

CHAPITRE 5

Structure de $L_{F(M;2)}$ pour M polygène

Désignons par M une variété compacte, sans bord, simplement connexe et polygène. D'après la Proposition 4.5, l'algèbre de Lie $L_{F(M;2)}$ détermine une extension de $\mathbb{L}(R)$ par $L_{M \times M}$:

$$(5.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{L}(R) \longrightarrow L_{F(M;2)} \xrightarrow{i_{2*}} L_M \oplus L_M \longrightarrow 0.$$

Ce chapitre est consacré à l'étude de cette extension.

La première section établit une classification des extensions d'une algèbre de Lie L' par une algèbre de Lie L'' .

Dans la deuxième section, nous identifions une relation de $L_{F(M;2)}$, décrivant l'influence de l'involution de $F(M;2)$, sur les crochets avec le générateur $\tilde{t}$, défini en 4.2.

La troisième section est consacrée aux variétés coformelles. Dans ce cas particulier, nous montrons que l'extension 5.1 est scindée. L'existence d'une section d'algèbres de Lie de i_{2*} vient de la graduation définie sur le modèle de $F(M;2)$, à partir de la graduation naturelle induite par la différentielle du modèle minimal de M . Nous en déduisons la structure complète d'algèbre de Lie de $L_{F(M;2)}$.

Les deux dernières sections illustrent les résultats précédents. Nous déterminons la structure d'algèbre de Lie d'homotopie des configurations de deux points dans les sommes connexes de produits de sphères impaires. Nous donnons aussi des exemples de variétés pour lesquelles la suite exacte 5.1 n'est pas scindée.

5.1. EXTENSIONS D'ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES

Dans cette section, nous nous intéressons à la question suivante : *Quelles sont les extensions possibles de L' par L'' , pour un couple donné d'algèbres de Lie graduées (L', L'') ?* Nous analysons aussi cette situation dans le cas particulier où L' est une algèbre de Lie libre.

Soit

$$(5.2) \quad 0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \xrightarrow{p} L'' \longrightarrow 0$$

une extension de L' par L'' . Nous désignerons par $Der(L')$ l'algèbre de Lie des dérivations de L' , et par $Din(L')$ l'idéal des dérivations intérieures de $Der(L')$. Pour rappel, une dérivation intérieure de L' est une dérivation de la forme $ad_{x'} : L' \rightarrow L' : y' \mapsto [x', y']$, pour un certain $x' \in L'$. L'extension 5.2 détermine un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\theta : L \rightarrow Der(L') : x \mapsto ad_x.$$

Cet homomorphisme induit un homomorphisme

$$\psi : L'' \rightarrow Der(L')/Din(L')$$

Proposition 5.1. L'homomorphisme ψ ne dépend que de la classe d'équivalence de l'extension et est appelé classe de conjugaison de (L', L'') . $\square$

Prenons à présent une section linéaire $s : L'' \rightarrow L$ de p . Celle-ci induit une application

$$\varphi : L'' \rightarrow Der(L') : x'' \mapsto ad_{s(x'')},$$

telle que pour chaque $x'' \in L''$, $[\varphi(x'')] = \psi(x'')$. L'application φ n'est pas nécessairement un homomorphisme d'algèbres de Lie. L'application $f : L'' \times L'' \rightarrow L'$ définie par

$$f(x'', y'') = [s(x''), s(y'')] - s[x'', y'']$$

est bilinéaire et antisymétrique. Elle mesure à quel point φ diffère d'un morphisme d'algèbres de Lie de la manière suivante :

Pour tous les $x'', y'' \in L''$ on a

$$(5.3) \quad [\varphi(x''), \varphi(y'')] = \varphi([x'', y'']) + ad_{f(x'', y'')}.$$

D'autre part, l'identité de Jacobi sur L'' implique que pour tous les $x'', y'', z'' \in L''$,

$$(5.4) \quad \begin{aligned} & (-1)^{|x''||z''|} f(x'', [y'', z'']) + (-1)^{|z''||y''|} f(z'', [x'', y'']) \\ & + (-1)^{|y''||x''|} f(y'', [z'', x'']) + (-1)^{|x''||z''|} \varphi(x'')(f(y'', z'')) \\ & + (-1)^{|z''||y''|} \varphi(z'')(f(x'', y'')) + (-1)^{|y''||x''|} \varphi(y'')(f(z'', x'')) = 0. \end{aligned}$$

Cette identité indique que f est un 2-cocycle : f est un représentant d'une classe $[f] \in H^2(L'', L')$. En particulier, si la section s est de Lie, alors $f = 0$.

Proposition 5.2. Soient L'' et L' deux algèbres de Lie. Soient $\varphi : L'' \rightarrow Der(L')$ une application avec $\varphi(0) = 0$, et $f : L'' \times L'' \rightarrow L'$, une

application bilinéaire et antisymétrique, vérifiant 5.3 et 5.4. Alors l'espace vectoriel $L' \times L''$, muni du crochet défini par

$$[(x'_1, y_1''), (x'_2, y_2'')] = ([x'_1, x'_2] + \varphi(y_1'')(x'_2) - (-1)^{|x'_1||x'_2|}\varphi(y_2'')(x'_1) + f(y_1'', y_2''), [y_1'', y_2''])$$

est une algèbre de Lie. De plus, cette algèbre de Lie graduée, notée $L_0(L'', L', \varphi, f)$, définit une extension $0 \rightarrow L' \rightarrow L_0(L'', L', \varphi, f) \rightarrow L'' \rightarrow 0$ de L' par L'' . $\square$

Remarque 5.3. Soient f et f' deux applications bilinéaires antisymétriques vérifiant 5.3, alors pour tout couple $(x'', y'') \in L'' \times L''$, $(f - f')(x'', y'') \in c(L')$, le centre de L' .

Proposition 5.4. Soit (L', L'') un couple d'algèbres de Lie, muni d'une classe de conjugaison ψ . Soit $\varphi : L'' \rightarrow \text{Der}(L')$ une application telle que pour tout $x'' \in L''$, $[\varphi(x'')] = \psi(x'')$ et $\varphi(0) = 0$. Toute extension $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ de classe de conjugaison ψ , est équivalente à l'extension $0 \rightarrow L' \rightarrow L_0(L'', L', \varphi, f) \rightarrow L'' \rightarrow 0$ pour un certain f .

Preuve Soit

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\xi} L \xrightleftharpoons[s]{\sigma} L'' \longrightarrow 0$$

une extension de classe ψ , munie d'une section linéaire s de σ . Par hypothèse, pour chaque $x'' \in L''$, $[ad_{s(x'')}] = \psi(x'') = [\varphi(x'')]$. Il existe donc pour chaque $x'' \in L''$, un élément $z' \in L'$, tel que pour chaque $y' \in L'$, $[s(x''), y'] - \varphi(x'')(y') = [z', y']$. On peut donc supposer que la section s est telle que $ad_{s(x'')} = \varphi(x'')$, pour chaque $x'' \in L''$.

Remarquons ensuite que tout élément x de L s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de L' et d'un élément de $s(L'')$. En effet, pour tout $x \in L$, on a $x = x - s(\sigma(x)) + s(\sigma(x))$. On en déduit un homomorphisme d'algèbres de Lie $h : L \rightarrow L_0(L'', L', \varphi, f) : x \mapsto (x - s(\sigma(x)), \sigma(x))$, f désignant l'application définie par $f(x'', y'') = [s(x''), s(y'')] - s[x'', y'']$. L'homomorphisme h est une équivalence d'extensions. $\square$

Remarquons que si le centre $c(L')$ de l'algèbre de Lie L' est nul, alors l'ensemble des classes de conjugaison (L', L'', ψ) est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalences d'extensions. En particulier, le produit semidirect de L' et L'' , correspond au cas où ψ admet un représentant de Lie, c'est à dire au cas $f = 0$. Nous en déduisons le

Corollaire 5.5. L'ensemble des classes d'équivalences d'extensions de L_{F_2} par $L_{M \times M}$ est en bijection avec l'ensemble des homomorphismes $\psi : L_{M \times M} \rightarrow \text{Der}(L_{F_2})/\text{Din}(L_{F_2})$.

5.2. LA RELATION $[\tilde{t}, a] + [\tilde{t}, a'] = 0$

Dans cette section, nous exhibons une relation fondamentale de l'algèbre de Lie $L_{F(M;2)}$. Cette relation indique de quelle manière l'involution de $F(M;2)$ agit sur $L_{F(M;2)}$.

Pour tout élément $a \in \pi_*\Omega M \otimes \mathbb{Q}$, on note a et a' les éléments correspondants de $\pi_*\Omega(M \times \{m_0\}) \otimes \mathbb{Q}$ et $\pi_*\Omega(\{m_0\} \times M) \otimes \mathbb{Q}$. Notons encore $\tilde{t}$ le générateur de $\pi_{n-2}(\Omega F_2) \otimes \mathbb{Q}$, défini en 4.2. Le but de cette section est d'établir la

Proposition 5.6. Il existe une section linéaire $\sigma : L_{M \times M} \rightarrow L_{F(M;2)}$ de $i_{2*} : L_{F(M;2)} \rightarrow L_{M \times M}$, telle que pour chaque $a \in \pi_*\Omega M \otimes \mathbb{Q}$, on ait $[\tilde{t}, \sigma(a)] = -[\tilde{t}, \sigma(a')]$.

Preuve

Notons

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} \tau_S M \xrightarrow{p} M$$

le fibré tangent en sphère de la variété M , et donnons-nous un champ de vecteurs tangents $X : M \rightarrow T_M$ n'ayant qu'un seul point singulier m_0 . On définit

$$\rho : M \setminus m_0 \rightarrow \tau_S M : m \mapsto (m, \frac{X(m)}{|X(m)|})$$

et

$$\varphi : \tau_S M \rightarrow F(M;2) : (m, v) \mapsto (m, \exp_m(v)).$$

Lorsque M est de dimension paire, le modèle du fibré en sphère

$$S^{n-1} \rightarrow \tau_S M \rightarrow M$$

est donné par

$$(\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda e, D) \xrightarrow{\pi} (\Lambda e, 0)$$

où $D(e) = \chi(M) \cdot \omega$. En particulier, la partie linéaire $Q(\pi)$ de π est surjective, ce qui implique par dualité que $\pi_*(i) \otimes \mathbb{Q}$ est injective. Quant aux crochets $[\pi_*\Omega S^{n-1} \otimes \mathbb{Q}, \pi_*\Omega M \otimes \mathbb{Q}]$, ils sont nuls.

Dans le cas d'une variété de dimension impaire, le modèle du fibré en sphère a la forme suivante :

$$(\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda(e, v), D) \xrightarrow{\pi} (\Lambda(e, v), \overline{D})$$

avec $\overline{D}(v) = e^2$. Comme $\chi(M) = 0$, l'application p admet une section. Il s'ensuit que $D(e) = 0$ et $D(v) = e^2 + e\alpha$ pour un certain $\alpha \in \Lambda V$. Par conséquent, α est un cocycle de degré $n-1$, et donc un cobord. En conséquence, α est décomposable et $[\pi_*\Omega S^{n-1} \otimes \mathbb{Q}, \pi_*\Omega M \otimes \mathbb{Q}] = 0$.

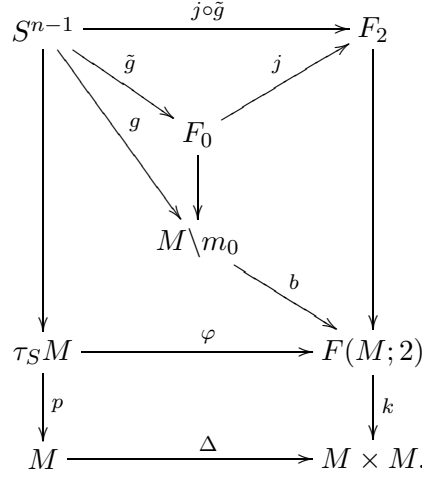


FIG. 1

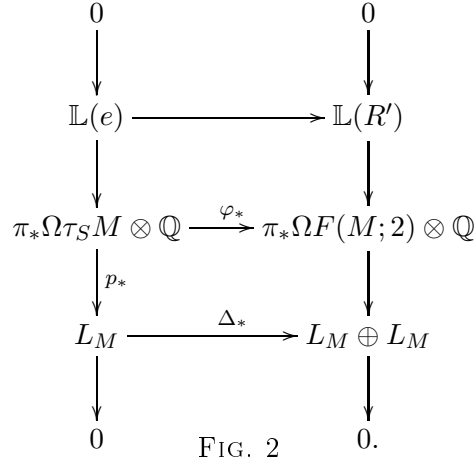


FIG. 2

Pour suivre, remarquons que le diagramme de la figure 1, commute à homotopie près. Nous en déduisons la commutativité du diagramme homotopique représenté à la figure 2. Choisissons à présent une section linéaire σ_1 de p_* telle que pour chaque $a \in L_M$, $[e, \sigma_1(a)] = 0$. Complétons la suite libre $\{a + a'\}_{a \in L_M}$ en une base B de $L_M \oplus L_M$. Définissons enfin une section linéaire $\sigma : L_M \oplus L_M \rightarrow L_{F(M;2)}$ telle que $\sigma(a + a') = \varphi_*(\sigma_1(a))$ pour tous les $a + a' \in B$. Alors, $0 = \varphi_*([e, \sigma_1(a)]) = [\tilde{t}, \sigma(a) + \sigma(a')]$ pour chaque $a \in L_M$. $\square$

Expliquons ci-dessous comment nous retrouvons la relation $[a + a', \tilde{t}] = 0 \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R)$ à partir des calculs effectués dans la section 4.5.

D'après le Théorème 1.21, l'algèbre de Lie graduée $\pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie graduée L_2 définie par $sL_2 = \text{Hom}(V \oplus V' \oplus W, \mathbb{Q})$.

Premièrement, complétons la suite libre $\{t\} \cup \{v_a, v'_a, t_a\}_{a \in A} \cup \{t_i\}_{i \in I}$ définie en 4.5, en une base

$$b_V = \{v_a, v'_a, t, t_a\}_{a \in A} \cup \{t_i\}_{i \in I} \cup \{w_b\}_{b \in B}$$

de $V \oplus V' \oplus W$. Ensuite, notons

$$b_2 = \{a, a', \check{t}, \check{t}_a, \check{t}_i, \check{w}_b\}$$

la base de $L_{F(M;2)}$ dont la suspension est la base duale de b_V .

Nous avons construit le modèle minimal de $F(M; 2)$ de telle manière que pour chaque $a \in A$,

$$d(t_a) = tv_a - tv'_a + \sum_{b \in A} z_b^a t_b + \sum_{k \in I} z_k^a t_k + \xi_a.$$

De plus, t_a est le seul élément de $W_0 = T$ dont la différentielle fait apparaître les termes tv_a et tv'_a . Par conséquent, les crochets $[\check{t}, \check{v}_a]$ et $[\check{t}, \check{v}'_a]$ s'écrivent de manière unique dans la base b_{L_2} comme

$$[\check{t}, \check{v}_a] = \check{t}_a + \sum_{b \in B} c_b \check{w}_b$$

$$[\check{t}, \check{v}'_a] = -\check{t}_a + \sum_{b \in B} c'_b \check{w}_b$$

pour certains $c_b, c'_b \in \mathbb{Q}$. Ceci redonne partiellement la Proposition 5.6 : Pour chaque $a \in L_M$, on a

$$(5.5) \quad [\check{t}, a] = -[\check{t}, a'] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R).$$

Voici une propriété supplémentaire de $L_{F(M;2)}$ qui se déduit aisément de cette relation.

Proposition 5.7. Pour tous les $a_1, \dots, a_{r+1} \in L_M$, on a

$$(1) \quad [a'_{r+1}, [a_1 \cdots a_r, \check{t}]] = -(-1)^{|a_{r+1}|(\sum_{i=1}^r |a_i|)} [a_1 \cdots a_{r+1}, \check{t}] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R),$$

$$(2) \quad [a'_1 \cdots a'_{r+1}, \check{t}] = (-1)^{r+1} \epsilon_{r+1} [a_{r+1} \cdots a_1, \check{t}] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R), \text{ où}$$

$$\epsilon_{r+1} = (-1)^{\sum_{i=2}^{r+1} |a_i|(\sum_{j=1}^{i-1} |a_j|)}.$$

Preuve

Pour $a, b \in L_M$, on a $[a, b'] \in \mathbb{L}(R)$. Nous allons prouver les deux points

par récurrence sur r .

1. L'identité de Jacobi implique que pour tout α, β, γ ,

$$[\alpha, [\beta, \gamma]] = [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{|\alpha||\beta|}[\beta, [\alpha, \gamma]].$$

Par l'égalité 5.5, on en déduit

$$[a'_2, [a_1, \tilde{t}]] = -(-1)^{|\tilde{t}||a_1|}(-1)^{|a_1|(|\tilde{t}|+|a_2|)}[a_1, [a_2, \tilde{t}]] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R).$$

Supposons ensuite avoir l'égalité pour $r-1$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} [a'_{r+1}, [a_1 \cdots a_r, \tilde{t}]] &= [a'_{r+1}, [a_1, [a_2 \cdots a_r, \tilde{t}]]] \text{ (par définition)} \\ &= (-1)^{|a'_{r+1}||a_1|}[a_1, [a'_{r+1}, [a_2 \cdots a_r, \tilde{t}]]] \\ &= -(-1)^{|a_{r+1}|(\sum_{i=1}^r |a_i|)}[a_1, [a_2 \cdots a_{r+1}, \tilde{t}]] \\ &= -(-1)^{|a_{r+1}|(\sum_{i=1}^r |a_i|)}[a_1 \cdots a_{r+1}, \tilde{t}], \end{aligned}$$

toutes ces égalités étant valables uniquement $\bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R)$.

2. On déduit tout d'abord de 5.5 que

$$[a'_2, [a'_1, \tilde{t}]] = -[a'_2, [a_1, \tilde{t}]] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R),$$

et le point 1 permet donc d'affirmer que

$$[a'_2, [a'_1, \tilde{t}]] = (-1)^{|a_1||a_2|}[a_1, [a_2, \tilde{t}]] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R).$$

Supposons ensuite que le point 2 soit vrai pour $r-1$. Dès lors, on peut écrire que

$$\begin{aligned} [a'_1 \cdots a'_{r+1}, \tilde{t}] &= [a'_1, [a'_2 \cdots a'_{r+1}, \tilde{t}]] \\ &= (-1)^r \epsilon_r [a'_1, [a_{r+1} \cdots a_2, \tilde{t}]] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R), \\ &= (-1)^{r+1} \epsilon_{r+1} [a_{r+1} \cdots a_1, \tilde{t}] \bmod \mathbb{L}^{\geq 2}(R), \end{aligned}$$

et la preuve est complète. $\square$

5.3. VARIÉTÉS COFORMELLES

Les variétés polygènes, coformelles, font l'objet de résultats particuliers dans l'étude de $L_{F(M;2)}$.

Proposition 5.8. Soit M une variété polygène, coformelle de catégorie rationnelle $r \geq 3$. L'homomorphisme d'algèbres de Lie graduées $i_{2*} : L_{F(M;2)} \rightarrow L_{M \times M}$ admet une section d'algèbres de Lie graduées.

Preuve

Remarquons tout d'abord que lors de la construction du modèle de $M^{[0,1]}$, $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D)$, on peut choisir D de telle manière qu'en posant $\overline{V} = \overline{V}^{(0)}$, on étende la bigraduation de $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ à $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, d)$.

Penchons-nous ensuite sur le modèle de Lambrechts-Stanley défini dans la section 4.1. On forme le cône $C(\varphi)$ sur un morphisme de $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ -modules $\varphi : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$, de degré usuel n , et qui commute aux différentielles. C'est enfin l'algèbre quotient

$$C(\varphi)/I \oplus sK \cong \Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes (Q \oplus T)/I \oplus sK$$

qui est un modèle commutatif de $F(M; 2)$. Dans cette adgc, la différentielle et le produit sont définis de telle manière qu'en posant $T = T^{(r-1)}$, on obtient une algèbre différentielle bigraduée et un morphisme d'algèbres différentielles bigraduées

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d) \rightarrow C(\varphi)/I \oplus sK.$$

Le modèle minimal bigradué $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ de $F(M; 2)$ s'obtient alors en construisant un modèle minimal relatif du morphisme $\theta : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d) \rightarrow m_{F(M;2)}$. On constate que le modèle minimal bigradué de F_2 , $(\Lambda W; \overline{D})$ est tel que $W = \bigoplus_{i \geq 1} W^{(ri-2i+1)}$. Or, par hypothèse, $r \geq 3$. Ceci implique que $L_{F_2} = \bigoplus_{p \geq 2} L_{F_2(p)}$.

En conséquence, en choisissant une section linéaire

$$\sigma : L_M \oplus L_M \rightarrow \pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q},$$

de $i_{2*} : L_M \oplus L_M \rightarrow L_{F(M;2)}$ qui respecte le nouveau degré, on obtient une section d'algèbres de Lie. De plus, cette section satisfait l'égalité $[\tilde{t}, \sigma(a) + \sigma(a')] = 0$, pour chaque $a \in L_M$. $\square$

Nous déduisons de cette proposition que si la variété M est coformelle de catégorie rationnelle $r \geq 3$, alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{L}(R) \rightarrow L_{F(M;2)} \rightarrow L_M \oplus L_M \rightarrow 0$$

est scindée par une section σ . Par conséquent, l'algèbre de Lie graduée $L_{F(M;2)}$ est isomorphe au produit semi-direct de $\mathbb{L}(R)$ avec $L_M \oplus L_M$:

$$L_{F(M;2)} \cong (\mathbb{L}(R) \times (L_M \oplus L_M), [\cdot, \cdot]_\sigma).$$

Nous sommes en mesure de donner une présentation de $L_{F(M;2)}$.

Lemme 5.9. Si la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(R) \xrightarrow{i} L_{M \setminus m_0} \xrightarrow{p} L_M \longrightarrow 0$$

admet une section d'algèbre de Lie $\sigma : L_M \rightarrow L_{M \setminus m_0}$, alors l'homomorphisme

$$\sigma \amalg i : L_M \amalg \mathbb{L}(u) \rightarrow L_{M \setminus m_0}$$

est un isomorphisme.

Preuve

D'après le Théorème 4.3, il existe une certaine filtration de $L_{M \setminus m_0}$ dont l'algèbre de Lie graduée associée est $L_M \amalg \mathbb{L}(u)$. Montrons que $\sigma \amalg i$ est un homomorphisme surjectif. Comme les deux algèbres de Lie sont des algèbres de Lie graduées de même série de Poincaré, ceci entraîne que $\sigma \amalg i$ est un isomorphisme.

Soit $x \in L_{M \setminus m_0}$. Si $x \in R$, x est de la forme $[\sigma(a_1), [\sigma(a_2), [\dots [\sigma(a_n), u] \dots]]$ et appartient à $L_M \amalg \mathbb{L}(u)$. Il en est de même pour tous les éléments de $\mathbb{L}(R)$, car ils se décomposent en sommes de crochets d'éléments de R de la forme

$$[\sigma(a_1), [\sigma(a_2), [\dots, [\sigma(a_n), u] \dots]] = \sigma \amalg i([a_1, [a_2, [\dots, [a_n, u], \dots]]).$$

En général, $x \in L_{M \setminus m_0}$, et $p(\sigma(p(x)) - x) = 0$. Donc $x = \sigma(p(x)) + \xi$ pour un certain $\xi \in \mathbb{L}(R)$. $\square$

Proposition 5.10. Soit M une variété polygène. Si l'homomorphisme i_{2*} admet une section d'algèbres de Lie, alors il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$L_{F(M;2)} \cong \frac{(L_M \oplus L_M) \amalg \mathbb{L}(\tilde{t})}{I}$$

où I est l'idéal engendré par les éléments $[\tilde{t}, a + a'], a \in L_M$.

Preuve

Par hypothèse, il existe une section d'algèbres de Lie $\sigma : L_M \oplus L_M \rightarrow L_{F(M;2)}$. Grâce au Lemme 4.7, nous en déduisons l'existence d'une section $\sigma' : L_M \rightarrow L_{M \setminus m_0}$ de i_{0*} . En outre, la propriété universelle du produit libre implique l'existence d'un homomorphisme surjectif

$$i \amalg \sigma : \mathbb{L}(\tilde{t}) \amalg (L_M \oplus L_M) \rightarrow L_{F(M;2)}.$$

D'autre part, pour chaque $a \in L_M$, on a $[\tilde{t}, \sigma(a) + \sigma(a')] = 0$.

L'homomorphisme $i \amalg \sigma$ induit donc un homomorphisme surjectif

$$\overline{i \amalg \sigma} : \frac{\mathbb{L}(\tilde{t}) \amalg (L_M \oplus L_M)}{I} \rightarrow L_{F(M;2)}.$$

Il reste à prouver que $\overline{i \amalg \sigma}$ est un isomorphisme.

Dans ce but, considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L_{M \setminus m_0} & \longrightarrow & L_{F(M;2)} & \xrightarrow{p} & L_{M'} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow i \Pi \sigma' & & \uparrow \overline{i \Pi \sigma} & & \uparrow Id \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{L}(u) \amalg L_M & \xrightarrow{i} & \frac{\mathbb{L}(\tilde{t}) \amalg (L_M \oplus L_{M'})}{I} & \xrightarrow{p'} & L_{M'} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Nous avons observé en 4.1 que la suite supérieure était exacte. D'après le Lemme 5.9, l'homomorphisme $i \Pi \sigma'$ est un isomorphisme. Pour compléter la preuve, il suffit donc de prouver que la suite inférieure est exacte elle aussi. Ceci montrera que $\overline{i \Pi \sigma}$ est un isomorphisme.

Notons J l'idéal de $L = \frac{\mathbb{L}(\tilde{t}) \amalg (L_M \oplus L_{M'})}{I}$, engendré par $\tilde{t} : \frac{L}{J} = L_M \oplus L_{M'}$, $\frac{J}{J^2} \cong \frac{\cup (L_M \oplus L_{M'}) \otimes \tilde{t}}{I} \cong \cup L_M \otimes \tilde{t} \subset \text{Im}(i)$ et $L \cong \bigoplus_{q=0}^{\infty} J^q / J^{q+1}$.

Par la commutativité du diagramme, i est injectif. D'autre part p' est clairement surjectif. Pour prouver que $\text{Im}(i) = \text{Ker}(p')$, il faut prouver que l'idéal J est contenu dans l'image de i . On le fait par récurrence sur le degré.

Soit $x \in J$. Trois cas sont à considérer :

- (a) $x = [\tilde{t}, y]$. Si $y \in L_M$, $x \in \text{Im}(i)$ par définition de $\text{Im}(i)$. Si $y \in L'_{M'}$, $[\tilde{t}, y] = -[\tilde{t}, z]$ où $z \in L_M$ est l'élément correspondant à y et de nouveau $[\tilde{t}, y] \in \text{Im}(i)$. Finalement si $y \in J$, alors par récurrence $y \in \text{Im}(i)$ et il en est alors de même pour x .
- (b) Si $x = [a, y]$, $a \in L_M$, alors $y \in J$ et donc $y \in L_M \amalg \mathbb{L}(\tilde{t})$. Il en est alors de même pour x .
- (c) Si $x = [a', y]$, $a' \in L_M$, alors $y \in J$ et par récurrence $y \in L_M \amalg \mathbb{L}(\tilde{t}) = \mathbb{L}(\cup L_M \otimes t')$. L'élément y est donc une somme de crochets

$$[u_r, [u_{r-1}[\dots [u_2, u_1] \dots]]$$

avec

$$u_i = [a_{n_i}, [\dots [a_1, \tilde{t}] \dots]],$$

pour $a_i \in L_M$. Dans ce cas,

$$[a', [u_r, [u_{r-1}[\dots [u_2, u_1] \dots]]] = \pm [[a', u_r], [u_{r-1}, \dots]] \pm [u_r, [a', [\dots]]].$$

Maintenant, au vu de l'idéal I , $[a', u_r] \in \text{Im}(i)$ et par récurrence, on trouve que $[a', [\dots]] \in \text{Im}(i)$. Il en résulte que $x \in \text{Im}(i)$. $\square$

Corollaire 5.11. Soit M une variété polygène, coformelle de catégorie rationnelle $r \geq 3$. L'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de l'espace des configurations de deux points de M a la forme suivante :

$$L_{F(M;2)} \cong \frac{(L_M \oplus L_M) \amalg \mathbb{L}(\tilde{t})}{I}$$

où I est l'idéal engendré par les éléments $[\tilde{t}, a + a'], a \in L_M$.

5.4. SOMMES CONNEXES DE PRODUITS DE SPHÈRES

Soit X une somme connexe de produits de sphères impaires

$$X = \#_{i=1}^r (S^{n_i} \times S^{m_i}).$$

Notons $N = n_i + m_i$. L'algèbre de cohomologie de X est donnée par

$$H^*(X; \mathbb{Q}) = \frac{\Lambda(x_i, y_i)}{(x_1 y_1 = \dots = x_r y_r)}$$

avec $x_i = [S^{n_i}]$ et $y_i = [S^{m_i}]$.

La classe diagonale Δ est donnée par la formule suivante

$$\Delta = x_1 y_1 + x'_1 y'_1 - \sum_{i=1}^r x_i y'_i + \sum_{i=1}^r y_i x'_i,$$

dans laquelle $x_i = x_i \otimes 1$ et $x'_i = 1 \otimes x_i$.

Par abus de notation, les cocycles indécomposables du modèle minimal de l'espace X , représentant les classes de cohomologie x_i et y_i , seront notés x_i et y_i . Notons encore $a_i \in \pi_{n_i-1} \Omega X \otimes \mathbb{Q}$ et $b_i \in \pi_{m_i-1} \Omega X \otimes \mathbb{Q}$ les éléments tels que

$$\begin{aligned} \langle x_i, \Sigma_{n_j-1}(a_j) \rangle &= \delta_{ij}, \\ \langle x_i, \Sigma_{m_j-1}(b_j) \rangle &= 0, \\ \langle y_i, \Sigma_{n_j-1}(a_j) \rangle &= 0, \\ \langle y_i, \Sigma_{m_j-1}(b_j) \rangle &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Théorème 5.12. L'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle

$$\pi_* \Omega F(X; 2) \otimes \mathbb{Q}$$

est isomorphe au quotient

$$\frac{\mathbb{L}(a_i, b_j, a'_i, b'_j)}{I}$$

dans lequel I désigne l'idéal engendré par les relations

$$(5.6) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^r [a_i, b_i] = \sum_{i=1}^r [a'_i, b'_i] = -[a_1, b'_1] = \dots = -[a_r, b'_r], \\ \sum_{i=1}^r [a_i, b_i] = [b_1, a'_1] = \dots = [b_r, a'_r], \\ [a_i, b'_j] = [b_i, a'_j] = 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Preuve

Commençons par déterminer l'algèbre de Lie graduée $\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}$. La variété privée d'un point $X \setminus x_0$, est un bouquet de sphères et $\pi_* \Omega(X \setminus x_0) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{L}(a_i, b_j)$. Nous désignerons par $\mathbb{L}(a'_i, b'_j)$ une copie de cette algèbre de Lie graduée. Pour obtenir les relations $x_1 y_1 = \dots = x_r y_r$, le modèle

minimal de X doit contenir des indécomposables $v_i, 1 \leq i \leq r-1$, avec $d(v_i) = x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}$. Les autres générateurs ne font pas intervenir les produits $x_i y_i$. Il s'ensuit que la relation $\sum_{i=1}^r [a_i, b_i] = 0$ est satisfaite dans $\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}$. En effet, pour tout générateur u , on a $\langle u, s \sum_{i=1}^r [a_i, b_i] \rangle = 0$, car $\sum_{i=1}^r \langle d(u), s a_i, s b_i \rangle = 0$. En conséquence, on trouve

$$\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} = \frac{\mathbb{L}(a_i, b_j)}{(\sum_{i=1}^r [a_i, b_i])}.$$

Montrons ensuite que les relations 5.6 sont vraies dans $\pi_* \Omega F(X; 2)$. Il suffit pour cela de voir que pour tout élément u de la forme $\sum_{i=1}^r [a_i, b_i] - \sum_{i=1}^r [a'_i, b'_i]$, $\sum_{i=1}^r [a_i, b_i] + [a_s, b'_s]$, $\sum_{i=1}^r [a_i, b_i] - [b_s, a'_s]$, $[a_s, b'_t]$ ou $[b_s, a'_t]$, $s \neq t$, et pour tout z indécomposable du modèle minimal $(\Lambda W, d)$ de $F(X; 2)$ de degré $N-1$, on a $\langle z, su \rangle = 0$.

Notons $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal de X et $(\Lambda V', d)$ une copie de cette adgc, alors en degré $N-1$, on a $W^{N-1} = V^{N-1} \oplus (V')^{N-1} \oplus \mathbb{Q} \cdot t$, avec $dt = \Delta$. L'égalité $\langle z, su \rangle = 0$ est immédiate lorsque $z \in V \oplus V'$. Considérons le cas $z = t$. Par définition de $\langle, \rangle$, on obtient

$$\langle t, s \sum_{i=1}^r [a_i, b_i] + s[a_s, b'_s] \rangle = -\langle x_1 y_1, s a_1, s b_1 \rangle + \langle x_s y'_s, s a_s, s b'_s \rangle = 0.$$

Les autres vérifications sont aussi de simples calculs. Les relations 5.6 sont donc valables dans $\pi_* \Omega F(X; 2) \otimes \mathbb{Q}$.

Enfin, démontrons que ces relations sont les seules. Reformons pour cela le diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{j} & F_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \setminus x_0 & \xrightarrow{b} & F(X; 2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{i_1} & X \times X, \end{array}$$

où $b(x) = (x, x_0)$. Au niveau des groupes d'homotopie, ce diagramme induit le bord du diagramme commutatif de la figure 3. Dans ce diagramme, J désigne le noyau de la projection π , et q l'application induite de l'application $\mathbb{L}(a_i, b_j, a'_i, b'_j) \rightarrow \pi_* \Omega F(X; 2)$, par quotient des relations 5.6. Le noyau J de π , est un idéal engendré par l'élément $\kappa = \sum_{i=1}^r [a_i, b_i]$. L'idéal K est également engendré par l'élément κ et $\bar{i}(\kappa) = \kappa$. Suivant la Proposition 4.5, le composé $\bar{q} \circ \bar{i}$ est un isomorphisme. Il en résulte que $\bar{i}$ est injectif. Si nous montrons que tout élément $[u_1, [\dots [u_r, \kappa] \dots]]$ de

$$\begin{array}{ccccc}
K & \xrightarrow{\bar{i}} & J & \xrightarrow{\bar{q}} & K' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_* \Omega(X \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{i} & \frac{\mathbb{L}(a_i, b_j, a'_i, b'_j)}{I} & \xrightarrow{q} & \pi_* \Omega F(X; 2) \otimes \mathbb{Q} \\
\downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \\
\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{i_1} & \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} \oplus \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{Id} & \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} \oplus \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}
\end{array}$$

FIG. 3

l'idéal J est dans $\bar{i}(K)$, ce qui revient à dire que $u_i \in \mathbb{L}(a_i, b_i)$, nous pourrions affirmer que $\bar{i}$ est un isomorphisme. Il en serait alors de même pour $\bar{q}$, et enfin, par le Lemme des cinq, pour q . Pour conclure, démontrons donc que tout élément de K s'écrit $[u_1, [\dots [u_r, \kappa] \dots]]$ avec $u_i \in \mathbb{L}(a_i, b_i)$. Ceci peut se faire par récurrence sur r . Pour $r = 1$, en utilisant l'identité de Jacobi et les relations 5.6, on a

$$\begin{aligned}
[a'_s, \kappa] &= -[[a'_s, b_s], a_s] = [\kappa, a_s] = -[a_s, \kappa], \\
[b'_s, \kappa] &= -[b_s, [a_s, b'_s]] = -[b_s, \kappa].
\end{aligned}$$

Dans le cas général, on obtient

$$\begin{aligned}
[a'_r, [b_s, [u, \dots, \kappa] \dots]] &= [b_r, [a'_s, [u, \dots, \kappa] \dots]] \text{ si } r \neq s, \\
[a'_s, [b_s, [u, \dots, \kappa] \dots]] &= [b_s, [a'_s, [u, \dots, \kappa] \dots]] - [\kappa, [u, \dots, \kappa] \dots].
\end{aligned}$$

Les deux cas se terminent en utilisant l'hypothèse de récurrence. Les autres cas se traitent de manière semblable. $\square$

5.5. AUTRES EXEMPLES

Nous présentons maintenant deux exemples d'espaces M pour lesquels la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{L}(R) \rightarrow L_{F(M;2)} \rightarrow L_{M \times M} \rightarrow 0$$

n'admet pas de section de Lie.

Exemple 5.13. $(\mathbb{C}P(n) \times S^{2m+1})$. Le modèle minimal de Sullivan de $M = \mathbb{C}P(n) \times S^{2m+1}$ est donné par $(\Lambda(x, y, z), d)$ avec $d(y) = x^{n+1}$, $|x| = 2$, $|y| = 2n + 1$ et $|z| = 2m + 1$. L'élément

$$\Omega = - \sum_{i=0}^n x^i z \otimes x^{n-i} + \sum_{i=0}^n x^i \otimes z x^{n-i}$$

est donc un représentant de la classe diagonale dans $m_{M \times M}$. Dans le modèle minimal de $F(M; 2)$, il y a donc un générateur t tel que $d(t) = \Omega$. Notons $x = x \otimes 1$ et $x' = 1 \otimes x$. Comme

$$\begin{aligned} d(tx - tx') &= -x^{n+1}z \otimes 1 - x^{n+1} \otimes z + z \otimes x^{n+1} - 1 \otimes x^{n+1}z \\ &= d(-yz \otimes 1 - y \otimes z - z \otimes y - 1 \otimes yz), \end{aligned}$$

$m_{F(M;2)}$ contiendra donc un générateur t_x tel que $d(t_x) = tx - tx' + yz + yz' + zy' + y'z'$. Dans la suite exacte d'homotopie rationnelle

$$0 \rightarrow \mathbb{L}(R) \rightarrow \pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow Ab(a, b, c) \oplus Ab(a', b', c') \rightarrow 0$$

on peut donc voir que les relevés des composantes de $\pi_* \Omega(M \times m_0) \otimes \mathbb{Q}$ et de $\pi_* \Omega(m_0 \times M) \otimes \mathbb{Q}$ ne commutent pas dans $\pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q}$. Par exemple, $[b, c'] \neq 0$ car $d(t_x)$ contient yz' .

Exemple 5.14. $(\mathbb{C}P(n) \times \mathbb{C}P(n))$.

L'algèbre de Sullivan $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d)$ avec $d(y_i) = x_i^{n+1}$ et $|x_i| = 2$, est le modèle minimal bigradué de la variété formelle $M = \mathbb{C}P(n) \times \mathbb{C}P(n)$. Dans $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, x'_1, x'_2, y'_1, y'_2), d)$, le cocycle

$$\Omega = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_1^i x_2^j x_1'^{n-i} x_2'^{n-j}$$

est un représentant de la classe diagonale $\Delta \in H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes H^*(M, \mathbb{Q})$. En procédant comme dans la Proposition 4.26 pour construire une algèbre de Sullivan minimale qui s'injecte dans le modèle minimal de $F(M; 2)$, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} d(t) &= \Omega, \\ d(t_1) &= tx_1 - tx'_1 + (y'_1 - y_1) \sum_{j=0}^n x_2^j x_2'^{n-j}, \\ d(t_2) &= tx_2 - tx'_2 + (y'_2 - y_2) \sum_{j=0}^n x_1^j x_1'^{n-j}, \\ d(t_{12}) &= (x_1 - x'_1)t_2 - (x_2 - x'_2)t_1 + y_2 y'_1 - y_2 y_1 - y'_2 y'_1 + y'_2 y_1. \end{aligned}$$

Dans ces formules, on remarque que la différentielle de t_{12} fait apparaître des termes comme $y_2 y'_1$, ce qui prouve qu'il ne peut pas exister de section d'algèbre de Lie

$$\sigma : L_M \oplus L_M \rightarrow \pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q}.$$

Un crochet $[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]$ nul dans L_M ne l'est pas dans $L_{F(M;2)}$. D'autre part, on n'a évidemment pas $[a, b'] \in \mathbb{L}^{\geq 2}(R)$ pour tout a et $b \in L_M$.