodules. Le cône algébrique de cette application $C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} s^{-n}A$ est un $A \otimes A$ -dgmodule. La lemme suivant montre que $C(\Delta^!)$ muni de la structure multiplicative semi-triviale est une ADGC.

Lemme 5.4. *Soit A une ADGC à dualité de Poincaré, 1-connexe, de dimension formelle n . La structure semi-triviale est une structure d'ADGC sur $C(\Delta^!)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la règle de Leibniz pour la différentielle. Soient a, b, c, d, x, y des éléments dans A . Pour les produits de la forme $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d)$ la règle est vérifiée car $A \otimes A$ est une ADGC. Pour les produits de la forme $(a \otimes b) \cdot ss^{-n}x$ la règle est vérifiée car $ss^{-n}A$ est un $A \otimes A$ -dgmodule. Il faut et il suffit, alors, de vérifier Leibniz pour les éléments de la forme $(ss^{-n}x \cdot ss^{-n}y)$. Si $x \in A^{>1}$ ou $y \in A^{>1}$ alors, pour des raisons de degré,

$$\delta(ss^{-n}x \cdot ss^{-n}y) = 0 = \delta ss^{-n}x \cdot ss^{-n}y + (-1)^{|u|} ss^{-n}x dss^{-n}y.$$

Comme $A^1 = 0$ il n'existe pas d'élément $ss^{-n}x$ tel que $|ss^{-n}x| = n$. Prenons $ss^{-n}x, ss^{-n}y$ tels que $|ss^{-n}x| = |ss^{-n}y| = n-1$. Sans perte de généralité nous

pouvons supposer que $ss^{-n}x = ss^{-n}y = ss^{-n}1$. Pour la structure semi-triviale nous avons $ss^{-n}1 \cdot ss^{-n}1 = 0$.

Remarquons que $d(ss^{-n}1) = \Delta$. Pour que d satisfait à la règle de Leibniz il faut vérifier que

$$\begin{aligned} 0 &= d(ss^{-n}1 \cdot ss^{-n}1) \\ &= \Delta \cdot ss^{-n}1 + (-1)^{n-1} ss^{-n}1 \cdot \Delta \\ &= (1 + (-1)^{n-1}) \Delta \cdot ss^{-n}1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si n est pair le deuxième membre est nul.

Supposons n impair. Notons $\omega \in A^n$ la classe fondamentale de A . Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ une base homogène de A et soit $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ la base duale. Alors

$$\begin{aligned} ss^{-n}1 \cdot \Delta &= \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} ss^{-n} a_i a_i^* \\ &= \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} ss^{-n} \omega \\ &= \chi(A) ss^{-n} \omega \end{aligned}$$

où

$$\chi(A) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim A^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(A)$$

est la classe d'Euler de A . Comme n est impaire alors, par dualité de Poincaré, $\chi(A) = 0$ et donc le deuxième membre de l'équation (5.2) est nul. $\square$

Nous utiliserons tous ces résultats dans la section suivante où nous donnons un modèle de l'espace des configurations de deux points.

5.3 Modèle de $F(M, 2)$

Tous les outils nécessaires ont été introduits pour la construction d'un modèle de l'espace des configurations de deux points dans M .

Théorème 5.5. *Soit M une variété fermée, 2-connexe de dimension n . Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M . Soit $\Delta \in (A \otimes A)^n$ la classe diagonale de $A \otimes A$ et soit $\Delta^! : s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$ l'application de $A \otimes A$ -dgm modules définie par $\Delta^!(s^{-n}a) = \Delta(1 \otimes a)$. Alors, le cône algébrique*

$$C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$$

munie de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(F(M, 2))$

Idée de la démonstration. Prenons la multiplication $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ comme modèle d'ADGC de $\Delta : M \hookrightarrow M \times M$. Via μ tout A -dgm module peut-être vu comme un $A \otimes A$ -dgm module.

Comme A est à dualité de Poincaré nous avons un isomorphisme de A -dgmodules $\theta_A: A \rightarrow s^{-n}\#A$. Donc $s^{-2n}\#A$ est isomorphe en tant que $A \otimes A$ -dgmodule à $s^{-n}A$. La proposition 5.3 montre que l'application $\Delta^!$ est une shriek-map.

Rappelons que $C(\Delta^!)$ muni de la structure semi-triviale est une ADGC (voir lemme 5.4). Soit S un supplémentaire des cocycles en degré $2n - 3$. Posons

$$I = S \oplus C(\Delta^!)^{\geq 2n-2} \subset C(\Delta^!).$$

L'idéal I est un idéal différentiel acyclique de $C(\Delta^!)$. Par le théorème 4.9, $C(\Delta^!)/I$ est un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$. Comme I est acyclique, la projection $\pi: C(\Delta^!) \rightarrow C(\Delta^!)/I$ est un quasi-isomorphisme d'ADGC et $C(\Delta^!)$ est lui aussi un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ $\square$

L'application de $A \otimes A$ -dgmodules $\Delta^!: s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$ est injective et telle que $\text{Im } \Delta^! = (\Delta) \in A \otimes A$ (voir [22, Lemme 5.4]) où (Δ) est l'idéal engendré par la diagonale. Nous avons une courte suite exacte de $A \otimes A$ -dgmodules

$$s^{-n}A \xrightarrow{\Delta^!} A \otimes A \xrightarrow{\pi} \frac{A \otimes A}{(\Delta)},$$

et donc par le lemme 1.16 nous avons un quasi-isomorphisme de $A \otimes A$ -dgmodules

$$\pi \oplus 0: (A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A) \xrightarrow{\simeq} \frac{A \otimes A}{(\Delta)}$$

Comme π est un morphisme d'ADGC, $\pi \oplus 0$ est un quasi-isomorphisme d'ADGC. Nous venons de prouver le résultat suivant

Théorème 5.6 (Théorème 5.6, [22]). *Dans le même cadre que celui du théorème 5.5, le quotient $\frac{A \otimes A}{(\Delta)}$ est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(F(M, 2))$.*

Des théorèmes 5.5 et 5.6 nous en déduisons le résultat géométrique ci-dessous

Théorème 5.7. *Soit M une variété fermée, 2-connexe. Le type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ est complètement déterminé par le type d'homotopie rationnelle de M .*

CHAPITRE 6

Modèle de $F(M, 2)$ quand M est fermée et 1-connexe

6.1 Introduction

Dans le chapitre 5 nous avons construit un modèle pour l'espace des configurations de deux points dans une variété 2-connexe. Une question naturelle est, que se passe-t-il quand la variété est simplement connexe? Répondre à cette question est plus compliqué que dans le cas 2-connexe. Pour commencer, géométriquement nous savons que la classe d'homotopie d'une inclusion, ne détermine pas complètement le type d'homotopie du complémentaire. En effet, celui-ci est déterminé par la classe d'*isotopie* de l'inclusion. Néanmoins, Wall et Hudson ont montré que sous certaines conditions sur la codimension et la connexité de l'inclusion, le type d'homotopie et le type d'isotopie se confondent. Ces conditions sont vérifiées pour $F(M, 2) = M \times M \setminus \Delta$ quand M est 2-connexe et ne le sont plus quand M n'est que 1-connexe. D'autre part, algébriquement, en construisant le modèle du complémentaire pour trouver le modèle de $F(M, 2)$ dans le cas 2-connexe, nous trouvons un objet algébrique n'admettant qu'une seule structure d'ADGC. Nous verrons dans la suite que l'objet que nous trouverons comme candidat "modèle" pour notre espace des configurations quand M est 1-connexe, admet, lui, différentes structures d'ADGC.

Plus précisément, soit M une variété fermée 1-connexe de dimension n et soit A un modèle d'ADGC de M à dualité de Poincaré de dimension formelle n . Notons $\Delta \in A \otimes A$ la classe diagonale et rappelons que (proposition 5.3) l'application $\Delta^! : s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$; $s^{-n}a \mapsto \Delta(1 \otimes a)$ est un morphisme de $A \otimes A$ -dgm-modules. Le cône algébrique

$$C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$$

est un $A \otimes A$ -dgm-module qui, muni de la structure semi-triviale, est une ADGC (voir lemme 5.4).

La difficulté pour construire un modèle de $F(M, 2)$ quand M est 1-connexe vient du fait que la connexité de la variété n'est pas suffisamment grande comme

pour compenser la "petite" codimension du plongement $\Delta: M \hookrightarrow M \times M$ et donc nous ne pouvons pas utiliser le théorème 4.9. Néanmoins, dans le cas où la dimension de M est paire nous montrons sans trop de difficultés que $C(\Delta^!)$ est bien un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ et donc que le type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de M .

Le cas où la dimension de M est impaire est plus compliqué à résoudre. Pour y apporter une réponse nous introduisons une structure multiplicative non triviale sur une troncature de $C(\Delta^!)$. Cette structure multiplicative est caractérisée par un unique élément de $A \otimes A$. En effet, dans le cône algébrique $C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} s^{-n}A$ nous avons l'élément $s^{-n}1 \in s^{-n}A$, où 1 est l'unité dans A . Pour chaque élément $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ nous obtenons une ADGC que l'on notera $C(\xi)$ caractérisée par le fait que $(ss^{-n}1)^2 = \xi$. Nous prouvons dans le théorème 6.1 qu'une de ces algèbres est le modèle d'ADGC de $F(M, 2)$.

Nous dirons que deux algèbres $C(\xi)$ et $C(\xi')$ sont faiblement équivalentes sous $A \otimes A$ si les applications $A \otimes A \rightarrow C(\xi)$ et $A \otimes A \rightarrow C(\xi')$ partagent le même modèle relatif minimal. Ceci est le bon cadre pour étudier l'équivalence entre les algèbres $C(\xi)$. Dans ce cadre, nous conjecturons que les différentes structures multiplicatives possibles sont complètement déterminées par le choix d'un élément dans $H_2(M; \mathbb{Q})$. Dans la proposition 6.13 nous montrons que le choix de deux éléments équivalents dans $H_2(M, \mathbb{Q})$ implique que les ADGC obtenues seront faiblement équivalentes, mais nous n'avons pas de preuve de la réciproque. Une possible explication géométrique de la conjecture se trouve dans les résultats de N. Habegger dans [14], qui entraînent que l'ensemble des classes d'isotopie d'applications homotopes à $\Delta: M \hookrightarrow M \times M$ est en bijection avec $H_2(M; \mathbb{Z})$.

Une autre approche pour déterminer plus précisément le modèle de $F(M, 2)$ consiste à étudier le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{T} & M \times M \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ F(M, 2) & \xrightarrow{t} & F(M, 2), \end{array}$$

où $T: M \times M \rightarrow M \times M$; $(x, y) \mapsto (y, x)$ est l'application de permutation des facteurs. Le diagramme ci-dessus aurait comme modèle le diagramme d'ADGC

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ C(\xi) & \xrightarrow[\simeq]{\hat{\tau}} & C(\xi) \end{array}$$

où $\tau: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$; $a \otimes b \mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a$ est un modèle de l'application T . On pourrait penser que l'existence d'une application $\hat{\tau}: C(\xi) \rightarrow C(\xi)$ faisant commuter le diagramme ci-dessus donne des restrictions sur le choix du ξ . Nous montrons que ce n'est malheureusement pas le cas.

6.2 Modèle de $F(M, 2)$ pour une variété 1-connexe de dimension paire

Soit M une variété fermée 1-connexe de dimension paire. Le fait que la dimension de n est paire va nous permettre de facilement trouver un modèle de $F(M, 2)$. Plus précisément, nous prouverons le résultat suivant :

Théorème 6.1. *Soit M une variété 1-connexe compacte sans bord de dimension n paire. Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M de dimension formelle n et notons Δ la classe diagonale dans $A \otimes A$. Soit $\Delta^! : s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$ l'application de $A \otimes A$ -dgm modules définie par $\Delta^!(s^{-n}a) = \Delta(1 \otimes a)$. Alors, le cône algébrique de l'application $\Delta^!$*

$$C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$$

est un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$.

6.2.1 Modèle de dgmodule de $A_{PL}(F(M, 2))$

Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M de dimension formelle n . Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M).$$

Ces morphismes induisent une structure de $\hat{A}$ -dgmodule sur A et $A_{PL}(M)$. Le zig-zag de morphismes d'ADGC

$$A \otimes A \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \otimes \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M \times M) \longrightarrow A_{PL}(F(M, 2))$$

munit $A \otimes A$, $A_{PL}(M \times M)$ et $A_{PL}(F(M, 2))$ de structures de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm modules. Via la multiplication

$$\mu : \hat{A} \otimes \hat{A} \rightarrow \hat{A},$$

tout $\hat{A}$ -dgmodule hérite d'une structure de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule.

Proposition 6.2. *Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M de dimension formelle n et soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC*

$$(A, d) \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M).$$

Les ADGC A , $A \otimes A$, $A_{PL}(M \times M)$ et $A_{PL}(F(M, 2))$ héritent alors d'une structure de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule. Notons Δ la classe diagonale dans $A \otimes A$ et soit $\Delta^! : s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$ l'application de $A \otimes A$ -dgm modules définie par $\Delta^!(s^{-n}a) = \Delta(1 \otimes a)$, pour $a \in A$. Le cône algébrique

$$C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$$

est faiblement équivalent en tant que $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -module à $A_{PL}(F(M, 2))$.

Démonstration. Soit

$$\Delta : M \hookrightarrow M \times M \quad (6.1)$$

le plongement de la diagonale. Alors $F(M, 2) = M \times M \setminus \Delta(M)$ est le complémentaire de $K = \Delta(M)$ dans $W = M \times M$.

Considérons le diagramme d'ADGC ci-dessous, dans lequel les applications verticales μ sont les multiplications,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\quad} & \hat{A} & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & A_{PL}(M) \\ \mu \uparrow & & \mu \uparrow & & \uparrow A_{PL}(\Delta) \\ A \otimes A & \xleftarrow{\quad} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & A_{PL}(M \times M). \end{array} \quad (6.2)$$

1. La multiplication $A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$ est un modèle d'ADGC de la diagonale Δ . Grâce au diagramme (6.2) c'est aussi un modèle de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm modules.
2. Montrons que $s^{-n}A$ est un $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm module faiblement équivalent à $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$. Pour cela vérifions d'abord que $s^{-n}A$ et $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$ sont faiblement équivalents en tant que $\hat{A}$ -dgm modules. En effet, la structure de $\hat{A}$ -dgm module sur $A_{PL}(M)$ induit une structure naturelle de $\hat{A}$ -dgm module sur $\#A_{PL}(M)$ et donc aussi sur $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$. Comme A est à dualité de Poincaré, A est isomorphe en tant que A -dgm module à $s^{-n}\#A$, donc aussi en tant que $\hat{A}$ -dgm module. Les $\hat{A}$ -dgm modules $s^{-2n}\#A$ et $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$ sont faiblement équivalents et donc $s^{-n}A$ est faiblement équivalent à $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$ en tant que $\hat{A}$ -dgm module. De plus A est faiblement équivalent à $A_{PL}(M)$ en tant que $\hat{A}$ -dgm module, donc $s^{-2n}\#A$ est faiblement équivalent à $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$ en tant que $\hat{A}$ -dgm module. Alors en utilisant la dualité de Poincaré $s^{-n}A$ est faiblement équivalent à $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$ en tant que $\hat{A}$ -dgm module. La multiplication $\mu : \hat{A} \otimes \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ munit de façon naturelle $\hat{A} \otimes \hat{A}$ d'une structure de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm module. Donc, finalement, $s^{-n}A$ et $s^{-2n}\#A_{PL}(M)$ sont faiblement équivalents comme $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm modules.

3. L'application

$$\Delta^! : s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$$

est une shriek map de $A \otimes A$ -modules, donc de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm modules. En effet, ceci est prouvé dans la proposition 5.3.

Les hypothèses du théorème 4.7 étant vérifiées la proposition en est une conséquence directe. □

6.2.2 Modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ pour une variété 1-connexe de dimension paire

L'objectif de cette section est de prouver le théorème 6.1. Pour ceci nous allons utiliser les résultats suivants :

Lemme 6.3. *Soit M une variété 1-connexe compacte sans bord de dimension n impaire. Soit $\hat{A} \xrightarrow{\sim} A_{PL}(M)$ un quasi-isomorphisme d'ADGC. Nous pouvons construire un modèle relatif*

$$\hat{A} \otimes \hat{A} \twoheadrightarrow (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D)$$

de l'application $f: \hat{A} \otimes \hat{A} \rightarrow A_{PL}(M \times M) \rightarrow A_{PL}(F(M, 2))$, tel que $Z^{<n-1} = 0$ et $Z^{n-1} \cong \mathbb{Q}$.

Démonstration. Pour M une variété fermée orientable, nous savons que

$$H^*(F(M, 2)) \cong \frac{H^*(M) \otimes H^*(M)}{([\Delta])}, \quad (6.3)$$

où $([\Delta])$ est l'idéal engendré par la classe diagonale dans $H^*(M) \otimes H^*(M)$. Comme $\hat{A} \otimes \hat{A}$ est quasi-isomorphe à $A_{PL}(M \times M)$,

$$H^*(\hat{A} \otimes \hat{A}) \cong H^*(M \times M) \cong H^*(M) \otimes H^*(M). \quad (6.4)$$

Soit $f: \hat{A} \otimes \hat{A} \xrightarrow{\sim} A_{PL}(M \times M) \rightarrow A_{PL}(F(M, 2))$ l'application dont on veut construire le modèle relatif. Par (6.3) et (6.4), $H^i(f)$ est un isomorphisme pour $0 \leq i \leq n-1$ et $\ker H^n(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe diagonale

$$[\Delta] \in H^*(M) \otimes H^*(M) \cong H^*(\hat{A} \otimes \hat{A}).$$

En construisant le modèle relatif de f , voir [8, Proposition 12.1], on donc $Z^{<n-1} = 0$ et $Z^{n-1} = u \cdot \mathbb{Q}$ avec u tel que $Du = \tilde{\Delta}$, où $\tilde{\Delta}$ est un représentant de la classe diagonale dans $H^*(\hat{A} \otimes \hat{A})$. $\square$

Nous avons aussi besoin du résultat suivant

Lemme 6.4. *Soit $\rho: R \rightarrow Q$ un morphisme d'ADGC. Soit $\varphi: R \otimes \Lambda Z \rightarrow Q$ une application de R -dgmodules telle que $\varphi|_R = \rho$. Le morphisme φ est d'ADGC si pour tout $z, z' \in \Lambda Z$, $\varphi(z \cdot z') = \varphi(z) \cdot \varphi(z')$.*

Démonstration. Pour que φ soit d'ADGC, ce doit être une application d'algèbres qui commute à la différentielle. Le fait qu'elle commute à la différentielle est garanti par le fait que c'est une application de modules différentiels. Montrons que c'est une application d'algèbres. L'application φ est un morphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules, alors, pour $r, r' \in R$

$$\begin{aligned} \varphi((r \cdot z) \cdot (r' \cdot z')) &= \varphi((-1)^{|r'| |z|} r r' \cdot z z') \\ &= (-1)^{|r'| |z|} \rho(r r') \cdot \varphi(z z') \\ \text{par hypothèse} &= (-1)^{|r'| |z|} \rho(r) \rho(r') \varphi(z) \varphi(z') \\ \text{car } Q \text{ est une ADGC} &= \rho(r) \varphi(z) \rho(r') \varphi(z') \\ \text{car } \varphi \text{ est de } R\text{-dgmodules} &= \varphi(r \cdot z) \varphi(r' \cdot z'). \end{aligned}$$

$\square$

Passons à la démonstration du théorème.

Démonstration du théorème 6.1. Soit A un modèle de M à dualité de Poincaré, 1-connexe et de dimension formelle n . Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$(A, d) \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M).$$

Les ADGC A , $A \otimes A$, $A_{PL}(M \times M)$ et $A_{PL}(F(M, 2))$ héritent alors d'une structure de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule. En prenant un modèle relatif minimal de l'application

$$f: \hat{A} \otimes \hat{A} \rightarrow A_{PL}(M \times M) \rightarrow A_{PL}(F(M, 2)),$$

nous obtenons un diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} \otimes \hat{A} & \longrightarrow & A_{PL}(M \times M) & \longrightarrow & A_{PL}(F(M, 2)) \\ & \searrow & & \nearrow \scriptstyle \simeq_m & \\ & & (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) & & \end{array}$$

et par le lemme 6.3 nous pouvons supposer que $Z^{<n-1} = 0$ et $Z^{n-1} \cong \mathbb{Q}$. Posons $Z^{n-1} = u \cdot \mathbb{Q}$.

Par la proposition 6.2, $A_{PL}(F(M, 2))$ et $C(\Delta^!)$ sont faiblement équivalents en tant que $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules. Comme $(\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D)$ est un $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule cofibrant nous avons un quasi-isomorphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules

$$\theta: (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} C(\Delta^!).$$

Notons ω un générateur de A^n . L'idéal différentiel $I = \langle \omega \otimes \omega, ss^{-n}\omega \rangle$ de $C(\Delta^!)$ est un idéal acyclique et donc la projection

$$\pi: C(\Delta^!) \rightarrow C(\Delta^!)/I$$

est un quasi-isomorphisme d'ADGC. L'application composée

$$\varphi := \pi \circ \theta: (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \rightarrow C(\Delta^!)/I$$

est donc un quasi-isomorphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules. Utilisons le lemme 6.4 pour montrer que c'est un morphisme d'ADGC. Pour cela vérifions que pour tout $z, z' \in Z$:

$$\varphi(z \cdot z') = \varphi(z)\varphi(z'). \quad (6.5)$$

- Si $|z| > n - 1$ ou $|z'| > n - 1$ alors l'expression est de degré $\geq 2n - 1$, donc les deux termes sont nuls car $(C(\Delta^!)/I)^{\geq 2n-1} = 0$.
- Si $|z| = n - 1$ et $|z'| = n - 1$, il suffit, par linéarité et car $Z^{n-1} = \mathbb{Q} \cdot u$ de traiter le cas $z = z' = u$. Alors, comme $n - 1$ est impaire, la commutativité graduée implique que $\varphi(u^2) = \varphi(0) = \varphi(u) \cdot \varphi(u) = 0$.

Nous avons le zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC ci-dessous

$$A_{PL}(F(M, 2)) \xleftarrow[\simeq]{m} (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \xrightarrow[\simeq]{\lambda \circ \pi} C(\Delta^!)/I \xleftarrow[\simeq]{\pi} C(\Delta^!),$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

Le même argument de courte suite exacte développé dans le chapitre précédent (voir section 5.3) montre que $C(\Delta^!)$ est une ADGC faiblement équivalente à $A \otimes A/(\Delta)$. Nous avons donc le résultat suivant :

Corollaire 6.5. *Soit M une variété 1-connexe compacte sans bord de dimension n paire. Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M de dimension formelle n et notons Δ la classe diagonale dans $A \otimes A$. Le quotient $\frac{A \otimes A}{(\Delta)}$ est un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$*

Si M est 1-connexe et la dimension de M est ≥ 3 , alors un argument de position générale montre que l'espace des configurations $F(M, 2)$ est lui aussi 1-connexe, nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 6.6. *Soit M une variété 1-connexe fermée de dimension $n > 3$ paire. Le type d'homotopie rationnelle de $F(M, 2)$ est complètement déterminé par le type d'homotopie rationnelle de M .*

6.3 Modèle de $F(M, 2)$ pour une variété de dimension impaire

Soit M une variété fermée, 1-connexe de dimension n impaire et soit A un modèle d'ADGC à dualité de Poincaré de M de dimension formelle n . Construire le modèle de $F(M, 2)$ dans ce cas est plus compliqué. Les techniques utilisées dans le cas où la dimension de M est paire ne marchent plus car nous n'avons pas d'argument qui garantisse que dans le cône algébrique $C(\Delta^!)$ la bonne structure multiplicative à mettre pour modéliser $A_{PL}(F(M, 2))$ est la structure semi-triviale. Pour pallier à ce manque d'information, nous introduisons des objets faiblement équivalents à $C(\Delta^!)$ qui admettent plus facilement une structure multiplicative autre que la semi-triviale.

6.3.1 Les algèbres $C(\xi)$

Soit A une ADGC à dualité de Poincaré 1-connexe, de dimension formelle n impaire et soit Δ la classe diagonale dans $A \otimes A$. Rappelons que l'application

$$\Delta^!: s^{-n}A \rightarrow A \otimes A ; s^{-n}a \mapsto \Delta(1 \otimes a)$$

est un morphisme de $A \otimes A$ -dgm modules. Le cône algébrique

$$C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$$

est un $A \otimes A$ -dgm module.

Dans cette sous-section nous allons quotienter le cône algébrique $C(\Delta^!)$ par un $A \otimes A$ -sousdgm module acyclique et nous allons obtenir un $A \otimes A$ -dgm module qui admettra plus facilement d'autres structures multiplicatives que la semi-triviale. Commençons par remarquer le fait suivant

Lemme 6.7. $(C(\Delta^!)^{\geq 2n-1})$ est un $A \otimes A$ -dgsousmodule acyclique de $C(\Delta^!)$.

Démonstration. Notons δ la différentielle dans $C(\Delta^!)$. Il est clair que

$$C(\Delta^!)^{\geq 2n-1} = \langle ss^{-n}\omega, \omega \otimes \omega \rangle$$

est un $A \otimes A$ -sousmodule et on calcule que $\delta(ss^n\omega) = \omega \otimes \omega$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Posons

$$C := C(\Delta^!)/C(\Delta^!)^{\geq 2n-1},$$

C est un $A \otimes A$ -dgmodule et la projection canonique $\pi : C(\Delta^!) \rightarrow C$ est un quasi-isomorphisme de $A \otimes A$ -dgmodules.

Munissons C d'une multiplication qui en fait une ADGC et qui soit compatible avec la structure de $A \otimes A$ -dgmodule. Plus précisément, nous voulons que l'ADGC C soit telle que la composée,

$$A \otimes A \xrightarrow{\quad} C(\Delta^!) \xrightarrow{\quad \pi \quad} C$$

soit un morphisme d'ADGC.

Comme C est le quotient de $A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$ par le sous-espace vectoriel $\langle \omega \otimes \omega, ss^{-n}\omega \rangle$, nous avons un isomorphisme évident

$$C \cong (A \otimes A)^{< 2n} \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}(A^{< n}).$$

Pour définir une multiplication

$$\mu : C \otimes C \rightarrow C, \quad c_1 \otimes c_2 \mapsto c_1 \cdot c_2,$$

il suffit de définir

- (i) $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')$,
- (ii) $(a \otimes b) \cdot ss^{-n}x'$ et $ss^{-n}x \cdot (a' \otimes b')$,
- (iii) $(ss^{-n}x) \cdot (ss^{-n}x')$,

pour $a \otimes b, a' \otimes b' \in (A \otimes A)^{< 2n}$ et $x, x' \in A^{< n}$ des éléments homogènes.

Les produits (i) et (ii) sont complètement déterminés par la condition de compatibilité à la structure de $A \otimes A$ -module et la commutativité graduée. Plus précisément :

- (i) $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|a'| |b|} a \cdot a' \otimes b \cdot b'$
- (ii) $(a \otimes b) \cdot ss^{-n}x' = (-1)^{(n-1)(|a|+|b|)+|b| |x'|} ss^{-n}a \cdot x \cdot b'$
et $(ss^{-n}x) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|a'| |x|} ss^{-n}a' \cdot x \cdot b'.$

Pour (iii), notons que, si $|x| + |x'| \geq 1$, alors par des raisons de degré, nous avons nécessairement

$$(iii) \quad (ss^{-n}x) \cdot (ss^{-n}y) = 0.$$

Donc le seul produit non déterminé est

$$(iv) \quad (ss^{-n}1) \cdot (ss^{-n}1) \in C^{2n-2} = (A \otimes A)^{2n-2}.$$

Le résultat suivant montre que si n est impair, le produit $ss^{-n}1 \cdot ss^{-n}1$ peut-être choisi arbitrairement dans $(A \otimes A)^{2n-2}$.

Proposition 6.8. *Soit $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$. Si n est impair, il existe une structure d'ADGC sur C compatible avec la structure de $A \otimes A$ -dgmodule telle que*

$$ss^{-n}1 \cdot ss^{-n}1 = \xi.$$

Démonstration. Munissons C de la structure multiplicative décrite ci-dessous en posant $(ss^{-n}1)^2 = \xi$. Vérifions que C est une ADGC.

- Associativité : Soient $x, y, z \in A$, alors pour des raisons de degré

$$(ss^{-n}x \cdot ss^{-n}y) \cdot ss^{-n}z = 0 = ss^{-n}x \cdot (ss^{-n}y \cdot ss^{-n}z).$$

Soient $x, y \in A$ et $a \otimes b \in A \otimes A$ tel que $|a \otimes b| > 0$ alors $|(a \otimes b)| + |ss^{-n}x| + |ss^{-n}y| \geq 2n - 1$. Donc, aussi pour des raisons de degré

$$(a \otimes b) \cdot (ss^{-n}x \cdot ss^{-n}y) = (a \otimes b) \cdot (ss^{-n}x \cdot ss^{-n}y) = 0.$$

L'associativité dans les autres cas est garantie par la structure de $A \otimes A$ -dgmodule de C .

- Commutativité : La commutativité était demandée dans la construction de la structure.
- Différentielle : Soit $\bar{\delta}$ la différentielle dans C . Montrons que pour c, c' des éléments homogènes de C , nous avons

$$\bar{\delta}(c \cdot c') - (\bar{\delta}(c) \cdot c') - (-1)^{|c|}(c \cdot \bar{\delta}(c')) = 0 \quad (6.6)$$

- Si $c, c' \in A \otimes A$ alors (6.6) est vérifié car $A \otimes A$ est une ADGC et que $\bar{\delta}|_{A \otimes A} = d|_{A \otimes A}$.
- Si $c \in A \otimes A$ et $c' \in ss^{-n}A$ alors (6.6) est zéro car $\bar{\delta}$ est une différentielle de $A \otimes A$ -dgmodule.
- Si $c \in ss^{-n}A$ et $c' \in A \otimes A$, (6.6) est vérifiée car la multiplication est commutative.
- Si $c, c' \in ss^{-n}A$ alors le degré de l'expression à gauche de l'équation est au moins $2n - 2 + 1 = 2n - 1$. Donc, pour des raisons de degré, le terme de gauche de l'expression (6.6) est nul.

□

Notation : Nous noterons cette ADGC, déterminée par le choix $(ss^{-n}1)^2 = \xi$,

$$C(\xi) := (C(\Delta^!)/(C(\Delta^!))^{\geq 2n-1}, (ss^{-n}1)^2 = \xi)$$

et nous noterons

$$\bar{\text{id}} \oplus 0 : A \otimes A \rightarrow C(\xi)$$

la composée de l'inclusion $\text{id} \oplus 0 : A \otimes A \rightarrow A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$ suivie de la projection canonique $C(\Delta^!) \rightarrow C(\xi)$.

6.3.2 Equivalences entre algèbres de la forme $C(\xi)$

Soit A une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n impaire. Pour chaque élément $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ nous avons une ADGC $C(\xi)$. Nous

allons introduire dans cette section une notion d'équivalence faible d'ADGC sous $A \otimes A$. Cette notion, plus forte que celle d'équivalence faible d'ADGC, nous permettra d'obtenir une meilleure caractérisation des différentes algèbres $C(\xi)$.

Un modèle relatif de l'application

$$A \otimes A \longrightarrow C(\xi)$$

est la donnée d'un espace vectoriel gradué Z_ξ , d'une différentielle D_ξ et d'un quasi-isomorphisme

$$m_\xi : (A \otimes A \otimes \Lambda Z_\xi, D_\xi) \rightarrow C(\xi)$$

tels que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \oplus 0} & C(\xi) \\ & \searrow & \nearrow m_\xi \\ & (A \otimes A \otimes \Lambda Z_\xi, D_\xi) & \end{array}$$

Définition 6.9. Soit A une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n impaire et soient $\xi, \xi' \in (A \otimes A)^{2n-2}$. Les ADGC $C(\xi)$ et $C(\xi')$ sont faiblement équivalentes sous $A \otimes A$ si nous avons un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & & C(\xi) & & \\ & \nearrow \text{id} \oplus 0 & \uparrow \simeq & & \\ A \otimes A & \longrightarrow & (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D) & \xrightarrow{\quad} & C(\xi) \\ & \searrow \text{id} \oplus 0 & \downarrow \simeq & & \\ & & C(\xi') & & \end{array}$$

où Z est un espace vectoriel gradué, D une différentielle et $\text{id} \oplus 0 : A \otimes A \rightarrow C(\xi)$ est l'inclusion $i \oplus 0 : A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes_{\Delta^1} ss^{-n} A$ suivi de la projection canonique $C(\Delta^1) \rightarrow C(\xi)$. Nous noterons alors $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$.

Donnons une propriété utile pour déterminer quand deux de ces algèbres sont faiblement équivalentes sous $A \otimes A$.

Proposition 6.10. Soit A une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n impaire et soient $\xi, \xi' \in (A \otimes A)^{2n-2}$. Soient

$$A \otimes A \twoheadrightarrow (A \otimes A \otimes \Lambda Z_\xi, D_\xi) \quad \text{et} \quad A \otimes A \twoheadrightarrow (A \otimes A \otimes \Lambda Z_{\xi'}, D_{\xi'})$$

des modèles relatifs de $C(\xi)$ et $C(\xi')$ respectivement. Les ADGC $C(\xi)$ et $C(\xi')$ sont faiblement équivalentes sous $A \otimes A$ si et seulement si il existe un quasi-isomorphisme

$$\psi : (A \otimes A \otimes \Lambda Z_\xi, D_\xi) \rightarrow (A \otimes A \otimes \Lambda Z_{\xi'}, D_{\xi'}),$$

tel que $\psi(a \otimes b) = a \otimes b$, pour tout $a, b \in A$.

Démonstration. Par définition, $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$ si nous avons un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 & & C(\xi) \\
 & \nearrow \pi & \uparrow \simeq \\
 A \otimes A & \longrightarrow & (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D) \\
 & \searrow \pi & \downarrow \simeq \\
 & & C(\xi').
 \end{array}$$

Ce qui est le cas si et seulement si il existe un quasi-isomorphisme entre les modèles relatifs minimaux $\psi : (A \otimes A \otimes \Lambda Z_\xi, D_\xi) \rightarrow (A \otimes A \otimes \Lambda Z_{\xi'}, D_{\xi'})$. C'est-à-dire, un isomorphisme tel que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc}
 & & C(\xi) \\
 & \nearrow \pi & \uparrow \simeq \\
 & & (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_\xi) \\
 & \nearrow \pi & \downarrow \psi \cong \\
 A \otimes A & \longrightarrow & (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{\xi'}) \\
 & \searrow \pi & \downarrow \simeq \\
 & & C(\xi').
 \end{array}$$

□

Proposition 6.11. *La relation $\simeq_{A \otimes A}$ est une relation d'équivalence.*

Nous montrons à l'aide d'un exemple que les algèbres $C(\xi)$ ne sont pas toutes équivalentes entre elles.

6.3.3 L'exemple $A = H^*(S^2 \times S^3)$

Soit $(A, d) = (\{1, x_2, y_3, xy\} \cdot \mathbb{Q}, 0)$ une ADGC. Nous vérifions facilement que A est à dualité de Poincaré et que

$$\Delta = 1 \otimes xy + x \otimes y - y \otimes x - xy \otimes 1.$$

Nous pouvons définir l'application

$$\Delta^! : s^{-n}A \rightarrow A \otimes A ; s^{-n}a \mapsto \Delta(1 \otimes a).$$

Nous allons regarder le cône algébrique $(C(\Delta^!), \delta)$, que nous pouvons représenter via le tableau ci-dessous. Pour alléger l'écriture nous posons $S := ss^{-5}$

Degré	$A \otimes A$	SA
10	$xy \otimes xy$	
9		Sxy
8	$y \otimes xy \quad xy \otimes y$	
7	$x \otimes xy \quad xy \otimes x$	Sy
6	$y \otimes y$	Sx
5	$1 \otimes xy \quad x \otimes y \quad y \otimes x \quad xy \otimes 1$	
4	$x \otimes x$	$S1$
3	$1 \otimes y \quad y \otimes 1$	
2	$1 \otimes x \quad x \otimes 1$	
1		
0	$1 \otimes 1$	

En calculant, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\delta(S1) &= \Delta^!(S1) = \Delta(1 \otimes 1) \\
&= \Delta, \\
\delta(Sx) &= \Delta(1 \otimes x) \\
&= (1 \otimes xy + x \otimes y - y \otimes x - xy \otimes 1)(1 \otimes x) \\
&= x \otimes xy - xy \otimes x, \\
\delta(Sy) &= \Delta(1 \otimes y) \\
&= (1 \otimes xy + x \otimes y - y \otimes x - xy \otimes 1)(1 \otimes y) \\
&= -y \otimes xy - xy \otimes y, \\
\delta(Sxy) &= \Delta(1 \otimes xy) \\
&= (1 \otimes xy + x \otimes y - y \otimes x - xy \otimes 1)(1 \otimes xy) \\
&= -xy \otimes xy.
\end{aligned}$$

Quotientons le cône $C(\Delta^!)$ par le sous-module différentiel acyclique $\langle Sxy, xy \otimes xy \rangle$ et munissons $C(\Delta^!)/\langle Sxy, xy \otimes xy \rangle$ d'une structure d'ADGC. Pour cela il suffit de définir le produit $S1 \cdot S1$ qui pour des raisons de degré ne peut être qu'un élément de $(A \otimes A)^8$. Soient $q, r \in \mathbb{Q}$ et posons

$$S1 \cdot S1 = q(y \otimes xy) + r(xy \otimes y) = \xi.$$

Nous noterons $C(q, r) = C(\xi)$ l'ADGC ainsi obtenue.

Théorème 6.12. *Soient $q, r, s, t \in \mathbb{Q}$. Les ADGC $C(q, r)$ et $C(s, t)$ sont faiblement équivalentes sous $A \otimes A$ si et seulement si $q - s = r - t$.*

Pour prouver le théorème 6.12, nous allons construire les modèles relatifs minimaux des différentes ADGC $C(q, r)$. Ceux-ci sont faiblement équivalents sous $A \otimes A$ si et seulement si il existe un quasi-isomorphisme entre eux qui ce restreint à l'identité sur $A \otimes A$.

Construisons le modèle relatif de la flèche

$$A \otimes A \xrightarrow{id \oplus 0} C(\Delta^!) \xrightarrow{\pi} C(q, r)$$

où $\pi : C(\Delta^!) \rightarrow C(q, r)$ est la projection canonique. Nous allons construire un espace vectoriel gradué Z , une différentielle D et un quasi-isomorphisme $m : (A \otimes A \otimes \Lambda Z_{q,r}, D) \rightarrow C(q, r)$, tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A & \xrightarrow{id \oplus 0} & C(\Delta^!) & \xrightarrow{\pi} & C(q, r) \\ & \searrow & & \nearrow \varphi & \\ & & (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q,r}) & & \end{array}$$

En construisant Z degré par degré, jusqu'en degré 7, nous trouvons les générateurs décrits dans le tableau ci-dessous

Degré	Z_0	D	m
4	u	$D(u) = \Delta := 1 \otimes xy + x \otimes y - y \otimes x - xy \otimes 1$	$m(u) = s1$
5	z_5	$D(z_5) = u.(1 \otimes x) - u.(x \otimes 1)$	$m(z_5) = 0$
6	z_{61}	$D(z_{61}) = u.(1 \otimes y) - u.(y \otimes 1)$	$m(z_{61}) = 0$
6	z_{62}	$D(z_{62}) = z_5.(1 \otimes x) + z_5.(x \otimes 1)$	$m(z_{62}) = 0$
7	z_{71}	$D(z_{71}) = z_{62}(1 \otimes x) - z_{62}(x \otimes 1)$	$m(z_{71}) = 0$
7	z_{72}	$D(z_{72}) = z_{61}(1 \otimes x) + z_5(y \otimes 1) - z_5(1 \otimes y) - z_{61}(x \otimes 1)$	$m(z_{72}) = 0$
7	h	$D(h) = u^2 - 2(z_{61}(1 \otimes x) + z_{61}(x \otimes 1)) + q(y \otimes xy) + r(xy \otimes y)$	$m(h) = 0$

Comme pour tout $C(q, r)$ le modèle relatif est le même à l'exception de la différentielle, nous notons $(A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q,r})$ le modèle relatif associé à $C(q, r)$.

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 6.12.

Démonstration du théorème 6.12. *i)* $q - s = r - t \Rightarrow C(q, r) \simeq_{A \otimes A} C(s, t)$.

Posons $k := q - s = r - t$. Par la proposition 6.10, il suffit de construire un quasi-isomorphisme

$$\psi : (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q,r}) \rightarrow (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q+k, r+k})$$

tel que $\psi(a \otimes b \otimes 1) = a \otimes b$. Définissons ψ sur les générateurs de Z , de la façon suivante

$$\begin{aligned} \psi(u) &= u, \\ \psi(z_i) &= z_i, \\ \psi(h) &= h + ku(1 \otimes y). \end{aligned}$$

Montrons qu'elle commute à la différentielle. Pour cela, calculons

$$\begin{aligned} D_{q+k, r+k} \psi(h) &= D_{q+k, r+k}(h + ku(1 \otimes y)) \\ &= D_{q+k, r+k}(h) + k\Delta(1 \otimes y) \\ &= u^2 - 2z_{61}(1 \otimes x + x \otimes 1) + (q+k)(y \otimes xy) + \\ &\quad (r+k)(xy \otimes y) + k(-y \otimes xy - xy \otimes y) \\ &= u^2 - 2z_{61}(1 \otimes x + x \otimes 1) + q(y \otimes xy) + r(xy \otimes y) \\ &= \psi(D_{q,r}(h)). \end{aligned}$$

L'application ψ est un quasi-isomorphisme. En effet, l'application $A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes \Lambda Z$ est surjective en cohomologie, et comme ψ fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q,r}) & \xrightarrow{\psi} & (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{s,t}) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & A \otimes A & \end{array}$$

elle est aussi surjective en cohomologie. Comme

$$H^*(A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q,r}) \cong H^*(A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{s,t}),$$

ψ^* est un isomorphisme.

ii) $C(q, r) \simeq_{A \otimes A} C(s, t) \Rightarrow q - s = r - t$.

Si $C(q, r) \simeq_{A \otimes A} C(s, t)$, par la proposition 6.10 nous avons un quasi-isomorphisme

$$\psi : (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{q,r}) \xrightarrow{\simeq} (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D_{s,t})$$

tel que $\psi(a \otimes b \otimes 1) = a \otimes b$.

Pour alléger les notations, quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, les deux différentielles seront notées D . Par des raisons de degré

$$\psi(u) = \alpha_1 u + \alpha_2(x \otimes x) \quad (6.7)$$

pour certains $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Nous avons alors

$$D\psi(u) = D(\alpha_1 u + \alpha_2(x \otimes x)) = \alpha_1 \Delta$$

et

$$\psi(Du) = \psi(\Delta) = \Delta.$$

Comme ψ doit commuter à la différentielle, nous en déduisons $\alpha_1 = 1$.
Donc

$$\psi(u) = u + \alpha_2(x \otimes x). \quad (6.8)$$

L'élément z_{61} étant en degré 6

$$\psi(z_{61}) = \beta_1 z_{61} + \beta_2 z_{62} + \beta_3 y \otimes y + \beta_4 u(1 \otimes x) + \beta_5 u(x \otimes 1) \quad (6.9)$$

pour certains $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ et $\beta_5 \in \mathbb{Q}$.

Nous avons d'un côté

$$\begin{aligned} D\psi(z_{61}) &= D(\beta_1 z_{61} + \beta_2 z_{62} + \beta_3 y \otimes y + \beta_4 u(1 \otimes x) + \beta_5 u(x \otimes 1)) \\ &= \beta_1 u(1 \otimes y - y \otimes 1) + \beta_2 z_5(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &\quad + \beta_4 \Delta(1 \otimes x) + \beta_5 \Delta(x \otimes 1) \\ &= \beta_1 u(1 \otimes y - y \otimes 1) + \beta_2 z_5(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &\quad + (\beta_4 + \beta_5) \Delta(x \otimes 1) \\ &= \beta_1 u(1 \otimes y - y \otimes 1) + \beta_2 z_5(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &\quad + (\beta_4 + \beta_5)(x \otimes xy - xy \otimes x), \end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned}
\psi(Dz_{61}) &= \psi(u(1 \otimes y - y \otimes 1)) \\
&= \psi(u)(1 \otimes y - y \otimes 1) \\
&= (u + \alpha_2(x \otimes x))(1 \otimes y - y \otimes 1) \\
&= u(1 \otimes y - y \otimes 1) + \alpha_2(x \otimes xy - xy \otimes x).
\end{aligned}$$

Alors, pour que ψ commute à la différentielle, il faut que $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ et $\beta_4 + \beta_5 = \alpha_2$ et

$$\psi(z_{61}) = z_{61} + \beta_3(y \otimes y) + \beta_4 u(1 \otimes x) + \beta_5 u(x \otimes 1) \quad (6.10)$$

avec $\beta_4 + \beta_5 = \alpha_2$.

Intéressons nous à l'élément $h \in Z^7$. Par des raisons de degré :

$$\begin{aligned}
\psi(h) &= \gamma_1 h + \gamma_2(xy \otimes y) + \gamma_3(y \otimes xy) + \gamma_4 u(1 \otimes y) + \gamma_5 u(y \otimes 1) \\
&\quad + \gamma_6 z_5(1 \otimes x) + \gamma_7 z_5(x \otimes 1) + \gamma_8 z_{71} + \gamma_9 z_{72}.
\end{aligned}$$

Via un long calcul, nous trouvons d'un côté

$$\begin{aligned}
D_{q,r}\psi(h) &= \gamma_1 u^2 - 2\gamma_1 z_{61}(1 \otimes x + x \otimes 1) + (\gamma_1 q - (\gamma_4 + \gamma_5))(y \otimes xy) \\
&\quad + (\gamma_1 r - (\gamma_4 + \gamma_5))(xy \otimes y) + (\gamma_6 + \gamma_7)u(x \otimes x) \\
&\quad + \gamma_8 z_{62}(1 \otimes x - x \otimes 1) \\
&\quad + \gamma_9(z_{61}(1 \otimes x - x \otimes 1) + z_5(y \otimes 1 - 1 \otimes y))
\end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned}
\psi(D_{s,t}(h)) &= u^2 + 2(\alpha_2 - (\beta_4 + \beta_5))u(x \otimes x) - 2z_{61}(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&\quad + (c - 2\beta_3)(y \otimes xy) + (d - \beta_3)(xy \otimes y).
\end{aligned}$$

Pour que ψ commute la différentielle il faut que $\gamma_1 = 1$, que $q - (\gamma_4 + \gamma_5) = s - 2\beta_3$ et que $r - (\gamma_4 + \gamma_5) = t - 2\beta_3$. De ces deux dernières égalités nous déduisons que $q - s = (\gamma_4 + \gamma_5) - 2\beta_3$ et que $r - t = (\gamma_4 + \gamma_5) - 2\beta_3$, donc $q - s = r - t$.

□

Remarquons que, si $s - q = t - r = k$, alors

$$q(y \otimes xy) + r(xy \otimes y) - (s(y \otimes xy) + t(xy \otimes y)) = k(y \otimes xy + xy \otimes y) \in (\Delta)^{2n-2}.$$

Cette dernière remarque laisse espérer une belle caractérisation de l'équivalence entre les ADGC $C(\xi)$.

6.3.4 Equivalence des ADGC $C(\xi)$

Soit A une ADGC à dualité de Poincaré 1-connexe de dimension formelle n impaire. Dans les sections précédentes, pour chaque $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ nous avons construit une ADGC $C(\xi)$. L'objectif de cette section est de caractériser quand les différentes ADGC $C(\xi)$ sont faiblement équivalentes sous $A \otimes A$. À la fin

de cette section nous exhibons un lien entre ces différentes structures multiplicatives et le groupe d'homologie $H_2(M; \mathbb{Q})$, lien dont une possible explication géométrique se trouve dans les travaux de N. Habegger dans [14].

Pour cela commençons par démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.13. *Soit A une ADGC 1-connexe à dualité de Poincaré de dimension formelle n impaire et notons $\Delta \in A \otimes A$ la classe diagonale dans $A \otimes A$. Si $\xi, \xi' \in (A \otimes A)^{2n-2}$ sont telles que*

$$[\xi - \xi'] = 0 \text{ dans } \frac{H^{2n-2}(A \otimes A)}{([\Delta])},$$

alors $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$.

Démonstration. Nous avons un isomorphisme canonique de $A \otimes A$ -dgmmodules

$$C(\xi) \cong C(\xi')$$

que par abus de notation nous pouvons regarder comme une identification puisque ces deux ADGC ne diffèrent que par $(ss^{-n}1)^2$.

Nous avons, comme $A \otimes A$ -dgmmodules,

$$C(\xi) = (A \otimes A \oplus A \cdot u, \delta)$$

avec $\delta(a \cdot u) = (da) \cdot u + (-1)^{|a|}(a \otimes 1) \cdot \Delta$. Posons

$$(\Delta)^{>n} = \{(a \otimes b) \cdot \Delta \mid a \otimes b \in (A \otimes A)^+\}.$$

Comme l'application $a \mapsto (a \otimes 1) \cdot \Delta$ est injective (voir [22, lemme 5.4]), il est clair que

$$(\Delta)^{>n} \oplus u \cdot A^+$$

est un idéal différentiel acyclique dans $C(\xi)$ et $C(\xi')$. Considérons aussi un supplémentaire S des cocycles dans $(A \otimes A)^{2n-3}$ et posons

$$I = S + d(S) + (\Delta)^{>n} + u \cdot A^+,$$

qui est un idéal acyclique de $C(\xi)$ et $C(\xi')$. On a donc des quasi-isomorphismes d'ADGC $C(\xi) \xrightarrow{\simeq} C(\xi)/I$ et $C(\xi') \xrightarrow{\simeq} C(\xi')/I$. Comme

$$\xi - \xi' \in (\Delta) + d((A \otimes A)^{2n-3}),$$

alors $\xi = \xi' \bmod I$. En conséquence l'identification de $A \otimes A$ -dgmmodules $C(\xi) = C(\xi')$ induit un isomorphisme d'ADGC

$$C(\xi)/I \cong C(\xi')/I.$$

Nous avons alors le diagramme d'ADGC suivant

$$\begin{array}{ccc} & C(\xi) \xrightarrow{\simeq} C(\xi)/I & \\ & \uparrow & \downarrow \cong \\ A \otimes A & & \\ & \downarrow & \\ & C(\xi') \xrightarrow{\simeq} C(\xi')/I. & \end{array}$$

En prenant un modèle relatif de Sullivan de $A \otimes A \rightarrow C(\xi)$ et en appliquant le lemme de relèvement nous obtenons le diagramme d'ADGC

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\quad} & C(\xi') \\
 \downarrow & \nearrow \lambda & \downarrow \simeq \\
 (A \otimes A \otimes \Lambda Z, D) & \xrightarrow{\simeq} & C(\xi) \xrightarrow{\simeq} C(\xi)/I \cong C(\xi')/I.
 \end{array}$$

Ce qui entraîne que $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$. □

Comme corollaire nous avons :

Corollaire 6.14. *Soit A une ADGC 1-connexe à dualité de Poincaré de dimension n impaire. On a une surjection naturelle*

$$\pi: H^{2n-2}(A \otimes A)/([\Delta]) \twoheadrightarrow \{C(\xi): \xi \in (A \otimes A)^{2n-2}\}/\simeq_{A \otimes A},$$

où le but de π est l'ensemble des classes d'équivalences, sous $A \otimes A$, des ADGC $C(\xi)$.

Nous conjecturons le résultat suivant :

Conjecture 6.15. *L'application π du corollaire précédent est une bijection.*

Nous n'avons pas encore de preuve de ceci. L'intérêt d'une telle conjecture est de pouvoir la relier à la proposition suivante et ainsi obtenir une caractérisation plus intrinsèque des différentes ADGC $C(\xi)$.

Proposition 6.16. *Soit A une ADGC 1-connexe à dualité de Poincaré de dimension n impaire. Nous avons un isomorphisme linéaire naturel*

$$\psi: H^{n-2}(A) \xrightarrow{\simeq} \frac{H^{2n-2}(A \otimes A)}{(\Delta)} ; [a] \mapsto [a \otimes \omega] \bmod ([\Delta]).$$

Démonstration. Montrons d'abord que ψ est bien défini. En effet, ψ est induite par l'application linéaire

$$A^{n-2} \rightarrow (A \otimes A)^{2n-2}, a \mapsto a \otimes \omega,$$

avec $A^{n-2} \subset \ker d$ car A est à dualité de Poincaré et 1-connexe, et ψ envoie les cobords sur les cobords car, pour $b \in A^{n-3}$,

$$db \otimes \omega = d(b \otimes \omega).$$

Pour voir que ψ est surjective notons que

$$H^{2n-2}(A \otimes A) \cong (A \otimes A)^{2n-2} = (A^{n-2} \otimes \mathbb{Q} \cdot \omega) \oplus (\mathbb{Q} \cdot \omega \otimes A^{n-2}).$$

Il suffit donc de démontrer que tout élément de la forme $[\omega \otimes a] \bmod ([\Delta])$, avec $a \in A^{n-2}$, est dans l'image de ψ . Or, un simple calcul montre que

$$(a \otimes 1) \cdot \Delta = a \otimes \omega + \omega \otimes a,$$

et donc

$$[\omega \otimes a] = \psi([a]) \bmod ([\Delta]).$$

Pour l'injectivité, supposons que $\psi([a]) = 0$. Autrement dit $a \otimes \omega$ est cobordant à un multiple de Δ . Les multiples de Δ en degré $2n - 2$ sont de la forme $u \otimes \omega + \omega \otimes u$ avec $u \in A^{n-2}$. Pour des raisons de degrés et du fait que $A^{n-1} = 0$,

$$(A \otimes A)^{2n-3} = (\mathbb{Q} \cdot \omega \otimes A^{n-3}) \oplus (A^{n-3} \otimes \mathbb{Q} \cdot \omega).$$

Il existe donc $x, y \in A^{n-3}$ tels que

$$a \otimes \omega = u \otimes \omega + \omega \otimes u + dx \otimes \omega + \omega \otimes dy.$$

Donc, $a = u + dx$ et $0 = u + dy$, d'où $a = d(x - y)$, c'est-à-dire $[a] = 0$ dans $H^{n-2}(A)$. $\square$

Cette dernière proposition permet de mettre en évidence que,

$$\frac{H^{2n-2}(A \otimes A)}{([\Delta])} \cong H^{n-2}(A) \cong H^{n-2}(M; \mathbb{Q}) \underset{D.P.}{\cong} H_2(M; \mathbb{Q}).$$

Donc, si la conjecture 6.15 est vraie, l'ensemble des classes d'équivalence des algèbres $C(\xi)$ sous $A \otimes A$ est en bijection avec $H_2(M; \mathbb{Q})$. Autrement dit, les différentes structures multiplicatives $C(\xi)$ sont complètement et univoquement déterminées par le choix d'un élément dans $H_2(M; \mathbb{Q})$. Des résultats de N. Habegger dans [14] entraînent que l'ensemble des classes d'isotopie d'applications homotopes à $\Delta: M \hookrightarrow M \times M$ est en bijection avec $H_2(M; \mathbb{Z})$. Ceci donne une possible signification géométrique aux différentes structures multiplicatives $C(\xi)$.

6.3.5 Modèle d'ADGC de $F(M, 2)$ pour une variété 1-connexe de dimension impaire

Soit M une variété fermée, 1-connexe de dimension n impaire. Nous allons construire un modèle d'ADGC pour $F(M, 2)$.

Soit A une ADGC à dualité de Poincaré nous avons vu dans les sections précédentes que pour tout $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ nous pouvons construire une ADGC $C(\xi)$ caractérisée par le fait que $(ss^{-n}1)^2 = \xi$. Nous montrons dans ce qui suit qu'il existe $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ tel que $C(\xi)$ est un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$. Plus précisément nous prouverons le résultat suivant :

Théorème 6.17. *Soit M une variété 1-connexe compacte sans bord de dimension n impaire. Soit A un modèle à dualité de Poincaré 1-connexe de M de dimension formelle n et notons Δ la classe diagonale dans $A \otimes A$. Soit $\Delta^!: s^{-n}A \rightarrow A \otimes A$ l'application de $A \otimes A$ -dgm modules définie par $\Delta^!(s^{-n}a) = \Delta(1 \otimes a)$. Alors, il existe $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$, tel que*

$$C(\xi) = \left(\frac{C(\Delta^!)}{C(\Delta^!)_{\geq 2n-1}}, (ss^{-n}1)^2 = \xi \right)$$

est un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$.

Démonstration. Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M de dimension formelle n et soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC surjectifs

$$A \xleftarrow{\simeq} \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M)$$

Les ADGC A , $A \otimes A$, $A_{PL}(M \times M)$ et $A_{PL}(F(M, 2))$ héritent alors d'une structure de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule. Rappelons la construction du modèle relatif de l'application

$$f: \hat{A} \otimes \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M \times M) \rightarrow A_{PL}(F(M, 2))$$

discuté dans le lemme 6.3. Nous obtenons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\simeq} & A_{PL}(M \times M) & \longrightarrow & A_{PL}(F(M, 2)) \\ & \searrow & & \nearrow \scriptstyle m & \\ & & (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) & & \end{array}$$

avec $Z^{<n-1} = 0$ et $Z^{n-1} = u \cdot \mathbb{Q}$. Par construction, $Du = \tilde{\Delta}$ où $\tilde{\Delta}$ est tel que $[\tilde{\Delta}]$ est un générateur de $\ker H^*(f)$. Comme $\rho: \hat{A} \otimes \hat{A} \xrightarrow{\simeq} A \otimes A$ est surjective, montrons que nous pouvons prendre $\tilde{\Delta}$ tel que :

$$\rho(\tilde{\Delta}) = \Delta.$$

En effet, soit $\hat{\Delta} \in A \otimes A \cap \ker d$ un générateur de $\ker H^*(f)$. Comme $\hat{\Delta}$ représente la classe diagonale dans $H^*(\hat{A} \otimes \hat{A}) \cong H^*(M \times M)$,

$$H^*(\rho)([\hat{\Delta}]) = [\Delta] \in H^*(A \otimes A).$$

Donc $\rho(\hat{\Delta}) = \Delta + d\epsilon$ où $\epsilon \in (A \otimes A)^{n-1}$. Comme ρ est surjective, il existe $\gamma \in \hat{A} \otimes \hat{A}$ tel que $\rho(\gamma) = \epsilon$. Posons $\tilde{\Delta} = (\hat{\Delta} - d\gamma)$. Nous avons que $d\tilde{\Delta} = 0$ et $\rho(\tilde{\Delta}) = \Delta + d\epsilon - d\epsilon = \Delta$.

Par la proposition 6.2, $C(\Delta^!) = A \otimes A \oplus_{\Delta^!} ss^{-n}A$ et $A_{PL}(F(M, 2))$ sont faiblement équivalents en tant que $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules. Comme $(\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D)$ est un $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule cofibrant nous avons un quasi-isomorphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules

$$\theta: (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} C(\Delta^!).$$

Quitte à multiplier θ par un rationnel non nul, nous pouvons supposer que $\theta(1) = 1$. Montrons que l'application θ vérifie les conditions suivantes

1. $\theta|_{\hat{A} \otimes \hat{A}} = (\text{id} \oplus 0) \circ \rho: \hat{A} \otimes \hat{A} \rightarrow A \otimes A \xrightarrow{\text{id} \oplus 0} C(\Delta^!),$
2. $\theta(u) = ss^{-n}1 + \tau$ avec $\tau \in (A \otimes A)^n \cap \ker d$.

Pour montrer le point 1, rappelons que la structure de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodule sur $A \otimes A$ est induite par l'application $\rho: \hat{A} \otimes \hat{A} \rightarrow A \otimes A$. Comme $\theta(1) = 1$ et que θ est un morphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgmodules nous avons que, pour $a, b \in \hat{A}$

$$\theta(a \otimes b) = (a \otimes b) \cdot \theta(1) = \rho(a \otimes b) \cdot 1 = ((\text{id} \oplus 0) \circ \rho)(a \otimes b).$$

Pour vérifier le point 2, remarquons que par des raisons de degré

$$\theta(u) = qss^{-n}1 + \tau$$

avec $q \in \mathbb{Q}$ et $\tau \in (A \otimes A)^{n-1}$. Notons δ la différentielle dans $C(\Delta^!)$. Comme θ commute à la différentielle

$$\begin{aligned} \delta(\theta(u)) &= \theta(Du), \\ \delta(qss^{-n}1 + \tau) &= \theta(\tilde{\Delta}), \\ q\Delta + d\tau &= \rho(\tilde{\Delta}) = \Delta. \end{aligned}$$

Donc

$$d\tau = (q - 1)\Delta. \quad (6.11)$$

Comme $[\Delta] \neq 0$ l'équation (6.11) est vérifiée si et seulement si $q = 1$ et $d\tau = 0$. Ce qui montre le point 2.

Posons $\xi = \theta(u^2) - \tau^2$ et munissons $C = C(\Delta^!)/ (C(\Delta^!)^{\geq 2n-1})$ de la structure d'ADGC telle que $(ss^{-n}1)^2 = \xi$. Notons $C(\xi)$ l'ADGC ainsi obtenue.

La composée

$$\varphi: (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \xrightarrow{\theta} C(\Delta^!) \xrightarrow{\pi} C(\xi)$$

est un quasi-isomorphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm modules. Montrons que pour $z, z' \in \Lambda Z$.

$$\varphi(z \cdot z') = \varphi(z)\varphi(z'). \quad (6.12)$$

En effet,

- Si $|z| > n - 1$ ou $|z'| > n - 1$ alors l'expression est de degré $\geq 2n - 1$, donc les deux termes sont nuls car, par construction, $C(\xi)^{\geq 2n-1} = 0$.
- Si $|z| = n - 1$ et $|z'| = n - 1$, nous pouvons supposer par linéarité que $z = z' = u$. Notons que $\tau \cdot ss^{-n}1 \in ss^{-n}A^{n-1} = 0$. Calculons :

$$(\varphi(u))^2 = (ss^{-n}1 + \tau)^2 = (ss^{-n}1)^2 + \tau^2 = \xi + \tau^2 = \pi(\theta(u^2))$$

et

$$\varphi(u^2) = \pi(\theta(u^2)).$$

Ceci démontre que φ est un morphisme d'algèbres.

Comme l'équation (6.12) est vérifiée pour tout $z, z' \in \Lambda Z$, le lemme 6.4 montre que φ est un morphisme d'ADGC. Comme φ est un quasi-isomorphisme de $\hat{A} \otimes \hat{A}$ -dgm modules, c'est un quasi-isomorphisme d'ADGC et nous avons, alors, le zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A_{PL}(F(M, 2)) \xleftarrow{\simeq_m} (\hat{A} \otimes \hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \xrightarrow[\varphi]{\simeq} C(\xi),$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

6.4 Invariance de $F(M, 2)$ par permutation des composantes

Dans la section précédente nous avons démontré que si M est une variété fermée 1-connexe admettant un modèle d'ADGC 1-connexe à dualité de Poincaré A , alors *il existe* $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ tel que $C(\xi)$ est un modèle d'ADGC de M .

Malheureusement, ce modèle $C(\xi)$ dépend d'une indéterminée ξ dans $(A \otimes A)^{2n-2}$, ou plus précisément d'une classe de cohomologie $H^{n-2}(M; \mathbb{Q})$. Dans cette section nous montrons que le fait que l'inclusion

$$F(M, 2) \hookrightarrow M \times M$$

soit Σ_2 -équivariante (par l'action du groupe symétrique à 2 lettres, Σ_2 , par permutation des composantes) ne permet pas de restreindre le choix de ξ .

Pour déterminer complètement le modèle de $F(M, 2)$ une idée naturelle est de regarder l'action de la permutation des coordonnées sur $F(M, 2)$. Plus précisément, l'application

$$T: M \times M \rightarrow M \times M ; (x, y) \mapsto (y, x)$$

induit une application

$$t: F(M, 2) \rightarrow F(M, 2)$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{T} & M \times M \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ F(M, 2) & \xrightarrow{t} & F(M, 2). \end{array} \quad (6.13)$$

Soit A une ADGC à dualité de Poincaré 1-connexe de dimension formelle n impaire qui soit un modèle de M . Dans les sections précédentes nous avons construit, pour tout $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$, une algèbre $C(\xi)$ et le théorème 6.17 nous dit qu'il existe $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ tel que $C(\xi)$ est un modèle d'ADGC de $F(M, 2)$.

Il est connu que l'application T admet comme modèle

$$\tau: A \otimes A \rightarrow A \otimes A ; a \otimes b \mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a.$$

Nous allons étudier la possibilité de construire une application d'ADGC

$$\hat{\tau}: C(\xi) \rightarrow C(\xi)$$

qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ C(\xi) & \xrightarrow[\simeq]{\hat{\tau}} & C(\xi). \end{array}$$

On pourrait espérer que l'existence de l'application d'ADGC $\hat{\tau}$ implique des conditions sur ξ . Le lemme 6.18 et la proposition 6.19 montrent que ce n'est malheureusement pas le cas.

Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ une base de A et $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ sa base duale. Supposons que $a_1 = 1$ et posons $\omega = a_1^*$. Rappelons que la classe diagonale dans $A \otimes A$ est l'élément

$$\Delta = \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} a_i \otimes a_i^* \in (A \otimes A)^n.$$

et notons (Δ) l'idéal engendré par Δ dans $A \otimes A$.

Lemme 6.18. *Soit A une ADGC à dualité de Poincaré 1-connexe de dimension formelle n impaire. Considérons l'application*

$$\tau: A \otimes A \rightarrow A \otimes A; a \otimes b \mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a.$$

Pour tout $\xi' \in (A \otimes A)^{2n-2}$ il existe $\epsilon \in (\Delta) \cap (A \otimes A)^{2n-2}$ tel que si on pose $\xi = \xi' + \epsilon$ alors

1. $\tau(\xi) = \xi$,
2. $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$.

Démonstration. Tout élément $\xi' \in (A \otimes A)^{2n-2}$ s'écrit sous la forme

$$\xi' = a \otimes \omega + \omega \otimes b$$

avec $a, b \in A^{n-2}$. Posons

$$\epsilon := -\frac{1}{2}((a+b) \otimes 1) \cdot \Delta = -\frac{1}{2}(a+b) \otimes \omega - \frac{1}{2}\omega \otimes (a+b)$$

et

$$\begin{aligned} \xi &:= \xi' + \epsilon \\ &= (a - \frac{1}{2}(a+b) \otimes \omega) + \omega \otimes (b - \frac{1}{2}(a+b)) \\ &= \frac{1}{2}((a-b) \otimes \omega - \omega \otimes (a-b)) \end{aligned}$$

Alors

$$\tau(\xi) = \frac{1}{2}(-\omega \otimes (a-b) + (a-b) \otimes \omega) = \xi.$$

Par la proposition 6.13 si $\xi - \xi' \in (\Delta)$ alors $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$. □

Proposition 6.19. *Soit A une algèbre à dualité de Poincaré 1-connexe de dimension formelle n impaire et soit $\xi' \in (A \otimes A)^{2n-2}$. Il existe $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ tel que*

$$C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi'),$$

et il existe un diagramme commutatif d'ADGC

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ C(\xi) & \xrightarrow[\simeq]{\hat{\tau}} & C(\xi), \end{array}$$

avec $\hat{\tau} \circ \hat{\tau} = \text{id}_{C(\xi)}$.

Démonstration. Choisissons ξ comme dans le lemme 6.18, c'est-à-dire de sorte que $C(\xi) \simeq_{A \otimes A} C(\xi')$ et $\tau(\xi) = \xi$. Définissons $\hat{\tau}$ par

$$\begin{cases} \hat{\tau}(a \otimes b) = \tau(a \otimes b) & \text{pour } a \otimes b \in (A \otimes A)^{2n-2}, \\ \hat{\tau}(ss^{-n}x) = -ss^{-n}x & \text{pour } x \in A^{<n}. \end{cases}$$

De simples calculs montrent que $\hat{\tau}$ commute avec les différentielles et $\hat{\tau}$ est un morphisme de $A \otimes A$ -modules. Pour achever de vérifier que $\hat{\tau}$ est un morphisme d'algèbres il suffit de voir que

$$\hat{\tau}((ss^{-n}1)^2) = (\hat{\tau}(ss^{-n}1))^2.$$

En effet,

$$\tau((ss^{-n}1)^2) = \hat{\tau}(\xi) = \tau(\xi)$$

et

$$(\hat{\tau}(ss^{-n}1))^2 = (-ss^{-n}1)^2 = (ss^{-n}1)^2 = \xi.$$

Comme $\tau(\xi) = \xi$, $\hat{\tau}$ est bien un morphisme d'ADGC. Nous vérifions assez facilement que $\hat{\tau} \circ \hat{\tau} = \text{id}_{C(\xi)}$. $\square$

La proposition 6.19 signifie que l'existence du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{T} & M \times M \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ F(M, 2) & \xrightarrow{t} & F(M, 2) \end{array}$$

ne donne à priori pas de restrictions sur le $\xi \in (A \otimes A)^{2n-2}$ pour lequel $A \otimes A \rightarrow C(\xi)$ pourrait être un modèle d'ADGC de $F(M, 2) \hookrightarrow M \times M$.

CHAPITRE 7

Modèle du complémentaire dans une variété à bord

7.1 Introduction

Soit W un polyèdre et une variété compacte à bord connexe, orientable de dimension n . Soit $f : K \rightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre de dimension k . L'objectif de ce chapitre est de donner un modèle du type d'homotopie rationnelle de $W \setminus K$ sous certaines hypothèses sur la codimension. Contrairement à ce qui se passait lorsque W était une variété sans bord, il n'est en général pas possible de donner un tel modèle uniquement à partir d'un modèle du plongement $f : K \hookrightarrow W$. Pour s'en rendre compte considérons les exemples suivants : W est un disque D^n de dimension n et K est un point. Si K est un point intérieur à D^n alors $W \setminus K \simeq S^{n-1}$. Par contre si K est un point sur le bord de D^n alors $W \setminus K \simeq *$. Pourtant les deux différentes inclusions d'un point dans D^n sont homotopes. Il semble donc important de connaître aussi l'intersection de K avec le bord de W . Le théorème central de ce chapitre est que, sous des hypothèses de grande codimension, un modèle d'ADGC du complémentaire $W \setminus K$ s'obtient à partir d'un modèle d'ADGC du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \partial K := (K \cap \partial W) & \hookrightarrow & \partial W \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \hookrightarrow & W. \end{array} \quad (7.1)$$

La notation ∂K utilisée ici n'est pas standard : elle ne désigne pas le bord de ∂K (qui en général n'est pas une variété à bord), mais bien l'intersection de K avec W .

Le résultat principal de cette section est le suivant (voir théorème 7.23) :

Théorème. *Soit W et K comme ci-dessus. Soit un entier $r \geq -1$ tel que $f : K \hookrightarrow W$ soit rationnellement r -connexe, c'est-à-dire $H^i(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme pour $i < r$ et une injection pour $i = r$.*

Si $\dim W \geq 2 \dim(K) - r + 2$ alors un modèle d'ADGC de $W \setminus K \hookrightarrow W$ peut-être construit à partir d'un modèle d'ADGC du carré (7.1).

Voici un résumé de cette construction. Nous partons des $A_{PL}(W)$ -dgmodules

$$A_{PL}(W, \partial W) = \ker(A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(\partial W))$$

et

$$A_{PL}(K, \partial K) = \ker(A_{PL}(K) \rightarrow A_{PL}(\partial K)).$$

Nous introduisons dans la section suivante la notion de noyau homotopique qui donne un modèle des objets $A_{PL}(K, \partial K)$ et $A_{PL}(W, \partial W)$ à partir d'un modèle des applications $A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(\partial W)$ et $A_{PL}(K) \rightarrow A_{PL}(\partial K)$.

Par la suite, nous remarquerons que le cône algébrique de l'application $s^{-n} \# A_{PL}(K, \partial K) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W)$ qui est la suspension itérée du dual de l'application $A_{PL}(W, \partial W) \rightarrow A_{PL}(K, \partial K)$ induite par l'inclusion de paires $(K, \partial K) \hookrightarrow (W, \partial W)$ est un $A_{PL}(W)$ -dgmodule faiblement équivalent à $A_{PL}(W \setminus K)$. Nous déduirons alors que le cône algébrique de tout modèle de l'application $s^{-n} \# A_{PL}(K, \partial K) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W)$ est un modèle de $A_{PL}(W)$ -dgmodule de $A_{PL}(W \setminus K)$.

Ensuite, en partant d'un carré d'ADGC

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \partial A & \xrightarrow{\partial \varphi} & \partial B \end{array}$$

modèle de

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(W) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{PL}(\partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial K), \end{array}$$

nous construisons un modèle algébrique de $A_{PL}(W \setminus K)$ de la façon suivante : Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que A et $A_{PL}(W)$ sont des $\hat{A}$ -dgmodules. Notons $\bar{\varphi}: \text{hoker } \alpha \rightarrow \text{hoker } \beta$ l'application induite entre les noyaux homotopiques. Nous montrons que tout morphisme $\varphi^!: Q \rightarrow A$ de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalent à $s^{-n} \# \bar{\varphi}: s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha$ est tel que le cône algébrique $C(\varphi^!) = A \oplus_{\varphi^!} sQ$ est un $\hat{A}$ -dgmodule faiblement équivalent à $A_{PL}(W \setminus K)$. Comme dans le chapitre 4, sous des hypothèses de grande codimension nous pouvons trouver une application $\varphi^!: Q \rightarrow A$ telle que le cône algébrique $C(\varphi^!)$ muni de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$.

Nous introduisons, aussi, la notion de troncature d'un dgmodule et d'une ADGC. Soit A une ADGC et R un A -dgmodule (ou une ADGC) nous appellerons troncature en degré n de R un A -dgmodule (ou une ADGC) $\tau^n R$ tel que $(\tau^n R)^{>n} = 0$ et tel que $H^i(\tau^n R) \cong H^i(R)$ pour $0 \leq i \leq n$.

En utilisant cette notion de troncature, nous donnons un résultat plus faible que celui mentionné précédemment mais cette fois-ci sans hypothèse de

grande codimension. Nous montrerons que nous pouvons construire un modèle d'ADGC de toute troncature en degré $N = 2(n - k) + 3$ de $A_{PL}(W \setminus K)$. Ceci traduit l'idée que le modèle que nous avons construit est toujours le bon modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$ jusqu'à un certain degré. Comme conséquence directe de ce dernier résultat en ajoutant des hypothèses sur la connexité de l'inclusion $(K, \partial K) \subset (W, \partial W)$ qui permettent d'affaiblir l'hypothèse de grande codimension, nous déduisons un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$.

7.2 Noyau homotopique d'un morphisme de dgmodules

Soit A une ADGC et soit

$$f: M \rightarrow N$$

une application de A -dgmodules. La suspension

$$s^{-1}f: s^{-1}M \rightarrow s^{-1}N$$

est encore une application de A -dgmodules et le cône algébrique

$$C(s^{-1}f) = s^{-1}N \oplus_{s^{-1}f} s^{-1}M \cong s^{-1}N \oplus_{s^{-1}f} M$$

est un A -dgmodule qui a les propriétés suivantes :

Proposition 7.1. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application de A -dgmodules.*

1. *Les applications canoniques*

$$\begin{array}{ccc} i: & s^{-1}N & \rightarrow & s^{-1}N \oplus_{s^{-1}f} M \\ & s^{-1}n & \mapsto & (s^{-1}n, 0) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} p: & s^{-1}N \oplus_{s^{-1}f} M & \rightarrow & M \\ & (s^{-1}n, m) & \mapsto & m \end{array}$$

sont des applications de A -dgmodules.

2. *Soit $id: N \rightarrow N$ l'application identité, alors $C(s^{-1}id)$ est contractile.*

3. *L'application $f: M \rightarrow N$ admet une factorisation de A -dgmodules*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow i & \nearrow f-p \\ & M \oplus C(s^{-1}id_N), & \end{array}$$

où i est un quasi-isomorphisme et $f - p$ est une surjection.

4. *En utilisant les notations du point précédent, nous avons un isomorphisme de A -dgmodules $\ker(f - p) \cong C(s^{-1}f)$.*

5. *Soit le carré commutatif de A -dgmodules ci-dessous*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

L'application

$$C(s^{-1}\alpha, s^{-1}\beta): \begin{array}{ccc} C(s^{-1}f) & \rightarrow & C(s^{-1}f') \\ (s^{-1}n, m) & \mapsto & (s^{-1}\beta(n), \alpha(m)) \end{array}$$

est une application de A -dgmodules.

6. Si f est surjective alors le morphisme

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \ker f & \rightarrow & C(s^{-1}f) \\ m & \mapsto & (0, m) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme de A -dgmodules.

Démonstration. 1. Évident.

2. Évident.

3. Comme $C(s^{-1}id_N)$ est contractile, l'inclusion

$$i: M \rightarrow M \oplus C(s^{-1}id_N)$$

est un quasi-isomorphisme. De plus $f - p$ est évidemment surjective.

4. Notons D la différentielle dans $C(s^{-1}f)$. Nous avons

$$\ker(f - p) = \{(m, (s^{-1}a, f(m))) | m \in M, a \in N\}.$$

Définissons

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \ker f - p & \rightarrow & C(s^{-1}f) \\ (m, (sa, f(m))) & \mapsto & (sa, m). \end{array}$$

L'application φ est un morphisme de A -modules. De plus, elle commute avec la différentielle. En effet, notons D la différentielle dans $C(s^{-1}f)$, nous avons

$$D\varphi(m, (sa, f(m))) = D(sa, m) = (sf(m) - sda, dm)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(d(m, (sa, f(m)))) &= \varphi(dm, D(sa, f(m))) \\ &= \varphi(dm, (sf(m) - sda, dfm)) \\ &= (sf(m) - sda, dm). \end{aligned}$$

Donc φ est un morphisme de A -dgmodules. Nous voyons facilement qu'elle est surjective et injective, et donc que c'est un isomorphisme.

5. Nous vérifions sans difficultés que l'application est de A -modules et qu'elle commute à la différentielle.

6. Définissons

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \ker f & \rightarrow & C(s^{-1}f) \\ m & \mapsto & (0, m) \end{array}$$

Vérifions que φ commute à la différentielle. D'un côté, comme $m \in \ker f$

$$D\varphi(m) = D(0, m) = (sf(m) - d0, dm) = (0, dm),$$

et de l'autre côté, par définition,

$$\varphi(dm) = (0, dm).$$

Supposons f surjective.

Assertion : Soit $(s^{-1}b, a) \in C(s^{-1}f)$ tel que $D(s^{-1}b, a) = 0$. Si f est surjective, alors il existe $(0, m) \in C(s^{-1}f)$ avec $m \in \ker f$ tel que $dm = 0$ et tel que $(s^{-1}b, a) - (0, m) \in \text{Im } D$. De plus, si m' vérifie aussi ces deux conditions, alors $m - m' \in \text{Im } d_M$.

En effet, comme $D(s^{-1}b, a) = (s^{-1}f(a) - s^{-1}db, da) = (0, 0)$ nous déduisons que

$$da = 0, \quad (7.2)$$

$$f(a) = db. \quad (7.3)$$

Comme f est surjective, il existe $c \in M$ tel que $f(c) = b$. Alors, par l'égalité (7.3), $f(a - dc) = 0$ et donc $a - dc \in \ker f$. Posons $m := a - dc$. Comme $da = 0$, nous avons que $dm = 0$ et

$$(s^{-1}b, a) - (0, m) = (s^{-1}f(c), dc) = D(0, c).$$

Ce qui prouve la première partie de l'énoncé.

Si nous avons un m' qui vérifie les mêmes conditions que m alors nous pouvons construire un $c' \in M$ analogue au c construit pour m . Par construction, $d(c - c') = m - m'$ et $m - m' \in \text{Im } d_M$. Ceci termine la preuve de l'assertion.

L'assertion précédente implique que pour tout $[sb, a] \in H^*(C(s^{-1}f))$ il existe un unique élément $[m] \in H^*(\ker f)$ tel que

$$[(m, 0)] = [(sb, a)] \in H^*(C(s^{-1}f))$$

et donc que φ^* est un isomorphisme. □

Toutes ces propriétés suggèrent la définition suivante

Définition 7.2. Soit $f: M \rightarrow N$ un morphisme de A -dgmodules. Le noyau homotopique de f est le A -dgmodule

$$\text{hoker } f := C(s^{-1}f) = s^{-1}N \oplus_{s^{-1}f} M.$$

Nous pouvons retraduire le point 5 de la proposition 7.2 en disant que si nous avons un carré

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ M' & \xrightarrow{f'} & N', \end{array} \quad (7.4)$$

alors il existe une application induite entre les noyaux homotopiques

$$\bar{\alpha}: \text{hoker } f \rightarrow \text{hoker } f'.$$

Le lemme 1.14 sur les cônes algébriques montre que si les flèches verticales du carré (7.4) sont des quasi-isomorphismes, alors la flèche induite entre les noyaux homotopiques est elle aussi un quasi-isomorphisme.

La raison pour laquelle nous avons introduit la notion de noyau homotopique est expliquée par la proposition suivante.

Proposition 7.3. *Soit $f : Y \hookrightarrow X$ une cofibration d'espaces topologiques. Soit A un modèle d'ADGC de X et soit $\hat{A}$ une ADGC telle que*

$$A \xleftarrow[\simeq]{\rho} \hat{A} \xrightarrow[\simeq]{\rho'} A_{PL}(X).$$

Nous pouvons voir

$$A_{PL}(f) : A_{PL}(X) \rightarrow A_{PL}(Y)$$

comme une application de $\hat{A}$ -dgmodules et soit

$$\varphi : A \rightarrow B$$

un modèle de $\hat{A}$ -dgmodules de $A_{PL}(f)$. Alors, le noyau homotopique de φ est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule à $A_{PL}(X, Y)$.

Démonstration. Rappelons que par [8, Proposition 10.4 (ii), page 119], l'application

$$A_{PL}(f) : A_{PL}(X) \rightarrow A_{PL}(Y)$$

est surjective et donc, par la propriété 6 de la proposition 7.2,

$$A_{PL}(X, Y) = \ker A_{PL}(f) \xrightarrow{\simeq} \text{hoker } A_{PL}(f).$$

Comme $\varphi : A \rightarrow B$ est un modèle de $\hat{A}$ -dgmodule de $A_{PL}(f)$, nous avons un diagramme commutatif de $\hat{A}$ -dgmodules de la forme

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(X) & \twoheadrightarrow & A_{PL}(Y) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B, \end{array}$$

et en utilisant le lemme 1.14 sur les cônes algébriques nous avons que le noyau homotopique de φ est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule au noyau homotopique de $A_{PL}(f)$. $\square$

Finissons cette section avec un résultat qui nous montre que si nous avons deux carrés "faiblement équivalents" alors les noyaux homotopiques sont quasi-isomorphes entre eux. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Lemme 7.4. Soit $\Theta = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{pmatrix}$ une équivalence faible entre diagrammes commutatifs,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array} \xrightarrow[\simeq]{\Theta} \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Y \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' \\ Z & \xrightarrow{g'} & T. \end{array}$$

Alors, le diagramme ci-dessous commute et est tel que les flèches verticales sont des équivalences faibles

$$\begin{array}{ccc} \text{hoker}(\alpha) & \xrightarrow{s^{-1}g+f} & \text{hoker}(\beta) \\ s^{-1}\mu' + \mu \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow s^{-1}\nu' + \nu \\ \text{hoker}(\alpha') & \xrightarrow{s^{-1}g' + f'} & \text{hoker}(\beta') \end{array}$$

Démonstration. Une simple vérification montre que le diagramme commute et par le lemme 1.14 les applications verticales sont des quasi-isomorphismes. $\square$

7.3 Modèle du complémentaire

Soit $f : K \hookrightarrow W$ le plongement de K , un sous-polyèdre de dimension k , dans W une variété compacte à bord, connexe, orientable de dimension n . Notons ∂W le bord de W et posons $\partial K := K \cap \partial W$.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial K & \longrightarrow & \partial W \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{f} & W, \end{array} \quad (7.5)$$

auquel nous pouvons appliquer le foncteur A_{PL} :

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(W) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{PL}(\partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial K). \end{array} \quad (7.6)$$

Prenons un modèle d'ADGC de ce diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \partial A & \xrightarrow{\partial \varphi} & \partial B. \end{array} \quad (7.7)$$

Nous construirons à partir du carré commutatif (7.7) un modèle de $A_{PL}(W \setminus K)$.

7.3.1 Modèle de dgmodule du complémentaire

Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A \xleftarrow[\simeq]{\rho} \hat{A} \xrightarrow[\simeq]{\rho'} A_{PL}(W). \quad (7.8)$$

L'application ρ' induit une structure de $\hat{A}$ -dgmodule sur le diagramme (7.6) et l'application ρ induit une structure de $\hat{A}$ -dgmodule sur le diagramme (7.7). Du diagramme (7.7) nous déduisons une application de $\hat{A}$ -dgmodules entre les noyaux homotopiques de α et de β

$$\bar{\varphi} : \text{hoker } \alpha \rightarrow \text{hoker } \beta. \quad (7.9)$$

Théorème 7.5. *Dans le cadre des diagrammes (7.5) – (7.9). L'application*

$$s^{-n} \# \bar{\varphi} : s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha$$

qui est la suspension itérée du dual de l'application $\bar{\varphi}$, est une application de $\hat{A}$ -dgmodules telle que le cône algébrique

$$C(s^{-n} \# \bar{\varphi}) = s^{-n} \# \text{hoker } \alpha \oplus_{s^{-n} \# \bar{\varphi}} s s^{-n} \# \text{hoker } \beta$$

est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule à $A_{PL}(W \setminus K)$.

Pour prouver cette proposition nous commençons par prouver l'important résultat suivant :

Proposition 7.6. *Soit $A_{PL}(i) : A_{PL}(W, \partial W) \rightarrow A_{PL}(K, \partial K)$ l'application induite par l'inclusion de paires $(K, \partial K) \hookrightarrow (W, \partial W)$. Le cône algébrique de l'application*

$$s^{-n} \# A_{PL}(i) : s^{-n} \# A_{PL}(K, \partial K) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W)$$

est un modèle de $A_{PL}(W)$ -dgmodules de $A_{PL}(W \setminus K)$.

Démonstration. Dans la section 4.2 nous avons construit un foncteur

$$\widehat{A_{PL}} : \mathcal{K} \rightarrow ADGC; K \rightarrow A_{PL}(K_{\bullet})$$

où $\mathcal{K}$ est la catégorie des complexes simpliciaux ordonnés et $K_{\bullet}$ est l'ensemble simplicial associé naturellement au complexe ordonné K tel que les simplexes non dégénérés de $K_{\bullet}$ sont exactement les simplexes de K . Le foncteur $\widehat{A_{PL}}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $A_{PL}(|K|) \simeq \widehat{A_{PL}}(K)$ pour tout complexe simplicial ordonné.
2. *Propriété d'excision forte* : Soit (K, L) une paire de complexes simpliciaux ordonnés. Soit $K' \subset K$ un sous-complexe et $L' = K' \cap L$. Si $K' \cup L = K$ alors l'inclusion $i : (K', L') \hookrightarrow (K, L)$ induit un isomorphisme

$$\widehat{A_{PL}}(i) : \widehat{A_{PL}}(K, L) \rightarrow \widehat{A_{PL}}(K', L').$$

Nous avons besoin de la deuxième propriété de ce foncteur pour prouver notre résultat.

Comme dans la preuve de la proposition 4.3, rappelons que K est un sous-polyèdre du polyèdre W . Remplaçons ces polyèdres par leur seconde subdivision barycentrique. Prenons alors T l'étoile de K dans W qui est un voisinage régulier (voir [19, chapitres 1 et 2]) et donc entre autres une sous variété compact à bord de codimension 0 dans W qui se retracts par déformations sur K . Il est clair que $\overline{W \setminus T} \simeq W \setminus K$. Posons

$$\partial_+ T = \partial T \cap \partial W, \quad \partial_- T = \text{adh}(\partial T \cap (W \setminus \partial W)) \text{ et } \partial_0 T = \partial_+ T \cap \partial_- T,$$

qui donne une décomposition du bord de T , $\partial T = \partial_+ T \cup_{\partial_0 T} \partial_- T$ (voir figure 7.1).

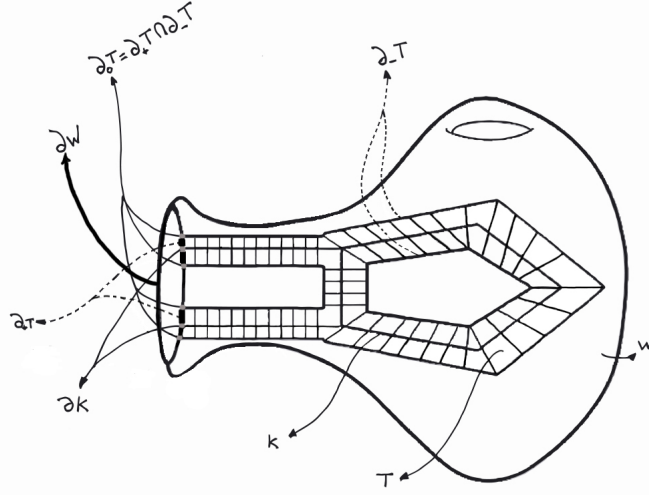


FIGURE 7.1 – Le polyèdre W et le voisinage régulier T

Fixons un ordre arbitraire sur les sommets du complexe simplicial W de sorte que W et les sous-polyèdres T , ∂T , $\partial_+ T$, $\partial_- T$, $\partial_0 T$, K et ∂K deviennent des complexes simpliciaux ordonnés. Nous pouvons leur appliquer le foncteur $\widehat{A}_{PL}$ qui est naturellement quasi-isomorphe à A_{PL} . De plus, $\widehat{A}_{PL}$ satisfait la propriété d'excision "forte" de la proposition 4.2. Pour démontrer la proposition 7.6, il suffit de montrer que $C(s^{-n} \# \widehat{A}_{PL}(i))$ est un modèle de $\widehat{A}_{PL}(W)$ -dgmodule de $\widehat{A}_{PL}(\overline{W \setminus T})$. Nous pouvons donc travailler avec $\widehat{A}_{PL}$ au lieu de A_{PL} . Pour alléger les notations, dans la suite de cette preuve nous noterons A_{PL} au lieu de $\widehat{A}_{PL}$.

L'inclusion de la paire

$$i : (T, \partial T) \hookrightarrow (W, \overline{W \setminus T} \cup \partial W)$$

induit, par la proposition 4.2, un isomorphisme

$$A_{PL}(i) : A_{PL}(W, \overline{W \setminus T} \cup \partial W) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(T, \partial T).$$

Comme $(W, \partial W)$ est à dualité de Poincaré en dimension n , il existe une orientation

$$\epsilon_W : A_{PL}(W, \partial W) \rightarrow s^{-n}\mathbb{Q},$$

c'est-à-dire une application de complexes de cochaînes qui induit un isomorphisme en cohomologie en degré n . Grâce à ce morphisme, nous pouvons définir une application de $A_{PL}(W)$ -dgmodules

$$\begin{aligned} \Phi_W : A_{PL}(W) &\longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W) \\ \alpha &\longmapsto (\Phi_W(\alpha) : \beta \mapsto \epsilon_W(\alpha\beta)), \end{aligned}$$

qui, par dualité de Poincaré de la paire $(W, \partial W)$, est un quasi-isomorphisme. La flèche composée

$$\epsilon_T : A_{PL}(T, \partial T) \cong A_{PL}(W, \overline{W \setminus T} \cup \partial W) \xrightarrow{A_{PL}(incl)} A_{PL}(W, \partial W) \xrightarrow{\epsilon_W} s^n \mathbb{Q}$$

induit un isomorphisme en cohomologie en degré n . Définissons

$$\begin{aligned} \Phi_T : A_{PL}(T) &\longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(T, \partial T) \\ \alpha &\longmapsto (\Phi_T(\alpha) : \beta \mapsto \epsilon_T(\alpha\beta)) \end{aligned}$$

qui, par dualité de Poincaré de la paire $(T, \partial T)$, est un quasi-isomorphisme de $A_{PL}(W)$ -dgmodules. Prouvons le résultat suivant :

Assertion : Les $A_{PL}(\partial T)$ -dgmodules $A_{PL}(\partial T, \partial_- T)$ et $s^{-n+1} \# A_{PL}(\partial_+ T)$ sont quasi-isomorphes.

En effet, notons

$$j : \partial_+ T \hookrightarrow T, \quad j_0 : (\partial_+ T, \partial_0 T) \hookrightarrow (\partial T, \partial_- T) \text{ et } i' : \partial_- T \hookrightarrow \partial T.$$

Par la propriété d'excision forte de la proposition 4.2, j_0 induit un isomorphisme

$$A_{PL}(j_0) : A_{PL}(\partial T, \partial_- T) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(\partial_+ T, \partial_0 T).$$

Comme $H^{n-1}(\partial T) \cong \mathbb{Q}$, nous pouvons prendre une application

$$\epsilon_{\partial T} : A_{PL}(\partial T) \xrightarrow{\sim} s^{-n+1}\mathbb{Q}$$

qui induise un isomorphisme en cohomologie en degré $n-1$. Définissons

$$\Phi_{\partial T} : A_{PL}(\partial T) \xrightarrow{\cong} s^{-n+1} \# A_{PL}(\partial T), \quad \alpha \mapsto (\Phi_{\partial T}(\alpha) : \beta \mapsto \epsilon_{\partial T}(\alpha\beta)),$$

qui est un isomorphisme par dualité de Poincaré de la variété fermée ∂T . Définissons l'application composée

$$\epsilon_{\partial_+ T} : A_{PL}(\partial_+ T, \partial_0 T) \xrightarrow{A_{PL}(j_0)^{-1}} A_{PL}(\partial T, \partial_- T) \xrightarrow{\iota} A_{PL}(\partial T) \xrightarrow{\epsilon_{\partial T}} s^{-n+1}\mathbb{Q}$$

qui induit aussi un isomorphisme en cohomologie en degré $n-1$ et nous permet de définir

$$\Phi_{\partial_+ T} : A_{PL}(\partial_+ T, \partial_0 T) \xrightarrow{\sim} s^{-n} \# A_{PL}(\partial_+ T), \quad \psi \mapsto (\Phi_{\partial_+ T}(\psi) : \tau \mapsto \epsilon_{\partial_+ T}(\psi\tau))$$

qui, par dualité de Poincaré de la paire $(\partial_+ T, \partial_0 T)$, est un quasi-isomorphisme. La composée

$$\Phi_{DL} := \Phi_{\partial_+ T} \circ A_{PL}(j_0) : A_{PL}(\partial T, \partial_- T) = A_{PL}(\partial T, \partial_- T) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(\partial_+ T)$$

est le quasi-isomorphisme recherché.

Nous en déduisons le fait suivant :

Assertion : Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Phi}_T : & A_{PL}(T, \partial_- T) & \longrightarrow & s^{-n} \# A_{PL}(T, \partial_+ T) \\ & \alpha & \longmapsto & (\tilde{\Phi}_T(\alpha) : \beta \mapsto \epsilon_T(\alpha\beta)) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme de $A_{PL}(W)$ -dgmodules.

Pour prouver ceci, nous allons utiliser un argument de longue suite exacte en cohomologie et le lemme des 5. Nous utiliserons les applications

$$\Phi_T : A_{PL}(T) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(T, \partial T)$$

et

$$\Phi_{DL} := \Phi_{\partial_+ T} \circ A_{PL}(j_0) : A_{PL}(\partial T, \partial_- T) = A_{PL}(\partial T, \partial_- T) \rightarrow s^{-n} \# A_{PL}(\partial_+ T),$$

qui, par dualité de Poincaré de la paire $(T, \partial T)$ et de la variété fermée ∂T , induisent des isomorphismes en cohomologie. Utilisons le lemme des 5 pour montrer que $\tilde{\Phi}_T$ induit, elle aussi, un isomorphisme en cohomologie.

La suite de $A_{PL}(T)$ -dgmodules

$$0 \longrightarrow A_{PL}(T, \partial T) \longrightarrow A_{PL}(T, \partial_- T) \longrightarrow A_{PL}(\partial T, \partial_- T) \longrightarrow 0$$

est exacte et donne lieu à la longue suite exacte en cohomologie

$$\cdots H^k(T, \partial T) \longrightarrow H^k(T, \partial_- T) \longrightarrow H^k(\partial T, \partial_- T) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(T, \partial T) \cdots$$

De même, la suite

$$0 \longrightarrow A_{PL}(T, \partial_+ T) \xrightarrow{k} A_{PL}(T) \longrightarrow A_{PL}(\partial_+ T) \longrightarrow 0$$

est exacte. Nous pouvons dualiser et suspendre n fois et nous avons la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(\partial_+ T) \longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(T) \longrightarrow s^{-n} \# A_{PL}(T, \partial_+ T) \longrightarrow 0,$$

qui induit la longue suite exacte en homologie

$$\cdots H_{n-k}(T) \longrightarrow H_{n-k}(T, \partial_+ T) \xrightarrow{\delta} H_{n-k+1}(\partial T, \partial_+ T) \longrightarrow H_{n-k+1}(T) \cdots$$

Nous avons alors le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots H^k(T, \partial T) & \longrightarrow & H^k(T, \partial_- T) & \longrightarrow & H^k(\partial T, \partial_- T) & \longrightarrow & H^{k+1}(T, \partial T) \cdots \\
 \downarrow \Phi^* & & \downarrow \tilde{\Phi}_T^* & & \downarrow \Phi_{DL}^* & & \downarrow \Phi^* \\
 \cdots H_{n-k}(T) & \longrightarrow & H_{n-k}(T, \partial_+ T) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-k+1}(\partial_+ T) & \longrightarrow & H_{n-k+1}(T) \cdots
 \end{array}$$

Comme Φ_T^* et Φ_{DL}^* sont des isomorphismes, le lemme des 5 implique que $\tilde{\Phi}_T^*$ est un isomorphisme. Ce qui finit la preuve de cette assertion.

Continuons la preuve de la proposition. L'inclusion

$$(K, \partial K) \hookrightarrow (T, \partial_+ T)$$

est une équivalence d'homotopie et induit une équivalence faible de $A_{PL}(W)$ -dgmodules

$$A_{PL}(T, \partial_+ T) \rightarrow A_{PL}(K, \partial K).$$

Par la propriété d'excision forte de la proposition 4.2, l'inclusion

$$(T, \partial_- T) \hookrightarrow (W, \overline{W \setminus T})$$

induit un isomorphisme

$$A_{PL}(W, \overline{W \setminus T}) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(T, \partial_- T).$$

Le diagramme ci-dessous commute,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{PL}(W, \overline{W \setminus T}) & \longrightarrow & A_{PL}(W) & \longrightarrow & A_{PL}(\overline{W \setminus T}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \text{exc} & & \downarrow \simeq \Phi_W & & \\
 & & A_{PL}(T, \partial_- T) & & & & \\
 & & \downarrow \simeq \tilde{\Phi}_T & & \downarrow & & \\
 s^{-n} \# A_{PL}(T, \partial_+ T) & \longrightarrow & s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W) & & & & \\
 \uparrow \simeq & & \parallel & & & & \\
 s^{-n} \# A_{PL}(K, \partial K) & \xrightarrow{s^{-n} \# A_{PL}(\text{incl})} & s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W) & & & &
 \end{array}$$

En utilisant les lemmes 1.16 et 1.14 sur les cônes algébriques, nous avons que le cône algébrique

$$s^{-n} \# A_{PL}(W, \partial W) \oplus_{s^{-n} \# A_{PL}(i)} s s^{-n} \# A_{PL}(K, \partial K)$$

est faiblement équivalent en tant que $A_{PL}(W)$ -dgmodules à $A_{PL}(\overline{W \setminus T})$. Ceci achève la démonstration de la proposition 7.6. $\square$

Nous pouvons à présent prouver le théorème 7.5.

Démonstration du théorème 7.5. Rappelons que

$$\mathbb{D}' = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \partial A & \xrightarrow{\partial \varphi} & \partial B \end{array}$$

est un modèle d'ADGC du diagramme

$$\mathbb{D} = \begin{array}{ccc} A_{PL}(W) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{PL}(\partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial K). \end{array}$$

Ce qui veut dire qu'il existe un zig-zag de diagrammes d'ADGC

$$\mathbb{D} \xleftarrow{\simeq} \hat{\mathbb{D}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{D}'.$$

Rappelons que le zig-zag de morphismes d'ADGC

$$A_{PL}(W) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{A} \xrightarrow[\rho]{\simeq} A$$

induit une structure de $\hat{A}$ -dgmodules sur les diagrammes $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$. Par le lemme 7.4 et la propriété 4 de la proposition 7.2 on peut construire le diagramme de $\hat{A}$ -dgmodules suivant, dans lequel les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \text{hoker } \alpha & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \text{hoker } \beta \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \bullet & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \bullet \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{hoker } (A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(\partial W)) & \longrightarrow & \text{hoker } (A_{PL}(K) \rightarrow A_{PL}(\partial K)) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ A_{PL}(W, \partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(K, \partial K). \end{array}$$

Donc

$$\bar{\varphi}: \text{hoker } \alpha \rightarrow \text{hoker } \beta$$

est un modèle de $\hat{A}$ -dgmodules de l'application

$$A_{PL}(W, \partial W) \rightarrow A_{PL}(K, \partial K).$$

Par conséquent, l'application

$$s^{-n} \# \bar{\varphi}: s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha$$

est un modèle de $\hat{A}$ -dgmodules de

$$s^{-n} \#_{A_{PL}}(K, \partial K) \rightarrow s^{-n} \#_{A_{PL}}(W, \partial W)$$

et donc $C(s^{-n} \# \bar{\varphi})$ est faiblement équivalent en tant que $\hat{A}$ -dgmodule à

$$s^{-n} \#_{A_{PL}}(K, \partial K) \oplus_{s^{-n} \#_{A_{PL}}(incl)} s^{-n} \#_{A_{PL}}(W, \partial W).$$

□

7.3.2 Un autre modèle de dgmodules

Nous voulons construire un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$. Pour cela commençons par remarquer ce qui suit.

Proposition 7.7. *Soit W une variété de dimension n , compacte, connexe, orientable à bord ∂W et soit $\alpha : A \rightarrow \partial A$ un modèle d'ADGC de l'inclusion $\partial W \rightarrow W$. Alors il existe un quasi-isomorphisme de A -dgmodules*

$$\theta_A : A \xrightarrow{\simeq} s^{-n} \# \text{hoker } \alpha.$$

Démonstration. Nous savons que $H^n(W, \partial W) \cong H^n(\text{hoker } \alpha) \cong \mathbb{Q}$. Choisissons une application de $\mathbb{Q}$ -dgmodules

$$\epsilon_0 : \text{hoker } (\alpha) \rightarrow s^{-n} \mathbb{Q}$$

telle que $H^n(\epsilon_0)$ est un isomorphisme. Alors $[\epsilon_0] \in H^0(s^{-n} \# \text{hoker } \alpha)$.

Regardons l'unique application de A -dgmodules définie par

$$\epsilon : A \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha ; 1 \mapsto \epsilon_0.$$

La dualité de Poincaré de la paire $(W, \partial W)$ implique que ϵ est un quasi-isomorphisme. □

Comme $\alpha : A \rightarrow \partial A$ est un modèle de $\partial W \hookrightarrow W$, par dualité de Poincaré de la paire $(W, \partial W)$ nous avons un quasi-isomorphisme de A -dgmodules

$$\theta_A : A \xrightarrow{\simeq} s^{-n} \# \text{hoker } \alpha.$$

Une conséquence directe du théorème 7.5 est le théorème suivant :

Théorème 7.8. *Soit $f : K \hookrightarrow W$ le plongement d'un sous-polyèdre K de dimension k dans W une variété compacte à bord, connexe, orientable de dimension n . Notons ∂W le bord de W et posons $\partial K := K \cap \partial W$. Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(W) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{PL}(\partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial K) \end{array} \quad (7.6)$$

et prenons un modèle d'ADGC de ce diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \partial A & \xrightarrow{\partial \varphi} & \partial B. \end{array} \quad (7.7)$$

Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A \xleftarrow[\simeq]{\rho} \hat{A} \xrightarrow[\simeq]{\rho'} A_{PL}(W). \quad (7.8)$$

L'application ρ' induit une structure de $\hat{A}$ -dgmodule sur le diagramme (7.6) et l'application ρ induit une structure de $\hat{A}$ -dgmodule sur le diagramme (7.7). Du diagramme (7.7) nous déduisons une application de $\hat{A}$ -dgmodules entre les noyaux homotopiques de α et de β

$$\bar{\varphi} : \text{hoker } \alpha \rightarrow \text{hoker } \beta. \quad (7.9)$$

Si $\varphi^! : Q \rightarrow A$ est un morphisme de A -dgmodules faiblement équivalent à

$$s^{-n} \# \bar{\varphi} : s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha.$$

Alors $C(\varphi^!)$ est un modèle de $\hat{A}$ -dgmodules de $A_{PL}(W \setminus K)$.

L'existence de l'application $\varphi^!$ est garantie si nous prenons Q un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant :

Proposition 7.9. *Dans le même cadre que l'énoncé du théorème 7.8. Soit Q un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant faiblement équivalent à $s^{-n} \# \text{hoker } \beta$. Alors il existe un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules*

$$\varphi^! : Q \rightarrow A$$

tel que $C(\varphi^!)$ est un modèle de $\hat{A}$ -dgmodules de $A_{PL}(W \setminus K)$.

Démonstration. Rappelons que par dualité de Poincaré de la paire $(W, \partial W)$, nous pouvons construire un quasi-isomorphisme $\theta_A : A \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha$. Comme Q est cofibrant il existe un quasi-isomorphisme de $\hat{A}$ -dgmodules

$$Q \xrightarrow{\sim} s^{-n} \# \text{hoker } \beta.$$

Le lemme de relèvement ([8, Proposition 14.6]) nous donne une application de $\hat{A}$ -dgmodules

$$\varphi^! : Q \rightarrow A,$$

telle que le diagramme ci-dessous commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \\ & & & \nearrow & \downarrow \theta_A \\ & & \varphi^! & \sim & \downarrow \simeq \\ Q & \xrightarrow{\sim} & s^{-n} \# (\text{hoker } \beta) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & s^{-n} \# (\text{hoker } \alpha). \end{array}$$

Le résultat est une conséquence du lemme sur l'équivalence des cônes algébriques quand on a un diagramme commutatif à homotopie près (lemme 1.15). $\square$

Proposition 7.10. *Dans le même cadre que l'énoncé du théorème 7.8, supposons $\alpha: A \twoheadrightarrow \partial A$ et $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ surjectives. Alors, le morphisme de A -dgmodules*

$$\tilde{\varphi}: s^{-n} \# \ker \beta \rightarrow s^{-n} \# \ker \alpha,$$

est faiblement équivalent au morphisme de A -dgmodules

$$\bar{\varphi}: s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha.$$

Démonstration. Les applications α et β étant surjectives, le point 5 de la proposition 7.2 nous dit que nous avons des quasi-isomorphismes

$$\Phi_\alpha: \ker \alpha \xrightarrow{\simeq} \text{hoker } \alpha; a \mapsto (0, a)$$

et

$$\Phi_\beta: \ker \beta \xrightarrow{\simeq} \text{hoker } \beta; b \mapsto (0, b).$$

Une simple vérification montre que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} \ker \alpha & \xrightarrow[\simeq]{\Phi_\alpha} & \text{hoker } \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker \beta & \xrightarrow[\Phi_\beta]{\simeq} & \text{hoker } \beta. \end{array}$$

La suspension itérée du dual de ce diagramme commute aussi, ce qui finit la preuve du résultat. $\square$

Ceci veut dire que dans les résultats que nous énoncerons dans la suite (théorèmes 7.19 – 7.23), si nous supposons α et β surjectives, nous pouvons remplacer partout le noyau homotopique par le "vrai" noyau de l'application.

7.4 Modèle d'ADGC du complémentaire

7.4.1 Troncature d'un dgmodule

Soit A une ADGC connexe, c'est-à-dire telle que $A^0 = \mathbb{Q}$.

Définition 7.11. *Soit R un A -dgmodule gradué positivement. Une troncature en degré n de R est la donnée d'un A -dgmodule $\tau^n R$ et d'un morphisme $\pi: R \rightarrow \tau^n R$ de A -dgmodules vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. $(\tau^n R)^{>n} = 0$ et $(\tau^n R)^{<n} = R^{<n}$.
2. *Le morphisme π est une surjection de A -dgmodules telle que $H^i(\pi)$ est un isomorphisme pour $0 \leq i \leq n$.*

Exemple 7.12. Soit R un A -dgmodule gradué positivement. Notons $S \subset R^n$ un supplémentaire des cocycles en degré n , alors, comme A est connexe, $S \oplus R^{>n}$ est un idéal différentiel et

$$\pi: R \rightarrow \tau^n R := R/(S \oplus R^{>n}),$$

où π est la projection évidente, est une troncature de R .

De la définition nous déduisons directement le résultat suivant :

Proposition 7.13. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H^{>n}(R) = 0$. Alors, pour toute troncature en degré n $(\tau^n R, \pi)$, l'application

$$\pi: R \xrightarrow{\sim} \tau^n R$$

est un quasi-isomorphisme de A -dgmodules.

La troncature n'est pas une construction fonctorielle, nous avons néanmoins le résultat ci-dessous :

Lemme 7.14. Soit $f: M \rightarrow N$ une application de A -dgmodules et soit $n \in \mathbb{N}$. Pour toute troncature, $\pi_N: N \rightarrow \tau^n N$, en degré n de N , nous avons une factorisation de f via n'importe quelle troncature en degré $n+1$ de M . Plus précisément, pour toute troncature $\pi_M: M \rightarrow \tau^{n+1} M$, il existe une application $\bar{f}: \tau^{n+1} M \rightarrow \tau^n N$ qui fait commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & N \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ \tau^{n+1} M & \xrightarrow{\quad \bar{f} \quad} & \tau^n N. \quad - \end{array}$$

Démonstration. Nous regardons la composée

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi_N} \tau^n N$$

comme $(\tau^n N)^{>n} = 0$, nous avons que cette application peut se factoriser via toute troncature $(\tau^{n+1} M, \pi_M)$

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi_N} & \tau^n N \\ & \searrow \pi_M & & \nearrow \bar{f} & \\ & & \tau^{n+1} M. & & \end{array}$$

□

Définition 7.15. Soit $f: M \rightarrow N$ une application de A -dgmodules et soit $n \in \mathbb{N}$, nous appellerons application induite entre des troncatures toute application $\bar{f}: \tau^{n+1} M \rightarrow \tau^n N$ entre deux troncatures quelconques de M et de N ,

qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ \tau^{n+1}M & \xrightarrow{\bar{f}} & \tau^n N. \end{array}$$

7.4.2 Troncature d'une ADGC

Définition 7.16. Soit A une ADGC connexe. Une troncature d'ADGC en degré n de A est une troncature $(\tau^n A, \pi)$ telle que $\tau^n A$ est une ADGC et π est un morphisme d'ADGC.

Remarquons que dans la construction de l'exemple 7.12 si nous partons d'une ADGC, nous trouvons que la troncature décrite est une ADGC et la projection évidente est un morphisme d'ADGC.

Commençons par donner un résultat qui nous sera utile dans la suite :

Lemme 7.17. Soit $\tau^n A$ une troncature de A en degré n . Soit $f : B \rightarrow \tau^n A$ une application d'ADGC telle que $H^i(f)$ est un isomorphisme si $0 \leq i \leq n$. Nous pouvons construire un modèle relatif de f

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \tau^n A \\ & \searrow & \nearrow m \\ & (B \otimes \Lambda V, D) & \end{array}$$

tel que :

- i. $V^{<n} = 0$
- ii. $m(V) = 0$

Démonstration. Nous allons construire V , D et m inductivement.

Posons $V^{<n} = 0$ et $m_n := f : B \rightarrow \tau^n A$ qui induit un isomorphisme en cohomologie jusqu'en degré n .

Soit $\{z_\alpha\}$ une famille de cocycles dans B^{n+1} telle que $\{[z_\alpha]\}$ est une base de $H^{n+1}(B)$. Définissons V^n comme l'espace vectoriel engendré par une famille $\{v_\alpha\}$ qui est en correspondance bijective avec les $\{z_\alpha\}$. Etendons la différentielle sur B en une dérivation, D , sur $B \otimes \Lambda(v_\alpha)$, en posant $Dv_\alpha = z_\alpha$, et définissons

$$m_{n+1} : (B \otimes \Lambda(v_\alpha), D) \rightarrow \tau^n A$$

en posant $m_{n+1}(v_\alpha) = 0$. Comme $H^{n+1}(B \otimes \Lambda(v_\alpha), D) = 0 = H^{n+1}(\tau^n A)$, l'application m_{n+1} induit un isomorphisme en cohomologie jusqu'en degré $n+1$.

Nous pouvons continuer le processus d'induction de façon suivante. Supposons avoir construit $V^{<k}$ pour $k \geq n+1$. Soient z_α des cocycles dans $B \otimes \Lambda(V^{<k})$ tels que $[z_\alpha]$ est une base de $H^{k+1}(B \otimes \Lambda(V^{<k}))$. Soit V^k un espace vectoriel ayant comme base une famille $\{v_\alpha\}$ qui soit en correspondance bijective avec

la famille $\{z_\alpha\}$. Etendons la différentielle sur $B \otimes \Lambda V^{<k}$ en une dérivation D sur $B \otimes \Lambda(V^{<k+1})$ en posant $Dv_\alpha = z_\alpha$. et définissons

$$m_k : B \otimes \Lambda(V)^{\leq k} \rightarrow \tau^n A,$$

en posant $m_k = m_{k-1}$ sur $B \otimes \Lambda(V)^{<k}$ et $m_k(v_\alpha) = 0$.

A la fin du processus nous avons donc construit V tel que $V^{<n} = 0$ et une application $m : (B \otimes \Lambda V, D) \rightarrow \tau^n A$ qui est un quasi-isomorphisme tel que $m|_B = f$ et $m(V) = 0$ $\square$

Le résultat suivant montre que deux troncatures en même degré d'une même ADGC sont toujours faiblement équivalentes.

Proposition 7.18. *Soit A une ADGC connexe, $n \in \mathbb{N}$ et soient $(\tau^n(A), \pi_A)$ et $(\tilde{\tau}^n A, \tilde{\pi})$ deux troncatures de A en degré n . Alors $\tau^n(A)$ et $\tilde{\tau}^n A$ sont des ADGC faiblement équivalentes.*

Démonstration. Par le lemme 7.17, nous pouvons construire un modèle relatif de l'application π ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & \tau^n A \\ & \searrow & \nearrow m \\ & (A \otimes \Lambda V, D) & \end{array} \quad \simeq$$

tel que m vérifie les conditions suivantes :

- i. $V^{<n} = 0$,
- ii. $m(V) = 0$.

Par hypothèse, $\tilde{\pi} : A \rightarrow \tilde{\tau}^n A$ est une autre troncature en degré n de A . Nous pouvons définir une application d'algèbres

$$\tilde{m} : (A \otimes \Lambda V, D) \rightarrow \tilde{\tau}^n A$$

telle que $\tilde{m}|_A = \tilde{\pi}$ et $\tilde{m}(V) = 0$. L'application d'algèbres $\tilde{m}$ commute à la différentielle. En effet, comme $\tilde{m}|_A = \tilde{\pi}$, elle commute à la différentielle sur les éléments de A . Regardons sur les éléments de V . Comme $V^{<n} = 0$, $D(V) \subset (A \otimes \Lambda V)^{>n}$, et comme, par définition, $(\tilde{\tau}^n A)^{>n} = 0$ forcément $\tilde{m}(D(V)) = 0$. De même, $d(\tilde{m}(V)) \subset (\tilde{\tau}^n A)^{>n} = 0$ et donc

$$m(D(V)) = d(m(V)) = 0.$$

Donc $\tilde{m}$ commute à la différentielle et, par conséquent, est un morphisme d'ADGC. De plus, $\tilde{m}$ est un quasi-isomorphisme. En effet, l'application induite en cohomologie $H^*(\tilde{m})$ est une surjection entre cohomologies isomorphes, donc un isomorphisme.

Nous avons construit le zig-zag de quasi-isomorphismes ci-dessous :

$$\tau^n A \xleftarrow[\tilde{m}]{\simeq} (A \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow[\tilde{m}]{\simeq} \tilde{\tau}^n A.$$

Ce qui prouve le résultat. $\square$

7.4.3 Modèle d'ADGC du complémentaire

Soit $f : K \rightarrow W$ le plongement de K , un sous-polyèdre de dimension k dans W une variété compacte à bord, connexe, orientable de dimension n . Notons ∂W le bord de W et rappelons avoir posé $\partial K := K \cap \partial W$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial K & \hookrightarrow & \partial W \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{f} & W \end{array} \quad (7.5)$$

et un modèle d'ADGC de ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \partial A & \xrightarrow{\partial \varphi} & \partial B. \end{array} \quad (7.7)$$

Supposons A connexe, c'est-à-dire $A^0 = \mathbb{Q}$ et notons

$$\bar{\varphi} : \text{hoker } \alpha \rightarrow \text{hoker } \beta \quad (7.9)$$

l'application de A -dgm modules induite entre les noyaux homotopiques.

Sous certaines hypothèses sur la codimension de l'inclusion $f : K \hookrightarrow W$, nous pouvons obtenir un modèle d'ADGC de $W \setminus K$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 7.19. *Dans le cadre des diagrammes (7.5) – (7.9), rappelons que $\dim W = n$, $\dim K = k$ et supposons $n \geq 2k + 3$.*

Soit $\varphi^! : Q \rightarrow A$ un morphisme de A -dgm modules faiblement équivalent à

$$s^{-n} \# \bar{\varphi} : s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha,$$

avec Q tel que $Q^{<n-k} = 0$, et soit

$$\psi^! : \tau^{n+1} Q \rightarrow \tau^n A$$

un morphisme induit par $\varphi^!$ entre des troncatures de Q et A .

Alors le cône algébrique de A -dgm modules

$$C(\psi^!) = \tau^n A \oplus_{\psi^!} s\tau^{n+1} Q$$

muni de la structure semi-triviale est une ADGC et le morphisme d'ADGC

$$A \longrightarrow \tau^n A \longrightarrow \tau^n A \oplus_{\psi^!} s\tau^{n+1} Q$$

est un modèle d'ADGC de l'inclusion $l : W \setminus K \hookrightarrow W$.

Démonstration. Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que nous avons des quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A_{PL}(W) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{A} \xrightarrow[\rho]{\simeq} A. \quad (7.10)$$

Ce zig-zag munit A et $A_{PL}(W)$ de structures de $\hat{A}$ -dgmodules. Soit $\pi_A: A \rightarrow \tau^n A$ une troncature en degré n de A et soit $\pi_Q: Q \rightarrow \tau^{n+1} Q$ une troncature en degré $n+1$ de Q . Comme $\dim W = n$, $H^{>n}(A) = 0$ et $\pi: A \rightarrow \tau^n A$ est un quasi-isomorphisme de $\hat{A}$ -dgmodules. De plus, comme Q est faiblement équivalent à $(s^{-n} \#_{\text{hoker}} \beta)$, $H^{>n}(Q) \cong H^{>n}(s^{-n} \#_{\text{hoker}} \beta) \cong H_{<0}(K, \partial K) = 0$. Donc, $Q \rightarrow \tau^{n+1} Q$ est un quasi-isomorphisme de $\hat{A}$ -dgmodules et l'application $\psi^!: \tau^{n+1} Q \rightarrow \tau^n A$ est un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalent à $\varphi^!$ et donc, faiblement équivalent à $s^{-n} \# \bar{\varphi}$. Alors, par le théorème 7.8, le cône algébrique

$$C(\psi^!) = \tau^n A \oplus_{\psi^!} s\tau^{n+1} Q$$

est un $\hat{A}$ -dgmodule faiblement équivalent à $A_{PL}(W \setminus K)$. La condition $n \geq 2k+3$ et le fait que $Q^{<n-k} = 0$, permettent de conclure, grâce au lemme 1.18, que la structure semi-triviale munit le cône $C(\psi^!)$ d'une structure d'ADGC et que l'inclusion

$$\tau^n A \rightarrow \tau^n A \oplus_{\psi^!} s\tau^{n+1} Q$$

est un morphisme d'ADGC.

Prenons un modèle relatif minimal du morphisme $l^* \circ \rho'$,

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} & \xrightarrow[\simeq]{\rho'} & A_{PL}(W) & \xrightarrow{l^*} & A_{PL}(W \setminus K) \\ & \searrow & & \nearrow \lambda & \\ & & (\hat{A} \otimes \Lambda Z, D) & & \end{array}$$

Un argument de position générale montre que l'inclusion $l: W \setminus K \hookrightarrow W$ est $n - k - 1$ connexe. Par minimalité du modèle relatif, $V^{<n-k-1} = 0$. Comme $A_{PL}(W \setminus K)$ et $C(\psi^!)$ sont des $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalents et que $(\hat{A} \otimes \Lambda V, D)$ est un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant, il existe un quasi-isomorphisme de $\hat{A}$ -dgmodules

$$\theta: (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\simeq} C(\psi^!).$$

Comme $V^{<n-k-1} = 0$, l'hypothèse $n \geq 2k+3$ fait que $\theta(\Lambda^{\geq 2} V) \subseteq (C(\psi^!))^{>n}$. Une simple observation montre que $(C(\psi^!))^{>n} = (\tau^n A \oplus_{\psi^!} s\tau^{n+1} Q)^{>n} = 0$ et le lemme 1.20 permet, alors, de conclure que θ est un quasi-isomorphisme d'ADGC.

Pour construire un modèle de l'application

$$l^*: A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(W \setminus K)$$

nous devons travailler un peu plus. Premièrement prenons le zig-zag (7.10) tel que les quasi-isomorphismes soient surjectifs

$$A_{PL}(W) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{A} \xrightarrow[\rho]{\simeq} A.$$

et tel que

$$(\rho, \rho') : \hat{A} \rightarrow A \oplus A_{PL}(W)$$

est surjective. Le lemme 1.8 montre que c'est toujours possible. De même comme $\tau^{n+1}Q$ est un $\hat{A}$ -dgmodule faiblement équivalent à $s^{-n}\#_{\text{hoker } \beta}$, qui est lui faiblement équivalent à $A_{PL}(W, W \setminus K)$ nous pouvons prendre $\hat{Q}$ un $\hat{A}$ -dgmodule cofibrant tel que l'on ait un zigzag de quasi-isomorphismes de $\hat{A}$ -dgmodules

$$A_{PL}(W, W \setminus K) \xleftarrow[\sigma']{\simeq} \hat{Q} \xrightarrow[\sigma]{\simeq} \tau^{n+1}Q.$$

Comme $(\rho, \rho') : \hat{A} \twoheadrightarrow A \oplus A_{PL}(W)$ est une fibration acyclique, $(\pi_A \circ \rho, \rho')$ l'est aussi (où $\pi_A : A \rightarrow \tau^n A$ est l'application une troncature en degré n de A). Sachant que $\hat{Q}$ est cofibrant, il existe un relèvement $\hat{\varphi}' : \hat{Q} \rightarrow \hat{A}$ qui fait commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(W, W \setminus K) & \longrightarrow & A_{PL}(W) \\ \sigma' \uparrow \simeq & & \rho' \uparrow \\ \hat{Q} & \xrightarrow{\hat{\varphi}'} & \hat{A} \\ \sigma \downarrow \simeq & & \pi \rho \downarrow \\ \tau^{n+1}Q & \xrightarrow{\psi'} & \tau^n A. \end{array}$$

Regardons le diagramme commutatif suivant, où la flèche horizontale du dessus est une courte suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(W, W \setminus K) & \longrightarrow & A_{PL}(W) & \xrightarrow{l^*} & A_{PL}(W \setminus K) \\ \sigma' \uparrow \simeq & & \rho' \uparrow \simeq & & \uparrow l^* \rho' \oplus 0 \\ \hat{Q} & \xrightarrow{\varphi'} & \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}'} s\hat{Q} \\ \sigma \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \tau^{n+1}Q & \xrightarrow{\psi'} & \tau^n A & \longrightarrow & \tau^n A \oplus_{\psi'} s\tau^{n+1}Q. \end{array}$$

L'application $l^* \rho' \oplus 0$ fait commuter le diagramme et est un quasi-isomorphisme par les lemmes 1.16 et 1.14. De plus, elle est surjective car $l^* \rho'$ l'est. Alors, dans le diagramme ci-dessous $\hat{A} \twoheadrightarrow (\hat{A} \otimes \Lambda V, D)$ est une cofibration et $l^* \rho' \oplus 0$ est une fibration acyclique

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}'} s\hat{Q} \\ \downarrow & \nearrow \bar{\lambda} & \downarrow \simeq l^* \rho' \oplus 0 \\ (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & \xrightarrow[\lambda]{\simeq} & A_{PL}(W \setminus K). \end{array}$$

Il existe donc un relèvement de $\hat{A}$ -dgmmodules

$$\bar{\lambda}: (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \rightarrow \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}!} s\hat{Q}$$

faisant commuter les deux triangles du carré ci-dessus. Comme $\bar{\lambda}$ fait commuter le triangle inférieur, $\bar{\lambda}$ est un quasi-isomorphisme. En utilisant la commutativité du triangle supérieur, nous trouvons le diagramme commutatif ci-dessous,

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} & \xlongequal{\quad} & \hat{A} & \xrightarrow{\pi} & \tau^n A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}!} s\hat{Q} & \xrightarrow{\pi \oplus s\sigma} & \tau^n A \oplus_{\psi!} s\tau^{n+1} Q. \end{array}$$

Comme $V^{<n-m-1} = 0$ et que $(\tau^n A \oplus_{\psi!} s\tau^{n+1} Q)^{>n} = 0$, en utilisant l'hypothèse $n \geq 2k + 3$, le lemme 1.20 permet de conclure que $(\pi \oplus s\sigma) \circ \lambda'$ est un quasi-isomorphisme d'ADGC. L'application $\hat{A} \xrightarrow{\quad} (\hat{A} \otimes \Lambda V, D)$ étant un modèle de l^* , l'application $\tau^n A \rightarrow \tau^n A \oplus_{\psi!} s\tau^{n+1} Q$ l'est aussi. $\square$

Le théorème ne répond pas à la question de l'existence de l'application $\varphi^!: Q \rightarrow A$. Le résultat ci-dessous montre que, si nous prenons Q cofibrant, nous pouvons garantir l'existence d'une telle application.

Proposition 7.20. *Dans le cadre des diagrammes (7.5) – (7.9). Il existe Q un A -dgmmodule faiblement équivalent à $s^{-n} \# \text{hoker } \beta$, tel que $Q^{<k-n} = 0$ et tel qu'il existe une application de A -dgmmodules $\varphi^!: Q \rightarrow A$ qui est faiblement équivalente à l'application de A -dgmmodules $s^{-n} \# \bar{\varphi}: s^{-n} \# \text{hoker } \alpha \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \beta$.*

Démonstration. Prenons un A -dgmmodule Q semi-libre minimal faiblement équivalent à $s^{-n} \# \text{hoker } \beta$. Comme

$$H^{<n-k}(s^{-n} \# \text{hoker } \beta) \cong H_{>k}(K, \partial K) \cong \tilde{H}_{>k}(K/\partial K) = 0$$

et que Q est minimal, $Q^{<n-k} = 0$. Rappelons que par dualité de Poincaré de la paire $(W, \partial W)$ nous pouvons définir un quasi-isomorphisme

$$\theta_A: A \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha.$$

Comme Q est semi-libre, Q est un A -dgmmodule cofibrant, dès lors par le lemme de relèvement [8, Proposition 14.6] il existe une application de A -dgmmodules $\varphi^!: Q \rightarrow A$ qui fait commuter le diagramme ci-dessous à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\varphi^!} & A \\ \searrow \simeq & \nearrow \sim & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & s^{-n} \# (\text{hoker } \alpha). \end{array}$$

$\square$

Dans ce qui suit nous montrons que, sans hypothèses de codimension, un cône algébrique muni de la multiplication semi-triviale est un modèle d'ADGC du complémentaire jusqu'à un certain degré, c'est-à-dire un modèle d'une troncature de $A_{PL}(W \setminus K)$. Plus précisément nous avons le résultat suivant :

Proposition 7.21. *Dans le même cadre que le théorème 7.19 mais sans supposer que $n \geq 2k + 3$. Posons $N := 2(n - k) - 3$.*

Soit $\varphi^! : Q \rightarrow A$ un morphisme de A -dgmodules faiblement équivalent à $s^{-n} \# \bar{\varphi} : s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha$, avec Q tel que $Q^{<n-k} = 0$. Alors

1. *Toute troncature du cône algébrique $\tau^N C(\varphi^!)$ muni de la structure semi-triviale est une ADGC, et*
2. *L'application d'ADGC*

$$A \longrightarrow C(\varphi^!) \xrightarrow{\pi} \tau^N C(\varphi^!)$$

est un modèle de la composée

$$A_{PL}(W) \xrightarrow{l^*} A_{PL}(W \setminus K) \xrightarrow{\pi} \tau^N A_{PL}(W \setminus K).$$

Où $(\tau^N A_{PL}(W \setminus K), \pi)$ est une troncature en degré N de $A_{PL}(W \setminus K)$.

Démonstration. Prenons $\hat{A}$ une ADGC telle que nous avons un zig-zag de quasi-isomorphismes surjectifs d'ADGC

$$A_{PL}(W) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{A} \xrightarrow[\rho]{\simeq} A$$

tel que le morphisme $(\rho, \rho') : \hat{A} \twoheadrightarrow A \oplus A_{PL}(W)$ est surjectif. L'existence d'un tel zig-zag est garantie par le lemme 1.8.

Par la proposition 7.8, $C(\varphi^!)$ est un modèle de $\hat{A}$ -dgmodules de $A_{PL}(W \setminus K)$. Rappelons que $N = 2(n - k) - 3$ et, comme $Q^{<n-k} = 0$, par le lemme 1.19, le cône algébrique $C(\varphi^!)$ muni de la structure semi-triviale est tel que toute troncature $\tau^N C(\varphi^!)$ héritant de cette structure semi-triviale est une ADGC et tel que le morphisme canonique

$$A \longrightarrow C(\varphi^!) \longrightarrow \tau^N C(\varphi^!).$$

est un morphisme d'ADGC.

Comme dans la preuve du théorème précédent, prenons un modèle relatif minimal de l'application $l^* \circ \rho'$

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} & \xrightarrow{\rho'} & A_{PL}(W) & \xrightarrow{l^*} & A_{PL}(W \setminus K) \\ & \searrow & & \nearrow \lambda & \\ & & (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & & \end{array}$$

Par minimalité, $V^{<n-k-1} = 0$. Comme $(\hat{A} \otimes \Lambda V, D)$ est cofibrant et que $A_{PL}(W \setminus K)$ et $C(\varphi^!)$ sont des $\hat{A}$ -dgmodules faiblement équivalents, il existe un quasi-isomorphisme de $\hat{A}$ -dgmodules

$$\theta : (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\sim} C(\varphi^!).$$

Comme $(\tau^N C(\varphi^!))^{>N} = 0$ et que $V^{<n-k-1} = 0$,

$$\theta(\Lambda^{\geq 2} V) \subseteq (\tau^N(C(\varphi^!)))^{\geq 2(n-k-1)} = (\tau^N(C(\varphi^!)))^{>N} = 0.$$

Par le lemme 1.20, la composée

$$\rho : (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\theta} C(\varphi^!) \xrightarrow{\pi} \tau^N C(\varphi^!) \quad (7.11)$$

est un morphisme d'ADGC.

Construisons un modèle relatif de l'application $\pi \circ \lambda$

$$\begin{array}{ccccc} (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & \xrightarrow{\lambda} & A_{PL}(W \setminus K) & \xrightarrow{\pi} & \tau^N A_{PL}(W \setminus K) \\ & \searrow & & \nearrow \scriptstyle \cong & \\ & & (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D) & & \end{array}$$

Comme $H^i(\pi \circ \lambda)$ est un isomorphisme pour $0 \leq i \leq N$, nous pouvons, grâce au lemme 7.17, prendre $m : (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D) \rightarrow \tau^N A_{PL}(W \setminus K)$ tel que

- i. $Z^{<N} = 0$,
- ii. $m(Z) = 0$.

Nous pouvons construire un quasi-isomorphisme entre $(\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D)$ et $\tau^N C(\varphi^!)$. En effet, partons de l'application définie en (7.11),

$$\rho : (\hat{A} \otimes \Lambda Z, D) \rightarrow \tau^N C(\varphi^!),$$

et définissons une application d'algèbres, comme dans la preuve de la proposition 7.18, c'est-à-dire une application

$$m' : (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D) \rightarrow \tau^N C(\varphi^!), \quad (7.12)$$

telle que

- i. $m'|_{\hat{A} \otimes \Lambda Z} = \rho$ et
- ii. $m'(Z) = 0$.

Par un raisonnement analogue à celui fait dans la preuve de la proposition 7.18, nous montrons que m' est un quasi-isomorphisme d'ADGC. Ce qui prouve que $\tau^N C(\varphi^!)$ est une ADGC faiblement équivalente à $\tau^N A_{PL}(W \setminus K)$.

Pour obtenir le modèle du morphisme

$$\pi \circ l^* : A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(\overline{W \setminus T}) \rightarrow \tau^N A_{PL}(W \setminus K),$$

nous passerons par une construction similaire à celle utilisée dans la preuve du théorème 7.19. Nous pouvons, comme dans la preuve du théorème 7.19,

construire $\hat{Q}$ un $\hat{A}$ -dgmodule et une application $\hat{\varphi}^! : \hat{Q} \rightarrow \hat{A}$, de façon à avoir un quasi-isomorphisme

$$\gamma : \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}^!} s\hat{Q} \xrightarrow{\simeq} A \oplus_{\varphi^!} sQ$$

et un morphisme de $\hat{A}$ -dgmodules, $\bar{\lambda} : (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \rightarrow \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}^!} s\hat{Q}$, qui fait commuter les deux triangles du carré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\quad} & \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}^!} s\hat{Q} \\ \downarrow & \nearrow \bar{\lambda} & \downarrow \simeq \\ (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & \xrightarrow[\lambda]{\simeq} & A_{PL}(\overline{W \setminus T}). \end{array}$$

Comme $V^{<n-m-1} = 0$ et $(\tau^N C(\varphi^!))^{>N} = 0$, le lemme 1.20 implique que l'application composée de $\hat{A}$ -dgmodules

$$(\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow[\simeq]{\bar{\lambda}} \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}^!} s\hat{Q} \xrightarrow[\simeq]{\gamma} A \oplus_{\varphi^!} sQ \xrightarrow{\pi} \tau^N C(\varphi^!)$$

est, en fait, une application d'ADGC. Rappelons avoir construit

$$m : (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} \tau^N A_{PL}(W \setminus K),$$

et construisons le morphisme d'algèbres

$$m'' : (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D) \rightarrow \tau^N C(\varphi^!),$$

défini par

- i. $m''|_{\hat{A} \otimes \Lambda Z} = \pi \circ \gamma \circ \bar{\lambda}$ et
- ii. $m''(Z) = 0$.

Comme pour l'application m' définie en (7.12), nous montrons que m'' est un quasi-isomorphisme d'ADGC. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A \oplus_{\varphi^!} sQ & \longrightarrow & \tau^N C(\varphi^!) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \gamma & & \uparrow \\ \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A} \oplus_{\hat{\varphi}^!} s\hat{Q} & & \simeq \\ \parallel & & \uparrow \simeq & & \uparrow \\ \hat{A} & \longrightarrow & (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & \longrightarrow & (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D). \end{array}$$

L'application

$$A \longrightarrow A \oplus_{\varphi^!} sQ \longrightarrow \tau^N C(\varphi^!)$$

est donc un modèle d'ADGC du morphisme

$$\hat{A} \longrightarrow (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D).$$

Le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{A} & \xrightarrow{\simeq} & A_{PL}(W) & \xrightarrow{l^*} & A_{PL}(\overline{W \setminus T}) & \xrightarrow{\pi} & \tau^N A_{PL}(W \setminus K) \\
 & \searrow & & \nearrow \lambda & & & \\
 & & (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) & & & & \\
 & & \searrow & & \nearrow m'' & & \\
 & & & & (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D) & &
 \end{array}$$

montre que

$$\hat{A} \longrightarrow (\hat{A} \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\hat{A} \otimes \Lambda V \otimes \Lambda Z, D)$$

est un modèle de $\pi \circ l^*$ et prouve le résultat. $\square$

Dans le théorème 7.19 donnant un modèle d'ADGC de $W \setminus K$, nous pouvons affaiblir l'hypothèse sur la codimension si la connexité de la paire (W, K) est suffisamment grande. Commençons par prouver le lemme suivant :

Lemme 7.22. *Soit $f: K \hookrightarrow W$ l'inclusion d'un sous-polyèdre dans une variété à bord, orientable, de dimension n . Posons $\partial K := K \cap \partial W$ et notons $\partial f: \partial K \rightarrow \partial W$ l'inclusion induite par f . Soit r un entier, si les applications induites en homologie $H_*(f; \mathbb{Q})$ et $H_*(\partial f; \mathbb{Q})$ sont r -connexes, c'est-à-dire si $H_i(f; \mathbb{Q})$ et $H_i(\partial f; \mathbb{Q})$ sont des isomorphismes pour $i < r$ et des surjections pour $i = r$, alors*

$$H^{n-i}(W \setminus K) = 0 \text{ si } i \leq r.$$

Démonstration. Nous allons associer à W une variété fermée de même dimension et en déduire le résultat en utilisant la dualité de Lefschetz.

Soit W' une copie de W et regardons le diagramme

$$W \longleftarrow \partial W \hookrightarrow W',$$

dont le pushout est $\tilde{W} := W \cup_{\partial W} W'$ est une variété fermée de même dimension que W . Regardons le pushout du diagramme

$$K \longleftarrow \partial K \hookrightarrow \partial W = \partial W' \hookrightarrow W',$$

et notons celui-ci $\tilde{K} := K \cup_{\partial K} W'$. Il est clair que $\tilde{W} \setminus \tilde{K}$ est homéomorphe à $W \setminus K$. Par dualité de Lefschetz,

$$H^{n-i}(W \setminus K) \cong H^i(\tilde{W} \setminus \tilde{K}) \underset{DL}{\cong} H_i(\tilde{W}, \tilde{K}).$$

L'application entre les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longleftarrow & \partial K & \hookrightarrow & W' \\
 f \downarrow & & \partial f \downarrow & & \downarrow = \\
 W & \longleftarrow & \partial W & \hookrightarrow & W'
 \end{array} \tag{7.13}$$

induit par la propriété universelle du psuhout une application $\tilde{K} \hookrightarrow \tilde{W}$. Comme $H_*(f; \mathbb{Q})$ et $H_*(\partial f; \mathbb{Q})$ sont r -connexes, en utilisant la longue suite exacte de Mayer-Vietoris et le lemme des 5 sur le diagramme (7.13) on trouve que

$$H_i(\tilde{K}) \rightarrow H_i(\tilde{W})$$

est un isomorphisme si $0 \leq i \leq r-1$ et un épimorphisme si $i = r$. D'où, nous en déduisons par un argument sur la longue suite exacte en homologie de la paire $\tilde{W}, \tilde{K}$ que $H_i(\tilde{W}, \tilde{K}) = 0$ pour $0 \leq i \leq r$. Ce qui prouve le résultat. $\square$

Théorème 7.23. *Sous les mêmes conditions que le théorème 7.19 et notons $\partial f: \partial K \rightarrow \partial W$ l'inclusion induite par f . Soit r un entier tel que les applications induites en homologie $H_i(f; \mathbb{Q})$ et $H_i(\partial f; \mathbb{Q})$ soient r -connexes, c'est-à-dire si $H_i(f; \mathbb{Q})$ et $H_i(\partial f; \mathbb{Q})$ sont des isomorphismes pour $i < r$ et des surjections pour $i = r$. Soit $\varphi^!: Q \rightarrow A$ un morphisme de A -dgmodules faiblement équivalent à*

$$s^{-n} \# \bar{\varphi}: s^{-n} \# \text{hoker } \beta \rightarrow s^{-n} \# \text{hoker } \alpha,$$

avec Q tel que $Q^{<n-k} = 0$. Si

$$r \geq 2k - n + 2$$

alors, toute troncature $\tau^{n-r-1}(C(\varphi^!))$ du cône algébrique $C(\varphi^!)$ muni de la structure semi-triviale est une ADGC, et l'application

$$A \longrightarrow \tau^{n-r-1}(C(\varphi^!))$$

est un morphisme d'ADGC, modèle de l'inclusion

$$l: W \setminus K \hookrightarrow W.$$

Démonstration. Comme $H_*(f; \mathbb{Q})$ et $H_*(\partial f; \mathbb{Q})$ sont r -connexes, par le lemme 7.22, nous avons

$$H^{\geq n-r}(C(\varphi^!)) \cong H^{\geq n-r}(W \setminus K) = 0.$$

Alors $C(\varphi^!)$ est quasi-isomorphe, en tant que A -dgmodule, à toute troncature $\tau^{n-r-1}(C(\varphi^!))$ et le résultat est une conséquence directe de la proposition 7.21. $\square$

Exemples : Nous développons ci-dessous deux exemples très simples qui permettent d'illustrer comment nous pouvons utiliser les résultats de ce chapitre pour calculer des modèles explicites d'espaces complémentaires dans une variété à bord. L'exemple, plus important et plus complexe, de l'espace des configurations dans une variété à bord est traité en détail dans le chapitre suivant.

1. Regardons le plongement d'un point dans l'intérieur du disque $D^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$,

$$\begin{array}{rcl} f: & * & \hookrightarrow D^n \\ & * & \mapsto \vec{0}. \end{array}$$

Comme $f(*) \cap \partial D^n = \emptyset$, pour construire un modèle algébrique du complémentaire nous devons nous intéresser au carré

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \partial D^n = S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & D^n, \end{array}$$

dont un modèle d'ADGC est donné par

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftarrow & \mathbb{Q} \cdot \{1, u_{n-1}\} \\ \beta \uparrow & & \uparrow \alpha \\ \mathbb{Q} & \xleftarrow{\varphi} & \mathbb{Q} \cdot \{1, u_{n-1}, \bar{u}_n\}, \end{array}$$

où α et β sont les surjections évidentes. Comme α et β sont surjectives, nous avons que $\ker \alpha \simeq \ker \beta$ et que $\ker \beta \simeq \ker \alpha$. Nous voyons que $\ker \beta = \mathbb{Q}$, $\ker \alpha = \mathbb{Q} \cdot \bar{u}$ et donc, pour des raisons de degré,

$$\bar{\varphi}: \ker \alpha \rightarrow \ker \beta$$

est l'application nulle. Nous voyons facilement que l'application nulle $0: s^{-n}\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ est un modèle de $s^{-n}\# \bar{\varphi}$. Et donc, comme les conditions du théorème 7.19 sont remplies, l'ADGC

$$\mathbb{Q} \oplus ss^{-n}\mathbb{Q} \cong H^*(S^{n-1}; \mathbb{Q})$$

est un modèle d'ADGC de $D^n \setminus f(*) \simeq S^{n-1}$.

2. Regardons à présent le plongement du point dans *le bord* du disque D^n

$$\begin{array}{ccc} f: & * & \hookrightarrow D^n \\ & * & \mapsto (1, 0, \dots, 0). \end{array}$$

alors $f(*) \cap \partial D^n = *$. Intéressons nous au carré

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \partial D^n = S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & D^n, \end{array}$$

dont un modèle d'ADGC est donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longleftarrow & \mathbb{Q} \cdot \{1, u_{n-1}\} \\ \beta \uparrow \cong & & \uparrow \alpha \\ \mathbb{Q} & \xleftarrow{\varphi} & \mathbb{Q} \cdot \{1, u_{n-1}, \bar{u}_n\}. \end{array}$$

Comme $\ker \beta = 0$, un modèle d'ADGC de $D^n \setminus f(*) \simeq D^n$, est donné simplement par un modèle de $s^{-n}\# \ker \alpha = \mathbb{Q} \cong H^*(D^n)$.

CHAPITRE 8

Espaces des configurations dans une variété à bord

8.1 Introduction

Une fois qu'on a réussi à construire un modèle d'ADGC pour l'espace complémentaire de l'inclusion d'un sous-polyèdre dans une variété à bord, il est naturel d'utiliser ce modèle pour la construction d'un modèle pour l'espace des configurations dans de telles variétés.

Dans ce chapitre nous étudierons en détail l'espace $F(W, 2) = W \times W \setminus \Delta(W)$ où W est une variété à bord ∂W et $\Delta: W \hookrightarrow W \times W$ est le plongement de la diagonale dans $W \times W$. Comme W est une variété à bord, $W \times W$ est aussi une variété à bord. Notons $\partial(W \times W)$ celui-ci. Nous remarquerons que le plongement de la diagonale Δ est tel que $\text{Im } \Delta \cap \partial(W \times W) = \partial W \times \partial W$ et que $\Delta^{-1}(\partial W \times \partial W) = \partial W$, et en partant d'un modèle surjectif $\beta: B \rightarrow \partial B$ de l'inclusion $\partial W \hookrightarrow W$ nous construirons un modèle d'ADGC du carré

$$\begin{array}{ccc} \partial W & \xrightarrow{\quad} & \partial(W \times W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\quad \Delta \quad} & W \times W \end{array}$$

à partir duquel, en utilisant le théorème 7.5, nous trouvons un premier modèle algébrique de l'espace des configurations $F(W, 2)$.

Nous remarquerons ensuite qu'en partant de l'inclusion $f: K \hookrightarrow M$ d'un sous-polyèdre dans une variété *fermée*, nous pouvons construire une variété à bord. En effet, prenons T un voisinage régulier de K , l'espace complémentaire $W = \overline{M} \setminus T$ est une variété à bord $\partial W = \partial T$. Pour ce "type" de variété à bord, nous construirons un modèle de $F(W, 2)$ analogue à celui construit dans [22] pour les variétés fermées. Plus précisément, en partant d'un modèle de M à dualité de Poincaré, P , nous pouvons construire un modèle de W de la forme P/I où $I \subset P$ est un idéal différentiel. L'application $\Delta^!: s^{-n}P \rightarrow P \otimes P$ qui

est la multiplication par la classe diagonale $\Delta \in P \otimes P$, induit une application $\bar{\Delta}^! : s^{-n}P/I \rightarrow P/I \otimes P/I$ dont le cône algébrique

$$C(\bar{\Delta}^!) = P/I \otimes P/I \oplus_{\bar{\Delta}^!} ss^{-n}P/I$$

muni de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$.

8.2 Modèle d'ADGC de la diagonale de la paire $(W, \partial W)$

Soit W une variété compacte, connexe, orientable à bord ∂W , de dimension n et soit

$$\Delta : W \rightarrow W \times W ; x \mapsto (x, x)$$

le plongement de la diagonale dans $W \times W$. Remarquons que si W est une variété à bord ∂W , alors $W \times W$ est une variété à bord

$$\partial(W \times W) = W \times \partial W \cup_{\partial W \times \partial W} \partial W \times W$$

et notons $\partial\Delta$ l'application composée

$$\partial\Delta : \partial W \xrightarrow{\Delta|_{\partial W}} \partial W \times \partial W \xrightarrow{\quad} \partial(W \times W).$$

Nous pouvons observer que le plongement de la diagonale Δ est tel que $\text{Im } \Delta \cap \partial(W \times W) = \partial W \times \partial W$ et que $\Delta^{-1}(\partial W \times \partial W) = \partial W$. Pour calculer un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$ nous allons construire, à partir d'un modèle *surjectif* $\beta : B \twoheadrightarrow \partial B$ du plongement $i : \partial W \hookrightarrow W$, un modèle d'ADGC du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xleftarrow{\Delta} & W \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial(W \times W) & \xleftarrow{\partial\Delta} & \partial W. \end{array} \quad (8.1)$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Proposition 8.1. *Soit W une variété compacte, connexe, orientable à bord ∂W . Soit $\beta : B \twoheadrightarrow \partial B$ un modèle surjectif de $\partial W \hookrightarrow W$. Alors, un modèle de l'application*

$$\partial\Delta : \partial W \xrightarrow{\Delta|_{\partial W}} \partial W \times \partial W \xrightarrow{\quad} \partial(W \times W).$$

est donné par

$$\tilde{\mu} : \frac{B \otimes B}{(\ker \beta \otimes \ker \beta)} \xrightarrow{\beta \otimes \beta} \partial B \otimes \partial B \xrightarrow{\mu} \partial B$$

et le diagramme d'ADGC

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \frac{B \otimes B}{(\ker \beta \otimes \ker \beta)} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \partial B \end{array} \quad (8.2)$$

est un modèle du diagramme (8.1).

Le reste de la section est consacré à la preuve du résultat.

A partir de l'application $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ nous allons construire un modèle du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(\partial(W \times W)) & \xrightarrow{A_{PL}(\partial\Delta)} & A_{PL}(\partial W) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_{PL}(W \times W) & \xrightarrow{A_{PL}(\Delta)} & A_{PL}(W). \end{array} \quad (8.3)$$

Pour cela, remarquons que nous avons, en fait, un diagramme comme celui-ci

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(\partial W \times W) & \twoheadrightarrow & A_{PL}(\partial W \times \partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_{PL}(\partial(W \times W)) & \longrightarrow & A_{PL}(W \times \partial W) & & \\ \uparrow & & & & \\ A_{PL}(W \times W) & \longrightarrow & & & A_{PL}(W). \end{array} \quad (8.4)$$

Montrons que dans le diagramme ci-dessus, nous pouvons remplacer $A_{PL}(\partial(W \times W))$ par le pullback du diagramme

$$A_{PL}(\partial W \times W) \twoheadrightarrow A_{PL}(\partial W \times \partial W) \longleftarrow A_{PL}(W \times \partial W). \quad (8.5)$$

En effet,

$$\partial(W \times W) = W \times \partial W \cup_{\partial W \times \partial W} \partial W \times W,$$

autrement dit le bord de $W \times W$ est la somme amalgamée du diagramme ci-dessous

$$W \times \partial W \xleftarrow{i \times \text{id}} \partial W \times \partial W \xrightarrow{\text{id} \times i} \partial W \times W. \quad (8.6)$$

En appliquant le foncteur A_{PL} au diagramme (8.6) nous obtenons le diagramme (8.5). Le pullback homotopique de ce diagramme est naturellement $A_{PL}(\partial(W \times W))$. Comme les morphismes dans (8.5) sont des surjections le pullback homotopique est quasi-isomorphe au vrai pullback.

Soit P le pullback du diagramme (8.5). Nous avons, dès lors, un quasi-isomorphisme $P \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(\partial(W \times W))$. De plus, comme le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(W \times W) & \longrightarrow & A_{PL}(W \times \partial W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{PL}(\partial W \times W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W \times \partial W), \end{array}$$

par la propriété universelle du pullback il existe une unique application

$$v: A_{PL}(W \times W) \rightarrow P \quad (8.7)$$

qui fait commuter les diagrammes évidents. Alors, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{PL}(\partial W \times W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W \times \partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 P & \xrightarrow{\quad} & A_{PL}(W \times \partial W) & & \\
 \uparrow v & & & & \\
 A_{PL}(W \times W) & \longrightarrow & & \longrightarrow & A_{PL}(W)
 \end{array} \quad (8.8)$$

est un modèle de (8.4).

Rappelons que nous avons un quasi-isomorphisme canonique

$$A_{PL}(X) \otimes A_{PL}(Y) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X \times Y)$$

et regardons le diagramme ci-dessous où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(W) & \twoheadrightarrow & A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(\partial W) & \ll & A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(\partial W) \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 A_{PL}(\partial W \times W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W \times \partial W) & \longleftarrow & A_{PL}(W \times \partial W)
 \end{array} \quad (8.9)$$

Soit P' le pullback du diagramme

$$A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(W) \twoheadrightarrow A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(\partial W) \ll A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(\partial W). \quad (8.10)$$

Par la propriété universelle du pullback P nous avons une application $\rho: P' \rightarrow P$ qui fait commuter les diagrammes évidents. Comme dans le diagramme (8.9) les flèches horizontales sont des fibrations, P et P' sont des pullback homotopiques. Comme les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes $\rho: P' \xrightarrow{\simeq} P$ est un quasi-isomorphisme.

Par un argument utilisant la propriété universelle, similaire à celui utilisé pour prouver l'existence de l'application (8.7), nous trouvons une application

$$\nu: A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) \rightarrow P'. \quad (8.11)$$

Remarquons que les applications

$$A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) \xrightarrow{\nu} P' \xrightarrow{\rho} P$$

et

$$A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(W \times W) \xrightarrow{v} P$$

vérifient la propriété universelle (i.e. font commuter les diagrammes correspondants). Comme cette application est unique, le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc}
 A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) & \xrightarrow{\nu} & P' \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \rho \\
 A_{PL}(W \times W) & \xrightarrow{v} & P
 \end{array}$$

Ceci montre que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(\partial W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 P' & \xrightarrow{\quad pb \quad} & A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(\partial W) & & \\
 \uparrow & & & & \\
 A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) & \longrightarrow & & & A_{PL}(W)
 \end{array} \quad (8.12)$$

est un modèle du diagramme (8.8) et donc un modèle du diagramme (8.4).

Nous pouvons maintenant prouver le résultat suivant :

Lemme 8.2. *Soit W une variété compacte, connexe, orientable à bord ∂W . Soit $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ un modèle surjectif de $A_{PL}(W) \twoheadrightarrow A_{PL}(\partial W)$. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial B \otimes B & \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta} & \partial B \otimes \partial B & \xrightarrow{\mu} & \partial B \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 PB & \xrightarrow{\quad pb \quad} & B \otimes \partial B & & \beta \\
 \uparrow & & & & \\
 \alpha & & & & \\
 B \otimes B & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & B & &
 \end{array} \quad (8.13)$$

où PB est le pullback du carré à gauche, α est le morphisme donné par la propriété universelle et μ décrit les multiplications, est un modèle du diagramme (8.4)

Démonstration. Comme $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ est un modèle d'ADGC de l'application de $\partial W \hookrightarrow W$ nous avons un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \longleftarrow \hat{B} & \longrightarrow & A_{PL}(W) & \\
 \beta \downarrow & & \hat{\beta} \downarrow & & \downarrow \\
 \partial B & \longleftarrow \hat{\partial B} & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W) &
 \end{array} \quad (8.14)$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\hat{\beta}$ surjective. En effet, prenons une factorisation de $\hat{\beta}$ en une cofibration acyclique suivie d'une fibration

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{B} & \xrightarrow{\hat{\beta}} & \hat{\partial B} \\
 \searrow i & & \nearrow \bar{\beta} \\
 & \bar{B} &
 \end{array}$$

Si nous incluons notre factorisation dans le diagramme (8.14), nous avons des relèvements

$$\lambda: \bar{B} \rightarrow B$$

et

$$\lambda': \bar{B} \rightarrow A_{PL}(W)$$

qui font commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{\quad} & \hat{B} & \xrightarrow{\quad} & A_{PL}(W) \\ & \searrow \lambda & \downarrow i & \nearrow \lambda' & \\ & & \bar{B} & & \\ \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} & & \downarrow \\ \partial B & \xleftarrow{\quad} & \partial \hat{B} & \xrightarrow{\quad} & \partial B. \end{array} \quad (8.15)$$

Nous allons supposer dans la suite que $\hat{\beta}: \hat{B} \twoheadrightarrow \partial \hat{B}$ est surjective.

Montrons que

$$\begin{array}{ccccc} \partial \hat{B} \otimes \hat{B} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \hat{\beta}} & \partial \hat{B} \otimes \partial \hat{B} & \xrightarrow{\mu} & \partial \hat{B} \\ \uparrow & & \uparrow \hat{\beta} \otimes \text{id} & & \uparrow \hat{\beta} \\ \hat{P}B & \longrightarrow & \hat{B} \otimes \partial \hat{B} & & \\ \hat{\alpha} \uparrow & & & & \\ \hat{B} \otimes \hat{B} & \xrightarrow{\mu} & \hat{B} & & \end{array} \quad (8.16)$$

où $\hat{P}B$ est le pullback du carré à gauche, $\hat{\alpha}$ est le morphisme donné par la propriété universelle et μ décrit les multiplications, est un modèle du diagramme (8.12). Nous pouvons regarder le diagramme de quasi-isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} \hat{B} \otimes \hat{B} & \longrightarrow & \partial \hat{B} \otimes \partial \hat{B} & \longleftarrow & \hat{B} \otimes \partial \hat{B} \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(W) & \twoheadrightarrow & A_{PL}(\partial W) \otimes A_{PL}(\partial W) & \ll & A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(\partial W). \end{array} \quad (8.17)$$

Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la discussion sur le diagramme (8.9) nous avons un quasi-isomorphisme induit par la propriété universelle $\hat{\rho}: \hat{P}B \xrightarrow{\sim} P'$ qui fait commuter les diagrammes évidents. Nous vérifions facilement que les applications

$$\hat{B} \otimes \hat{B} \longrightarrow \hat{P}B \longrightarrow P'$$

et

$$\hat{B} \otimes \hat{B} \longrightarrow A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) \longrightarrow P'$$

vérifient la propriété universelle. Comme cette application est unique, le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} \hat{B} \otimes \hat{B} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \hat{P}B \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) & \xrightarrow{v} & P'. \end{array}$$

De plus, nous savons que $\mu: \hat{B} \otimes \hat{B} \rightarrow \hat{B}$ est un modèle de la multiplication $\mu: A_{PL}(W) \otimes A_{PL}(W) \rightarrow A_{PL}(W)$, ce qui finit de montrer que le diagramme (8.16) est un modèle du diagramme (8.12). Un raisonnement tout à fait analogue montre que (8.16) est un modèle de (8.13) ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

Soit $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ un modèle d'ADGC surjectif de l'application $\partial W \hookrightarrow W$. Nous pouvons calculer assez facilement le pullback du diagramme

$$B \otimes B \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta} \partial B \otimes \partial B \xleftarrow{\beta \otimes \text{id}} B \otimes \partial B.$$

En effet, notons PB le pullback, remarquons que la propriété universelle du pullback nous donne une application $\alpha: B \otimes B \rightarrow PB$. Ce qui peut se résumer via le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} B \otimes B & & & & \\ & \searrow \alpha & \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta} & & \\ & & PB & \longrightarrow & B \otimes \partial B \\ & \searrow \beta \otimes \text{id} & \downarrow & & \downarrow \\ & & \partial B \otimes B & \longrightarrow & \partial B \otimes \partial B. \end{array} \quad (8.18)$$

Lemme 8.3. *L'application $\alpha: B \otimes B \rightarrow PB$, définie dans le diagramme (8.18) par la propriété universelle du pullback, est surjective et $\ker \alpha = \ker \beta \otimes \ker \beta$. Nous avons donc un isomorphisme d'ADGC*

$$PB \cong B \otimes B / (\ker \beta \otimes \ker \beta).$$

Démonstration. En tant que $\mathbb{Q}$ -dgmodule

$$B \cong \ker \beta \oplus \partial B$$

et donc, en tant que $\mathbb{Q}$ -dgmodule

$$A \otimes A \cong (\partial B \otimes \partial B) \oplus (\partial B \otimes \ker \beta) \oplus (\ker \beta \otimes \partial B) \oplus \ker \beta \otimes \ker \beta.$$

Pour alléger les notations posons

$$\begin{array}{ll} X &= B \otimes B, & D &= \partial B \otimes \partial B, \\ Y_1 &= B \otimes \partial B, & Y_2 &= \partial B \otimes B, \\ C_1 &= \ker \beta \otimes \partial B, & C_2 &= \partial B \otimes \ker \beta, \\ K &= \ker \beta \otimes \ker \beta, & Z &= \partial(B \otimes B). \end{array}$$

Avec ces nouvelles notations $Y_1 = D \oplus C_1$, $Y_2 = D \oplus C_2$, $X = D \oplus (C_1 \oplus C_2) \oplus K$ et Z est le pullback du diagramme

$$D \oplus C_1 \xrightarrow{\text{id} \oplus 0} D \xleftarrow{\text{id} \oplus 0} D \oplus C_2.$$

Donc, en tant que $\mathbb{Q}$ -dgmodule, $Z \cong D \oplus (C_1 \oplus C_2)$.

L'application

$$\alpha: X = (D \oplus (C_1 \oplus C_2)) \oplus K \rightarrow Z = (D \oplus (C_1 \oplus C_2))$$

est l'identité sur $D \oplus (C_1 \oplus C_2)$ et l'application nulle sur K . Donc α est surjective et

$$\ker \alpha = K = \ker \beta \otimes \ker \beta$$

□

La proposition 8.1 est une conséquence directe des lemmes 8.2 et 8.3.

8.3 Modèle de dgmodule de $F(W, 2)$

Soit W une variété compacte, connexe, orientable à bord ∂W , de dimension n . Soit

$$\Delta: W \hookrightarrow W \times W; x \mapsto (x, x)$$

le plongement de la diagonale. L'espace des configurations de deux points dans W est l'espace complémentaire

$$F(W, 2) := (W \times W) \setminus \Delta(W) = \{(x, y) \in W \times W \mid x \neq y\}.$$

Remarquons pour commencer que si W est une variété à bord ∂W , alors $W \times W$ est une variété à bord

$$\partial(W \times W) = W \times \partial W \cup_{\partial W \times \partial W} \partial W \times W,$$

et notons $\partial\Delta$ l'application composée

$$\partial\Delta: \partial W \xrightarrow{\Delta|_{\partial W}} \partial W \times \partial W \hookrightarrow \partial(W \times W).$$

Nous pouvons observer que le plongement de la diagonale Δ est tel que $\text{Im } \Delta \cap \partial(W \times W) = \partial W \times \partial W$ et que $\Delta^{-1}(\partial W \times \partial W) = \partial W$. Soit $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ un modèle d'ADGC surjectif de l'application $\partial W \hookrightarrow W$. Dans la section précédente nous avons construit à partir de β un modèle d'ADGC du carré

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xleftarrow{\Delta} & W \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial(W \times W) & \xleftarrow{\partial\Delta} & \partial W. \end{array} \quad (8.19)$$

Nous allons utiliser celui-ci et les résultats du chapitre précédent pour donner un modèle de $F(W, 2)$. Soit $\hat{B}$ une ADGC telle que l'on ait deux quasi-isomorphismes

$$A_{PL}(W) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{B} \xrightarrow[\rho]{\simeq} B. \quad (8.20)$$

Les ADGC $B \otimes B$, $A_{PL}(W \times W)$ et $A_{PL}(F(W, 2))$ héritent d'une structure de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule. En effet, du zig-zag (8.20) nous obtenons le zig-zag

$$(B \otimes B, d) \xleftarrow{\simeq} \hat{B} \otimes \hat{B} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(W \times W) \longrightarrow A_{PL}(F(W, 2))$$

qui munit $(B \otimes B, d)$, $A_{PL}(W \times W)$ et $A_{PL}(F(W, 2))$ de structures de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodules. De plus, via la multiplication

$$\mu : \hat{B} \otimes \hat{B} \rightarrow \hat{B},$$

tout $\hat{B}$ -dgmodule hérite d'une structure de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule.

Grâce aux résultats de la section précédente nous pouvons trouver un modèle de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodules de $A_{PL}(F(W, 2))$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 8.4. *Soit W une variété compacte, connexe, orientable à bord ∂W , de dimension n . Considérons le diagramme (8.19) et supposons donné $\beta : B \twoheadrightarrow \partial B$ un modèle d'ADGC surjectif de $\partial W \hookrightarrow W$. Alors un modèle d'ADGC du diagramme (8.19) est donné par le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \frac{B \otimes B}{(\ker \beta \otimes \ker \beta)} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \partial B \end{array} \quad (8.21)$$

où $\tilde{\mu}$ est la composée

$$\tilde{\mu} : \frac{B \otimes B}{(\ker \beta \otimes \ker \beta)} \xrightarrow{\beta \otimes \beta} \partial B \otimes \partial B \xrightarrow{\mu} \partial B$$

et $\alpha : B \otimes B \rightarrow \frac{B \otimes B}{\ker \beta \otimes \ker \beta}$ est la projection évidente.

Notons

$$\bar{\mu} : \ker \alpha = \ker \beta \otimes \ker \beta \rightarrow \ker \beta ; a \otimes b \mapsto a \cdot b$$

l'application induite entre les noyaux de α et β . Soit $\hat{B}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A_{PL}(W) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{B} \xrightarrow[\rho]{\simeq} B.$$

Les ADGC B , $B \otimes B$, $A_{PL}(W \times W)$ et $A_{PL}(F(W, 2))$ héritent d'une structure de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule.

La suspension itérée de l'application duale de $\bar{\mu}$:

$$s^{-2n} \# \bar{\mu} : s^{-2n} \# (\ker \beta) \rightarrow s^{-2n} \# (\ker \beta \otimes \ker \beta)$$

est une application de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodules telle que le cône algébrique

$$C(s^{-2n} \# \bar{\mu}) = s^{-2n} \# (\ker \beta \otimes \ker \beta) \oplus_{s^{-2n} \# \bar{\mu}} s^{-2n} \# \ker \beta$$

est faiblement équivalent en tant que $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule à $A_{PL}(F(W, 2))$.

Démonstration. Soit $\nu: \text{hoker } \alpha \rightarrow \text{hoker } \beta$ l'application de B -dgmodules induite entre les noyaux homotopiques des applications α et β . Le théorème 7.5 implique que le cône algébrique de l'application

$$s^{-2n} \# \nu: s^{-2n} \# (\text{hoker } \beta) \rightarrow s^{-2n} \# (\text{hoker } \beta \otimes \text{hoker } \beta)$$

est un $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule faiblement équivalent à $A_{PL}(F(W, 2))$.

Comme β est surjective, par le point 6 de la proposition 7.2, nous avons un quasi-isomorphisme $\ker \beta \xrightarrow{\simeq} \text{hoker } \beta$. Un simple calcul montre que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} \ker \alpha & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \ker \beta \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \text{hoker } \alpha & \xrightarrow{\nu} & \text{hoker } \beta, \end{array}$$

et donc

$$s^{-2n} \# \bar{\mu}: s^{-2n} \# (\ker \beta) \rightarrow s^{-2n} \# (\ker \beta \otimes \ker \beta)$$

est un modèle de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodules de

$$s^{-2n} \# \nu: s^{-2n} \# (\text{hoker } \beta) \rightarrow s^{-2n} \# (\text{hoker } \beta \otimes \text{hoker } \beta).$$

Par le lemme 1.14 les cônes algébriques de ces deux applications sont faiblement équivalents, ce qui prouve le résultat. $\square$

La dualité de Poincaré des paires $(W, \partial W)$ et $(W \times W, \partial(W \times W))$ permet de construire des quasi-isomorphismes (voir proposition 7.7)

$$\theta_B: B \xrightarrow{\simeq} s^{-n} \# \ker \beta$$

et

$$\theta_{B \otimes B}: B \otimes B \xrightarrow{\simeq} s^{-2n} \# (\ker \beta \otimes \ker \beta)$$

Alors, une conséquence directe du théorème précédent et du théorème 7.23 est le résultat suivant qui nous donne un modèle d'ADGC de l'espace $F(W, 2)$:

Théorème 8.5. *Soit W une variété compacte à bord ∂W . Supposons que W et ∂W sont 2-connexes et supposons qu'il existe un modèle d'ADGC surjectif $\beta: B \twoheadrightarrow \partial B$ de l'inclusion $\partial W \hookrightarrow W$. Considérons le diagramme (8.19) et le modèle d'ADGC de celui-ci donné par le diagramme (8.21). Soit*

$$\varphi^!: s^{-n} B \rightarrow B \otimes B$$

une application de $B \otimes B$ -dgmodules faiblement équivalente à

$$s^{-2n} \# \bar{\mu}: s^{-2n} \# \ker \beta \rightarrow s^{-2n} \# \ker \beta \otimes \ker \beta.$$

Alors, le cône algébrique $C(\varphi^!) = B \otimes B \oplus_{\varphi^!} s^{-n} B$ muni de la structure multiplicative semi-triviale, est tel que toute troncature $\tau^{2n-3} C(\varphi^!)$ est un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$.

Comme corollaire nous avons :

Corollaire 8.6. *Soit W une variété compacte à bord ∂W , de dimension $n \geq 3$. Supposons que W et ∂W sont 2-connexes. Alors, le type d'homotopie rationnelle de $F(W, 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnelle de la paire $(W, \partial W)$.*

Démonstration. Par le théorème 8.5 un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$ peut-être déterminé par un modèle d'ADGC surjectif de $\partial W \hookrightarrow W$. Pour que ce modèle détermine le type d'homotopie rationnelle, il suffit que $F(W, 2)$ soit 1-connexe ce qui est le cas par un argument de position générale, dès que W est 1-connexe et de dimension ≥ 3 . $\square$

8.4 Modèle de $F(M \setminus T, 2)$

Soit $f: K \hookrightarrow M$ le plongement d'un sous-polyèdre de dimension k dans une variété fermée de dimension n . Supposons $n \geq 2k + 3$. Prenons T un voisinage régulier de K dans M et posons $W := \overline{M} \setminus T$. L'espace complémentaire W est une variété à bord $\partial W = \partial T$. Nous allons construire un modèle d'ADGC pour l'espace des configurations $F(W, 2)$. Pour cela nous utiliserons le théorème 4.10. Soit

$$\varphi: P \twoheadrightarrow Q$$

un modèle d'ADGC de $f: K \hookrightarrow M$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) P est un modèle à dualité de Poincaré de M ,
- (ii) φ est surjective,
- (iii) $Q^{>k} = 0$.

L'existence d'un tel modèle est garantie si nous supposons K et M 1-connexes et $H^2(f)$ surjective (voir proposition 3.9).

Regardons la suspension itérée du dual de φ :

$$s^{-n} \# \varphi: s^{-n} \# Q \rightarrow s^{-n} \# P.$$

Comme P est une ADGC à dualité de Poincaré, nous avons un isomorphisme $P \cong s^{-n} \# P$. Notons

$$\varphi^!: s^{-n} \# Q \rightarrow P$$

l'application $s^{-n} \# \varphi$ composée avec l'isomorphisme $s^{-n} \# P \cong P$ et posons $I := \varphi^!(s^{-n} \# Q)$. Comme nous supposons $n \geq 2k + 3$, par le théorème 4.10, P/I est un modèle d'ADGC de W .

Nous allons construire grâce à celui-ci un modèle de $F(W, 2)$. Plus précisément, soit $\Delta \in (P \otimes P)^n$ la classe diagonale dans $P \otimes P$. Soit $\pi \otimes \pi: P \otimes P \rightarrow P/I \otimes P/I$ la projection évidente et notons $\overline{\Delta} = \pi \otimes \pi(\Delta)$. Nous pouvons définir l'application de $P/I \otimes P/I$ -dgmmodules

$$\overline{\Delta}^!: s^{-n} P/I \rightarrow P/I \otimes P/I ; s^{-n} x \mapsto \overline{\Delta}(1 \otimes x).$$

En supposant $n \geq 2k + 3$ et M 2-connexe, nous montrerons que le cône algébrique

$$C(\overline{\Delta}^!) = P/I \otimes P/I \oplus_{\overline{\Delta}^!} s s^{-n} P/I$$

muni de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$.

8.4.1 Un premier modèle de $F(M \setminus T, 2)$

À partir du modèle $\varphi: P \twoheadrightarrow Q$ de $f: K \hookrightarrow M$ décrit ci-dessus, nous allons construire un modèle du pushout

$$\begin{array}{ccc} \partial W = \partial T & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ W = \overline{M \setminus T} & \hookrightarrow & M. \end{array} \quad (8.22)$$

En appliquant le foncteur A_{PL} à ce diagramme nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(M) & \longrightarrow & A_{PL}(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{PL}(T) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W). \end{array} \quad (8.23)$$

Rappelons que $Q^{>k} = 0$, nous pouvons aussi supposer sans perte de généralité que $Q < 0 = 0$. Alors, comme $n \geq 2k + 3$, $(s^{-n}\#Q)^{<n-k} = 0$ et $(s^{-n}\#Q)^{>n+1} = 0$. Remarquons que $\varphi!: s^{-n}\#Q \rightarrow P$ est une shriek map, alors, par [23, Théorème 1.2], un modèle d'ADGC du diagramme (8.23) est donné par

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\text{id} \oplus 0} & P \oplus_{\varphi!} ss^{-n}\#Q \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \beta \\ Q & \xrightarrow{\text{id} \oplus 0} & Q \oplus ss^{-n}\#Q, \end{array}$$

où $\beta = \varphi \oplus \text{id}$. Ce diagramme hérite d'une structure de P -dgmodule induite par les applications du carré.

Posons $B = P \oplus_{\varphi!} ss^{-n}\#Q$ et $\partial B = Q \oplus ss^{-n}\#Q$. Un modèle de l'application $\partial W \hookrightarrow W$ est donné par l'application

$$\beta = \varphi \oplus \text{id}: B \rightarrow \partial B$$

qui est surjective, car φ est surjective, et telle que $\ker \beta \cong \ker \varphi$. La proposition 8.1 montre que l'application

$$\tilde{\mu}_B: \frac{B \otimes B}{(\ker \varphi \otimes \ker \varphi)} \xrightarrow{\beta \otimes \beta} \partial B \otimes \partial B \xrightarrow{\mu} \partial B$$

est un modèle de l'application

$$\partial \Delta: \partial W \xrightarrow{\Delta|_{\partial W}} \partial W \times \partial W \hookrightarrow \partial(W \times W)$$

et le diagramme d'ADGC

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\alpha} & \frac{B \otimes B}{\ker \varphi \otimes \ker \varphi} \\ \downarrow \mu_B & & \downarrow \tilde{\mu}_B \\ B & \xrightarrow{\beta} & \partial B \end{array} \quad (8.24)$$

est un modèle du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(W \times W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial(W \times W)) \\ A_{PL}(\Delta) \downarrow & & \downarrow A_{PL}(\partial\Delta) \\ A_{PL}(W) & \longrightarrow & A_{PL}(\partial W). \end{array} \quad (8.25)$$

Notons que $\ker \alpha \cong \ker \varphi \otimes \ker \varphi$ et $\ker \beta \cong \ker \varphi$.

Une conséquence directe du théorème 8.4 est un premier modèle algébrique de $F(W, 2)$:

Proposition 8.7. *En utilisant les mêmes notations que depuis le début de cette section, considérons le diagramme (8.25) et le modèle d'ADGC de celui-ci donné par le diagramme (8.24). Notons*

$$\bar{\mu}: \ker \alpha = \ker \varphi \otimes \ker \varphi \rightarrow \ker \varphi ; a \otimes b \mapsto a \cdot b$$

l'application induite entre les noyaux de α et de β .

Soit $\hat{B}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A_{PL}(M) \xleftarrow[\rho']{\simeq} \hat{B} \xrightarrow[\rho]{\simeq} B.$$

Les ADGC B , $B \otimes B$, $A_{PL}(M \times M)$ et $A_{PL}(F(M, 2))$ héritent d'une structure de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule. Alors, la suspension itérée de l'application duale de $\bar{\mu}$:

$$s^{-2n} \# \bar{\mu}: s^{-2n} \# (\ker \varphi) \rightarrow s^{-2n} \# (\ker \varphi \otimes \ker \varphi)$$

est une application de $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodules telle que le cône algébrique

$$C(s^{-2n} \# \bar{\mu}) = s^{-2n} \# (\ker \varphi \otimes \ker \varphi) \oplus_{s^{-2n} \# \bar{\mu}} s^{-2n} \# \ker \varphi$$

est faiblement équivalent en tant que $\hat{B} \otimes \hat{B}$ -dgmodule à $A_{PL}(F(M, 2))$.

8.4.2 Modèle plus explicite de $F(M \setminus T, 2)$

Nous construisons dans la suite un modèle de $F(W, 2)$ plus facile à manipuler.

L'algèbre P étant à dualité de Poincaré, il existe un isomorphisme de P -dgmodules

$$\theta_P: P \xrightarrow{\cong} s^{-n} \# P,$$

De même, nous avons un isomorphisme de $P \otimes P$ -dgmodules

$$\theta_{P \otimes P}: P \otimes P \xrightarrow{\cong} s^{-2n} \# (P \otimes P).$$

Remarquons le fait suivant,

Lemme 8.8. *Il existe un isomorphisme de P -dgmodules*

$$\bar{\theta}_P: P/I \xrightarrow{\cong} s^{-n} \# \ker \varphi$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\cong} & s^{-n} \# P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P/I & \xrightarrow{\bar{\theta}_P} & s^{-n} \# \ker \varphi \end{array}$$

Démonstration. L'application

$$P \xrightarrow{\cong} s^{-n} \# P \longrightarrow s^{-n} \# \ker \varphi$$

passé au quotient, ce qui donne une application $\bar{\theta}_P: P/I \rightarrow s^{-n} \# \ker \varphi$ telle que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ s^{-n} \# Q & \xrightarrow{=} & s^{-n} \# Q \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\cong} & s^{-n} \# P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P/I & \xrightarrow{\bar{\theta}_P} & s^{-n} \# \ker \varphi \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0. \end{array}$$

Le lemme des 5 implique le résultat. □

De même, nous avons aussi le lemme suivant

Lemme 8.9. *Il existe un isomorphisme de $P \otimes P$ -dgm modules*

$$\bar{\theta}_{P \otimes P}: P/I \otimes P/I \xrightarrow{\cong} s^{-2n} \# (\ker \varphi \otimes \ker \varphi)$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P \otimes P & \xrightarrow{\cong} & s^{-2n} \# (P \otimes P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P/I \otimes P/I & \xrightarrow{\bar{\theta}_{P \otimes P}} & s^{-2n} \# (\ker \varphi \otimes \ker \varphi). \end{array}$$

Soit $\Delta \in (P \otimes P)^n$ la classe diagonale dans $P \otimes P$, $\pi \otimes \pi: P \otimes P \rightarrow P/I \otimes P/I$ la surjection évidente et notons $\bar{\Delta} = (\pi \otimes \pi)(\Delta)$. Nous pouvons définir l'application de $P \otimes P$ -dgm modules

$$\bar{\Delta}^!: s^{-n} P/I \rightarrow P/I \otimes P/I ; s^{-n} x \mapsto \bar{\Delta}(1 \otimes x).$$

La multiplication $\mu: P/I \otimes P/I \rightarrow P/I$ munit P/I d'une structure de $P/I \otimes P/I$ -dgmodule qui est compatible avec la structure de P -dgmodule, nous pouvons, alors, voir $\bar{\Delta}^!$ comme un morphisme de $P/I \otimes P/I$ -dgmodules. De plus, l'isomorphisme $P/I \cong s^{-n} \# \ker \varphi$ donné dans le lemme 8.8 munit $s^{-n} \# \ker \varphi$ d'une structure de P/I -dgmodule et donc, via la multiplication, d'une structure de $P/I \otimes P/I$ -dgmodule. Le résultat principal de cette section est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 8.10. *Le carré de $P/I \otimes P/I$ -dgmodules ci-dessous commute*

$$\begin{array}{ccc} s^{-n}P/I & \xrightarrow{\bar{\Delta}^!} & P/I \otimes P/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ s^{-2n} \# \ker \varphi & \xrightarrow{s^{-n} \# \bar{\mu}} & s^{-2n} \# \ker \varphi \otimes \ker \varphi. \end{array} \quad (8.26)$$

Avant de le démontrer, vérifions-le dans le cas particulier où $I = 0$:

Lemme 8.11. *Soit P une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n . Soit Δ la classe diagonale et soit $\Delta^!: s^{-n}P \rightarrow P \otimes P$ l'application de $P \otimes P$ -dgmodules définie par $\Delta^!(s^{-n}p) = \Delta(1 \otimes p)$. Alors, le diagramme ci-dessous commute*

$$\begin{array}{ccc} s^{-n}P & \xrightarrow{\Delta^!} & P \otimes P \\ \downarrow s^{-n}\theta_P & & \downarrow \theta_{P \otimes P} \\ s^{-2n} \# P & \xrightarrow{s^{-2n} \# \mu} & s^{-2n} \# P \otimes P. \end{array} \quad (8.27)$$

Démonstration. Comme $s^{-n}P$ est engendré par $s^{-n}1$ en tant que P -dgmodule. Il suffit de vérifier que le diagramme commute pour l'élément $s^{-n}1$. Nous voulons montrer que

$$\theta_{P \otimes P}(\Delta^!(s^{-n}1)) = s^{-2n} \# \bar{\mu}(s^{-n}\theta_P(s^{-n}1)) \in s^{-2n} \# P \otimes P. \quad (8.28)$$

Pour tout $b \otimes c \in P \otimes P$ définissons

$$ev_{b \otimes c}: s^{-2n} \# (P \otimes P) \rightarrow \mathbb{Q}; \phi \mapsto \phi(b \otimes c).$$

Il est clair que $\phi \in s^{-2n} \# (P \otimes P)$ est complètement déterminé si nous connaissons $ev_{b \otimes c}(\phi)$ pour tout $b \otimes c \in P \otimes P$. Dès lors pour vérifier (8.28), il suffit de voir que pour tout $b, c \in P$ nous avons

$$ev_{b \otimes c}(\theta_{P \otimes P}(\Delta^!(s^{-n}1))) = ev_{b \otimes c}(s^{-2n} \# \bar{\mu}(s^{-n}\theta_P(s^{-n}1))). \quad (8.29)$$

Posons $\epsilon := \theta_P(1) \in s^{-n} \# P$. Alors, $s^{-n}\theta_P(1) = s^{-n}\epsilon$ et $\theta_{P \otimes P}(1) = \epsilon \otimes \epsilon$. L'équation (8.29) peut se réécrire

$$\sum_{i=2}^{N-1} (-1)^{|a_i|} (-1)^{|b||a_i^*|} (-1)^{|a_i^*||c|} (-1)^{n(|b|+|a_i|)} \epsilon(b \cdot a_i) \epsilon(c \cdot a_i^*) = \epsilon(b \cdot c). \quad (8.30)$$

D'ailleurs, il suffit de vérifier l'équation pour b et c des éléments d'une base de P . Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ une base de P et soit $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ la base Poincaré-duale. Rappelons que, par définition, $\epsilon(a_i \cdot a_j^*) = \delta_{ij}$. Soient $b = a_k^*$ et $c = a_l$, avec $1 \leq k, l \leq N$. Montrons l'égalité (8.30). Du côté gauche de l'égalité, nous avons

$$\epsilon(a_k^* \cdot a_l) = (-1)^{|a_k^*||a_l|} \delta_{kl}$$

et du côté droit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} (-1)^{|a_k^*||a_i^*|} (-1)^{|a_i^*||a_l|} (-1)^{n(|a_k^*|+|a_i|)} \epsilon(a_k^* \cdot a_i) \epsilon(a_l \cdot a_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^N (-1)^{|a_i|} (-1)^{|a_i^*||a_k^*|} (-1)^{|a_i^*||a_l|} (-1)^{n(|a_k^*|+|a_i|)} \delta_{ki} \delta_{il} = (-1)^{|a_k^*||a_l|} \delta_{lk}. \end{aligned}$$

□

Passons à la démonstration du lemme 8.10

Démonstration du lemme 8.10. Pour prouver que le diagramme 8.26 commute, remarquons que c'est une des faces du cube de $P \otimes P$ -dgmmodules

$$\begin{array}{ccccc} s^{-n}P & \xrightarrow{\Delta} & P \otimes P & \xrightarrow{s^{-n}\pi \otimes \pi} & P/I \otimes P/I \\ \downarrow \cong \theta_P & \searrow s^{-n}\pi & \downarrow \bar{\Delta} & & \downarrow \theta_{P/I \otimes P/I} \\ & s^{-n}P/I & & & \\ \downarrow \bar{\theta}_P & \downarrow \bar{\theta}_P & \downarrow \cong \theta_{P \otimes P} & & \downarrow \bar{\theta}_{P \otimes P} \\ s^{-2n}\#P & \xrightarrow{s^{-2n}\#\mu} & s^{-2n}\#P \otimes P & \xrightarrow{s^{-2n}\#(\iota \otimes \iota)} & s^{-2n}\#(\ker \varphi \otimes \ker \varphi) \\ \downarrow s^{-2n}\#\iota & \downarrow s^{-2n}\#\iota & \downarrow s^{-2n}\#(\iota \otimes \iota) & & \downarrow s^{-2n}\#(\iota \otimes \iota) \\ s^{-2n}\#\ker \varphi & \xrightarrow{s^{-2n}\#\bar{\mu}} & s^{-2n}\#\ker \varphi & \xrightarrow{s^{-2n}\#\bar{\mu}} & s^{-2n}\#(\ker \varphi \otimes \ker \varphi) \end{array}$$

Nous avons montré dans le lemme 8.11 que la face arrière du cube commute. Montrons que la face de devant "mime" ce que fait la face arrière et, donc, commute. Pour commencer montrons que toutes les autres faces du cube commutent.

Face 1 La face arrière du cube commute grâce au lemme 8.11

Face 2 Le carré de $P \otimes P$ -dgmmodules ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} s^{-n}P & \xrightarrow{\Delta^!} & P \otimes P \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \otimes \pi \\ s^{-n}P/I & \xrightarrow{\bar{\Delta}^!} & P/I \otimes P/I. \end{array} \quad (8.31)$$

En effet, nous calculons

$$\begin{aligned}
 (\pi \otimes \pi) \circ \Delta^!(s^{-n}a) &= (\pi \otimes \pi)(\Delta \cdot (1 \otimes a)) \\
 &= (\pi \otimes \pi)(\Delta)(\pi \otimes \pi)(1 \otimes a) \\
 &= \Delta \cdot (1 \otimes a) \bmod I \otimes P + P \otimes I \\
 &= \overline{\Delta}^!(s^{-n}\pi(a)).
 \end{aligned}$$

Face 3 Le carré

$$\begin{array}{ccc}
 s^{-2n} \# P & \xrightarrow{s^{-2n} \# \mu} & s^{-2n} \# P \otimes P \\
 \downarrow s^{-2n} \# \iota & & \downarrow s^{-2n} \# \iota \\
 s^{2n} \# \ker \varphi & \xrightarrow{s^{-2n} \# \mu} & s^{-2n} \# \ker \varphi \otimes \ker \varphi
 \end{array} \quad (8.32)$$

commute. En effet, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xleftarrow{\mu} & P \otimes P \\
 \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\
 \ker \varphi & \xleftarrow{\mu} & \ker \varphi \otimes \ker \varphi
 \end{array}$$

commute de façon évidente et le résultat en est une conséquence directe.

Faces 4 et 5 Les lemmes 8.8 et 8.9 montrent la commutativité des faces

$$\begin{array}{ccc}
 s^{-n} P & \xrightarrow{s^{-n} \pi} & s^{-n} P / I \\
 \downarrow \theta_P & & \downarrow \bar{\theta}_P \\
 s^{-2n} \# P & \xrightarrow{s^{-2n} \# \iota} & s^{-2n} \# \ker \varphi
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 P \otimes P & \xrightarrow{s^{-n} \pi} & s^{-n} (P/I \otimes P/I) \\
 \theta_P \downarrow \cong & & \cong \downarrow \bar{\theta}_{P \otimes P} \\
 s^{-2n} \# P \otimes P & \xrightarrow{s^{-2n} \# \iota} & s^{-2n} \# (\ker \varphi \otimes \ker \varphi).
 \end{array}$$

Revenons au cube

$$\begin{array}{ccccc}
s^{-n}P & \xrightarrow{\Delta} & P \otimes P & & \\
\downarrow \cong \theta_P & \searrow s^{-n}\pi & \downarrow & \searrow s^{-n}\pi \otimes \pi & \\
& & s^{-n}P/I & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & P/I \otimes P/I \\
& & \downarrow \cong \theta_{P \otimes P} & & \downarrow \bar{\theta}_{P \otimes P} \\
s^{-2n}\#P & \xrightarrow{\bar{\theta}_P} & s^{-2n}\#P \otimes P & & \\
\downarrow s^{-2n}\#\iota & \searrow s^{-2n}\#\mu & \downarrow s^{-2n}\#(\iota \otimes \iota) & & \\
& & s^{-2n}\#\ker \varphi & \xrightarrow{s^{-2n}\#\bar{\mu}} & s^{-2n}\#(\ker \varphi \otimes \ker \varphi)
\end{array}$$

Pour montrer que la face du cube qui nous intéresse commute, il faut montrer l'égalité

$$\bar{\theta}_{P \otimes P} \circ \bar{\Delta}([x]) = s^{-2n}\#\bar{\mu} \circ \bar{\theta}_P([x]).$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_{P \otimes P} \circ \bar{\Delta}(s^{-n}[x]) &= \bar{\theta}_{P \otimes P} \circ \bar{\Delta}(s^{-n}\pi(x)) \\
\text{par la commutativité de la face 2} &= \bar{\theta}_{P \otimes P} \circ \pi \otimes \pi \circ \Delta^!(x) \\
\text{par la commutativité de la face 5} &= s^{-2n}\#(\iota \otimes \iota) \circ \theta_{P \otimes P} \circ \Delta^!(x) \\
\text{par la commutativité de la face 1} &= s^{-2n}\#(\iota \otimes \iota) \circ s^{-n}\#\mu \circ \theta_P(x) \\
\text{par la commutativité de la face 3} &= s^{-2n}\#\bar{\mu} \circ s^{-2n}\#\iota \circ \theta_P(x) \\
\text{par la commutativité de la face 4} &= s^{-2n}\#\bar{\mu} \circ \bar{\theta}_P \circ \pi(x) \\
&= s^{-2n}\#\bar{\mu} \circ \bar{\theta}_P([x]).
\end{aligned}$$

Donc, le carré de $P \otimes P$ -dgmodules qui nous intéresse commute. Comme la structure de P/I -dgmodules est compatible avec la structure de P -dgmodules, il commute comme carré de $P/I \otimes P/I$ -dgmodules. $\square$

Grâce au lemme 8.10 et au théorème 7.23 nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 8.12. *Soit $f: K \hookrightarrow M$ l'inclusion d'un sous-polyèdre 2-connexe de dimension k dans une variété fermée, 2-connexe, de dimension n , telle que $H^3(f; \mathbb{Q})$ est surjective. Supposons $n \geq 2k + 3$. Soit T un voisinage régulier de K dans M et posons $W := \overline{M \setminus T}$.*

Soit $\varphi: P \twoheadrightarrow Q$ un modèle surjectif de $f: K \hookrightarrow W$ tel que

i. P est une ADGC à dualité de Poincaré de dimension formelle n et notons

$$\theta_P: P \xrightarrow{\cong} s^{-n}\#P \text{ l'isomorphisme induit par la dualité de Poincaré ;}$$

ii. φ est surjective ;

iii. $Q^{>k} = 0$.

Notons

$$\varphi^! = (\theta_P^{-1} \circ s^{-n}\#\varphi): s^{-n}\#Q \rightarrow P$$

et posons $I = \varphi^!(s^{-n}\#Q)$.

Soit $\Delta \in P \otimes P$ la classe diagonale dans $P \otimes P$, soit $\pi \otimes \pi: P \otimes P \rightarrow P/I \otimes P/I$ la projection évidente et notons $\overline{\Delta} = (\pi \otimes \pi)(\Delta)$. Définissons l'application de $P/I \otimes P/I$ -dgm modules

$$\overline{\Delta}^!: s^{-n}P/I \rightarrow P/I \otimes P/I ; s^{-n}x \mapsto \overline{\Delta}(1 \otimes x).$$

Alors, le cône algébrique

$$C(\overline{\Delta}^!) = P/I \otimes P/I \oplus_{\overline{\Delta}^!} ss^{-n}P/I$$

muni de la structure semi-triviale est un modèle d'ADGC de $F(W, 2)$.

Démonstration. Soit

$$\Delta: W \hookrightarrow W \times W \tag{8.33}$$

le plongement de la diagonale. Le fait que M et K sont 2-connexes et que $n \geq 2k + 3$ garantissent que les hypothèses du théorème 7.23 sont vérifiées pour le plongement (8.33). Ce théorème, la proposition 8.7 et le lemme 8.10 permettent de conclure que toute troncature $\tau^{2n-3}C(\overline{\Delta})$ est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(F(W, 2))$. Un calcul analogue à celui réalisé pour le lemme 5.4 montre que le cône algébrique $C(\overline{\Delta}^!)$ est une ADGC. De plus, la 2-connexité de la variété, implique que $H^i(F(W, 2)) \cong H^i(C(\Delta^!)) = 0$ si $i > 2n - 3$, donc

$$\pi: C(\overline{\Delta}^!) \xrightarrow{\simeq} \tau^{2n-3}C(\overline{\Delta}^!)$$

est un quasi-isomorphisme d'ADGC, ce qui finit la preuve du résultat. $\square$

8.5 Espaces des configurations dans des variétés ouvertes

Souvent des variétés ouvertes sont l'intérieur de variétés à bord. Nous avons, d'ailleurs, le théorème suivant :

Théorème 8.13 ([5], Théorème 1). *Soit U une variété ouverte lisse de dimension ≥ 6 . Alors U est difféomorphe à l'intérieur d'une variété lisse compacte W avec un bord 1-connexe si et seulement si l'homologie $H_*(U; \mathbb{Z})$ est finiment engendrée et U est 1-connexe à l'infini. De plus, une telle variété W est unique à difféomorphisme près.*

Rappelons qu'un espace X est 1-connexe à l'infini si pour tout compact $C \subset X$ il existe un compact D , $C \subset D \subset X$, tel que $X - D$ est 1-connexe.

De plus nous avons le résultat suivant :

Proposition 8.14. *Soit W une variété topologique à bord. Alors l'inclusion*

$$F(W \setminus \partial W, k) \hookrightarrow F(W, k)$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Rappelons que le bord de la variété topologique W admet un collier, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme sur l'image

$$j: \partial W \times]0, 1] \hookrightarrow W$$

tel que $j(\partial W \times \{1\}) = \partial W$. Ceci permet de définir une isotopie

$$\Phi: W \times [0, 1] \rightarrow W, (w, t) \mapsto \Phi_t(w)$$

par

$$\begin{cases} \Phi_t(j(x, s)) = j(x, (1 - t/2)s) \text{ si } x \in \partial W \text{ et } 0 < s \leq 1, \\ \Phi_t(y) = y \text{ si } y \in W \setminus \text{im}(j), \end{cases}$$

qui est telle que $\Phi_0 = \text{id}_W$ et Φ_1 est une retraction de W dans $W \setminus \partial W$. Comme pour tout $t \in [0, 1]$, Φ_t est un plongement on a des applications induites

$$F(\Phi_t, k): \begin{array}{ccc} F(W, k) & \longrightarrow & F(W, k) \\ (x_1, \dots, x_k) & \longmapsto & (\Phi_t(x_1), \dots, \Phi_t(x_k)) \end{array}$$

et une homotopie $F(\Phi_1, k) \simeq F(\Phi_0, k) = \text{id}_{F(W, k)}$.

De même on a des applications induites

$$F(\Phi_t|_{W \setminus \partial W}, k): F(W \setminus \partial W, k) \rightarrow F(W \setminus \partial W, k)$$

et une homotopie $F(\Phi_1|_{W \setminus \partial W}, k) \simeq F(\Phi_0|_{W \setminus \partial W}, k) = \text{id}_{F(W \setminus \partial W, k)}$.

Le diagramme commutatif à homotopie près ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} F(W, k) & \xrightarrow{\text{id}} & F(W, k) \\ F(\Phi_1, k) \downarrow & \sim & \downarrow \text{id} \\ F(W \setminus \partial W, k) & \hookrightarrow & F(W, k) \\ \text{id} \downarrow & \sim & \downarrow F(\Phi_1, k) \\ F(W \setminus \partial W, k) & \xrightarrow[\text{id}]{} & F(W \setminus \partial W, k) \end{array}$$

établit que $F(W \setminus \partial W, k) \hookrightarrow F(W, k)$ est une équivalence d'homotopie. $\square$

Donc, si nous avons une variété ouverte U remplissant les hypothèses du théorème 8.13 nous pouvons trouver une variété W à bord telle que l'intérieur de W est homéomorphe à U . La proposition 8.14 implique, alors, que $F(U, k) \simeq F(W, k)$ et donc nous pouvons utiliser les théorèmes 8.5 et 8.12 pour construire un modèle d'ADGC de $F(U, 2)$.

8.6 Modèle de $F(\mathring{M}, 2)$

Soit M une variété fermée orientable de dimension $n \geq 3$ et soit $m_0 \in M$. Nous allons étudier l'espace de configuration de 2 points dans

$$\mathring{M} := M \setminus \{m_0\}.$$

La variété privé d'un point, $\mathring{M}$, a le même type d'homotopie qu'une variété à bord. En effet, soit T un voisinage régulier de $\{m_0\}$, $M \setminus \{m_0\} \simeq \overline{M \setminus T}$ et $\overline{M \setminus T}$ est une variété à bord $\partial(\overline{M \setminus T}) = \partial T$. Comme $T \simeq \{m_0\}$, T est homéomorphe à un disque de codimension 0 dans M , dès lors $\partial(\overline{M \setminus T}) = \partial T = S^{n-1}$. Souvent nous ferons l'abus de noter $\mathring{M}$ la variété $\overline{M \setminus T}$ et $\partial \mathring{M}$ le bord $\partial(\overline{M \setminus T}) \cong S^{n-1}$. La proposition 8.14 entraîne que $F(\mathring{M}, 2) \simeq F(\overline{M \setminus T}, 2)$.

Nous allons utiliser les techniques décrites dans la section 8.4 pour construire un modèle de $F(\mathring{M}, 2)$. Donnons tout d'abord un modèle de $\mathring{M}$.

Proposition 8.15. *Soit M une variété fermée, connexe, orientable, de dimension $n \geq 3$ et soit $m_0 \in M$. Soit P un modèle à dualité de Poincaré de M , de dimension formelle n . Notons $\omega \in P^n$ la classe fondamentale de P . Alors $P/(\omega \cdot \mathbb{Q})$ est un modèle de $\mathring{M} = M \setminus \{m_0\}$.*

Démonstration. Un modèle de l'application $\{m_0\} \hookrightarrow M$ est donné par

$$\varphi: P \twoheadrightarrow \mathbb{Q}.$$

Notons

$$s^{-n} \# \varphi: s^{-n} \mathbb{Q} \rightarrow s^{-n} \# P$$

la suspension itérée du dual de cette application et $\theta_P: P \xrightarrow{\cong} s^{-n} \# P$ l'isomorphisme induit par la dualité de Poincaré de l'algèbre P . Posons

$$\varphi^!: s^{-n} \# \mathbb{Q} \longrightarrow s^{-n} \# P \xrightarrow{\theta_P^{-1}} P.$$

Il est clair que

$$s^{-n} \# \varphi(s^{-n} \# 1) = s^{-n} \# 1$$

et que $\theta_P^{-1}(s^{-n} \# 1) = q\omega$ pour $q \in \mathbb{Q}^*$. Donc $I := \varphi^!(s^{-n} \# \mathbb{Q}) = \omega \cdot \mathbb{Q}$. Par le théorème 4.10, P/I est un modèle de $M \setminus \{m_0\}$. $\square$

Notons $P/\omega := P/(\omega \cdot \mathbb{Q})$ et soit $\pi \otimes \pi: P \otimes P \rightarrow P/\omega \otimes P/\omega$ la projection évidente. Soit Δ la classe diagonale dans $P \otimes P$. Posons

$$\overline{\Delta} = (\pi \otimes \pi)(\Delta).$$

L'application de $P/\omega \otimes P/\omega$ -dgmodules

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Delta}^!: & s^{-n} P/\omega & \rightarrow P/\omega \otimes P/\omega \\ & s^{-n} a & \mapsto \overline{\Delta}(1 \otimes a) \end{array}$$

est telle que le cône algébrique

$$C(\Delta^!) = P/\omega \otimes P/\omega \oplus_{\Delta^!} s s^{-n} P/\omega$$

muni de la structure semi-triviale est une ADGC faiblement équivalente à $A_{PL}(F(\mathring{M}, 2))$.

8.7 Conjecture sur le modèle de $F(W, k)$

La construction d'un modèle d'ADGC pour l'espace des configurations à k points, avec $k \geq 3$, est bien plus compliqué que pour le cas où $k = 2$. Dans [25], P. Lambrechts et D. Stanley, construisent un modèle de dgmodule des espaces $F(M, k)$ où M est une variété fermée. Ce dgmodule a en plus une structure naturelle d'ADGC. Néanmoins, il n'a pas encore été montré en toute généralité que ce modèle est le modèle d'ADGC souhaité. Expliquons brièvement la construction de celui-ci.

Soit M une variété fermée simplement-connexe de dimension n . Nous remarquons, tout d'abord, que

$$F(M, k) = M^k \setminus \cup_{1 \leq i \leq j \leq k} \Delta_{ij},$$

où $\Delta_{ij} = \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid x_i = x_j\}$. Nous savons que M (voir [24] ou le chapitre 3) admet un modèle d'ADGC, (A, d) , à dualité de Poincaré de dimension formelle n . Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ une base de A et $\{a_i^*\}_{i=1}^N$ sa base Poincaré-duale. Dans [25], les auteurs construisent l'ADGC

$$F(A, k) := \left(\frac{A^{\otimes k} \otimes \Lambda(g_{ij} : 1 \leq i < j \leq k)}{(\text{relations d'équivalences})}, d(g_{ij}) = \pi_{ij}^*(\Delta) \right)$$

où les générateurs g_{ij} sont en degré $n-1$, $\pi_i^*(a) = 1^{\otimes i-1} \otimes a \otimes 1^{\otimes k-i} \in A^{\otimes k}$ et $\pi_{ij}^*(a \otimes b) = \pi_i^*(a) \cdot \pi_j^*(b)$. Les relations d'équivalences par lesquelles on quotiente l'ADGC $A^{\otimes k} \otimes \Lambda(g_{ij} : 1 \leq i < j \leq k)$ sont :

i. Les relations d'Arnold

$$g_{ij}g_{jl} + g_{jl}g_{li} + g_{li}g_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq k;$$

ii. Les relations de symétrie

$$(\pi_i^*(a) - \pi_j^*(a))g_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq k \text{ et } a \in A;$$

iii. $g_{ij}^2 = 0$ pour $1 \leq i < j \leq k$.

Le résultat principal de [25, Théorème 10.1] montre que l'ADGC $F(A, k)$ est un modèle de $A^{\otimes k}$ -dgmodules de $A_{PL}(F(M, k))$. Nous conjecturons qu'il y a un résultat similaire pour $F(W, k)$ où W est une variété à bord construite comme dans la section 8.4 à partir de l'inclusion d'un sous-polyèdre dans une variété fermée.

Soit $f: K \hookrightarrow M$ l'inclusion d'un sous-polyèdre dans une variété fermée de dimension n . Soit T un voisinage régulier de K dans M , l'espace complémentaire $W = \overline{M} \setminus T$ est une variété à bord $\partial W = \partial T$. Soit P un modèle d'ADGC à dualité de Poincaré de W , sous certaines conditions de codimension et de connexité sur l'inclusion f , il existe un idéal différentiel $I \subset P$ tel que P/I est un modèle d'ADGC de W .

Nous conjecturons que l'ADGC

$$F(P/I, k) := \left(\frac{P^{\otimes k} \otimes \Lambda(g_{ij} : 1 \leq i < j \leq k)}{(\text{relations d'équivalences}), \left(\sum_{i=1}^k P^{\otimes i-1} \otimes I \otimes P^{\otimes k-i} \right)} , d(g_{ij}) = \pi_{ij}^*(\Delta) \right)$$

est un modèle d'ADGC de $A_{PL}(F(W, k))$.

Dans le cas particulier $k = 2$, ce modèle est

$$\begin{aligned} F(P/I, 2) &= \left(\frac{P^{\otimes 2} \otimes \Lambda(g_{12})}{(g_{12}(a \otimes 1) - g_{12}(1 \otimes a), P \otimes I, I \otimes P, g_{12}^2)} d(g_{12}) = \pi_{12}^*(\Delta) \right) \\ &\cong ((P/I \otimes P/I) \oplus g_{12}P/I, dg_{12} = \overline{\Delta}) \end{aligned}$$

qui est exactement le modèle du théorème 8.12. Les techniques de [25] combinées aux résultats du chapitre 7 devraient, en tout cas, rapidement mener au fait que $F(P/I, k)$ est un modèle de $(P/I)^{\otimes k}$ -dgmodules de $F(W, k)$.

Bibliographie

- [1] M. Bendersky, S. Gitler, *The cohomology of certain function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 326(1991), no. 1, 423–440.
- [2] B. Berceanu, M. Markl, Ş. Papadima, *Multiplicative models for configuration spaces of algebraic varieties*, Topology 44 (2005), no. 2, 415–440.
- [3] A. K. Bousfield, V. K. A. M. Gugenheim, *On PL de Rham theory and rational homotopy theory*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 179, 1976.
- [4] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, 1993.
- [5] W. Browder, J. Levine, G. R. Livesay, *Finding a boundary for an open manifold*, Amer. J. Math. 87 (1965) 1017–1028.
- [6] F. R. Cohen, L. R. Taylor, *Computations of Gelfand-Fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces*, Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston Ill., 1977), I, Lecture Notes in Math., 657, Springer, Berlin (1978) 106–143.
- [7] W.G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, In : Handbook of Algebraic Topology, edited by I.M. James, Elsevier Science B.V. (1995) 73–126.
- [8] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas. *Rational Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 2000.
- [9] Y. Félix, J. Oprea, D. Tanré, *Algebraic Models in Geometry*, Oxford University Press, 2008.
- [10] Y. Félix, D. Tanré, *The cohomology algebra of unordered configuration spaces*, J. London Math. Soc. (2) 72 (2005), no. 2, 525–544.
- [11] Y. Félix, J-C. Thomas, *Configuration spaces and Massey products*, Int. Math. Res. Not.2004, no. 33, 1685–1702.

- [12] W. Fulton, R. MacPherson, *A Compactification of Configuration Spaces*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 139, No. 1 (Jan., 1994), pp. 183-225
- [13] T. Goodwillie and M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory*, Part II, Geometry and Topology 3 (1999), 103-118.
- [14] N. Habegger, *On the existence and classification of homotopy embeddings of a complex into a manifold*, Thesis, University of Geneva (1981).
- [15] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [16] K. Hess, *Rational homotopy theory : a brief introduction*, arXiv:math/0604626, 2006,
- [17] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [18] J. F. P. Hudson, *PL embeddings*, Ann. of Math. (2) 85 (1967), 1-31
- [19] J. F. P. Hudson. *Piecewise Linear Topology*, W. A. Benjamin, 1969.
- [20] J. F. P. Hudson, *Concordance, isotopy, and diffeotopy*, Annals of Math. 91 (1970) 425-448.
- [21] I. Kriz, *On the rational homotopy type of configuration spaces*, Annals of Math. 139 (1994), 227-237.
- [22] P. Lambrechts and D. Stanley. *The rational homotopy type of configuration spaces of two points*, Ann. Inst. Fourier 54 (4) (2004) 1031-1077.
- [23] P. Lambrechts, D. Stanley, *Algebraic models of Poincaré embeddings*, Algebraic and Geometric Topology, Volume 5 (2005) 135-182.
- [24] P. Lambrechts and D. Stanley. *Poincaré duality and graded differential commutative algebras*, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, série 4, 41, fascicule 4 (2008), 497-511.
- [25] P. Lambrechts, D. Stanley, *A remarkable DG-Module model for configuration spaces*, Algebraic and Geometric Topology 8 (2008) 1191-1222.
- [26] N. Levitt, *Spaces of arcs and configuration spaces of manifolds*, Topology 34 (1995) 217-230.
- [27] R. Longoni and P. Salvatore. *Configuration spaces are not homotopy invariant*. Topology, 44 (2005) 375-380.
- [28] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. IHES 47 (1977), 269-331.

- [29] B. Totaro, *Configuration spaces of algebraic varieties*, Topology 35 (1996), no. 4, 1057–1067.
- [30] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology – IV. Thickenings*, Topology 5 (1966) 73–94.
- [31] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Volume 38 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.