



Thèse pour obtenir le grade de
**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE
LOUVAIN**

Discipline : SCIENCES ACTUARIELLES

Présentée par
HABIBA TASSA

Sujet

Solvabilité des Plans de Pension

Impact des engagements de long terme sur la solvabilité des plans " Defined Contributions"
et "Defined Benefits"

Membres du Jury :

Pr. Pierre Devolder, promoteur (Université Catholique de Louvain)

Pr. Michel Denuit, Président (Université Catholique de Louvain)

Pr. Pierre Ars (Université Catholique de Louvain)

Pr. Abderrahim Oulidi (Université Internationale de Rabat)

Pr. Griselda Deelstra (Université Libre de Bruxelles)

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'une expérience riche grâce à un ensemble de personnes qui ont collaboré de près ou de loin et m'ont soutenue tout au long de ces années de recherche. Ce travail ne peut s'achever sans les remercier.

"La reconnaissance est la mémoire du cœur"

Hans Christian Andersen

En premier lieu, j'aimerais adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse, le professeur Pierre Devolder. Merci Pierre de m'avoir confié ce projet, de m'avoir encouragée et surtout de m'avoir soutenue pendant les moments les plus difficiles de cette période. Merci aussi pour le temps conséquent que tu m'as accordé et pour tes qualités scientifiques et humaines. C'était un honneur de travailler avec toi. Merci pour tout !

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon projet et qui, lors de ma défense privée, m'ont apporté de très précieux conseils et remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer la qualité de mon travail. Merci Michel d'avoir tout de suite accepté de présider mon jury, merci pour ta disponibilité, tes conseils et ton aide précieuse après la défense privée. Merci Griselda, Abderrahim et Pierre pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail et pour vos conseils très utiles.

Je tiens à exprimer ma gratitude à AG Insurance qui a financé cette thèse et particulièrement à mon comité de pilotage pour son suivi, son encouragement et ses conseils. Merci Jean-Michel, Marleen, Karel et Marc pour la richesse de tous nos échanges et nos discussions à propos de l'avancement de ma thèse.

Je remercie également ma société ADDACTIS BELUX de m'avoir permis de concilier mon travail en tant que consultante et mon travail de thèse. Merci de m'avoir fait découvrir le côté pratique de mes recherches à travers les missions qui m'ont été confiées et qui m'ont aidée à adapter mes recherches à la réalité du marché des assurances et des fonds de pension.

Je remercie chaleureusement tous les chercheurs, enseignants et membres du personnel de l'ISBA. Merci Sophie, Tatiana, Nadja et Maguy pour votre aide et votre sympathie. Merci Nancy pour ton aide et ton support administratif tout au long de ma période de thèse. Un merci particulier à mes collègues de bureau, merci Marco, Anne, Federico, Jennifer, Diane, Alina et Sylvie, merci à tous les autres chercheurs de l'ISBA pour leur contribution à l'excellente ambiance de travail.

La réussite de ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien sans limite de toute ma famille. En particulier celui de mes chers parents. Ce travail n'aurait pas été réalisé sans leurs encouragements et la confiance qu'ils ont toujours eue en moi. Si j'en suis là aujourd'hui, c'est grâce à leur amour, leur éducation et toutes les bonnes valeurs qu'ils m'ont transmises. Maman, tu es et tu as toujours été une merveilleuse maman, intelligente et sensible à la fois. Tu m'as inculqué l'amour de la vie, la patience et la meilleure façon de combiner vie professionnelle et rôle de maman. Ton dévouement et tes sacrifices ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je ne peux qu'être fière d'avoir une maman si extraordinaire.

Papa, j'ai toujours été fascinée par ta personnalité, ta grande culture et ton ouverture d'esprit. Je suis fière d'être la fille d'un si grand homme. Merci d'avoir toujours cru en moi, de m'avoir appris à aller jusqu'au bout de mes ambitions, et d'avoir su me donner toutes les chances pour réussir. De si loin, rien qu'en pensant à votre joie tout en me serrant dans vos bras et en me félicitant d'être enfin docteur, vous me redonniez de la force et de la persévérance. Cette thèse est la vôtre aussi. Je vous aime !

Je remercie chaleureusement tous mes frères et sœurs pour leur soutien constant et leurs encouragements pendant toutes mes années d'études. Un merci spécial à Imane d'avoir toujours été à côté de moi, de ville en ville et de pays en pays ☺, merci d'avoir cru en ta petite sœur.

Je remercie toutes mes tantes et oncles qui m'ont soutenue et aidée à tracer mon chemin. Un merci tout particulier à Souad, Zoubida, Karim et Mahjouba de m'avoir éclairée et épaulée. Merci aussi d'avoir été toujours là quand j'avais besoin de vous. J'espère de tout cœur être à la hauteur de votre confiance et de vos attentes.

Je tiens à remercier également mes beaux-parents pour leur appui et leurs encouragements. Merci d'avoir cru en moi et d'avoir été de tout cœur avec moi pendant toute cette période et de m'avoir réservé tant d'amour et de tendresse.

Un grand merci à la petite famille Gourri. Un merci particulier et chaleureux à Saadia et Noureddine. Vous avez marqué cette période par votre amour, votre soutien et votre suivi des moindres détails de cette thèse. De tout cœur merci !

Mes derniers remerciements, mais non des moindres, vont à ma toute petite famille. J'ai tout le plaisir de remercier mon mari pour son soutien sans relâche, sa patience et ses encouragements. Merci Zakaria de m'avoir fourni les meilleures conditions pour accomplir ce projet. Merci d'avoir supporté mes humeurs au gré de cette thèse et d'avoir fait preuve d'un grand cœur et d'un amour inconditionnel. Merci pour tes corrections, tes aides et idées enveloppées d'une grande finesse intellectuelle. Certes les mots ne suffisent pas pour t'exprimer mon amour et ma gratitude, mais saches que tu es unique et exceptionnel !

Je réserve à la fin un merci tout doux à mon petit soleil Ziad. Merci mon grand d'avoir été sage quand maman avait besoin de se concentrer. Ton amour, tes sourires et tes câlins m'ont fourni un cadre de vie agréablement stimulant et m'ont permis de travailler avec plus de persévérance et de volonté. Merci mon cœur !

Table des matières

Introduction	1
1 Plans à contributions définies : Actif LogNormal	17
1.1 Introduction	18
1.2 Cadre général	19
1.3 Mesures de risque	21
1.3.1 Probabilité de défaut	21
1.3.2 Capital de solvabilité	23
1.4 Cas des primes périodiques	27
1.4.1 Probabilité de défaut	29
1.4.2 Capital de solvabilité	32
1.5 Conclusion	35
2 Plans à contributions définies et processus de Lévy	37
2.1 Introduction	38
2.2 Processus de Lévy	39
2.2.1 Processus de diffusion à sauts de Merton (MJD)	42
2.2.1.1 Définitions et généralités	42
2.2.1.2 Applications à un plan de pension de type DC	43
2.2.1.3 Probabilité de défaut	44
2.2.1.4 Value at risk	45
2.2.1.5 Tail Value at risk	47

2.2.2	Processus Variance Gamma	50
2.2.2.1	Cadre général	51
2.2.2.2	Application à un plan DC	52
2.2.2.3	Approximation du quantile par la méthode de Cornish-Fisher	53
2.2.2.4	Value at risk	56
2.2.2.5	Capital de solvabilité	58
2.3	Comparaison : Black& Scholes versus Processus de Lévy	59
2.3.1	Modèle de Black& Scholes versus modèle diffusif de Merton à sauts (MJD)	59
2.3.2	Modèle de Black& Scholes versus Processus Variance Gamma	64
2.4	Conclusion	67
3	Calibration et impact du taux minimum garanti	69
3.1	Introduction	70
3.2	Processus de Lévy : Estimation des paramètres	71
3.2.1	Test numérique et comparaison avec le modèle de Black&Scholes	74
3.3	Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?	77
3.3.1	Aperçu général sur la loi belge sur les pensions complémentaires (LPC)	77
3.3.2	Calcul du niveau de solvabilité d'un plan de pension dans le cadre de la loi LPC	78
3.3.2.1	Actif mixte	78
3.3.2.2	Capital de solvabilité	82
3.4	Conclusion	86
4	Mesure de solvabilité des plans de pension à prestations définies	87
4.1	Introduction	88
4.2	Cadre général	90
4.3	Actif lognormal :	90

4.3.1	Probabilité de défaut sans capital supplémentaire	93
4.3.2	Approche Value at risk et capital de solvabilité	95
4.3.3	Analyse de l'impact des paramètres	97
4.3.4	Solvabilité du plan et approche de ruine	100
4.4	Actif à sauts aléatoires : Processus Variance Gamma	104
4.4.1	Mesures de solvabilité	106
4.4.1.1	Probabilité de défaut	106
4.4.1.2	Capital de solvabilité	108
4.5	Conclusion	111
5	Impact de la mortalité sur les plans de pension	113
5.1	Introduction	114
5.2	Généralités	115
5.2.1	Distribution de survie	116
5.2.2	Intensité de mortalité	116
5.2.3	Mortalité déterministe	117
5.2.4	Mortalité stochastique	118
5.3	Mesure de solvabilité	120
5.3.1	Probabilité de défaut	121
5.3.1.1	Probabilité de défaut sans prise en compte du risque financier .	125
5.3.1.2	Probabilité de défaut sans prise en compte du risque de mortalité	127
5.3.2	Capital de solvabilité	129
5.3.2.1	Capital de solvabilité risqué	129
5.3.2.2	Capital de solvabilité non risqué	133
5.4	Conclusion	141
	Conclusion	143

Table des figures

1	L'évolution prévue du ratio du nombre de personnes âgées de plus de 65 ans de 15 pays de l'Union Européenne	2
1.1	Probabilité de défaut	22
1.2	Capital de solvabilité	25
1.3	Probabilité de défaut : cas des primes périodiques	31
1.4	Comparaison des probabilités de défaut : Prime unique versus Primes périodiques	31
1.5	Primes périodiques-Capital de solvabilité	33
1.6	SC primes périodiques vs prime unique	34
1.7	Capital de solvabilité	34
2.1	Probabilité de défaut MJD	45
2.2	Capital de solvabilité avec le processus MJD	50
2.3	Projection du discriminant Δ sur 30 années	55
2.4	Projection du paramètre C sur 30 années	55
2.5	Domaine de validité de K et S pour l'estimation Cornish-Fisher	56
2.6	Value-at-risk en fonction de l'horizon T	57
2.7	Évolution de la marge d'erreur entre les méthodes CF et MC	58
2.8	Capital de solvabilité non risqué	59
2.9	Comparaison de probabilités de défaut-MJD-vs-BS	63
2.10	Comparaison du capital de solvabilité-MJD-vs-BS	64
2.11	Capital de solvabilité Variance Gamma-Black Scholes	67

3.1	Evolution de la charge de l'employeur depuis l'instauration de la loi (LPC) . . .	78
3.2	Capital de solvabilité	84
3.3	Capital de solvabilité : $x_b = 75\%$, $x_c = 5\%$ et $x_s = 20\%$	84
3.4	Capital de solvabilité : $x_b = 5\%$, $x_c = 5\%$ et $x_s = 90\%$	85
4.1	Probabilité de défaut	94
4.2	SC en pourcentage du passif actuariel	96
4.3	Capital de solvabilité en fonction du facteur de corrélation	98
4.4	Capital de solvabilité en fonction de l'horizon de temps	99
4.5	Capital de solvabilité en fonction de l'horizon du temps	99
4.6	Probabilité de ruine en fonction du temps résiduel ($T - t$)	102
4.7	Capital de solvabilité nécessaire pour une probabilité de ruine $1 - \alpha_{T-t}$	104
4.8	Probabilité de défaut BS vs VG	107
4.9	Capital de solvabilité BS vs VG	109
4.10	Variance VG et BS	110
5.1	Espérance de vie à 60 et 65 ans par sexe, moyenne de l'OCDE, 1960-2050	114
5.2	Probabilité de défaut	123
5.3	Volatilité en fonction de l'horizon de temps	124
5.4	Probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps	125
5.5	Probabilité de défaut sans prise en compte du risque financier	126
5.6	Probabilité de défaut sans prise en compte du risque de mortalité	127
5.7	Comparaison de probabilité de défaut	128
5.8	Capital de solvabilité risqué	130
5.9	Capital de solvabilité sans prise en compte du risque financier	131
5.10	Capital de solvabilité sans prise en compte du risque de mortalité	132
5.11	Comparaison de capital de solvabilité	132
5.12	Impact de la volatilité de mortalité sur le niveau de solvabilité du plan	133
5.13	Value at risk	139

5.14 Capital de solvabilité non risqué	139
5.15 Capital de solvabilité risqué et non risqué	141

Introduction

Système de pension en Belgique

Un plan de pension, ou un régime de retraite, est un dispositif collectif de protection des personnes âgées basé sur des règles communes et couvrant une population spécifique (ex. : régime des salariés, régime des fonctionnaires, régime agricole... etc). Les régimes de retraite constituent une avancée majeure et un des grands acquis sociaux de toute l'Europe du XXe siècle. La situation démographique sous l'effet du phénomène du "Baby-boom"¹ combiné à l'allongement constant de la durée de vie, a eu comme conséquence l'augmentation du ratio du nombre de personnes à l'âge de la retraite. Ce ratio dépasserait même 50 % de la population totale à l'horizon 2050 pour l'Autriche, la Grèce, l'Espagne et l'Italie comme présenté dans la Figure 1 de l'étude [Laurent C. and Michèle L.] basée sur des statistiques de l'INSEE.

Cette croissance observée sur le ratio des retraités pose un problème majeur pour les systèmes de pension financés par la méthode de répartition. Plus de passifs donc plus de prestations à payer. Le deuxième phénomène préoccupant les États de l'OCDE est l'allongement de la vie humaine. Selon l'étude [OCDE], en 2050, l'âge moyen de la retraite dans les pays de l'OCDE atteindra pratiquement 65 ans pour les deux sexes, soit une hausse de près de 2.5 ans pour les hommes et 4 ans pour les femmes par rapport à 2010. L'espérance de vie devrait néanmoins progresser plus vite que l'âge de la retraite. Selon les prévisions, les gains d'espérance de vie observés entre 2010 et 2050 à l'âge de la retraite seront d'environ 3 ans pour les hommes et de 2.5 ans pour les femmes, toujours selon l'étude [OCDE].

Ainsi, dans un climat de débats passionnés entre partisans de la répartition et partisans de la capitalisation, les pays de l'OCDE mettent en œuvre des réformes de leur système de re-

1. Le baby-boom ou le « pic de la natalité » désigne la brusque remontée du taux de natalité observée dans les pays d'Europe juste après la fin de la Seconde Guerre mondiale.

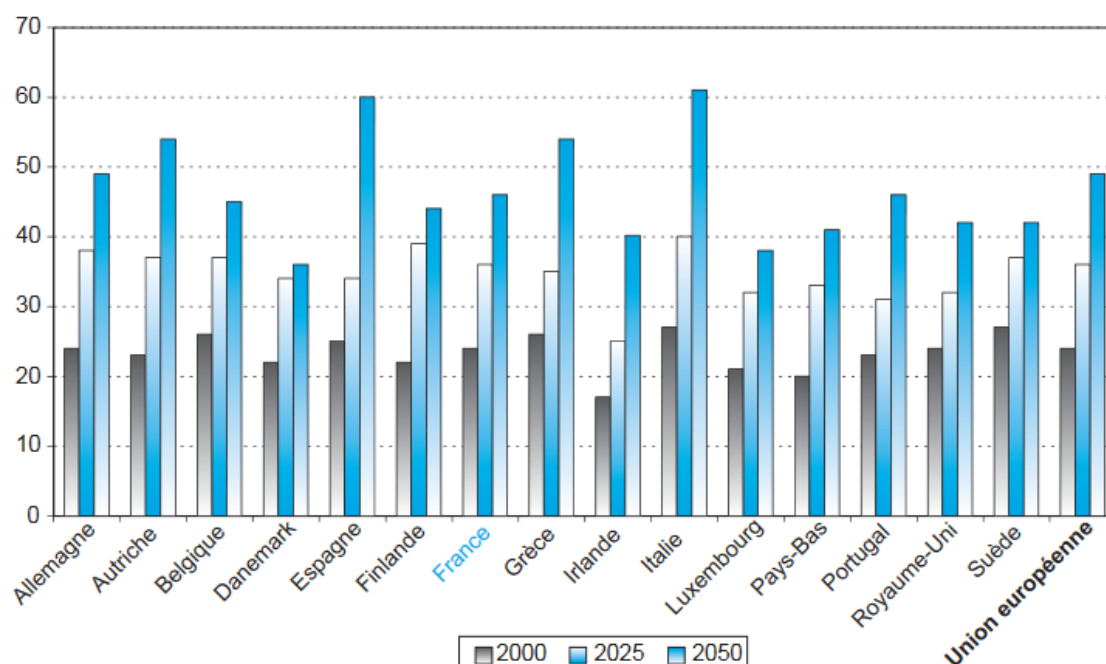


FIGURE 1 – L'évolution prévue du ratio du nombre de personnes âgées de plus de 65 ans de 15 pays de l'Union Européenne

traite permettant de garantir la pérennité du système de pension et une retraite convenable, tout en assurant un équilibre financier entre cotisations et prestations.

En Belgique, le système des pensions est présent dans différentes études et statistiques. Il est marqué par un taux d'activité bas, particulièrement pour les 55 – 60 ans et les 60 – 65 ans ([Chagny O. and Dupont G.]). Ce qui représente un problème réel pour le financement des pensions, puisque le financement des pensions en Belgique est basé sur la méthode de répartition.

Approche des trois piliers :

Le système des pensions belge a vu s'installer l'approche des trois piliers (voir [Glossaires de l'OCDE]). Selon ce concept, le régime de retraite est une combinaison de trois composantes complémentaires :

1er pilier : pensions légales organisées par la sécurité sociale. Cette composante inclut les employés du secteur privé et du secteur public ainsi que les indépendants.

2ème pilier : complément à la sécurité sociale, appelé pension complémentaire (assurance groupe ou fonds de pension). C'est un avantage extralégal organisé par l'entreprise ou

un secteur privé sur une base collective et financé par des cotisations périodiques versées par l'employeur ou l'employé.

3ème pilier : pensions complémentaires individuelles. Ce pilier concerne l'épargne individuelle, sous forme d'une épargne pension, assurance-vie, etc. Ce type d'épargne est encouragé par des avantages fiscaux, le montant bénéficiant de ces avantages étant plafonné.

La Belgique est un des pays s'inspirant du modèle des pensions dit « bismarkien », en y ajoutant des règles de pension minimale pour les plus pauvres (philosophie du filet de secours)(voir [[Traute M.](#)]).

Le travail présenté dans ce rapport s'intéresse particulièrement aux pensions complémentaires du 2e pilier.

Pensions complémentaires :

Dans le cadre des pensions complémentaires du deuxième pilier, on distingue deux types de pensions complémentaires selon que le système définit a priori le niveau de financement (les cotisations) permettant de constituer au terme une épargne accumulée pour l'affilié ou qu'il définit la hauteur des prestations octroyées en fonction des revenus de l'affilié perçus pendant sa vie active (voir [[Devolder P.](#)]). Ainsi, on peut distinguer deux principaux systèmes :

1- Les plans à contributions définies

Les plans à contributions définies définissent préalablement le niveau des cotisations que verse périodiquement l'employeur (ou le travailleur). Ils sont basés sur une optique d'épargne, puisque l'accumulation de ces cotisations constitue une sorte d'épargne pour l'affilié, qu'il pourra toucher à l'âge de la retraite. Les prestations allouées sont calculées en fonction des primes versées et du rendement garanti par le plan. L'avantage de ce type de régimes est que le coût payé est connu a priori. Néanmoins les deux principaux inconvénients de ce type de plans sont le niveau réel des prestations qui est inconnu par les affiliés et aussi l'exposition des affiliés aux risques des marchés financiers dans le cas où le rendement est lié à des produits de placement risqués ou de rendement incertain comme expliqué dans l'étude [[OCDE](#)].

Un plan de type « Contributions Définies » prédéfinit la valeur des contributions versées par l'employeur ou l'affilié. Les formules les plus fréquentes sont les suivantes :

1. Cotisations en pourcentage des salaires.
2. Cotisations en pourcentage des salaires avec prise en compte d'un plafond.
3. Cotisations par tranche de salaire. Exemple : $x\% \min(\text{salaire}, \text{plafond}) + y$
4. Cotisations en pourcentage croissant des salaires. Ce pourcentage croît en fonction de l'âge de l'affilié.
5. Cotisations par tranche de salaire en pourcentage croissant : combinaison des deux formes 3 et 4.

2- Les plans à prestations définies :

Ces régimes sont fondés sur une optique de revenus de remplacement. Les prestations qui seront perçues par l'affilié sont explicitement définies. Elles sont généralement exprimées en fonction du dernier salaire de l'affilié ou des salaires de plusieurs années de carrière et du nombre d'années de service total. Néanmoins, il existe une forme de prestations définie égale à un montant forfaitaire tel qu'une rente mensuelle fixe.

Pratiquement, ces régimes définissent un capital ou une rente sous forme de revenu périodique au profit de l'affilié à partir de l'âge de sa retraite jusqu'à son décès ou éventuellement un pourcentage de ce capital ou cette rente au profit d'une tierce personne survivante (conjoint par exemple) après le prédécès de l'affilié.

Dans le cadre des plans à prestations définies, les éléments principaux dans la définition des prestations de retraite sont :

1. Le salaire d'une ou de plusieurs années de service.
2. Nombre d'années de service.
3. Plafond définissant une limite aux salaires considérés et permettant d'appliquer le critère des tranches de salaire.

4. Éléments soustractifs : certains régimes définissent des formules prenant en compte des prestations déjà octroyées par d'autres plans (exemple : cas de superposition du pilier 1 au pilier 2).

L'avantage des plans à prestations définies est que les prestations sont sécurisées et connues par les affiliés. En revanche, le coût demeure immaîtrisable. Ainsi, l'évolution des coûts est un des facteurs favorisant la tendance vers les régimes à contributions définies observée ces dernières années.

Solvabilité des plans de pension

Les engagements de pension doivent être garantis et sécurisés contre les risques et tout particulièrement le risque de placement. En particulier, les pensions complémentaires sont exposées à ce risque qui doit être correctement évalué afin de se prémunir contre le risque d'insolvabilité, et donc de ne pas pouvoir honorer les engagements envers l'affilié.

À cette fin, l'employeur fait appel à un organisme externe qui gère les réserves de pension. Cet organisme peut être une institution de pension (fonds de pension) ou un assureur de groupe.

Dans le cadre de la solvabilité de l'organisme de pension, la valeur des placements doit être au moins égale à la valeur des engagements. L'organisme qui gère les pensions peut ou non garantir un rendement sur les réserves constituées. Dans le cas des assurances de groupe, un rendement déterminé est garanti (exemple Branche 21). De ce fait, le risque de placement est supporté par l'assureur. Au contraire, dans le cas des fonds de pension, ce risque reste à charge de l'employeur.

Une assurance de groupe est soumise aux réformes européennes de type « Solvency2 ». Dans le cadre de cette réglementation, la compagnie doit démontrer que ses fonds propres sont suffisants pour couvrir ses risques.

Le premier pilier de cette directive est consacré aux exigences quantitatives. En effet, la compagnie d'assurance doit respecter des règles strictes de valorisation de ses actifs (placements) ainsi que ses passifs (engagements) ([[Sandstrom A.](#)],[[Eling M. Schmeiser H. Schmit J. T.](#)], ou [[Dreyfuss M. L.](#)]). Sous ces conditions, la réglementation exige en outre un niveau de capital dit de solvabilité (ou SCR : « Solvency Capital Requirement ») qui doit être détenu par la compagnie. Ce capital est calculé soit en appliquant la formule standard de la réforme, soit en utilisant un modèle interne complet ou partiel.

Le travail de cette thèse s'inspire particulièrement de la philosophie sous-jacente de cette directive.

Cadre stochastique et aspect long terme dans la littérature

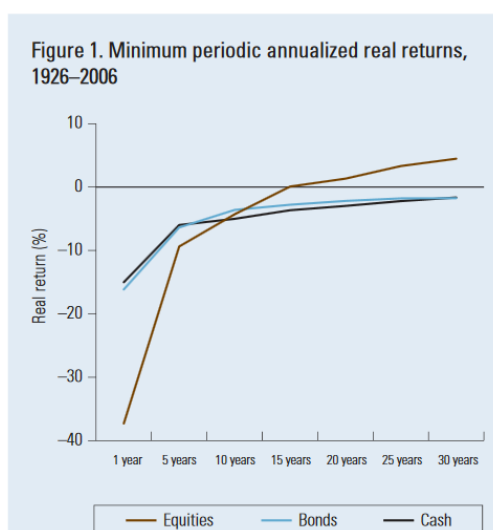
L'étude de solvabilité des plans de pension est avant tout une étude de risque global qui concerne plusieurs aspects de ces organismes. Les mesures de risque qui déterminent les besoins de solvabilité des plans de pension sont d'abord basées sur une bonne valorisation de l'actif (évolution des contributions) et du passif (engagements) de la compagnie. L'actif est représenté par son portefeuille financier. Ce dernier est souvent composé de différents types de titres financiers. Les plus classiques sont : action, obligation et cash .

L'étude de Harry Markowitz [Markowitz H.] montre que cette diversification du portefeuille financier a généralement pour effet de réduire le risque appelé « non systématique » du portefeuille et de maximiser sa rentabilité. Cependant, le suivi et particulièrement la modélisation de l'évolution de la valeur du placement des primes perçues par les affiliés dans ce type de compagnies doivent faire l'objet d'une étude cohérente avec la réalité des marchés financiers.

La modélisation des cours boursiers a fait l'objet de nombreuses études. On en cite, [Merton R.C.] où des calculs stochastiques ont été introduits dans la théorie de la finance. Ce travail a été étendu dans [Merton R.C.] en résolvant en temps continu le problème posé par [Samuel P.] et [Hakansson N.H.]. Une théorie de portefeuille dynamique a ainsi été développée à l'instar des théories des modèles statiques [Markowitz H.] .

Le deuxième aspect qui a motivé notre travail est l'impact des garanties de long terme sur la solvabilité des plans de pension. À cet égard, et particulièrement dans le domaine de la finance, des travaux comme [Campbell J. and Viceira L.], [Lee W.Y.], [Bodie Z.] ou [Thorley S.] ont prouvé que les stratégies d'investissement d'un portefeuille dépendent du temps résiduel et que l'horizon de temps est un facteur essentiel dans le choix de ces stratégies. Par exemple, dans le cadre des investissements risqués sur des longues échéances, les études [Kritzman's M.] et [Samuel P.] défendent l'hypothèse que les investissements en action sont moins risqués sur des longues périodes que sur des courtes périodes.

Dans ce même cadre, l'étude [Bennyhof D. G.] analyse le rapport risque/rendement du passé, et suggère que ce rapport est nettement amélioré dans l'avenir. Ce qui signifie que dans le cadre d'une allocation stratégique du portefeuille, un investissement de long terme permettrait d'assumer le caractère incertain des placements risqués dans des actifs de type « Equity ». On y trouve le résultat de l'historique des performances de trois types d'actifs différents : trésorerie, obligation et action. Selon cette étude fondée sur [Siegel J.J.], l'investissement en action, malgré son caractère risqué, renverse la tendance et devient l'investissement le plus rentable pour les longs horizons (au moins 15 ans). On y trouve donc le résultat suivant qui soutient cette hypothèse :



Littérature des plans de pension DC et DB

Les plans de pension de type DC et de type DB ont fait l'objet de plusieurs recherches et études scientifiques et économiques. La comparaison des compromis et risques sous-jacents entre régimes DC et régimes DB a été le sujet de l'étude [Bodie Z. Marcus A.J. and Merton R.C.]. En se basant sur le taux de remplacement, cette étude montre que les plans DB ont l'avantage d'offrir une stabilité des taux de remplacement. La valeur des prestations dans le cadre des plans DB ne dépend pas des fluctuations des marchés financiers mais uniquement de l'inflation des salaires qui est assumée par l'employeur. D'un autre côté, selon la même étude, les plans de type DC permettent à l'employé de définir à tout moment la valeur présente de ses prestations acquises.

Dans le cadre des plans de pension de type DC garantissant un taux fixe, l'étude [Deelstra G. Grasselli M. and Koehl PF] a été menée dans un environnement de temps continu, en modélisant stochastiquement les contributions de pension investies par le gestionnaire dans les marchés financiers et puis en proposant des formules explicites des stratégies d'in-

vestissement optimales .

Dans une même optique, les plans de pension de type DB ont fait l'objet de plusieurs études. [Sundaresan S. and Zapatero F.] par exemple, ont fourni une étude d'allocation stratégique du portefeuille dans une perspective de maximisation de l'utilité du surplus actif/-passif d'un plan de pension de type DB. [Thorley S.] et [Samuel P.] ont aussi proposé des outils stochastiques de contrôle optimal et d'allocation stratégique du portefeuille. Néanmoins, la solvabilité des plans de pension DC et DB intégrant le caractère du long terme des engagements et en se basant sur une étude de risque sur de tels horizons n'a pas été jusqu'ici traitée.

Pensions complémentaires : cadre légal et exigences

Depuis 2003, les pensions complémentaires en Belgique occupent une place importante dans le cadre d'un système de concertation sociale. En effet, outre leur nature d'avantage extralégal octroyé par l'employeur à ses travailleurs salariés, les pensions complémentaires sont soumises à une série de règles d'ordre social dans le but de protéger les travailleurs salariés.

Par la loi belge sur les pensions complémentaires connues sous l'appellation « LPC/WAP », entrée en vigueur en date du 28 avril 2003 et puis modifiée en date du 3 janvier 2016, le législateur belge a visé trois objectifs principaux :

Garantir des pensions suffisantes :

Cet objectif est défini dans [CRP] comme étant une garantie que les pensions complémentaires puissent, de manière raisonnable, permettre aux affiliés de maintenir leur niveau de vie quand ils passent à la retraite. Étant donné que la pension légale du 1er pilier seule constitue un recul en termes de revenu pour l'affilié en comparaison avec son dernier revenu de sa vie d'actif.

Capitalisation des pensions complémentaires :

Cet objectif se concrétise par une exigence de l'utilisation de la technique de capitalisation pour financer les pensions complémentaires. En effet, comme indiqué auparavant, le système de pension légale en Belgique repose sur la méthode de répartition. Cette méthode

est sensible au rapport actifs/retraités, puisque dans le cadre d'un système de pension à répartition, ce sont les actifs d'aujourd'hui qui financent la pension des retraités actuels. Ceci pose un vrai problème de financement des pensions légales dans le contexte actuel, étant donné que le nombre de retraités est en croissance continue et le nombre d'actifs ne suit plus la même tendance, voire, selon l'étude, [OCDE], le nombre d'actifs connaîtra une importante baisse aux cours des années qui viennent.

Un autre aspect de la capitalisation qui en fait une technique de caractère plus sûr par rapport à la technique de répartition, est le fait que sous un mode de répartition, les pensions des retraités disparaissent en cas de faillite (ou insolvabilité de l'employeur). En effet, l'employeur s'engage sur des longs termes vis-à-vis de ses salariés, puisque les pensions ne seront touchées qu'au moment du départ à la retraite. Pour un jeune de 25 ans par exemple, cela constitue un engagement sur un horizon de 40 ans. Rien ne garantit donc que l'entreprise des salariés ne disparaisse pas avant de tels horizons. Ce risque est évité dans le cadre d'un système de capitalisation, puisque les provisions seraient déjà constituées en cas de défaut de l'employeur.

Ces provisions font l'objet d'une série de mesures dans la perspective de les rendre plus sûres. C'est donc une exigence à double volet : Externalisation des pensions et solvabilité des plans de pension.

Rendre les pensions complémentaires plus sûres :

Le législateur a souhaité par cette obligation protéger les affiliés des effets dévastateurs des marchés financiers. En effet, pour les plans « DB » ce risque pèse uniquement sur l'organisateur du plan, puisque comme mentionné précédemment, de par leur nature, les plans DB s'engagent auprès des affiliés sur la base d'une formule des prestations connue préalablement. Contrairement à cela, dans le contexte précédent à la loi LPC/WAP, les réserves des affiliés aux plans de pension de type DC étaient directement exposées aux risques financiers, du fait que le rendement sur leurs cotisations était laissé au résultat de leur placement.

La loi LPC a préservé les affiliés de ce risque relatif aux plans DC, en exigeant aux employeurs un rendement minimum sur les cotisations (personnelles et patronales).

Le législateur exige en outre des garanties que les pensions promises aux travailleurs sont assurées. Ce principe prend deux dimensions : l'externalisation et la solvabilité.

- **L'externalisation des pensions : obligation de l'externalisation de l'engagement de Pension :**

En Belgique, le principe de l'externalisation des pensions complémentaires a été instauré la première fois par l'arrêté royal du 14 mai 1985.

Ce principe a été étendu, dans le cadre de la loi « LPC/WAP », aux engagements de pension individuelle en 2012 par la loi dite « loi-programme du 22 juin 2012 ». Au vu de cette loi, un employeur ne peut plus gérer lui-même le financement et le paiement des prestations de ses salariés. Dans le cadre des pensions complémentaires, l'employeur est tenu de confier le financement et la gestion de son engagement de pension à un organisme externe. Cet organisme se charge de la gestion des cotisations (placement dans des actifs financiers), et versera les pensions complémentaires aux affiliés au moment de leur départ à la retraite. Cette externalisation a pour but de protéger les réserves de pension constituées en cas de faillite de l'employeur (voir [CRP] et [Van Damme A. and De Somviele I.]). Dans cette perspective, deux types d'organismes ont apparu :

- Compagnie d'assurance de groupe : c'est un contrat d'assurance souscrit par l'employeur en faveur de son personnel. Ce contrat assure au salarié bénéficiaire, une pension complémentaire et éventuellement d'autres couvertures de type décès et invalidité. Deux types d'assurance-vie peuvent être contractées dans le cadre des pensions complémentaires : des contrats d'assurance-vie de la branche 21, où l'assureur s'engage à garantir un rendement fixe sur les cotisations, et un contrat d'assurance-vie de type branche 23, dans le cadre duquel, il n'y a pas de garantie sur le rendement. Ce dernier est le résultat des performances des produits financiers dans lesquels les contributions sont investies.

- Institutions de retraite professionnelle (fonds de pension ou IRP) : un tel organisme peut être défini comme étant une entité de retraite professionnelle indépendante de l'entreprise. L'employeur s'engage auprès de l'IRP à payer une pension complémentaire à ses travailleurs moyennant le versement des cotisations patronales et éventuellement personnelles (par le salarié) à ce même organisme. Contrairement aux assureurs groupe, les IRP ne garantissent aucun rendement sur les cotisations versées.

- **Solvabilité du plan de pension :**

En Europe, l'organisme de pension, qu'il soit une assurance groupe ou un fonds de pension, est soumis à une série d'exigences en matière de contrôle prudentiel. Les assurances groupe sont soumises aux normes de la directive Solvency 2, tandis que

les IRP sont concernés par la directive IORP. Ces mesures obligent les organismes de pension à valoriser leurs engagements en justifiant la bonne couverture de ces derniers moyennant des actifs suffisants. Afin d'éviter un défaut de l'institution en conséquence d'une insuffisance d'actifs pour couvrir les obligations, ces directives exigent en outre, un montant supplémentaire en matière de fonds propres qui constitue une preuve de solvabilité de l'organisme aux yeux du législateur.

Le travail de cette thèse s'inspire particulièrement de la philosophie sous-jacente de ces directives.

Dans le cadre de notre étude nous nous intéressons particulièrement à l'impact des horizons longs qui caractérisent les engagements de pension.

Le superviseur européen (EIOPA) a quant à lui publié une série de mesures dans le cadre de la réglementation Solvency2 visant à adapter ces exigences aux particularités des produits de longues garanties. Pour ce faire, des règles ont été introduites et d'autres ont été adaptées au profil des produits de longue garantie. Cette étude est connue sous le nom « Mesures branches longues » ou « LTGA » (Long Term Guarantee Assessment) ([EIOPA]). Comme expliqué dans [ACPR], ces mesures ont principalement changé les hypothèses sur le comportement des assurés, souscripteurs ou bénéficiaires des contrats. La meilleure estimation (Best Estimate) des provisions techniques a notamment été corrigée en ajustant la courbe des taux (jugée trop basse) pour des produits de longues échéances.

Néanmoins, la durée des engagements des produits de longue garantie, comme les engagements de pension, n'a pas été prise en compte au niveau de la solvabilité proprement dite. En particulier, la value at risk est toujours utilisée sur un horizon d'une année.

Nous trouvons ces mesures à court terme incompatibles avec la nature même des engagements de pension. Ce point constitue l'axe principal du travail mené dans le cadre de cette thèse.

Les contributions de cette thèse

À travers le travail de cette thèse, nous essayons de donner une nouvelle méthode d'évaluation des besoins de solvabilité des plans de pension en tenant compte des éléments quantitatifs relatifs aux engagements de pension de long terme. Nous avons défini le niveau de solvabilité de ce type d'organisme non seulement sur un horizon d'une année comme c'est le cas dans les directives Solvency2/LTGA, mais sur des horizons de plusieurs années. Dans cette perspective, nous avons modélisé l'évolution des engagements (passif) et des contributions (Actif) à travers le temps en respectant l'aspect contractuel et le profil de risque de chaque type de plans. Nous synthétisons la contribution de ce travail comme suit :

Solvabilité des plans de pension de type DC :

Dans le cadre des plans DC, il faut distinguer deux types d'engagement. Un engagement sans garantie de rendement et un engagement avec garantie de rendement. Dans le premier cas, l'employeur ne garantit pas de rendement fixe, ainsi les prestations de pension dépendent uniquement de ce que rapportent les placements des contributions (par exemple dans les produits de la branche 23). Dans le cadre d'un tel contrat, la couverture des engagements par les actifs est d'emblée garantie. Le deuxième type d'engagement de pension est un engagement qui garantit un rendement fixe sur les cotisations. Ce qui signifie que tout risque de placement est assumé par le plan. La première étape du travail mené dans le cadre de cette thèse porte sur une étude de solvabilité des plans DC avec garantie de rendement fixe.

Dans le cadre d'un plan DC à rendement garanti, la valeur des engagements est le résultat de la capitalisation des primes versées par l'employeur (ou l'employé) au taux garanti sur toute la durée des engagements. Au niveau de l'actif (évolution des contributions), sa valorisation dépend du type de placement dans lequel les contributions sont investies. Dans le cas d'un placement risqué, nous avons mené notre étude dans deux environnements différents : Gaussien et Lévy.

Dans un environnement Gaussien, nous avons étudié la solvabilité d'un plan de pension de type DC en supposant que son actif est d'une dynamique lognormale (Chapitre 1). Cette étude est une extension du travail proposé auparavant dans [Devolder P.]. Nous avons ajouté à cette étude une analyse de l'impact de la périodicité des versements des contribu-

tions. À cette fin, nous avons étudié le cas des primes périodiques à la différence de l'étude [Devolder P.] où seul le cas des plans à prime unique a été étudié.

En effet, nous voyons dans le caractère des primes périodiques une source de risque pour le gestionnaire du plan. Ce dernier établit sa stratégie d'investissement sur des primes futures qu'il n'a pas encore perçues.

En revanche, la solvabilité d'un plan de pension à primes périodiques est plus complexe à étudier en comparaison avec le cas d'une prime unique.

En effet, les contributions ne sont pas investies en même temps. Même dans le cas d'un placement des primes dans le même titre financier, la différence des maturités des investissements, impose à l'actif une dynamique complètement différente du cas d'une prime unique. Concrètement, ceci se traduit par une distribution du risque défini par la valeur Actif-Passif qui n'est pas connue. Nous avons donc apporté une nouvelle étude de solvabilité des plans de pension à primes périodiques sur des horizons pluriannuels en utilisant la méthode numérique de Monte Carlo.

Dans un environnement Lévy, nous avons établi une nouvelle étude de solvabilité des plans de pension de type DC. Cette étude, présentée dans le Chapitre 2, concerne particulièrement le risque de marché. Nous avons étudié ce risque moyennant des processus à sauts aléatoires de type « Lévy » pour l'actif du plan. Nous avons apporté une comparaison des besoins de solvabilité provenant de chacun des modèles utilisés. Par cette étude, nous montrons que quel que soit le modèle choisi dans la valorisation de l'actif risqué, les besoins de solvabilité des plans de pension de type DC diminuent en fonction de la durée des engagements.

Nous avons conclu notre étude sur les plans de pension de type DC en appliquant le principe du taux minimum garanti exigé par la loi belge sur les pensions complémentaires. En effet ce travail a été effectué au moment où la loi sur les pensions complémentaires de l'arrêté royal de 2003 était encore d'application (avant la loi du 18 décembre 2015). Nous avons particulièrement été intéressés par l'aspect du taux minimum garanti par cette loi, en l'occurrence 3.75% sur les cotisations personnelles et 3.25% sur les cotisations patronales. Ce qui est complètement déconnecté de la réalité du marché, et en particulier, des taux proposés par les assureurs pour des produits de même type de garantie. Dans ce cadre, nous avons proposé une étude de solvabilité d'un plan de pension de type DC en s'alignant avec la loi LPC/WAP. Nous avons combiné ceci à une diversification du portefeuille d'investissement de l'actif. Notre étude, présentée dans le Chapitre 3, a traduit cette loi en besoins de sol-

vabilité sur toute la durée de la garantie du plan. Nous avons montré qu'une capitalisation des contributions perçues par le plan au taux minimum exigé sur un large horizon, requiert un capital de solvabilité excessivement élevé. Par cette étude, nous avons fourni une preuve qu'une garantie de 3.25 % dans les conditions économiques actuelles est intenable.

Solvabilité des plans de pension de type DB :

La deuxième étape de ce travail consiste à proposer un modèle de solvabilité pour les plans de pension de type DB en analysant les risques auxquels sont exposés ces organismes jusqu'à la maturité des engagements (Chapitre 4). Ce modèle est basé sur différentes mesures de risque (probabilité de défaut, probabilité de ruine et Value-at-Risk). Ces mesures sont calculées sur des longs horizons (et pas uniquement sur une année comme en Solvency2/LTGA)

L'aspect des longues garanties associé aux plans DB a été traité en même temps que deux sources de risque qui sont : le risque de marché (Equity) et le risque d'inflation des salaires. La longévité n'a pas été étudiée dans un premier temps, puisque seul le cas des prestations sous forme de capital est traité dans cette étude (c'est généralement le cas en Belgique). Comme méthode de financement, nous avons appliqué la méthode dite « Projected Unit Credit Cost » des normes IAS. Du côté de l'actif, comme c'est le cas pour les plans DC, nous avons mené notre étude dans deux environnements financiers différents : mouvement Brownien géométrique et processus de Lévy.

Pour les plans DB, cette étude nous a permis d'illustrer clairement l'effet de l'horizon des engagements sur les besoins de solvabilité. Nous avons montré que c'est un élément clé qui doit être considéré dans les mesures de solvabilité des plans de pension tant pour les plans de type DC que pour les plans DB et que les réglementations actuelles basées sur un horizon d'une année doivent adapter leurs mesures en fonction du profil des plans de pension en tenant compte de la durée des engagements. Nous avons montré dans cette même étude que la corrélation entre les salaires et les produits de placement financier est un facteur important à prendre en compte dans les stratégies d'investissement. Nous avons illustré son impact sur le niveau du capital nécessaire pour la solvabilité du plan.

Mortalité stochastique : impact sur la solvabilité des plans de pension

La dernière étape de ce travail consiste à intégrer le risque de mortalité dans la valorisa-

tion des engagements d'un plan de pension. Nous nous sommes limités à l'étude de l'impact de ce risque sur les plans de pension de type DC avec garantie de taux fixe.

Dans le Chapitre 5, nous proposons une analyse de l'impact de l'écart entre la mortalité déterministe et la mortalité stochastique. Nous avons calculé un niveau de capital de solvabilité en combinant le risque financier et le risque de mortalité. Notre étude confirme notre hypothèse sur l'impact de la durée des engagements sur la solvabilité d'un plan DC.

À la différence du risque financier qui s'atténue avec le temps, le risque de mortalité est encore plus significatif sur le long terme. Nous montrons cet impact par des mesures de risque dont les formules sont présentées dans le Chapitre 5. Nous présentons des résultats qui confirment que l'impact de la mortalité sur la solvabilité des plans DC est sous-évalué par les mesures de risque qui ne tiennent pas compte de toute la durée des engagements.

Chapitre 1

Plans à contributions définies : Actif LogNormal

Un plan à contributions définies est un plan de pension qui, pour chaque employé (désigné par l'affilié ci-après), définit une prime qui doit être versée régulièrement. Le montant de la prime ainsi que la périodicité de son paiement sont prédéfinis par le plan de pension. L'affilié (ou son employeur) s'engage à verser ce montant qui peut être un pourcentage fixe de son salaire. En contrepartie, la pension que touchera l'affilié lors de sa retraite (ou une tierce personne) n'est pas connue à l'avance, mais le plan de pension s'engage à garantir un taux fixe sur le rendement des cotisations de l'affilié. Le montant que l'affilié touchera à la fin n'est qu'une fonction de ce taux garanti et de la durée du placement des contributions.

Dans certains plans à contributions définies, l'affilié a le choix entre un montant fixe (lump sum) ou une rente viagère qu'il lui sera versée jusqu'à son décès. Pour ce travail, seul le premier cas a été traité. Ce chapitre traite le risque d'insolvabilité de ce type de plan, en supposant que l'actif financier évolue selon un mouvement Brownien géométrique, le passif est supposé déterministe.

Sommaire

1.1	Introduction	18
1.2	Cadre général	19
1.3	Mesures de risque	21
1.3.1	Probabilité de défaut	21
1.3.2	Capital de solvabilité	23
1.4	Cas des primes périodiques	27
1.4.1	Probabilité de défaut	29
1.4.2	Capital de solvabilité	32
1.5	Conclusion	35

1.1 Introduction

Par l'étude présentée dans ce chapitre, nous proposons un modèle de solvabilité des plans de pension de type DC avec garantie de rendement fixe. Pour ce faire, nous analysons d'abord l'impact quantitatif des exigences réglementaires sur ce type d'organismes, en l'occurrence la réglementation européenne "Solvency 2". En se mettant dans la même philosophie, on définit les besoins de solvabilité du plan DC en se basant sur des mesures de risque projetées sur des horizons pluriannuels. Nous essayons par cette mesure de mettre en lumière l'aspect des garanties de long terme.

En effet, même si le superviseur européen (EIOPA) a exigé des mesures adaptées aux produits de longue garantie, dans le cadre de la directive LTGA, ces engagements n'ont pas été considérés au niveau de la solvabilité proprement dite.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement à l'impact de la durée des engagements sur la solvabilité du plan DC.

Dans la littérature financière, la question des investissements à long terme a été traitée par différentes études. [Campbell J. and Viceira L.], [Lee W.Y.], [Bodie Z.] et [Thorley S.] ont prouvé que les stratégies d'investissement d'un portefeuille doivent dépendre du temps résiduel et que l'horizon de temps est un facteur essentiel dans le choix de ces stratégies.

[Kritzman's M.] et [Samuel P.] estiment même que les investissements dans des placements risqués de type « Equity » sont moins risqués sur des longues périodes que sur des courtes périodes.

La garantie de taux fixe dans le cadre d'un plan DC a également été étudiée par

[Deelstra G. Grasselli M. and Koehl PF] . Dans le cadre de cette étude, la valeur des contributions a été modélisée dans un cadre stochastique, ensuite des formules explicites sur les stratégies d'investissement ont été proposées.

De la même sorte, dans notre étude, nous nous intéressons à l'évolution des contributions qui sont investies dans des placements risqués pour une longue durée. Nous évaluons ainsi l'impact du risque financier sur la solvabilité d'un plan DC de longue durée d'engagement.

Sous ces hypothèses, nous proposons un modèle de solvabilité pour le cas d'une prime unique et aussi pour le cas des primes périodiques. Pour le cas des primes périodiques, nous évaluons le risque pris par le gestionnaire du plan qui doit définir sa stratégie d'investissement en comptant sur des primes futures. Nous montrons l'impact de la périodicité des

primes sur le niveau du capital de solvabilité.

Pour évaluer les besoins de solvabilité du plan étudié, nous valorisons le passif (les engagements) et l'actif (les contributions) et nous étudions la situation de défaut du plan sans capital supplémentaire. Ensuite, nous calculons le niveau du capital de solvabilité nécessaire à détenir pour honorer les engagements du plan pour toute la durée des engagements.

Pour ce chapitre, nous nous limitons à une étude de la situation de ruine uniquement à maturité et non pas à tout moment avant le terme du contrat. En effet, une étude de la situation de ruine à tout moment est plus coûteuse en termes de calcul numérique, particulièrement pour le cas des primes périodiques, et n'est pas en ligne avec les exigences de type "Solvency 2". Néanmoins, une étude de ruine à tout moment est proposée dans le Chapitre 4, réservé aux plans de pension de type DB.

Le risque de mortalité n'est pas traité dans ce chapitre. Nous supposons qu'il n'y a pas de décès avant l'âge de la retraite et que les prestations sont payées sous forme de capital et non pas en rentes viagères. Ainsi, le passif du plan est déterministe. Il représente le résultat de la capitalisation des primes au taux garanti. Du côté de l'actif, nous considérons que les contributions sont investies dans des titres risqués et que leur valeur évolue selon un mouvement Brownien géométrique.

1.2 Cadre général

Dans cette première partie du chapitre, on suppose que l'affilié paye une prime unique de valeur unitaire à la date initiale $t = 0$. En contrepartie, dans le cadre du plan DC étudié, un niveau de rendement sur cette cotisation lui est garanti moyennant un taux fixe qu'on note r_g .

À tout instant avant le terme du contrat, l'actif du plan est représenté par la valeur évolutive de cette contribution. On suppose que cette dernière est investie dans un placement risqué. On suppose que sa valeur évolue suivant un mouvement Brownien géométrique, solution de l'équation différentielle stochastique de Black&Scholes.

Le modèle de Black&Scholes [Black F. Scholes M.] est un des modèles classiques connus dans plusieurs domaines, parmi lesquels celui de la finance mathématique. Il est utilisé pour modéliser la valeur des produits financiers comme les options, les actions, l'immobilier... etc.

Parmi ses particularités, on cite le fait que sa solution i.e, le prix de l'actif sous-jacent, est un mouvement Brownien géométrique avec une volatilité σ et une dérive μ , toutes les deux constantes.

Définition 1.2.1. *Un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ en dimension n est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ défini sur un espace probabilisé (Ω, F, P) tel que :*

1. $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements indépendants, et $B_0 = 0$,
2. pour tout $0 \leq s \leq t$ $B_t - B_s \sim N_n(0, (t-s)I_n)$,
3. $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus presque sûrement continu.

En supposant que l'actif suit le processus stochastique de Black&Scholes, son equation différentielle est donnée par :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dw_t, \quad (1.1)$$

où

- dA : variation infinitésimale de la valeur de l'actif
- μ : rendement moyen de l'actif,
- σ : volatilité de l'actif,
- w : mouvement Brownien standard.

La solution de l'équation (1.1) , à un instant donné $0 \leq t \leq T$, où T est la date de maturité du contrat, est donnée par

$$A_t = A_0 e^{((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w_t)}, \quad \text{où } A_0 \text{ est la valeur de la cotisation initiale.} \quad (1.2)$$

Quant au passif noté par la suite L , sa valeur est représentée par la valeur capitalisée de la prime payée au taux fixe garanti. Elle dépend du rendement des cotisations sur la durée de l'engagement.

Pour un horizon d'une année, tel qu'en Solvency 2, on parle d'une garantie annuelle, qui peut être nominale, et dans ce cas, l'affilié reçoit exactement la valeur de la prime cotisée. Autrement dit, la valeur finale de l'engagement n'est que la valeur de la prime payée initialement, puisque dans ce cas, le taux garanti r_g est nul. Ainsi, la valeur après un an de l'engagement est donnée par

$$\begin{aligned} L(1) &= L(0)e^{r_g} \quad (\text{où } L(0) \text{ est la valeur de la prime initiale}) \\ &= L(0) \end{aligned}$$

De manière générale, à tout instant t ($0 \leq t \leq T$), la valeur du passif est donnée par :

$$L(t) = L(0)e^{r_g t},$$

où

- $L(0) = A(0)$
- r_g : taux fixe garanti par le plan de pension

1.3 Mesures de risque

Dans cette section, nous proposons un modèle de solvabilité pour un plan DC à taux fixe garanti. Nous consacrons cette section au cas d'une prime unique.

Nous y proposons une comparaison, avec ou sans capital supplémentaire, entre la valeur évolutive de l'actif et celle du passif, afin de mesurer la solvabilité du plan sur un horizon de temps qui couvre toute la période entre le moment du paiement de la prime et le moment du départ à la retraite de l'affilié.

1.3.1 Probabilité de défaut

Pour un plan de pension, la probabilité de défaut correspond à la probabilité que la valeur des engagements dépasse la valeur de l'actif (sans capital additionnel) au terme du contrat. Cette probabilité est une fonction du nombre d'années avant la maturité du contrat.

En se situant à l'instant $t = 0$, l'horizon de temps en années est représenté par la variable T .

La probabilité de défaut est donnée par :

$$\begin{aligned} P(A(T) < L(T)) &= P(A(0)e^{((\mu - \sigma^2/2)T + \sigma w_T)} < L(0)e^{r_g T}) \\ &= P((\mu - \sigma^2/2)T + \sigma w_T < r_g T) \quad (\text{puisque } A(0) = L(0) = 1), \end{aligned}$$

elle est ainsi donnée explicitement par :

$$P(A(T) < L(T)) = \Phi\left(\frac{r_g - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{T}\right), \quad (1.3)$$

où Φ est la densité de distribution d'une loi normale centrée réduite :

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

La solvabilité d'un plan de pension dépend de l'écart entre le rendement garanti sur les cotisations et le rendement réellement généré par le placement de ces cotisations. Ce qui

signifie que l'écart entre le taux fixe r_g et le rendement de l'actif $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ doit être négatif.

En effet, la fonction de la probabilité de défaut peut s'écrire de la manière suivante :

$$P(A(T) < L(T)) = \Phi(a\sqrt{T})$$

où

$$a = \frac{r_g - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}$$

Le paramètre a représente l'écart entre le taux garanti par le plan et le rendement moyen de l'actif normalisé par sa volatilité.

Si $a < 0$, la probabilité de défaut est strictement décroissante en fonction de l'horizon de temps T et inversement, si $a > 0$, la probabilité de défaut est strictement croissante en fonction de T .

Dans le cas d'un placement risqué de type "action", le gestionnaire du plan de pension DC à taux fixe doit déterminer le taux garanti en prenant en compte cet effet, de telle sorte que l'écart a soit négatif.

Exemple 1.3.1. La Figure 1.1 illustre l'évolution de la probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps avant le terme de l'engagement. Ce résultat est basé sur la formule (1.3).

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\mu = 7\%$$

$$\sigma = 16\%$$

$$r_g = 2,75\%$$

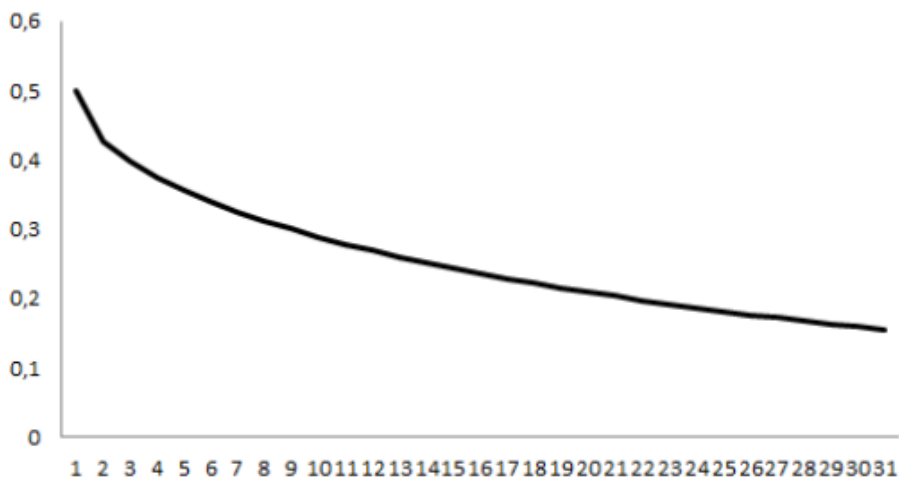


FIGURE 1.1 – Probabilité de défaut

Remarque 1.3.1. On peut remarquer que la probabilité de défaut est une fonction décroissante de temps. En conséquence des paramètres choisis, le paramètre a est négatif. Dans le cas contraire, la probabilité de défaut serait strictement croissante.

Dans cet exemple, la probabilité de défaut sur une année atteint la valeur de 50% , mais cette valeur décroît vers le long terme et devient plus petite que 20% au-delà de 30 années de garantie.

Cette tendance trouve son explication dans le fait qu'un investissement au long terme des contributions permet facilement au plan de voir sa probabilité de défaut diminuer en fonction de l'horizon de temps , dans le cas où le taux garanti permet de vérifier la condition $a < 0$. Inversement, les garanties de courtes échéances, en conséquence de leur probabilité de défaut élevée, exigent plus de prudence et plus de contrôle et de gestion des risques encourus.

Dans cet exemple, les valeurs élevées de la probabilité de défaut pour les courtes échéances, sont dues au risque « Equity » auquel le plan est exposé. Ce risque est atténué pour les longues échéances.

1.3.2 Capital de solvabilité

Afin de calculer le capital de solvabilité , on s'inspire du cadre de la réglementation solvency 2. On calcule le capital de solvabilité comme étant le capital à détenir initialement dans le fonds afin d'éviter le risque de défaut avec une probabilité annuelle de 99,5%.

En notant le niveau de confiance à une année par α , qui correspond à la probabilité de survie de la compagnie, et en supposant que les probabilités de survie annuelles sont indépendantes, le niveau de confiance pour une année quelconque $N \in 1, 2, \dots, T$ est donné par :

$$\alpha_N = \alpha^N$$

On suppose que le capital de solvabilité est investi dans un actif non risqué de type "Obligation" garantissant un rendement fixe de taux $r > 0$.

Pour un horizon T , le capital de solvabilité à détenir initialement est donné par :

$$P(A(T) + SC(T)e^{rT} < L(T)) = 1 - \alpha_T,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} P\left(e^{((\mu - \sigma^2/2)T + \sigma w_T)} + SC(T)e^{rT} < e^{r_g T}\right) &= 1 - \alpha_T \\ P\left(e^{((\mu - \sigma^2/2)T + \sigma w_T)} < e^{r_g T} - SC(T)e^{rT}\right) &= 1 - \alpha_T \\ P\left(w_T < \frac{\log(e^{r_g T} - SC(T)e^{rT}) - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma}\right) &= 1 - \alpha_T \\ \Phi\left(\frac{\log(e^{r_g T} - SC(T)e^{rT}) - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) &= 1 - \alpha_T. \end{aligned}$$

En notant par z_β le β -quantile de la loi normale centrée réduite, le capital de solvabilité est donc donné par :

$$SC(T) = e^{(r_g - r)T} - e^{(\mu - r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha_T}}. \quad (1.4)$$

Remarque 1.3.2. Dans le cadre de notre étude, nous exprimons le capital de solvabilité SC en fonction de la prime initiale.

En général, il est d'usage d'exprimer le capital de solvabilité en fonction des provisions, mais comme nous nous intéressons en particulier au cas de la prime unique, cette dernière correspond à la provision initiale.

D'un autre côté, si le capital de solvabilité est également investi dans le même titre risqué que la prime, sa valeur $SC^*(T)$ est donnée par l'équation suivante :

$$P\left(A(T) + \frac{A(T)}{A(0)} SC^*(T) < L(T)\right) = 1 - \alpha_T.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P\left(A(T)(1 + SC^*(T)) < L(T)\right) &= 1 - \alpha_T \quad \text{puisque } A_0 = 1 \\ \Leftrightarrow P\left(A(T) < \frac{L(T)}{1 + SC^*(T)}\right) &= 1 - \alpha_T \\ \Leftrightarrow P\left(W_T < \frac{\log(\frac{L(T)}{1 + SC^*(T)}) - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma}\right) &= 1 - \alpha_T. \end{aligned}$$

D'où,

$$\Phi\left(\frac{\log(\frac{e^{r_g T}}{1 + SC^*(T)}) - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 1 - \alpha_T$$

la valeur du capital de solvabilité est ainsi donnée par :

$$SC^*(T) = \exp\left[(r_g - (\mu - \sigma^2/2))T - \sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha_T}\right] - 1 \quad (1.5)$$

Exemple 1.3.2. On considère les paramètres suivants ,

$$\mu = 7\%$$

$$\sigma = 16\%$$

$$r_g = 2,75\%$$

$$r = 5\%$$

$$\alpha = 99.5\%$$

La Figure 1.2 montre deux graphes illustrant l'évolution, en fonction de la maturité, du capital de solvabilité investi dans un actif non risqué (SC), et le capital de solvabilité investi dans l'actif risqué de référence (SC*)

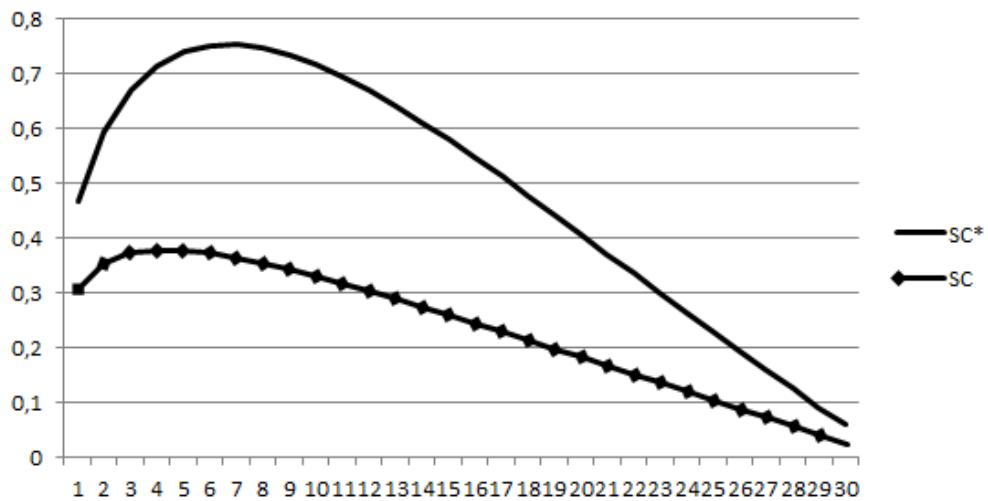


FIGURE 1.2 – Capital de solvabilité

Les valeurs du capital de solvabilité montrées dans la Figure 1.2 sont en pourcentage de la prime initiale.

Remarque 1.3.3. La différence en matière de capital de solvabilité, entre le cas où le capital de solvabilité est investi dans un actif sans risque et le cas où il est investi dans un actif risqué, est très importante pour des courtes et moyennes durées. Sur le long terme cette différence diminue.

Remarque 1.3.4. La fonction du capital de solvabilité n'est pas monotone. En effet, on peut constater sur la Figure 1.2 que la fonction du capital de solvabilité SC* est croissante entre $T = 0$ et $T = 7$ et qu'elle décroît pour $T > 7$. De même, la fonction du capital de solvabilité non risqué SC est croissante entre $T = 0$ et $T = 3$ et puis elle est décroissante pour tout $T > 3$.

Démonstration. Afin d'expliquer les pics observés sur les deux courbes du capital de solvabilité (1.2), on prouve que sa fonction dérivée change de signe à partir d'une certaine durée. D'un point de vue pratique, la démonstration est faite pour le cas du capital de solvabilité risqué (SC^*).

On note par $f(T)$ le capital de solvabilité SC^* . On a donc,

$$f(T) = \exp\left(\left(r_g - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T - \sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha_T}\right) - 1$$

Le quantile $z_{1-\alpha_T}$ dépend de l'horizon de temps T , mais pour des raisons de simplification, on choisit de négliger ce point en considérant le cas particulier où ce dernier ne dépend pas de T . Dans ce cas, on suppose que $\forall T \geq 0 \quad \alpha_T = \alpha = 99.5\%$.

Nous avons

$$f(T) = \exp\left(\sigma a T - \sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha}\right) - 1$$

où

$$a = \frac{r_g - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}$$

et

$$\frac{df(T)}{dT} = \left(\sigma a - \frac{\sigma z_{1-\alpha}}{2\sqrt{T}}\right) \exp\left(\sigma a T - \sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha}\right)$$

la fonction f est croissante en fonction de T si et seulement si T vérifie

$$\frac{\sigma z_{1-\alpha}}{2\sqrt{T}} < \sigma a$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2\sqrt{T}} > \frac{a}{z_{1-\alpha}} \quad (\text{puisque } 1 - \alpha < 0.5 \quad \text{et donc } z_{1-\alpha} < 0)$$

Et comme dans le cas étudié le spread $a < 0$ est négatif, la fonction f est croissante si et seulement si

$$\frac{1}{4T} > \frac{a^2}{z_{1-\alpha}^2}$$

Ceci prouve que dans le cadre des hypothèses de notre étude, la fonction SC^* est croissante pour toute valeur de $T < \frac{z_{1-\alpha}^2}{4a^2}$, et qu' inversement, elle est décroissante pour tout $T > \frac{z_{1-\alpha}^2}{4a^2}$ □

Remarque 1.3.5. *Compte tenu des résultats illustrés dans la Figure 1.2, un investissement de la contribution de pension dans un actif risqué coûte cher en matière de capital de solvabilité pour les courtes durées d'engagement. Contrairement à cela, un engagement de long terme permet au gestionnaire de plan d'assumer le risque financier auquel les contributions sont exposées.*

Nous avons confirmé cette hypothèse par les deux cas étudiés : capital de solvabilité non risqué et capital de solvabilité risqué. Malgré la nature différente en matière de risque de ces deux cas, les fonctions du capital de solvabilité qui en résultent convergent vers des valeurs très petites pour des maturités longues.

1.4 Cas des primes périodiques

Nous étudions dans cette section les besoins de solvabilité d'un plan DC à rendement fixe garanti en supposant que les cotisations sont périodiques et qu'elles sont perçues annuellement par le plan. Nous voulons par cette section montrer l'impact de la périodicité des contributions sur la solvabilité du plan.

Cadre général :

On se met dans le cadre d'un plan de pension à primes périodiques, d'une fréquence de paiement annuelle. On suppose que la première prime est payée à $t = 0$ et que le contrat prend fin après T années (à $t = T$).

Pour des raisons de simplification, on suppose que les primes périodiques sont constantes. On suppose aussi que leur valeur est unitaire (1 euro).

On suppose également que les primes payées sont investies dans des actifs financiers risqués.

Comme le cas d'une prime unique, on suppose que la valeur de chaque prime évolue suivant un mouvement Brownien géométrique.

Par exemple, si on note par S_0 la première prime investie à l'année $t = 0$, sa valeur à une année quelconque $t = 1, 2, \dots, T$ est donnée par :

$$S_0(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t}.$$

De la même manière, la valeur de la deuxième prime S_1 payée à l'année $t = 1$, à une année quelconque t est donnée par :

$$S_1(t) = S_1 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-1) + \sigma(w_t - w_1)}.$$

La valeur accumulée des deux premières primes à l'année t est alors

$$S(t) = S_0(t) + S_1(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t} + S_1 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-1) + \sigma(w_t - w_1)}$$

Plus généralement, la valeur de l'actif du plan à une année $t = 1, 2, \dots, T$ quelconque avant le terme du contrat est donnée par :

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \sum_{s=0}^{t-1} S_s(t) \\ &= \sum_{s=0}^{t-1} S_s e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(w_t - w_s)} \end{aligned}$$

où S_s est la prime périodique payée à l'instant $t = s$.

Sous l'hypothèse que toutes les primes ont une valeur unitaire, i.e

$\forall 0 \leq s \leq T-1 \quad S_s = 1$, on a

$$S_p(t) = \sum_{s=0}^{t-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(w_t - w_s)}$$

Au niveau des engagements pris par le plan, dans le cas d'un taux fixe garanti, chaque contribution versée donne droit à un rendement au taux fixe r_g à la date de maturité du contrat (T).

En prenant l'exemple cité ci-dessus, pour une prime investie initialement S_0 , le plan DC garantit à l'affilié un montant capitalisé de cette prime entre l'année $t = 0$ et l'année de son départ à la retraite $t = T$ selon le taux garanti r_g , soit un montant de valeur $S_0 e^{r_g T}$.

En général, le plan DC garantit pour toute prime S_s payée à l'année $0 \leq s \leq T$ un montant de valeur $S_s e^{r_g(T-s)}$.

Modélisation Actif-Passif

Dans ce cas étudié du plan DC, le passif est déterministe. Sa valeur est donnée par la capitalisation de l'ensemble des primes payées jusqu'au terme du contrat au taux garanti r_g :

$$L_p(T) = \sum_{s=0}^{T-1} L_s e^{r_g(T-s)}.$$

Or $L_s = S_s = 1, \quad \forall 0 \leq s \leq T-1$,

nous avons,

$$L_p(T) = \sum_{s=0}^{T-1} e^{r_g(T-s)}$$

Du côté de l'actif, la valeur des contributions à la maturité T du contrat est donnée par la somme suivante :

$$A_p(T) = S_p(T), \text{ i.e}$$

$$A_p(T) = \sum_{s=0}^{T-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-s) + \sigma(w_T - w_s)}$$

1.4.1 Probabilité de défaut

Suivant la même méthodologie que la section (1.3.1), la probabilité de défaut dans le cadre d'un plan de pension, financé par des primes annuelles, est donnée à tout instant t par

$$\phi(t) = P(A_p(t) < L_p(t))$$

A la date de maturité T , cette fonction est donnée par :

$$\phi(T) = P\left(\sum_{s=0}^{T-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-s) + \sigma(w_T - w_s)} < \sum_{s=0}^{T-1} e^{r_g(T-s)}\right) \quad (1.6)$$

Étant donné que la somme de distributions log-normales n'a pas une formule explicite, nous allons calculer la probabilité de défaut en utilisant la méthode d'échantillonnage "Monte Carlo".

Afin que la méthode "Monte Carlo" soit convergente, nous devons choisir un très grand nombre de scénarios. Le choix du nombre de scénarios est basé sur le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. *On note par R_t la différence entre la valeur des engagements et celle de l'actif, i.e $R_t = L_t - A_t$ à tout instant t . Si on souhaite que la probabilité de défaut $P^t = P(R_t > 0)$ estimée par la méthode de Monte Carlo, respecte une précision donnée ε avec une probabilité maximale θ , le nombre n de scénarios générés doit vérifier : $n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2\theta}$.*

Démonstration. Soit $R^t(1), R^t(2), \dots, R^t(n)$ n scénarios i.i.d de R^t .

Soit $I^t(i)_{i=1,2,\dots,n}$ la fonction indicatrice vérifiant :

$$I^t(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } R^t(i) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La probabilité de défaut P^t peut s'écrire de la façon $P^t = E(I^t)$.

De plus, par la loi forte des grands nombres, $\hat{E}(I^t) = \frac{\sum_{i=1}^n I^t(i)}{n}$ converge presque sûrement vers $E(I^t)$

Nous avons par l'inégalité de Tchebychev :

$$P(|\hat{E}(I^t) - E(I^t)| \geq \varepsilon) < \frac{Var(E_n)}{\varepsilon^2}.$$

Et comme

$$Var(E_n) = \frac{1}{n}(E((I^t)^2) - E(I^t)^2) = \frac{1}{n}(P^t - (P^t)^2) < \frac{1}{4n},$$

nous en déduisons le résultat suivant :

$$P(|E_n - E(I^t)| \geq \varepsilon) < \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Finalement, et afin de vérifier la condition :

$$P(|\hat{E}(I^t) - E(I^t)| \geq \varepsilon) \leq \theta, \quad (1.7)$$

le nombre de scénarios n doit vérifier

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \theta.$$

Ainsi, le nombre de scénarios minimal requis pour satisfaire la condition du théorème est donné par :

$$n_{min} = \frac{1}{4\theta\varepsilon^2}$$

(Ex. si $\theta = 0.1\%$ et $\varepsilon = 0.005$, $n_{min} = 10^5$).

□

Exemple 1.4.1. Afin d'illustrer numériquement la fonction de la probabilité de défaut donnée par l'équation (1.6), on considère les paramètres suivants,

$$\begin{aligned} \mu &= 7\% \\ \sigma &= 16\% \\ A_p(0) &= L_p(0) = 1 \\ r_g &= 2,75\% \end{aligned}$$

La Figure 1.3 montre l'évolution de la probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps dans le cadre d'un contrat à primes périodiques. Nous avons utilisé la méthode de Monte Carlo en générant $n = 100000$ scénarios de $L_T - A_T$ pour chaque année entre $T = 0$ et $T = 30$.

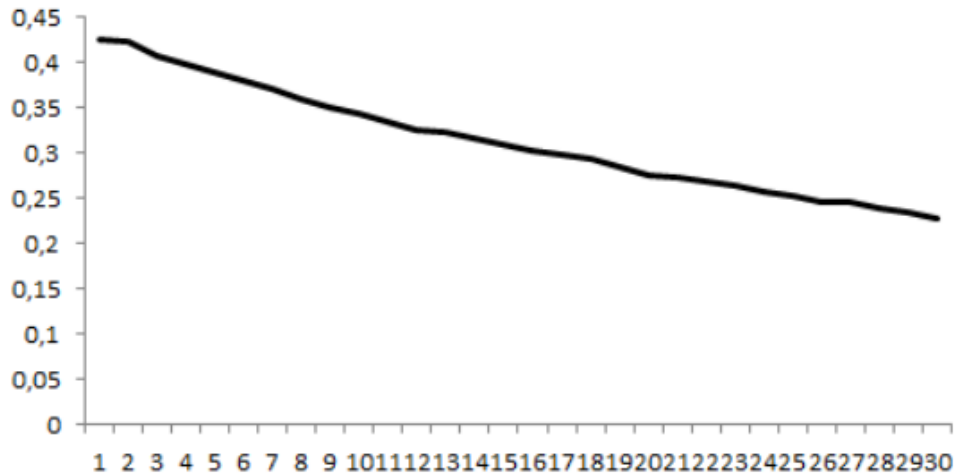


FIGURE 1.3 – Probabilité de défaut : cas des primes périodiques

La Figure 1.3 met en évidence la diminution du risque de défaut pour un plan DC à primes périodiques, vers le long terme. La probabilité de défaut étant égale à 42,5 % pour $T = 1$, et diminuant jusqu'à atteindre 25 % à la fin du contrat. Malgré cette diminution, les contrats à primes périodiques présentent un risque de défaut plus grand en comparaison avec des contrats à prime unique. Pour ceci, nous allons comparer la probabilité de défaut pour chacun de ces deux types de plans, en gardant les mêmes paramètres utilisés dans l'exemple 1.4.1. Le résultat obtenu est illustré dans la Figure 1.4.

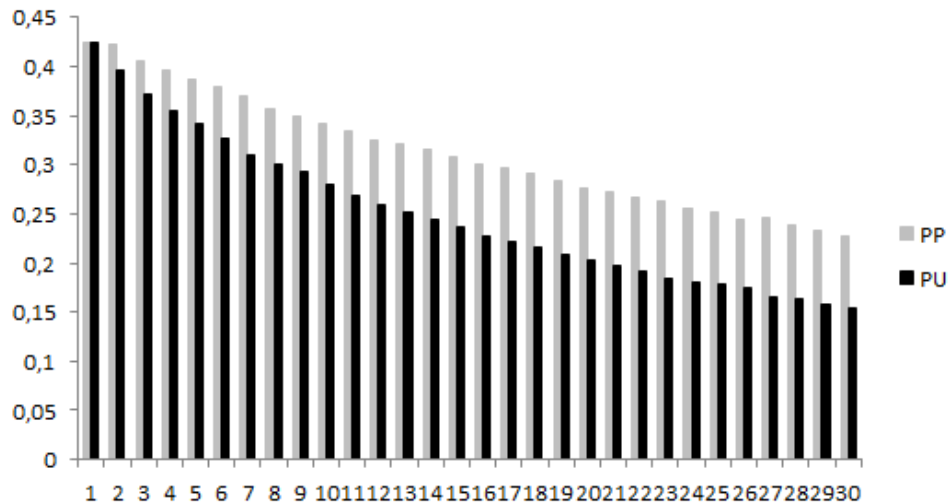


FIGURE 1.4 – Comparaison des probabilités de défaut : Prime unique versus Primes périodiques

Remarque 1.4.1. On peut remarquer qu'un plan basé sur des primes périodiques présente un risque de défaut plus grand en comparaison avec un plan basé sur une prime unique. En effet,

dans le cas des primes périodiques, le gestionnaire du plan établit sa stratégie d'investissement en se basant sur des calculs qui tiennent compte des primes futures qui n'ont pas encore été perçues. En plus, une prime unique perçue au tout début du contrat, permet au gestionnaire du plan de réaliser des rendements financiers sur la base de toute la durée de son engagement. Contrairement à cela, les primes périodiques n'ont pas cet avantage, puisqu'à chaque année une prime est investie, et plus on s'approche de la date de la retraite, plus la durée d'investissement est courte et plus le risque est grand.

1.4.2 Capital de solvabilité

Dans cette section, on traite le cas du capital de solvabilité investi dans un actif non risqué à un taux fixe r . Pour ceci, on doit tout d'abord calculer la value at risk au seuil de confiance $1 - \alpha_T$. On note cette dernière par $VaR(T)$, elle vérifie la condition de solvabilité suivante :

$$P(A_p(T) + VaR(T) < L_p(T)) = 1 - \alpha_T$$

ce qui est équivalent à :

$$P\left(\sum_{s=0}^{T-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-s) + \sigma(w_T - w_s)} + VaR(T) < \sum_{s=0}^{T-1} e^{r_g(T-s)}\right) = 1 - \alpha_T. \quad (1.8)$$

Pour le calcul numérique de la valeur de $VaR(T)$, par exemple pour $T = 1$, il suffit de classer les valeurs générées par la méthode de Monte Carlo du risque $R(1) = L(1) - S(1)$ en ordre décroissant et la value at risk est donc la valeur de $R(1)$ d'ordre α , i.e, le $(1 - \alpha)^{ième}$ pire scénario. Plus généralement, au-delà d'un horizon d'une année, nous calculons la $[n(1 - \alpha_T)]^{ième}$ plus grande valeur du risque $R(T)$, où n correspond au nombre de simulations générées pour le calcul de $R(T)$.

Par sa définition, le capital de solvabilité, pour ce type de plans, correspond au montant qui permet au gestionnaire du plan d'éviter le risque d'insuffisance d'actifs par rapport aux engagements avec une probabilité annuelle de 99,5%. Nous proposons de calculer ce capital en supposant qu'il est constitué d'un pourcentage constant de chaque prime investie. Chaque proportion de ce dernier est capitalisée au taux sans risque r pour la durée entre la date d'investissement et le terme du contrat.

Pour un contrat de maturité T , le capital de solvabilité (SC) est donné par :

$$P\left(\sum_{s=0}^{T-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma(w_T - w_s)} + \sum_{s=0}^{T-1} SCe^{r(T-s)} < \sum_{s=0}^{T-1} e^{r_g(T-s)}\right) = 1 - \alpha_T \quad (1.9)$$

Pour un horizon T , le capital de solvabilité peut être exprimé en fonction de la value at risk, du taux d'intérêt non risqué r et d'une annuité $\ddot{a}_T$ comme suit :

$$SC(T) = \frac{VaR(T)e^{-rT}}{\ddot{a}_T}$$

où $\ddot{a}_T$ est une annuité donnée par

$$\ddot{a}_T = \frac{1 - e^{-rT}}{1 - e^{-r}}$$

Exemple 1.4.2. On considère les paramètres suivants :

$$\mu = 7\%$$

$$\sigma = 16\%$$

$$A_p(0) = L_p(0) = 1$$

$$r_g = 2,75\%$$

$$r = 5\%$$

$$\alpha = 99.5\%$$

Le graphique suivant montre l'effet de l'horizon de temps sur la valeur du capital de solvabilité pour un contrat à primes périodiques.

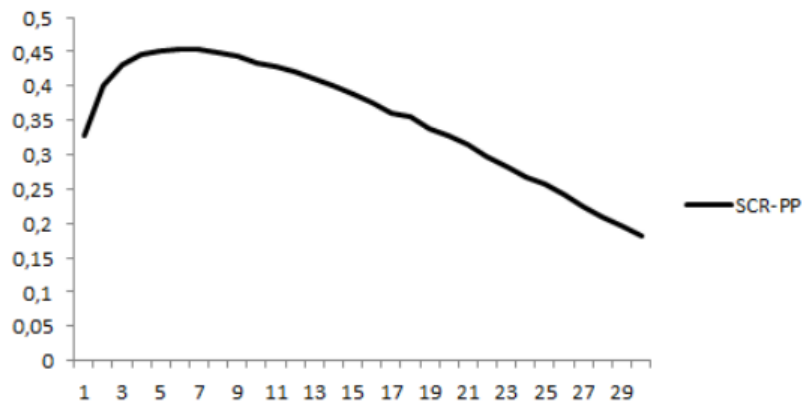


FIGURE 1.5 – Primes périodiques-Capital de solvabilité

FIGURE 1.5 – Primes périodiques-Capital de solvabilité

Les mêmes paramètres sont utilisés pour calculer le capital de solvabilité pour les deux plans, l'un basé sur une prime unique et le second basé sur des primes périodiques. Le graphique ci-dessous illustre cette comparaison.

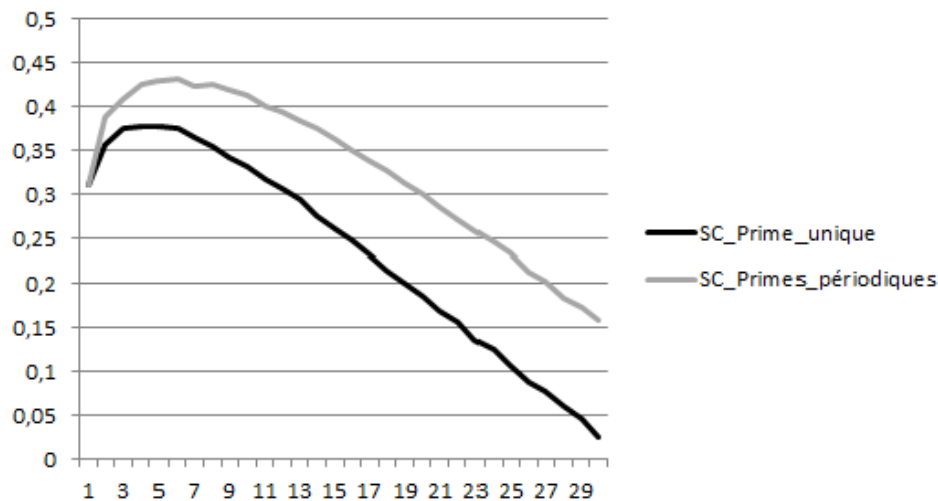


FIGURE 1.6 – SC primes périodiques vs prime unique

Remarque 1.4.2. On peut remarquer qu'en plus du facteur de l'horizon de temps, le choix du type de la prime (unique ou périodique) a un impact sur le niveau du capital de solvabilité. Les deux fonctions du capital de solvabilité ont tendance à décroître vers le long terme, tout comme celles des probabilités de défaut montrées dans la Figure 1.4. Néanmoins, et pour les mêmes raisons expliquées dans la remarque 1.4.1, un contrat à primes périodiques est un contrat plus risqué et donc plus coûteux en termes de solvabilité qu'un contrat à prime unique.

Avant de conclure ce chapitre, nous présentons dans la Figure 1.7 l'évolution du capital de solvabilité d'un plan de pension à primes périodiques croissantes en supposant qu'elles évoluent selon un taux d'indexation fixe.

On suppose que le taux d'indexation est de valeur 2%. Pour les autres paramètres, on utilise les mêmes valeurs que dans l'exemple 1.4.2.

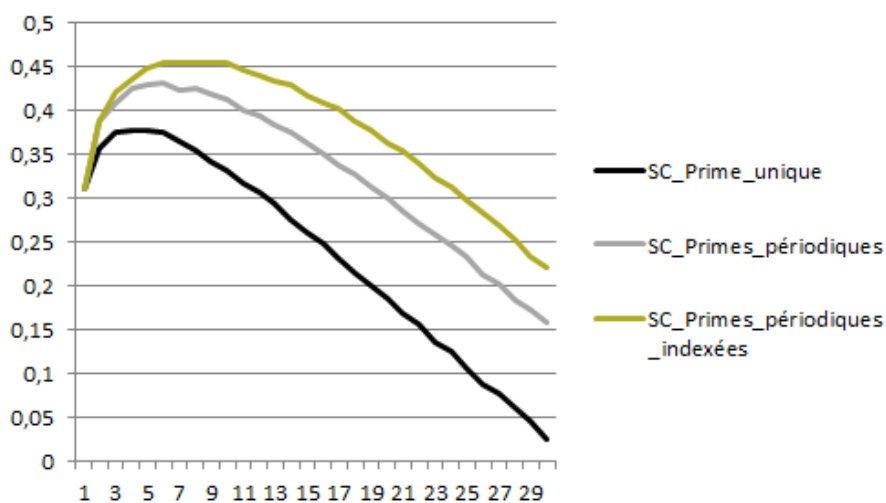


FIGURE 1.7 – Capital de solvabilité

Ce résultat confirme la remarque 1.4.2 pour le cas général des primes croissantes avec un taux de croissance fixe. En outre, ce résultat montre qu'une croissance des primes périodiques se traduit par un coût supplémentaire en termes de capital de solvabilité par rapport au cas des primes périodiques constantes.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une première étude de la solvabilité d'un plan de pension de type DC à taux fixe garanti. Dans un environnement Gaussien, nous avons étudié l'impact du risque financier sur la solvabilité de ce type de plan, en analysant l'impact de l'aspect du long terme.

Deux types de primes ont été étudiés : la prime unique et les primes périodiques. Dans les deux cas, nous avons considéré l'hypothèse d'un rendement fixe garanti sur les cotisations de pension.

Les deux cas étudiés confirment notre hypothèse sur le niveau du capital de solvabilité qui doit tenir compte de toute la durée de l'engagement. Étant donné que les plans DC sont considérés comme des produits de longues garanties, les mesures de risque utilisées pour définir les besoins de solvabilité du plan doivent être projetées sur toute la durée du contrat et non pas seulement sur l'horizon d'une année comme exigé par la réglementation « solvency 2 ». Cette directive exige un calcul du capital de solvabilité requis pour un horizon d'un an, puis un re-calcul année par année de ce capital.

Nous avons également montré l'impact du risque financier en fonction de la durée de l'engagement. En effet, notre étude de la situation de défaut et des besoins de solvabilité du plan a prouvé que l'impact du risque financier est important seulement pour les maturités courtes. En revanche, ce risque est atténué pour les grandes maturités, et le rendement généré par le placement des contributions dans des actifs risqués sur toute la durée de l'engagement permet au gestionnaire de diminuer ses besoins de solvabilité.

Chapitre 2

Plans à contributions définies et processus de Lévy

Dans ce chapitre, nous traitons l'impact du modèle choisi par le gestionnaire du plan de pension pour modéliser son actif.

Les crashes subits par les marchés financiers et les crises récentes ont fait penser à des modèles plus généraux et plus réalistes, abandonnant l'hypothèse de la normalité des rendements des cours financiers.

Les questions abordées dans ce chapitre sont :

- 1. Quel modèle doit-on choisir pour modéliser l'actif d'un plan de pension de type DC ?*
- 2. Quel est l'impact du modèle choisi sur le niveau de solvabilité de la compagnie ?*

Sommaire

2.1	Introduction	38
2.2	Processus de Lévy	39
2.2.1	Processus de diffusion à sauts de Merton (MJD)	42
2.2.1.1	Définitions et généralités	42
2.2.1.2	Applications à un plan de pension de type DC	43
2.2.1.3	Probabilité de défaut	44
2.2.1.4	Value at risk	45
2.2.1.5	Tail Value at risk	47
2.2.2	Processus Variance Gamma	50
2.2.2.1	Cadre général	51
2.2.2.2	Application à un plan DC	52
2.2.2.3	Approximation du quantile par la méthode de Cornish-Fisher	53
2.2.2.4	Value at risk	56
2.2.2.5	Capital de solvabilité	58
2.3	Comparaison : Black& Scholes versus Processus de Lévy	59

2.3.1	Modèle de Black& Scholes versus modèle diffusif de Merton à sauts (MJD)	59
2.3.2	Modèle de Black& Scholes versus Processus Variance Gamma	64
2.4	Conclusion	67

2.1 Introduction

Les besoins fortement croissants en matière de solvabilité des assurances vie, en particulier les plans de pension, nécessitent une recherche fondamentale dans le choix du modèle mathématique interne de la compagnie. Ce dernier doit être en adéquation avec ses stratégies d'investissement et ses engagements pris au niveau du passif.

Les modèles stochastiques de solutions log-normales, tels que le modèle de Black&Scholes ont été remis en cause, de par leur négligence des phénomènes spéciaux et leur sous-évaluation de l'influence des risques extrêmes. Particulièrement, l'hypothèse principale que les rendements de l'actif sous-jacent sont de distribution normale a été largement controversée par la réalité et les données historiques.

L'historique des rendements des différentes actions (ex. S&P500, Bel20, Cac40,...) prouve que la distribution de ces rendements n'est pas symétrique et présente un excès de kurtosis supérieur à 3, ce qui représente pour nous une raison valable pour rejeter l'hypothèse de la normalité des rendements.

Dans le cadre de ce travail, et afin de corriger cela, nous estimons qu'il est nécessaire de bien choisir un modèle adapté au niveau du risque auquel l'actif du plan est exposé.

L'idée principale de ce chapitre est d'étendre l'étude présentée dans le premier chapitre au niveau du choix du modèle de l'actif, en partant du modèle log-normal de Black& Scholes vers des modèles plus généraux qui traitent mieux les discontinuités observées sur le comportement des actifs financiers. En parallèle à cela, nous montrons l'impact de l'horizon de temps sur le risque d'insolvabilité des plans de pension. Nous allons donc traiter deux facteurs importants : la survenance des événements extrêmes et la longueur de l'horizon de temps.

Dans la littérature, il a été prouvé par nombreux travaux, notamment dans le domaine de la finance, que l'horizon de temps est un élément important dans le choix de la stratégie d'investissement du portefeuille. Parmi ces travaux on peut citer [Campbell J. and Viceira L.], [Lee W.Y.] , [Bodie Z.] et [Thorley S.] . Ces recherches suggèrent que, quel que soit le risque auquel le portefeuille est exposé, son niveau diminue avec le temps, et donc le facteur de l'horizon de temps doit influencer les stratégies de l'investisseur.

Par ailleurs, en grande majorité, dans le cadre de la gestion des plans de pension, l'introduction des sauts aléatoires dans l'équation de l'actif dans la littérature a concerné les plans de type "Defined Benefits" (voir par exemple [Ngwira B. and Gerrard R.] et [Josa-Fombellida R. and Rincon-Zapatero J.P.]).

Nous étudions dans ce chapitre les besoins de solvabilité d'un plan de pension de type DC dans ce même contexte, mais en proposant un calcul des mesures de risque dans des conditions similaires aux exigences des normes Solvency 2.

Dans ce cas étudié, la valeur des engagements est déterministe et basée sur un taux fixe garanti par l'assureur. On suppose également qu'il n'y a pas de possibilité de conversion du capital garanti par une rente viagère, et que l'affilié survit jusqu'à l'âge de sa retraite. On fait donc un zoom sur le risque "Equity" auquel les plans de pension de type "DC" sont exposés. Nous proposons des modèles de type "Processus de Lévy", qui sont connus par leur discontinuité et leurs distributions asymétriques. Plus précisément, nous proposons dans la première section le processus diffusif à sauts de Merton ([Merton R.C.]) qui permet d'incorporer des sauts aléatoires dans l'équation de l'actif sous certaines hypothèses.

Dans la deuxième section, la valeur de l'actif du plan est supposée évoluer selon un processus Variance Gamma, qui a un principe différent de celui du processus MJD, mais qui présente également des discontinuités dans le comportement de l'actif dont la distribution des log rendements n'est pas symétrique et son paramètre de l'excès de Kurtosis n'est pas autour de 3 contrairement à un simple mouvement Brownien géométrique.

Nous présentons les particularités de chacun de ces deux processus, leur idée générale et leur algorithme de simulation, et puis nous proposons notre méthode pour mesurer le risque d'insolvabilité du plan en tenant compte du modèle choisi et de la durée de l'engagement.

La dernière section de ce chapitre est dédiée à la présentation des résultats illustrant une comparaison entre ces processus de Lévy et le modèle de Black&Scholes en matière de besoins de solvabilité, en se basant sur les mesures de risque : value at risk et Tail value at risk.

2.2 Processus de Lévy

Dans le cadre du plan de pension de type DC traité dans ce travail, nous supposons que les contributions sont investies en totalité dans un actif risqué de type action. Ainsi, afin de mieux traiter le risque financier, nous remplaçons l'hypothèse de la log-normalité de l'actif, jugée très forte par rapport à la réalité des marchés financiers, par des processus de Lévy, qui semblent plus adaptés au comportement de ce type d'actif. Pour des travaux de

références généraux sur les processus de Lévy, on peut citer [Bertoin J.], [Sato K.], [Raible S.], [Applebaum D.], [Schoutens W.] et [Kyprianou A.E.].

Définition 2.2.1. Processus de Lévy

Un processus de Lévy $(X)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que :

1. X est à accroissements indépendants :
pour tout $t_0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n < \infty$, les variables aléatoires $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
2. $X_0 = 0$ presque sûrement.
3. Les accroissements sont stationnaires i.e. la distribution de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t .
4. $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie la propriété de la continuité stochastique :
pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$

Les processus utilisés dans cette section sont : le processus de Merton à sauts Gaussiens et le processus Variance Gamma.

Afin de modéliser les sauts aléatoires observés dans la dynamique des actifs financiers, Merton a introduit par son étude [Merton R.C.] une généralisation du modèle de Black & Scholes en proposant un processus composé d'une partie diffusive (mouvement Brownien avec dérive) et d'un processus de Poisson composé, considéré comme une composante discontinue qui représente les variations brusques des cours financiers.

Dès lors, ce modèle a constitué une référence pour nombreuses études qui se sont penchées particulièrement sur le problème des sauts induisant des discontinuités dans la dynamique des cours boursiers en proposant des enrichissements et extensions dans des contextes financiers différents. Parmi ces études on peut citer [Cheang G.H.L. and Chiarella C.], [Jorion P.], et [Kaushik I.A.].

Néanmoins, le processus de Merton à sauts Gaussiens est fondé sur des hypothèses restreintes, notamment l'hypothèse de la normalité de la distribution des sauts, ce qui nous a poussé à aller plus loin vers des processus infiniment divisibles à sauts purs dont les deux plus connus dans la littérature sont le processus Variance Gamma [Madan D.B. Seneta E.] et le processus Normal Inverse Gaussien [Barndorff-Nielsen O.E.]. Plusieurs représentations de ces processus sont possibles. Ils peuvent par exemple être obtenus par subordination d'un mouvement Brownien par un autre processus remplaçant le temps physique par une échelle de temps stochastique.

Définition 2.2.2. Si un processus à sauts pur $T = (T_t)_{t \geq 0}$ est croissant, i.e. $\forall t > 0, T \geq 0$, et $\forall s \leq t, T_t \geq T_s$ alors le processus T est considéré comme un subordonné de temps (subordinator process) ou processus de temps intrinsèque.

Le processus de temps $T = (T_t)_{t \geq 0}$ donné par la définition (2.2.2) peut être considéré comme un processus de volume des transactions cumulées qui permet de mesurer le volume cumulé de toute transition survenant avant l'instant t . Comme exemples de ce type de processus, on peut citer les processus de Poisson, Gamma et inverse Gaussien.

Considérons un simple mouvement Brownien Y avec une dérive μ et une volatilité σ qui s'écrit :

$$Y(t) = \mu t + \sigma w_t .$$

Soit d'autre part $T = (T_t)_{t \geq 0}$ un processus subordonneur indépendant du mouvement Brownien standard $(w_t)_{t \geq 0}$; en remplaçant t par $T = (T_t)_{t \geq 0}$, on obtient un processus appelé mouvement Brownien avec changement de temps (Time-changed Brownian motion) qui s'écrit :

$$Z(t) = \mu T_t + \sigma w_{T_t}$$

Pour le processus Variance Gamma, $T = (T_t)_{t \geq 0}$ est un processus Gamma ; il est un processus inverse Gaussien pour le processus Normal Inverse Gaussian.

Parmi les avantages pratiques des processus VG et NIG, on peut citer le fait que ces deux processus disposent d'une forme fermée de la fonction de répartition ainsi que de la fonction caractéristique.

Dans la littérature, on a souvent utilisé les processus VG et NIG afin d'intégrer les caractéristiques empiriques des rendements des cours financiers, et aussi afin de mettre en cause les modèles basés sur l'hypothèse de la normalité de ces distributions. De par leur similarité, parmi ces deux processus, nous avons choisi un seul processus afin de le comparer avec le modèle classique de Black&Scholes, en l'occurrence, le processus Variance Gamma. Une étude basée sur le processus NIG serait similaire à celle développée dans ce travail.

2.2.1 Processus de diffusion à sauts de Merton (MJD)

2.2.1.1 Définitions et généralités

Le processus de Merton, en tant que processus de Lévy, est une composition de différents processus. Pour ceci, nous allons voir quelques définitions des processus qui sont utilisés pour la modélisation de l'actif financier et qui servent à définir le processus de Merton (MJD).

Définition 2.2.3. Processus de Poisson

Un processus de Poisson $N(t)$, $t \geq 0$ d'intensité λ est un processus de comptage qui vérifie les propriétés suivantes :

1. les instants d'inter-arrivées sont indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre λ ,
2. les accroissements sont indépendants et stationnaires
3. $N(0) = 0$,
4. $P(N(t) = n) = 1 - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n \geq 0$.

Définition 2.2.4. Processus de Poisson composé

On dit qu'un processus stochastique $C(t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson composé, s'il s'écrit de la façon suivante :

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i, \quad t \geq 0$$

où $N(t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson, et $J_1, J_2, \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus N .

En pratique, un processus de Poisson composé est un processus de Lévy souvent utilisé pour la modélisation des événements rares qui arrivent de façon aléatoire et dont les dates d'arrivées et les amplitudes sont inconnues (ex. crashes boursiers, catastrophes naturelles causant des pertes humaines ou matérielles...).

Le processus de Poisson composé constitue le complément du modèle de MJD par rapport au modèle de Black&Scholes. En effet, le modèle de Merton diffusif à sauts est constitué d'une partie diffusive et d'une composante à sauts (Processus de Poisson). En annulant la composante à sauts, on retrouve le modèle de Black&Scholes.

En général, un processus de Merton diffusif à sauts a pour forme :

$$X_t = \underbrace{at + \sigma w_t}_{\text{Partie diffusive}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)} J_i}_{\text{Processus de Poisson composé}}$$

La taille des sauts est représentée par les variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(J_i)_{i \geq 0}$.

Une des particularités du processus MJD, est que les sauts J_i sont supposés suivre une loi normale $N(\mu_J, \sigma_J)$.

2.2.1.2 Applications à un plan de pension de type DC

Nous allons utiliser les mêmes hypothèses que dans le Chapitre 1. On suppose ainsi que la prime $A(0)$ payée par l'affilié à $t = 0$ est investie dans un actif financier de type "action". On suppose ici que l'actif est modélisé par un processus de Merton à sauts Gaussiens au lieu du modèle de Black&Scholes présenté dans le Chapitre 1.

Sous ces hypothèses, la dynamique de l'actif est modélisée par l'équation stochastique de MJD suivante :

$$\frac{dA_t}{A_t} = (\mu - \lambda k) dt + \sigma dw_t + (e^J - 1) dN(t)$$

où,

- $w = (w_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard,
- μ et σ sont respectivement le rendement moyen de l'actif et sa volatilité,
- $N = (N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ (nombre moyen de sauts par année),
- J est la variable de la taille des sauts,
- $k = E(e^J - 1)$,
- w , N et J sont indépendants.

La variable e^J représente la taille instantanée des sauts. En effet, dans un court intervalle de temps dt consécutif à un saut, la valeur de l'actif change de A_t à $A_t e^J$.

À l'instant $t = T$, la solution de l'équation stochastique de MJD est donnée par :

$$A(T) = A(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)T + \sigma w_T + \sum_{i=1}^{N(T)} J_i}, \quad (2.1)$$

Du côté du passif, la valeur des engagements à la date de maturité T , sous l'hypothèse que le plan de pension garantit un taux fixe r_g , est donnée par :

$$L(T) = L(0) e^{r_g T},$$

avec $L(0) = A(0) = 1$.

2.2.1.3 Probabilité de défaut

Dans le cadre d'une étude ALM, nous allons mesurer le risque lié à un plan de pension sous les hypothèses citées ci-dessus.

Comme mesure de risque, on commence par le calcul de la probabilité de défaut, en fonction de l'horizon de temps.

Théorème 2.2.1. *Si on note par T la date de maturité ou l'horizon de temps avant le terme du contrat, la probabilité de défaut $\varphi(T)$ dans le cas où le plan ne prévoit pas de capital de solvabilité est donnée par :*

$$P(A(T) < L(T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi \left(\frac{r_g T - ((\mu - k\lambda - \frac{\sigma^2}{2})T + n\mu_J)}{\sqrt{n\sigma_J^2 + T\sigma^2}} \right) e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \right]. \quad (2.2)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= P(A(T) < L(T)) \\ &= P(A(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - k\lambda)T + \sigma w_T + \sum_{i=1}^{N(T)} J_i} < L(0)e^{r_g T}) \\ &= P((\mu - \frac{\sigma^2}{2} - k\lambda)T + \sigma w_T + \sum_{i=1}^{N(T)} J_i < r_g T) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P((\mu - \frac{\sigma^2}{2} - k\lambda)T + \sigma w_T + \sum_{i=1}^n J_i < r_g T) P(N(T) = n), \end{aligned}$$

Puisque les variables $(J_i)_{i \geq 1}$ et la variable w_T sont indépendantes, il en résulte que le premier terme de la somme dans cette équation suit une loi normale de moyenne :

$$(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - k\lambda)T + n\mu_J$$

et de variance :

$$\sigma^2 T + n\sigma_J^2$$

La probabilité de défaut est donc donnée par :

$$P(A(T) < L(T)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi \left(\frac{(r_g T - (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) - k\lambda)T - n\mu_J}{\sqrt{n\sigma_J^2 + T\sigma^2}} \right) e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \right].$$

□

Illustration numérique

La Figure 2.1 montre l'évolution de la probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps, d'un plan de pension où l'actif est modélisé par le processus MJD en utilisant le théorème

2.2.1.

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\mu = 7\%,$$

$$\sigma = 16\%,$$

$$r_g = 2,75\%,$$

$$\sigma_J = 2\%,$$

$$\mu_J = 0.3\%,$$

$$\lambda = 10.$$

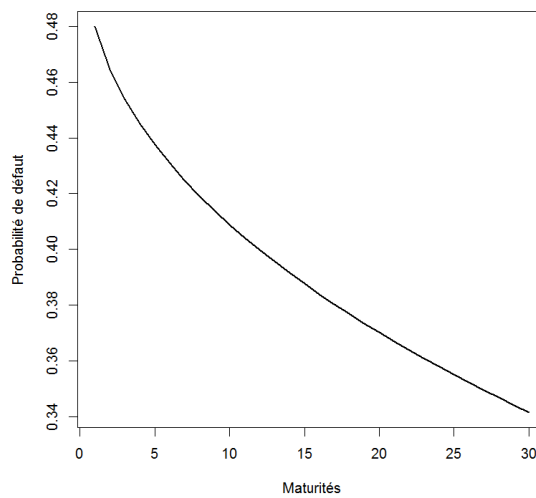


FIGURE 2.1 – Probabilité de défaut MJD

Pour le calcul numérique de la probabilité de défaut, la série infinie a été tronquée aux 10.000 premiers termes.

Nous reportons l'étude des paramètres au Chapitre 3. Nous y proposons une estimation des paramètres des processus de Lévy utilisés dans notre étude, ainsi qu'une analyse de l'impact du taux garanti sur la solvabilité du plan.

2.2.1.4 Value at risk

Dans le cadre du processus MJD, il est difficile d'obtenir une formule explicite pour le calcul de la value at risk, du fait des différentes variables aléatoires dans la formule de la valeur de l'actif et leurs distributions de probabilités différentes.

Dans cette partie, afin de calculer la value at risk, nous avons besoin de rappeler l'algorithme

de génération de la composante de Poisson composé, puisque le calcul est fait numériquement en se basant sur cet algorithme.

L'idée de l'algorithme est la génération des dates des sauts $(t_i)_{i \geq 0}$ en utilisant la méthode de la transformée inverse, qui permet de générer une variable aléatoire X d'une fonction de répartition F_X . Cette méthode est basée sur le fait que, quelle que soit la distribution de la variable X , la variable aléatoire $F_X(X)$ est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0,1]$.

Nous avons donc utilisé cette méthode de la manière suivante :

on note par $(X)_{i \geq 1}$ l'ensemble des variables des inter-temps $t_i - t_{i-1}$. D'après la définition 2.2.3, la variable X est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ , sa fonction de répartition est donc donnée par :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

La fonction F_X est continue et strictement croissante, nous pouvons donc appliquer la méthode de la transformée inverse, qui nous permet de générer la variable X comme suit :

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$$

où $U \sim U[0,1]$.

Ainsi, les dates $(t_i)_{i \geq 0}$ sont générées en trois étapes :

1. Initialisation à zéro : $t_0 = 0$,
2. Génération d'une série de variables aléatoires uniformes i.i.d $U = (U_i)_{i \geq 0}$ à valeurs entre 0 et 1,
3. Génération des dates de sauts $(t_i)_{i > 0}$

$$t_i = t_{i-1} - \frac{1}{\lambda} \ln(U_i) .$$

Le processus de Poisson $N(t)$ renseigne le nombre de sauts survenus entre l'instant 0 et l'instant t . Nous utilisons une fonction indicatrice, qui renvoie la valeur 1 si l'instant de saut t_i est inférieur à t et la valeur 0 sinon, ensuite nous utilisons une somme de toutes ces fonctions indicatrices, i.e

$$N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 1_{t_i < t}.$$

Le calcul de la série se fait approximativement en supposant que le nombre des sauts ne peut excéder une valeur maximale N_{max} . Nous avons dans ce cas :

$$N(t) = \sum_{i=0}^{N_{max}} 1_{t_i < t}.$$

Après avoir généré les dates des sauts, et le nombre de sauts survenus avant chaque instant t , le calcul de la composante du Poisson composé $C_t = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i$ est immédiat.

Le risque d'insuffisance de l'actif par rapport au passif à l'année de maturité T est donné par l'équation suivante :

$$R(T) = \exp(r_g T) - \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1) \right) T + \sigma w_T + C_T \right].$$

La value at risk, est calculée comme étant la perte maximale liée au risque $R(T)$ sur un horizon de T années, à un seuil de confiance $\alpha_T = \alpha^T$.

Dans un premier temps, le calcul du capital de solvabilité se fait en utilisant l'approche Value at risk, ensuite, nous allons utiliser une approche alternative, en l'occurrence, la Tail-Value-at-risk¹.

2.2.1.5 Tail Value at risk

La Tail Value at risk aussi appelée la "Conditional value at risk" (CVaR) ou "Average value at risk" (AVaR), est une mesure de risque concernée par les événements extrêmes. Bien que la value at risk vise particulièrement les événements extrêmes et rares, la TVaR s'intéresse en moyenne aux cas où ces événements extrêmes surviennent. Autrement dit, c'est la perte moyenne lorsqu'un événement rare survient à une probabilité donnée.

Définition 2.2.5. *pour un risque donné X et un niveau de confiance α , la Tail value at risk est donnée par :*

$$TVaR(X; \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X; t) dt. \quad (2.3)$$

Le résultat bien connu suivant donne dans le cas continu une autre vision de la TailVaR :

Théorème 2.2.2. *Si la distribution de la perte $X = R(T)$ est continue, la définition 2.3 appliquée à la variable X et au seuil α_T est équivalente à la définition :*

$$TVaR(R(T); \alpha_T) = E(R(T) | R(T) > VaR_{\alpha_T}(R(T))). \quad (2.4)$$

(Voir par exemple [Denuit M. Charpentier A] et [Artzner P. Delbaen F. Eber J.M. and Heath D.])

1. L'approche Value-at-risk a été critiquée par nombreux auteurs de la littérature financière, privilégiant par leurs études la mesure Tail-Value-at-Risk. Pour des détails théoriques et pratiques sur les problèmes de la VaR, voir par exemple, [Artzner P. Delbaen F. Eber J.M. and Heath D.], [Rockafellar R.T and Uryasev S.] , et [Hardy M. and Wirth J.L.].

Le calcul du capital de solvabilité en fonction de l'horizon T se fait en trois étapes. Dans un premier temps nous calculons la $VaR_{\alpha_T}(T)$ par la méthode de Monte Carlo sur la base de la génération de 100.000 scénarios différents. Ensuite nous allons calculer la $TVaR_{\alpha_T}(T)$ en tant que la moyenne des scénarios de la variable de risque $R(T)$ dont les valeurs sont supérieures à $VaR_{\alpha_T}(T)$.

La Table2.1 permet de comparer les résultats du calcul numérique de ces deux mesures de risque :

Exemple 2.2.1. Paramètres utilisés :

$$\begin{aligned}\mu &= 7\%, \\ \sigma &= 16\%, \\ r_g &= 2,75\%, \\ \sigma_J &= 2\%, \\ \mu_J &= 0.3\%, \\ \lambda &= 10, \\ \alpha &= 99.5\%, \\ N_{max} &= 10e^5.\end{aligned}$$

Année T	$VaR_{99,5\%}^T$	$TVaR_{99\%}^T$	$TVaR_{99,5\%}^T$
1	0,3516301	0,3602763	0,3859791
2	0,424776	0,4410135	0,4711585
3	0,4726649	0,4923049	0,529716
4	0,5110638	0,5202689	0,5796888
5	0,5400266	0,543171	0,6170151
6	0,5581875	0,5734828	0,6453774
7	0,5874805	0,5891789	0,6794092
8	0,6025523	0,6128632	0,7082596
9	0,6218439	0,622807	0,7373547
10	0,645873	0,6380331	0,7689756
11	0,6654137	0,6553674	0,7994735
12	0,6693014	0,6820052	0,817915
13	0,6870857	0,6999827	0,8458157
14	0,6870672	0,7108744	0,8620828
15	0,6744172	0,7096832	0,8689323
Suite page suivante			

<i>Année T</i>	$VaR_{99.5\%T}$	$TVaR_{99\%T}$	$TVaR_{99.5\%T}$
16	0,6705767	0,7204269	0,8837956
17	0,6694501	0,7296266	0,9016361
18	0,6703472	0,7346387	0,9215638
19	0,6583128	0,7240509	0,9305816
20	0,6627779	0,7345258	0,9521778
21	0,6674067	0,7215569	0,9801346
22	0,6451921	0,7077965	0,9857667
23	0,6193404	0,6952254	0,9867042
24	0,5974789	0,6921473	1,0006662
25	0,5886845	0,6860063	1,0200512
26	0,5868681	0,6980175	1,0331468
27	0,5695269	0,7073397	1,051795
28	0,5400545	0,7244558	1,0668361
29	0,5232181	0,7388546	1,0783221
30	0,4817198	0,7303248	1,0897126

TABLE 2.1 – Evolution de la VaR et la TVaR en fonction de l’horizon de temps

Une actualisation de ces valeurs à un taux sans risque r , supposé constant, donne la valeur du capital de solvabilité SC .

Ainsi, le capital SC , en fonction de la date de maturité T , est donné par :

$$SC(T) = \frac{VaR(T)}{e^{rT}}.$$

et également par :

$$SC(T) = \frac{TVaR(T)}{e^{rT}}.$$

Pour illustrer le capital de solvabilité SC , nous utilisons les deux mesures VaR et $TVaR$ au seuil 99.5% présentées dans la Table 2.1.

La Figure 2.2 illustre l’évolution de la fonction du capital de solvabilité en fonction de l’horizon de temps. Les valeurs présentées sont des pourcentages de la prime initiale.

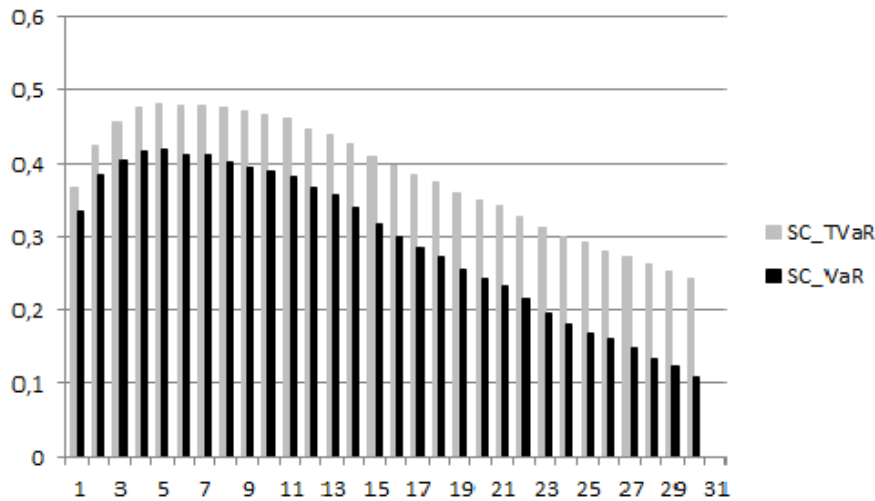


FIGURE 2.2 – Capital de solvabilité avec le processus MJD

- Remarque 2.2.1.** - Dans le cas d'un capital de solvabilité investi en titre non risqué, son niveau dépend du choix de la mesure de risque sur laquelle le calcul est basé. En effet, comme on peut le voir sur la Figure 2.2, en utilisant la mesure TVaR, le capital de solvabilité est plus important que le cas où il est calculé en actualisant la value at risk. Ceci est en phase avec la définition de la TvaR, qui concerne uniquement les valeurs extrêmes au-delà de la Value at risk. Ce qui se traduit par un supplément en termes du capital de solvabilité.
- La fonction du capital de solvabilité SC en fonction du temps n'est pas monotone. Mais une croissance est remarquée pour les courts termes et puis, comme sur la figure, à partir de la 7ème année, la fonction devient décroissante.
 - Une analyse de l'impact des sauts incorporés dans la valeur de l'actif du plan est proposée dans la section 2.3.1, où nous comparons les résultats du modèle MJD avec le modèle de référence Black& Scholes.
 - Pour ce travail, le capital de solvabilité est basé sur les mesures de risque VaR et TVaR qui de leur côté, sont basées sur la contrainte selon laquelle les probabilités annuelles de survie sont supposées indépendantes, puisqu'on suppose que $\alpha_T = \alpha^T \quad \forall T > 0$. Le cas général, selon lequel, les probabilités de survie ne sont pas indépendantes constitue une perspective de ce travail.

2.2.2 Processus Variance Gamma

Comme expliqué au début de cette section, un processus Variance Gamma est un processus de Lévy à intensité infinie et accroissements indépendants et stationnaires. Ce processus peut être défini en évaluant un mouvement Brownien de dérive et de volatilité

constantes à une date aléatoire donnée par une loi Gamma.

Ce processus remplace les unités de temps calendaires par les moments des transactions sur les marchés financiers. Ces derniers sont générés par un processus Gamma de moyenne unitaire et de variance positive.

Selon les hypothèses d'un processus Variance Gamma, le prix d'une action suit un mouvement Brownien géométrique sur une échelle stochastique. Nous citons également parmi les caractéristiques du processus Variance Gamma, l'absence d'une composante diffusive. Ceci en fait un processus à sauts pur. Une définition détaillée de ce processus est fournie par exemple dans [Madan D.B. Carr P. Chang E.C.] .

2.2.2.1 Cadre général

On considère un mouvement Brownien avec dérive B_t tel que

$$B_t = \theta t + \sigma_{vg} w_t$$

où

- θ dérive de B_t ,
- σ_{vg} volatilité de B_t ,
- w_t un mouvement Brownien standard.

Ensuite, la variable du temps t sera remplacée par un processus Gamma ($\gamma(t)$) donné par l'algorithme suivant :

1. On définit un intervalle de temps h suffisamment petit qui est une fraction de l'année définie par $h = \frac{1}{m}$, $m > 0$
2. On génère une suite de variables aléatoires $(g)_{n \geq 0}$ i.i.d suivant une loi Gamma de moyenne h et de variance ν , i.e. $\Gamma(\frac{h}{\nu}, \nu)$,
3. Construire un processus Gamma $\gamma(t; \frac{1}{\nu}, \nu)$ de moyenne t et de variance νt tel que :

$$\begin{cases} \gamma(0; \frac{1}{\nu}, \nu) = 0 \\ \gamma(t + h; \frac{1}{\nu}, \nu) = \gamma(t; \frac{1}{\nu}, \nu) + g \end{cases}$$

Sans perte de généralités, nous pouvons affecter à tout instant t , une variable $\gamma(t)$ de distribution $\Gamma(t)$.

Le processus Variance Gamma est obtenu en évaluant le mouvement Brownien B aux variables de temps $\gamma(\frac{t}{\nu}, \nu)$. On note par X^{VG} la variable suivante :

$$\begin{cases} X_0^{VG} = 0 \\ X_t^{VG} = \theta \gamma(t) + \sigma_{vg} w_{\gamma(t)} \end{cases}$$

À un instant donné t , si on suppose connaître la valeur de $\gamma(t)$, la fonction de densité de la variable X_t^{VG} est donnée par :

$$f_{X_t^{VG}}(x|\gamma(t) = g) = \frac{1}{\sigma_{vg}\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x - \theta g)^2}{2\sigma_{vg}^2 g}\right),$$

conditionnellement à $\gamma(t) = g$

De manière générale, sans condition sur la valeur de $\gamma(t)$, la fonction de densité de la variable X_t^{VG} est donnée par :

$$f_{X_t^{VG}}(x) = \int_{g=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{vg}\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x - \theta g)^2}{2\sigma_{vg}^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{v}-1} e^{-\frac{g}{v}}}{v^{\frac{t}{v}} \Gamma(\frac{t}{v})} dg$$

Dans le cadre d'un processus Variance Gamma, la fonction caractéristique de la variable X_t^{VG} :

$$\phi_{X_t^{VG}}(u) = E\left(e^{iuX_t^{VG}}\right),$$

est donnée explicitement par la formule suivante :

$$\phi_{X_t^{VG}}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\theta v u + (\frac{\sigma_{vg}^2 v}{2}) u^2} \right)^{\frac{t}{v}} \quad (2.5)$$

Grâce à cette formule, les moments du prix d'un actif modélisé par le processus VG sont finis et donnés par des formules explicites.

2.2.2.2 Application à un plan DC

Nous nous mettons dans le même cadre que la première partie de ce chapitre. Nous gardons la même équation du passif

$$L(t) = L_0 e^{r_g t}$$

Quant à l'actif, on suppose que la prime initiale est investie dans un actif financier dont la valeur est modélisée par un processus Variance Gamma.

Autrement dit, la valeur de l'actif à tout instant t est de la forme :

$$A(t) = A_0 e^{X_t^{VG}}$$

Dans le Chapitre 1, nous avons supposé que l'actif à l'instant t est donné par un simple mouvement Brownien géométrique, i.e,

$$A(t) = A_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t} \quad (2.6)$$

Nous allons garder la même forme de l'équation de l'actif ci-dessus, en remplaçant la variable de temps t par une variable de loi Gamma $\gamma(t)$, de paramètres t/ν et ν , comme expliqué dans la section 2.2.2.1. Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$A(t) = A_0 e^{\theta \gamma(t) + \sigma_{vg} w_{\gamma(t)}} \quad (2.7)$$

2.2.2.3 Approximation du quantile par la méthode de Cornish-Fisher

Dans cette partie nous nous intéressons au quantile de la variable générée par le processus Variance Gamma, qui a une asymétrie négative et un excès de kurtosis supérieur à 3. Pour cela, nous utilisons la méthode proposée par [Cornish E. and Fisher R.] qui, pour toute variable aléatoire normalisée X , approche le quantile par le quantile normal standard. Si q_α est le quantile standardisé de la variable X_t^{VG} , le développement de Cornish-Fisher consiste à approcher le quantile q_α de la manière suivante :

$$q_\alpha \approx z_\alpha + (z_\alpha^2 - 1) \frac{S_k}{6} + (z_\alpha^3 - 3z_\alpha) \frac{K}{24} - (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) \frac{S_k^2}{36}, \quad (2.8)$$

où

- . z_α est le quantile normal standard,
- . S_k et K sont respectivement l'asymétrie et l'excès de kurtosis de X_t^{VG} .

Les valeurs de S_k et K sont données par :

$$S_k = \frac{E\left((X_T^{VG} - E(X_T^{VG}))^3\right)}{\sigma^3(X_T^{VG})}$$

et

$$K = \frac{E\left((X_T^{VG} - E(X_T^{VG}))^4\right)}{\sigma^4(X_T^{VG})}$$

la variable X_T^{VG} vérifie

$$\begin{cases} E(X_T^{VG} - E(X_T^{VG}))^3 &= (2\theta^3 \nu^2 + 3\sigma_{vg}^2 \theta \nu) T \\ E(X_T^{VG} - E(X_T^{VG}))^4 &= 8\theta^4 T^4 + 6\theta^4 \nu^3 T^3 + (3\nu^2 \theta^4 + 6\theta^2 \sigma_{vg}^2 \nu) T^2 + 12\theta^2 \sigma_{vg}^2 \nu^2 T \\ \sigma(X_T^{VG}) &= \sqrt{(\theta^2 \nu + \sigma_{vg}^2) T} \end{cases}$$

Le développement de Cornish-Fisher a un domaine de validité ([Maillard D.]). En effet, la fonction du quantile q_α en fonction du quantile normal z_α doit être bijective. Pour satisfaire cette condition, il suffit que sa fonction dérivée soit strictement positive. Ce qui se traduit par :

$$\frac{dq_\alpha}{dz_\alpha} > 0, \quad \forall z. \quad (2.9)$$

Dans le cadre de notre étude, nous avons vérifié cette condition. Puisqu'en effet, la fonction dérivée donnée par l'équation 2.9 est un polynôme de second degré :

$$\begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{dz_\alpha} &\approx 1 + \frac{S_k}{3} z_\alpha + (3z_\alpha^2 - 3) \frac{K}{24} - (6z_\alpha^2 - 5) \frac{S_k^2}{36} \\ &\approx 3z_\alpha^2 \left[\frac{K}{24} - 2 \left(\frac{S_k}{6} \right)^2 \right] + 2z_\alpha \left(\frac{S_k}{6} \right) + \left(1 - 3 \frac{K}{24} + 5 \left(\frac{S_k}{6} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{dq_\alpha}{dz_\alpha} = 3z_\alpha^2 (\tilde{K} - 2\widetilde{S_K}^2) + 2z_\alpha \widetilde{S_K} + (1 - 3\tilde{K} + 5\widetilde{S_K}^2) \quad (2.10)$$

où

$$\tilde{K} = \frac{K}{24}$$

et

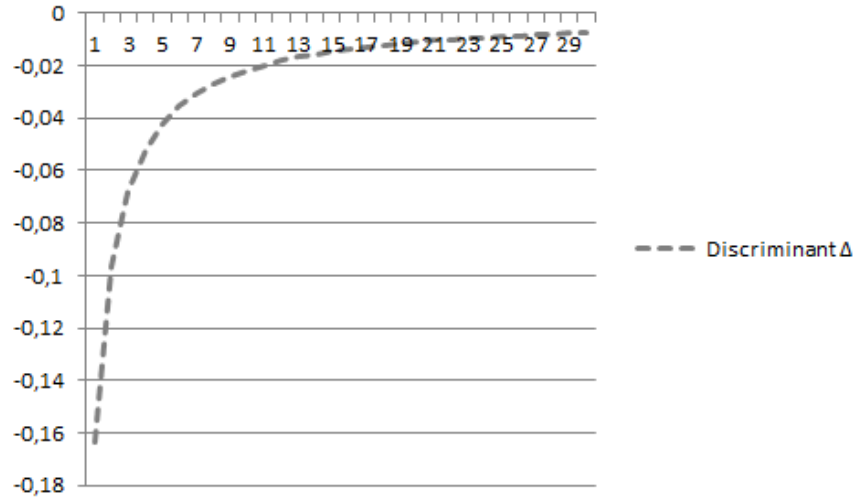
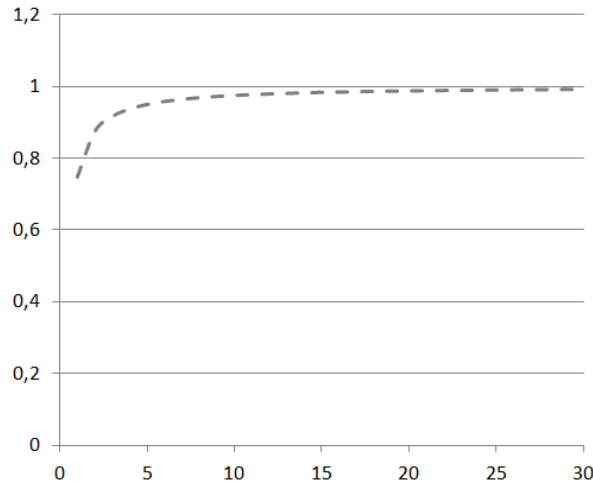
$$\widetilde{S_K} = \frac{S_k}{6}.$$

Pour satisfaire la condition 2.9, il suffit que le discriminant Δ du polynôme 2.10 soit négatif et que le terme indépendant $C = 1 - 3k + 5s_k^2$ soit positif.

Nous avons :

$$\Delta = 9k^2 - (3 + 33s_k^2)k + 30s_k^4 + 7s_k^2. \quad (2.11)$$

Dans le cas de notre étude, nous avons vérifié ces deux conditions pour toute maturité $T > 0$. Le résultat est présenté dans les Figures 2.3 et 2.4 :


 FIGURE 2.3 – Projection du discriminant Δ sur 30 années

 FIGURE 2.4 – Projection du paramètre C sur 30 années

En général, Δ est lui même un polynôme d'ordre 2 en fonction de k , il est négatif entre ses deux bornes si son discriminant Δ' est positif. La condition 2.9 est toujours satisfaite si :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 1 - 3k + 5s_k^2 \geq 0 \\ \Delta' = s_k^4 - 6s_k^2 + 1 \geq 0 \\ \frac{1 + 11s_k^2 - \sqrt{s_k^2 - 6s_k^2 + 1}}{6} \leq k \leq \frac{1 + 11s_k^2 + \sqrt{s_k^2 - 6s_k^2 + 1}}{6} \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent au domaine de validité défini par les bornes suivantes, et illustré dans la Figure 2.5.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_k \leq \sqrt{2} - 1 \quad \text{ou} \quad s_k \geq \sqrt{2} + 1 \\ \frac{1 + 11s_k^2 - \sqrt{s_k^2 - 6s_k^2 + 1}}{6} \leq k \leq \frac{1 + 11s_k^2 + \sqrt{s_k^2 - 6s_k^2 + 1}}{6} \end{array} \right.$$

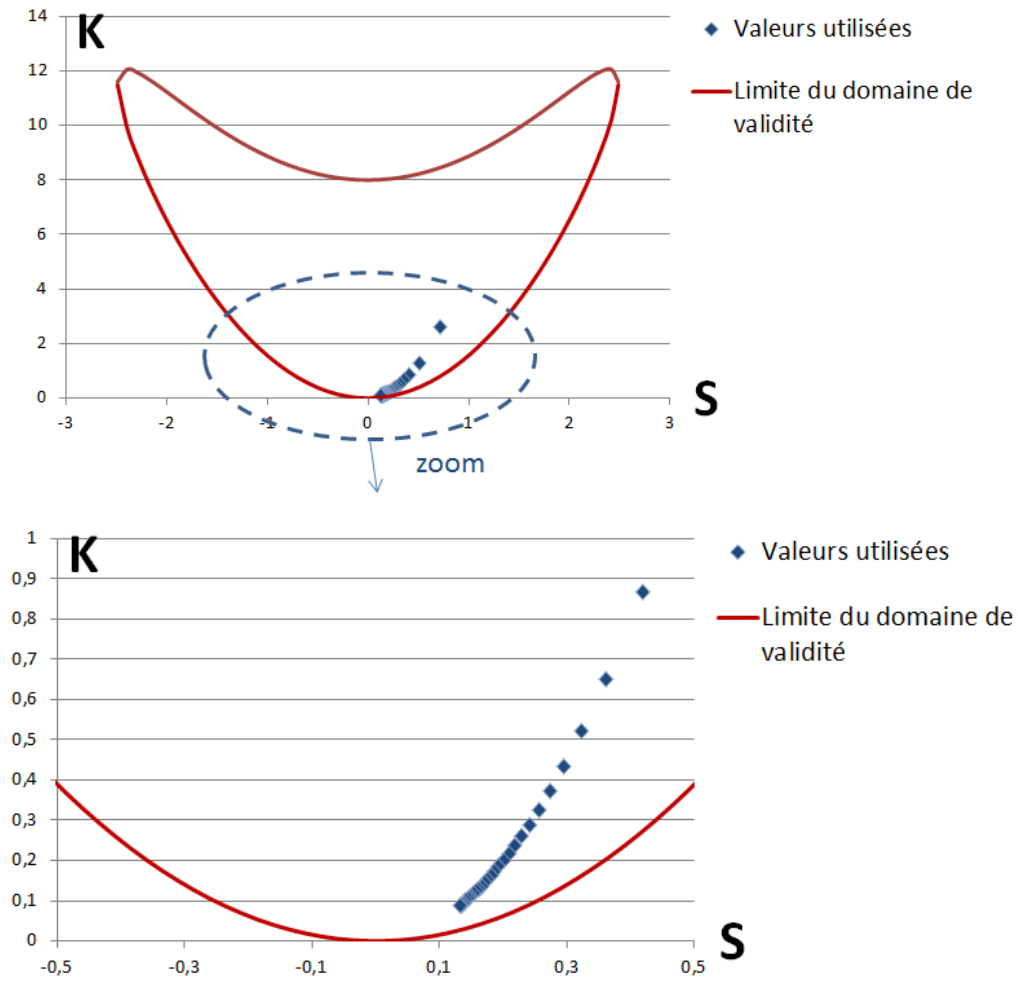


FIGURE 2.5 – Domaine de validité de K et S pour l'estimation Cornish-Fisher

Après la vérification de la validité de l'utilisation de la méthode de Cornish-Fisher dans le contexte de notre étude, nous calculons dans la section suivante la value at risk en utilisant le développement 2.8. Ensuite, nous nous basons sur cette mesure pour le calcul du capital de solvabilité (section 2.2.2.5).

2.2.2.4 Value at risk

La value at risk à la date de maturité T est le α_T -quantile de la variable $R(T) = L(T) - A(T)$. Elle est donnée donc par :

$$VaR_{\alpha_T}(T) = e^{r_g T} - e^{E(X_T^{VG}) + q_{\alpha_T} \sigma(X_T^{VG})}.$$

En remplaçant le quantile q_{α_T} par l'approximation donnée par le développement de Cornish-Fisher (l'équation 2.8) nous avons :

$$VaR_{\alpha_T}(T) \approx e^{r_g T} - e^{\theta T + \sqrt{(\theta^2 v + \sigma_{vg}^2)T} \left(z_{\alpha_T} + (z_{\alpha_T}^2 - 1) \frac{S_k}{6} + (z_{\alpha_T}^3 - 3z_{\alpha_T}) K - (2z_{\alpha_T}^3 - 5z_{\alpha_T}) \frac{S_k^2}{36} \right)}. \quad (2.12)$$

Cette mesure de risque est également obtenue par la méthode de Monte Carlo par une génération de 100.000 scénarios. Nous comparons dans la Figure 2.6, la Value at risk, VaR_{CF} , basée sur la formule explicite de Cornish-Fisher 2.12, et la value at risk, VaR_{MC} , générée numériquement par la méthode de Monte Carlo sur la base de 100.000 scénarios.

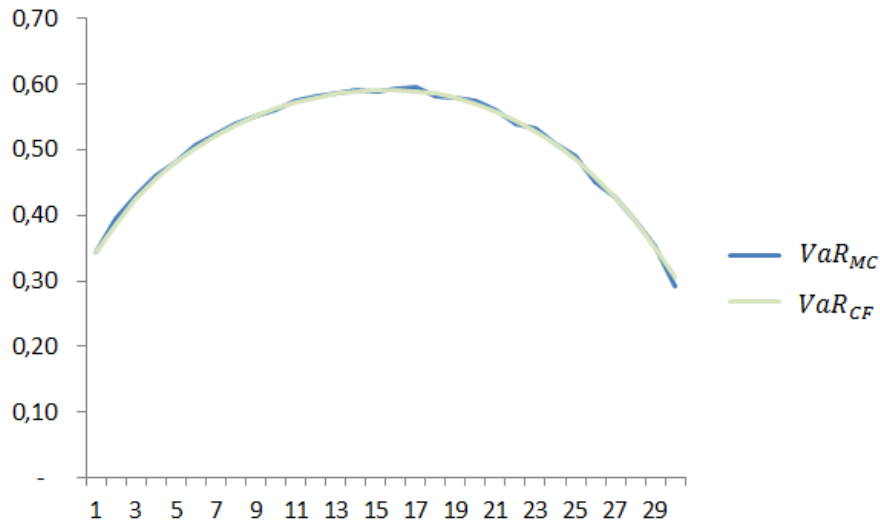


FIGURE 2.6 – Value-at-risk en fonction de l'horizon T

On peut définir une erreur entre les deux résultats présentés dans la Figure 2.6 par :

$$\varepsilon(T) = \left| \frac{VaR_{CF}(T) - VaR_{MC}(T)}{VaR_{CF}(T)} \right|,$$

où T est l'année de maturité.

La marge d'erreur entre les deux méthodes Cornish-Fisher et Monte Carlo est de son côté illustrée dans la Figure 2.7.

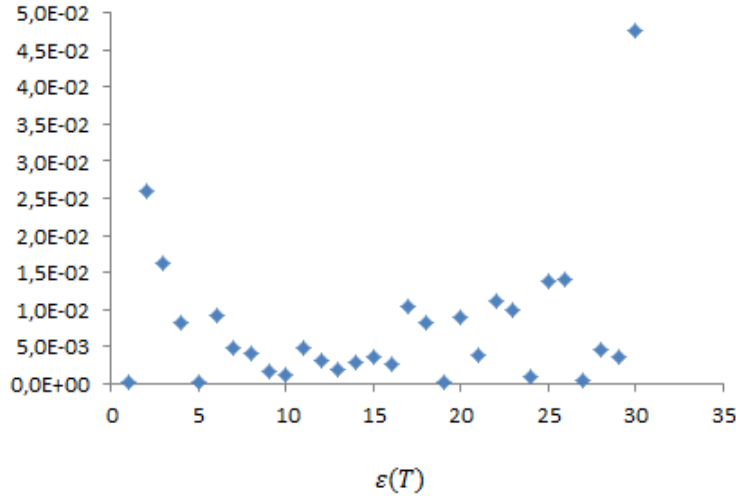


FIGURE 2.7 – Évolution de la marge d'erreur entre les méthodes CF et MC

2.2.2.5 Capital de solvabilité

On suppose que le capital de solvabilité est investi dans un actif non risqué de type "zéro coupon". En utilisant la value at risk donnée par la méthode de Cornish-Fisher, on peut calculer explicitement le capital de solvabilité en actualisant les valeurs de Var_{α_T} au taux sans risque r . Ce qui se traduit par la formule suivante :

$$SC(T) \approx e^{(r_g - r)T} - e^{(\theta - r)T + \sqrt{T(\theta^2 \nu + \sigma_{vg}^2)} \left(z_{\alpha_T} + (z_{\alpha_T}^2 - 1) \frac{S_k}{6} + (z_{\alpha_T}^3 - 3z_{\alpha_T}) \frac{K}{36} - (2z_{\alpha_T}^3 - 5z_{\alpha_T}) \frac{S_k^2}{36} \right)} \quad (2.13)$$

La Figure 2.8 montre l'évolution du capital de solvabilité non risqué donné en fonction de l'horizon de temps T par la formule 2.13.

Les paramètres utilisés dans cet exemple sont :

- $r_g = 0,0275$,
- $\sigma_{vg} = 0,16$,
- $\mu = 0,07$,
- $\nu = 0,75$,
- $\theta = 0,05$.
- $\alpha = 0,995$,
- $\alpha_T = \alpha^T$,
- $r = 0,05$.

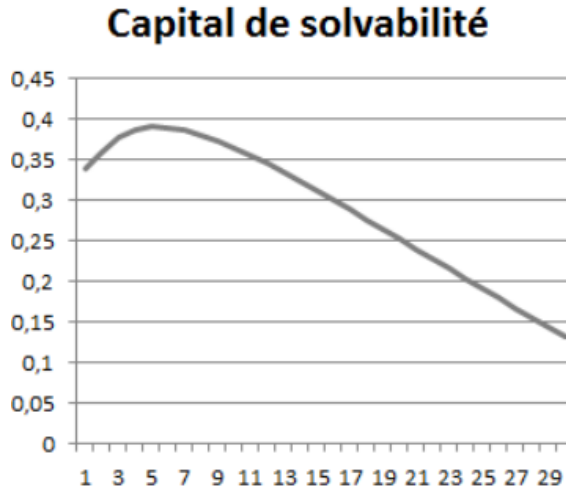


FIGURE 2.8 – Capital de solvabilité non risqué

En supposant que l'actif du plan de pension est donné par un processus Variance Gamma, nous pouvons observer que sous l'influence de l'horizon de temps, la structure de la fonction du capital de solvabilité est la même que dans le cas d'un actif modélisé par un simple mouvement Brownien géométrique ou par un processus de Merton à sauts Gaussiens. Quel que soit le niveau du risque financier pris au niveau de l'actif, plus l'horizon de temps est longs moins le risque d'insolvabilité est important.

2.3 Comparaison : Black& Scholes versus Processus de Lévy

L'idée principale de cette partie est de faire une comparaison selon certains critères, entre les résultats en termes de solvabilité, générés par chacun des processus MJD et VG, avec un simple mouvement Brownien géométrique.

2.3.1 Modèle de Black& Scholes versus modèle diffusif de Merton à sauts (MJD)

On considère la dynamique suivante d'un actif dont la valeur est donnée par un processus MJD :

$$A_t^m = A_0 e^{(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2})t + \sigma_m w_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i}, \quad (2.14)$$

les variables $(J)_{i \geq 1}$ et N_t sont telles que décrites et définies dans la section 2.2.1.2.

D'un autre côté, la dynamique d'un actif A_t^{bs} suivant le modèle diffusif de Black&Scholes est donnée par l'équation :

$$A_t^{bs} = A_0 e^{(\mu_{bs} - \frac{\sigma_{bs}^2}{2})t + \sigma_{bs} w_t}, \quad (2.15)$$

où μ_{bs} et σ_{bs} sont le rendement moyen et la volatilité de l'actif A^{bs} .

Pour une comparaison plus pertinente de ces deux modèles en termes de risque, il faudrait que cette comparaison soit à espérance de rendement égale et à variance égale, i.e. il faudrait vérifier les deux égalités suivantes :

$$E\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) = E\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right), \quad (2.16)$$

et

$$Var\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) = Var\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right). \quad (2.17)$$

En utilisant l'équation 2.14 , nous supposons que l'actif financier est une exponentielle de processus de Lévy, par conséquent, le log rendement est un processus de Lévy.

Si on note par X_t^m la variable du log rendement de l'actif A_t^m , sa valeur est donnée par :

$$X_t^m = \log\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) = \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}\right)t + \sigma_m w_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i. \quad (2.18)$$

La fonction caractéristique de la variable X_t^m est donnée par :

$$\phi_{X_t^m}(u) = E(e^{iuX_t^m}) \quad (2.19)$$

$$= \exp\left(iu\left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}\right)t - \frac{u^2 \sigma_m^2}{2}t + \lambda t(e^{iu\mu_J - \frac{u^2 \sigma_J^2}{2}} - 1)\right) \quad (2.20)$$

Proposition 2.3.1. Si A_t^m et A_t^{bs} sont deux processus définis respectivement par les équations (2.14) et (2.15), les hypothèses suivantes sont équivalentes :

H1

$$\begin{cases} E\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) &= E\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right) \\ var\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) &= var\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right) \end{cases}$$

H2

$$\begin{cases} \mu_{bs} &= \mu_m + \lambda(e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1) \\ \sigma_{bs}^2 &\simeq \sigma_m^2 + \lambda\sigma_J^2 \end{cases}$$

Démonstration. En gardant la notation X_t^m du log rendement de l'actif dont la valeur évolutive est donnée par le processus de Merton, nous avons :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) &= E(e^{X_t^m}) \\ &= \phi_{X_t^m}\left(\frac{1}{i}\right) \\ &= \exp\left(\left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}\right)t + \frac{\sigma_m^2}{2}t + \lambda t(e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} - 1)\right) \\ &= \exp\left((\mu_m + \lambda(e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} - 1))t\right) \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que le rendement de l'actif dont la valeur évolue selon le modèle de Black&Scholes $\frac{A_t^{bs}}{A_0}$ suit la loi log-normale $e^{N((\mu_{bs} - \frac{\sigma_{bs}^2}{2})t, \sigma\sqrt{t})}$. Son espérance est donc donnée par :

$$E\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right) = e^{\mu_{bs}t}.$$

Or, d'après l'hypothèse $H1$ nous avons

$$E\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) = E\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right)$$

ce qui est équivalent à

$$e^{\mu_{bs}t} = e^{(\mu_m + \lambda(e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} - 1))t}$$

d'où la première équation de l'hypothèse $H2$, i.e

$$\mu_{bs} = \mu_m + \lambda(e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} - 1)$$

On suppose maintenant que

$$var\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right) = var\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right),$$

ceci est équivalent à

$$E\left(\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right)\right)^2 = E\left(\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right)\right)^2$$

en utilisant la première équation de l'hypothèse $H1$, ceci revient à écrire

$$E\left(\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right)^2\right)$$

le premier terme de cette équation vérifie :

$$E\left(\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right)^2\right) = E(e^{2X_t^m}) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
 E\left(\left(\frac{A_t^m}{A_0}\right)^2\right) &= \phi_{X_t^m}\left(\frac{2}{i}\right) \\
 &= \exp\left(2\left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}\right)t + 4\frac{\sigma_m^2}{2}t + \lambda t(e^{(2\mu_J + 4\frac{\sigma_J^2}{2})} - 1)\right) \\
 &= \exp\left((2\mu_m + \sigma_m^2)t + \lambda(e^{2\mu_J + 2\sigma_J^2} - 1)t\right).
 \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$E\left(\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right)^2\right) = e^{(2\mu_{bs} + \sigma_{bs}^2)t}, \quad (2.22)$$

en égalisant (2.21) et (2.22), nous avons,

$$2\mu_{bs} + \sigma_{bs}^2 = 2\mu_m + \sigma_m^2 + \lambda(e^{2\mu_J + 2\sigma_J^2} - 1)$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{bs}^2 &= 2(\mu_m - \mu_{bs}) + \sigma_m^2 + \lambda(e^{2\mu_J + 2\sigma_J^2} - 1) \\
 &= \sigma_m^2 + \lambda(e^{2\mu_J + 2\sigma_J^2} - 1) - 2\lambda(e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} - 1) \\
 &= \sigma_m^2 + \lambda(e^{2\mu_J + 2\sigma_J^2} - 2e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} + 1).
 \end{aligned}$$

Les deux termes $2\mu_J + 2\sigma_J^2$ et $\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}$ étant petits, on peut utiliser un développement en série d'ordre 1, i.e :

$$e^{2\mu_J + 2\sigma_J^2} = 1 + 2\mu_J + 2\sigma_J^2$$

et

$$e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} = 1 + \mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}.$$

Nous obtenons ainsi la relation des volatilités suivante :

$$\sigma_{bs}^2 \simeq \sigma_m^2 + \lambda\sigma_J^2$$

□

On garde les mêmes hypothèses de l'actif que dans la section 2.2.3, pour une même valeur du passif, nous allons comparer dans la figure suivante l'évolution de la probabilité de défaut selon que l'actif est modélisé par un simple modèle de Black&Scholes ou qu'il est modélisé par le processus diffusif de Merton à sauts (MJD). Nous rappelons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 L(t) &= L(0)e^{r_g t} \\
 A^{bs}(t) &= A_0 e^{(\mu_{bs} - \frac{\sigma_{bs}^2}{2})t + \sigma w_t} \\
 A^m(t) &= A_0 e^{(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2})t + \sigma_m w_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i}
 \end{aligned}$$

Nous illustrons dans la Figure (2.9) ci-dessous une comparaison entre la probabilité de défaut d'un plan de pension où l'actif suit un modèle de Black&Scholes et la probabilité de défaut d'un plan de pension où l'actif est donné par un processus de MJD.

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\begin{aligned}\mu_{bs} &= 7\%, \\ \sigma_{bs} &= 16\%, \\ r_g &= 2,75\%, \\ \sigma_j &= 4\%, \\ \mu_j &= 3\%, \\ \lambda &= 10\end{aligned}$$

On rappelle que le rendement moyen et la volatilité du prix de l'actif donnés par les deux modèles MJD et BS vérifient :

$$\mu_m = \mu_{bs} - \lambda(e^{\mu_j + \frac{\sigma_j^2}{2}} - 1) \quad (2.23)$$

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_{bs}^2 - \lambda\sigma_j^2}. \quad (2.24)$$

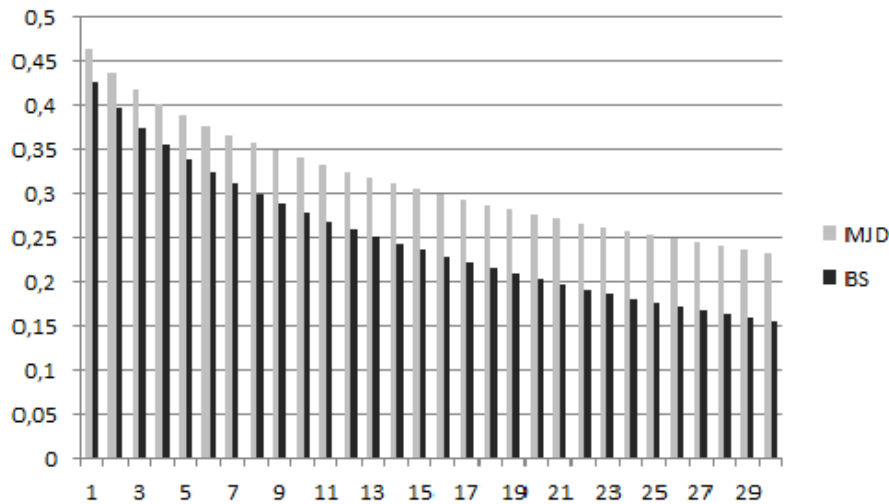


FIGURE 2.9 – Comparaison de probabilités de défaut-MJD-vs-BS

Nous pouvons remarquer que l'égalisation des volatilités entre les deux processus MJD et BS revient à minimiser la volatilité du processus de Merton qui a été sur-estimée dans la première partie. Néanmoins, il reste un écart considérable au niveau de la probabilité de défaut calculée en utilisant le processus de MJD, par rapport au modèle de Black&Scholes. D'autre part, en utilisant le critère de la Tail Value at Risk et en appliquant les contraintes (2.23) et (2.24), nous pouvons comparer les valeurs du capital de solvabilité données par les

deux processus MJD et BS. Ces valeurs sont illustrées dans la Figure 2.10.

La mesure $TVaR$ et le capital de solvabilité SC sont calculés par la méthode utilisée dans la section (2.2.1.5), en respectant les critères sur l'espérance et la variance des actifs (2.23) et (2.24).

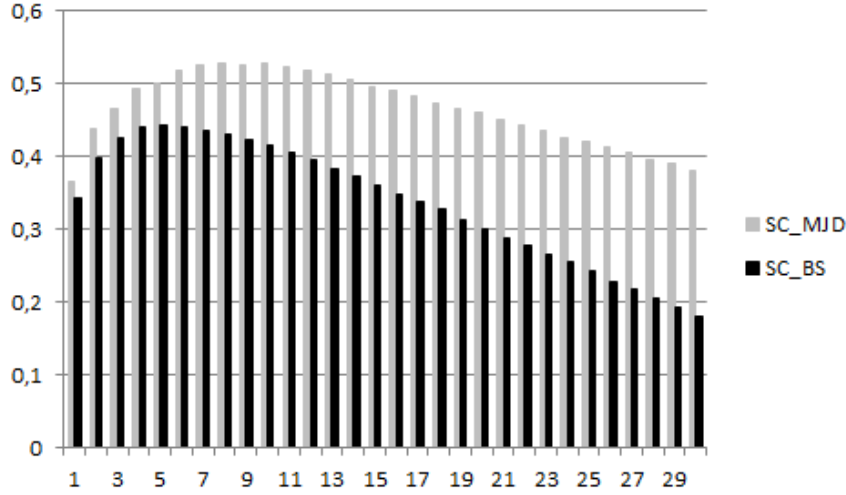


FIGURE 2.10 – Comparaison du capital de solvabilité-MJD-vs-BS

On peut remarquer également sur la Figure 2.10, que la courbe du capital de solvabilité décroît vers le long terme pour les deux modèles, MJD et BS, mais, malgré la contrainte d'une même volatilité pour les deux processus, une modélisation suivant le processus de MJD requiert plus de capital de solvabilité, en comparaison avec le modèle de Black& Scholes. Ceci est dû au fait que, dans le processus de MJD, des variables de sauts sont incorporées, ce qui exige un capital de solvabilité qui permet d'absorber les pertes liées aux crashes boursiers et aussi honorer les engagements pris par l'assureur.

2.3.2 Modèle de Black& Scholes versus Processus Variance Gamma

Dans cette section, nous allons utiliser les mêmes hypothèses que dans la section (2.2.2). L'actif est donné par l'équation : (2.7), i.e :

$$A_t^{vg} = A_0 e^{\theta \gamma(t) + \sigma_{vg} w_{\gamma(t)}}, \quad (2.25)$$

nous allons le comparer avec l'actif A_t^{bs} qui évolue suivant un mouvement Brownien géométrique,

$$A_t^{bs} = A_0 e^{(\mu - \frac{\sigma_{bs}^2}{2})t + \sigma_{bs} w_t}. \quad (2.26)$$

Afin que la comparaison soit pertinente, nous allons fixer comme contraintes, l'égalité des espérances et des variances des rendements données par chacune des deux équations (2.25)

et (2.26). Autrement dit, il faut que les équations suivantes soient vérifiées :

$$E\left(\frac{A_t^{\nu g}}{A_0}\right) = E\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right), \quad (2.27)$$

et

$$\text{var}\left(\frac{A_t^{\nu g}}{A_0}\right) = \text{var}\left(\frac{A_t^{bs}}{A_0}\right) \quad (2.28)$$

Proposition 2.3.2.

En utilisant la condition sur l'espérance du rendement moyen donnée par l'équation (2.27), le paramètre θ est donné, en fonction des autres paramètres σ, μ et ν , par la formule suivante :

$$\theta = \frac{1 - \frac{\sigma_{vg}^2 \nu}{2} - e^{-\nu \mu}}{\nu} \quad (\nu > 0)$$

Démonstration. L'espérance mathématique de l'actif à l'instant t est donnée par

$$\begin{aligned} E(A_t) &= A_0 E(e^{X_t^{VG}}) \\ &= A_0 \phi_{X_t^{VG}}\left(\frac{1}{i}\right) \end{aligned}$$

où $\phi_{X_t^{VG}}$ est la fonction caractéristique de la variable X_t^{VG} . En utilisant la formule 2.5, $E(A_t)$ vérifie

$$E(A_t) = A_0 \left(\frac{1}{1 - \theta \nu - \left(\frac{\sigma_{vg}^2 \nu}{2}\right)^2} \right)^{\frac{1}{\nu}},$$

ensuite, en remplaçant $E(A_t)$ par sa valeur donnée par la condition (2.27), nous avons,

$$A_0 e^{\mu t} = A_0 \left(\frac{1}{1 - \theta \nu - \frac{\sigma_{vg}^2 \nu}{2}} \right)^{\frac{t}{\nu}},$$

finalement :

$$\theta = \frac{1 - \frac{\sigma_{vg}^2 \nu}{2} - e^{-\nu \mu}}{\nu}.$$

□

Proposition 2.3.3.

Si la condition (2.27) est vérifiée, la condition sur les variances (2.28) est satisfaite si et seulement si la volatilité σ_{vg} vérifie :

$$\sigma_{vg} = \sqrt{\frac{2e^{-\nu \mu} - e^{-\nu(2\mu + \sigma_{bs}^2)} - 1}{\nu}}$$

Démonstration. Si la condition (2.27) est vérifiée, la condition

$$var\left(\frac{A^{vg}(t)}{A_0}\right) = var\left(\frac{A^{bs}(t)}{A_0}\right)$$

est équivalente à :

$$E\left(\left(\frac{A^{vg}(t)}{A_0}\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{A^{bs}(t)}{A_0}\right)^2\right)$$

ce qui est équivalent à

$$\phi_{X_t^{VG}}\left(\frac{2}{i}\right) = e^{(2\mu + \sigma^2)t}$$

et

$$\left(\frac{1}{1 - 2\theta\nu - 4\left(\frac{\sigma_{vg}^2\nu}{2}\right)}\right)^{\frac{t}{\nu}} = e^{(2\mu + \sigma_{bs}^2)t}$$

et donc

$$\theta = \frac{1 - 2\sigma_{vg}^2\nu - e^{-\nu(2\mu + \sigma_{bs}^2)}}{2\nu}.$$

D'un autre côté, sous la condition (2.27) et d'après la proposition (2.3.2), nous avons :

$$\theta = \frac{1 - \frac{\sigma_{vg}^2\nu}{2} - e^{-\nu\mu}}{\nu}.$$

il en résulte :

$$\frac{1 - 2\sigma_{vg}^2\nu - e^{-\nu(2\mu + \sigma_{bs}^2)}}{2\nu} = \frac{1 - \frac{\sigma_{vg}^2\nu}{2} - e^{-\nu\mu}}{\nu}.$$

Finalement, nous avons :

$$\sigma_{vg} = \sqrt{\frac{2e^{-\nu\mu} - e^{-\nu(2\mu + \sigma_{bs}^2)} - 1}{\nu}}$$

L'exemple suivant illustre une comparaison entre un actif modélisé par un processus Variance Gamma et un actif modélisé par un simple mouvement Brownien géométrique (avec une même valeur initiale, même espérance et même volatilité).

Cette comparaison est basée sur le critère de la value at risk. Pour ceci, nous utilisons l'approximation de la value at risk développée dans la section 2.2.2.3.

Exemple 2.3.1. Les paramètres utilisés sont :

- $r_g = 0,0275$,
- $\sigma = 0,16$,
- $\mu = 0,07$,
- $\nu = 0,75$,

- $\alpha = 0,995$,
- $r = 0,05$.

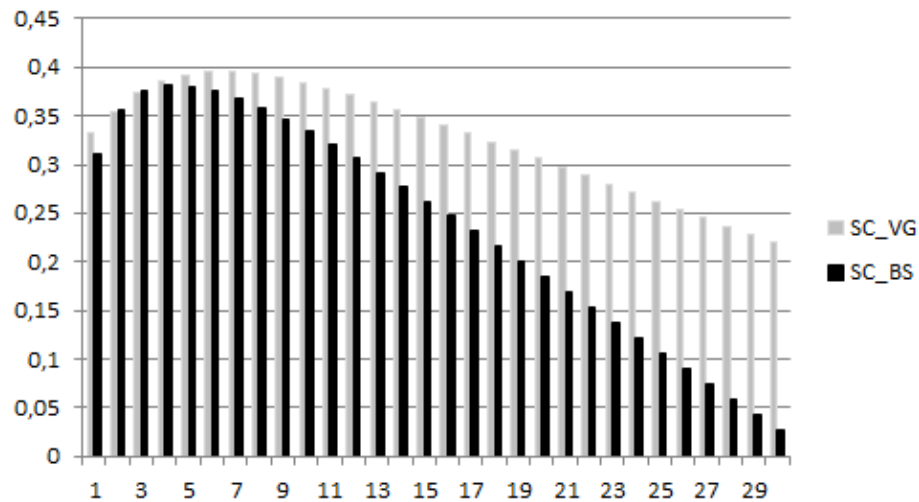


FIGURE 2.11 – Capital de solvabilité Variance Gamma-Black Scholes

Sur la Figure 2.11, nous pouvons remarquer que le modèle de Variance Gamma est un modèle plus prudent que le modèle de Black & Scholes. Et qu'en conséquence, comme prouvé par la Figure 2.11, ce processus exige plus de capital pour couvrir les engagements du plan. La différence s'explique par les sauts incorporés dans la valeur évolutive de l'actif par le processus Variance Gamma, puisque nos comparaisons sont basées sur l'égalité des paramètres de l'espérance et de la volatilité des deux processus.

2.4 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre au problème principal des plans de pension de type DC à taux fixe garanti, qui réside dans l'aspect aléatoire de la valeur évolutive de l'actif du plan. Nous avons supposé que sa valeur suit un processus de Lévy, et mesuré les besoins de solvabilité du plan sous cette hypothèse. Nous avons montré qu'en plus de l'effet de l'horizon de temps, le choix du modèle mathématique est fondamental et impacte significativement le niveau du capital de solvabilité.

En effet, le modèle choisi par le gestionnaire du plan dans le cadre de sa gestion de risque doit refléter au mieux la réalité des marchés. Un modèle qui intègre les sauts observés sur la valeur des cours boursiers est clairement plus réaliste en comparaison avec un simple mouvement Brownien géométrique. Néanmoins, comme nous l'avons montré par l'étude présentée dans ce chapitre, un modèle à sauts aléatoires exige plus de capital de solvabilité.

Nous avons montré l'impact du modèle choisi en comparant les résultats obtenus par le modèle de Black&Scholes et les processus à sauts : le modèle de Merton à sauts Gaussiens et le processus Variance Gamma.

Les deux modèles étudiés ont confirmé notre idée que le modèle Black& Scholes sous-évalue les besoins de solvabilité du plan de pension. Cependant, par cette étude, nous avons confirmé que la tendance du capital de solvabilité nécessaire pour un plan de pension de type DC est la même quelle que soit la nature du modèle choisi. Par les modèles stochastiques proposés, nous avons montré que l'impact du risque de marché sur la solvabilité du plan est atténué avec le temps, ce qui se traduit par des besoins de solvabilité du plan DC qui sont plus réduits pour les longs horizons.

Nous avons également montré l'influence de la durée des engagements sur la solvabilité du plan en calculant le capital de solvabilité sur la base des mesures de risque : Value at Risk et Tail Value at Risk sur toute la durée de l'engagement. En présence du risque de marché, le capital de solvabilité est plus important pour les courtes maturités. En projetant les mesures de risque sur toute la durée de l'engagement, le capital de solvabilité qui en résulte diminue sous l'effet de l'atténuation du risque "Marché" sur des longues durées.

Chapitre 3

Calibration et impact du taux minimum garanti

Dans les chapitres précédents, nous avons proposé des modèles alternatifs au modèle de Black&Scholes pour la gestion du risque d'insolvabilité d'un plan de pension. Nous avons utilisé des paramètres standards pour les applications numériques. Nous proposons dans ce chapitre une étude de paramètres, par laquelle nous estimons les paramètres de chacun de ces modèles et nous fournissons une étude d'adéquation de la distribution théorique donnée par chaque modèle par rapport à la distribution empirique d'un échantillon de données historiques.

Par ailleurs, ce chapitre étudie l'impact du niveau du taux garanti sur la valeur du passif et son influence sur le niveau de solvabilité des plans de pension. Pour cela, nous nous mettons dans le contexte de la loi belge sur les pensions complémentaires (LPC/WAP).

Sommaire

3.1 Introduction	70
3.2 Processus de Lévy : Estimation des paramètres	71
3.2.1 Test numérique et comparaison avec le modèle de Black&Scholes	74
3.3 Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?	77
3.3.1 Aperçu général sur la loi belge sur les pensions complémentaires (LPC)	77
3.3.2 Calcul du niveau de solvabilité d'un plan de pension dans le cadre de la loi LPC	78
3.3.2.1 Actif mixte	78
3.3.2.2 Capital de solvabilité	82
3.4 Conclusion	86

3.1 Introduction

Dans le Chapitre 2, nous avons utilisé quelques processus pour modéliser la valeur de l'actif d'un plan de pension, cette étude sera complète après une estimation des paramètres utilisés dans chaque modèle, selon une méthode que nous jugeons cohérente et relativement rigoureuse, en l'occurrence, la méthode du maximum de vraisemblance.

Dans la littérature financière, la calibration des processus de Lévy a largement été traitée. Nombreuses sont les études qui ont proposé des estimations des paramètres des processus de Lévy dans des contextes différents. Pour des études de référence, on peut citer par exemple [He C Kennedy J.S. Coleman T.F Forsyth P.A. Li Y. and Vetzal K.R], [Tankov P. Voltchkova E.] ou [Cont R. and Tankov P].

Après la calibration des modèles, et en utilisant les paramètres estimés, nous allons tester la qualité de la calibration en étudiant l'écart, en termes de fonction de répartition, entre chacun des modèles calibrés et des données réellement observées.

L'étude présentée dans le Chapitre 2, qui a été basée sur la modélisation de l'actif d'un plan de pension par des processus de Lévy, a été fondée sur des paramètres standards. Nous avons comparé chacun des processus de Lévy étudiés avec un simple mouvement Brownien géométrique en égalisant l'espérance et la variance. Dans ce chapitre nous souhaitons, en plus de calibrer les modèles proposés, comparer leur adéquation par rapport à la réalité. Pour ce faire, nous optons pour le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov pour juger la pertinence de chaque modèle et comparer leur degré d'adéquation avec la distribution empirique.

La dernière partie de ce chapitre concerne le problème du taux minimum garanti. En effet, ce travail a été effectué au moment où la loi belge sur les pensions complémentaires de l'arrêté royal de 2003 était encore d'application (avant la modification du 18 décembre 2015).

La loi belge sur les pensions complémentaires (LPC/WAP) du 28 Avril 2003 est une loi qui régit le cadre social des pensions complémentaires. Elle démocratise le 2ème pilier en améliorant l'accessibilité à la pension complémentaire (voir [De Somviele I. and Van Damme A.] et [Castiaux D. and Donéa M.P.]). Dans cette même optique et afin de préserver les affiliés contre le risque du marché, la loi LPC exige de l'employeur, dans le cadre des pensions de type DC, de garantir un rendement fixe sur les cotisations de pension, qui est de 3.75 % sur les cotisations personnelles et de 3.25 % sur les cotisations patronales. Dans sa nouvelle version,

entrée en vigueur le 1er janvier 2016, ce rendement est dorénavant défini par une formule qui tient compte de l'évolution du rendement moyen des obligations d'état belges (OLO) à 10 ans, tout en définissant un taux de rendement minimum de 1.75 % et un taux maximum de 3.75 %.

Le taux minimum garanti par la loi sur les pensions complémentaires de l'A.R de 2003 constitue une énorme charge pour l'employeur. Ce dernier, dans le contexte actuel particulier où les taux de marché sont loin de ce niveau exigé par cette loi, doit prendre en charge cette différence.

Dans les exemples présentés dans les chapitres précédents, nous avons maintenu le taux fixe garanti par le plan DC à un niveau de 2.75 % qui est plus petit que le niveau exigé par la loi LPC. L'idée était de ne pas impacter les résultats par un taux disproportionné avec l'évolution du marché. Dans ce chapitre, précisément dans sa dernière partie, nous souhaitons mettre en lumière l'impact du taux minimum garanti par la loi LPC, particulièrement ceux exigés par la loi de l'A.R de 2003. Pour ce faire, nous nous mettons dans le cadre d'un plan DC qui s'aligne avec les taux exigés par cette loi. Nous proposons également des stratégies d'investissement différentes du portefeuille du plan, afin de confronter le taux exigé par la loi LPC avec l'évolution du taux court sur le marché. Pour ce dernier, nous choisissons une dynamique stochastique de retour à la moyenne. Nous analysons ainsi l'impact du niveau du taux minimum garanti par cette loi sur les besoins de solvabilité du plan.

3.2 Processus de Lévy : Estimation des paramètres

Dans chacune des sous-sections suivantes nous rappelons l'équation de la dynamique de chacun des processus de Lévy proposés dans le Chapitre 2 ; nous utilisons ensuite la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres utilisés par chaque modèle.

Processus diffusif à sauts de Merton

Le prix d'un actif financier modélisé par le processus de Merton à sauts Gaussiens est donné par l'équation suivante :

$$A_{t+\delta t} = A_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda K)\delta t + \sigma(w_{t+\delta t} - w_t) + \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\delta t}} J_i} \quad (3.1)$$

où,

- μ est le rendement moyen de l'actif et σ la volatilité de sa partie diffusive,
- μ_J est la moyenne des sauts et σ_J leur volatilité,
- $K = e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1$
- w_s $s \geq 0$ est un mouvement Brownien standard,
- δt est un pas de temps,
- $N = (N_s)_{s \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ (nombre moyen de sauts par année),
- w , N et J sont indépendants,
- $(J_i)_{i \geq 0}$ est un ensemble de variables aléatoires i.i.d avec $J_i \sim N(\mu_J, \sigma_J) \quad \forall i \geq 0$.

Estimation des paramètres du processus MJD

La quantité $\frac{A_{t+\delta t}}{A_t}$ ne dépend en loi pas de t . En effet, les rendements $R_t = \frac{A_{t+\delta t}}{A_t}$ sont indépendants et identiquement distribués, et leur distribution dépend de la longueur de l'intervalle et pas de l'instant t .

Nous allons donc discrétiser les rendements de l'actif en utilisant un pas journalier, $\delta t = \frac{1}{250}$, noté h dans la suite. On note également par X la variable du log-rendement, soit $X = \ln(R_t)$.

Si h est la longueur de l'intervalle de temps $[t, t + \delta t]$, la fonction de densité de la variable X , conditionnellement au nombre des sauts $N(h)$ survenus dans l'intervalle $[t, t + \delta t]$, est donnée par :

$$f_{X/N(h)=n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 h + \sigma_J^2 n)}} e^{-\frac{(x - (\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda K + \mu_J))^2}{2(\sigma^2 h + \sigma_J^2 n)}} .$$

La fonction de densité inconditionnelle, est donc donnée par

$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{X/N(h)=n}(x) p(N(h) = n) .$$

En remplaçant la densité de la loi de Poisson par son expression explicite, nous obtenons :

$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 h + \sigma_J^2 n)}} e^{-\frac{(x - (\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda K + \mu_J))^2}{2(\sigma^2 h + \sigma_J^2 n)}} \right) \left(e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} \right) .$$

Pour l'estimation des paramètres, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance. Pour cela nous avons besoin d'un échantillon de taille M , contenant M observations de X , soit, $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)$.

La fonction du maximum de vraisemblance de X est donnée par :

$$L(X; \theta) = \prod_{i=1}^M f_X(x_i, \theta),$$

où $\theta = (\mu, \sigma, \sigma_J, \mu_J, \lambda)$ est le vecteur des paramètres à estimer.

La fonction du log-vraisemblance de X est donc donnée par :

$$\log L(X; \theta) = \sum_{i=1}^M \log \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 h + \sigma_J^2 n)}} e^{-\frac{(x_i - (\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda K + \mu_J))^2}{2(\sigma^2 h + \sigma_J^2 n)}} \right) \left(e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} \right) \right]$$

Nous allons tronquer la somme infinie en choisissant un nombre maximal de sauts dans un intervalle de longueur h (100 pour notre étude) ; nous allons ensuite minimiser l'inverse de la fonction log-vraisemblance. Nous avons procédé numériquement en utilisant le package "DEoptim" disponible sur le logiciel R, voir ([Ardia D. Mullen K. Peterson B. and Ulrich J.]). La fonction "DEoptim" est parmi les fonctions d'optimisation les plus stables. Parmi ses particularités, contrairement à plusieurs méthodes d'optimisation, c'est une méthode qui ne requiert pas un vecteur de paramètres initiaux, mais qui exige une définition préalable des bornes supérieure et inférieure des paramètres à optimiser.

Ensuite, pour procéder à l'optimisation de la fonction du maximum de vraisemblance, on se fixe un pas journalier, i.e $h = \frac{1}{250}$, ensuite on choisit un vecteur de prix historiques du CAC40, que nous avons choisi comme indice boursier, entre le 1er Janvier 2007 et le 31 Décembre 2012.

Finalement, le résultat de l'estimation des paramètres du processus MJD est donné par les valeurs suivantes :

- $\hat{\mu} = 0,06730517$
- $\hat{\sigma} = 0,1839654$
- $\hat{\mu}_J = -1,976203.10^{-08}$
- $\hat{\sigma}_J = 0,0276788$
- $\hat{\lambda} = 50.60012$

Remarque 3.2.1.

On peut remarquer que le rendement moyen des sauts μ_J , résultant de la calibration du modèle MJD, est très faible, puisque nous avons obtenu la valeur $\hat{\mu}_J = -1,976203.10^{-08}$. Malgré cela, l'effet des sauts dans la dynamique du processus de MJD est bien présent par la volatilité de la taille des sauts (σ_J), de valeur estimée $\hat{\sigma}_J = 2.8\%$ et aussi par la fréquence des sauts dont la valeur estimée est $\hat{\lambda} = 50.60012$.

Estimation des paramètres du processus VG

Si on note par X_t^{VG} une variable de dynamique Variance Gamma, on peut modéliser le prix d'un actif financier par une variable S_t donnée par : $S_t = S_0 e^{X_t^{VG}}$. Pour la suite de cette section, on va garder les mêmes notations qu'au Chapitre 2.

La densité des incréments $X_{t+h}^{VG} - X_t^{VG}$ est donnée par :

$$f_{X_h^{VG}}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{v}-1} e^{-\frac{g}{v}}}{v^{\frac{t}{v}} \Gamma(\frac{t}{v})} dg$$

où

$$\theta = \frac{1 - \frac{\sigma^2 v}{2} - e^{-v\delta}}{v} \quad (v > 0)$$

Comme pour le processus MJD, pour estimer le vecteur des paramètres du modèle Variance Gamma, $\omega = (\delta, \sigma, v)$, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ceci, nous utilisons un échantillon de taille M , contenant M observations de X , i.e, $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)$.

La fonction du maximum de vraisemblance de X_h^{VG} est donnée par :

$$L(X_h^{VG}; \omega) = \prod_{i=1}^M f_{X_h}(x_i, \omega),$$

En fixant un pas journalier, la calibration du modèle Variance Gamma, sur l'indice boursier CAC40 observé sur la période 2007-2012, fournit les valeurs estimées suivantes :

- $\hat{\theta} = -0.001199467$
- $\hat{\sigma} = 0.032557811$
- $\hat{v} = 0.229727198$
- $\hat{\delta} = -0.0006694$

3.2.1 Test numérique et comparaison avec le modèle de Black&Scholes

Pour tester l'adéquation des modèles étudiés dans le paragraphe précédent par rapport à la réalité, nous comparons la fonction de répartition d'un échantillon de données historiques avec la fonction de répartition donnée par chacun de ces modèles. Parmi les tests les plus puissants dans ce cadre, on trouve le test de χ^2 . Mais ce dernier est plus adapté aux variables discrètes, puisqu'il nécessite le choix des bornes des classes utilisées. Ce choix devient très arbitraire dans le cas des variables continues. Pour cette raison, nous préférons utiliser le test de Kolmogorov-Smirnov.

Test de Kolmogorov-Smirnov :

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test non-paramétrique qui permet de tester l'hypothèse selon laquelle un échantillon suit une loi donnée et connue par sa fonction de répartition continue. Il permet également de tester si deux échantillons donnés suivent une même loi (voir par exemple [Frank J. and Massey Jr.] et [Galen R.S Jon A.W.]).

Comme nous avons estimé les paramètres des modèles utilisés, nous nous intéressons au test de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons. En effet, pour chaque modèle, nous comparons un échantillon de valeurs observées du CAC40 avec un échantillon simulé par chaque modèle. Nous mesurons l'écart entre la fonction de répartition de l'échantillon observé avec la fonction de répartition donnée par chaque modèle.

Ce test repose sur une statistique qui mesure l'écart maximal entre les deux fonctions de répartition. La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons est donnée par :

$$D_{n_1, n_2} = \sup_{x \in R} |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|$$

où F_{n_1} est la fonction de répartition de l'échantillon observé de taille n_1 et F_{n_2} est la fonction de répartition de l'échantillon de taille n_2 généré par le modèle.

Pour tout seuil de risque $0 < \xi < 1$, ce test a une région critique donnée par :

$$R.C. \quad D_{n_1, n_2} \geq c(\xi) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \quad (3.2)$$

où $c(\xi)$ est donnée par la table des valeurs critiques de Kolmogorov-Smirnov.

L'hypothèse nulle H_0 , selon laquelle les deux échantillons ont la même fonction de répartition, est donc rejetée pour les grandes valeurs de D_{n_1, n_2} (région critique).

D'un autre côté, et comme ce test sera appliqué également au modèle de Black & Scholes, nous rappelons l'expression de sa dynamique :

$$\frac{dA_{bs}(t)}{A_{bs}(t)} = \mu_{bs} dt + \sigma_{bs} dw_{bs}(t)$$

où

- A_{bs} est le prix d'un actif financier donné par le modèle de Black&Schols.
- μ_{bs} est le rendement moyen de l'actif A_{bs}
- σ_{bs} est la volatilité de l'actif A_{bs}
- w_{bs} est un mouvement Brownien standard.

Les valeurs estimées des paramètres du modèle de Black & Scholes, sur le prix du CAC40 2007–2012, par la méthode du maximum de vraisemblance sont :

- $\hat{\mu}_{bs} = -0.001$
- $\hat{\sigma}_{bs} = 0.2701929$

En se basant sur un échantillon de 500 valeurs journalières du CAC40 à partir de Janvier 2007, nous avons régénéré ces valeurs par les trois modèles que nous voulons comparer, soient, Black&Scholes, Merton à sauts Gaussiens et Variance Gamma ¹, en utilisant les paramètres estimés de chacun . Les résultats du test sont présentés dans la table suivante :

Modèle	Statistique D	p-value
BS	0.432	<2.2e-16
MJD	0.056	0.4231
VG	0.042	0.7699

TABLE 3.1 – Résultat du test Kolmogorov

Le résultat du test de Kolmogorov-Smirnov présenté dans la Table 3.1 montre que le modèle qui correspond le mieux aux données observées est le modèle de Variance Gamma, suivi du modèle de Merton à sauts Gaussiens. Néanmoins, le test rejette l'hypothèse selon laquelle le cours CAC40 suit la dynamique Black&Scholes.

1. Le test de Komogorov-Smirnov est utilisé dans [Rafal M.L.] pour comparer les modèles Black&Scholes et Merton à sauts Gaussiens. Pour le processus Variance Gamma, voir par exemple [Kedma L.E. Chun Kai H. Knowledge C.] .

3.3 Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?

3.3.1 Aperçu général sur la loi belge sur les pensions complémentaires (LPC)

Dans le cadre du développement et de la démocratisation du deuxième pilier du système des pensions, le législateur belge a instauré une loi sur les pensions complémentaires en date du 28 Avril 2003. En effet, avant la mise en vigueur de cette loi, dans le cadre d'un engagement de pension de type « contributions définies », le risque d'investissement pesait sur le travailleur puisque ses prestations dépendaient des rendements générés par l'investissement de ses contributions. Ainsi, le législateur a eu la volonté de protéger l'épargne des travailleurs des effets dévastateurs de l'instabilité des marchés financiers. Il a donc décidé d'éviter toute incertitude sur l'avenir de l'épargne du travailleur en imposant un rendement minimal sur les contributions personnelles et patronales dans le cadre de sa pension complémentaire.

Concrètement, dans le cadre de cette loi, un travailleur affilié à un plan de pension complémentaire a droit à un taux de rendement minimum annuel de 3,75% sur ses propres contributions et de 3,25% sur les contributions patronales. Le sponsor (ici l'employeur) doit garantir ce taux minimum indépendamment de l'évolution des taux proposés par le marché. Or, ces derniers semblent de plus en plus déconnectés du rendement minimum imposé par la loi LPC.

En effet, lors de l'instauration de cette loi, le taux minimum imposé par la loi était aligné avec le niveau des rendements proposés par le marché. Par exemple, on peut se référer au rendement des obligations d'Etat à 10 ans (OLO10) qui était de 4% à cette époque. Ces dernières sont considérées comme une sorte de sécurité pour les assureurs pour leurs investissements de long terme. Néanmoins, les conditions sur les marchés financiers n'ont pas maintenu cette cohérence entre la loi et les rendements du marché. Nous avons bien vécu depuis l'instauration de la loi à aujourd'hui des taux d'intérêt trop bas. Les assureurs se sont donc adaptés à ce phénomène et ont fortement baissé leur taux de rendement (en moyenne 2,15% en 2013 et 1.5% en 2015). Ainsi, l'employeur est donc dans l'obligation d'assurer la différence entre le rendement de son assureur et le rendement minimum imposé par la loi LPC.

La Figure 3.1 illustre l'évolution des rendements des OLO10 depuis l'instauration de la

3.3. Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?

loi (LPC) ainsi que l'évolution de la charge d'un employeur qui opte pour une assurance de groupe du même rendement que celui des OLO10. La charge de l'employeur illustrée représente la différence entre le rendement au taux de 3,25% sur les cotisations patronales et le rendement des obligations souveraines OLO à 10 ans.

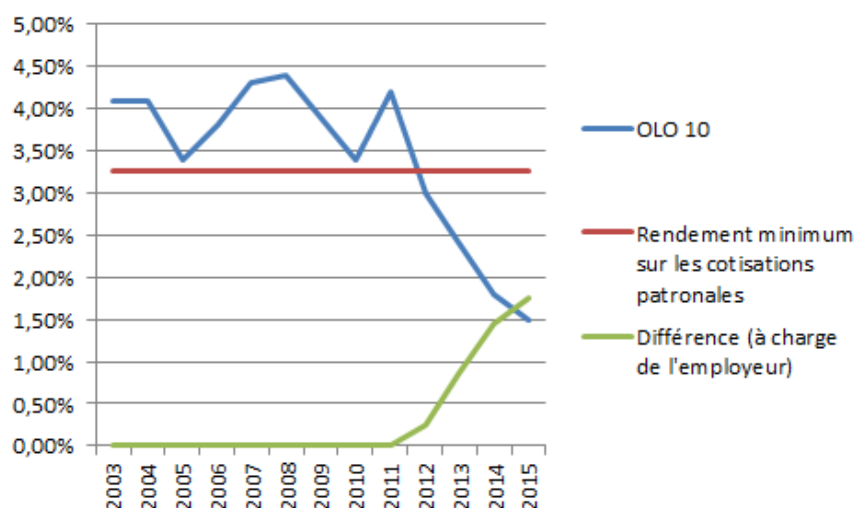


FIGURE 3.1 – Evolution de la charge de l'employeur depuis l'instauration de la loi (LPC)

Ces données prouvent que les exigences de la loi (LPC) sont totalement surréalistes voire décourageantes pour les employeurs. Ce qui va à l'encontre du principe initial de la loi.

3.3.2 Calcul du niveau de solvabilité d'un plan de pension dans le cadre de la loi LPC

3.3.2.1 Actif mixte

Dans cette section, nous mesurons l'impact sur la solvabilité d'un plan de pension du taux de rendement minimum imposé par la loi (LPC).

Nous supposons que l'actif du plan est représenté par un portefeuille mixte composé de trois actifs différents : Obligation, action et cash.

1. Cash :

À tout instant t , sa valeur est donnée par :

$$C(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

où r est un taux court. On suppose que sa dynamique suit un processus de retour à la moyenne. Ici on utilise le processus de Vasicek. Son équation différentielle est donc donnée par

$$dr(s) = a(b - r(s))ds - \sigma_r dw_r(s) \quad \forall s > 0$$

où w_r est un mouvement Brownien standard, b est la moyenne du taux, ou sa valeur d'équilibre à long terme, et a est la vitesse de retour à la moyenne.

Sa solution est donnée explicitement par :

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma_r e^{-at} \int_0^t e^{as} dw_s.$$

son espérance et sa volatilité sont données par :

- $E(r(t)) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at})$
- $Var(r(t)) = \frac{\sigma_r^2}{2a}(1 - e^{-2at})$

2. Obligation :

On suppose qu'une partie de la prime est investie en obligation de type "Rolling bond", de duration constante fixe K .

On rappelle la définition d'une obligation "Rolling Bond" :

Définition 3.3.1. *Une obligation de maturité K , de type "Rolling Bond", est une obligation zéro coupon continûment rebalancée afin de maintenir sa maturité constante.*

Par la formule d'Itô, la dynamique de la valeur du fonds obligataire est donnée par :

$$dP(t, s, r) = P(t, s, r)[\mu(t, s, r)dt + \sigma_B(t, s, r)dw_r(t)] \quad \forall t \geq 0$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_B(t, s, r) &= \sigma_r \frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a} \\ &= \sigma_r \frac{1 - e^{-aK}}{a}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on adopte la notation σ_K pour ce paramètre.

3.3. Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?

Le prix du risque de marché λ_r est donné par :

$$\lambda_r = \frac{\mu - r}{\sigma_K}$$

La dynamique du Rolling bond est ainsi donnée par :

$$\frac{dP_K(t)}{P_K(t)} = (r(t) - \sigma_K \lambda_r) dt + \sigma_K dw_r(t).$$

3. Fonds risqué :

On suppose qu'une dernière partie de la prime est investie dans un actif risqué de type "action". De même que pour le fonds obligataire, en introduisant une prime de risque λ_s , la valeur du fonds risqué est donnée par :

$$\frac{dX(t)}{X} = (r(t) + \sigma_s \lambda_s) dt + \sigma_s dw_s(t).$$

où σ_s est la volatilité du fonds risqué et dw_s est un mouvement Brownien standard corrélé avec le mouvement Brownien de taux dw_r . Ils sont donc liés par la relation de corrélation :

$$dw_s = \rho dw_r + \sqrt{1 - \rho^2} dw \quad (dw \text{ est un mouvement Brownien standard indépendant de } dw_r)$$

avec ρ = un facteur de corrélation.

On suppose que le portefeuille global est constamment rebalancé de sorte que les proportions d'investissement dans les trois types d'actif (cash, obligation et action) restent constantes en permanence. Nous les notons par x_c , x_b et x_s où :

- x_b : part d'investissement en obligation (rolling bond),
- x_s : part d'investissement en action,
- $x_c = 1 - x_s - x_b$: part d'investissement en cash.

L'équation stochastique de l'actif mixte est donnée par :

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = (r(t) + x_b \sigma_K \lambda_r + x_s \sigma_s \lambda_s) dt + (x_b \sigma_K + x_s \sigma_s \rho) dw_r(t) + x_s \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} dw(t)$$

La valeur $A(t)$ est donc donnée explicitement par :

$$A(t) = A(0) \exp \left[\int_0^t r(u) du + \left(m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + \sigma_1 w_r(t) + \sigma_2 w(t) \right],$$

où

$$\begin{aligned} m &= x_B \sigma_K \lambda_r + x_s \sigma_s \lambda_s, \\ \sigma_1 &= x_B \sigma_K + x_s \sigma_s \rho, \\ \sigma_2 &= x_s \sigma_s \sqrt{1 - \rho}. \end{aligned}$$

On suppose que $A(0) = 1$.

On peut remarquer que la valeur évolutive de l'actif $A(t)$ suit une loi lognormale qui s'écrit sous la forme :

$$A(t) = e^{B(t)}$$

où $B(t)$ est une variable de distribution normale dont l'espérance et la variance peuvent être calculées explicitement.

Espérance de $B(t)$:

$$\begin{aligned} E(B(t)) &= E \left(\int_0^t r(u) du + \left(m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + \sigma_1 w_r(t) + \sigma_2 w(t) \right) \\ &= \left(m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + E \left(\int_0^t r(u) du \right) \\ &= \left(m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + E \left(\int_0^t (r(0) e^{-au} + b(1 - e^{-au})) du - \sigma_r \int_0^t \int_0^u e^{-a(u-v)} dw_r(v) du \right) \\ &= \left(m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + bt + \left(\frac{r(0) - b}{a} \right) (1 - e^{-at}) - E \left(\sigma_r \int_0^t \int_0^u e^{-a(u-v)} du dw_r(v) \right) \\ &= \left(m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + bt + \left(\frac{r(0) - b}{a} \right) (1 - e^{-at}) - \underbrace{E \left(\frac{\sigma_r}{a} \int_0^t (1 - e^{-a(t-v)}) dw_r(v) \right)}_{=0}. \end{aligned}$$

D'où :

$$E(B(t)) = \left(m + b - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) t + \left(\frac{r(0) - b}{a} \right) (1 - e^{-at})$$

Variance de $B(t)$:

3.3. Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?

$$\begin{aligned}
var(B(t)) &= var\left(\int_0^t r(u)du + (m - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})t + \sigma_1 w_r(t) + \sigma_2 w(t)\right), \\
&= var\left(\int_0^t r(u)du + \sigma_1 w_r(t) + \sigma_2 w(t)\right), \\
&= var\left(\int_0^t r(u)du\right) + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t + 2cov\left(\int_0^t r(u)du, \sigma_1 w_r(t)\right), \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a^2} \int_0^t (1 - e^{-a(t-v)})^2 dv + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t - \frac{2\sigma_1\sigma_r}{a} cov\left(\int_0^t (1 - e^{-a(t-v)})dw_r(v), w_r(t)\right) \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a^2} \left(t + \frac{1 - e^{-2at}}{2a} - 2\frac{1 - e^{-at}}{2a}\right) + \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 t - \frac{2\sigma_1\sigma_r}{a} \left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$var(B(t)) = \frac{\sigma_r^2}{a^2} \left(t + \frac{1 - e^{-2at}}{2a} - 2\frac{1 - e^{-at}}{2a}\right) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t - 2\frac{\sigma_1\sigma_r}{a} \left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a}\right)$$

Pour la suite, on note l'espérance et la variance de $B(t)$ respectivement par $\mu(t)$ et $\eta^2(t)$.

3.3.2.2 Capital de solvabilité

On suppose que le capital de solvabilité SC est investi dans un zéro coupon de maturité T et de taux spot i_r . Pour une date de maturité T , il est donc obtenu par l'équation suivante :

$$P(A(T) + SC(T)e^{i_r T} < e^{r_g T}) = 1 - \alpha_T$$

où r_g est le taux garanti par le plan de pension et $\alpha_T = \alpha^T$ le seuil de confiance correspondant à l'année T . La valeur du capital de solvabilité est donc donnée par :

Proposition 3.3.1. *Le capital de solvabilité nécessaire pour un plan de pension de type DC, à taux fixe garanti r_g est donné par :*

$$SC(T) = exp[(i_r - r_g)T] - exp[\mu(T) - i_r T + \eta(T)z_{1-\alpha_T}] \quad (3.3)$$

où

$$\begin{aligned}
\mu_T &= \left(x_b \sigma_K \lambda_r + x_s \sigma_s \lambda_s - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + b\right) T + \left(\frac{r(0) - b}{a}\right) (1 - e^{-aT}), \\
\sigma_1 &= x_B \sigma_K + x_s \sigma_s \rho, \\
\sigma_2 &= x_s \sigma_s \sqrt{1 - \rho},
\end{aligned}$$

et

$$\eta(T) = \sqrt{\left[\frac{\sigma_r^2}{a^2} + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\frac{\sigma_1\sigma_r}{a}\right] T + 2\left[\frac{\sigma_1\sigma_r}{a} - \frac{\sigma_r^2}{a^2}\right] \left[\frac{1 - e^{-aT}}{a}\right] + \frac{\sigma_r^2}{a^2} \left[\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}\right]}.$$

Illustration numérique

Dans l'exemple suivant, nous illustrons le résultat du calcul du capital de solvabilité donné

par l'équation 3.3.

Les paramètres du modèle de taux de Vasicek sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les valeurs estimées sont :

- $\hat{a} = 0,2791$
- $\hat{b} = 0,032$
- $\hat{\sigma}_r = 0,00765$

Étant donné que les paramètres du modèle Black&Scholes estimés sont liés à une période de crise, nous proposons de considérer des paramètres standards pour l'actif mixte, et qui sont :

- $\lambda_r = 2,36\%$
- $\lambda_s = 12,5\%$
- $\sigma_s = 16\%$
- $\rho = 5\%$

Les paramètres λ_r et λ_s sont inspirés de l'étude [Hainaut D. Devolder P.]. En effet, nous avons utilisé le même paramètre λ_r utilisé dans cette étude. Néanmoins, le paramètre λ_s utilisé dans cette étude est de valeur 34,94%, ce qui donne une prime de risque "action" : $\lambda_s \sigma_s = 5,59\%$. Ainsi, nous avons adapté ce paramètre aux conditions actuelles des marchés financiers en choisissant la valeur 12,5% qui permet d'obtenir une prime de risque de 2%.

Les valeurs considérées des proportions de la prime investies dans chaque actif sont :

- $x_b = 45\%$
- $x_c = 5\%$
- $x_s = 50\%$

Nous avons calculé le capital de solvabilité pour trois niveaux du taux garanti par le plan : $r_g = 2\%$, $r_g = 2,75\%$ et $r_g = 3,25\%$. Le résultat est présenté dans la Figure 3.4 :

3.3. Application du taux minimum garanti : quel impact sur le niveau de solvabilité du plan de pension ?

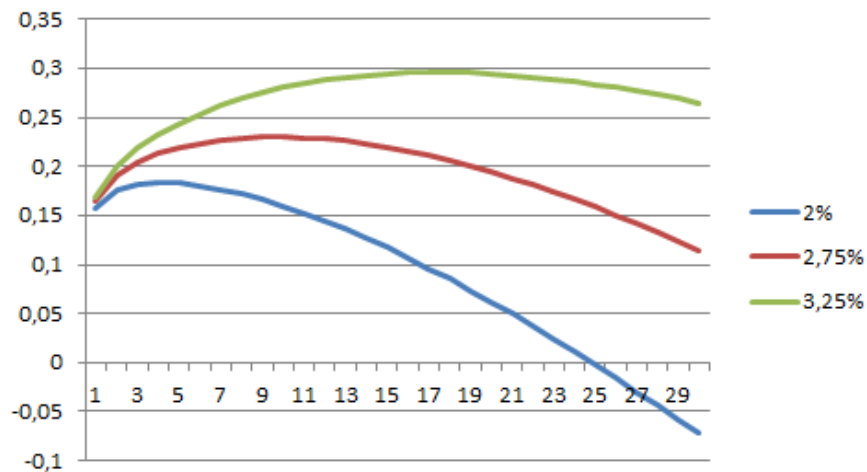


FIGURE 3.2 – Capital de solvabilité

Afin de mettre en lumière l’impact de la clé de répartition du portefeuille mixte, nous illustrons la sensibilité des paramètres x_b , x_c et x_s par les deux exemples suivants :

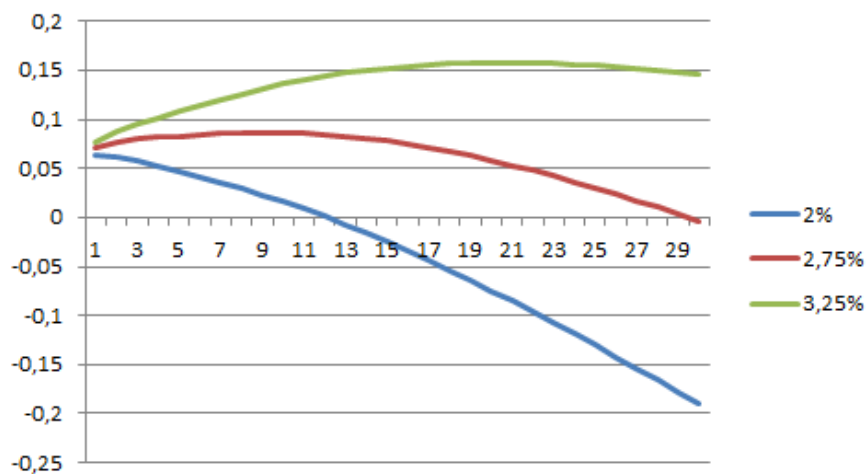


FIGURE 3.3 – Capital de solvabilité : $x_b = 75\%$, $x_c = 5\%$ et $x_s = 20\%$

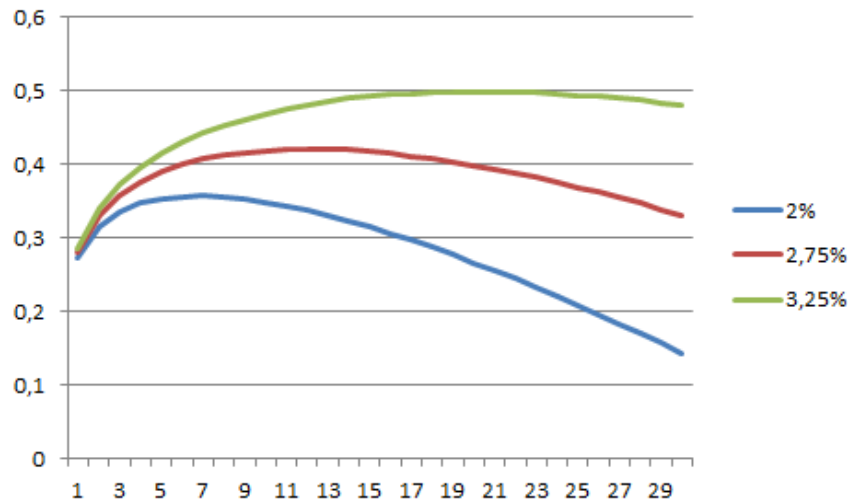


FIGURE 3.4 – Capital de solvabilité : $x_b = 5\%$, $x_c = 5\%$ et $x_s = 90\%$

Ces résultats confirment ce que nous avons mentionné dans la section 3.3.1. En effet, un taux de 3,25% équivalent au taux minimum garanti exigé par la loi sur les pensions complémentaires, requiert un capital de solvabilité excessivement élevé. Dans le cadre de la réglementation Solvency2, nous pouvons constater qu'un assureur offrant un rendement du même niveau que celui imposé par la loi LPC, se trouve dans l'obligation de détenir un niveau de capital minimal tel que présenté dans la courbe correspondant au taux de 3,25%. Ceci justifie le fait que les assureurs ne peuvent plus s'aligner à ce niveau de rendement. Malheureusement, après la chute des taux offerts par les assureurs, seul l'employeur est dans l'obligation d'assurer la différence entre le taux disponible sur le marché et celui imposé par la loi LPC.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés particulièrement au calibrage des modèles proposés dans les deux premiers chapitres. Cette calibration a montré que notre modèle de référence Black & Scholes ne peut pas être retenu pour modéliser des actifs risqués de type « action ». Parallèlement à cela, nous avons prouvé que les modèles alternatifs que nous proposons (MJD et VG) représentent mieux la dynamique de ce type d'actif et peuvent donc être adoptés pour modéliser l'actif d'un plan de pension afin d'évaluer sa solvabilité.

Par ailleurs, nous avons mis en lumière l'impact négatif du taux minimum garanti qui représente une source de risque potentiel pour un plan de pension. Nous avons montré que ce taux, complètement déconnecté de la réalité des marchés, oblige le sponsor du plan d'assurer un capital de solvabilité excessivement élevé.

Chapitre 4

Mesure de solvabilité des plans de pension à prestations définies

Dans les trois premiers chapitres de ce travail, nous avons étudié et mesuré le risque de solvabilité des plans de pension de type " Contributions définies " en proposant plusieurs modèles pour l'actif financier, puisque sa valeur est supposée aléatoire. Le passif n'ayant pas un caractère aléatoire dans ce contexte. Dans le chapitre présent, nous introduisons un nouveau type de plans de pension : " Prestations définies ". Nous définissons les risques auxquels sont soumis ces plans, nous proposons ainsi une méthode de modélisation de l'actif ainsi que du passif (la valeur de ce dernier n'est plus déterministe comme le cas des plans à contributions définies).

Sommaire

4.1 Introduction	88
4.2 Cadre général	90
4.3 Actif lognormal :	90
4.3.1 Probabilité de défaut sans capital supplémentaire	93
4.3.2 Approche Value at risk et capital de solvabilité	95
4.3.3 Analyse de l'impact des paramètres	97
4.3.4 Solvabilité du plan et approche de ruine	100
4.4 Actif à sauts aléatoires : Processus Variance Gamma	104
4.4.1 Mesures de solvabilité	106
4.4.1.1 Probabilité de défaut	106
4.4.1.2 Capital de solvabilité	108
4.5 Conclusion	111

4.1 Introduction

Un régime de retraite ou un plan de pension de type « prestations définies » (DB) est un régime qui détermine les avantages auxquels les affiliés auront droit au moment de leur départ à la retraite. Il définit soit la valeur du capital auquel l'affilié aura droit au moment de son départ à la retraite, soit la valeur d'une rente de retraite dont il bénéficiera jusqu'à son décès ou le décès d'une tierce personne ayant droit à en bénéficier après le prédécès de l'affilié. Souvent un pourcentage de la rente est fixé et mis à la disposition du conjoint survivant. Le régime définit également la loi avec laquelle la rente devra évoluer (une indexation éventuelle).

Les plans de pension de type prestations définies sont gérés par des institutions financières soumises aux directives européennes de solvabilité (solvency 2/ LGTA). Tout comme les plans de pension de type DC, les plans de pension de type DB ont la particularité d'être des produits de long terme. Ce qui signifie que les engagements vis-à-vis des assurés sont de longue durée. Nous tenons compte de cet aspect dans le modèle de solvabilité que nous proposons.

Nous proposons un modèle de solvabilité qui tient compte des risques auxquels sont soumis les plans de type « DB », en partant de la modélisation de l'actif et du passif du plan vers des mesures de risque adaptées à leurs particularités pour en définir un capital de solvabilité à détenir permettant d'assurer que les engagements du plan seront honorés.

Dans ce chapitre, nous traitons uniquement les plans DB qui proposent un capital (lump sum) à l'âge de la retraite de l'affilié (pas de rente considérée). Nous avons ainsi deux sources de risque à étudier : le risque action et le risque d'inflation (le risque de mortalité sera traité dans le Chapitre 5).

Dans la littérature, le financement et la solvabilité des plans de pension de type DB ont fait l'objet de plusieurs études intéressantes. On en cite [Samuelson P.] et [Samuelson P.]. Mais ces derniers ont orienté leurs études vers un contrôle optimal moyennant des modèles stochastiques et une allocation stratégique de portefeuille, mais pas vers une mesure de solvabilité de même philosophie que Solvency 2 ou LTGA. Cette étude peut être considérée comme une extension des résultats de [Samuelson P.] pour les plans de pension de type DB avec l'introduction du risque "Inflation".

Dans le cas de notre étude, nous nous sommes également mis dans le cadre des normes IAS,

particulièrement la méthode “Projected Unit Credit Cost” comme technique de financement du plan. Les contributions ainsi que le passif actuariel sont donc définis par cette méthode.

L’horizon de temps n’est pas fixé à une année (comme en Solvency2/LTGA) mais jusqu’au jour de la retraite de l’affilié. Une étude de type « ALM » est proposée. Nous développons également un modèle fondé sur la théorie de ruine pour ne pas considérer uniquement la solvabilité à la maturité des engagements. Ce qui nous a amené à étudier la solvabilité du plan à tout moment entre le début et la fin du contrat, en supposant que l’affilié peut quitter le plan à tout moment avant la maturité du contrat.

Le chapitre commence par une description du cadre technique du plan étudié, notamment en ce qui concerne l’évolution de l’actif et celle du passif (section 4.2). La section 4.3 est consacrée au cas d’un plan de pension dont l’actif est donné par un mouvement Brownien géométrique. Dans cette section, nous proposons une étude ALM en appliquant la méthode « projected unit credit cost ». Ensuite, on étudie la situation de défaut sans et avec capital supplémentaire afin de mesurer l’impact des risques étudiés, qui sont le risque « action » et l’inflation des salaires, ainsi que l’impact de l’horizon de temps. Pour ceci, on modélise les valeurs de l’actif et du passif, qui sont générés par des mouvements Brownien géométriques en tenant compte du facteur de corrélation entre ces deux Browniens. Dans la dernière partie de cette section, nous considérons une mesure en temps continu, basée sur la probabilité de ruine à tout instant entre le début de l’affiliation au régime et le moment du départ à la retraite. Nous étudions la probabilité de ruine et nous proposons ensuite un calcul du capital de solvabilité basée sur cette approche.

Dans la section 4.4 , nous étendons l’étude proposée dans la section 4.3 en supposant que la valeur de l’actif du plan connaît des discontinuités aléatoires que nous modélisons par un processus de Lévy, en l’occurrence, le processus Variance Gamma introduit au Chapitre 2. Nous illustrons l’impact des sauts aléatoires dans la dynamique de l’actif du plan, en plus des risques étudiés dans la section 4.3, sur la solvabilité d’un plan de pension de type DB.

4.2 Cadre général

On se met dans le cadre d'un régime de retraite qui octroie des prestations de retraite aux affiliés en fonction de leur dernier salaire. Pour ce faire, on suppose qu'à l'instant $t = 0$ un affilié d'âge x rejoint le système avec un salaire initial $S(0)$.

À l'âge de la retraite x_r , à l'instant $t = T$, une somme forfaitaire sera versée à l'affilié sous forme d'un multiple de son dernier salaire. On peut supposer que ce montant est donné par la formule :

$$B = \frac{N}{40} \alpha S,$$

où :

- N : Nombre d'années de service reconnues par le régime
- S : Salaire final
- B : Prestations à payer (somme forfaitaire)
- α : Coefficient

Dans le cadre de cette étude et afin de déterminer le niveau des prestations octroyées par ce type de régime, nous lions cette étude aux normes IAS. Pour cela, nous avons choisi d'appliquer la technique de financement "Projected Unit Credit Cost".

On rappelle le principe de cette méthode dans la définition suivante :

Définition 4.2.1. *La méthode "Projected Unit Credit Cost" est une méthode qui permet de constituer continûment la réserve qui couvre les années déjà prestées. La particularité de cette méthode projetée est que les salaires qui permettent de calculer la réserve sont déjà projetés à la dernière année de carrière de l'affilié, permettant ainsi de diminuer l'écart entre la réserve estimée et la réserve réelle. En conséquence, chaque année prestée correspond à une fraction complémentaire de l'engagement.*

4.3 Actif lognormal :

Dans cette section, nous étudions la solvabilité d'un plan de pension, en supposant que son actif suit un processus lognormal. Nous comparons ainsi son évolution au terme du contrat, et aussi à tout moment avant ce terme, avec l'évolution des engagements. Ces derniers dépendent de l'évolution du salaire de l'affilié. Ce qui donne un caractère aléatoire aux

variables représentant les valeurs futures de l'actif et du passif du plan.

Nous avons besoin des éléments suivants :

1. Un taux d'actualisation : on prend un taux d'actualisation fixe et sans risque qu'on note r .
2. Une évolution salariale : on suppose que le salaire S évolue stochastiquement suivant un mouvement Brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \eta S_t dz_t,$$

où :

- μ : Évolution moyenne des salaires
- η : Volatilité des salaires
- z : Mouvement Brownien standard

Par cette dynamique des salaires proposée, on suppose que ces derniers suivent un mouvement Brownien géométrique. C'est une approche qui nous permet d'avoir un passif de dynamique lognormale.

En effet, dans la littérature financière, et principalement dans le cadre du pricing des produits indexés à l'inflation, cette dynamique a été proposée dans nombreuses études comme approche pour modéliser l'indice de l'inflation, comme dans [Jarrow R. Yildirim Y.] et [Kruse S.].

En utilisant l'approche de la meilleure estimation "Best estimate", la contribution pour la première année de service (ou le coût normal) est donnée par :

$$NC_0 = \frac{1}{40} \alpha S(0) e^{(\mu-r)T}. \quad (4.1)$$

(Valeur actualisée au taux sans risque r de la valeur projetée de la prestation moyenne à l'âge de la retraite).

Dans la formule 4.1, nous supposons que le coût normal est payé annuellement anticipativement.

De manière générale, le coût normal à tout instant t ($t = 0, 1, 2, \dots, T-1$) dans une approche Best Estimate est donné par :

$$NC_t = \frac{1}{40} \alpha S(t) e^{(\mu-r)(T-t)}$$

En introduisant un facteur de chargement β ($\beta \geq 0$) sur les contributions ; le coût normal devient :

$$NC_t = \frac{1}{40} \alpha S(t) (1 + \beta) e^{(\mu-r)(T-t)}$$

Dans une approche pure "Best estimate" ce chargement est nul. Il joue un rôle de marge de sécurité dans cette étude.

Le passif actuariel AL , à tout instant t ($t = 0, 1, \dots, T - 1$), est donné par :

$$AL_t = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) (1 + \beta) e^{(\mu-r)(T-t)} \quad (4.2)$$

L'intérêt du passif actuariel est de permettre de servir en totalité à la retraite les prestations des années de service déjà prestées sur la base du salaire projeté de l'affilié.

On suppose que les cotisations sont investies dans un actif risqué noté A et dont la valeur évolue suivant un mouvement Brownien géométrique. Son équation stochastique est donnée par :

$$dA_s = \delta A_s ds + \sigma A_s dw_s,$$

où

δ : rendement moyen de l'actif

σ : volatilité de l'actif

w : mouvement Brownien standard

Nous considérons que le risque de l'inflation et le risque du marché sont corrélés entre eux. Cette corrélation est donnée par :

$$\text{corr}(w_t, z_t) = \rho t$$

La valeur initiale de l'actif est donnée par :

$$A_0 = NC_0$$

La valeur finale de l'actif, moyennant une projection jusqu'à l'année de la retraite T , est donnée par :

$$A_0(T) = NC_0 e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma w(T)} = \frac{1}{40} \alpha S(0) (1 + \beta) e^{(\mu + \delta - r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma w(T)} \quad (4.3)$$

De manière générale, l'évolution future de l'investissement de la valeur du passif actuariel entre tout instant t d'évaluation et l'année de la retraite T est donnée par l'équation :

$$A_t(T) = AL_t e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(w(T) - w(t))} = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) (1 + \beta) e^{(\mu + \delta - r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(w(T) - w(t))} \quad (4.4)$$

La valeur initiale de cet actif étant : $A_t(t) = AL_t$.

En se mettant dans le cadre d'une approche ALM, nous étudions une comparaison entre la valeur évolutive de cet actif avec la valeur du passif projetée équivalente.

La valeur du passif est aléatoire. En tenant compte de l'évolution salariale, sa valeur est donnée pour la première année des contributions par :

$$L_0(T) = \frac{1}{40} \alpha S(0) e^{(\mu - \frac{\eta^2}{2})(T) + \eta z(T)} \quad (4.5)$$

De manière générale, la valeur à tout instant t du passif projeté est donnée par :

$$L_t(T) = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) e^{(\mu - \frac{\eta^2}{2})(T-t) + \eta(z(T) - z(t))} \quad (4.6)$$

4.3.1 Probabilité de défaut sans capital supplémentaire

De manière similaire aux études de la probabilité de défaut présentées dans les chapitres précédents, nous calculons la probabilité de ne pas avoir assez d'actifs pour faire face aux engagements de pension sans capital supplémentaire. Cette probabilité dépend de l'horizon de temps $T - t$, restant entre l'instant de calcul t et la date de retraite T . Elle est donc donnée par :

$$\phi(t, T) = P(A_t(T) < L_t(T)) \quad (4.7)$$

Ainsi, en remplaçant l'actif et le passif par leurs valeurs, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(t, T) &= P\left(AL_t e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(w(T) - w(t))} < \frac{t+1}{40} \alpha S(t) e^{(\mu - \frac{\eta^2}{2})(T-t) + \eta(z(T) - z(t))} \right) \\ &= P\left(\frac{t+1}{40} \alpha S(t) (1 + \beta) e^{(\mu + \delta - r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(w(T) - w(t))} < \frac{t+1}{40} \alpha S(t) e^{(\mu - \frac{\eta^2}{2})(T-t) + \eta(z(T) - z(t))} \right). \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\phi(t, T) = P(Y(t, T) < M)$$

où

$$Y(t, T) = \sigma(w(T) - w(t)) - \eta(z(T) - z(t)) \sim N(0, \bar{\sigma}^2(T - t))$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta$$

$$M = (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\eta^2}{2})(T - t) - \ln(1 + \beta)$$

La probabilité de défaut est donc donnée par :

$$\phi(t, T) = \Phi(a(T - t)) \quad (4.8)$$

où :

Φ : La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite ($N(0, 1)$)

$$a(s) = \frac{(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\eta^2}{2})\sqrt{s} - \frac{\ln(1+\beta)}{\sqrt{s}}}{\bar{\sigma}}$$

Exemple 1 : On considère les paramètres suivants :

Taux sans risque :	$r = 2\%$
Rendement moyen du fonds :	$\delta = 6\%$
Volatilité du fonds :	$\sigma = 10\%$
Evolution moyenne des salaires :	$\mu = 5\%$
Inflation des salaires :	$\eta = 5\%$
Facteur de corrélation :	$\rho = 50\%$
Chargement de sécurité :	$\beta = 5\%$

La Figure 4.1 montre l'évolution de la probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps $T - t$.

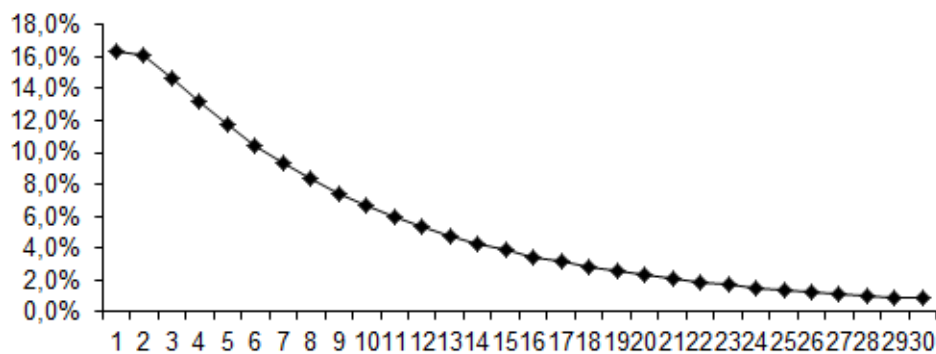


FIGURE 4.1 – Probabilité de défaut

La Figure (5.1) montre l'effet de l'horizon de temps. En effet elle présente des valeurs élevées pour les courts horizons de temps et décroît rapidement pour les longs horizons. Cette tendance dépend également du profil de risque du plan et particulièrement de l'écart entre la volatilité de l'actif et celle du passif.

4.3.2 Approche Value at risk et capital de solvabilité

Dans cette section nous appliquons le principe de solvency 2 dans la mesure où la compagnie doit déterminer un niveau de solvabilité requis (capital de solvabilité). Pour le calcul de ce capital on se base sur l'approche de la value at risk. On considère les notations suivantes :

$$\begin{aligned} SC &= \text{capital de solvabilité} \\ VaR &= \text{value at risk} \\ \alpha_1 &= \text{seuil de sécurité fixé pour un horizon d'un an} \end{aligned}$$

Comme vu dans les chapitres précédents, pour des horizons pluriannuels, nous calculons le seuil de sécurité en supposant que les probabilités de défaut annuelles sont indépendantes les unes des autres. Par cette contrainte, on définit la probabilité de non défaut pour une année quelconque N par :

$$\alpha_N = (\alpha_1)^N$$

On suppose que le capital de solvabilité est investi dans le même actif risqué que les contributions. On le note par $SC(t, T)$. Sa valeur tient compte de la durée entre l'instant de calcul t et la date de maturité T , où $0 \leq t \leq T - 1$.

En appliquant l'approche solvency 2, le capital $SC(t, T)$ est la solution de l'équation suivante :

$$P\{A_t(T) + SC(t, T) \frac{A_t(T)}{A_t(t)} < L_t(T)\} = 1 - \alpha_{T-t}$$

En utilisant les equations (4.4) et (4.6), cette condition devient :

$$P\left\{\left(\frac{t+1}{40}\alpha S(t)(1+\beta) + SC(t, T)\right)e^{(\delta-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(w(T)-w(t))} < \frac{t+1}{40}\alpha S(t)e^{(\mu-\eta^2/2)(T-t)+\eta(z(T)-z(t))}\right\} = 1 - \alpha_{T-t}$$

Ainsi, la valeur du capital de solvabilité est donnée par :

$$SC(t, T) = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) \left(e^{(\mu-\delta)(T-t)+z_{\alpha_{T-t}} \bar{\sigma} \sqrt{T-t}+(\sigma^2-\eta^2)(T-t)/2} - e^{(\mu-r)(T-t)} (1+\beta) \right)$$

où

$$z_k = k - \text{quantile de loi normale, tel que : } \Phi(z_k) = k$$

Ce capital de solvabilité peut être exprimé en pourcentage du passif actuariel AL donné par (4.2) :

$$SC^{\%}(t, T) = \frac{SC(t, T)}{AL_t} = \frac{1}{1+\beta} e^{-(\delta-r)(T-t)+z_{\alpha_{T-t}} \bar{\sigma} \sqrt{T-t}+(\sigma^2-\eta^2)(T-t)/2} - 1 \quad (4.9)$$

On peut constater que ce niveau relatif ne dépend pas de la progression salariale. En particulier si on fixe l'horizon de temps à un an (en cohérence avec solvency 2), on obtient :

$$SC^{\%}(0, 1) = \frac{SC(0, 1)}{AL_0} = \frac{1}{1+\beta} e^{-(\delta-r)+z_{\alpha_1} \bar{\sigma}+(\sigma^2-\eta^2)/2} - 1$$

Exemple 2 :

On utilise les mêmes hypothèses que dans l'exemple 1

Seuil de sécurité sur un an :

$$\alpha_1 = 99.5\%$$

Seuil de sécurité sur N années :

$$\alpha_N = (\alpha_1)^N$$

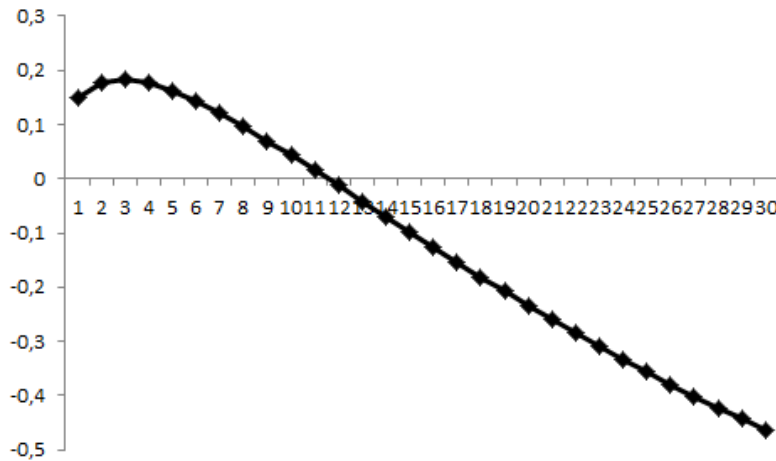


FIGURE 4.2 – SC en pourcentage du passif actuariel

La Figure 4.2 montre l'évolution du capital de solvabilité en pourcentage du passif actuariel en fonction de l'horizon de temps $T - t$, les valeurs négatives représentent les cas où

pratiquement il n'y a pas de besoin de capital supplémentaire. Comme dans la Figure 4.1, on peut observer l'effet de l'horizon de temps. Les besoins du plan en matière de capital de solvabilité diminuent pour les grandes maturités.

En effet, comme vu pour les plans DC, dans le cadre des plans DB, l'investissement des contributions dans des titres risqués aux longues échéances réalise un rendement qui permet au gestionnaire de plan d'être en mesure d'honorer ses engagements.

4.3.3 Analyse de l'impact des paramètres

Cette section a pour but de quantifier l'impact des paramètres les plus influents sur le niveau de solvabilité du plan DB. Dans ce cas étudié, la volatilité de l'actif financier ainsi que la corrélation de ce dernier avec le passif sont les facteurs majeurs qui impactent le seuil de solvabilité et qui interviennent en même temps dans la stratégie d'allocation de l'actif. Contrairement à cela, la volatilité des salaires est vue comme une contrainte et n'intervient pas dans la stratégie d'investissement.

a. Impact de la corrélation entre l'actif et les salaires :

Afin d'étudier l'impact de la corrélation sur le niveau du capital de solvabilité du plan, on fixe l'horizon de temps à un an. Ceci nous permet d'étudier la monotonie du capital de solvabilité sur un an en fonction du facteur de la corrélation.

On considère la fonction suivante :

$$SC_{(0,1)}^{\%}(\rho) = \frac{1}{1+\beta} e^{-(\delta-r)+z_{\alpha_1}\bar{\sigma}+(\sigma^2-\eta^2)/2} - 1 \quad (4.10)$$

où

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta$$

de fonction dérivée

$$\frac{dSC_{(0,1)}^{\%}(\rho)}{d\rho} = -\frac{2z_{\alpha_1}\sigma\eta}{2\bar{\sigma}(1+\beta)} e^{-(\delta-r)+z_{\alpha_1}\bar{\sigma}+(\sigma^2-\eta^2)/2} \quad (4.11)$$

Et comme $z_{\alpha_1} > 0$ pour $\alpha_1 > 50\%$

$$\frac{dSC_{(0,1)}^{\%}(\rho)}{d\rho} < 0$$

ce qui prouve que le capital de solvabilité décroît avec la corrélation. Ce qui signifie que plus la corrélation entre l'actif et les salaires est forte, plus le capital de solvabilité est petit. Ce qui se traduit par un meilleur effet de couverture (hedging) de l'actif sur le risque

d'inflation.

Exemple 3 :

Sous les hypothèses de l'exemple 2, on fait varier la valeur du facteur de corrélation ρ . La Figure 4.3 montre l'évolution du capital de solvabilité $SC_{(0,1)}^{\%}(\rho)$, calculé sur l'horizon d'un an, en fonction de la corrélation entre l'actif et le passif.

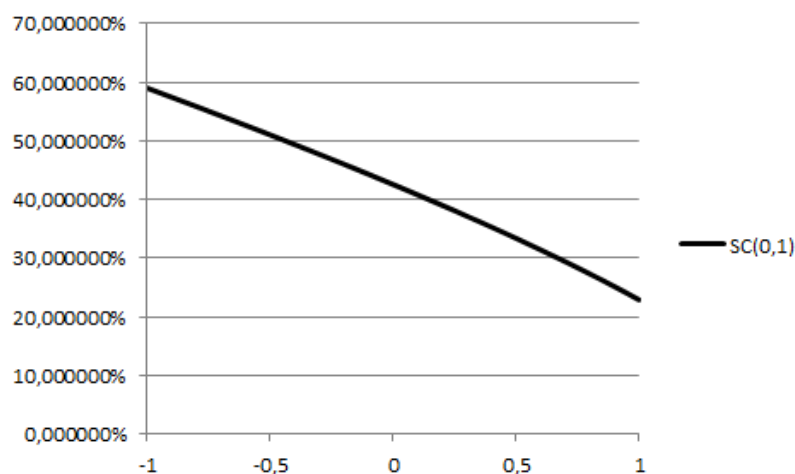


FIGURE 4.3 – Capital de solvabilité en fonction du facteur de corrélation

On peut également généraliser cette tendance sur un horizon multiannuel, comme le montre la Figure 4.4. Cette figure présente trois différents résultats du capital de solvabilité en fonction de l'horizon de temps. Chaque graphe correspond à un niveau de corrélation différent.

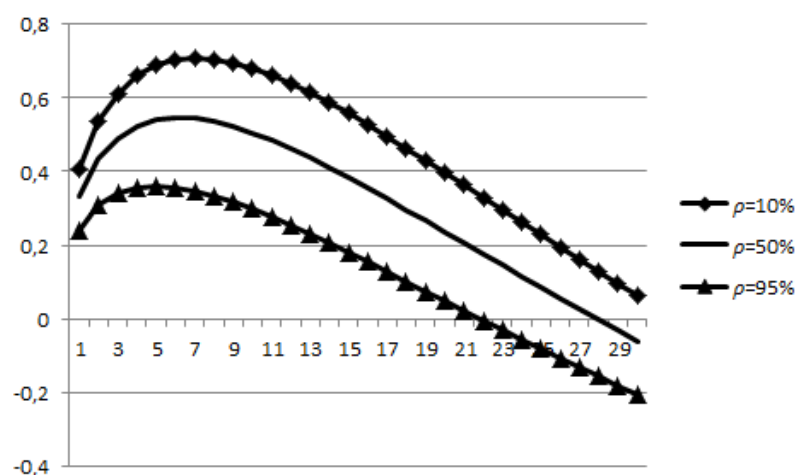


FIGURE 4.4 – Capital de solvabilité en fonction de l'horizon de temps

b. Impact de la volatilité de l'actif :

Dans la Figure 4.9, on peut remarquer qu'une volatilité importante de l'actif, se traduit par une hausse de la valeur du capital de solvabilité.

Dans l'exemple suivant, nous illustrons l'impact des deux facteurs : la corrélation et la volatilité simultanément. En effet, on considère le cas où l'actif du plan présente une forte volatilité.

L'impact de la volatilité dépend du niveau de la corrélation entre le passif et l'actif. Autrement dit, l'exigence en matière de capital de solvabilité ne doit pas être liée uniquement à la volatilité des instruments financiers du portefeuille de l'actif, mais aussi à la corrélation entre ce dernier et les engagements pris au niveau du passif.

Dans cet exemple, pour une volatilité $\sigma = 20\%$, nous considérons deux cas de corrélation entre l'actif et le passif : $\rho = 40\%$ et $\rho = 80\%$.

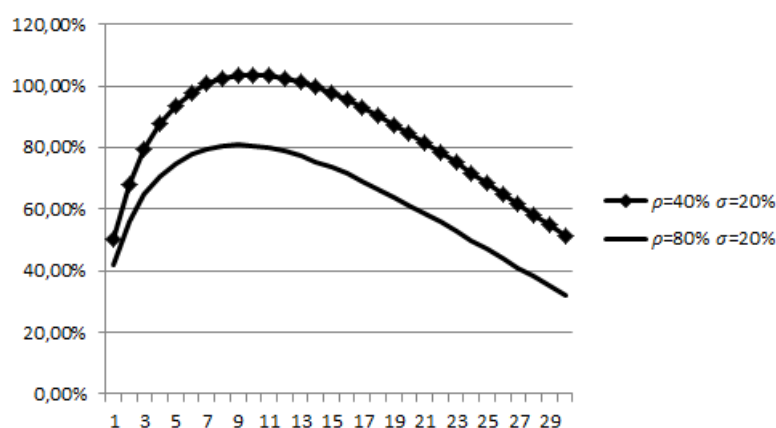


FIGURE 4.5 – Capital de solvabilité en fonction de l'horizon du temps

La Figure 4.5 soutient notre hypothèse sur l'effet de la corrélation sur la solvabilité du plan. La différence entre les deux cas étudiés réside dans le choix du facteur de corrélation entre l'actif et le passif. Pour le cas d'une forte corrélation ($\rho = 80\%$) le niveau du capital est réduit par rapport au cas d'une corrélation de $\rho = 40\%$.

Autrement dit, pour une volatilité de l'actif de 20%, nous avons montré que le niveau du capital de solvabilité peut être réduit significativement en changeant seulement le paramètre de corrélation. La différence observée revient simplement au degré de corrélation entre l'actif et l'inflation.

4.3.4 Solvabilité du plan et approche de ruine

Le risque étudié jusqu'à présent est basé sur le paiement des prestations de pension au moment du départ à la retraite (à l'instant T). Néanmoins, l'affilié peut parfois quitter le plan avant l'âge de la retraite. Dans ce cas, la clause du transfert du plan de pension se met en application.

En effet, le sponsor doit procéder au transfert des engagements de l'affilié en appliquant ou pas une certaine pénalité (elle ne s'applique pas en général) vers un autre plan de pension.

Cette possibilité fait que les mesures de solvabilité doivent s'appliquer non seulement sur un certain horizon fixe, mais aussi à tout moment avant la date de maturité. L'idée de cette section est d'étudier cette philosophie directement inspirée de la théorie de la ruine classique.

4.3.4.0.1 Probabilité de ruine sans capital supplémentaire

On regarde tout d'abord l'évolution de la probabilité de ruine, sans capital supplémentaire, entre tout instant t ($t = 0, \dots, T - 1$) et la date de maturité T . Cette fonction est donnée par :

$$\Psi(t, T) = 1 - P\{A_t(s) \geq L_t(s), \forall s \in [t, T]\} \quad (4.12)$$

Dans le cadre de cette étude, pour tout instant s ($0 \leq s \leq T$), le passif L est calculé sur la base de toutes les années de service prestées avant cet instant s .

La valeur de l'actif est donnée par la valeur du marché générée par l'investissement du passif actuariel (cf. (4.4)) :

$$\begin{aligned}
 A_t(s) &= AL_t e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})(s-t) + \sigma(w(s) - w(t))} \\
 &= \left(\frac{t+1}{40} \alpha S(t) (1 + \beta) e^{(\mu-r)(T-t)} \right) e^{(\delta - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(w(s) - w(t))}
 \end{aligned}$$

On peut définir la fonction du passif correspondant comme étant la valeur présente, à l'instant s , des prestations qui seront octroyées au moment du départ à la retraite T sur la base des $t + 1$ premières années de service et du salaire à l'instant s ($t < s < T$) :

$$L_t(s) = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) e^{(\mu - \eta^2/2)(s-t) + \eta(z(s) - z(t))} e^{-r(T-s)}$$

Ainsi, la probabilité (4.12) peut être considérée comme une probabilité liée au minimum d'un mouvement Brownien géométrique sur un certain intervalle :

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, T) &= 1 - P\{A_t(s) \geq L_t(s), \quad \forall s \in [t, T]\} \\
 &= 1 - P\left\{e^{(\delta - \mu - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(w(s) - w(t)) - \eta(z(s) - z(t))} \geq \frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta}, \quad \forall s \in [t, T]\right\} \\
 &= 1 - P\left\{\min_{t \leq s \leq T} \left(e^{(\delta - \mu - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(w(s) - w(t)) - \eta(z(s) - z(t))}\right) \geq \frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta}\right\} \\
 &= P\left\{\min_{t \leq s \leq T} \left(e^{(\delta - \mu - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(w(s) - w(t)) - \eta(z(s) - z(t))}\right) \leq \frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta}\right\}
 \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 4.3.1. *La probabilité de ruine (4.12) est explicitement donnée par :*

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, T) &= \Phi\left(\frac{-\ln(1 + \beta) - (\delta - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T - t}}\right) \\
 &+ \left(\frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta}\right)^{\frac{2(\delta - \mu - r) + \eta^2 - \sigma^2}{\bar{\sigma}^2}} \Phi\left(\frac{-\ln(1 + \beta) + (\delta - r - 2\mu + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T - t}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la loi du minimum d'un mouvement Brownien géométrique (voir par exemple [Back K.] :

si un processus S est donné par :

$$\begin{aligned}
 S(t) &= e^{at + bw(t)} \\
 z &= \min_{0 \leq s \leq t} \{S(s)\}
 \end{aligned}$$

4.3. Actif lognormal :

et si : $0 < L \leq 1$ alors

$$P(z \leq L) = \Phi(d_1) + L^{\frac{2a}{b^2}} \Phi(d_2)$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\ln(L) \mp a \cdot t}{\sigma \sqrt{t}}$$

On peut appliquer ce résultat , en utilisant les éléments suivants :

$$L = \frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta}$$

$$a = \delta - r - \mu + \eta^2/2 - \sigma^2/2$$

$$b^2 = \bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta$$

La Figure 4.6, illustre l'évolution de la probabilité de ruine en fonction du temps résiduel $(T - t)$.

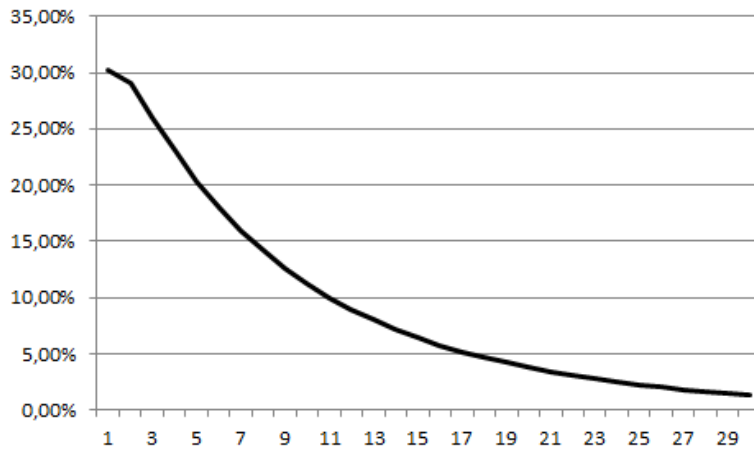


FIGURE 4.6 – Probabilité de ruine en fonction du temps résiduel $(T - t)$

Remarque 4.3.1.

1. Le premier terme de l'équation (4.13) correspond à la probabilité de défaut à la maturité telle que donnée par (4.8). Ainsi le deuxième terme peut être vu comme une probabilité supplémentaire qui permet de couvrir la situation de ruine avant la maturité, qui peut survenir dans le cas où l'affilié quitte le plan et demande le transfert de ses prestations :

$$\begin{aligned} \Psi(t, T) &= \phi(t, T) \\ &+ \left(\frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta} \right)^{\frac{2(\delta - \mu - r) + \eta^2 - \sigma^2}{\bar{\sigma}^2}} \Phi \left(\frac{-\ln(1 + \beta) + (\delta - r - 2\mu + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma} \sqrt{T - t}} \right) \end{aligned}$$

2. si $\beta = 0$ (pas de chargement sur le best estimate), cette probabilité devient :

$$\begin{aligned} \Psi(t, T) = & \Phi\left(\frac{-(\delta - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T - t}}\right) \\ & + \left(e^{-\mu(T-t)}\right)^{\frac{2(\delta - \mu - r) + \eta^2 - \sigma^2}{\bar{\sigma}^2}} \Phi\left(\frac{(\delta - r - 2\mu + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T - t}}\right) \end{aligned}$$

3. si $\beta = 0$ et $\mu = 0$ (pas de progression salariale), la probabilité de ruine vaut 1.

En effet, en annulant le chargement β et l'évolution des salaires μ , les deux termes à l'intérieur de la fonction de répartition Φ seront opposés. Ce qui revient à une probabilité de ruine de la forme : $\Phi(x) + \Phi(-x)$. Et par la parité de la loi normale, nous avons $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, ainsi $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

4.3.4.0.2 Probabilité de ruine avec capital supplémentaire

Afin de calculer le capital de solvabilité nécessaire, on suppose que ce dernier est investi dans l'actif risqué A pour toute la durée résiduelle de l'engagement, et ainsi on calcule la probabilité de ruine en tenant compte de ce capital par la fonction suivante :

$$\Psi(t, T, SC^*(t, T)) = 1 - P\left\{A_t(s) + SC^*(t, T) \frac{A_t(s)}{A_t(t)} \geq L_t(s), \quad \forall s \in [t, T]\right\}$$

on peut également calculer à tout instant t le capital de solvabilité comme un pourcentage de l'actif actuariel de la même manière que dans (4.9)

$$SC_{\%}^*(t, T) = \frac{SC^*(t, T)}{AL_t}$$

et donc la probabilité de ruine s'écrit :

$$\begin{aligned} & P\{A_t(s) \geq L_t(s), \quad \forall s \in [t, T]\} \\ = & P\left\{(1 + SC_{\%}^*(t, T))e^{(\delta - \mu - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(w(s) - w(t)) - \eta(z(s) - z(t))} \geq \frac{e^{-\mu(T-t)}}{1 + \beta}, \quad \forall s \in [t, T]\right\} \end{aligned}$$

on obtient la proposition suivante, qui est une extension de 4.3.1 :

Proposition 4.3.2. *En introduisant le capital de solvabilité SC^* (en pourcentage de l'actif actuariel), la probabilité de ruine à l'instant t devient :*

$$\begin{aligned} \Psi(t, T) = & \Phi\left(\frac{-\ln(1 + \beta) - \ln(1 + SC^*(T - t)) - (\delta - r + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T - t}}\right) \\ & + \left(\frac{e^{-\mu(T-t)}}{(1 + \beta)(1 + SC^*(T - t))}\right)^{\frac{2(\delta - \mu - r) + \eta^2 - \sigma^2}{\bar{\sigma}^2}} \\ & \times \Phi\left(\frac{-\ln(1 + \beta) - \ln(1 + SC^*(T - t)) + (\delta - r - 2\mu + \eta^2/2 - \sigma^2/2)(T - t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T - t}}\right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Remarque 4.3.2. En appliquant le principe solvency 2, le capital de solvabilité SC^* est la solution de l'équation implicite :

$$\Psi(t, T, SC^*) = 1 - \alpha^{T-t}$$

La figure suivante présente l'évolution du capital de solvabilité nécessaire afin que le niveau de solvabilité réponde aux exigences de la réglementation solvency 2. Dans ce cas, la probabilité de ruine est de niveau $1 - \alpha_{T-t}$, pour tout $0 \leq t \leq T$

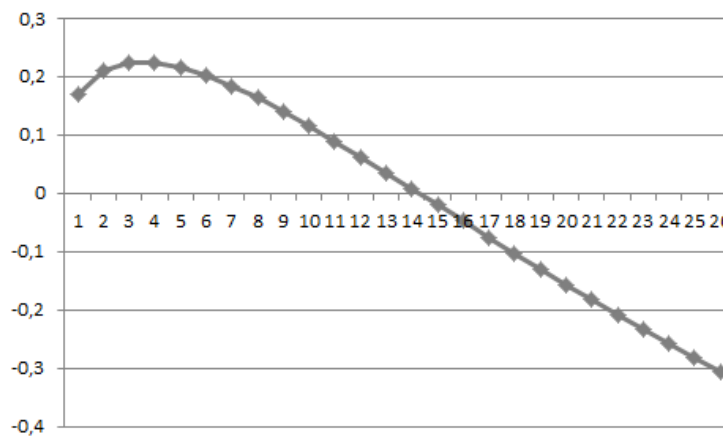


FIGURE 4.7 – Capital de solvabilité nécessaire pour une probabilité de ruine $1 - \alpha_{T-t}$

Le capital de solvabilité illustré dans la Figure 4.7 est une combinaison d'un capital permettant de faire face aux engagements de pension à la retraite et d'un supplément permettant de faire face à ces engagements en cas de sortie du plan à tout moment avant la retraite.

4.4 Actif à sauts aléatoires : Processus Variance Gamma

Dans cette section, nous généralisons l'étude de la première section en supposant que l'actif du plan évolue selon un processus de Lévy. L'idée étant d'incorporer des sauts brusques dans la dynamique de l'actif, et d'étudier leur impact sur la solvabilité du plan DB. Nous modélisons ainsi l'actif du plan par le processus Variance Gamma ([Madan D.B. Milne E.], [Madan D.B. Carr P. Chang E.C.]).

Nous restons dans la philosophie des normes IAS en supposant que les contributions

ainsi que le passif actuariel sont définis par la méthode « Projected unit credit cost ».

De même que dans la première section, nous étudions la solvabilité du plan DB, mais sous l'hypothèse que l'actif suit un processus de Lévy. Nous montrons également l'effet des garanties de long terme.

Dans cette section, nous utilisons l'approche Value at Risk afin de déterminer le capital de solvabilité nécessaire.

Nous rappelons que le processus Variance Gamma est un processus de Lévy généralisant le mouvement Brownien géométrique. La différence entre les deux processus demeure dans le paramètre de temps. En effet, dans le cas d'un processus Variance Gamma, on considère une variable remplaçant le temps calendaire en évaluant un mouvement Brownien de dérive et de volatilité constantes à une date aléatoire. Ainsi le paramètre de temps est remplacé par un processus Gamma. Cette technique permet de considérer uniquement les instants des transactions dans les marchés financiers.

Mathématiquement, la différence entre cette section et la section précédente réside uniquement dans l'équation stochastique de l'actif du plan de pension. Du côté du passif, on maintient l'hypothèse d'un passif lognormal avec inflation des salaires.

L'évolution de l'actif du plan entre un instant quelconque t et le terme T dépend de l'évolution future du passif actuariel AL existant à l'instant t . Sa valeur constitue la valeur initiale de l'actif de référence A :

$$A_t(T) = AL_t e^{X_T^{VG} - X_t^{VG}} \quad (4.15)$$

où, comme défini dans le Chapitre 2,

$$\begin{cases} X_0^{VG} = 0 \\ X_t^{VG} = \theta\gamma(t) + \sigma_{vg} w_{\gamma(t)} \end{cases}$$

.

En remplaçant le passif actuariel AL_t par sa valeur nous avons :

$$A_t(T) = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) (1 + \beta) e^{(\mu-r)(T-t) + \theta(\gamma(T) - \gamma(t)) + \sigma(w(\gamma(T)) - w(\gamma(t)))}$$

Du côté du passif, nous gardons la même équation considérée dans la section précédente. La valeur projetée des engagements est donc donnée par :

$$L_t(T) = \frac{t+1}{40} \alpha S(t) e^{(\mu - \frac{\eta^2}{2})(T-t) + \eta(z(T) - z(t))}$$

4.4.1 Mesures de solvabilité

4.4.1.1 Probabilité de défaut

On s'intéresse tout d'abord à la probabilité de défaut à la date de maturité sans capital supplémentaire afin d'étudier le risque de ne pas avoir assez d'actifs au terme pour faire face aux engagements pris au passif. Cette probabilité est une fonction de l'horizon de temps $T-t$ ($t = 0, 1, \dots, T-1$). Elle est donnée par :

$$\varphi(t, T) = P(A_t(T) < L_t(T))$$

d'où

$$\varphi(t, T) = P(X_T^{VG} - X_t^{VG} < (r - \eta^2/2)(T-t) + \eta(z_T - z_t) - \ln(1 + \beta))$$

Et comme X_t^{VG} est un processus Variance Gamma, $X_T^{VG} - X_t^{VG}$ a la même distribution que $X_{(T-t)}^{VG}$, la probabilité de défaut s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi(t, T) &= P(X_{(T-t)}^{VG} < (r - \eta^2/2)(T-t) + \eta(z_T - z_t) - \ln(1 + \beta)) \\ &= \int_{g=0}^{\infty} P(\sigma w_g - \eta(z_T - z_t) < (r - \eta^2/2)(T-t) - \theta g - \ln(1 + \beta)) f_{\gamma(T-t)}(g) dg. \end{aligned}$$

et

$$f_{\gamma(T-t)}(g) = \frac{g^{\frac{T-t}{v}-1} e^{-\frac{g}{v}}}{v^{\frac{T-t}{v}} \Gamma(\frac{T-t}{v})}$$

La variable $z_T - z_t$ a la même distribution que $\sqrt{T-t} \varepsilon_{T-t}$ et w_g a également la même distribution que $\sqrt{g} \bar{\varepsilon}_g$, où : ε_{T-t} et $\bar{\varepsilon}_g$ sont deux variables de loi normale centrée réduite.

Les variables ε et $\bar{\varepsilon}$ sont corrélées entre elles. Leur coefficient de corrélation est donné par le paramètre $\bar{\rho}$.

La probabilité de défaut est ainsi donnée par :

$$\varphi(t, T) = \int_{g=0}^{\infty} \Phi \left(\frac{(r - \eta^2/2)(T-t) - \theta g - \ln(1 + \beta)}{\sqrt{\sigma^2 g + \eta^2(T-t) - 2\sigma\eta\bar{\rho}\sqrt{g(T-t)}}} \right) \frac{g^{\frac{T-t}{v}-1} e^{-\frac{g}{v}}}{v^{\frac{T-t}{v}} \Gamma(\frac{T-t}{v})} dg \quad (4.16)$$

L'exemple ci-dessous illustre l'évolution de la probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps entre la date t et le terme T . Ainsi nous pouvons observer l'évolution de la probabilité de défaut en fonction du nombre d'années entre t et la date de retraite T .

Exemple 3 :

taux sans risque :	$r = 2\%$
rendement moyen du fond :	$\delta = 6\%$
volatilité du fond :	$\sigma = 10\%$
évolution moyenne des salaires :	$\mu = 5\%$
volatilité des salaires :	$\eta = 5\%$
facteur de corrélation :	$\bar{\rho} = 50\%$
chargement de sécurité :	$\beta = 5\%$
variance unitaire du processus de temps :	$\nu = 0.75$

et

$$\theta = \frac{1 - \frac{\sigma^2 \delta}{2} - e^{-\nu \delta}}{\nu} \quad (\nu > 0) \quad (4.17)$$

Par la contrainte 4.17, on suppose que les deux processus ont le même rendement moyen δ . La Figure (4.8) fournit une comparaison du risque de défaut, moyennant la probabilité de défaut calculée en fonction de l'horizon de temps avant la date de la retraite des deux cas étudiés : un actif suivant un simple mouvement Brownien géométrique et un actif suivant un processus Variance Gamma.

Les deux courbes de la Figure (4.8) sont données respectivement par les formules (4.8) et (4.16).

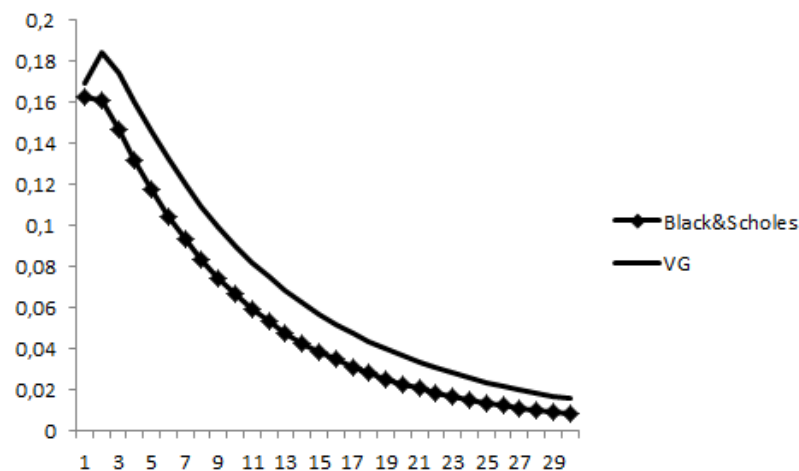


FIGURE 4.8 – Probabilité de défaut BS vs VG

Même si les deux courbes ont la même forme et qu'elles décroissent vers le long terme, on peut observer qu'un actif qui suit un mouvement Brownien géométrique sous-évalue le risque de défaut en comparaison avec un actif qui évolue selon un processus Variance Gamma. La différence en probabilité entre les deux cas est destinée à couvrir le risque lié aux sauts aléatoires dans la valeur de l'actif du plan.

4.4.1.2 Capital de solvabilité

Conformément à la réglementation Solvency 2, nous allons calculer le capital de solvabilité en se basant sur l'approche de la value at risk, en considérant un seuil de sécurité annuel de valeur α .

On suppose également que ce capital de solvabilité est investi en totalité dans l'actif de référence A .

La probabilité de défaut est ainsi donnée par :

$$P\{A_t(T) + SCR(t, T) \frac{A_t(T)}{A_t(t)} < L_t(T)\} = 1 - \alpha_{T-t} \quad (4.18)$$

Proposition 4.4.1. *Le capital de solvabilité $SC(t, T)$ à tout instant $t(t=1, 2, \dots, T-1)$ peut être calculé en utilisant la formule suivante :*

$$SC(t, T) = AL_t \cdot (VaR_{1-\alpha_{T-t}}(Y_T^t) - 1)$$

où AL_t est défini par (4.2) et $Y_T^t = \frac{L_t(T)}{A_t(T)}$

Démonstration. Le capital de solvabilité, investi dans un actif risqué, est une solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} P\{A_t(T) + SCR(t, T) \frac{A_t(T)}{A_t(t)} < L_t(T)\} &= 1 - \alpha_{T-t} \\ P\{A_t(T) \left(1 + \frac{SCR(t, T)}{A_t(t)}\right) < L_t(T)\} &= 1 - \alpha_{T-t} \\ P\{1 + \frac{SCR(t, T)}{AL_t} < \frac{L_t(T)}{A_t(T)}\} &= 1 - \alpha_{T-t} \end{aligned}$$

Ainsi, ce capital vérifie :

$$1 + \frac{SCR(t, T)}{AL_t(t)} = VaR_{1-\alpha_{T-t}}(Y_T^t)$$

où

$$Y_T^t = \frac{L_t(T)}{A_t(T)}$$

et finalement :

$$SC(t, T) = AL_t(VaR_{1-\alpha_{T-t}}(Y_T^t) - 1)$$

Ce capital de solvabilité, peut être donné également sous forme de pourcentage de l'actif actuariel existant à la date de calcul t . Ce niveau de solvabilité est donné par :

$$SC^{\%}(t, T) = VaR_{1-\alpha_{T-t}}(Y_T^t) - 1 \quad (4.19)$$

La Figure (4.9) fournit une comparaison entre les valeurs du capital de solvabilité données par chacun des deux processus en utilisant la formule (4.19). La value at risk a été calculée en utilisant la méthode de Monte Carlo en générant 250.000 scénarios pour chacun des deux processus :

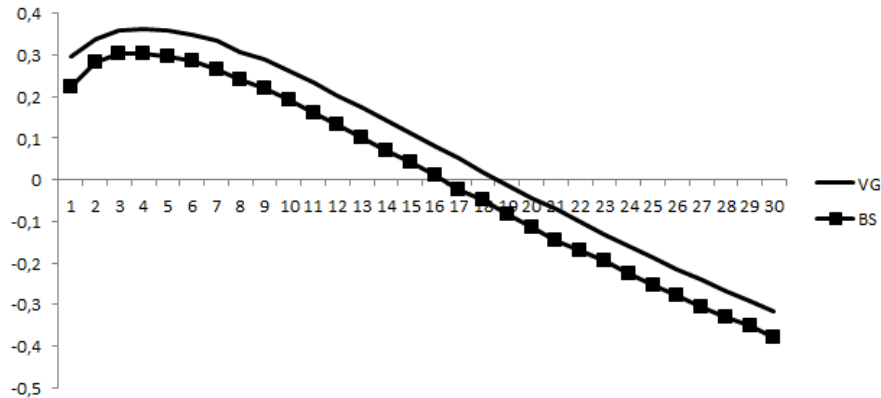


FIGURE 4.9 – Capital de solvabilité BS vs VG

Remarque 4.4.1. Dans le cadre des plans DB, et comme prouvé dans le Chapitre 2 pour les plans DC, l'hypothèse selon laquelle la dynamique de l'actif du plan suit un processus Variance Gamma se traduit par un niveau du capital de solvabilité plus élevé en comparaison avec l'hypothèse selon laquelle l'actif du plan suit un mouvement Brownien géométrique (Figure 4.9). Cette différence s'explique par la présence des sauts dans la dynamique de l'actif modélisé par le processus Variance Gamma, contrairement à l'actif de dynamique Black & Scholes qui ne tient pas compte de ces discontinuités. Néanmoins, cette étude basée sur ces deux processus différents confirme qu'en présence du risque financier et du risque de l'inflation, les besoins de

solvabilité, en termes de capital, diminuent en fonction de la durée de l'engagement du plan DB.

Comme nous avons simulé ces deux processus sous la condition d'égalité des rendements moyens, il est également possible de les simuler avec une même variance. Cela nous ramènerait à une étude similaire à la comparaison présentée au Chapitre 2.

Dans le cadre de l'étude présentée ici, puisque nous avons utilisé la même volatilité σ du mouvement Brownien standard w utilisé pour les deux types d'actifs, Black & Scholes et Variance Gamma nous n'aurons pas la même variance ; nous comparons néanmoins dans la Figure 4.10, les variances de ces deux actifs en fonction de la maturité T .

Nous rappelons que sous la condition de l'égalité des rendements moyens, nous avons :

$$\text{var}(A_{BS}(T)) = e^{2(\delta+\sigma^2)T} - e^{2\delta T} \quad (4.20)$$

$$\text{var}(A_{VG}(T)) = \left(\frac{1}{1 - 2\theta v - 2v\sigma^2} \right)^{\frac{T}{v}} - e^{2\delta T} \quad (4.21)$$

(le premier terme de l'équation 4.21 correspond à l'espérance $E(A_{VG}(T)^2)$, donnée par $\phi_{X_T^{VG}}\left(\frac{2}{i}\right)$, où $\phi_{X_T^{VG}}$ est la fonction caractéristique de la variable X_T^{VG}).

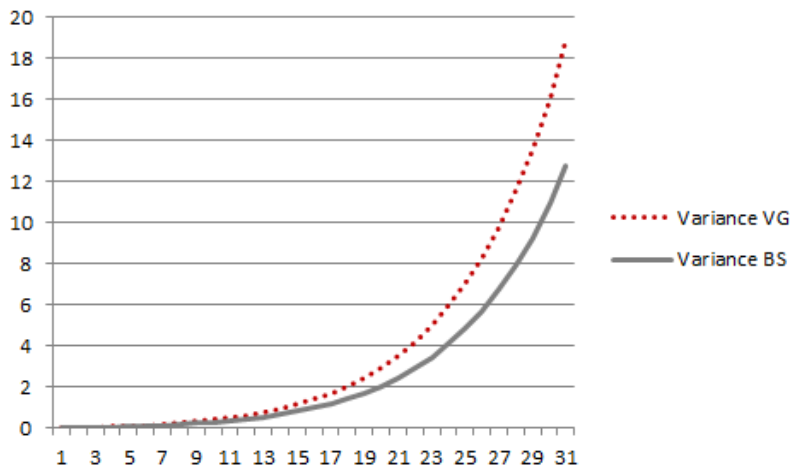


FIGURE 4.10 – Variance VG et BS

Remarque 4.4.2. On peut remarquer sur la Figure 4.10 que l'écart entre les deux variances est faible pour les maturités T , telles que $T \leq 15$, tandis que pour ces mêmes maturités, le capital de solvabilité donné par le processus VG (Figure 4.9) est plus important que celui donné

par un mouvement Brownien géométrique. Ce qui confirme que, pour les courts et moyens horizons, la différence entre les deux processus simulés avec le même rendement δ , revient principalement à la présence des sauts dans la dynamique de l'actif VG.

L'écart entre les deux variances augmente progressivement pour $T > 15$. Mais d'un autre côté, par le résultat de la Figure 4.9, cet écart n'a pas d'impact significatif sur le capital de solvabilité puisque ce dernier devient faible, voire nul (valeurs négatives) pour ces maturités.

4.5 Conclusion

Ce chapitre propose une nouvelle méthode de mesure de solvabilité des plans de pension de type DB. Nous avons fourni une analyse de la solvabilité de ce type de plan de manière cohérente aux normes IAS. Dans une approche Best Estimate, nous avons défini le montant des contributions sur la base de la méthode « Projected Unit Credit Cost ».

Nous avons fondé nos calculs sur la valeur projetée des engagements. Ces derniers dépendent du risque de l'évolution des salaires.

Du côté de l'actif, nous avons considéré deux cas : un actif dont la valeur évolue selon un mouvement Brownien géométrique, et un actif dont la valeur évolue selon un processus Variance Gamma.

Dans un environnement Gaussien, nous avons montré que l'inflation des salaires impacte la solvabilité du plan. Cette inflation étant vue comme une contrainte, nous avons étudié la sensibilité des paramètres qui interviennent dans l'allocation stratégique du portefeuille. Ces paramètres sont : la volatilité de l'actif financier et la corrélation entre ce dernier et les salaires. Nous avons montré que le capital de solvabilité nécessaire décroît en fonction de la corrélation. Ce qui prouve un meilleur effet du hedging « couverture » de l'actif sur le risque de l'inflation. Dans un environnement Lévy, nous avons étendu notre étude de situation de défaut et des besoins de solvabilité menée dans l'environnement Gaussien. Par cette étude nous avons confirmé que dans le cadre des plans DB, le choix du modèle est essentiel, et que l'hypothèse que l'actif risqué suit un mouvement Brownien géométrique sous-évalue les besoins de solvabilité.

Par le processus Variance Gamma, nous avons confirmé notre hypothèse sur l'impact des longues garanties. Nous avons montré dans les deux environnements : Gaussien et Lévy que les besoins de solvabilité diminuent en fonction de la durée des engagements.

Chapitre 5

Impact de la mortalité sur les plans de pension

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la mortalité et son impact sur la solvabilité des plans de pension de type DC à taux fixe. En effet, nombreux sont les actuaires qui calculent les primes ainsi que les provisions mathématiques en se basant sur des tables de mortalité de type M_k, F_k ou M_R, F_R , néanmoins ces dernières sont fondées sur la simple hypothèse que la mortalité est une fonction déterministe de l'âge de l'assuré. Or, les données démographiques et les études prospectives sur l'allongement de la vie humaine rejettent cette hypothèse.

Ce chapitre propose un modèle de solvabilité pour les plans DC en supposant que la mortalité réelle évolue selon une dynamique stochastique. Nous intégrons ce risque en plus du risque financier pour mesurer la solvabilité du plan en tenant compte de son aspect de garantie à long terme.

Sommaire

5.1 Introduction	114
5.2 Généralités	115
5.2.1 Distribution de survie	116
5.2.2 Intensité de mortalité	116
5.2.3 Mortalité déterministe	117
5.2.4 Mortalité stochastique	118
5.3 Mesure de solvabilité	120
5.3.1 Probabilité de défaut	121
5.3.1.1 Probabilité de défaut sans prise en compte du risque financier	125
5.3.1.2 Probabilité de défaut sans prise en compte du risque de mortalité	127
5.3.2 Capital de solvabilité	129
5.3.2.1 Capital de solvabilité risqué	129

5.1 Introduction

L'allongement de la vie humaine et ses conséquences socio-économiques ont constitué un défi majeur durant le 20ème siècle. Les études prospectives sur l'évolution démographique prouvent que l'allongement de la vie humaine ne fera qu'accroître son ampleur. Ce qui se traduit par une progression continue de l'espérance de vie.

Dans le cadre de l'étude [OCDE], nous trouvons le résultat suivant sur l'espérance de vie à l'âge de 60-65 ans pour les deux sexes :

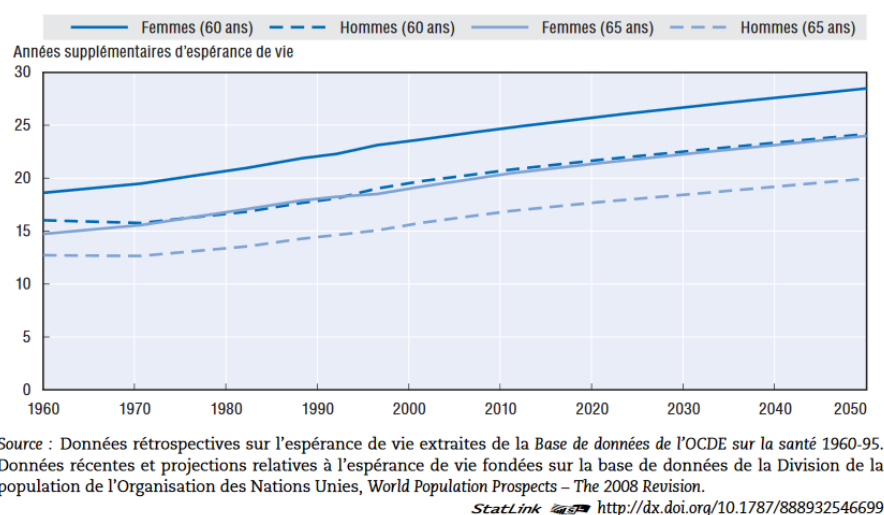


FIGURE 5.1 – Espérance de vie à 60 et 65 ans par sexe, moyenne de l'OCDE, 1960-2050

Dans le cadre des assurances vie, le risque de mortalité est représenté par un risque de sous-évaluation des provisions mathématiques dû à l'écart entre la mortalité réelle et les tables de mortalité utilisées. Généralement, les actuaires utilisent des taux de mortalité pour le calcul des primes et des provisions en se basant sur une approche déterministe.

D'un autre côté, dans la littérature démographique et actuarielle plusieurs solutions ont été proposées afin d'éviter les impacts de l'évolution de la mortalité sur les compagnies d'assurance vie. En particulier, des modèles stochastiques ont été adoptés pour modéliser la mortalité future définie comme source d'incertitude. Dans ce cadre, nous pouvons citer les études [Brouhns N. Denuit M.], [Brouhns N. Denuit M. and Vermunt J.K.], [Dahl M.], [Schrager D. F.], [Schrager D. F.], [Vigna E. and Luciano E.] et [Bravo J. M. Braumann C. A.].

Dans un cadre stochastique, l'étude [Hainaut D. Devolder P.] a évalué un plan de pension sous l'hypothèse d'une mortalité de dynamique suivant un processus de Poisson. Le but de l'étude étant d'optimiser l'utilité espérée ainsi que le surplus du plan de pension dans une approche martingale.

L'étude [Denuit M. Devolder P. and Goderniaux A.C.] fondée sur le modèle classique de Lee-Carter dans une approche de couverture contre le risque de longévité, propose une stratégie de couverture incitant à détenir des titres obligataires indexés sur la longévité.

L'étude présentée ici s'intéresse particulièrement à l'impact de la mortalité stochastique sur la solvabilité d'un plan DC. Comme le cas traité concerne uniquement les plans DC proposant un capital payé le jour de la retraite de l'affilié, nous n'avons pas étudié le risque de longévité après la retraite.

Pour la mortalité stochastique, nous avons utilisé le modèle [Ornstein Uhlenbeck] proposé par [Vigna E. and Luciano E.] pour la modélisation de l'intensité de la mortalité. Ce modèle peut être vu comme une extension de la loi [Gombertz] utilisée pour modéliser la mortalité déterministe.

Nous proposons dans la première section le cadre général de notre étude. Nous introduisons ainsi le modèle stochastique de mortalité en expliquant le passage de la loi déterministe [Gombertz] vers le modèle adopté.

Dans la section 5.3 nous présentons notre modèle de solvabilité d'un plan DC sous l'hypothèse d'une mortalité stochastique. Nous évaluons ainsi les besoins de solvabilité d'un plan DC en associant les deux risques majeurs auxquels ces organismes sont exposés : risque de marché et risque de mortalité. Nous étudions la situation de défaut d'un plan DC sur tout l'horizon des engagements. Nous déterminons ensuite le capital de solvabilité supplémentaire nécessaire. Ce dernier est calculé pour le cas du capital investi en titre risqué, et ensuite estimé pour le cas d'un capital non risqué. Dans le deuxième cas, nous nous basons sur la mesure value at risk à 99.5% sur des horizons pluriannuels. Cette estimation est basée sur la méthode [Fenton L.F.] pour la distribution de la somme de lois log normales.

5.2 Généralités

Avant d'entamer une étude sur la solvabilité d'un plan de pension, nous rappelons quelques définitions sur les différents éléments constitutifs de la variable du risque de mortalité.

5.2.1 Distribution de survie

On suppose que X est la date de décès (durée de vie si la date initiale est $t = 0$).

La fonction de répartition de la variable X est donnée par :

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(s) ds$$

où f est la densité de la durée de vie qui est donnée par :

$$f(x) = \frac{\lim_{dx \rightarrow 0} P(x < X \leq x + dx)}{dx}.$$

D'autre part, la fonction de survie d'un individu d'âge x notée $S(x)$ (la probabilité que le décès de cet individu survienne après l'âge x) est donnée par :

$$S(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f(s) ds$$

5.2.2 Intensité de mortalité

Cette fonction constitue un élément clé dans cette étude, elle est également connue par son nom " fonction de hasard". Elle est définie à un point x comme étant la probabilité instantanée que la durée de vie se termine à l'âge x . Autrement dit, la probabilité de décès à l'âge x conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'à cet âge.

$$\mu(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + dx | X > x)}{dx} \quad x > 0$$

Proposition 5.2.1. *A un âge donné x , l'intensité de mortalité $\mu(x)$ vérifie*

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

Démonstration.

$$\mu(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + dx | X > x)}{dx} \quad (5.1)$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + dx)}{p(X > x) dx} \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{p(X > x)} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

□

d'où

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

Proposition 5.2.2. *La probabilité de survie N années d'un individu d'âge x est donnée par :*

$${}_N P_x = \exp \left(- \int_0^N \mu(x+s) ds \right)$$

Démonstration.

$${}_N P_x = S(x+N) \quad (5.5)$$

d'autre part,

$$\mu(x+N) = \frac{f(x+N)}{S(x+N)} \quad (5.6)$$

$$= \frac{-S'(x+N)}{S(x+N)} \quad (5.7)$$

□

d'où

$$S(x+N) = \exp \left(- \int_0^N \mu(x+s) ds \right)$$

et donc

$${}_N P_x = \exp \left(- \int_0^N \mu(x+s) ds \right)$$

Pour la suite, l'intensité de mortalité à un instant $t \geq 0$ d'un individu d'âge x à $t = 0$ sera notée $\mu_x(t)$ au lieu de $\mu(x+t)$.

5.2.3 Mortalité déterministe

Dans le cas d'un plan de type "Contributions définies", en cas de survie de l'affilié à l'âge de retraite, les prestations garanties par le plan sont données par :

$$B(T) = \frac{e^{r_g T}}{{}_T P_x}$$

où T est la date de la retraite, r_g est le taux garanti par le plan sur les primes versées, et ${}_T P_x$ est une table de mortalité initialement garantie. On suppose que le plan est basé sur le paiement de primes uniques de valeur unitaire en $t = 0$.

L'introduction de l'intensité de mortalité en utilisant la proposition 5.2.2 donne :

$$B(T) = \exp \left(\int_0^T (r_g + \mu_x(s)) ds \right)$$

D'un autre côté, la valeur du passif est donnée par :

$$L(T) = {}_T P_x^* B(T)$$

où P^* est la probabilité de survie réelle.

Si la probabilité P^* est également déterministe on a :

$$L(T) = \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(s) - \mu_x^*(s)) ds\right)$$

Pour le calcul de la probabilité de défaut ainsi que les autres mesures de risque, on peut utiliser les mêmes méthodes de calcul vues dans le Chapitre 1, en donnant au passif déterministe la valeur de :

$$L(T) = \frac{T P_x^*}{T P_x} e^{r_g T}$$

Si l'actif est supposé avoir la dynamique d'un mouvement Brownien géométrique de volatilité σ et de rendement moyen δ , les formules de la probabilité de défaut, de la value at risk ainsi que du capital de solvabilité sont les mêmes que celles proposées au Chapitre 1, avec la seule différence de l'introduction du spread d'intensité de mortalité. Ces mesures sont donc données par les formules suivantes :

- La probabilité de défaut :

$$\phi(T) = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{T P_x^*}{T P_x}\right) + (r_g - \delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

- La value at risk :

$$VaR_{\alpha_T}(T) = \frac{T P_x^*}{T P_x} e^{r_g T} - e^{\sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha_T} + (\delta - \frac{\sigma^2}{2})T},$$

où α_T est le seuil de confiance correspondant à T années.

Tout comme les chapitres précédents, pour toute l'étude présentée ici, nous nous limitons à la contrainte selon laquelle les probabilités annuelles de survie sont supposées indépendantes. Ainsi $\alpha_T = \alpha^T$, $\forall T > 0$.

- Si on suppose que le capital de solvabilité SC est investi dans un actif non risqué de taux r , sa valeur est donnée par :

$$SC(T) = \frac{T P_x^*}{T P_x} e^{(r_g - r)T} - e^{\sigma\sqrt{T}z_{1-\alpha_T} + (\delta - r - \frac{\sigma^2}{2})T}$$

5.2.4 Mortalité stochastique

Nombreux sont les articles qui traitent le problème de l'écart entre la mortalité réelle et la mortalité générée par les tables utilisées en assurance vie. Le principal objectif de ces travaux est de proposer un modèle de mortalité approprié et cohérent aux évolutions démographiques.

Une large gamme de modèles est donc proposée. Les modèles les plus connus sont des modèles à caractère stochastique, ils sont soit à temps continu (ex. [Vigna E. and Luciano E.]), soit à temps discret (ex. modèle de Lee-Carter, voir [Lee R.D and Carter L]).

Dans le cadre de cette étude on suppose que la mortalité réelle suit la dynamique d'un processus défini par l'équation stochastique suivante :

$$d\lambda_x(t) = \beta\lambda_x(t)dt + \rho dw^*(t) \quad (5.8)$$

où $\lambda_x(t)$ est l'intensité de mortalité à l'instant t d'un affilié d'âge initial x (à tout instant $t \geq 0$, l'âge de l'affilié est $x + t$).

et donc,

$$\lambda_x(t) = \lambda_x(0)e^{\beta t} + \rho \int_0^t e^{\beta(t-s)} dw^*(s) \quad \forall x \geq 0$$

Ce modèle peut être interprété comme une extension du modèle de GOMPERTZ, puisque ce dernier suppose que l'intensité de mortalité μ est une fonction déterministe du temps t et de l'âge x :

$$\mu_x(t) = bc^{x+t} . \quad (5.9)$$

Dans le modèle choisi (5.8), nous avons ajouté un mouvement Brownien qui sert à modéliser l'aspect aléatoire de l'intensité de la mortalité réelle.

En effet, la solution $\lambda_x(t)$ se compose de deux parties, une partie déterministe et une partie aléatoire :

$$\lambda_x(t) = \underbrace{\lambda_x(0)e^{\beta t}}_{\text{Loi de Gompertz}} + \underbrace{\rho \int_0^t e^{\beta(t-s)} dw^*(s)}_{\text{Partie aléatoire}} \quad (5.10)$$

Étant donné que le plan de pension étudié dans ce chapitre est un plan DC à taux fixe garanti et en introduisant l'écart entre la mortalité déterministe et la mortalité réelle, la dynamique du passif à la date T de maturité est donnée par :

$$L(T) = e^{\int_0^T (r_g + \mu_x(s) - \lambda_x(s)) ds} \quad (5.11)$$

Pour la mortalité déterministe μ_x , on suppose qu'elle suit la dynamique donnée par l'équation 5.9. Ce qui implique que l'intensité de mortalité augmente de façon exponentielle

avec l'âge. Sa valeur à l'instant initial ($t = 0$) est donnée par :

$$\mu_x(0) = Bc^x.$$

De manière générale, à tout instant $t \geq 0$ l'intensité de mortalité d'un individu d'âge initial x , selon la loi de Gombertz, est donnée par :

$$\mu_x(t) = Bc^{(x+t)}$$

$$\text{où } B = -\ln(g)\ln(c)$$

Au niveau de l'actif, on va se mettre dans le même cadre que le Chapitre 1, en supposant que sa valeur A est donnée par un mouvement Brownien géométrique. Sa dynamique est donc donnée par :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \delta dt + \sigma dw_t, \quad (5.12)$$

où

- δ et σ sont le rendement moyen et la volatilité de l'actif.
- Le risque de mortalité et le risque financier sont supposés indépendants. Ainsi, les mouvements Browniens w et w^* sont indépendants.

5.3 Mesure de solvabilité

Dans cette section nous allons faire une étude de solvabilité d'un plan de pension de type DC en combinant deux risques importants auxquels sont exposés les plans de pension à engagement en capital, ce sont donc le risque financier et le risque de mortalité. On suppose que ces deux derniers sont indépendants. On commence tout d'abord par le calcul de la probabilité de défaut du plan, qui est une probabilité calculée sans capital supplémentaire. Ensuite, nous allons calculer le niveau du capital de solvabilité dont le plan doit disposer afin de faire face aux éventuelles situations de défaut.

Deux situations seront étudiées, la première, traite le cas où ce capital est investi dans un actif risqué, et la deuxième traite le cas où ce dernier est investi dans un actif obligataire sans risque.

5.3.1 Probabilité de défaut

La première question est de calculer la probabilité de défaut du plan sans capital supplémentaire, qui revient à calculer sa probabilité de ne pas pouvoir honorer ses engagements. La probabilité de défaut à la date de maturité T est donnée par (en supposant que $A_0 = L_0 = 1$)

$$\begin{aligned}\Phi(T) = P(A_T < L_T) &= P\left(\exp\left((\delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma w(T)\right) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(t) - \lambda_x(t))dt\right)\right) \\ &= P\left(\exp\left((\delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma w(T)\right) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(s) - \lambda_x(0))e^{\beta t} - \rho \int_0^t e^{\beta(t-s)} dw^*(s) dt\right)\right) \\ &= P\left(\sigma w(T) + \rho \int_0^T \int_0^t e^{\beta(t-s)} dw^*(s) dt < (r_g - (\delta - \frac{\sigma^2}{2}))T + \int_0^T (\mu_x(t) - \lambda_x(0))e^{\beta t} dt\right)\end{aligned}$$

On considère la variable aléatoire suivante :

$$Y(T) = \sigma w(T) + \rho \int_0^T \int_0^t e^{\beta(t-s)} dw^*(s) dt$$

La variable aléatoire Y_T est distribuée selon une loi normale. Son espérance est nulle.

$$E(Y_T) = 0$$

Comme le risque de mortalité et le risque financier sont supposés indépendants, le facteur de corrélation entre l'actif et le passif est nul ($\text{corr}(w, w^*) = 0$).

La variance de la variable Y_T est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_T) &= V(Y_T) \\ &= \sigma^2 T + \frac{\rho^2}{2\beta^3} (2\beta T + e^{2\beta T} - 4e^{\beta T} + 3)\end{aligned}$$

Finalement, la probabilité de défaut est donnée par la formule suivante :

$$\phi(T) = \Phi\left(\frac{(r_g - (\delta - \frac{\sigma^2}{2}))T + \mu_x(0)(\frac{e^{\beta' T} - 1}{\beta'} - \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta})}{\sqrt{V(Y_T)}}\right) \quad (5.13)$$

où

$$\beta' = \log(c) \quad \text{et} \quad \mu_x(0) = \lambda_x(0)$$

Ensuite, pour les paramètres g et c , nous allons utiliser des paramètres issus des tables *MR*

et FR :

$$s = 0.99952713$$

$$c = 1.124821959$$

$$g = 0.999946428$$

Exemple 5.3.1. Dans cet exemple, nous présentons les résultats de l'évolution de la probabilité de défaut en fonction de l'horizon de temps en utilisant la formule 5.13, qui prend en compte l'impact des deux risques étudiés : le risque financier et le risque de mortalité.

Nous avons utilisé les paramètres suivants :

- $x = 35$
- $r_g = 0.0275$
- $\beta = \log(c) = 0.1178$
- $\rho = 0.001$
- $\lambda_x(0) = \mu_x(0) = Be^{x\beta}$
- $\alpha = 0.995$.

Concernant l'actif, les paramètres utilisés sont le résultat de la calibration du modèle Black&Scholes (équation 5.12), par la méthode du maximum de vraisemblance, sur un échantillon de valeurs du prix BEL20 observées sur la période 1991-2014. Les valeurs estimées sont présentées dans la table suivante :

Paramètre	Valeur estimée
$\hat{\delta}$	0.0586
$\hat{\sigma}$	0.1828

TABLE 5.1 – Paramètres estimés de l'actif sur BEL20 1991-2014

Dans cet exemple, on suppose également que l'espérance de la mortalité déterministe représentée par la fonction μ_x et celle de la mortalité stochastique représentée par λ_x sont égales, ce qui revient à supposer que $\beta = \beta'$. Ainsi, le seul paramètre qui représente le risque de la mortalité dans la fonction de la probabilité de défaut donnée par la formule 5.13 est la volatilité ρ de l'intensité de la mortalité stochastique.

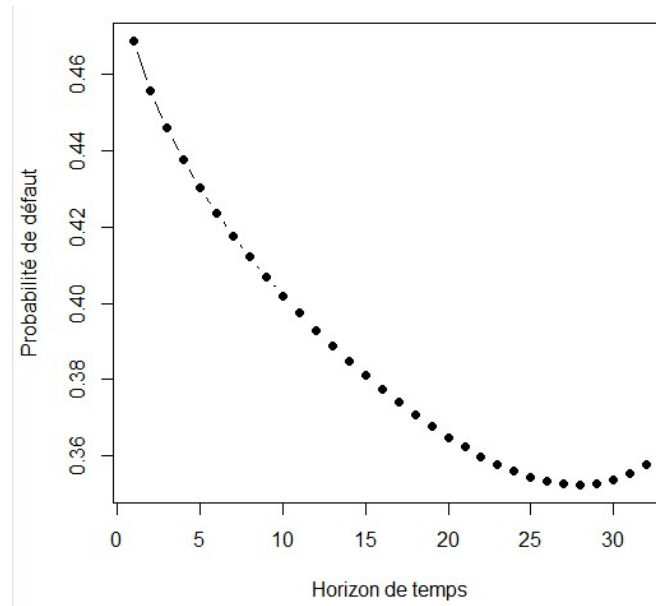


FIGURE 5.2 – Probabilité de défaut

Dans la Figure 5.2 on peut remarquer que la probabilité de défaut n'est pas monotone. En effet, pour des maturités inférieures à 28 ans, cette fonction est décroissante. Néanmoins, pour des horizons plus grands que 28 ans, le risque de défaut devient croissant avec le temps. Cela est justifié par la volatilité de la mortalité réelle.

Cette tendance s'explique par le fait que la fonction $V(t)$ est composée de deux termes, le premier est lié à la volatilité de l'actif ($\sigma^2 t$) et le deuxième à la volatilité du taux de mortalité ($\frac{\rho^2}{2\beta^3}(2\beta t + e^{2\beta t} - 4e^{\beta t} + 3)$). Ce dernier terme croît exponentiellement en fonction du temps.

Ainsi, afin de montrer l'impact au long terme du risque de mortalité, nous illustrons dans la Figure 5.3 la volatilité globale $V(t)$ en fonction du temps, en la comparant avec le cas où la volatilité de la mortalité est nulle.

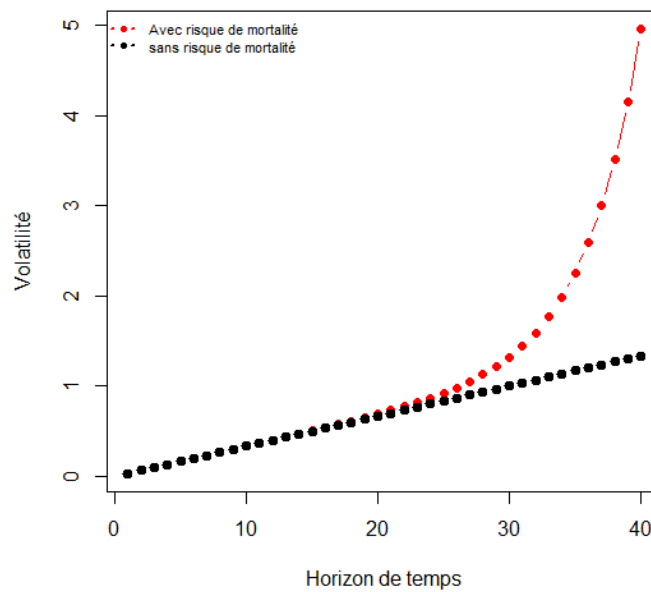


FIGURE 5.3 – Volatilité en fonction de l’horizon de temps

Pour les maturités inférieures à 25 ans, les deux courbes sont très proches, mais au-delà de la 25^{ème} année, la mortalité a un impact considérable sur la volatilité globale. Ce qui se traduit par une croissance de la probabilité de défaut du plan dans la présence du risque de mortalité pour les longs horizons de temps.

Afin de mettre en lumière l’impact au long terme de l’écart entre la mortalité réelle et la mortalité stochastique, nous comparons dans la Figure 5.4 la probabilité de défaut d’un plan DC en fonction de l’horizon de temps en présence du risque de mortalité, et la même fonction en supposant que la mortalité réelle suit la mortalité déterministe utilisée.

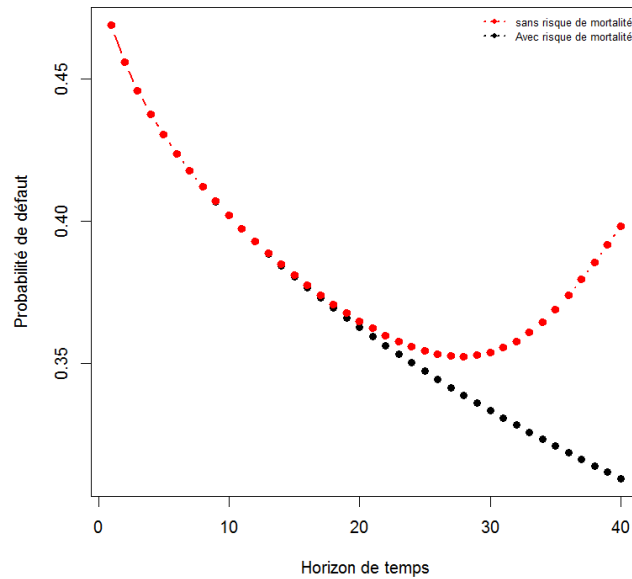


FIGURE 5.4 – Probabilité de défaut en fonction de l’horizon de temps

La volatilité de la mortalité stochastique a pour effet une amplification du risque d’insolvabilité du plan DC pour les longs horizons. Comme vu dans la Figure 5.4, ce risque n’est pas observé pour des courts et moyens horizons, contrairement aux échéances dépassant 20 années où ce risque prend de l’ampleur et se traduit par une hausse dans la courbe de la probabilité de défaut.

5.3.1.1 Probabilité de défaut sans prise en compte du risque financier

Dans cette partie, nous allons éliminer la source du risque financier afin d’étudier la solvabilité d’un plan de pension indépendamment de tout risque financier. Pour ce faire, nous allons supposer que toute prime perçue est investie dans un actif non risqué de type "zéro coupon".

Pour se mettre dans ce contexte, les hypothèses suivantes ont été adoptées :

- $r_g = 2.75\%$
- $\sigma = 0$

Pour le rendement δ de l’actif, nous considérons deux cas différents, dans le premier, on suppose que ce rendement est du même niveau que celui garanti par le plan sur les cotisations, ce qui signifie que $\delta = r_g$, et dans le deuxième, on suppose que l’actif génère un rendement légèrement supérieur au taux garanti par le plan. Pour ce cas, nous supposons que $\delta = 3\%$.

Pour les paramètres de la mortalité, nous avons utilisé les mêmes valeurs que pour le

résultat présenté dans la Figure 5.2. Le résultat obtenu est présenté dans la Figure 5.5 .

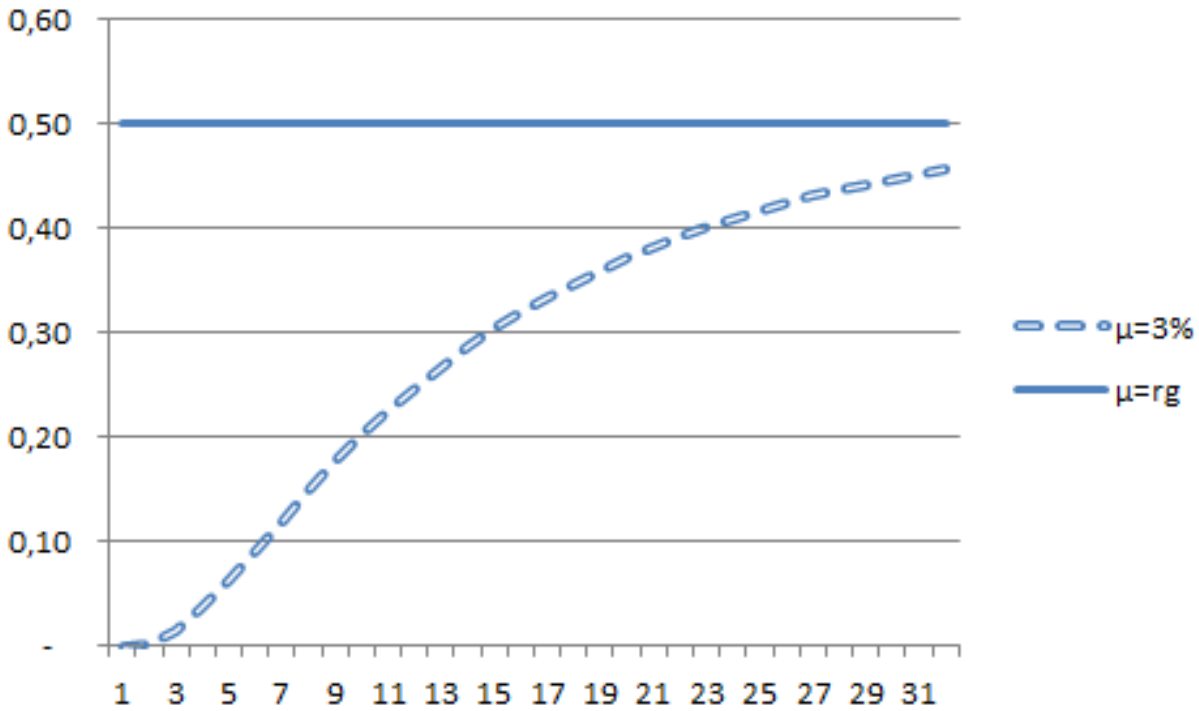


FIGURE 5.5 – Probabilité de défaut sans prise en compte du risque financier

Dans le premier cas, nous avons supposé que le rendement de l'actif est du même niveau que le taux garanti par le plan, ce qui a annulé tout impact financier. Cela se traduit dans la formule 5.13 par l'annulation du numérateur de la fonction $g(T)$ de valeur :

$$g(T) = \frac{(r_g - (\delta - \frac{\sigma^2}{2}))T}{\sqrt{V(Y_T)}}$$

et donc $\phi(T) = \Phi(g(T)) = 0.5 \quad \forall T \geq 0$.

Dans le deuxième cas présenté, nous avons supposé que l'actif génère un rendement supérieur à celui du passif. Dans ce cas, la probabilité de défaut est strictement croissante avec le temps, et tend vers 0.5.

Malgré la différence positive entre le rendement de l'actif obligataire et le taux fixe garanti par le plan, le risque de défaut s'amplifie avec le temps. Cette tendance s'explique par

la présence d'un écart entre la mortalité déterministe et la mortalité réelle qui augmente progressivement avec le temps.

5.3.1.2 Probabilité de défaut sans prise en compte du risque de mortalité

Contrairement au cas traité dans la section 5.3.1.1, dans cette partie, nous supposons que la seule source d'incertitude du plan de pension est le risque financier. Nous annulons la volatilité du risque de mortalité en supposant que le paramètre ρ est nul.

Pour les autres paramètres, nous avons utilisé les mêmes valeurs estimées de la Table 5.1. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

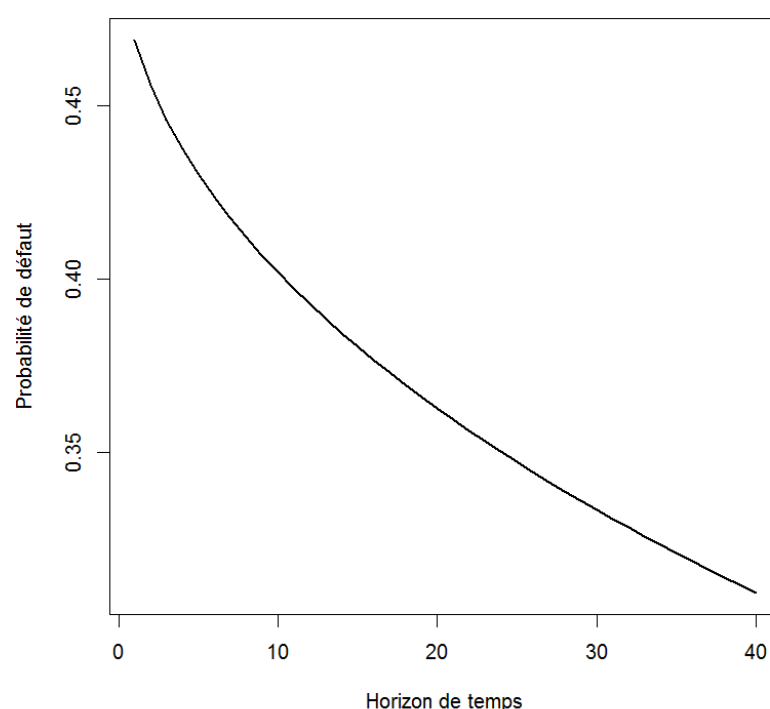


FIGURE 5.6 – Probabilité de défaut sans prise en compte du risque de mortalité

En annulant la volatilité du taux de mortalité, le dénominateur de la fonction $g(T)$ a baissé par rapport au cas de combinaison des deux risques (Figure 5.2). Ce qui s'est traduit par une baisse des valeurs de la probabilité de défaut pour les grandes maturités. Sans effet de la mortalité, la probabilité de défaut est une fonction strictement décroissante de temps.

Finalement et afin de comparer ces différentes situations, les résultats de ces trois cas étudiés sont illustrés dans la Figure 5.7.

Pour le cas où le risque financier est nul, nous avons comparé avec l'exemple où le rendement de l'actif s'élève à 3%.

La Figure 5.7 illustre une comparaison de la probabilité de défaut des trois situations étudiées :

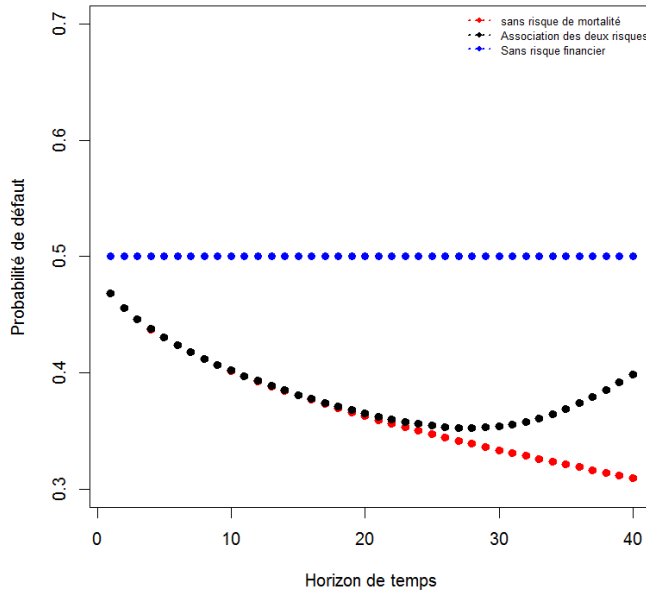


FIGURE 5.7 – Comparaison de probabilité de défaut

Remarque 5.3.1. De la figure 5.7 on peut tirer deux conclusions principales :

1. Le cas qui correspond à la probabilité de défaut la plus élevée correspond au cas où nous avons annulé toute source du risque financier (graphe bleu). Ce qui confirme qu'un investissement des cotisations dans un actif risqué de type "Equity" est moins risqué qu'un investissement dans un actif non risqué de type "zéro coupon", avec un même rendement que celui garanti par le plan.
2. En tenant compte du risque financier, les deux résultats illustrés par les graphes rouge et noir montrent que l'écart en termes de probabilité de défaut entre ces deux situations (avec et sans prise en compte du risque de mortalité) est plus important pour les grandes maturités ($T > 25$). En effet, les deux courbes sont très proches pour les courts et moyens horizons, mais dans le cas où le risque de mortalité est pris en compte, la probabilité de défaut change de tendance et devient strictement croissante pour les grandes maturités ($T > 25$). Tandis que si on néglige ce risque et on considère uniquement le risque financier comme source d'incertitude pour le plan, la probabilité de défaut devient strictement décroissante en fonction de la durée de l'engagement.

5.3.2 Capital de solvabilité

Dans cette section, nous allons étudier l'évolution du niveau du capital de solvabilité d'un plan de pension DC sous l'impact d'une mortalité stochastique. Cela se fera en deux parties, dans la première partie, on va supposer que le capital de solvabilité est investi dans un actif risqué. Dans la deuxième, nous allons faire la même étude mais en supposant que ce capital est investi dans un actif obligataire.

Mathématiquement parlant, le calcul du capital de solvabilité risqué en fonction de l'horizon de temps ne pose pas de problème, puisqu'il s'agit de comparer un montant de dynamique log-normale avec la valeur au terme des engagements, donnée également par une loi log-normale. Nous avons ainsi la possibilité de calculer le capital de solvabilité par une formule explicite pour ce cas.

Néanmoins, le calcul d'un capital de solvabilité non risqué est plus compliqué, puisque l'on se trouve face au problème de la différence de deux lois log-normales. Ce problème sera traité par l'utilisation de l'approximation de Fenton Wilkinson ([Fenton L.F.]) et une résolution numérique d'une équation non linéaire pour calculer la valeur de la value at risk afin d'en déduire la valeur du capital de solvabilité non risqué.

5.3.2.1 Capital de solvabilité risqué

On suppose que le capital de solvabilité est investi dans un actif risqué. Sa valeur est donc donnée par

$$P(A(T) + SC(T)A(T) < L(T)) = 1 - \alpha_T \quad (\alpha_T = \alpha^T) \quad (5.14)$$

où $\alpha_T = \alpha^T$

$$P\left(e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma w(T)}(1 + SC(T)) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(t) - \lambda_x(t))dt\right)\right) = 1 - \alpha_T$$

et donc

$$P\left(\log(1 + SC(T)) < \int_0^T (r_g + \mu_x(t) - \lambda_x(t))dt - (\delta - \frac{\sigma^2}{2})T - \sigma w(T)\right) = 1 - \alpha_T$$

d'où

$$SC(T) = \exp\left((r_g - (\delta - \frac{\sigma^2}{2}))T + z_\alpha \sqrt{\sigma^2 T + \frac{\rho^2}{2\beta^3}(2\beta T + e^{2\beta T} - 4e^{\beta T} + 3)}\right) - 1$$

Exemple 5.3.2. En reprenant les mêmes paramètres utilisés pour calculer la probabilité de défaut dans l'exemple 5.3.1, le capital de solvabilité investi en actif risqué évolue en fonction de l'horizon de temps comme le montre la Figure 5.8

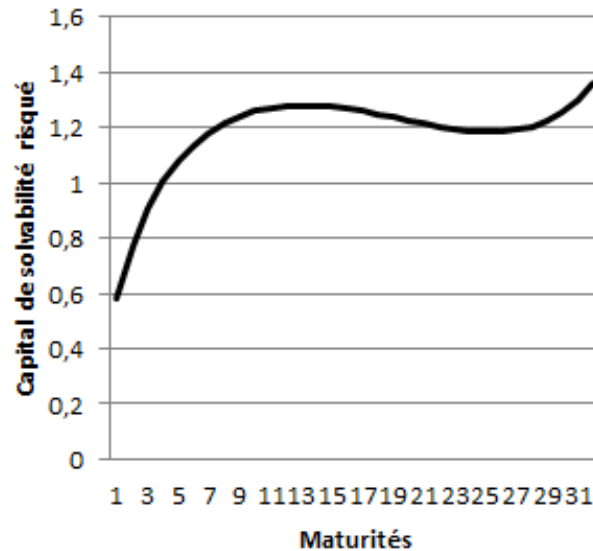


FIGURE 5.8 – Capital de solvabilité risqué

On peut remarquer que le capital de solvabilité risqué est croissant pour les courtes maturités (entre 1 et 9 années) et décroissant pour des maturités entre 10 et 30 ans. Cette tendance, étudiée dans les chapitres précédents, s'explique par la présence du risque financier qui s'atténue pour les grandes échéances. Néanmoins, pour des horizons au-delà de 30 ans, ce capital devient strictement croissant. Cette tendance peut être considérée comme une conséquence du risque de mortalité. L'écart entre la mortalité réelle et la mortalité déterministe est en effet plus important pour les longues échéances.

Afin d'étudier l'impact de chacun des risques étudiés, qui sont le risque financier et le risque de mortalité, indépendamment l'un de l'autre, nous avons effectué une comparaison similaire à celle présentée dans la section précédente.

Capital de solvabilité sans prise en compte du risque financier :

De manière similaire à l'étude présentée dans la section précédente, nous avons annulé l'effet du risque financier en annulant le paramètre de volatilité de l'actif σ . Pour se mettre dans ce contexte, les hypothèses suivantes ont été adoptées :

- $\delta = r_g = 2.75\%$
- $\sigma = 0$

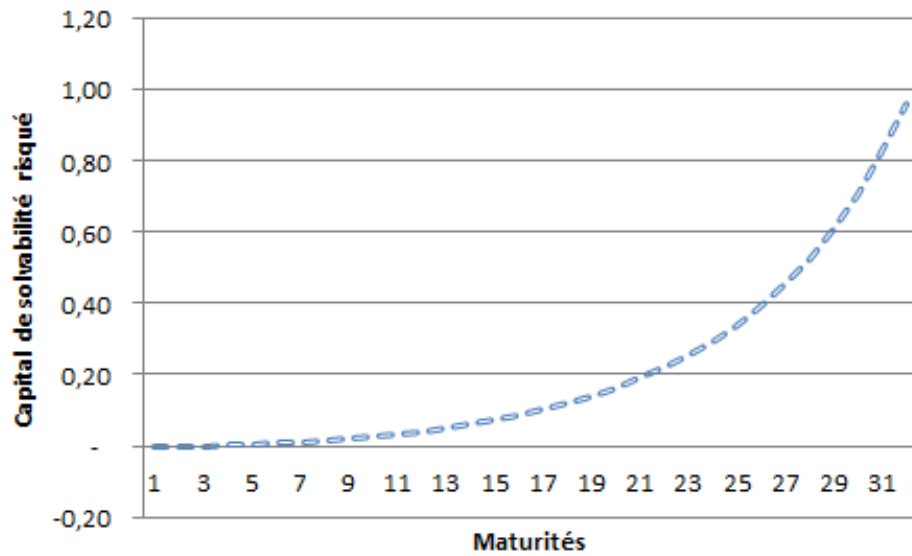


FIGURE 5.9 – Capital de solvabilité sans prise en compte du risque financier

En l'absence du risque financier, le profit généré par le rendement de l'actif financier est nul, puisqu'on suppose que la prime est investie en totalité dans un actif non risqué d'un rendement du même niveau que le taux garanti par le plan. D'un autre côté, la volatilité du taux de mortalité est une fonction strictement croissante, ceci s'est donc traduit par un besoin strictement croissant en termes de capital de solvabilité.

Capital de solvabilité sans prise en compte du risque de mortalité :

On suppose que le plan étudié est soumis au risque financier sans pour autant traiter le risque de mortalité. Nous avons donc annulé la volatilité du passif ρ , qui est supposé déterministe dans ce cas.

Nous avons utilisé les paramètres suivants :

- $\delta = 0.0586$
- $\sigma = 0.1828$
- $\beta = 0.1178$
- $\rho = 0$
- $r_g = 2.75\%$

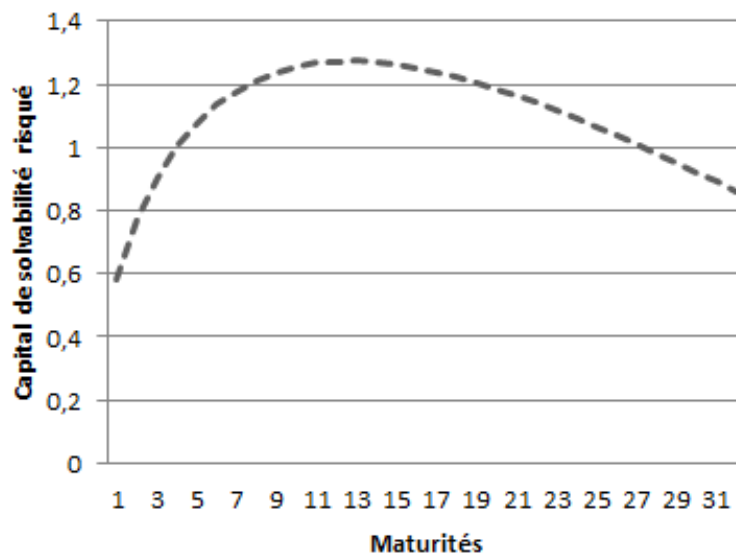


FIGURE 5.10 – Capital de solvabilité sans prise en compte du risque de mortalité

On peut tirer de cet exemple la même conclusion que celle de la section 5.3.1.2. Autrement dit, une annulation de la volatilité de mortalité entraîne une probabilité de défaut moins élevée et donc un capital de solvabilité plus bas.

Nous comparons les résultats de ces deux dernières simulations en plus du premier cas étudié, où les deux risques sont traités, dans la Figure 5.11 :

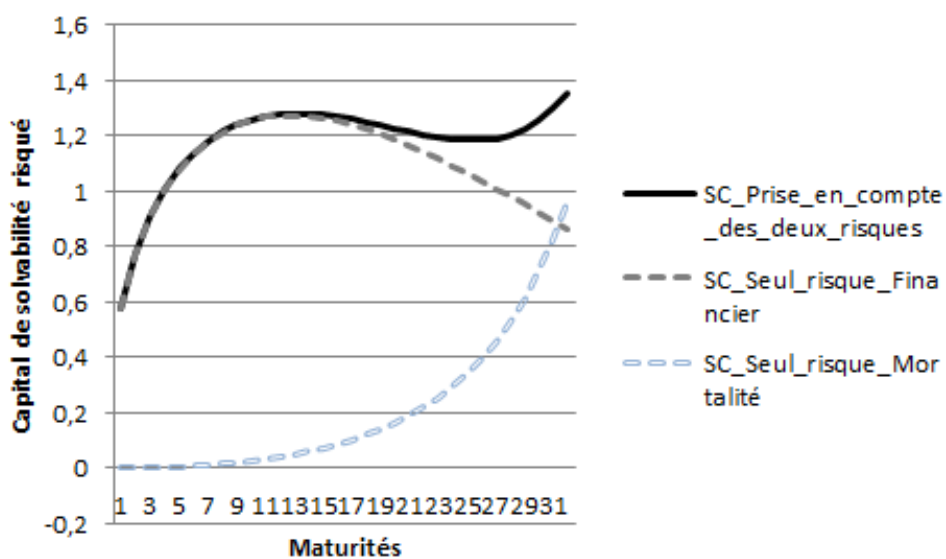


FIGURE 5.11 – Comparaison de capital de solvabilité

Finalement, et afin de mettre en lumière l'impact du paramètre de la volatilité de mortalité ρ , nous présentons dans la Figure 5.12 l'évolution du capital de solvabilité risqué en fonction de l'horizon de temps pour 3 valeurs différentes de ce paramètre : $\rho = 0.0008$, $\rho = 0.001$, et $\rho = 0.003$. (Ces paramètres sont inspirés de [Vigna E. and Luciano E.])

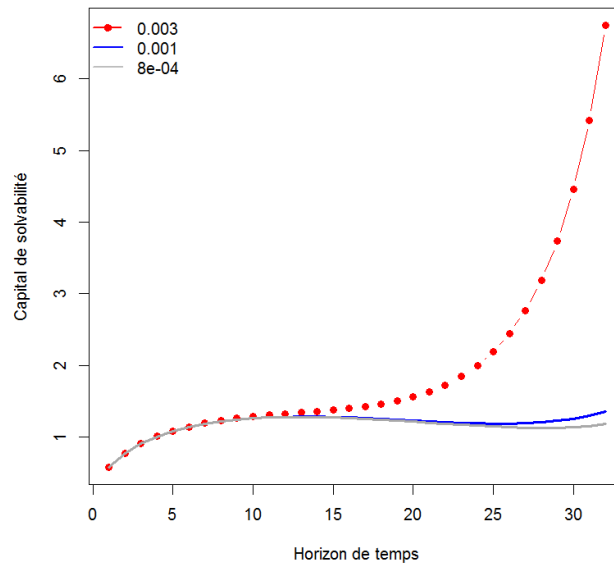


FIGURE 5.12 – Impact de la volatilité de mortalité sur le niveau de solvabilité du plan

5.3.2.2 Capital de solvabilité non risqué

Dans cette partie, nous proposons une méthode de calcul du capital de solvabilité dans le cas où ce dernier est investi en totalité dans un actif non risqué de type obligation, avec un rendement fixe et connu r , et sous l'hypothèse que la mortalité est stochastique. Le problème rencontré dans cette partie réside dans la définition de la loi de la différence de deux lois log-normales, puisque l'actif et le passif sont tous les deux supposés de dynamique log-normale. Afin de remédier à ce problème, nous définissons une nouvelle variable donnée par une somme de variables log-normales corrélées entre elles ¹.

Pour le calcul de ce capital et afin de rester dans le même contexte que la section précédente, nous utilisons les mêmes dynamiques de l'actif et du passif proposées respectivement par les équations (5.11 et 5.12)

1. Une généralisation de l'approximation de Fenton-Wilkinson [Fenton L.F.] au cas des variables corrélées est discutée en détail dans [Pirinen P.]

D'un autre côté, on maintient un seuil de couverture annuel de 99,5% (philosophie Solvency 2). Nous calculons ainsi le capital de solvabilité en utilisant la condition de solvabilité suivante :

$$P(A(T) + SC(T)e^{rT} < L(T)) = 1 - \alpha_T \quad (\alpha_T = \alpha^T)$$

Pour une maturité définie T , si on remplace l'actif $A(T)$ et le passif $L(T)$ par leurs valeurs, on obtient :

$$P\left(\exp\left(\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T)\right) + SC(T)e^{rT} < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(t) - \lambda_x(t))dt\right)\right) = 1 - \alpha_T \quad (5.15)$$

or, la value at risk au terme T vérifie,

$$VaR_{\alpha_T}(T) = SC(T)e^{rT}$$

en l'introduisant dans l'équation 5.15, on obtient l'équation suivante :

$$P\left(\exp\left(\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T)\right) + VaR_{\alpha_T}(T) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(t) - \lambda_x(t))dt\right)\right) = 1 - \alpha_T \quad (5.16)$$

Le terme gauche de l'équation 5.16 équivaut à la probabilité que $\nu(T)$ soit inférieure au surplus du passif $L(T)$ par rapport l'actif $A(T)$. S'agissant de la différence de lois lognormales, qui n'est pas toujours positive, l'approximation de Fenton Wilkinson ne peut pas y être appliquée directement.

Pour éviter ce problème, nous réécrivons l'équation 5.16 sous la forme :

$$P\left(\exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T) + \int_0^T \lambda_x(t)dt\right] + VaR_{\alpha_T}(T)\exp\left(\int_0^T \lambda_x(t)dt\right) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(t))dt\right)\right) = 1 - \alpha_T$$

Ensuite, nous considérons la variable suivante :

$$Y(T) = \exp\left(\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T) + \int_0^T \lambda_x(t)dt\right) + VaR_{\alpha_T}(T)\exp\left(\int_0^T \lambda_x(t)dt\right)$$

de sorte que $Y(T)$ vérifie

$$P\left(Y(T) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_x(t))dt\right)\right) = 1 - \alpha_T.$$

Soient $Y_1(T)$ et $Y_2(T)$ telles que

$$\begin{aligned} Y_1(T) &= \exp\left(\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T) + \int_0^T \lambda_x(t)dt\right) \\ Y_2(T) &= \exp\left(\int_0^T \lambda_x(t)dt\right) \end{aligned}$$

et

$$Y(T) = Y_1(T) + VaR_{\alpha_T}(T)Y_2(T)$$

Nous allons utiliser l'approximation de Fenton Wilkinson. En effet, la distribution de la variable $Y(T)$ sera approchée par une distribution lognormal dont l'espérance et la variance sont données par :

$$\begin{aligned} E(Y(T)) &\simeq E(Y_1(T) + VaR_{\alpha_T}(T)Y_2(T)) \\ var(Y(T)) &\simeq var(Y_1(T) + VaR_{\alpha_T}(T)Y_2(T)) = var(Y_1(T)) + VaR_{\alpha_T}(T)^2 var(Y_2(T)) + 2VaR_{\alpha_T}(T)Cov(Y_1(T), Y_2(T)) \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} E(Y(T)) &\simeq E(Y_1(T)) + VaR_{\alpha_T}(T)E(Y_2(T)) \\ var(Y(T)) &\simeq var(Y_1(T)) + VaR_{\alpha_T}(T)^2 var(Y_2(T)) + 2VaR_{\alpha_T}(T)Cov(Y_1(T), Y_2(T)) \end{aligned}$$

Les termes de ces deux équations sont calculés ci-après :

Espérance de $Y(T)$:

$$E(Y(T)) \simeq E(Y_1(T)) + VaR_{\alpha_T}(T)E(Y_2(T)) \quad (5.17)$$

soit X_1 la variable de distribution normale vérifiant

$$X_1 = \log(Y_1)$$

ainsi

$$X_1 = \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T) + \int_0^T \left(\lambda_x(0)e^{\beta t} + \rho \int_0^t e^{\beta(t-s)} dw^*(s) \right) dt$$

soient m_1 et ν_1 respectivement l'espérance et la variance de X_1 . Elles sont donc données par :

$$\begin{aligned} m_1(T) &= \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \lambda_x(0) \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta} \\ \nu_1(T) &= \sigma^2 T + \frac{\rho^2}{2\beta^3} \left(2\beta T + e^{2\beta T} - 4e^{\beta T} + 3 \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} E(Y_1(T)) &= e^{m_1(T) + \frac{\nu_1(T)}{2}} \\ var(Y_1(T)) &= (e^{\nu_1(T)} - 1) e^{2m_1(T) + \nu_1(T)} \end{aligned}$$

Afin de simplifier les formules, nous gardons les notations m_1 et ν_1 pour la suite.

De même, soit X_2 la variable normale vérifiant

$$X_2 = \log(Y_2)$$

X_2 est donnée par :

$$X_2 = \int_0^T \lambda_x(t) dt$$

on note par $m_2(T)$ et $v_2(T)$ l'espérance et la variance de $X_2(T)$. On a donc :

$$\begin{aligned} m_2(T) &= \lambda_x(0) \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta} \\ v_2(T) &= \frac{\rho^2}{2\beta^3} (2\beta T + e^{2\beta T} - 4e^{\beta T} + 3) \end{aligned}$$

et donc l'espérance et la variance de $Y_2(T)$ sont données par :

$$\begin{aligned} E(Y_2(T)) &= e^{m_2(T) + \frac{v_2(T)}{2}} \\ var(Y_2(T)) &= (e^{v_2(T)} - 1) e^{2m_2(T) + v_2(T)} \end{aligned}$$

dans la suite, l'espérance et la variance de Y_2 seront remplacées par m_2 et v_2 . L'espérance de la variable $Y(T)$ est donc donnée par :

$$E(Y(T)) \simeq e^{m_1(T) + \frac{v_1(T)}{2}} + e^{m_2(T) + \frac{v_2(T)}{2}}$$

Variance de $Y(T)$

Notons par $C(T)$ la covariance entre les variables $Y_1(T)$ et $Y_2(T)$, nous avons,

$$\begin{aligned} C(T) &= E(Y_1(T) Y_2(T)) - E(Y_1(T)) E(Y_2(T)) \\ &= E \left(\exp \left(\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma w(T) + 2 \int_0^T \lambda_x(t) dt \right) \right) - \\ &\quad \exp \left(m_1(T) + m_2(T) + \frac{v_1(T) + v_2(T)}{2} \right) \\ &= \exp \left(\delta T + 2\lambda_x(0) \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta} + \frac{\rho^2}{\beta^3} (2\beta T + e^{2\beta T} - 4e^{\beta T} + 3) \right) + \\ &\quad \exp \left(m_1(T) + m_2(T) + \frac{v_2(T) + v_2(T)}{2} \right) \end{aligned}$$

Finalement, la variance de la variable $Y(T)$ est donnée par :

$$var(Y(T)) \simeq (e^{v_1(T)} - 1) e^{2m_1(T) + v_1(T)} + Var_{\alpha_T}(T)^2 (e^{v_2(T)} - 1) e^{2m_2(T) + v_2(T)} + 2Var_{\alpha_T}(T) C(T)$$

D'un autre côté, il existe une variable de distribution normale $X(T)$ vérifiant,

$$Y(T) = e^{X(T)}$$

si on note par μ_X l'espérance de X et σ_X^2 sa variance, nous avons,

$$\begin{aligned} E(Y(T)) &= e^{\mu_X + \frac{\sigma_X^2}{2}} \\ var(Y(T)) &= (e^{\sigma_X^2} - 1) e^{2\mu_X + \sigma_X^2} \end{aligned}$$

Pour la suite, on garde les notations $\tilde{m}(t)$ pour l'espérance de $Y(T)$ et $\tilde{v}^2(t)$ pour sa variance.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.3.1. *Les paramètres μ_X et σ_X sont donnés par :*

$$\begin{aligned}\mu_X &= \ln(\tilde{m}) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{m}^2}\right) \\ \sigma_X^2 &= \ln\left(1 + \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{m}^2}\right)\end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons

$$\tilde{m} = E(Y) = e^{\mu_X + \frac{\sigma_X^2}{2}}$$

ce qui est équivalent à

$$\mu_X = \ln(\tilde{m}) - \frac{\sigma_X^2}{2}$$

D'autre part nous avons,

$$\sigma_X^2 = \text{var}(Y) = \left(e^{\sigma_X^2} - 1\right) e^{2\mu_X + \sigma_X^2}.$$

En remplaçant μ_X par sa valeur dans cette formule, on obtient

$$\left(e^{\sigma_X^2} - 1\right) e^{2\ln(\tilde{m})} = \tilde{v}^2$$

d'où

$$\sigma_X^2 = \ln\left(1 + \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{m}^2}\right)$$

et donc

$$\mu_X = \ln(\tilde{m}) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{m}^2}\right)$$

L'équation du capital de solvabilité non risqué basé sur la valeur at risk à T années est donc donnée par :

$$\begin{aligned}P\left(\exp(X(T)) < \exp\left(\int_0^T (r_g + \mu_{x+t}) dt\right)\right) &= 1 - \alpha_T \\ P\left(X(T) < \int_0^T (r_g + \mu_{x+t}) dt\right) &= 1 - \alpha_T.\end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\Phi\left(\frac{\int_0^T (r_g + \mu_{x+t}) dt - \mu_X}{\sigma_X}\right) = 1 - \alpha_T$$

et donc

$$\frac{\int_0^T (r_g + \mu_{x+t}) dt - \mu_X}{\sigma_X} = q_{1-\alpha_T}$$

la value at risk est donc solution de l'équation suivant :

$$\sigma_X q_{1-\alpha_T} + \mu_X = \int_0^T (r_g + \mu_{x+t}) dt$$

ce qui revient à résoudre l'équation suivante :

$$q_{1-\alpha_T} \sqrt{\ln(1 + \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{m}^2}) + \ln(\tilde{m})} - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{m}^2}) - \int_0^T (r_g + \mu_{x+t}) dt = 0, \quad (5.18)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= e^{m_1(T) + \frac{v_1(T)}{2}} + VaR_{\alpha_T}(T) e^{m_2(T) + \frac{v_2(T)}{2}} \\ \tilde{v} &= \sqrt{(e^{v_1(T)} - 1) e^{2m_1 + v_1^2(T)} + VaR_{\alpha_T}(T)^2 (e^{v_2(T)} - 1) e^{2m_2 + v_2^2(T)} + 2 VaR_{\alpha_T}(T) C(T)} \end{aligned}$$

La value at risk, $VaR_{\alpha_T}(T)$, est la solution de l'équation non linéaire 5.18. Cette dernière a été résolue numériquement, en utilisant les paramètres suivants :

- $s = 0.99952713$
- $c = 1.124821959$
- $g = 0.999946428$
- $\delta = 0.05856547$
- $\sigma = 0.1827725$
- $\lambda_0 = 0.00078$
- $r_g = 0.0275$
- $\beta = 0.1178$
- $\rho = 0.001$
- $\alpha = 0.995$
- $r = 0.04$

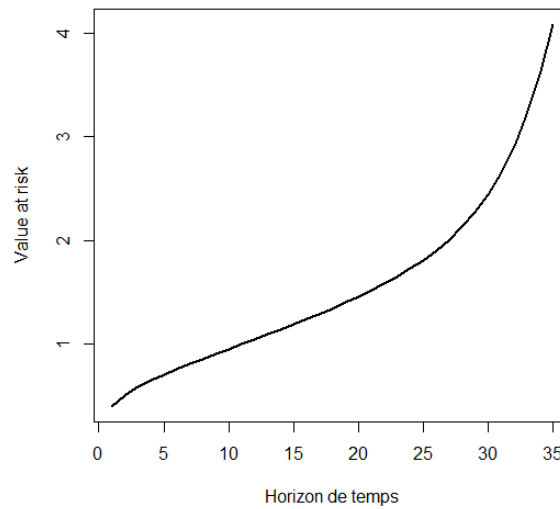


FIGURE 5.13 – Value at risk

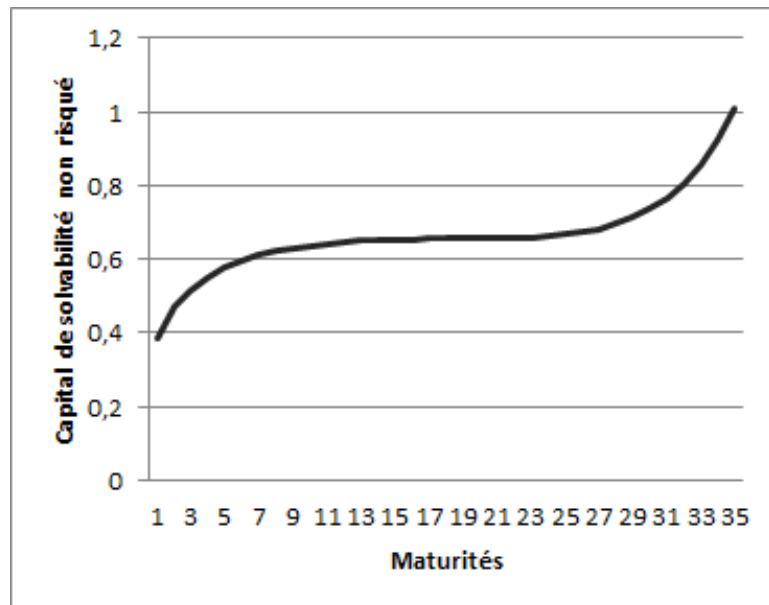


FIGURE 5.14 – Capital de solvabilité non risqué

Remarque 5.3.2. Le capital de solvabilité non risqué évolue de manière similaire au capital de solvabilité risqué. En effet, entre un et 9 ans, le capital croît en fonction du temps, et puis il connaît une légère décroissance jusqu'à un horizon de 25 ans. Pour des longs horizons qui dépassent 25 ans, la tendance de la courbe s'inverse et devient strictement croissante. Ceci est dû à l'introduction du risque de la mortalité stochastique qui fait que, plus l'horizon de temps est long, plus le risque d'insolvabilité est grand, ce qui se traduit naturellement par un plus grand besoin de capital supplémentaire dans le plan.

Dans la Figure 5.15, nous reprenons des valeurs précédemment présentées dans ce chapitre afin de permettre de comparer le niveau du capital de solvabilité selon s'il est investi en actif risqué ou en actif non risqué.

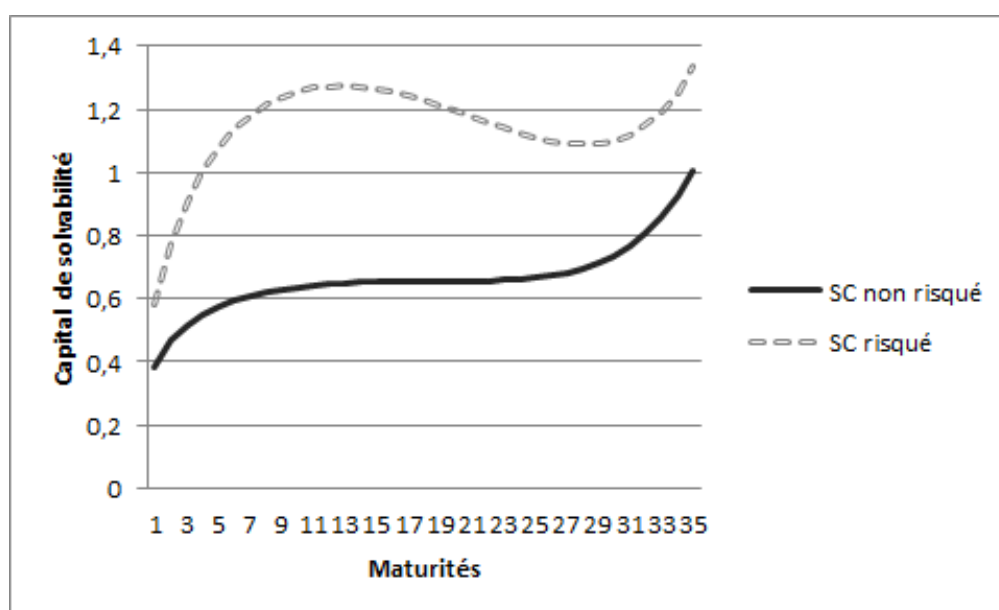


FIGURE 5.15 – Capital de solvabilité risqué et non risqué

Remarque 5.3.3. Par ce résultat, nous confirmons notre hypothèse sur l'impact du risque de mortalité sur la solvabilité des plans de pension de type DC à travers des longs horizons. Quelle que soit la nature de son placement, le capital de solvabilité est fortement impacté par le risque de mortalité pour les grandes maturités. Ce risque associé au risque financier est moins visible pour les courtes et moyennes échéances. Mais la volatilité de la mortalité stochastique, exponentiellement croissante en fonction du temps comme montré par la Figure 5.3, inverse la tendance en amplifiant l'écart entre la mortalité réelle et la mortalité déterministe.

5.4 Conclusion

Dans l'étude présentée dans ce chapitre, nous avons analysé l'impact du risque de mortalité sur la solvabilité des plans de pension de type DC. Nous avons traité le cas des engagements avec garantie de taux fixe.

Nous avons particulièrement analysé l'impact de l'écart entre la mortalité déterministe utilisée par les assurances vie et la mortalité réelle. Notre étude a confirmé notre hypothèse sur la nécessité d'étudier la solvabilité des plans de pension en tenant compte de toute la durée de l'engagement.

L'étude du risque de mortalité en présence du risque financier confirme cette thèse. En effet, nous avons montré dans les chapitres précédents que l'impact du risque financier

est important pour des maturités courtes, ce risque diminue pour des grandes maturités. Contrairement à cela, l'impact du risque de mortalité est moins visible sur les courtes et moyennes durées. Mais pour les grandes échéances, son impact est non négligeable.

Pour un gestionnaire de plan de pension, il est nécessaire de prendre en compte tous ces éléments pour sa valorisation de d'engagement. Comme proposition, moyennant un chargement sur la table de mortalité utilisée, le gestionnaire pourrait corriger cet impact s'il tient compte de toute sa durée d'engagement dans son étude de solvabilité et ne pas se limiter à des mesures de risque fondées sur un horizon d'une année comme le cas exigé par la directive Solvency 2.

Conclusion

Cette thèse propose un modèle de solvabilité des plans de pension de type DC et DB basé sur une approche de risque intégrant le caractère de long terme des engagements. Selon la particularité de chaque plan, nous avons analysé l'impact des risques auxquels le plan est soumis. Pour les plans DC, nous avons étudié l'impact du risque financier et celui du risque de mortalité. Et pour les plans DB, nous avons étudié l'impact de ce même risque en association avec le risque de l'inflation des salaires. Nous avons proposé des formules de calcul des différentes mesures de risque : probabilité de défaut, probabilité de ruine, value at risk et Tail value at risk. Et ce, sur la base d'une projection sur toute la durée des engagements.

Dans un cadre stochastique, nous avons effectué une étude ALM du plan : nous avons étudié le risque pris par le gestionnaire du plan qui, en investissant les contributions de pension dans des placements financiers, doit assumer tout déficit de l'actif par rapport aux engagements.

Dans le cadre des plans DC, nous avons montré que malgré la contrainte du taux fixe garanti, l'investissement des contributions dans des titres risqués de type « Equity » sur des durées aussi longues que la durée des engagements permet de diminuer les besoins de solvabilité du plan.

À cette fin, nous avons proposé des modèles stochastiques de type mouvement Brownien géométrique et de type processus de Lévy. Nous avons montré que l'intégration des processus de Lévy (MJD et Variance Gamma) dans la modélisation de l'actif du plan permet une étude de solvabilité plus prudente, à la différence du modèle Black& Scholes qui sous-évalue les besoins de solvabilité du plan de pension. Dans le cadre des plans de pension de type DB, nous avons étendu notre étude de solvabilité des plans DC en intégrant au modèle le risque de l'inflation des salaires. De même que pour les plans DC, nous avons proposé un modèle de solvabilité pour les plans DB pour le cas d'un actif lognormal et pour le cas d'un actif de type Lévy.

Nous avons calculé les prestations ainsi que les contributions selon la méthode IAS « projected unit credit cost » dans une approche Best Estimate. Nous avons tenu compte de la corrélation entre l'actif et les salaires. Nous avons montré qu'en plus de la volatilité du fonds risqué, la corrélation avec les salaires est un facteur important qui doit être considéré par le

gestionnaire du plan dans sa stratégie d'investissement. Nous avons montré que la détention d'actifs financiers corrélés avec l'inflation des salaires permet au gestionnaire du plan de diminuer ses besoins de solvabilité.

Pour conclure notre étude sur la solvabilité des plans de pension en tenant compte de leur durée d'engagement, nous avons intégré le risque « Mortalité ». Nous avons analysé l'impact de ce risque sur la solvabilité des plans de pension de type DC.

À cette fin, nous avons analysé l'impact de l'écart entre la mortalité déterministe utilisée par les assurances-vie et la mortalité réelle que nous avons modélisée par un processus stochastique de type "Ornstein Uhlenbeck". Notre étude et les résultats présentés dans ce cadre ont confirmé notre idée sur la nécessité d'étudier la solvabilité des plans de pension en tenant compte de toute la durée de l'engagement. En effet, nous avons montré que l'impact du risque financier sur la solvabilité des plans est important pour des maturités courtes et que ce risque diminue pour des grandes maturités. En revanche, le risque de mortalité est moins significatif pour des courtes maturités et plus important pour les longues échéances.

En conclusion, un gestionnaire de plan de pension doit mesurer ses besoins de solvabilité en tenant compte de ces facteurs de risque pour la valorisation de l'actif et du passif (engagements). Il est aussi confirmé par cette étude que des mesures de risque de type value-at-risk pour évaluer les besoins de solvabilité d'un plan de pension en se basant sur un horizon d'une année est incompatible avec la nature de risque de ces engagements.

Les perspectives envisageables en prolongement de cette thèse concernent les objectifs suivants :

- **Etude de solvabilité des plans de pension sous l'hypothèse de la dépendance des probabilités de survie :**

Dans le cadre de notre étude de solvabilité des plans de pension DC et DB, nous nous sommes limités à la contrainte de l'indépendance des probabilités annuelles de survie (non défaut) . Selon cette contrainte, la probabilité d'honorer les engagements du plan, pour un horizon de N années, est donnée par : $\alpha_N = \alpha^N$, où α est le seuil de sécurité annuel considéré (99,5% dans notre étude et aussi en Solvency 2). Il serait ainsi intéressant de prolonger notre étude en proposant un modèle de solvabilité en DC comme en DB qui tient compte de la dépendance de ces probabilités.

- **Développement d'un modèle de solvabilité pour les plans de pension à primes périodiques en théorie de la ruine :**

Nous avons étudié la situation de ruine des plans de pension de type DB à prime unique dans le cadre d'un actif log-normal. Dès lors, ce cas peut être généralisé pour

concerner également les plans DB financés par des primes périodiques et adapté éventuellement aux plans de pension de type DC, en considérant que l'affilié peut quitter le plan à tout moment avant le terme du contrat. Une étude des besoins de solvabilité dans ce cas serait un prolongement direct de cette thèse.

- **Modélisation d'une allocation stratégique du portefeuille de l'actif du plan dans un temps continu :**

Nous avons étudié la sensibilité de la clé de répartition dans le cadre d'un actif mixte pour mettre en lumière l'impact du taux minimum garanti exigé par la loi LPC. Néanmoins, la modélisation d'une clé de répartition du portefeuille dynamique en temps continu n'a pas été traitée et peut-être considérée comme une perspective envisageable pour notre travail.

- **Introduction du risque de longévité après l'âge de la retraite :**

Notre étude du risque de mortalité a concerné l'écart entre la mortalité réelle et la mortalité déterministe utilisée par le plan de pension pour l'estimation de l'engagement de pension. Une étude des besoins de solvabilité d'un plan de pension octroyant des prestations de pension sous forme d'une rente viagère en considérant un passif stochastique qui tient compte du risque de longévité (en DC et DB) serait une importante perspective de notre étude.

- **Calcul du rendement minimum dans le cadre de la loi LPC : Approche horizontale et approche verticale :**

Dans le cadre de la nouvelle loi belge sur les pensions complémentaires instaurée à partir du 1er janvier 2016, le taux garanti sera calculé par une formule qui tient compte de l'évolution des taux sur le marché. Plus précisément, le taux appliqué sera basé sur l'évolution du rendement des obligations d'état belges à 10 ans (OLO10) sur 24 mois en tenant compte d'un taux minimum de 1,75% et d'un taux maximum de 3,75%.

En cas de changement du rendement minimum fixé par la loi, il existe deux méthodes d'application de ce nouveau taux : une méthode « verticale » et une méthode « horizontale ». La méthode verticale consiste à appliquer le nouveau taux sur l'ensemble de la réserve constituée et les futures cotisations. La méthode horizontale, quant à elle, consiste à appliquer ce nouveau taux uniquement sur les futures cotisations de pension sans concerner la réserve déjà constituée. Il serait intéressant de mesurer l'impact de ces deux méthodes sur la solvabilité des plans de pension. Une telle étude est ainsi considérée comme un objectif d'une étude de continuité de cette thèse.

Bibliographie

- [ACPR] NOTICE « Solvabilité II » Système de gouvernance. *ACPR*, 17/12/2012 11
- [Applebaum D.] Lévy Processes and Stochastic Calculus. *Cambridge University Press*, 2004. 40
- [Ardia D. Mullen K. Peterson B. and Ulrich J.] An R Package for Global Optimization by Differential Evolution. <http://cran.r-project.org/web/packages/DEoptim/vignettes/DEoptim.pdf>. 73
- [Artzner P. Delbaen F. Eber J.M. and Heath D.] Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9 : 203–228, 1999. 47
- [Back K.] A Course in Derivatives Securities. *Springer*, 1995 101
- [Barndorff-Nielsen O.E] Normal inverse Gaussian processes and the modelling of stock returns *Research Report 300, Dept. Theor. Statistics, Aarhus University*, 1995. 40
- [Bennyhof D. G.] Time Diversification and Horizon-Based Asset Allocations. *The Journal of Investing* 18(1) :45-52, 2009. 7
- [Bertoin J.] Lévy Processes. *Cambridge Univ. Press, Melbourne, NY*, 1996, x+265 pp. 54.95, 1996. 40
- [Black F. Scholes M.] The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637-654, 1973. 19
- [Bodie Z. Merton R. C. and Samuelson W. F.] Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Lifecycle Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16(3) : 427-449, 1992.
- [Bodie Z. Marcus A.J. and Merton R.C.] Defined Benefit versus Defined Contribution Pension Plans : What are the Real Tradeoffs? *The National Bureau Of Economic Research*, 1988. 7
- [Bodie Z.] On the Risks of Stocks in the Long Run *Financial Analysts Journal* 51(3) :68–76 , 1995. 6, 18, 38

- [Bravo J. M. Braumann C. A.] The value of a random life : modelling survival probabilities in a stochastic environment. *http://hdl.handle.net/10174/1308*, 2008. 114
- [Briys E. and de Varenne F.] On the Risk of Life Insurance Liabilities : Debunking Some Common Pitfalls. *Journal of Risk and Insurance*, 64(4) : 673–694, 1997.
- [Brouhns N. Denuit M.] A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance : Mathematics and Economics*, 2002. 114
- [Brouhns N. Denuit M. and Vermunt J.K.] Measuring the longevity risk in mortality projections *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, (2), 105-130, 2002 114
- [CRP] Commission de réforme des pensions 2020-2040 Un Contrat Social Performant et Fiable *Annexe 2.4*, 2014. 8, 10
- [Campbell J. and Viceira L.] Strategic Asset Allocation ? Portfolio Choice for Long term Investors. *Oxford University Press*, 2002. 6, 18, 38
- [Castiaux D. and Donéa M.P.] Pensions complémentaires : Aspects sociaux et fiscaux. *Editions des Chambres de Commerce et d'Industrie de Wallonie SA*, 2005. 70
- [Chagny O. and Dupont G.] Les réformes des systèmes de retrait en Europe. *Revue de l'OFCE* 78, Juillet 2001. 2
- [Cheang G.H.L. and Chiarella C.] A Modern View on Merton's Jump-Diffusion Model. *Quantitative Finance Research Center ISSN 1441-8010*, 2011. 40
- [Cont R. and Tankov P.] Calibration of jump-difusion option-pricing models : a robust non-parametric approach. *Centre de Mathématiques Appliquées. CNRS - Ecole Polytechnique F 91128 Palaiseau, France. 2nd version*, September 2002. 70
- [Cornish E. and Fisher R.] Moments and Cumulants in the Specification of the Distribution. *Revue de l'Institut International de Statistique*, Vol 5, pp. 307-320, 1937. 53
- [Dahl M.] Stochastic mortality in life insurance : market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance : Mathematics and Economics*, 2004. 114
- [De Somviele I. and Van Damme A.] Regard rétrospectif sur 10 ans de mise en oeuvre de la LPC. *Wolters Kluwer Belgium*, 2013 70
- [Deelstra G. Grasselli M. and Koehl PF] Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee. 2003 *Insurance : Mathematics and Economics* 33 (2003) 189–207. 7, 18

- [Denuit M. Charpentier A] Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome 1 : principes fondamentaux de théorie du risque? *Economica*, 2004. 47
- [Denuit M. Devolder P. and Goderniaux A.C.] Securitization of Longevity Risk : Pricing Survivor Bonds With Wang Transform in the Lee-Carter Framework. *Journal of Risk and Insurance* 2007. 115
- [Devolder P. Tassa H.] Solvency Measurement for Defined Benefits Pension Schemes. <http://hdl.handle.net/2078.1/174241>. Submitted.
- [Devolder P.] Solvency requirement for long term guarantee : risk measure versus probability of ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1, 199–214 , 2011. 12, 13
- [Devolder P.] Le Financement des Régimes de Retraite. *Collection Gestion*, Série : Politique générale, Finance et Marketing. 2005. 3
- [Dreyfuss M. L.] Les grands principes de Solvabilité 2. *Argus Editions* 2012. 5
- [EIOPA] Technical Findings on the Long-Term Guarantees Assessment. *EIOPA/13/296*. 2013. 11
- [Eling M. Schmeiser H. Schmit J. T.] Solvency II Process : Overview and Critical Analysis. *JEL Classification : G11, G22, G23, G31*. Risk Management and Insurance Review, Vol. 10, No. 1, pp. 69-85. 2007 5
- [Fenton L.F.] The sum of log-normal probability distributions in scattered transmission systems. *IRE Trans. Commun. Systems* 8 : 57-67 1960, 1960 115, 129, 133
- [Frank J. and Massey Jr.] The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 46, No. 253 (Mar., 1951), pp. 68-78. 75
- [Galen R.S Jon A.W.] Empirical Processes with Applications to Statistics. *Library of Congress Cataloging in Publication Data*, 2009. 75
- [Glossaires de l'OCDE] Les pensions privées : CLASSIFICATION ET GLOSSAIRE DE L'OCDE. *OCDE* 2005. 2
- [Grosen A. and Jorgensen P.] Life Insurance Liabilities at Market Value : An Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option framework. *Journal of Risk and Insurance*, 69(1) : 63–91, 2002.
- [Hainaut D. Devolder P.] Management of a Pension Fund Under Mortality and Financial Risks. *Insurance : Mathematics and Economics" - Vol. 41, no. 1, p. 134-155* , 2007. 83

- [Hainaut D. Devolder P.] Mortality modelling with Lévy processes. *Insurance : Mathematics and Economics* 2006, 2008. 115
- [Hakansson N.H.] Multi-period mean-variance analysis : Toward a general theory of portfolio choice. *Journal of Finance* 26 (4), 857–884. 1971. 6
- [Hardy M. and Wirch J.L.] The Iterated CTE : a Dynamic Risk Measure.. *North American Actuarial Journal*, 8 : 62–75, 2004. 47
- [He C Kennedy J.S. Coleman T.F. Forsyth P.A. Li Y. and Vetzal K.R.] Calibration and hedging under jump diffusion. *Review of Derivatives Research*, 2007, Volume 9, Number 1, Page 1. 70
- [Jarrow R. Yildirim Y.] Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives using an HJM Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* VOL.38,No.2,June 2003. 91
- [Jorion P.] On Jump Processes in the Foreign Exchange and in the Stock Markets *The Review of Financial Studies* (Winter 1988) 427-445. 40
- [Josa-Fombellida R. and Rincon-Zapatero J.P.] Optimal risk management in defined stochastic pension funds. *Insurance : Mathematics and Economics*, 34, 489–503, 2004. 39
- [Kaushik I.A.] Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time. *The Journal of Finance* Vol. 48, No. 5 (Dec., 1993), pp. 1833-1863 . 40
- [Kedma L.E. Chun Kai H. Knowledge C.] Value-at-Risk for the USD/ZAR exchange rate : The Variance-Gamma model. *SAJEMS NS 18 (2015) No 4 :551-566*. 76
- [Kritzman's M.] What Practitioners Need to Know . . . About Time Diversification. *Financial Analysts Journal*, January/February : 14–18. volume 50, issue 1. 1994. 6, 18
- [Kruse S.] On the Pricing of Inflation-Indexed Caps. *Karlsruhe University of Applied Sciences*, April 22, 2009. 91
- [Kyprianou A.E.] Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. *Springer*, 2006. 40
- [Laurent C. and Michèle L.] Les systèmes de retraite en Europe à l'épreuve des changements démographiques. *France, portrait social* 2003/2004. 1
- [Lee R.D and Carter L] Modelling and forecasting the time series of US mortality *Journal of the American Statistical Association* 87,659-671, 1992. 119

- [Lee W.Y.] Diversification and Time : Do Investment Horizons matter? *Journal of Portfolio Management*, 4 : 60-69, 1990. 6, 18, 38
- [Madan D.B. Carr P. Chang E.C.] The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review* 2 : 79-105, 1998. 51, 104
- [Madan D.B. Milne E.] Option pricing with VG martingale components. *Mathematical Finance vol 1, No 4*, 39-55, 1991. 104
- [Madan D.B. Seneta E.] The Variance Gamma (V.G) Model for Share Market Returns. *The Journal of Business*, Vol.63, No.4, pp. 511-524, 1990. 40
- [Maillard D.] A User's Guide to the Cornish, 2012. *Working paper*. 53
- [Markowitz H.] L'histoire de la finance moderne. *Journal de la société Statistique de Paris. Tome 133 N4*. 1999. 6
- [Markowitz H.] Portfolio selection. *Journal of Finance* 7 (1), 77-91. 1952. 6
- [Merton R. C.] Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1 (Spring, 1973).
- [Merton R.C.] Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3-125-144, 1976. 39, 40
- [Merton R.C.] Lifetime portfolio selection under uncertainty : The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics* 51 (3), 247-257. 1969. 6
- [Merton R.C.] Optimal portfolio and consumption rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory* 3 (4), 373-413. 1971. 6
- [Ngwira B. and Gerrard R.] Stochastic pension fund control in the presence of Poisson jumps. *Insurance : Mathematics and Economics*, 40, 283-292, 2007. 39
- [OCDE] Age de la retraite et espérance de vie, 1950-2050. *Panorama des pensions 2011 : Les systèmes de retraites dans les pays de l'OCDE et du G20 Editions OCDE*. 1, 9, 114
- [OCDE] Éditorial et Résumé de PANORAMA DES PENSIONS 2009. *OCDE 2009*. 3
- [Pflug G. and Romisch W.] Modeling, Measuring and Managing Risk. *World Scientific*, 2007.
- [Pirinen P.] STATISTICAL POWER SUM ANALYSIS FOR NONIDENTICALLY DISTRIBUTED CORRELATED LOGNORMAL SIGNALS. *Telecommunication Laboratory and Centre for Wireless Communications, University of Oulu, FINLAND*, 2003. 133

- [Rafal M.L.] The Black-Scholes vs. the Merton jump-diffusion model applied to selected WIG20 companies in the year 2011. *Warsaw School of Economics*, <http://coin.wne.uw.edu.pl/wiem/papers/2012/Lochowski.pdf>. 76
- [Raible S.] Lévy Process in Finance : theory, numerics, and empirical facts. *Ph. D. thesis, University of Freiburg* 2000. 40
- [Rockafellar R.T and Uryasev S.] Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26 : 1443–1471. doi :10.1016/S0378-4266(02)00271-6, 2002. 47
- [Samuel P.] Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics* 1969, vol. 51, issue 3, pages 239–46. 6, 8, 18
- [Samuelson P.] The Long Term Case for Equities. *Journal of Portfolio Management*, 21(1) : 15–24, 1994. 88
- [Samuelson P.] Risk and uncertainty : A fallacy of Large Numbers. *Scientia*, 98 : 108–113, 1963. 88
- [Sandstrom A.] Solvency, Models, Assessment and Regulation. *Chapman & Hall/CRC* 2006, Taylor & Francis Group. 5
- [Sato K.] Lévy Process and Infinitely Divisible Distributions. *Cambridge University Press*, ISBN 0-521-55302-4 40
- [Schoutens W.] Lévy Processes in Finance Pricing Financial Derivatives . *Wiley*, ISBN 0-470-85156-2, 2005. 40
- [Schrager D. F.] Affine stochastic mortality. *Insurance : Mathematics and Economics* 2006. 114
- [Schrager D. F.] A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty : Theory and Calibration. *Insurance : Mathematics and Economics* 2006. 114
- [Siegel J.J.] Stocks for the long run The Definitive Guide to Financial Market Returns and Long-Term Investment Strategies. 1998 *McGraw-Hill*. 7
- [Sundaresan S. and Zapatero F.] Valuation, optimal asset allocation and retirement incentives of pension plans. 1997 *The Review of Financial Studies* 10 (3), 631–660. 8
- [Tankov P. Voltchkova E.] Jump-diffusion models : a practitioner's guide. *Banque et Marchés*, vol. 99, 2009. 70

- [Thorley S.] The Time Diversification Controversy. *Financial Analyst Journal*, 51(3) : 18–22, 1995. 6, 8, 18, 38
- [Traute M.] Beveridge Not Bismarck! European Lessons for Men's and Women's Pensions in Germany. *Friedrich Ebert Stiftung February 2014*. 3
- [Van Damme A. and De Somviele I.] Externalisatie van het aanvullend pensioen : hoe beschermd zijn uw. 2014 *pensioenrechten in tijden van crisis ?*, Or., 2009, n° 7, 173. 10
- [Vigna E. and Luciano E.] Mortality risk via affine stochastic intensities : calibration and empirical relevance. *Belgian Actuarial Bulletin*, 8,5-16, 2008. 114, 115, 119, 133
- [Wirch J.L. and Hardy M.R.] A synthesis of risk measures for capital adequacy. *European Actuarial Journal*, 25 : 337–347, 1999.

