

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

MAILLAGES NON-STRUCTURÉS EN MODÉLISATION OCÉANIQUE

DISSERTATION PRÉSENTÉE PAR

SÉBASTIEN LEGRAND

EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR EN SCIENCES

Prof. Eric Deleersnijder (promoteur)	Université catholique de Louvain
Prof. Eric Delhez	Université de Liège
Prof. Thierry Fichefet	Université catholique de Louvain
Prof. Vincent Legat (promoteur)	Université catholique de Louvain
Prof. Daniel Le Roux	Université Laval
Prof. René Prieels (président)	Université catholique de Louvain

LOUVAIN-LA-NEUVE
2006

Remerciements

A l'heure de mettre un point final à cette thèse, j'aimerais remercier les personnes qui ont contribué de près ou de loin à sa réalisation.

Mes premiers remerciements vont aux professeurs Eric Deleersnijder et Vincent Legat, mes promoteurs. Notre collaboration débuta en octobre 1998 lorsqu'ils eurent la brillante idée de rapprocher deux mondes restés trop longtemps séparés : l'océanographie et la modélisation numérique en éléments finis. Depuis lors, ils n'ont cessé de m'accorder leur soutien et leur confiance. Je leur en suis extrêmement reconnaissant.

Eric Deleersnijder communique à ses étudiants et à ses chercheurs son engouement total pour la recherche. Grâce à son obstination légendaire, il les amène à se dépasser, les pousse à aborder leur recherche avec toute la rigueur mathématique nécessaire et surtout les encourage à publier l'entièreté de leurs résultats. Il n'hésite pas non plus à faire profiter ses chercheurs des nombreux contacts qu'il a pu nouer au fil de sa carrière. Je l'en remercie.

Vincent Legat sait créer avec ses chercheurs un subtil mélange d'exigence scientifique, de gentillesse, de simplicité et de bon sens. Pour lui, une recherche ne peut aboutir que si son auteur va au coeur du problème, le comprend et le maîtrise. En accord avec cette maxime, il laisse une très grande liberté à ses chercheurs. Cette liberté, je l'ai investie dans l'écriture de la formulation faible des équations des eaux peu profondes sur la sphère, le résultat de cette thèse dont je suis le plus fier. Mais plus que tout, je le remercie d'avoir donné l'impulsion indispensable à la rédaction de cette thèse.

Toute ma gratitude va au professeur Eric Delhez. Ses conseils avisés ont certainement été la clé du succès de notre trop brève collaboration. Je remercie également les autres membres de mon jury, les professeurs Thierry Fichefet, Daniel Le Roux et René Prieels, pour leur lecture attentive et pour leurs commentaires judicieux.

Je remercie Manu avec qui j'ai partagé un même bureau durant cinq ans. Son flegme typiquement anglais n'a d'égal que son ouverture d'esprit. Globe-trotter infatigable, il m'a fait voyagé aux quatre coins du monde à travers ses photos. Il n'hésitait pas non plus à inviter au bureau bon nombre d'artistes, de musiciens et de chanteurs aussi éclectiques que talentueux. Il ne faut pourtant pas s'y tromper, il y régnait une ambiance propice au travail efficace... seulement dérangée par les venues incessantes mais toujours intéressantes de Brioux. Qui d'autres que lui aurait pu nous faire parler de mécanique quantique, de relativités restreinte et générale ou de théorie des champs ? Bien plus que de simples collègues, ils sont pour moi deux véritables amis.

La préparation de cette thèse n'aurait pas été aussi enrichissante sans les chercheurs d'ASTR et de MEMA ; sans nos soirées commencées par un badminton et prolongées autour d'une bière, d'une crêpe ou d'une partie de carte. Merci aussi à

Pascale, Bruno, Daniel, Marc et Louise pour l'accueil chaleureux qu'ils me réservent le midi à la piscine.

Je m'en voudrais d'oublier les centaines d'étudiants que j'ai encadrés durant mon assistantat. Je remercie en particulier Anne, Gwendoline, Céline, Jonathan, Croûte ou encore Maxime. Leur infaillible bonne humeur fut pour moi une source intarissable de motivation.

Merci à tous mes proches, parents, beaux-parents, Renaud, Suzanne et Céline, pour leurs nombreux encouragements, leur compréhension et leur soutien inconditionnel. Finalement, que serais-je aujourd'hui sans Vinciane ? Elle a suivi au jour le jour l'évolution de ma thèse. Elle a partagé mes petites et grandes joies, supporté toutes mes humeurs et m'a toujours écouté avec compréhension. Du fond du coeur, merci.

Je remercie la Communauté française de Belgique et l'Université catholique de Louvain pour leur soutien financier, entre autres aux travers des conventions d'Actions de Recherche Concertées 97/02-208 et 04/09-316.

Table des matières

1	Introduction	7
2	La méthode des éléments finis sur la sphère	13
2.1	Coordonnées curvilignes	15
2.1.1	Isomorphisme et coordonnées curvilignes	15
2.1.2	Dérivées covariantes et opérateurs différentiels	24
2.1.3	Coordonnées curvilignes sur un triangle sphérique	26
2.1.4	Coordonnées curvilignes dans un prisme sphérique	33
2.2	Méthodes des éléments finis sur la sphère	36
2.2.1	Application aux équations des eaux peu profondes	37
2.2.2	Calcul du problème local sur un triangle sphérique	41
2.2.3	Assemblage des problèmes locaux	43
3	Génération de maillages non-structurés en océanographie	47
3.1	Graphes de Voronoï et de Delaunay	49
3.2	Mise au point d'un générateur de maillages	56
3.2.1	Triangulations sur la sphère	58
3.2.2	Triangulations anisotropes	58
4	Maillages pour la Grande Barrière de Corail	87
5	Maillages anisotropes pour un talus continental	115
	Conclusions	137
	Bibliographie	141

Chapitre 1

Introduction

Les océans fascinent depuis toujours l'humanité. Ils symbolisent aussi bien l'aventure que la quiétude, le danger que l'exotisme, la toute-puissance de la nature que la source de vie. Mais au-delà de cette fascination, les océans jouent un rôle prépondérant dans notre quotidien. Qui ne reconnaît pas leur importance dans des domaines aussi variés que le climat, le commerce maritime ou la gestion des ressources alimentaires ? Toutefois, notre connaissance des détails de leur circulation, des limites de leur productivité biologique ou de leurs interactions avec l'atmosphère n'est aujourd'hui encore que fragmentaire. Bien que les observations satellitaires, les campagnes de mesures *in situ* et les bouées dérivantes permettent d'avoir une image de plus en plus complète et précise de la surface des océans, les profondeurs abyssales restent largement inconnues. La modélisation mathématique et numérique est une des manières de combler cette lacune. Cet *outil* est capable de prendre simultanément en compte l'influence des forçages mécaniques (la tension du vent et la traînée de fond) ainsi que des flux de matière et d'énergie avec l'atmosphère afin de *simuler, comprendre ou prédire* la nature non-linéaire des écoulements océaniques.

L'histoire de la modélisation numérique océanique débuta il y a près de quarante ans avec le premier modèle numérique de la circulation générale océanique de Bryan (Bryan et Cox, 1967; Bryan, 1969). Depuis lors, une multitude de modèles numériques de la circulation océanique ont été développés. Profitant des nombreux progrès effectués entre autres dans les paramétrisations des processus sous-mailles, l'assimilation de données ou la gestion des codes informatiques, ils se sont imposés comme des outils incontournables dans de nombreuses études. Griffies *et al.* (2000) présentent une revue des modèles océaniques utilisés en climatologie. Malgré toutes ces avan-

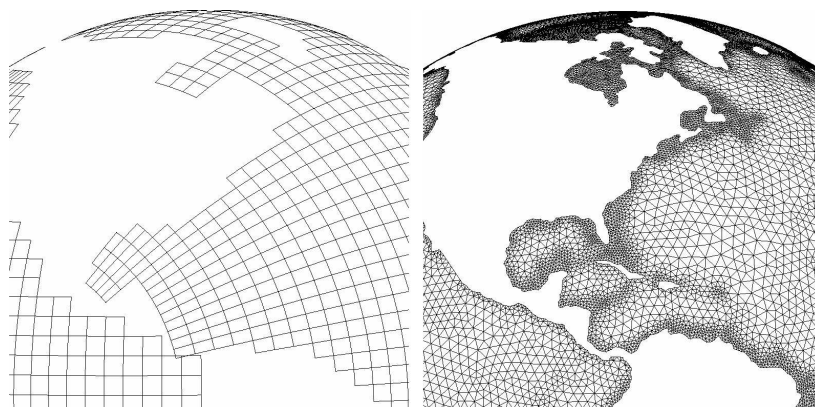


Figure 1.1: Une grille structurée (Deleersnijder *et al.*, 1993) et un maillage non-structuré du Golfe du Mexique et de l'Atlantique nord.

cées, les modèles actuels restent, conceptuellement parlant, semblables au prototype de Bryan : ils résolvent les équations des fluides géophysiques à l'aide d'une méthode de différences finies conservatives sur des grilles structurées. Cette approche conduit à des codes informatiques faciles à développer, comprendre et utiliser. Mais elle n'offre pas la flexibilité géométrique inhérente aux maillages non-structurés. C'est pourquoi, l'introduction de ces derniers en modélisation océanique est vue par certains auteurs comme l'émergence d'une seconde génération de modèles numériques de la circulation océanique (Deleersnijder *et al.*, 2003; Pain *et al.*, 2005). A partir des années 1980, plusieurs équipes de recherche ont publié des études de faisabilité afin d'obtenir de tels modèles : un état de l'art actuel est présenté dans Deleersnijder *et al.* (2003).

L'objectif principal de cette thèse est la conception, l'implémentation et l'analyse d'un algorithme de triangulation automatique pour la génération de maillages non-structurés dans les applications océaniques globales, régionales et côtières. Le développement de maillages a été l'objet d'une très grande activité de recherche (Frey et George, 2000). Comme de nombreux logiciels commerciaux ou libres sont aujourd'hui disponibles pour créer des maillages bidimensionnels ou tridimensionnels, on peut se demander s'il est encore légitime de développer notre propre outil. Toutefois, le caractère très particulier des écoulements océaniques nécessite d'adapter ou de calibrer les approches existantes à la stratification de l'océan et à la géométrie toute particulière de la sphère. Notre travail a donc consisté à tirer profit des technologies existantes et à les utiliser au mieux dans un cadre particulier. Notre contribution peut être divisée en trois parties principales.

- Tout d’abord, nous avons implémenté une technique de triangulation de l’Océan Mondial sur la sphère et nous avons bâti les outils géométriques nécessaires pour écrire une formulation discrète par éléments finis des équations de la dynamique des fluides géophysiques. Sur cette base, des résultats préliminaires de simulations ont déjà été obtenus au sein de notre laboratoire de recherche (White, 2002; Hanert, 2004; Willemet, 2005).
- Ensuite, nous nous sommes attaché à définir des stratégies adaptatives qui orchestrent la distribution de la taille et de la forme des éléments du maillage afin d’optimiser la précision et le coût du schéma numérique. Il s’agit non seulement de pouvoir créer une grille fixe pour la totalité d’une simulation mais aussi d’adapter dynamiquement le maillage pendant une simulation transitoire. Notre outil permet l’usage efficace d’un estimateur d’erreur a posteriori afin de tirer entièrement profit de notre algorithme de génération de maillage anisotrope.
- Finalement, nous nous sommes également intéressé à l’interpolation d’une solution sur un maillage donné vers un autre maillage. Dans une stratégie adaptative, il s’agit d’une étape indispensable qui doit préserver la précision et le caractère conservatif du modèle numérique. C’est également un aspect incontournable si l’on souhaite coupler des modèles ayant des maillages distincts, en particulier un modèle structuré et un modèle non-structuré.

L’introduction des maillages non-structurés en modélisation océanique permettra le développement de modèles plus flexibles, plus efficaces et permettra d’adapter localement leur résolution en fonction des applications considérées. La figure 1.1 illustre les trois apports principaux des maillages non-structurés à la modélisation océanique : l’introduction de la résolution variable, une représentation plus réaliste des côtes et des autres caractéristiques topographiques et la fin des problèmes liés à la géométrie sphérique.

L’introduction de la résolution variable est probablement l’apport majeur des maillages non-structurés en océanographie. En effet, la rigidité des grilles structurées rend pratiquement impossible tout ajustement local de la résolution de la grille aux caractéristiques des phénomènes à simuler. Cet état de fait entraîne une utilisation irrationnelle des capacités de calcul. Par exemple, la plupart des modèles actuellement utilisés en prévision climatique sont incapables de simuler explicitement les tourbillons de la méso-échelle sur plusieurs centaines voire milliers d’années alors que ces phénomènes, parmi les plus énergétiques, influencent la circulation moyenne à grande échelle. Même si ces tourbillons ne se développent que sur une portion relativement petite de l’Océan Mondial, l’utilisation de grilles structurées exigent une discrétisation homogène de l’entière du domaine d’intérêt qui serait bien trop fine (une taille de mailles de l’ordre de 10 *km*) pour les performances des ordinateurs actuels. Cet exemple, loin d’être isolé, illustre la principale limitation des modèles de circulation générale océanique de première génération : ils sont incapables de simuler explicitement une gamme suffisamment étendue de phénomènes océaniques, ce qui les rend particulièrement dépendants des paramétrisations des phénomènes non-résolus. L’in-

roduction des maillages non-structurés à résolution variable devrait permettre une utilisation plus rationnelle des capacités de calcul et l'extension de la gamme des phénomènes modélisables.

Plusieurs auteurs soutiennent que les systèmes de grilles structurées imbriquées les unes dans les autres permettent d'obtenir la même flexibilité que les maillages non-structurés à résolution variable (Spall et Holland, 1991; Fox et Maskell, 1995; Blayo et Debreu, 1999). Cependant, à la différence des maillages non-structurés, ces techniques de grilles imbriquées dépendent fortement des performances des procédures d'interpolation mises en oeuvre pour assurer le transfert d'information de grille à grille. En effet, pour ne pas perdre tout le gain introduit par la grille la plus fine, il est indispensable que les procédures d'interpolation préservent certaines quantités comme le volume total d'eau tout en assurant le compromis optimal entre la production de bruit numérique et la dissipation numérique (le lissage des champs d'inconnues par la procédure d'interpolation de grille à grille). L'utilisation d'un maillage non-structuré à résolution variable permet d'éviter toute étape d'interpolation.

Le second apport des maillages non-structurés en océanographie est de permettre une représentation plus réaliste des côtes et des autres caractéristiques topographiques. Leur représentation souvent trop grossière dans les maillages structurés détériore la précision des simulations. Par exemple, l'utilisation des grilles structurées entraîne généralement une discrétisation "en escalier" des côtes. Bien plus qu'un simple problème esthétique, les coins des mailles frontières ont tendance à générer artificiellement de la vorticité qui pollue la solution sur une couche limite de quelques mailles d'épaisseurs (Adcroft et Marshall, 1998; Dupont *et al.*, 2003). A nouveau, on pourrait construire des grilles structurées ajustées aux frontières (Wilkin et Hedstrom, 1998), mais cette solution est souvent complexe à mettre en oeuvre et n'est pas toujours totalement satisfaisante. Ainsi, elle est difficilement généralisable à des situations complexes telles qu'un réseau de chenaux interconnectés. La flexibilité inégalable des maillages non-structurés leur permet de s'adapter aux géométries les plus complexes.

Le dernier apport des maillages non-structurés concerne la modélisation des circulations générales atmosphériques et océaniques sur un domaine sphérique. Les grilles structurées des modèles actuels reposent habituellement sur un système de coordonnées curvilignes qui englobent la sphère. Dans le système de coordonnées sphériques, les pôles géographiques sont des points singuliers, sources de nombreuses difficultés numériques. Il en est de même pour tous les systèmes de coordonnées curvilignes définis sur l'entièreté sphère. En particulier, les mailles ont tendance à dégénérer au voisinage des singularités, ce qui rend les critères de stabilité numérique excessivement contraignants (Williamson, 1979). La solution classiquement adoptée en modélisation océanique consiste à construire des systèmes de coordonnées dont les points singuliers sont rejetés hors du domaine de calcul (entre autres sur les continents). De

nombreuses propositions ont été faites (Sadourny, 1972; Deleersnijder *et al.*, 1993; Eby et Holloway, 1994; Coward *et al.*, 1994; Madec et Imbard, 1996; Murray, 1996; Madec *et al.*, 1998; Bentsen *et al.*, 1999; Adcroft *et al.*, 2004; Roberts *et al.*, 2006), mais aucune d'entre elles ne donne entière satisfaction. En particulier, elles ne permettent pas de traiter le cas des planètes sans continent comme Europe, le satellite de Jupiter (Willemet, 2005). L'utilisation des maillages non-structurés devrait mettre fin à ces inconvénients.

Notre travail s'est inscrit dans un projet global de construction du modèle océanique de seconde génération SLIM¹. Notre apport principal réside dans l'implémentation d'un algorithme de triangulation automatique pour la construction de maillages dans le cadre d'applications océaniques mondiales et régionales. Au sein de l'équipe de recherche, de nombreuses publications ont été effectuées à partir des maillages que nous avons réalisés. Seule une partie de ces publications n'a porté que sur notre propre contribution : la mise au point d'une technique efficace et robuste de génération automatique de maillage pour des applications océaniques. Dans la liste des publications qui supportent cette thèse, nous nous sommes donc restreint uniquement à ces articles soumis à des revues internationales avec comité de lecture ainsi qu'aux communications scientifiques.

Peer reviewed articles

Legrand S., V. Legat and E. Deleersnijder, 2000, Delaunay mesh generation for an unstructured-grid ocean general circulation model, *Ocean Modelling*, 2, 17-28

Legrand S., E. Deleersnijder, E. Hanert, V. Legat and E. Wolanski, 2005, High-resolution unstructured meshes for hydrodynamic models of the Great Barrier Reef, Australia. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, in press.

Legrand S., E. Deleersnijder, E. Delhez and V. Legat, 2006, Unstructured, anisotropic mesh generation for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean, submitted to *Continental Shelf Research*.

Proceeding articles

Legrand S., V. Legat and E. Deleersnijder, 2000, Delaunay mesh generation for oceanic computations, in : *Proceedings of the 5th National Congress on Theoretical and*

¹SLIM est l'acronyme de *Second-generation Louvain-la-Neuve Ice-ocean Model*.
<http://www.astr.ucl.ac.be/SLIM/>

Applied Mechanics (Louvain-la-Neuve, Belgium, 23-24 May 2000), Belgian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics, pp. 131-134

Legrand S., V. Legat and E. Deleersnijder, 2003, Mass conservation on global ocean model on unstructured meshes, in : Proceedings of the 6th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics (Ghent, Belgium, 26-27 May, 2003), NCTAM-2003-090, 4 pp.

Naithani J., E. Deleersnijder, P.-D. Plisnier and S. Legrand, 2004, Preliminary results of a reduced-gravity model of the wind-induced oscillations of the thermocline in Lake Tanganyika, in : Proceedings of the Second International Conference on Tropical Climatology, Meteorology and Hydrology, G. Demarée, M. De Dapper and J. Alexandre (Eds.), Royal Meteorological Institute of Belgium and Royal Academy of Overseas Sciences of Belgium, pp. 27-40

Posters

Legrand S., V. Legat and E. Deleersnijder, 2000, Adaptive unstructured mesh Generation for ocean modelling. European Geophysical Society General Assembly, Nice, France, 25 – 29 April 2000

Legrand S., V. Legat and E. Deleersnijder, 2000, A variational inverse model on the world ocean. European Geophysical Society General Assembly, Nice, France, 25 – 30 March 2001

Hanert E., S. Legrand, L. White, E. Deleersnijder, T. Fichefet, V. Legat and J.-F. Remacle, 2004, Towards a New Generation Finite Element Ocean Circulation Model for Climate Simulations, journée d'inauguration du CISM, Louvain-la-Neuve, 14 March 2004.

Legrand S., J. Lambrechts, E. Hanert, E. Deleersnijder, V. Legat and E. Wolanski, 2005, Towards a high-resolution, unstructured-mesh model of the Great Barrier Reef. European Geosciences Union General Assembly, Vienna, Austria, 24 – 29 April 2005

Hanert E., P.-E. Bernard, E. Deleersnijder, T. Fichefet, J. Jeanfils, J. Lambrechts, V. Legat, S. Legrand, D.Y. LeRoux and L. White (2005) Towards the Second-generation Louvain-la-neuve Ice-ocean Model (SLIM). European Geosciences Union General Assembly, Vienna, Austria, 24 – 29 April 2005

Chapitre 2

La méthode des éléments finis sur la sphère

La plupart des modèles de la circulation de l'Océan Mondial de première génération sont construits autour d'un système de coordonnées curvilignes qui englobe l'entière de la sphère. De tels systèmes possèdent nécessairement des points singuliers vers lesquels convergent plusieurs isolignes de coordonnées curvilignes. Typiquement, tous les méridiens convergent vers les pôles géographiques. Que les singularités soient situées aux pôles géographiques ou ailleurs, elles sont toujours à l'origine de difficultés mathématiques et numériques :

- Il est impossible de définir de manière unique un repère basé sur le système de coordonnées curvilignes aux points singuliers. Comment définir les directions nord et est aux pôles géographiques ? Même si un champ vectoriel existe aux singularités, il n'est pas possible d'en définir ses composantes. De même, la plupart des opérateurs différentiels ne peuvent pas y être évalués car la métrique et les symboles de Christoffel dégénèrent en ces points. Il n'est donc pas possible d'exprimer en ces points les équations de la dynamique des fluides géophysiques en terme de ces coordonnées curvilignes.
- Les grilles construites à partir des isolignes de coordonnées curvilignes présentent des mailles qui dégénèrent au voisinage des singularités. Par exemple, l'apparition de toutes petites mailles peut avoir un impact catastrophique sur les conditions de stabilité si le pas de temps est lié à la plus petite taille de maille.

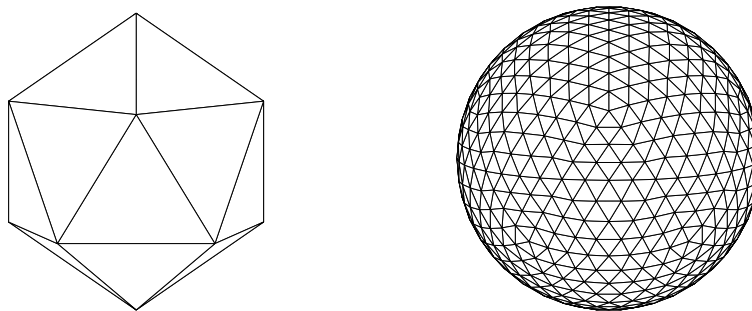


Figure 2.1: Exemple de grilles structurées générées à partir d'un icosaèdre.

Dès l'apparition des premiers modèles numériques, les météorologues et un peu plus tard les océanographes proposèrent de nombreuses constructions pour éviter ou du moins limiter ces différents problèmes (Williamson, 1979). Ainsi, dès 1957, Phillips propose une combinaison de trois sous-grilles qui se chevauchent partiellement. La première des sous-grilles est obtenue par une projection de Mercator pour les basses et moyennes latitudes alors que les deux autres sont produites à l'aide d'une projection stéréographique des hautes latitudes. Son utilisation par un modèle de prévision météorologique nécessite l'interpolation des champs entre les trois grilles, interpolation qui n'assure évidemment plus — ou très difficilement — la conservation de la masse et de l'énergie. Depuis lors, de nombreuses autres approches ont été suggérées mais n'ont pas donné entière satisfaction : Williamson (1968); Sadourny *et al.* (1968); Sadourny (1972); Bryan *et al.* (1975); Williamson (1979); Semtner et Chervin (1988). Aujourd'hui, les modèles opérationnels de prévision météorologique privilégient des discrétisations structurées basées sur les coordonnées géographiques mais dont le nombre de mailles varie en fonction de la latitude afin d'obtenir une résolution quasi-uniforme (Hortal et Simmons, 1991). Une telle approche est connue sous le nom de *reduced Gaussian grids*. Les modèles océaniques privilégient des grilles multipolaires dont les singularités sont rejetées hors du domaine de calcul : Deleersnijder *et al.* (1993); Murray (1996); Madec et Imbard (1996); Madec *et al.* (1998); Malone *et al.* (2003); Roberts *et al.* (2006).

Toutefois, une littérature abondante continue de proposer de nouvelles pistes. Sur les figures 2.1 et 2.2, nous illustrons deux approches qui sont redevenues assez populaires : la grille obtenue par subdivision récursive d'un icosaèdre (Williamson, 1968;

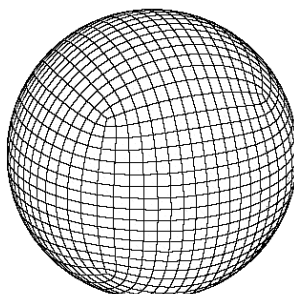


Figure 2.2: Le maillage en cube sphérique est obtenu par la projection des faces d'un cube sur la surface d'une sphère.

Sadourny *et al.*, 1968) ou celle obtenue par le soufflage sphérique d'un cube (Sadourny, 1972). Citons en vrac les contributions scientifiques récentes sur ces deux grilles : Heikes et Randall (1995); Stuhne et Peltier (1996); Rancic *et al.* (1996); Thuburn (1996); Purser et Rančić (1997); Giraldo (1997); Heinze (1998); Majewski *et al.* (2002); Randall *et al.* (2002); Pesch (2003); Adcroft *et al.* (2004); Giraldo et Rosmond (2004); Fournier *et al.* (2004); Nair *et al.* (2005a,b).

Quelle que soit la solution envisagée, il est nécessaire d'exprimer les équations de la dynamique géophysique sur la sphère. C'est pourquoi, nous allons brièvement présenter les outils mathématiques utilisés pour exprimer une équation aux dérivées partielles dans un système de coordonnées curvilignes et les appliquer pour l'écriture des équations discrètes correspondantes par la méthode des éléments finis. Comme dans une telle approche les équations discrètes sont évaluées localement, elles ne nécessitent que l'introduction de coordonnées curvilignes locales et permettent de contourner le problème des points singuliers inhérents à tout système de coordonnées curvilignes globales.

2.1 Coordonnées curvilignes

2.1.1 Isomorphisme et coordonnées curvilignes

Les coordonnées curvilignes permettent de décrire efficacement des surfaces ou des volumes de l'espace. L'idée est de considérer l'espace physique et d'y associer deux

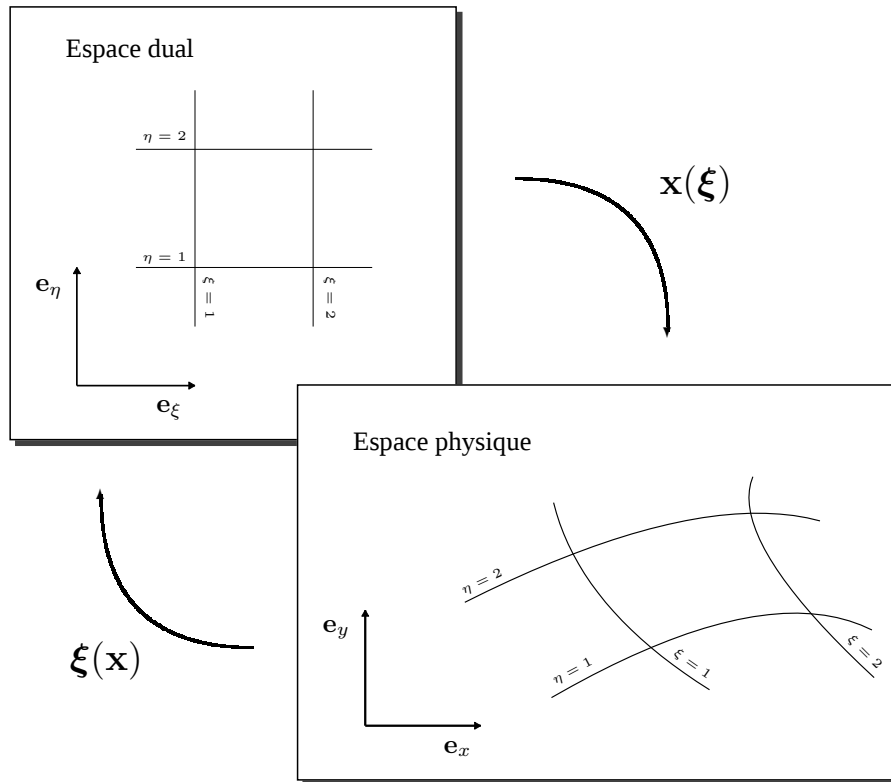


Figure 2.3: La transformation $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ définit une relation bi-univoque entre l'espace dual et l'espace physique de sorte que tout point de l'espace physique peut être identifié de manière équivalente soit par ses coordonnées cartésiennes $\mathbf{x}$, soit par ses coordonnées curvilignes $\boldsymbol{\xi}$.

systèmes de coordonnées : les coordonnées cartésiennes usuelles et des coordonnées curvilignes quelconques. En appliquant une transformation de l'espace physique, il est possible de définir un espace dual pour lequel les isolignes des coordonnées curvilignes forment un réseau cartésien uniforme. C'est évidemment dans l'espace physique que se produisent les phénomènes physiques que nous voulons modéliser. Toutefois, le second espace est souvent celui où la définition de la surface ou du volume dans lequel se produisent ces phénomènes physiques est la plus aisée en terme de coordonnées curvilignes. A titre d'exemple, la définition de la sphère est triviale en coordonnées sphériques mais s'exprime par le biais d'une équation non-linéaire en coordonnées cartésiennes.

Considérons un point de l'espace physique identifié par ses coordonnées $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Nous supposons qu'il est possible de lui associer de manière unique un point de l'espace dual identifié par ses coordonnées $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$. Cette association se fait à l'aide de l'*isomorphisme* $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ ou de l'*isomorphisme inverse* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$. Comme illustré sur la figure 2.3, la définition du système de coordonnées curvilignes ne peut pas être totalement quelconque. En particulier, aux pôles géographiques, le système usuel de latitude-longitude n'est pas légitime puisqu'à un seul point physique correspond l'entiereté de toutes les longitudes possibles. A travers l'isomorphisme, une droite ou un plan de l'espace dual se transforment respectivement en une courbe ou une surface courbe dans l'espace physique. Un réseau de droites parallèles aux axes du repère cartésien de l'espace dual se transforme en un réseau de courbes dans l'espace physique. Nous supposons donc que tout point de l'espace physique est ainsi identifié de manière équivalente soit par ses coordonnées cartésiennes $\mathbf{x}$, soit par ses coordonnées curvilignes $\boldsymbol{\xi}$.

L'isomorphisme $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ décrit le lien qui existe entre les coordonnées curvilignes d'un point de l'espace physique et ses coordonnées cartésiennes. Afin de pouvoir décrire explicitement la déformation d'un objet lors de la transformation de celui-ci à partir de l'espace dual vers l'espace physique, il est utile d'introduire le concept de métrique. En d'autres mots, nous supposons que l'objet dans l'espace dual est dans une configuration de référence et nous souhaitons connaître comment il est déformé localement dans la configuration physique. Le calcul des volumes, des longueurs et des déformations de l'objet dans les deux configurations se fait évidemment par rapport au repère orthonormé cartésien. A titre d'exemple, considérons la transformation d'un segment de droite infinitésimal $d\boldsymbol{\xi}$ en un segment $d\mathbf{x}$. Si les deux segments de droites restent infinitésimaux¹, on peut écrire :

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.1)$$

¹Ce qui limite en partie le choix des coordonnées curvilignes que l'on peut effectuer et exclut en particulier les points singuliers.

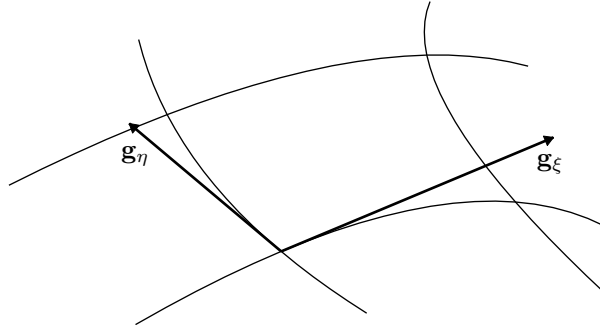


Figure 2.4: Les vecteurs $\mathbf{g}_\xi$, $\mathbf{g}_\eta$ et $\mathbf{g}_\zeta$ forment la base dite covariante du système de coordonnées curvilignes. Ils sont définis comme les colonnes de la matrice jacobienne de l'isomorphisme et sont tangents aux isolignes de coordonnées curvilignes.

où la matrice jacobienne en chaque point ξ est définie par :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Chaque élément de la matrice jacobienne possède une interprétation géométrique puisqu'il établit le rapport entre une composante du segment $d\mathbf{x}$ et une autre composante du segment $d\xi$. Typiquement, en calculant les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice, il est possible de décomposer la transformation en une rotation et une compression (ou une dilatation) le long des directions principales. Par conséquent, le déterminant de la matrice jacobienne représente le rapport des volumes après la transformation d'un volume élémentaire de l'espace dual.

Base et métrique covariantes

Chaque colonne de la matrice jacobienne en un point ξ définit un vecteur tangent à l'isoligne correspondante au point $\mathbf{x}(\xi)$. Ces trois vecteurs forment la *base covariante* associée au système de coordonnées curvilignes et sont notés :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\xi &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{g}_\eta &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{g}_\zeta &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Comme illustré sur la figure 2.4, ces vecteurs ne sont ni normés, ni orthogonaux dans la plupart des cas. Leur norme et leur direction peuvent changer en chaque point de l'espace physique. La décomposition d'un vecteur quelconque $\mathbf{v}$ de l'espace physique en une combinaison linéaire des vecteurs de la base covariante s'écrit :

$$\mathbf{v} = v^\xi \mathbf{g}_\xi + v^\eta \mathbf{g}_\eta + v^\zeta \mathbf{g}_\zeta.$$

Les composantes v^ξ , v^η et v^ζ sont appelées *composantes contravariantes*. On définit également le tenseur métrique covariant $\mathbf{g}$, dont les éléments sont les produits scalaires des vecteurs correspondants de la base covariante.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\eta & \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\zeta \\ \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\eta & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\zeta \\ \mathbf{g}_\zeta \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\zeta \cdot \mathbf{g}_\eta & \mathbf{g}_\zeta \cdot \mathbf{g}_\zeta \end{pmatrix}.$$

En développant, on obtient un tenseur de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}.$$

De manière compacte, la définition d'un élément $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique $\mathbf{g}$ peut être notée

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta. \quad (2.4)$$

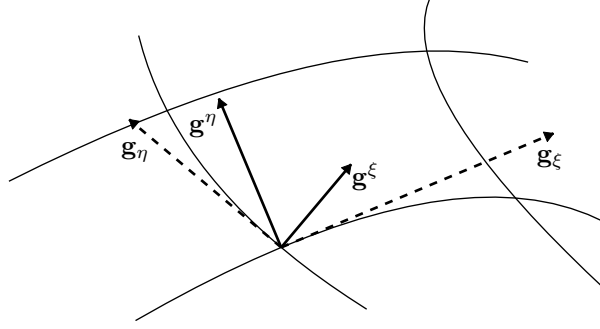


Figure 2.5: Les vecteurs $\mathbf{g}^\xi$, $\mathbf{g}^\eta$ et $\mathbf{g}^\zeta$ forment la base dite contravariante du système de coordonnées curvilignes. Ils sont intimement reliés aux vecteurs de la base covariante par la relation d'orthogonalité (2.5).

Chaque élément diagonal $g_{\alpha\alpha}$ correspond au carré de la norme du vecteur de base $\mathbf{g}_\alpha$. De même, chaque élément $g_{\alpha\beta}$ exprime l'angle θ formé par les vecteurs $\mathbf{g}_\alpha$ et $\mathbf{g}_\beta$:

$$g_{\alpha\beta} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}} \cos \theta.$$

On peut montrer que la métrique covariante est un tenseur symétrique et défini-positif si la transformation $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ est bi-univoque. Cette métrique contient exactement la même information que la jacobienne, mais elle présente l'avantage d'être un tenseur. Telle que nous l'avons introduite, la métrique covariante comporte énormément de similitude avec la *première forme fondamentale* d'une surface en géométrie différentielle.

A titre d'exemple, la longueur d'un segment infinitésimal $d\mathbf{x}$ peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= \left(d\xi \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} d\xi \right) \\ &= d\xi \cdot \mathbf{g} \cdot d\xi. \end{aligned}$$

Base et métrique contravariantes

De la même manière, il est possible de définir les concepts de base et de métrique contravariantes à partir de l'isomorphisme inverse $\xi(\mathbf{x})$. A nouveau, nous introduisons les trois vecteurs de la base contravariante à partir des lignes de la jacobienne de l'isomorphisme inverse.

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{g}^\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{g}^\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

On peut observer que la matrice jacobienne de l'isomorphisme inverse $\xi(\mathbf{x})$ est l'inverse de la jacobienne de l'isomorphisme $\mathbf{x}(\xi)$. Cette propriété s'écrit :

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta^\alpha_\beta. \quad (2.5)$$

Elle implique que le vecteur $\mathbf{g}^\alpha$ soit orthogonal aux vecteurs $\mathbf{g}_\beta$ et $\mathbf{g}_\gamma$ de la base covariante et que sa norme soit l'inverse de celle de $\mathbf{g}_\alpha$. La décomposition d'un vecteur quelconque $\mathbf{v}$ de l'espace physique en une combinaison linéaire des vecteurs de la base contravariante s'écrit :

$$\mathbf{v} = v_\xi \mathbf{g}^\xi + v_\eta \mathbf{g}^\eta + v_\zeta \mathbf{g}^\zeta,$$

Les composantes v_ξ , v_η et v_ζ sont appelées *composantes covariantes*. On définit également le tenseur métrique contravariant dont les éléments sont les produits scalaires des vecteurs correspondants de la base contravariante.

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta \quad (2.6)$$

Ce tenseur contient la description complète de la déformation des volumes, comme le tenseur métrique covariant. Ces deux tenseurs sont inverses l'un de l'autre :

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \quad (2.7)$$

Rappelons ici que la convention usuelle de l'emploi des indices et des exposants dans les notations n'est pas innocente et a été adoptée afin d'identifier immédiatement les indices répétés sur lesquels on applique une somme. Pour une présentation détaillée du calcul tensoriel en coordonnées curvilignes, on consultera utilement les nombreux ouvrages de référence existants (Weinberg, 1972; Aris, 1962).

Symboles de Christoffel

La courbure des isolignes de coordonnées curvilignes peut entraîner une variation de la norme et de la direction des vecteurs des bases covariante et contravariante en chaque point de l'espace physique. Ces variations sont respectivement données par les dérivées des vecteurs des bases covariante et contravariante par rapport aux coordonnées curvilignes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_\xi &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \mathbf{e}_z, \\
 &\downarrow \\
 \frac{\partial \mathbf{g}_\xi}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \xi} \mathbf{e}_z, \\
 \frac{\partial \mathbf{g}_\xi}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \mathbf{e}_z, \\
 \frac{\partial \mathbf{g}_\xi}{\partial \zeta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \zeta} \mathbf{e}_z.
 \end{aligned}$$

On peut procéder de la même manière avec les vecteurs de la base contravariante.

Même si les variations des vecteurs $\mathbf{g}_\alpha$ de la base covariante ne se comportent pas comme un tenseur, elles peuvent être exprimées dans les bases covariante ou contravariante

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial \beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \mathbf{g}_\xi + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \mathbf{g}_\eta + \Gamma_{\alpha\beta}^\zeta \mathbf{g}_\zeta, \\
 \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial \beta} &= \Gamma_{\alpha\beta,\xi} \mathbf{g}^\xi + \Gamma_{\alpha\beta,\eta} \mathbf{g}^\eta + \Gamma_{\alpha\beta,\zeta} \mathbf{g}^\zeta,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

où les composantes $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sont connues comme les symboles de Christoffel de première et de seconde espèces. Ils peuvent être calculés en utilisant la propriété d'orthogonalité (2.5) dans la définition qui précède. On en déduit ainsi les formules

classiques de calcul :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial \beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma} \right) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial \beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \delta} \right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Pour obtenir les composantes de la variation des vecteurs de la base contravariante, nous dérivons l'équation (2.5) qui exprime l'orthogonalité entre les vecteurs des bases covariante et contravariante et obtenons :

$$0 = \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial \gamma} \cdot \mathbf{g}^\beta + \mathbf{g}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^\beta}{\partial \gamma}.$$

En tirant profit de cette relation et de la définition (2.8), on obtient l'expression des composantes de la variation des vecteurs de la base contravariante en terme d'elle-même

$$\frac{\partial \mathbf{g}^\beta}{\partial \gamma} = -\Gamma_{\gamma\xi}^\beta \mathbf{g}^\xi - \Gamma_{\gamma\eta}^\beta \mathbf{g}^\eta - \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta \mathbf{g}^\zeta.\tag{2.10}$$

On pourrait procéder de même pour obtenir les composantes en terme de la base covariante.

En conclusion, tout isomorphisme entre un espace dual et l'espace physique définit un système de coordonnées curvilignes auquel on associe deux bases. La première base, dite covariante, est formée par les vecteurs $\mathbf{g}_\alpha$ tangents aux isolignes de coordonnées curvilignes. La seconde base, dite contravariante, est formée par des vecteurs $\mathbf{g}^\alpha$ orthogonaux aux isolignes de coordonnées curvilignes. Les composantes d'un tenseur quelconque $\mathbf{T}$ dans la base covariante sont appelées composantes contravariantes et sont notées $T^{\alpha\beta}$. Les composantes de ce tenseur dans la base contravariante sont appelées composantes covariantes et sont notées $T_{\alpha\beta}$. Ces composantes sont reliées entre elles au moyen des tenseurs métriques :

$$\begin{aligned}T^\alpha_\beta &= g^{\alpha\gamma} T_{\gamma\beta}, \\ T_\alpha^\beta &= g_{\alpha\gamma} T^{\gamma\beta}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

L'introduction de ces deux règles dans le calcul des longueurs permet à nouveau de remarquer que toute contraction ne peut se faire qu'en sommant le produit des composantes covariantes et contravariantes. Finalement, les symboles de Christoffel de première et de seconde espèces permettent de décrire la courbure des isolignes du système de coordonnées curvilignes dans les bases covariante et contravariante.

2.1.2 Dérivées covariantes et opérateurs différentiels

Afin de pouvoir écrire les équations de la dynamique géophysique dans un système de coordonnées curvilignes, il est encore nécessaire de pouvoir y exprimer les opérateurs différentiels. Pour systématiser leur écriture, nous allons introduire le concept des dérivées covariantes qui peuvent être intuitivement considérées comme une généralisation aux repères curvilignes des dérivées partielles usuelles. En particulier, l'introduction des dérivées covariantes permet une écriture tensorielle des opérateurs différentiels dans un repère curviligne.

Considérons la variation d'un champ vectoriel $\mathbf{v}$. Dans le repère cartésien, cette variation dans une des directions du repère cartésien est donnée par la dérivée partielle de chacune des composantes du champ dans cette même direction :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \mathbf{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial y} \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} \mathbf{e}_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

de sorte que le champ vectoriel est localement constant dans la direction $\mathbf{e}_a$ si et seulement si la dérivée partielle selon a de chacune des composantes du champ est nulle.

Dans le repère curviligne, il faut non seulement tenir compte des dérivées partielles de chacune des composantes du champ dans la direction considérée, mais aussi de la variation des vecteurs de base dans cette direction. Dans la base covariante, nous écrirons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} &= \frac{\partial v^\beta}{\partial \xi} \mathbf{g}_\beta + v^\beta \frac{\partial \mathbf{g}_\beta}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} &= \frac{\partial v^\beta}{\partial \eta} \mathbf{g}_\beta + v^\beta \frac{\partial \mathbf{g}_\beta}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial v^\beta}{\partial \zeta} \mathbf{g}_\beta + v^\beta \frac{\partial \mathbf{g}_\beta}{\partial \zeta}.\end{aligned}$$

En exprimant les variations du vecteur de la base covariante en terme des symboles de Christoffel de la seconde espèce, on peut écrire de manière compacte la dérivée

covariante des composantes covariantes d'un vecteur $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial \alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta v^\gamma \right) \mathbf{g}_\beta. \quad (2.12)$$

De manière semblable, on peut obtenir la dérivée covariante des composantes contravariantes d'un vecteur $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma \right) \mathbf{g}^\beta. \quad (2.13)$$

En conclusion, les composantes de la dérivée covariante d'un champ scalaire, vectoriel ou tensoriel seront notées de la manière suivante

$$\begin{aligned} f_{|\alpha} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \\ v^\alpha_{|\beta} &= \frac{\partial v^\alpha}{\partial \beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma, \\ v_{\alpha|\beta} &= \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma, \\ T_{\alpha\beta|\gamma} &= \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta T_{\delta\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta T_{\alpha\delta}, \\ T^\alpha_{\beta|\gamma} &= \frac{\partial T^\alpha_\beta}{\partial \gamma} + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha T^\delta_\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta T^\alpha_\delta, \\ T^\beta_{\alpha|\gamma} &= \frac{\partial T^\beta_\alpha}{\partial \gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta T^\beta_\delta + \Gamma_{\delta\gamma}^\beta T^\delta_\alpha, \\ T^{\alpha\beta}_{|\gamma} &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \gamma} + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha T^{\delta\beta} + \Gamma_{\delta\gamma}^\beta T^{\alpha\delta}. \end{aligned}$$

On observe que, dans un repère curviligne, les dérivées covariantes jouent essentiellement le même rôle que les dérivées partielles dans le repère cartésien. L'intérêt majeur de l'usage des dérivées covariantes réside dans le fait que les variations d'un champ tensoriel exprimées par leur biais conservent le caractère tensoriel. L'introduction des dérivées covariantes permet d'écrire l'ensemble des opérateurs différentiels dans un repère curviligne. Nous nous limiterons ici à reprendre les formules de calcul. Leur dérivation, purement calculatoire, se trouve dans les ouvrages classiques de référence :

Aris (1962), Weinberg (1972).

$$\begin{aligned}
\nabla f &= g^{\alpha\beta} f_{|\alpha} \mathbf{g}_\beta, \\
\nabla \mathbf{b} &= \mathbf{g}_\alpha g^{\alpha\beta} b_{|\beta}^\gamma \mathbf{g}_\gamma, \\
\nabla \cdot \mathbf{b} &= b^\alpha_{|\alpha}, \\
\nabla \times \mathbf{a} &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha|\beta} \mathbf{g}_\gamma, \\
\nabla \cdot \mathbf{ab} &= (a^\alpha b^\beta)_{|\alpha} \mathbf{g}_\beta, \\
\Delta f &= g^{\alpha\beta} f_{|\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Notons que la compacité de ces expressions dissimule le grand nombre de termes générés par les indices répétés. Finalement, ces expressions restent cohérentes avec les formules usuelles dans un repère cartésien. On peut aussi montrer que les théorèmes intégraux classiques restent d'application pour les coordonnées curvilignes si l'on fait usage des dérivées covariantes.

2.1.3 Coordonnées curvilignes sur un triangle sphérique

Dans cette section, nous allons appliquer les outils des coordonnées curvilignes pour un triangle sphérique quelconque. Associer un repère curviligne à une surface courbe quelconque est équivalent à lui associer une représentation paramétrique particulière $\mathbf{x}(\xi)$ de sorte que seules les deux coordonnées curvilignes (ξ et η) suffisent à la décrire. La troisième coordonnée curviligne (ζ) peut être fixée à une valeur constante arbitraire. Ainsi, à partir de la représentation paramétrique $\mathbf{x}(\xi, \eta)$, nous pouvons mettre en oeuvre l'ensemble des concepts liés aux coordonnées curvilignes. En particulier, les vecteurs $\mathbf{g}_\xi$ et $\mathbf{g}_\eta$ forment une base du plan tangent à la surface courbe. Le vecteur $\mathbf{g}_\zeta$ est normal à la surface et peut être défini comme :

$$\mathbf{g}_\zeta = \frac{\mathbf{g}_\xi \times \mathbf{g}_\eta}{\|\mathbf{g}_\xi \times \mathbf{g}_\eta\|}. \tag{2.15}$$

Il est aisé de définir un isomorphisme qui relie un triangle sphérique quelconque Ω_e avec le triangle rectangle unitaire $\hat{\Omega}$ dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Ce choix est totalement arbitraire et est inspiré par la définition usuelle du triangle parent dans une technique d'éléments finis (Hughes, 1987).

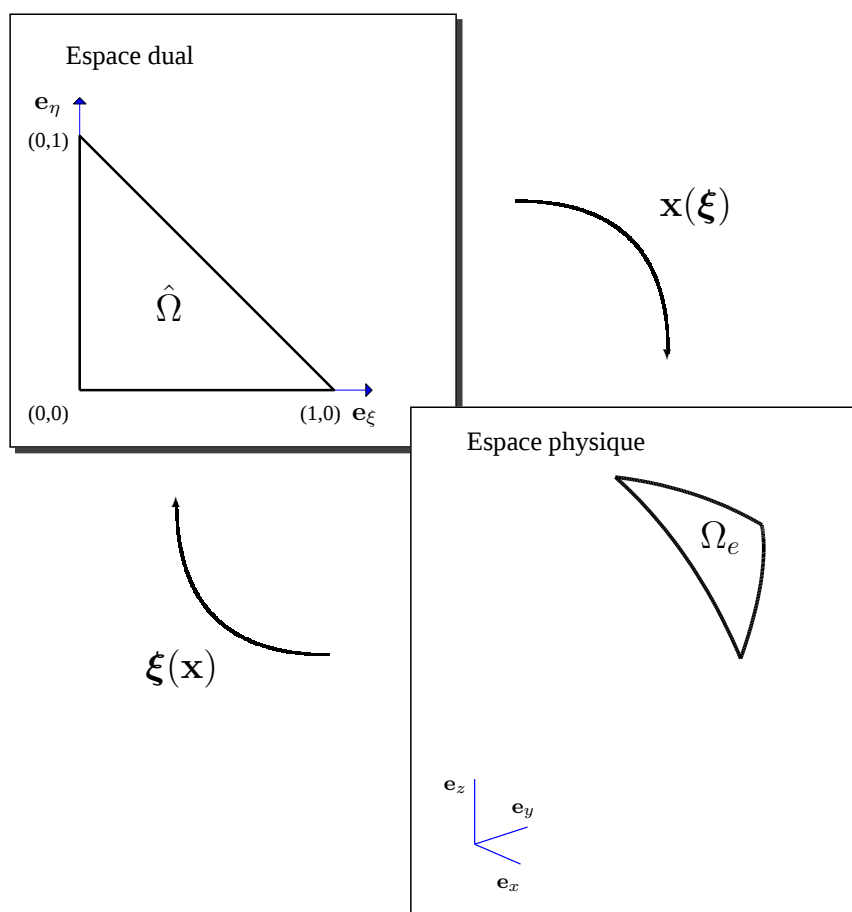


Figure 2.6: L'isomorphisme transforme le triangle parent $\hat{\Omega}$ en un triangle sphérique Ω_e plongé dans $\mathbb{R}^3$.

Considérons donc une sphère de rayon r dont le centre est confondu avec l'origine d'un repère cartésien $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Comme illustré sur la figure 2.6, l'isomorphisme doit transformer le triangle parent $\hat{\Omega}$ en un triangle sphérique Ω_e quelconque pour lequel nous connaissons uniquement les coordonnées cartésiennes $\mathbf{X}_i$ de ses trois sommets situés sur la sphère. L'isomorphisme est défini en deux étapes illustrées par la figure 2.7.

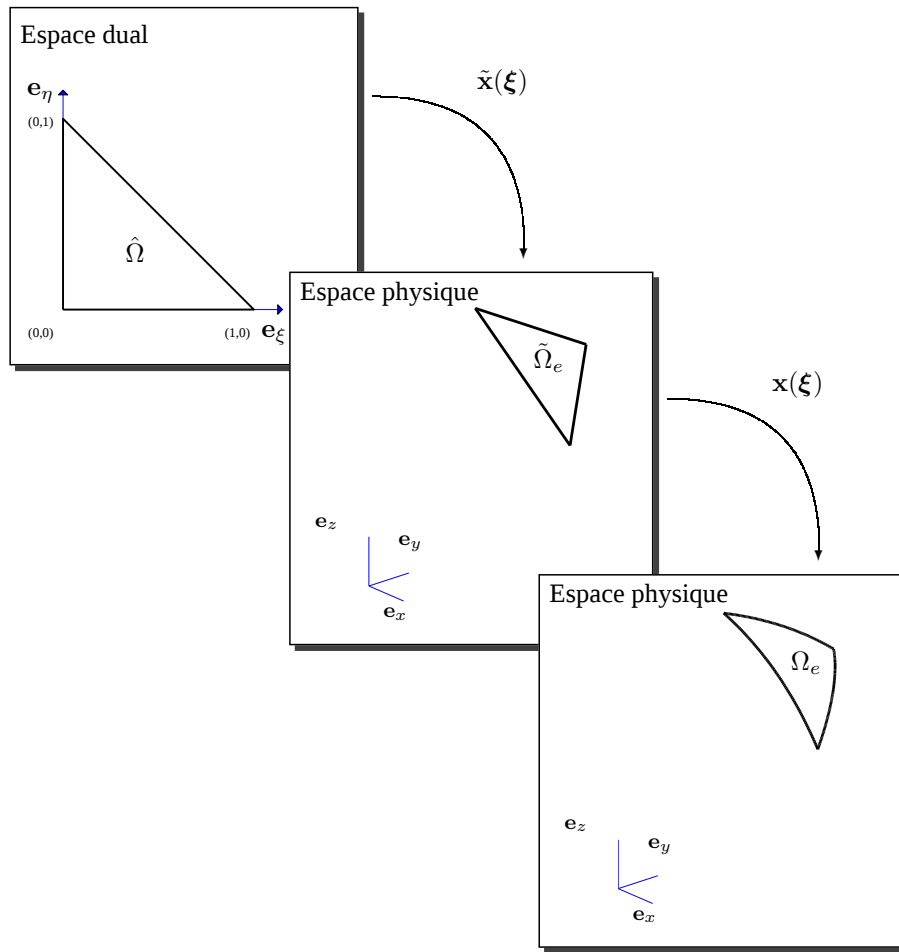


Figure 2.7: Définition de l'isomorphisme pour un triangle sphérique.

- Tout d’abord, nous transformons le triangle parent $\hat{\Omega}$ en un triangle plan $\tilde{\Omega}_e$ dont les sommets coïncident avec ceux du triangle sphérique Ω_e . Cette transformation s’écrit

$$\tilde{\mathbf{x}}(\xi) = (1 - \xi - \eta)\mathbf{X}_1 + \xi\mathbf{X}_2 + \eta\mathbf{X}_3. \quad (2.16)$$

Le jacobien de cette transformation $\tilde{\mathbf{x}}(\xi)$ étant constant, le rapport des surfaces élémentaires dans le triangle parent et le triangle projeté est constant en tout point. Observons que les trois facteurs des composantes sont les fonctions de forme linéaires de la méthode des éléments finis.

- Ensuite, chaque point de ce triangle $\tilde{\Omega}_e$ est projeté radialement sur la sphère de sorte que la composition de ces deux étapes

$$\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}(\xi)) = r \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \quad (2.17)$$

donne bien l’isomorphisme recherché.

Cette transformation est non-singulière pour tout triangle sphérique dont les trois sommets n’appartiennent pas à une même géodésique. Par contre, le fait qu’un ou plusieurs sommets coïncideraient avec les pôles géographiques ne pose strictement aucune difficulté. En outre, la projection radiale assure que tout segment de droite défini à l’intérieur du triangle parent se transforme en un arc de géodésique. Finalement, il est possible de procéder exactement de la même manière pour transformer un carré unitaire en un quadrangle sphérique quelconque.

Calcul des bases et des métriques

Après quelques opérations algébriques élémentaires, on peut écrire les vecteurs de la base covariante d’un triangle sphérique de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \xi} + \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right), \\ \mathbf{g}_\eta &= \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \eta} = \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \eta} + \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right), \\ \mathbf{g}_\zeta &= \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \zeta} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ces trois vecteurs ne sont pas nécessairement orthogonaux entre eux. Leur direction et leur norme ne sont pas constantes sur le triangle sphérique. Toutefois, les vecteurs $\mathbf{g}_\xi$ et $\mathbf{g}_\eta$ forment une base du plan tangent à la sphère. Le troisième vecteur $\mathbf{g}_\zeta$ est

perpendiculaire à ce plan. En tout point du triangle sphérique, on en déduit que la métrique covariante se réduit à une matrice de cinq termes non-nuls :

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{g}_\eta & 0 \\ \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\xi & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{g}_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tandis que la métrique contravariante peut être directement calculée comme l'inverse de cette matrice.

Calcul des symboles de Christoffel

Comme la courbure des coordonnées curvilignes n'est pas nulle, il est nécessaire d'évaluer les composantes des variations des vecteurs de base. Les composantes contravariantes de ces variations sont les symboles de Christoffel de seconde espèce. Cette évaluation ne pose pas de difficulté particulière et se réduit aux expressions suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_\xi}{\partial \xi} &= 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\xi \\ &\quad + r \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right) \mathbf{g}_\zeta \\ \frac{\partial \mathbf{g}_\xi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \mathbf{g}_\eta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\eta \\ &\quad + r \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right) \mathbf{g}_\zeta \\ \frac{\partial \mathbf{g}_\eta}{\partial \eta} &= 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\eta \\ &\quad + r \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right) \mathbf{g}_\zeta \end{aligned}$$

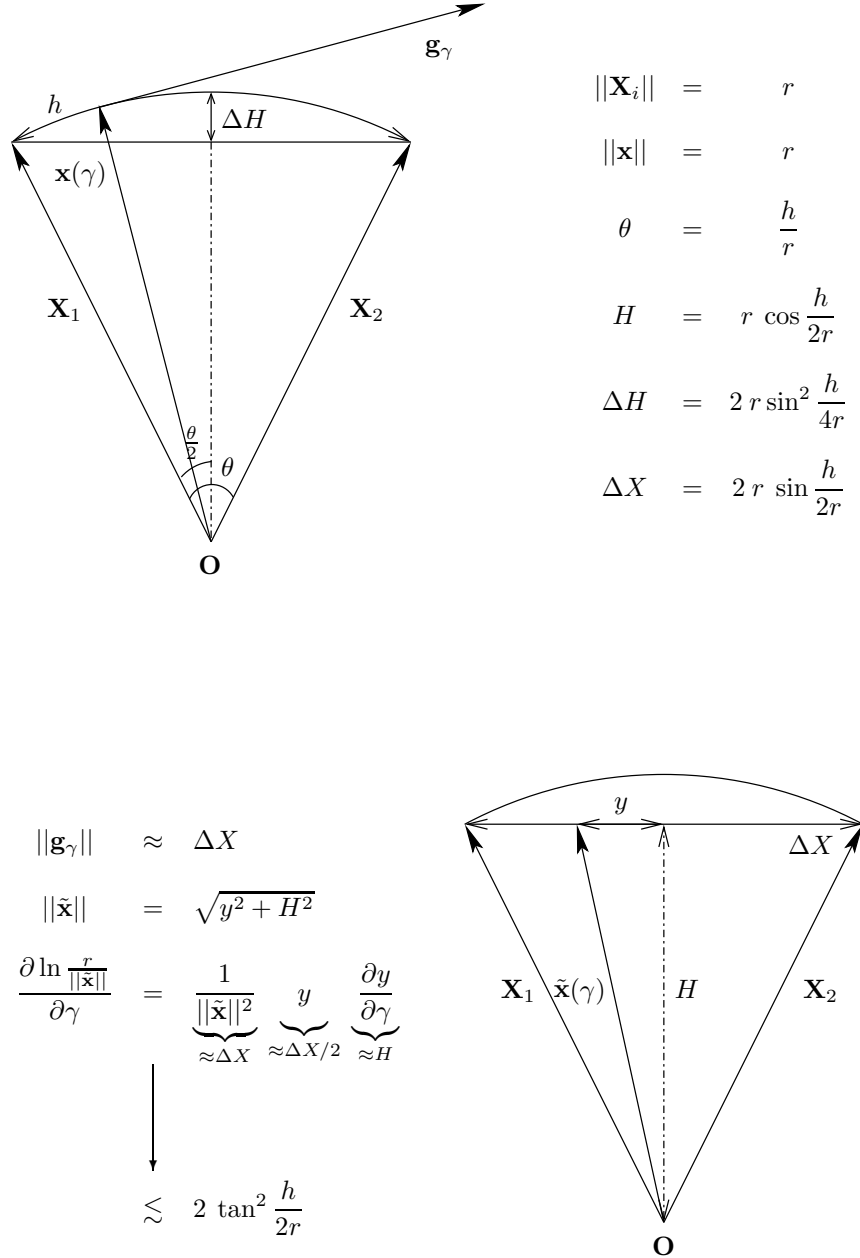


Figure 2.8: Estimation de l'ordre de grandeur des symboles de Christoffel dans un triangle sphérique.

On peut en déduire les formules de calcul suivantes pour les symboles de Christoffel :

$\Gamma_{\xi\xi}^{\xi} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{r}{ \tilde{\mathbf{x}} }$	$\Gamma_{\xi\eta}^{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{r}{ \tilde{\mathbf{x}} }$	$\Gamma_{\eta\eta}^{\xi} = 0$
$\Gamma_{\xi\xi}^{\eta} = 0$	$\Gamma_{\xi\eta}^{\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{r}{ \tilde{\mathbf{x}} }$	$\Gamma_{\eta\eta}^{\eta} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{r}{ \tilde{\mathbf{x}} }$

Sur la figure 2.8, nous illustrons l'ordre de grandeur des symboles de Christoffel dans le cas des triangles sphériques.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \approx \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \frac{r}{||\tilde{\mathbf{x}}||}$$

$$\lesssim \tan^2 \left(\frac{h_{max}}{2r} \right).$$

On observe que ces symboles de Christoffel décroissent très rapidement avec le rapport de la longueur de la plus grande arête du triangle et du rayon de la sphère. Pour une discrétisation réaliste de l'Océan Mondial, la taille des mailles varie de 5 km à 150 km si bien que les valeurs des symboles de Christoffel sont comprises entre $3 \cdot 10^{-7}$ et $3 \cdot 10^{-4}$. Etant donné que ces valeurs indiquent l'ordre de grandeur des variations relatives des vecteurs de la base covariante, nous en déduisons que les effets de courbure dans notre système de coordonnées curvilignes restent très petits dans le cas d'une discrétisation réaliste de l'Océan Mondial.

Calcul de l'isomorphisme inverse

Quoiqu'il n'est pas indispensable d'obtenir une expression de l'isomorphisme inverse pour écrire les équations discrètes par la méthode des éléments finis, cette expression est fort utile lorsque l'on souhaite effectuer le transfert de données entre deux grilles distinctes. Cette opération est indispensable lorsque nous nous intéresserons à la mise en oeuvre de maillages adaptatifs. En toute généralité, il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique de l'isomorphisme inverse pour une transformation quelconque. Toutefois, dans le cas particulier des triangles sphériques, il est possible d'obtenir une telle expression de manière purement géométrique.

Pour un point $\mathbf{x}$ de Ω_e , on fait correspondre un unique point $\tilde{\mathbf{x}}$ du triangle plan $\tilde{\Omega}_e$. Ces deux points appartiennent à une même droite passant par le centre de la sphère. Il est

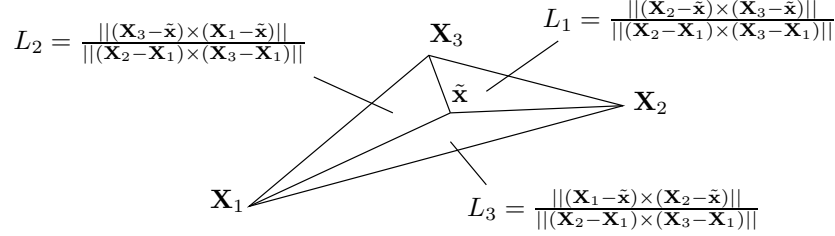


Figure 2.9: Définition des coordonnées barycentriques L_1, L_2, L_3 d'un point $\tilde{\mathbf{x}}$. Elles sont définies comme le rapport entre l'aire de chaque sous-triangle et celle du triangle initial.

alors possible de définir les coordonnées barycentriques de ce point $\tilde{\mathbf{x}}$. Ces coordonnées sont définies comme le rapport entre les aires des trois triangles reliant ce point aux sommets du triangle plan Ω_e et l'aire de ce triangle, comme l'illustre la figure 2.9. Le passage par le point $\tilde{\mathbf{x}}$ est nécessaire car il n'existe pas d'expression analytique des coordonnées barycentriques d'un triangle sphérique (Stuhne et Peltier, 1996). On observe ensuite que les coordonnées barycentriques (L_1, L_2, L_3) d'un isomorphisme linéaire valent tout simplement les valeurs des fonctions de forme linéaires, c'est-à-dire $(1 - \xi - \eta, \xi, \eta)$. En effectuant quelques manipulations algébriques, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \xi &= L_2 = \frac{\|(\mathbf{X}_3 - \tilde{\mathbf{x}}) \times (\mathbf{X}_1 - \tilde{\mathbf{x}})\|}{\|(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \times (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)\|} \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot ((\mathbf{X}_3 - \tilde{\mathbf{x}}) \times (\mathbf{X}_1 - \tilde{\mathbf{x}}))}{\mathbf{x} \cdot ((\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \times (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))} \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{X}_3 \times \mathbf{X}_1)}{\mathbf{x} \cdot ((\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \times (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2))} \\ \eta &= L_3 = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)}{\mathbf{x} \cdot ((\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3) \times (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3))}. \end{aligned}$$

2.1.4 Coordonnées curvilignes dans un prisme sphérique

Dans la mise au point d'un modèle tridimensionnel de circulation générale, nous avons opté pour l'utilisation d'éléments prismatiques obtenus par l'extrusion verticale d'une

triangulation de la surface du domaine. Cette procédure, illustrée sur la figure 2.10 assure la verticalité des faces quadrangulaires des prismes tout en conservant une certaine flexibilité quant à l'orientation des faces triangulaires. Ainsi, ces dernières peuvent être orientées parallèlement aux surfaces isopycnales ou à la bathymétrie pour obtenir une situation analogue aux coordonnées verticales généralisées (Kasahara, 1974; Thompson *et al.*, 1985; Deleersnijder et Ruddick, 1992; Adcroft et Hallberg, 2004). Ce choix est justifié par la stratification des écoulements océaniques. Dans la plupart des processus de la dynamique des fluides géophysiques, on est proche de l'équilibre hydrostatique. Une discrétisation efficace doit préserver explicitement cette anisotropie : l'utilisation de prismes permet de satisfaire cette contrainte.

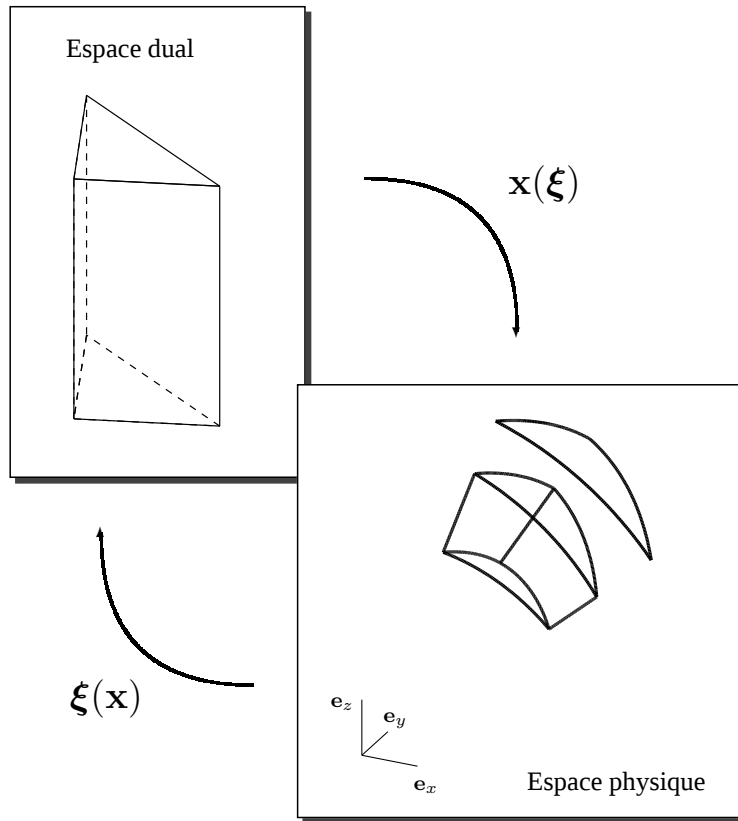


Figure 2.10: Définition de l'isomorphisme pour un prisme obtenu par extrusion verticale d'un triangle sphérique.

Considérons à nouveau un triangle sur la surface d'une sphère de rayon r . En partant de l'expression de l'isomorphisme du triangle sphérique, il est facile de définir l'isomorphisme d'un prisme sphérique construit par l'extrusion non-identique des trois sommets de ce triangle

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = (r + D(\boldsymbol{\xi})) \frac{\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})}{\|\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})\|}, \quad (2.19)$$

où le point $\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})$ est la projection radiale de $\mathbf{x}$ sur le triangle plan $\tilde{\Omega}_e$ et où $D(\boldsymbol{\xi})$ est la profondeur de ce même point $\mathbf{x}$. En suivant la procédure usuelle des éléments finis, on relie cette profondeur aux profondeurs D_i des six sommets du prisme

$$D(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^6 \psi_i(\boldsymbol{\xi}) D_i.$$

Comme indiqué dans le tableau suivant, les six fonctions de forme ψ_i sont associées aux sommets du prisme.

$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (0, 0, 0)$	$\psi_1(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \zeta)(1 - \xi - \eta)$
$(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = (1, 0, 0)$	$\psi_2(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \zeta)\xi$
$(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) = (0, 1, 0)$	$\psi_3(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \zeta)\eta$
$(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) = (0, 0, 1)$	$\psi_4(\xi, \eta, \zeta) = \zeta(1 - \xi - \eta)$
$(\xi_5, \eta_5, \zeta_5) = (1, 0, 1)$	$\psi_5(\xi, \eta, \zeta) = \zeta\xi$
$(\xi_6, \eta_6, \zeta_6) = (0, 1, 1)$	$\psi_6(\xi, \eta, \zeta) = \zeta\eta$

Calcul des bases et métriques

Les vecteurs de la base covariante s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} = \frac{r + D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \xi} + \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\ln \frac{r + D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right), \\ \mathbf{g}_\eta &= \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} = \frac{r + D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \eta} + \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \frac{r + D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right), \\ \mathbf{g}_\zeta &= \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} = \frac{\partial D}{\partial \zeta} \frac{\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})}{\|\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})\|}. \end{aligned}$$

La métrique covariante se calcule à l'aide de simples produits scalaires de ces vecteurs entre eux et la métrique contravariante est obtenue comme l'inverse de celle-ci.

Calcul des symboles de Christoffel

Afin d'obtenir une expression des symboles de Christoffel, on peut observer que les vecteurs de base peuvent être écrits sous la forme compacte suivante

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \alpha} + \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right).$$

Ceci permet d'écrire une expression compacte des variations des vecteurs de base et donc des symboles de Christoffel de seconde espèce :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\beta \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\zeta \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln \frac{r+D}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right) \mathbf{g}_\zeta. \end{aligned}$$

Tout comme pour les triangles sphériques, la plupart des symboles de Christoffel de seconde espèce restent très petits ($< 10^{-4}$) tant que le prisme reste mince ($D \ll r$) et d'épaisseur constante. Par contre, pour un prisme d'épaisseur variable, les coefficients $\Gamma_{\xi\xi}^\zeta$ et $\Gamma_{\eta\eta}^\zeta$ peuvent devenir importants. En effet, ces derniers mesurent en première approximation la variation relative de l'épaisseur du prisme.

2.2 Méthodes des éléments finis sur la sphère

A titre d'exemple, nous présentons la mise en oeuvre de la méthode de Galerkin appliquée aux équations des eaux peu profondes. Il ne s'agit ni de la formulation optimale pour résoudre ces équations, ni des équations qu'il conviendrait de mettre en oeuvre dans un modèle de circulation générale. Toutefois, cet exemple a le mérite de la simplicité tout en présentant toutes les difficultés géométriques qui apparaissent lorsque l'on souhaite appliquer la méthode des éléments finis sur la sphère. Il faut donc voir cette section comme un tutoriel pour l'implémentation pratique d'équations et de formulations plus complexes sur la sphère.

2.2.1 Application aux équations des eaux peu profondes

Les équations des eaux peu profondes modélisent la dynamique des écoulements géophysiques intégrée sur la hauteur d'une colonne de fluide. Ces équations bidimensionnelles s'obtiennent en intégrant les équations de Navier-Stokes et s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} &= -g \nabla \eta + \frac{1}{D} \nabla \cdot (\nu D \nabla \mathbf{u}), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(D + \eta) \mathbf{u}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ représente la vitesse horizontale moyenne, η et D désignent respectivement l'élévation et la bathymétrie. Le facteur de Coriolis et la viscosité sont respectivement notés f et ν tandis que $\mathbf{k}$ désigne la normale unitaire sortante. Le symbole ∇ représente l'opérateur de dérivation le long de la surface de la sphère. Il sera donc nécessaire de faire appel aux formules de calcul des opérateurs différentiels dans un système de coordonnées curvilignes locales pour pouvoir dériver les équations discrètes lorsque l'on applique la méthode des éléments finis.

Malgré leur apparente simplicité, notons que les équations des eaux peu profondes permettent la modélisation de nombreux phénomènes. Par exemple, elles sont utilisées avec succès dans la modélisation des ondes de marée, de tempêtes, de ruptures de barrage, de tsunamis et même de certains écoulements à l'échelle planétaire (Vreugdenhill, 1994). En outre, ces équations sont souvent un test numérique incontournable (Walters et Carey, 1984; Westerink *et al.*, 1994; Le Roux *et al.*, 1998; Hanert *et al.*, 2003; Le Roux *et al.*, 2005; Williamson *et al.*, 1992).

La méthode des éléments finis se construit à partir de la formulation faible d'un problème aux conditions aux limites. D'une manière schématique, on peut dire que cette formulation faible s'obtient en multipliant les équations différentielles par des fonctions test et en les intégrant sur tout le domaine d'intérêt Ω . Ensuite, il est usuel d'intégrer par partie et d'appliquer le théorème de la divergence sur les termes elliptiques afin de réduire l'ordre de dérivation requis pour les inconnues. C'est ainsi que l'on peut comprendre le qualificatif de faible puisque les exigences en terme de dérivabilité ont été adoucies dans une telle formulation. Dans le cas particulier des équations des eaux peu profondes, on effectue parfois également une intégration par partie afin d'imposer faiblement des conditions aux limites d'imperméabilité. Les aspects numériques et mathématiques associés au choix particulier d'une formulation faible ou discrète sortent largement du cadre de ce travail et sont discutés dans Hanert (2004). Ici, nous

choisissons donc la formulation faible utilisée par Hanert (2004) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \hat{\eta} - (D + \eta) \mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\eta} \right) d\Omega &= 0 \quad \forall \hat{\eta} \\ \int_{\Omega} \left(\hat{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla (\hat{u} \mathbf{u}) + f \mathbf{k} \times (\hat{u} \mathbf{u}) \right) d\Omega &= \\ - \int_{\Omega} \left(g \hat{u} \nabla \eta + D \nu \nabla \frac{\hat{u}}{D} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega &\quad \forall \hat{u}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ensuite, la méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'intérêt Ω en un ensemble de N_e éléments ouverts Ω_e telles que

$$\begin{aligned} \emptyset &= \Omega_i \cap \Omega_j, \quad \forall i \neq j \\ \bar{\Omega} &= \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}_e, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $\bar{\Omega}_e$ désigne la fermeture de Ω_e . L'ensemble de tels éléments forme un maillage du domaine. A la différence des grilles structurées utilisées dans les méthodes de différences finies, il n'existe aucune restriction quant à la forme, la taille, l'orientation ou les relations de voisinage entre les différents éléments. On dit ainsi que les maillages des éléments finis forment une grille non-structurée. En général, on choisit des éléments triangulaires et quadrangulaires de taille finie. La décomposition du domaine en N_e éléments permet de subdiviser le problème global en un ensemble de N_e sous-problèmes locaux définis sur chacun des N_e éléments. L'assemblage de ces problèmes locaux permettra d'obtenir de manière automatique le problème global.

La seconde étape consiste à définir une approximation polynomiale par morceaux des fonctions inconnues en les écrivant comme une combinaison linéaire de valeurs nodales inconnues et de fonctions de forme polynomiales définies a priori. Le support local des fonctions de forme assurera le caractère creux de la matrice du système linéaire qu'il faut résoudre pour obtenir ces valeurs nodales. Dans notre cas particulier, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} U_i(t) \\ V_i(t) \end{pmatrix} \phi_i(\mathbf{x}), \\ \eta(\mathbf{x}, t) &\approx \eta^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N H_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où $\mathbf{u}^h$ et η^h désignent respectivement les approximations discrètes des champs inconnus de vitesse et d'élévation. Les valeurs nodales de vitesse horizontale $U_i(t)$ et

$V_i(t)$ et d'élévations $H_i(t)$ caractérisent entièrement ces approximations à partir des fonctions de forme ϕ_i . En d'autres mots, l'évolution temporelle des champs discrets est entièrement décrite par l'évolution des valeurs nodales $U_i(t)$, $V_i(t)$ et $H_i(t)$. Afin d'alléger les notations, nous utilisons des fonctions de forme identiques pour la vitesse et l'élévation, quoiqu'en pratique il est nécessaire de faire usage d'approximations distinctes pour des raisons numériques.

Au sein d'un élément, ces approximations discrètes peuvent être écrites en terme de fonctions de forme et de valeurs nodales locales

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^h|_{\Omega_e}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} U_{e,i}(t) \\ V_{e,i}(t) \end{pmatrix} \phi_i^e(\mathbf{x}), \\ \eta^h|_{\Omega_e}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^n H_{e,i}(t) \phi_i^e(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

La correspondance entre les indices locaux et globaux ne peut pas être aisément déduite dans le cas des maillages non-structurés, ce qui implique une difficulté plus importante dans la mise en oeuvre de la méthode numérique par rapport à un code de différences finies sur des grilles structurées. Mais ceci est le prix à payer pour bénéficier de la flexibilité géométrique des grilles non-structurées.

Le calcul des valeurs nodales s'obtient en remplaçant les fonctions inconnues par leur approximation discrète, et les fonctions tests par les fonctions de forme correspondantes. Cela permet d'obtenir un système de $3N$ équations différentielles ordinaires non-linéaires à $3N$ inconnues. Ceci définit la formulation discrète dans l'espace et continue dans le temps.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \eta^h}{\partial t} \hat{\eta}^h - (D + \eta^h) \mathbf{u}^h \cdot \nabla \hat{\eta}^h \right) d\Omega &= 0 \quad \forall \hat{\eta}^h \\ \int_{\Omega} \left(\hat{u}^h \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} - \mathbf{u}^h \cdot \nabla (\hat{u}^h \mathbf{u}^h) + f \mathbf{k} \times (\hat{u}^h \mathbf{u}^h) \right) d\Omega &= \\ - \int_{\Omega} \left(g \hat{u}^h \nabla \eta^h + D \nu \nabla \frac{\hat{u}^h}{D} \cdot \nabla \mathbf{u}^h \right) d\Omega &\quad \forall \hat{u}^h\end{aligned} \quad (2.23)$$

Cette expression relativement abstraite cache une réalité beaucoup plus simple. En appliquant un schéma temporel et une linéarisation des termes non-linéaires, on obtient une formulation discrète qui se réduit à un système algébrique de $3N$ équations à $3N$ inconnues à chaque pas de temps. Cette formulation discrète peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A^{UU} & A^{UV} & A^{UH} \\ A^{VU} & A^{VV} & A^{VH} \\ A^{HU} & A^{HV} & A^{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{n+1} \\ V_i^{n+1} \\ H_i^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^U \\ R^V \\ R^H \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

où les inconnues sont les valeurs nodales U_i^{n+1} , V_i^{n+1} et H_i^{n+1} au pas de temps $n+1$. Les sous-matrices A^{UU} , A^{VV} et A^{HH} sont associées respectivement aux dérivées temporelles des champs de vitesse et d'élévation. Les sous-matrices A^{UV} et A^{VU} correspondent au traitement implicite du terme de Coriolis. De manière semblable, A^{UH} , A^{VH} , A^{HU} et A^{HV} sont issues du gradient de l'élévation et de la divergence du transport. Ils forment ce que l'on appelle habituellement la *matrice globale* du problème. Le choix d'un schéma d'intégration temporelle n'est pas trivial. Le traitement implicite, semi-implicite ou totalement explicite des différents termes est analysé dans Hanert (2004).

Pour obtenir la matrice globale, il est nécessaire de procéder à des intégrations sur l'ensemble du domaine. Pour effectuer celles-ci, il est astucieux de décomposer la matrice globale en une somme de matrices locales de petites tailles que l'on assemble ensuite. En d'autres mots, le problème global peut être décomposé en N_e sous-problèmes locaux qu'il faut coupler ou assembler. Aujourd'hui, il existe deux grandes familles d'approches pour réaliser ce couplage. Ce sont les méthodes d'éléments finis dites *continues* et celles dites *discontinues*.

Dans les méthodes continues, les différentes valeurs nodales sont partagées entre les différents éléments adjacents de sorte que la solution numérique est en tout point continue. Ce partage des valeurs nodales autorise explicitement des échanges entre les éléments. Les flux et les termes de bord peuvent être évalués exactement (Hughes *et al.*, 2000). Cependant, en pratique, il est plus facile d'assembler les N_e sous-problèmes en un système linéaire global. Si cet assemblage rend l'évaluation des termes de bord inutile (ceux-ci étant de signes opposés, ils s'annulent lors de l'assemblage), la résolution du système global exige l'utilisation d'un solveur linéaire souvent gourmand en mémoire. Dans les méthodes discontinues, une valeur nodale est associée à un unique élément. Autrement dit, chaque élément est découplé de ses voisins. La solution numérique n'est plus nécessairement continue aux interfaces des éléments si bien que les échanges entre les différents sous-problèmes doivent être explicités par les termes de bord. Ceux-ci étant inconnus, ils sont estimés à l'aide d'une approche adéquate qui tient généralement compte des sauts des champs aux interfaces des éléments (Cockburn *et al.*, 2000). L'avantage de cette approche est que, si les termes de bord sont évalués de manière explicite, chaque sous-problème local peut être résolu indépendamment de tous les autres. L'assemblage des N_e sous-problèmes en un grand système global n'est plus nécessaire, ce qui représente un gain important de mémoire.

Finalement, que ce soit une méthode continue ou discontinue, il est nécessaire d'écrire tous les sous-problèmes dans un système de coordonnées curvilignes locales et d'effectuer ensuite leur couplage ou assemblage. C'est cet aspect géométrique qui est la contribution originale de notre travail de recherche.

2.2.2 Calcul du problème local sur un triangle sphérique

L'intérêt principal de la méthode des éléments finis est d'utiliser un système de coordonnées curvilignes distincts pour chaque problème local. Il n'est donc plus nécessaire d'avoir un système de coordonnées curvilignes globales pour la sphère comportant inévitablement des singularités. Nous définissons donc N_e systèmes de coordonnées curvilignes définis par les isomorphismes (2.17) qui comprennent deux variables indépendantes α et β .

Sur un triangle sphérique, les deux champs inconnus peuvent s'exprimer comme des fonctions du temps et de ces deux variables curvilignes de la manière suivante :

$$\eta(t, \alpha, \beta),$$

$$\mathbf{u}(t, \alpha, \beta) = u^\alpha(t, \alpha, \beta) \mathbf{g}_\alpha(\alpha, \beta) + u^\beta(t, \alpha, \beta) \mathbf{g}_\beta(\alpha, \beta).$$

Le gradient des inconnues s'écrit en utilisant les formules de calcul de la géométrie différentielle.

$$\nabla \eta = (g^{\alpha\alpha} \eta_{|\alpha} + g^{\alpha\beta} \eta_{|\beta}) \mathbf{g}_\alpha + (g^{\beta\alpha} \eta_{|\alpha} + g^{\beta\beta} \eta_{|\beta}) \mathbf{g}_\beta$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = & \mathbf{g}_\alpha \left(g^{\alpha\alpha} u^\alpha_{|\alpha} + g^{\alpha\beta} u^\alpha_{|\beta} \right) \mathbf{g}_\alpha + \mathbf{g}_\beta \left(g^{\beta\alpha} u^\alpha_{|\alpha} + g^{\beta\beta} u^\alpha_{|\beta} \right) \mathbf{g}_\alpha \\ & + \mathbf{g}_\alpha \left(g^{\alpha\alpha} u^\beta_{|\alpha} + g^{\alpha\beta} u^\beta_{|\beta} \right) \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}_\beta \left(g^{\beta\alpha} u^\beta_{|\alpha} + g^{\beta\beta} u^\beta_{|\beta} \right) \mathbf{g}_\beta. \end{aligned}$$

Lorsque le maillage est suffisamment fin ($h \lesssim 100 \text{ km}$ pour la Terre), les termes de courbure des dérivées covariantes faisant intervenir les symboles de Christoffel deviennent petits. Ils peuvent être légitimement négligés tant que l'erreur que cela engendre reste petite ou du même ordre de grandeur que l'erreur de discrétisation. Dans ce cas, les dérivées covariantes se réduisent à des dérivées partielles usuelles. Par contre, si la résolution du maillage est trop grossière ou si les effets de la courbure de la sphère ne sont plus négligeables, il faudra conserver les dérivées covariantes en lieu et place des dérivées partielles. Ceci alourdira très légèrement la construction de la matrice locale. Comme négliger les termes de courbure est une approximation parfaitement crédible pour la plupart des applications, le gradient des inconnues se réduit à :

$$\nabla \eta = \left(g^{\alpha\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\alpha + \left(g^{\beta\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + g^{\beta\beta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\beta$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = & \mathbf{g}_\alpha \left(g^{\alpha\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\alpha + \mathbf{g}_\beta \left(g^{\beta\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \alpha} + g^{\beta\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\alpha \\ & + \mathbf{g}_\alpha \left(g^{\alpha\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}_\beta \left(g^{\beta\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \alpha} + g^{\beta\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\beta. \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.5) et (2.7) qui expriment que les vecteurs de base covariants et contravariants sont orthogonaux, il est possible d'écrire tous les opérateurs différentiels apparaissant dans les équations des eaux peu profondes en fonction des deux variables curvilignes locales.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\eta} &= u^\alpha \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \alpha} + u^\beta \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \beta} \\
\mathbf{u} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{u}}) &= \left(u^\alpha \frac{\partial \hat{u}^\alpha}{\partial \alpha} + u^\beta \frac{\partial \hat{u}^\alpha}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\alpha + \left(u^\alpha \frac{\partial \hat{u}^\beta}{\partial \alpha} + u^\beta \frac{\partial \hat{u}^\beta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\beta \\
f \mathbf{k} \times (\hat{\mathbf{u}}) &= f \|\mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta\| (-\hat{u}^\beta \mathbf{g}_\alpha + \hat{u}^\alpha \mathbf{g}_\beta) \\
g \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \eta &= g \hat{u} \left(g^{\alpha\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\alpha + g \hat{u} \left(g^{\beta\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + g^{\beta\beta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\beta \\
D\nu \nabla \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D} \cdot \nabla \mathbf{u} &= D\nu \left(g^{\alpha\alpha} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \beta} \right. \\
&\quad \left. + g^{\beta\alpha} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \alpha} + g^{\beta\beta} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\alpha \\
&\quad + D\nu \left(g^{\alpha\alpha} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \beta} \right. \\
&\quad \left. + g^{\beta\alpha} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \alpha} + g^{\beta\beta} \frac{\partial \frac{\hat{\mathbf{u}}}{D}}{\partial \beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \beta} \right) \mathbf{g}_\beta.
\end{aligned}$$

Ces expressions sont extrêmement simples à évaluer et totalement semblables à leurs homologues en coordonnées cartésiennes. Il est juste nécessaire d'ajouter quelques coefficients géométriques si bien que la construction des N_e sous-systèmes locaux ne pose aucune difficulté particulière. Chaque sous-système peut être schématiquement écrit comme

$$\begin{pmatrix} A_e^{UU} & A_e^{UV} & A_e^{UH} \\ A_e^{VU} & A_e^{VV} & A_e^{VH} \\ A_e^{HU} & A_e^{HV} & A_e^{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e,i}^{n+1} \\ V_{e,i}^{n+1} \\ H_{e,i}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_e^U \\ R_e^V \\ R_e^H \end{pmatrix},$$

Ce système discrétisé dans un système de coordonnées curvilignes locales à chaque élément du maillage peut être écrit de la manière compacte :

$${}_e\mathbf{A}_e {}_e\mathbf{z} = {}_e\mathbf{b}, \quad (2.25)$$

où l'indice e désigne l'élément considéré.

2.2.3 Assemblage des problèmes locaux

Comme chaque sous-système local est écrit dans un repère curviligne propre à l'élément considéré, l'étape d'assemblage des N_e sous-systèmes en un système global doit être précédée d'un changement de base adéquat afin d'exprimer dans une même base les composantes de chaque valeur nodale vectorielle partagée par plusieurs éléments. Ce problème ne se pose évidemment pas pour un champ scalaire.

Ici, on pourrait croire que l'inévitable problème des singularités d'un système de coordonnées curvilignes globales sur la sphère va subrepticement réapparaître. En réalité, il n'en est rien car les contributions pour une valeur nodale vectorielle ne proviennent que d'un nombre limité d'éléments qui englobent le sommet associé à cette valeur nodale. En d'autres mots, il est nécessaire de définir un système de coordonnées curvilignes globales pour chaque valeur nodale vectorielle. Cela n'implique donc pas que toutes les valeurs nodales doivent être exprimées dans la même base. En fait, les bases globales — i.e. des bases utilisées pour écrire les inconnues de la matrice globale du système — étant indépendantes les unes des autres, il existe autant de *bases globales* que de valeurs nodales. C'est pourquoi, nous définissons pour chaque élément un système de coordonnées curvilignes locales e basées sur l'élément parent et, pour chaque valeur nodale, nous définissons un autre système local de coordonnées curvilignes de manière purement arbitraire. Un peu abusivement, nous appelons ce second système de coordonnées curvilignes, le système de coordonnées globales g . Comme on exprime généralement le champ de vitesse en terme de latitude et de longitude, nous associons à chaque valeur nodale vectorielle le système de coordonnées globales g formés par les vecteurs orthonormés

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{j} &= \frac{-xz \mathbf{e}_x - yz \mathbf{e}_y + (x^2 + y^2) \mathbf{e}_z}{\sqrt{x^2 z^2 + y^2 z^2 + (x^2 + y^2)^2}}, \\ \mathbf{k} &= \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

pointant respectivement vers l'est, le nord et le zénith. Pour lever l'indétermination aux pôles géographiques, les directions vers l'est et le nord sont fixées à deux des directions perpendiculaires tangentes à la surface de la sphère.

Il suffit d'appliquer le changement de base à chaque sous-problème discret avant de procéder à l'assemblage. De manière formelle, si nous avons un problème local associé à un élément Ω_e écrit dans le système de coordonnées curvilignes e

$${}_e\mathbf{A}_e {}_e\mathbf{z} = {}_e\mathbf{b},$$

il est nécessaire de le réécrire en un système local exprimé dans les systèmes de coordonnées curvilignes globales g associées à chacun de ces noeuds.

$${}_g\mathbf{A}_g {}_g\mathbf{z} = {}_g\mathbf{b}.$$

La transformation du repère local vers le repère global s'effectue à l'aide de combinaisons linéaires adéquates pour chaque couple de lignes et colonnes associées à une valeur nodale.

$$\begin{array}{ccc} {}_e\mathbf{A}_e & {}_e\mathbf{z} & = {}_e\mathbf{b} \\ & \downarrow & \\ {}_e\mathbf{A}_e & \underbrace{{}_e\mathbf{Q}_g} & {}_g\mathbf{z} = {}_e\mathbf{b} \\ & \downarrow & \\ \underbrace{{}_g\mathbf{Q}_e} & {}_e\mathbf{A}_e & \underbrace{{}_e\mathbf{Q}_g} & {}_g\mathbf{z} = \underbrace{{}_g\mathbf{Q}_e} & {}_e\mathbf{b} \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ {}_g\mathbf{A}_g & & & {}_g\mathbf{z} & = {}_g\mathbf{b}. \end{array}$$

La première étape consiste à transformer le vecteur ${}_e\mathbf{z}$ des valeurs nodales inconnues dans la base locale en un vecteur d'inconnues ${}_g\mathbf{z}$ exprimé dans les repères globaux. Cette étape s'effectue par l'introduction de la matrice de transformation ${}_e\mathbf{Q}_g$. La seconde étape consiste à transformer les équations vectorielles exprimées dans un repère local, en des équations exprimées dans les repères globaux. Cette étape consiste à multiplier le système par la matrice de transformation ${}_g\mathbf{Q}_e$. Cette procédure est similaire à un changement de base d'une application linéaire si ce n'est que ce changement de base est différent pour chaque valeur nodale. Les matrices de changement de bases ${}_e\mathbf{Q}_g$ et ${}_g\mathbf{Q}_e$ dépendent évidemment de l'élément fini considéré, l'une étant l'inverse de l'autre.

Finalement, il nous reste juste à expliquer comment construire ces matrices de transformation. Comme il existe autant de repères globaux que de valeurs nodales, il est nécessaire de définir autant de changements de base que de valeurs nodales avant de les combiner pour former les matrices ${}_e\mathbf{Q}_g$ et ${}_g\mathbf{Q}_e$.

Chaque changement de base nodale peut se déduire en écrivant le vecteur dans les deux repères :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u^\alpha \mathbf{g}_\alpha + u^\beta \mathbf{g}_\beta, \\ &= u^i \mathbf{i} + u^j \mathbf{j}.\end{aligned}$$

En multipliant ces relations par les vecteurs $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{g}_\xi$ et $\mathbf{g}_\eta$, il est possible en vertu des propriétés d'orthogonalité d'obtenir immédiatement les matrices de transformation nodales

$$\begin{pmatrix} u^i \\ u^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{i} & \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{j} & \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\alpha \\ u^\beta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u^\alpha \\ u^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g^{\alpha\alpha}\mathbf{g}_\alpha + g^{\alpha\beta}\mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{i} & (g^{\alpha\alpha}\mathbf{g}_\alpha + g^{\alpha\beta}\mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{j} \\ (g^{\beta\alpha}\mathbf{g}_\alpha + g^{\beta\beta}\mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{i} & (g^{\beta\alpha}\mathbf{g}_\alpha + g^{\beta\beta}\mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ u^j \end{pmatrix}.$$

qu'il suffit de combiner pour obtenir les matrices de transformation ${}^e\mathbf{Q}_g$ et ${}_g\mathbf{Q}_e$ à appliquer au système linéaire local. A titre d'exemple, la matrice ${}_g\mathbf{Q}_e$ pour une interpolation linéaire de vitesse et d'élévation

$$(U_{e,1}, U_{e,2}, U_{e,3}, V_{e,1}, V_{e,2}, V_{e,3}, H_{e,1}, H_{e,2}, H_{e,3})$$

serait obtenue par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{i}|_{x_1} & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{i}|_{x_1} & \\ & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{i}|_{x_2} & \\ & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{i}|_{x_3} & \\ \hline \mathbf{g}_\xi \cdot \mathbf{j}|_{x_1} & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{j}|_{x_1} & \\ & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{j}|_{x_2} & \\ & \mathbf{g}_\eta \cdot \mathbf{j}|_{x_3} & \\ \hline & & 1 \\ & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Les trois premières lignes de cette matrice transforment les composantes selon les directions $\mathbf{i}$ des valeurs nodales de la vitesse ; les trois suivantes les composantes selon les directions $\mathbf{j}$ de ces mêmes valeurs nodales de vitesse. Finalement, le dernier bloc diagonal exprime le fait qu'aucune transformation n'est nécessaire pour l'inconnue scalaire d'élévation. Cette approche peut être généralisée à n'importe quel type d'interpolations ou de formulations de la méthode des éléments finis.

Chapitre 3

Génération de maillages non-structurés en océanographie

La simulation précise de la circulation générale de l'océan exige non seulement un modèle adéquat des forces physiques qui gouvernent le système, mais aussi une représentation suffisamment précise du domaine d'intérêt. Quelle que soit la méthode numérique utilisée, il est presque toujours indispensable de définir un maillage, c'est-à-dire une partition d'un domaine Ω donné en N_e entités géométriques Ω_e plus simples, ouvertes et disjointes (3) :

$$\begin{aligned}\emptyset &= \Omega_i \cap \Omega_j, & \forall i \neq j \\ \bar{\Omega} &= \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}_e,\end{aligned}$$

Ces entités sont appelées *éléments*, *mailles* ou *cellules* selon le langage propre à chaque méthode numérique. La qualité et la précision des résultats numériques seront toujours intimement liées à ce maillage.

La qualité d'un maillage dépend fortement de sa capacité à représenter la physique d'un problème avec un nombre de degrés de liberté minimum. Cela nécessite un contrôle stricte de la taille, de la forme et de l'orientation des mailles en fonction de leur position dans le domaine de calcul. Ce contrôle sera d'autant plus facilement atteint avec des maillages non-structurés utilisés par les méthodes des éléments finis

et des volumes finis que ces méthodes n'imposent aucune contrainte supplémentaire sur les relations topologiques ou de voisinages entre les mailles. Ceci confère aux maillages non-structurés une flexibilité géométrique inégalable par les grilles structurées utilisées par les méthodes de différences finies.

Bien qu'un maillage non-structuré peut contenir des éléments de formes différentes, les générateurs actuels de maillages non-structurés n'utilisent généralement que des mailles simplexes, c'est-à-dire des triangles pour les domaines bidimensionnels ou des tétraèdres pour les domaines tridimensionnels. En plus d'offrir la plus grande flexibilité géométrique possible, seuls ces maillages possèdent un cadre théorique (triangulation de Delaunay) pouvant faciliter la mise au point d'algorithmes efficaces, flexibles et robustes de génération de maillages. Il est bien connu (Ciarlet, 1979) que les maillages isotropes comme les triangulations de Delaunay sont des maillages quasi-optimaux pour les problèmes elliptiques isotropes. Par contre, pour des problèmes présentant des directions privilégiées bien marquées, il peut être utile d'introduire des mailles anisotropes alignées avec ces directions privilégiées.

Si la génération de maillages non-structurés est l'objet de nombreux travaux et logiciels depuis le milieu des années 70 et possède dès lors une littérature abondante (voir par exemple la bibliographie des livres de Goodman et O'Rourke (1997) ou de Frey et George (2000)), ses applications en océanographie ne sont étudiées que depuis une dizaine d'années (Henry et Walters, 1993; Le Provost *et al.*, 1994; Hagen *et al.*, 2001; Gorman *et al.*, 2005). En particulier, le traitement de la courbure de la Terre n'est traité que par un petit nombre d'auteurs. Les triangulations de Delaunay sur la sphère n'ont trouvé que fort peu d'applications en géophysique. Renka (1997) (sismologie), Legrand *et al.* (2000) (océanographie) et plus récemment Du et Ju (2003) se sont intéressés à leur génération. Les maillages présentés par Le Provost *et al.* (1994) et Gorman *et al.* (2005) ne sont que des maillages plans projetés sur la sphère.

Dans ce chapitre, nous introduisons l'ensemble des concepts théoriques sous-jacents au générateur de maillages que nous avons développé durant cette thèse. Nous avons tout d'abord développé une approche isotrope et anisotrope pour des domaines plans. Ensuite, nous avons étendu notre algorithme à des domaines sphériques. Notre générateur est basé sur l'algorithme incrémental de Watson-Bowyer (Watson, 1981; Bowyer, 1981) qui permet la génération de triangulations de type Delaunay contraintes. Ce travail est décrit dans Legrand *et al.* (2000) que nous reprenons à la fin de ce chapitre.

3.1 Graphes de Voronoï et de Delaunay

Considérons un ensemble de n points quelconques du plan

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n\},$$

où chaque point $\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i)$ est un vecteur position contenant les deux coordonnées du point considéré dans l'espace physique. Nous supposons que cet ensemble de points nous est fourni et est totalement arbitraire. Chaque point $\mathbf{P}_i$ est appelé *site*.

A chaque site, on associe une région de Voronoï définie comme l'ensemble des points qui sont plus proches du site considéré que de tous les autres (Voronoi, 1908)

$$V(\mathbf{P}_i) = \{ \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{P}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{P}_j\| \quad \forall j \neq i \}.$$

Sur la figure 3.1, chaque région de Voronoï apparaît comme un polygone convexe.

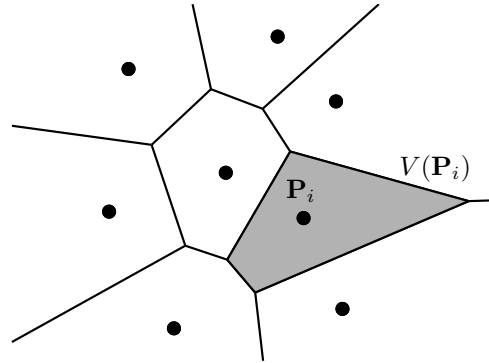


Figure 3.1: Régions de Voronoï d'un ensemble de points $\mathbf{P}_i$.

L'ensemble des intersections entre toutes ces régions forme le *graphe de Voronoï*

$$\mathcal{G}_{voronoi}(\mathcal{P}) = \bigcup_{i,j} V(\mathbf{P}_i) \cap V(\mathbf{P}_j).$$

Les arcs de ce graphe sont les arêtes de ces n polygones et ses sommets sont l'ensemble des m points $\mathbf{V}_j$ équidistants à plus de deux sites

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m\}.$$

Le nombre m de sommets n'est a priori pas égal au nombre n de sites. Chaque sommet $\mathbf{V}_j$ est le centre d'un cercle, noté $C(\mathbf{V}_j)$, qui relie l'ensemble des sites les plus

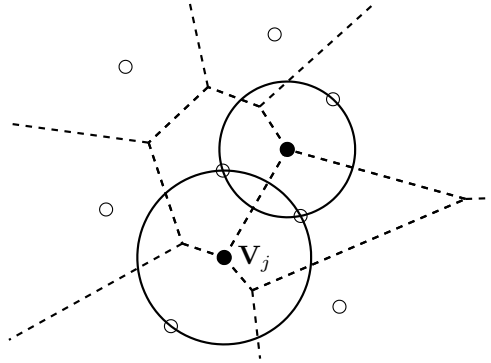


Figure 3.2: A chaque noeud du graphe de Voronoï est associé un cercle vide qui relie les sites les plus proches.

proches. Ce cercle ne contient aucun autre site. Il est appelé cercle circonscrit à V_j ou cercle vide (Goodman et O'Rourke, 1997). Dans la plupart des cas, ce cercle ne joint que trois sites. On dira alors que ces sites sont en "position générale". Parfois, plus de trois sites peuvent être reliés par un cercle. On peut imaginer le cas extrême illustré sur la figure 3.3 d'un unique cercle vide joignant l'ensemble des sites de $\mathcal{P}$.

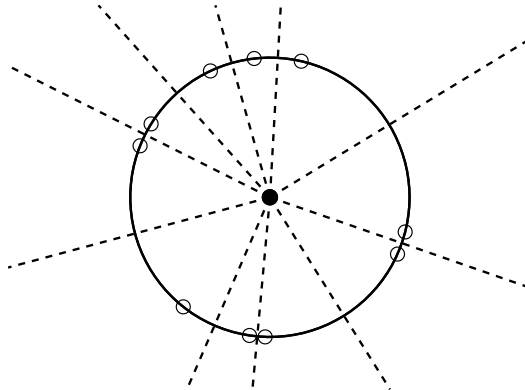


Figure 3.3: Graphe de Voronoï de dix sites cocycliques.

Lorsque l'on trace les segments de droites joignant les sites de régions de Voronoï adjacentes, on crée un nouveau graphe de $\mathcal{P}$. Chaque arête de ce nouveau graphe est orthogonale à une arête du graphe de Voronoï et délimitent m régions convexes $T(V_j)$ associées aux m sommets de Voronoï. Chacune de ces régions est circonscrite par le

Delaunay	Voronoï
n sommets $\mathbf{P}_i$ k arêtes m régions $T(\mathbf{V}_i)$	n régions $V(\mathbf{P}_i)$ k arêtes m sommets $\mathbf{V}_i$

TAB. 3.1: Correspondances entre les graphes de Delaunay et de Voronoï.

cercle vide $C(\mathbf{V}_j)$. Ce graphe est appelé *graphe de Delaunay (1934)* et est noté

$$\mathcal{G}_{\text{delaunay}}(\mathcal{P}) = \bigcup_{ij} T(\mathbf{V}_i) \cap T(\mathbf{V}_j).$$

La propriété du cercle circonscrit vide est appelé le *critère de Delaunay*.

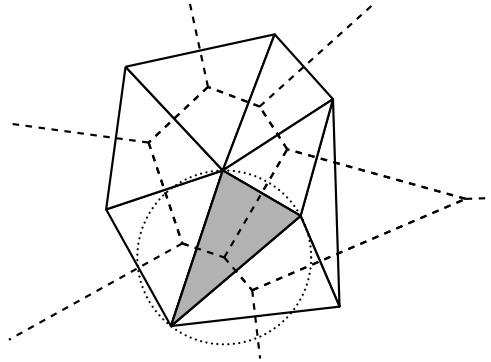


Figure 3.4: Le graphe de Delaunay est obtenu en joignant les sites voisins.

Si tous les sites sont en position générale, alors les régions de Delaunay sont toutes triangulaires. Dans le cas contraire, chaque région délimitée par plus de trois sites peut être partitionnée en triangles en y traçant des diagonales non-sécantes. Comme il y a plusieurs partitions possibles, plusieurs triangulations peuvent être obtenues. Ce sont les *triangulations de Delaunay* de $\mathcal{P}$. Les triangulations forment une partition de l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ des sites. Une triangulation de n sites comporte au plus $(2n - 4)$ triangles et $(3n - 6)$ arêtes.

Chaque région de Delaunay $T(\mathbf{V}_j)$ est convexe.	☆
Chaque région de Voronoï $V(\mathbf{P}_i)$ est convexe.	★
L'intérieur de chaque région de Delaunay $T(\mathbf{V}_j)$ et de chaque cercle vide $C(\mathbf{V}_j)$ ne contient aucun site $\mathbf{P}_i$.	☆
Le centre d'un cercle vide joignant plus de deux sites $\mathbf{P}_i$ est nécessairement un sommet de Voronoï $\mathbf{V}_j$.	★
Si le site $\mathbf{P}_j$ est le plus proche voisin du site $\mathbf{P}_i$, alors l'arête $(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j)$ appartient à $\mathcal{G}_{delaunay}(\mathcal{P})$.	☆
Une arête $(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j)$ appartient à $\mathcal{G}_{delaunay}(\mathcal{P})$ ssi il existe un cercle vide passant par ces deux sites.	★ ☆
La frontière de $\mathcal{G}_{delaunay}(\mathcal{P})$ coïncide avec la frontière de l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\mathcal{P})$.	☆
Une région de Voronoï $V(\mathbf{P}_i)$ est non-bornée ssi le site $\mathbf{P}_i$ appartient à la frontière de $\mathcal{H}(\mathcal{P})$.	★

TAB. 3.2: Principales propriétés des graphes de Voronoï (★) et de Delaunay (☆).

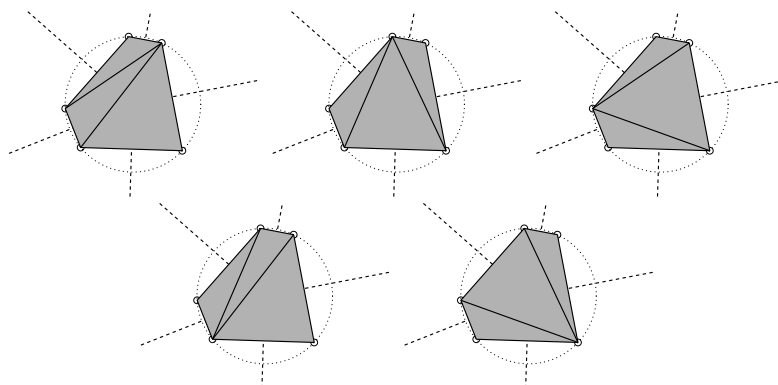


Figure 3.5: Les différentes triangulations d'une région de Delaunay de 5 sites.

Parmi toutes les partitions possibles de $\mathcal{P}$ en triangles, les triangulations de Delaunay maximisent l'angle minimal formé par les arêtes de la triangulation tout en minimisant le rayon maximal des cercles circonscrits aux éléments de la triangulation (Green et Sibson, 1978). En d'autres mots (et c'est leur principal attrait pour les éléments finis), les triangulations de Delaunay permettent un contrôle global de la forme des éléments dans le sens où elles tendent à produire les triangles les plus équilatéraux possibles.

Lawson (1972) a montré qu'à partir d'une triangulation quelconque de $\mathcal{P}$, on peut obtenir n'importe quelle autre triangulation de $\mathcal{P}$ uniquement par retournements d'arête. Comme illustré sur la figure 3.6, chaque retournement d'arête produit une nouvelle triangulation identique à la triangulation précédente à deux triangles près. Une manière simple de générer une triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$ consiste donc à effectuer une série de retournements d'arêtes bien choisies à partir d'une triangulation quelconque de $\mathcal{P}$. Le choix des arêtes à retourner peut être guidé par le critère de Delaunay. En effet, on peut montrer que si deux triangles adjacents T_1 et T_2 ne respectent pas le critère du cercle circonscrit vide (dans le sens où le sommet du triangle T_2 opposé au triangle T_1 est à l'intérieur du cercle circonscrit à T_1 et réciproquement), alors les deux triangles obtenus après le retournement de l'arête commune le respecteront. On peut aussi montrer que la triangulation obtenue une fois que tous les triangles adjacents respectent le critère du cercle circonscrit vide est une triangulation de Delaunay. Ce résultat est parfois appelé le *lemme général de Delaunay* (George et Borouchaki, 1997; Frey et George, 2000). Les autres algorithmes de génération de triangulation de Delaunay peuvent être classés en trois grandes catégories : les algorithmes incrémentaux, les algorithmes basés sur la décomposition de domaine et les algorithmes de balayage.

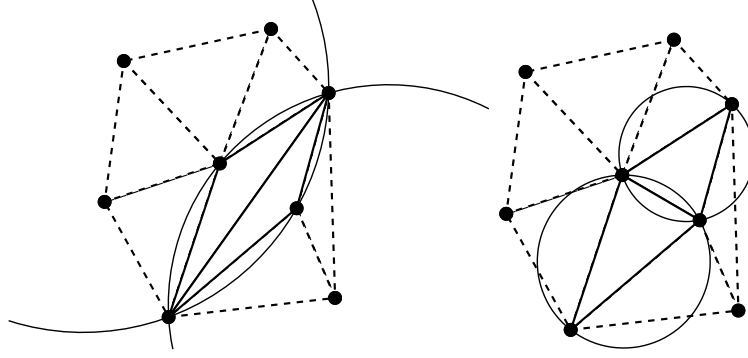


Figure 3.6: Le retournement d'arête bien choisie assure le respect local du critère de Delaunay.

Le principe des *algorithmes incrémentaux* (Watson, 1981; Bowyer, 1981) consiste à insérer un nouveau site $\mathbf{P}_{k+1}$ dans une triangulation de Delaunay $\mathcal{T}_k$ contenant k sites afin d'obtenir une nouvelle triangulation de Delaunay $\mathcal{T}_{k+1}$ contenant un site supplémentaire. Si l'on suppose que la triangulation initiale englobe l'entière de l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\mathcal{P})$, alors chaque nouveau site $\mathbf{P}_{k+1}$ doit appartenir à un triangle de $\mathcal{T}_k$ ainsi qu'à l'intérieur d'un certain nombre de cercles circonscrits aux éléments de $\mathcal{T}_k$. Par le critère de Delaunay, seuls ces éléments de $\mathcal{T}_k$ ne peuvent plus être éléments de $\mathcal{T}_{k+1}$. Ces constatations facilitent et systématisent l'insertion du nouveau site $\mathbf{P}_{k+1}$. Comme illustré sur la figure 3.7, celle-ci s'effectue en deux étapes. Tout d'abord, le triangle de $\mathcal{T}_k$ contenant $\mathbf{P}_{k+1}$ est partitionné en trois nouveaux triangles. Cette étape génère une nouvelle triangulation contenant respectivement un noeud, deux triangles et trois arêtes supplémentaires par rapport à $\mathcal{T}_k$. La seconde étape transforme cette nouvelle triangulation en la triangulation de Delaunay $\mathcal{T}_{k+1}$ en retournant les arêtes des éléments qui ne respectent plus le critère de Delaunay. L'application successive de cet algorithme à l'ensemble des sites de $\mathcal{P}$ génère une triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$.

La seconde grande catégorie d'algorithmes est la *décomposition de domaine*. Ces algorithmes décomposent géométriquement les sites de $\mathcal{P}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de taille identique grâce à une droite de séparation. Cette étape est répétée successivement sur chaque sous-ensemble jusqu'à l'obtention d'entités élémentaires dont on connaît la triangulation de Delaunay. Les triangulations de Delaunay de chaque sous-ensembles sont alors fusionnées dans l'ordre inverse de l'ordre de création des sous-ensembles. Comme illustré sur la figure 3.8, chaque fusion consiste à connecter les sites les plus proches des enveloppes convexes des deux sous-ensembles adjacents $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ afin de créer une nouvelle triangulation de l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j)$.

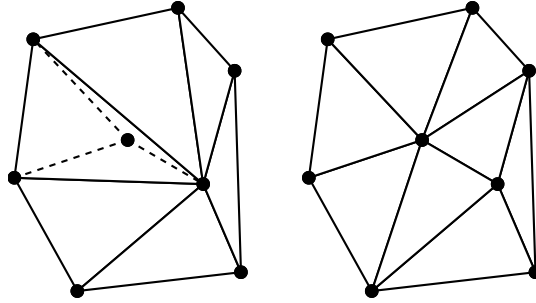


Figure 3.7: L'algorithme incrémental de Watson (1981) insère un nouveau site $\mathbf{P}_{k+1}$ dans une triangulation de Delaunay $\mathcal{T}_k$ en subdivisant le triangle de $\mathcal{T}_k$ qui le contient en trois sous-triangles. La triangulation de Delaunay $\mathcal{T}_{k+1}$ est finalement obtenue par retournement d'arêtes.

Cela exige de trier les sites de la frontière de chaque enveloppe convexe dans un ordre adéquat. Finalement, la triangulation résultant de la fusion est transformée en une triangulation de Delaunay par retournement d'arêtes. La performance des algorithmes de décomposition de domaine dépend principalement de la performance de l'algorithme de tri. La construction d'un arbre quaternaire bien balancé (quadtree) se révèle être un choix judicieux lors de la décomposition du domaine.

La troisième catégorie regroupe les *algorithmes de balayage*. Ceux-ci génèrent une triangulation de Delaunay par avancement progressif du front de la région déjà triangulée. La difficulté majeure de ces algorithmes consiste à déterminer une manière efficace de faire progresser le front. Une solution particulièrement astucieuse fut proposée par Fortune (1987). Comme illustré à la figure 3.9, à chaque site $\mathbf{P}_i$ est associé le cône

$$z^2 = (x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2$$

ouvert à 45° par rapport à l'axe des z . De même, un plan π incliné à 45° est aussi associé à la droite de balayage. Ce plan coupe les cônes situés "à la gauche" de π suivant des morceaux de parabole. La projection des intersections des paraboles sur le plan xy décrit le graphe de Voronoï $\mathcal{G}_{\text{voronoï}}(\mathcal{P})$. Ce graphe et par conséquent la triangulation de Delaunay de $\mathcal{P}$ sont construits dynamiquement au fur et à mesure que la droite de balayage avance. L'algorithme de Fortune peut sembler particulièrement compliqué. Toutefois il est aisément compréhensible si l'on fait l'analogie avec la croissance d'un polycristal autour de germes $\mathbf{P}_i$. Ainsi, la hauteur z d'un cône peut être interprétée comme le temps nécessaire pour qu'un grain du polycristal se développe autour d'un germe $\mathbf{P}_i$ et forme un disque de rayon $\sqrt{(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2}$. A partir d'un certain

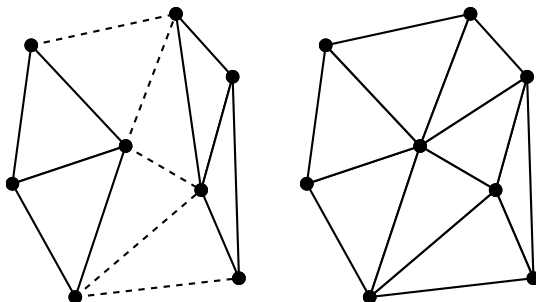


Figure 3.8: Dans les algorithmes de décomposition de domaine, la fusion de deux sous-ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ consiste à connecter les sites les plus proches des deux enveloppes convexes $\mathcal{H}(\mathcal{P}_1)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{P}_2)$. La triangulation de Delaunay de $\mathcal{H}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ est finalement obtenue par retournement d'arêtes.

moment, deux cristaux voisins se touchent. Ils peuvent continuer à croître pour former une face commune : les deux cônes voisins se coupent. L'idée astucieuse de Fortune consiste à ne pas analyser la croissance du polycristal de manière géométrique mais de manière spatio-temporelle. Pour ce faire, à la place de balayer l'axe des z avec un plan horizontal, il balaye tout le domaine spatio-temporel avec un plan π incliné à 45° , ce qui lui permet d'analyser la croissance d'un nombre restreint de grains voisins, i.e. les grains compris entre le front de la triangulation et le plan π d'analyse.

3.2 Mise au point d'un générateur de maillages

Dans cette section, nous allons introduire les caractéristiques principales du code que nous avons implémenté dans le cadre de ce travail de recherche. En particulier, nous présenterons l'extension à la sphère des algorithmes usuels de triangulations et nous donnerons brièvement les concepts utiles à l'introduction de maillages anisotropes. La plupart des détails techniques et algorithmiques sont repris dans les quatre publications principales qui supportent cette thèse et qui forment le reste de ce manuscrit.

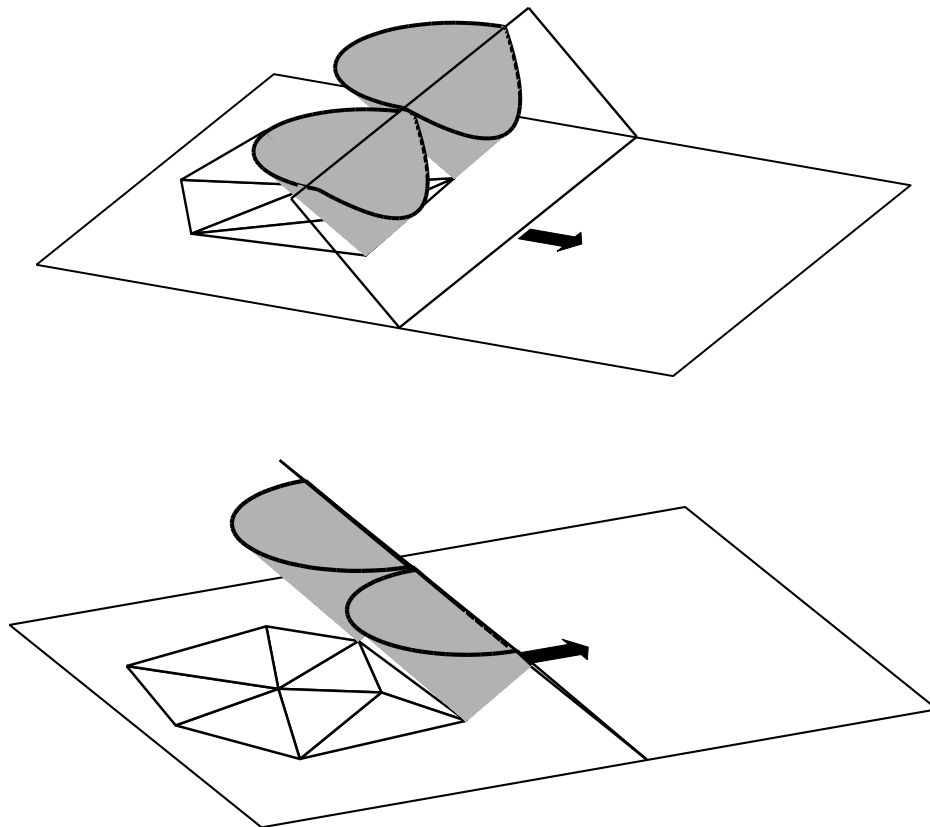


Figure 3.9: L'algorithme de Fortune (1987) calcule la triangulation de Delaunay à partir d'intersections entre des cônes et un plan de balayage.

3.2.1 Triangulations sur la sphère

Etant des constructions géométriques uniquement basées sur la notion de proximité, les graphes de Voronoï et de Delaunay peuvent être facilement étendus à n'importe quelle géométrie à n dimensions via une simple modification de la notion de distance entre deux points. De même, l'introduction de la distance géodésique permet de les étendre à n'importe quelle surface courbe (Grima et Marquez, 2001). La figure 3.10 illustre la généralisation du concept de triangulation de Delaunay au cas sphérique. Les géodésiques de la sphère sont uniquement des grands cercles, c'est-à-dire des cercles dont le centre coïncide avec le centre de la sphère. On peut en déduire que la distance géodésique entre deux points $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ est

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_{\mathcal{G}} = r \arccos \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{r^2} \quad (3.1)$$

avec r le rayon de la sphère. Puisque cette distance est bornée par la valeur $r \pi$, toutes les régions de Voronoï sont nécessairement fermées si bien que, comme illustré à la figure 3.10, tout graphe de Delaunay doit recouvrir l'entièreté de la sphère.

Le critère de Delaunay du cercle vide se calcule aisément sur la sphère. En effet, ce critère dit que deux triangles $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j \mathbf{P}_k$ et $\mathbf{P}_j \mathbf{P}_i \mathbf{P}_l$ sont de Delaunay si et seulement si le rayon du cercle circonscrit au triangle $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j \mathbf{P}_k$ est plus petit que la distance entre le centre du cercle circonscrit $\mathbf{c}_{ijk} = (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) \times (\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_i)$ et n'importe quel autre site de la triangulation, en particulier le sommet opposé $\mathbf{P}_l$ du second triangle :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_i - \mathbf{c}_{ijk}\|_{\mathcal{G}} &< \|\mathbf{P}_l - \mathbf{c}_{ijk}\|_{\mathcal{G}} \\ r \arccos \frac{\mathbf{c}_{ijk} \cdot \mathbf{P}_i}{r^2} &< r \arccos \frac{\mathbf{c}_{ijk} \cdot \mathbf{P}_l}{r^2} \\ \mathbf{c}_{ijk} \cdot \mathbf{P}_i &> \mathbf{c}_{ijk} \cdot \mathbf{P}_l \\ \mathbf{c}_{ijk} \cdot (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_i) &< 0. \end{aligned}$$

Le critère de Delaunay étant facilement calculable, les trois grands algorithmes de génération de triangulation s'étendent directement à la géométrie sphérique.

3.2.2 Triangulations anisotropes

Comme de nombreux phénomènes suggèrent l'usage de maillages anisotropes, il est souhaitable de généraliser le concept de graphe de Delaunay aux cas des triangulations anisotropes, tout en préservant au maximum la même structure algorithmique.

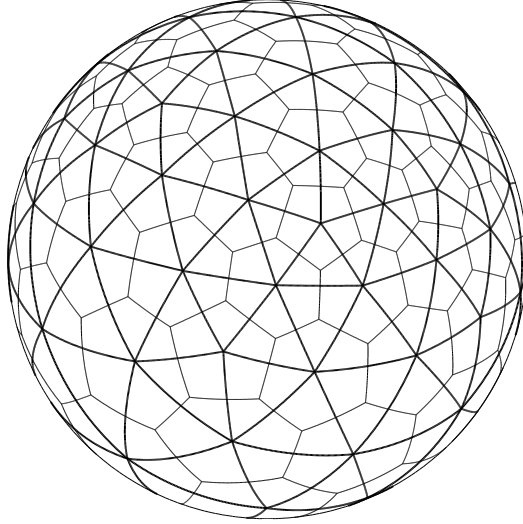


Figure 3.10: La généralisation des graphes de Voronoï et de Delaunay sur la sphère est basée sur la notion de distance géodésique. En conséquence, chaque arête de ces graphes est un arc de grand cercle, i.e. un arc de géodésique.

Un tel compromis peut être atteint par l'introduction de la *distance géodésique* modifiée par une métrique judicieusement choisie. En d'autres mots, nous construisons une triangulation isotrope dans un espace dual défini par une métrique $g(\mathbf{x})$. L'introduction de l'anisotropie se fait donc par la définition d'une transformation de l'espace. On observe que nous traiterons les deux spécificités de notre générateur de maillages, l'introduction de la sphère et de l'anisotropie, dans l'unique formalisme de la géométrie différentielle.

De manière pratique, on définira la distance suivante pour l'algorithme de triangulation :

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_{\mathcal{G}} = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}}. \quad (3.2)$$

que l'on peut interpréter comme la distance dans un espace dual qui ne sera jamais considéré explicitement. A la place, la métrique est construite de sorte qu'elle contienne l'ensemble des caractéristiques des éléments du maillage anisotrope désiré. En particulier, leur taille, leur forme et leur orientation. Ceci se fait en remarquant qu'avec une métrique constante, le lieu des points équidistants à un autre point au sens de (3.2) forme une ellipse dont l'aplatissement/l'anisotropie est contrôlée par le rapport des deux valeurs propres de la métrique et dont l'orientation des axes principaux est donnée par les vecteurs propres unitaires orthogonaux (v_x, v_y) et $(-v_y, v_x)$ de la métrique :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_x(\mathbf{x}) & -v_y(\mathbf{x}) \\ v_y(\mathbf{x}) & v_x(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{//}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{\perp}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(\mathbf{x}) & v_y(\mathbf{x}) \\ -v_y(\mathbf{x}) & v_x(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Tout l'art de la génération des triangulations anisotropes réside finalement dans la mise au point de stratégies efficaces pour le choix des vecteurs propres et des valeurs propres de la métrique. C'est là tout le défi de l'adaptation des maillages.

Dans la suite du manuscrit, nous incluons les quatre publications qui supportent cette thèse :

- Dans un premier article (Legrand *et al.*, 2000), nous présentons les principales caractéristiques algorithmiques de l'implémentation d'un générateur de maillage sur la sphère. Cette implémentation est une contribution originale, puisqu'à notre connaissance, seuls Renka (1997) et plus récemment Du et Ju (2003) se sont également intéressés à la génération de triangulations de Delaunay sur la sphère mais sans tenir compte du problème de la représentation précise de frontières comme le sont les îles et les continents.
- Dans une deuxième publication (Legrand *et al.*, 2003), nous présentons une méthode d'interpolation qui projette un champ de vitesse incompressible d'un maillage vers un autre maillage.
- Dans une troisième publication (Legrand *et al.*, 2006b), nous présentons l'utilisation de l'adaptivité dans le cadre de la géométrie particulièrement complexe de la Grande Barrière de Corail en Australie. Le grand nombre d'îles et la présence d'un très large spectre d'échelles spatiales a permis de valider la robustesse de notre logiciel face à des applications réalistes.
- Finalement, dans une dernière publication (Legrand *et al.*, 2006a), nous utilisons l'anisotropie des maillages pour introduire une représentation efficace du talus continental entre le plateau continental nord-ouest européen et l'Atlantique nord.

Delaunay Mesh Generation for an Unstructured-Grid Ocean General Circulation Model

S. Legrand^{1,2}, V. Legat² and E. Deleersnijder¹

¹ Institut d'Astronomie et de Géophysique G. Lemaître,
Université Catholique de Louvain,
2 Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

² Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics,
Université Catholique de Louvain,
4 Avenue Georges Lemaître, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

E-mail: legrand@astr.ucl.ac.be

This article was originally published in *Ocean Modelling*, 2, 17-28.

Abstract

An incremental method is presented to generate automatically boundary-fitted Delaunay triangulations of the global ocean. The method takes into account Earth curvature and allows local mesh refinement in order to resolve topological or dynamical features like mid-ocean ridges or western boundary currents. Crucial issues like the nodes insertion process, the boundary integrity problem or the creation of inner nodes are explained. Finally, the quality of generated triangulations is discussed.

Keywords: Unstructured grid, Delaunay triangulation, sphere, global ocean.

1 Introduction

Since the pioneering work of Bryan (1969), most ocean general circulation models (OGCMs) are using finite-difference techniques on structured grids. If those grids are based on the geographical coordinates, stability problems are likely to arise in the vicinity of the North Pole (Williamson, 1979). Many approaches were suggested to deal with this difficulty within the framework of

structured grid models (e.g. Williamson, 1979, Murray, 1996). So far, essentially three types of solution have been implemented in OGCMs: combined grids as equatorial transform (Deleersnijder et al., 1993, Eby and Holloway, 1994, Coward et al., 1994), grids generated semi-analytically (Madec and Imbard, 1996) and grids generated analytically (Murray, 1996, Purser and Rančić, 1997, Bentsen et al., 1999). However, two main drawbacks due to the rigidity of all these structured grids are inescapable. Firstly, their staircase representation of coastlines exerts some spurious form stress on model boundary currents (Adcroft and Marshall, 1998) and the alternative grid generation method based on boundary-fitted coordinates (Wilkin and Hedström, 1998) only works for regional applications. Secondly, the rigidity of these grids combined with the expensive CPU cost of the OGCMs prevents the resolution of relatively small topological and dynamical features without nesting or adaptive mesh refinement (Blayo and Debreu, 1999). However, the fine resolution of these features is likely to be a key point for a globally well-resolved ocean circulation model. Among these are equatorial dynamics, western boundary currents, mesoscale eddies, ridges, continental slopes, channels and straits.

Using unstructured grids would help to solve the problems listed above. This is why numerical methods as finite elements may be potentially interesting for modelling the global ocean. While these were successfully used in tidal (Shum et al., 1997) and coastal modelling (Lynch et al., 1996), little interest has been expressed so far in the other branches of oceanography (Myers and Weaver, 1995, Le Roux et al., 1998) apart from the spectral finite element ocean model (SEOM) (Iskandarani and Haidvogel, 1995, Curchister and al., 1998). However, they have significant advantages over finite difference.

A first advantage of finite element methods is their inherent ability to deal with unstructured grids. These grids easily allow local grid refinement to give high resolution without loss of accuracy. The use of such grids also avoids the meridian convergence problem of longitude-latitude grid in the vicinity of the North Pole.

A second advantage is their strong and rigorous mathematical foundation based on a weighted residual formulation. The solution which is typically constructed from a polynomial expansion belongs to an a priori defined function space. The mathematical foundations of the finite element method also allows a precise definition of the accuracy which leads to adaptive finite element methods.

In this paper, we present a method to generate automatically unstructured meshes of the global ocean. To take advantage of robust and well-known algorithms, we have subdivided the ocean into a conform triangulation. Such triangulations have been already used in oceanography and are generated by usual codes like TriGrid (Henry and Walters, 1993). These codes – which are principally aimed toward the automatic generation of finite element networks in the two horizontal dimensions for use with models of coastal circulation – are not adapted to the global ocean, a domain for which Earth curvature influences dramatically the quality of generated meshes. For instance, to reach good quality meshes of the global ocean with TriGrid, Le Provost et al. (1994) had to split the global ocean into subdomains which are supposed plane. Therefore, we developed our generator to provide a mesh generator well adapted to large-scale oceanography. From a technical point of view, the ocean surface is directly triangulated on spherical surface. We have also implemented the automatic creation of nodes – both boundary and inner nodes – during the mesh generation.

A first Delaunay triangulation generator on the sphere using an incremental method was implemented by Renka (1997) but the applications of this generator did not deal with boundaries like the coastlines. This issue is properly addressed below.

2 Unstructured adaptive finite element methods

Let $\mathbf{u}$ be the exact solution of a general circulation model. The block-field vector $\mathbf{u}$ includes all variables of an oceanic circulation model: the velocity components, the pressure, the temperature and the salinity. Let $\mathbf{u}^h$ be the approximation of $\mathbf{u}$ so that

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

where $\mathbf{U}_i$ are unknown nodal values and where ϕ_i are given piece-wise polynomial shape functions. This form of $\mathbf{u}^h$ allows a finite element treatment of the spatial discretisation and a finite-difference treatment of the time discretization.

For a coercive discrete operator (typically, a coercive operator can be viewed as the discrete algebraic system obtained by applying standard Galerkin finite element procedure to a dissipative physical model), the following interpolation

property holds (Ciarlet, 1979) :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^{p+1}}{\rho} \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \quad (2)$$

where $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ and $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ are usual Sobolev norms, p is the order of the shape functions, h is a typical mesh size, ρ is a typical inscribed circle radius of the triangulation elements, C is a triangulation-independent constant. For a given mesh size, the fact that the triangulation exhibits small shape factors $\frac{h}{\rho}$ is a crucial issue for the accuracy of the finite element approximation so that the normalized inverse of the shape factor is used to quantify the quality of a triangulation. This quality factor belongs to the interval $[0, 1]$. The quality factor of a degenerated triangle vanishes while that of an equilateral triangle is equal to unity. It is commonly accepted that a triangulation is a good one if all its triangles have just acute angles. It means that the quality factor of the worst triangle must be greater than 0.5.

Equation (2) is an a priori error estimation for all problems where a dissipative term appears, such as shallow water models (see, for instance, Foreman, 1984). A more accurate a posteriori error estimation can be calculated when the finite element solution $\mathbf{u}^h$ is known. The joint use of a priori and a posteriori error estimations leads to an automatic adaptive method (Johnson and Szepessy, 1995). In other words, an adaptive method consists in calculating a discrete solution $\mathbf{u}^h$ and the a posteriori error on a first grid. If the error is greater than the precision objective, the a priori error is used to determine the minimum number of nodes which must be added in the grid to reach the objective. Finally, a discrete solution is calculated on the new grid and the process starts again. Here, we only investigate the initial step, i.e. the design of a first mesh. To obtain such a mesh with suitable shape factor, we use the standard Delaunay triangulation.

3 Delaunay triangulation on the sphere

Let $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ be a set of points in a plane which are called nodes. Now, partition the plane by assigning every point in the plane to its nearest node. All those points assigned to x_i form the Voronoi region $V(x_i)$. The set of all points belonging to more than one Voronoi region defines the Voronoi diagram. The dual graph of a Voronoi diagram is obtained by drawing connecting lines between nodes perpendicular to the edges of the diagram (Figure 1). It can be proved that the dual graph of a Voronoi diagram produces a triangulation of the nodes which is called the Delaunay triangulation. This duality

between Delaunay triangulation and Voronoi diagram ensures the uniqueness of the Delaunay triangulation – if co-cyclic points are excepted.

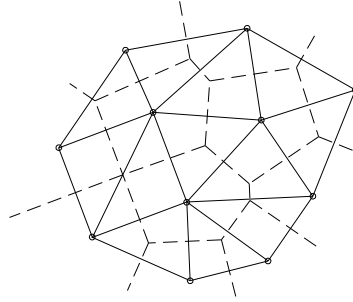


Figure 1: Delaunay triangulations (solid lines) are obtained by drawing connecting lines between nodes perpendicular to the edges of the Voronoi diagram (dashed lines). When four nodes are co-cyclic, quadrangular elements are produced but they can be correctly divided into two triangles.

An important property holds for the Delaunay triangulation: the open circle circumscribed to a triangle does not contain any triangle vertex. One of the consequences of this property is that Delaunay triangles exhibit good shape factors.

To adapt Delaunay triangulation to the sphere, the usual distance between two points may be replaced by the geodesic one, i.e. the length of the unique great circle arc passing through two points of the sphere. Therefore, we are able to define the Voronoi diagram on the sphere. It can be shown that the dual triangulation of this diagram has in most cases good shape factors. Without loss of generality, such a triangulation can be characterized by the Delaunay criterion: if S is the surface to triangulate, the open sphere circumscribed to any triangle of the triangulation and whose center lies on the surface of S does not contain any triangle vertex (Jayaraman et al., 1997).

Delaunay triangulations are used for several applications and a variety of algorithms to obtain it was developed. In the intersection of halfplanes approach, each Voronoi region is constructed separately, by intersecting $n - 1$ halfplanes. This algorithm has a cost of $O(n^2 \log n)$. The best algorithm from a theoretical point of view is the divide and conquer approach proposed by Bentley

and Shamos (1976). This approach has a complexity of $O(n \log n)$ but it is rather difficult to implement. An equivalent approach but more simple to implement is the clever plane-sweep algorithm of Fortune (1987). This algorithm passes a sweep line over the plane, leaving at any time the problem solved for the portion of the plane already swept, and unsolved for the portion not yet reached. Actually, this very short description hides several major problems, which Fortune surmounted by an extraordinary clever idea (O'Rourke, 1993). A popular approach is the incremental construction of the Delaunay triangulation. Suppose a Delaunay triangulation $\mathcal{T}$ of k nodes is already constructed, and now we would like to construct the triangulation $\mathcal{T}'$, after adding the node p . Suppose p falls inside the circles associated with several triangles in $\mathcal{T}$. Then, these triangles cannot be triangles in $\mathcal{T}'$ anymore, because they violate the Delaunay criterion. It turns out that these are the only triangles of $\mathcal{T}$ that are not carried over to $\mathcal{T}'$ and that these triangles are located on one area of the graph. The algorithm complexity is $O(n^2)$ and is known as the incremental Watson algorithm (Watson, 1981).

As our problem consists in creating a good triangulation from a given spherical domain but without knowing a priori all the nodes x_i , we have adapted the incremental algorithm with automatic creation of nodes on segments in a dynamic fashion in order to reach a preset level of local size for the element (Figure 2):

- *Creation of an initial triangulation.* As for all incremental methods, the Watson algorithm needs a starting point, i.e. an initial Delaunay triangulation which can be easily implemented. For symmetry reasons we have chosen an initial triangulation with 5 nodes (two on the poles and the remaining three on the equator) and six triangles. However, this is not the only possible choice.
- *Insertion of boundary nodes.* To have an easy representation of continents and islands, known boundary nodes are firstly inserted in the triangulation one by one. As the Delaunay triangulation is unique and if numerical errors are ignored, the order of nodes insertion does not influence the final Delaunay triangulation.

The creation of a Delaunay triangulation $\mathcal{T}_{k+1}$ of $k + 1$ nodes from a Delaunay triangulation $\mathcal{T}_k$ of k nodes requires two steps. The first one consists in inserting the new node p in the old triangulation $\mathcal{T}_k$: the triangle which contains p is searched and replaced by three new triangles whose vertices are the new node p and the vertices of the old triangle. The second step transforms the new triangulation into a Delaunay one. Only a limited number of triangles are involved by such a transformation.

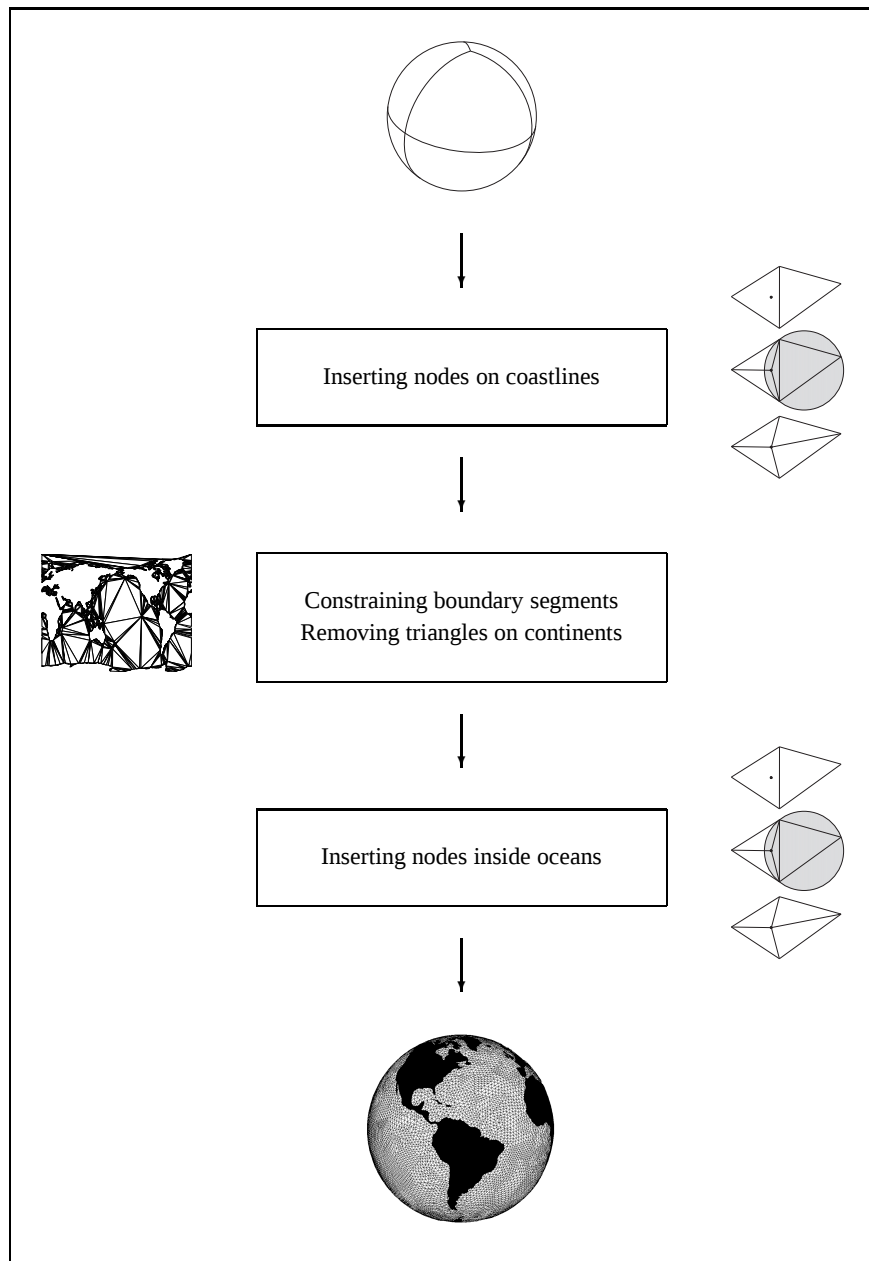


Figure 2: Basic steps of the Delaunay triangulation algorithm.

This is based on the two following properties. The first one says that if

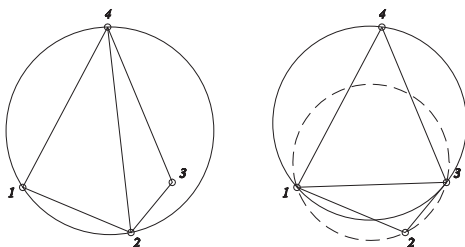


Figure 3: Swapping a segment to obtain triangles satisfying the Delaunay criterion.

the Delaunay criterion is respected for all configuration of two adjacent triangles so the triangulation is a Delaunay one while the second one says that a triangulation of a set of nodes X can be transformed into another triangulation of X by a succession of segment swaps. Each swap creates a new triangulation. A Delaunay triangulation can be obtained only by swapping common segments of triangles which do not respect the Delaunay triangulation (Figure 3). More details can be found in Cherfils and Hemerline (1990).

Errors due to floating point computations may lead to defects such as intersecting and overlapping triangles. Typically, these defects occur when the test for finding the triangle containing the node to insert fails (Boender, 1994). Therefore to identify if a node is at the right or the left of a segment, the implementation must be done in such a way that the result is robust: all nodes must belong only to one triangle in a conform triangulation.

- *Boundary integrity problem.* To represent boundaries, the Delaunay triangulation is constrained to avoid the swap of a boundary segment. Once created, they will never be destroyed. This constraint can already be applied during the insertion of boundary nodes. However, when all boundary nodes are inserted in the triangulation, nothing ensures that all the boundary segments have been created. This is the boundary integrity problem. The easiest solution to implement is certainly to find the missing segments and to subdivide them by inserting their midpoints so, after some repetitions, the boundaries are closed. By this approach, very short segments can be created so that at the end of the algorithm bad quality triangles could be generated. Another solution without insertion of new nodes consists in swapping the edges intersecting the missing

boundary segments until it is created. Then, it must be verified that the new triangles respect the Delaunay criterion.

It could also be useful to extend this algorithm so that segments are created taking into account information about bathymetry.

- *Destruction of triangles.* The insertion of the boundary nodes in the triangulation generates triangles outside the ocean. To avoid the creation of undesired inner nodes, those are destroyed immediately after the insertion of the boundary nodes (Figure 4).

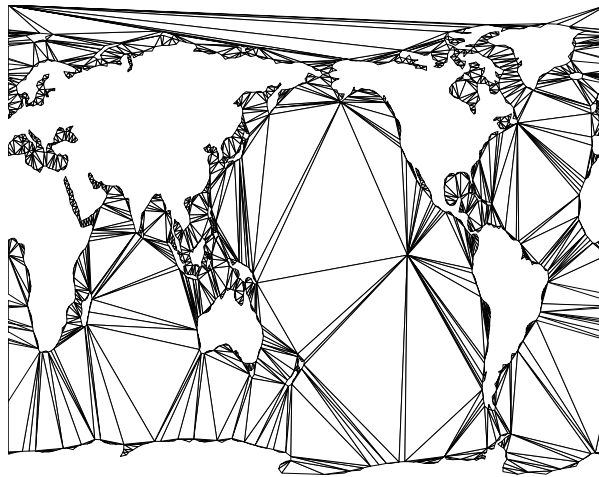


Figure 4: Triangulation after that triangles on continents were removed: the coastlines are well-fitted, particularly the European and the Indonesian coastlines. Obviously, the shape of most triangles is very far from the equilateral.

- *Creation of inner nodes.* Finally, new nodes are created in a dynamic fashion at the middle of well chosen segments in order to reach a preset level of local mesh size. Uniform distribution of triangle shapes is obtained by an iterative procedure that consists in inserting a new node in the middle of the longest segment of the triangulation. Non-uniform triangulations are obtained by using a weighted distance to identify the longest segment. Of course, after each node insertion, the new triangulation is transformed into a Delaunay one. These algorithms have the main advantage that they bypass problems due to floating point compu-

tations. Illustrations of uniform and graded meshes along oceanic western boundaries and Equator are displayed in Figure 5.

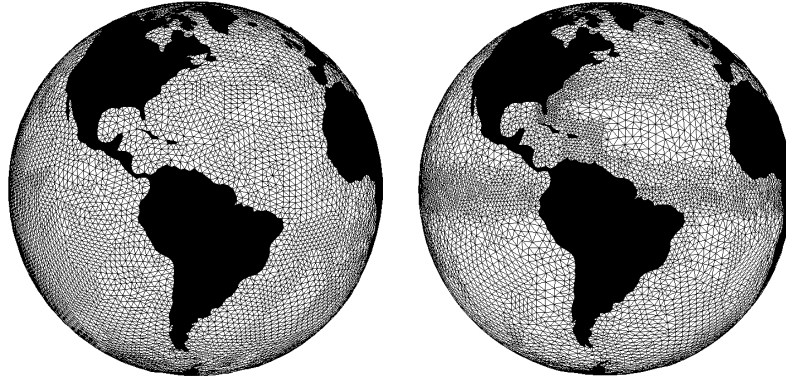


Figure 5: Both triangulations contain approximately 10000 nodes. The first triangulation has an almost uniform mesh size of 130 km. The second triangulation is adapted to resolve the Gulf Stream dynamics. Its typical mesh size is equal to 20 km in the refined regions and is equal to 160 km elsewhere.

4 Results

Typically, the CPU cost of the triangulation algorithm is totally negligible with respect to that of OGCM calculations. However, we provide here some CPU times for completeness. On a standard PC (Pentium III - 500 MHz - 120 Mo of RAM), the time needed to generate an unstructured graded mesh of 10^5 nodes is 12 seconds. It varies linearly with the number of inserted nodes. Our adapted implementation allows to obtain such a result which is quite better than the theoretical complexity of $O(n^2)$. We use a binary tree which allows at any time the knowledge of the longest weighted segment: this bypasses most of the searches. Of course, such a data structure increases memory requirements. For example, the insertion of a new node requires 560 bytes.

The second issue is the quality of the triangulations which is given by the normalized inverse of the shape factor. The boundary design and the segments weight govern essentially the quality of the grid — both controlled by the user.

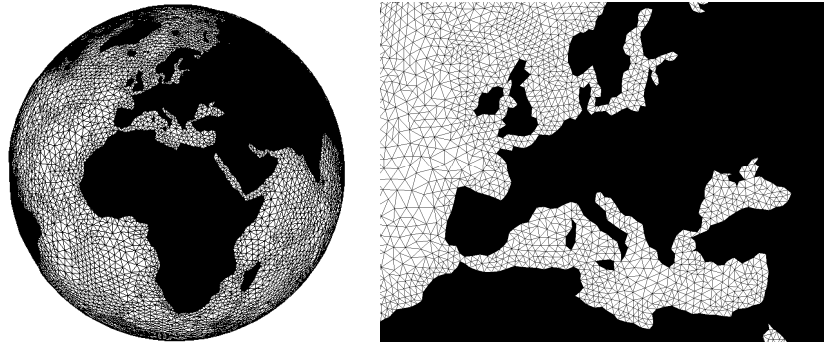


Figure 6: Triangulation whose refinement is based on the bathymetry and close up view of Europe area.

The boundary design must be adapted to the desired mesh size: a too fine boundary design compared with the typical mesh size leads to flat triangles. The stopping condition of the incremental algorithm must be based on an a priori specified mesh size which allows an automatic fit of the boundary design. To obtain a good representation of the coastlines, we treat the boundary design in two steps. In the first step, a physical representation of the coastlines is obtained by inserting boundary nodes with exact geographical coordinates. The choice of these nodes has to be driven both by the geometry of the boundaries and by modelling issues. In the second step, such a representation can be completed by adding new boundary nodes with interpolated coordinates and not exact geographical coordinates. In fact, this step filters small-scale details of the coastlines which have been previously judged irrelevant for the calculations and which would introduce critical numerical difficulties (bad triangles or introduction of significant errors due to the coarse representation of the features). In Figure 6, the linear piecewise interpolation of the coastlines could be improved by using high order piecewise polynomial interpolation (typically cubic splines or Bezier curves).

Strong differences in weight distribution which lead to highly graded meshes influence poorly the quality of the generated meshes. Indeed, sharp gradients in weight distribution mean that two regions with different mesh size are juxtaposed so that at the interface flat triangles could be generated. For instance, an abrupt step trough which the segments weight is doubled creates triangles whose quality factor is smaller than 0.4.

Figure 7 shows the distribution of the quality factor of the mesh produced by the Watson algorithm with automatic creation of nodes on segments. More than 90 % of the triangles of the grid have quality factor greater than 0.7 and any triangles have quality factor smaller than 0.5. The worst quality factor is equal to 0.53. Although this distribution is already satisfactory (cf. section 2), it can be improved by using the Laplacian smoothing and the mesh relaxation (Boender, 1994). In fact, the first method optimizes nodes position while the second optimizes the connexion pattern between the nodes. Clearly, many triangles in the modified mesh exhibit better shape factor. In other words, these are closer to equilateral triangles. However, a very few number of elements (0.5%) have still a relatively poor quality factor in particular near the coastlines.

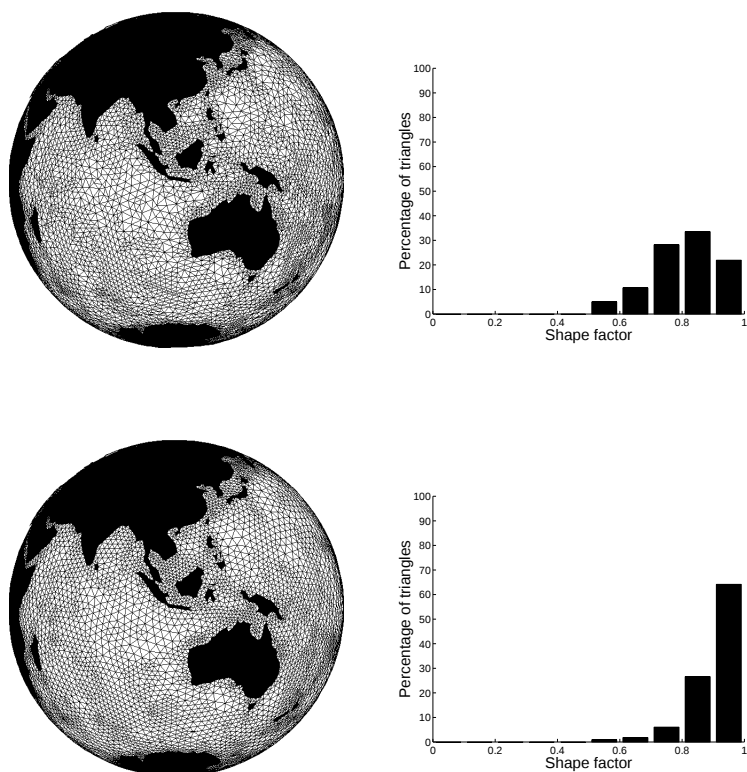


Figure 7: Improvement of shape factor distribution by Laplacian smoothing and mesh relaxation.

5 Conclusion

We have implemented an incremental algorithm to generate unstructured meshes for a global ocean circulation model. Needing only the specification of coastlines and segments weight, a triangulation with good shape factors can automatically be created. In particular, no singularities or uncontrolled convergence zones are created. The generator appears to be able to refine at a correct scale the topological and dynamical features which are key points for a globally well-resolved ocean circulation model. Among these are equatorial dynamic, western boundary currents, mesoscale eddies, ridges, continental slopes, channels or straits.

The next step of our work will be the development of an ocean general circulation model based on the finite element method to compare the efficiency of unstructured grids with classical approaches.

Finally, the mesh generator is a general purpose tool that could be useful in other fields of geophysics. Let us just mention the interpretation of scattered measurements on the Earth (Nielson, 1993).

Acknowledgements

We are indebted to J.-M. Campin, H. Goosse and O. Magotte for useful discussions. Eric Deleersnijder is a Research Associate with the National Fund for Scientific Research of Belgium. The present work is funded by the Convention d'Actions de Recherche Concertées ARC 97/02-208 (Communauté française de Belgique).

References

- Adcroft, A. and D. Marshall (1998) How slippery are piecewise-constant coastlines in numerical models? *Tellus*, 50 A, pp. 95–108.
- Bentley, J. and M. Shamos (1976) Divide-and-conquer in multidimensional space. *Conference Record of the Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 220–230.
- Bentsen, M., G. Evensen, H. Drange and A.D. Jenkins (1999) Coordinate transformation on a sphere using conformal mapping. *Monthly Weather Review*, 127(12), pp. 2733–2740.
- Blayo, E. and L. Debreu (1999) Adaptive mesh refinement for finite-difference ocean models: First experiments. *Journal of Physical Oceanography*, 29(6), pp. 1239–1250.
- Boender, E. (1994) Reliable Delaunay-based mesh generation and mesh improvement. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10, pp. 773–783.

- Bryan, K. (1969) A numerical Method for the study of the circulation of the World Ocean. *Journal of Computational Physics*, 4, 347-376.
- Cherfils, C. and F. Hermeline (1990) Diagonal swap procedures and characterizations of 2d delaunay triangulations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 24(5), pp. 613-626.
- Ciarlet, P. (1979) The finite element method for elliptic problem. *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland.
- Coward, A.C., P.D. Killworth and J.R. Blundell (1994) Tests of a 2-grid world ocean model. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 99:C11, pp. 22725-22735.
- Curchister, E.N., M. Iskandarani and D.B. Haidvogel (1998) A spectral element solution of the shallow-water equations on multiprocessor computers. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 15, pp. 510-521.
- Deleersnijder, E., J.P. van Ypersele and J.M. Campin (1993) An orthogonal, curvilinear coordinate system for a world ocean model. *Ocean Modelling*, 100, pp. 7-20.
- Eby, M. and G. Holloway (1994) Grid transformation for incorporating the Arctic in a global ocean model. *Climate Dynamics*, 10, pp. 241-247.
- Foreman, M.G.G. (1984) A Two-Dimensional Dispersion Analysis of Selected Methods for Solving the Linearized Shallow Water Equations. *Journal of Computational Physics*, 56, 287-323.
- Fortune, S. (1987) A sweepline algorithm for Voronoi diagram. *Algorithmica*, 2, pp. 153-174.
- Haidvogel, D.B., J.L. Wilkin and R. Young (1991) A semi-spectral primitive equation ocean circulation model using vertical sigma and orthogonal curvilinear horizontal coordinates. *Journal of Computational Physics*, 94, pp. 151-185.
- Iskandarani, M. and D. Haidvogel (1995) A staggered spectral element model with application to the oceanic shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20, pp. 393-414.
- Jayaraman, V., H.S. Udaykumar and W.S. Shyy (1997) Adaptive unstructured grid for three-dimensional interface representation. *Numerical Heat Transfer*, 32(3), pp. 247-265.
- Henry R.F. and R.A. Walters (1993) Geometrically based, automatic generator for irregular triangular networks. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9 (7), pp. 555-566.
- Johnson, C. and A. Szepessy (1995) Adaptive finite element methods for conservation laws based on a posteriori error estimates. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLVIII, pp. 199-234.
- LeProvost C., M.L. Genco, F. Lyard, P. Vincent and P. Canceil (1994) Spectroscopy of the World Ocean Tides from a Finite-Element Hydrodynamic Model. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 99 (C12), pp. 24777-24797.
- Le Roux, D.Y., A. Staniforth, C.A. Lin (1998) Finite elements for shallow-water equation ocean models. *Monthly Weather Review*, 126:7, pp. 1931-1951.
- Lynch, D.R. and F. Werner (1991) Three-dimensional hydrodynamics on finite elements. part II: Non-linear time-stepping model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12, pp. 507-533.
- Lynch, D.R., J.T. Ip, C.E. Naimie and F.E. Werner (1996) Comprehensive coastal model with application to the gulf of maine. *Continental Shelf Research*, 16 (7), pp. 875-906.
- Madec, G. and M. Imbard (1996) A global ocean mesh to overcome the north pole singularity. *Climate Dynamics*, 12, pp. 381-388.
- Murray, R. (1996) Explicit generation of orthogonal grids for ocean models. *Journal of Computational Physics*, 126, pp. 251-273.
- Myers, P. and A. Weaver (1995) A diagnostic barotropic finite-element ocean circulation model. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 12, pp. 511-526.
- Nielson, G. (1993) Scattered data modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13-1, pp. 60-70.
- O'Rourke, J. (1993) *Computational geometry* in C. Cambridge University Press.
- Purser, R. and M. Rančić (1997) Conformal octagon: an attractive framework for global models offering quasi-uniform regional enhancement of resolution. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 62, pp. 33-48.
- Renka, R. (1997) Algorithm 772: Stripack: Delaunay triangulation and voronoi diagram on the surface of a sphere. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23 (3), pp. 416-434.
- Shum C.K., P.L. Woodworth, O.B. Andersen, G.D. Egbert, O. Francis, C. King, S.M. Klosko, C. LeProvost, X. Li, J.M. Molines, M.E. Parke, R.D. Ray, M.G. Schlax, D. Stammer, C.C. Tierney, P. Vincent and C.I. Wunsch (1997) Accuracy assessment of recent ocean tide models. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 102 (C11), pp. 25173-25194.
- Watson, D. (1981) Computing the n-dimensional delaunay tessellation with applications to voronoi polytopes. *Computer Journal*, 24 (2), pp. 167-172.
- Wilkin, J. and K. Hedström (1998) User's manual for an orthogonal curvilinear grid-generation package. Technical report.
- Williamson, D. (1979) Difference approximation for fluid flow on a sphere. in: *Numerical methods used in atmospheric models (vol. II)*. GARP Publication Series n°17. WMO-ICSU.

Mass Conservation in Global Ocean Models on Unstructured Meshes

Legrand S.^{1,2}, V. Legat² and E. Deleersnijder¹

¹ Institut d'Astronomie et de Géophysique G. Lemaître,
Université Catholique de Louvain,
2 Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

² Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics,
Université Catholique de Louvain,
4 Avenue Georges Lemaître, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

E-mail: legrand@astr.ucl.ac.be

The present study is an extended version of the proceeding paper *Mass Conservation in Global Ocean Model on Unstructured Meshes* by Legrand S., V. Legat and E. Deleersnijder, Proceedings of 6th national congress on theoretical and applied mechanics, 26-27 May 2003, Ghent, Belgium.

Abstract

A common problem in numerical modelling is the interpolation of data from a mesh to an other grid. This issue arises when initialising an ocean model with reanalysed climatological data, when coupling it with models based on different computational grids or when designing some adaptive grid techniques. As climatic simulations run for a few hundreds to a few thousands of years, conservation issues must carefully be taken into account. This study focusses on the interpolation of a incompressible velocity field on unstructured meshes. Seeking inspiration in the so-called projection method and in spline interpolation, we have implemented a two-step variational technique. The cost function to minimize include an elliptic regularisation operator, a data proximity constraint and an additional constraint that enforces the continuity equation in a discrete weak sense. This formulation turns out to be a saddle point problem for which a BB-like stability condition applies. Preliminary examples are discussed.

Keywords: incompressible velocity field, mass conservation, global ocean model, unstructured mesh, interpolation technique

1 Introduction

Interpolation of oceanographic data is a routine requirement in ocean modelling. Interpolation is performed when initialising an ocean model with reanalysed climatological data or when coupling it with models based on different discretisations. Some form of interpolation is also required when computing integral quantities such as transport or wave number spectra from gridded data. As a consequence, a large variety of interpolation techniques are used in oceanography. Beside the standard interpolation techniques (bilinear, bicubic or nearest-neighbour interpolations) that are used for instance in the OASIS coupler (Valcke *et al.*, 2004), the most widespread mesh-to-mesh interpolation technique is likely to be the least squares method (Bennett, 1992). Two other sophisticated interpolation techniques that permit the blending of different data type have also become very popular in the last decades. These are the spline interpolation techniques (Wahba et Wendelberg, 1980; McIntosh, 1990; Rixen *et al.*, 2000; Chua et Bennett, 2001) and the statistical interpolation methods, also called objective analyses, optimal interpolation, kriging or radial-basis interpolation according the assumptions made about the covariance function (Kriging, 1951; Delfiner et Delhomme, 1973; Bretherton *et al.*, 1976; Le Roux *et al.*, 1997). Our study aims at adding another tool to this interpolation techniques collection. This tool should project an incompressible velocity field from a finite element subspace associated with an *old* mesh onto another finite element subspace associated with a *new* mesh in such a way that the incompressibility of the projected velocity field is preserved. For instance, this requirement is crucial to accurately simulate the transport of oceanic tracers for a few hundreds to a few thousands of years while using an adaptive mesh technique that dynamically adjusts the discretisation refinement throughout the course of the simulation.

Seeking inspiration in the so-called *projection method* that was originally introduced by Chorin (1968) in order to enforce the continuity equation in a finite difference model solving the incompressible Navier-Stokes equations and that was latter adapted for several geophysical studies (Endlich, 1967; Liu et Goodin, 1976; Goodin *et al.*, 1980; Chippada *et al.*, 1998; Deleersnijder, 2001; Adcroft et Hallberg, 2004), we have implemented a two-step procedure in which an estimate of the projected velocity field is first computed and then corrected in order to fulfill the incompressibility constraint. Actually, the divergence-free velocity field on the new mesh is obtained by summing two auxiliary velocity fields: a first estimate velocity field and a corrective velocity field. Of course, the corrective velocity field should be as small as possible. The computation of both fields is exposed in section 2 and 3, respectively. Two-dimensional and three-dimensional preliminary examples are discussed in section 4.

2 Computation of the first estimate of the velocity field

Let $\mathbf{u}^{init}$ be a incompressible finite element velocity field defined on a old mesh. This first step aims at producing an estimate $\mathbf{u}^{proj}$ of the initial velocity field on the new mesh. Even if the new mesh does not exactly cover the same domain of interest as the old one (Ω^{new} and Ω^{old} , respectively), this estimate should preserve most features of the initial velocity field, including the boundary conditions. Solving the usual least squares interpolation method with an additional regularisation operator can fulfill this requirement. Mathematically, this is equivalent to minimise the following variational principle:

$$\begin{aligned} & \text{Find } \mathbf{u}^{proj} \in \mathcal{U} \text{ such that} \\ J(\mathbf{u}^{proj}) &= \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \underbrace{\int_{\Omega^{new}} \lambda^2 \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega^{new} \cap \Omega^{old}} (\mathbf{v} - \mathbf{u}^{init}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^{init}) \, d\Omega}_{= J(\mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (1)$$

The cost function $J(\mathbf{v})$ includes an elliptic regularisation term that allows a smooth constrained extrapolation between the old and the new meshes taking into account the boundary conditions and the usual least squares term that enforces the proximity data constraint. Both terms are balanced by the a length scale λ . The latter sets the length scale of the flow features that are smoothed by the regularisation term.

3 Enforcement of the continuity equation

As the incompressibility constraint must be understood in a discrete weak sense, the second step of our velocity interpolation process amounts to orthogonally project the estimate $\mathbf{u}^{proj}$ onto the finite element subspace that fulfills the discrete continuity equation. This is performed by finding the velocity field $\mathbf{u}^{new} \in \mathcal{U}$ and a Lagrange multiplier $\psi \in \mathcal{E}$ that are solutions of

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}^{new}, \psi) &= \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \max_{\mu \in \mathcal{E}} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega^{new}} (\mathbf{v} - \mathbf{u}^{proj}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^{proj}) \, d\Omega + \int_{\Omega^{new}} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega}_{= G(\mathbf{v}, \mu)}. \end{aligned}$$

$\mathcal{U}$ and $\mathcal{E}$ are suitable functional spaces.

This variational principle is equivalent to the saddle point problem

$$\begin{aligned} & \text{Find } \mathbf{u}^{corr} = \mathbf{u}^{new} - \mathbf{u}^{proj} \in \mathcal{U} \text{ and } \psi \in \mathcal{E} \text{ such that} \\ G(\mathbf{u}^{corr}, \psi) &= \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} \max_{\mu \in \mathcal{E}} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega^{new}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega^{new}} \mu \nabla \cdot (\mathbf{u}^{proj} + \mathbf{v}) \, d\Omega}_{= G(\mathbf{v}, \mu)}, \end{aligned} \quad (2)$$

whose boundary conditions are (Deleersnijder, 2001):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{corr} &= 0 && \text{on impermeable boundaries,} \\ \psi &= 0 && \text{on open boundaries.} \end{aligned}$$

After the introduction of the perturbations $\hat{\mathbf{u}}$ and $\hat{\psi}$ around the solutions $\mathbf{u}^{corr}$ and ψ and the application of the Green theorem to weakly impose boundary conditions, the stationary conditions for (2) read:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{new}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^{corr} \, d\Omega - \int_{\Omega^{new}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi \, d\Omega &= 0 \\ - \int_{\Omega^{new}} \mathbf{u}^{corr} \cdot \nabla \hat{\psi} \, d\Omega &= \int_{\Omega^{new}} \mathbf{u}^{proj} \cdot \nabla \hat{\psi} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

The first condition weakly relates the corrective velocity to the Lagrange multiplier gradient so that the latter can be viewed as a scalar potential for computing the corrective velocity. The second condition enforces the continuity equation in a discrete weak sense. The standard Galerkin method leads to the following algebraic system:

$$\begin{pmatrix} M_{UU} & G_{U\Psi} \\ G_{U\Psi}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{corr} \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (4)$$

where the vectors U^{corr} and Ψ are the nodal values vectors for the corrective velocity and the Lagrange multiplier, respectively. The matrices M_{UU} and $G_{U\Psi}$ are the mass matrix for the velocity shape functions and the gradient matrix, respectively. The vector R is the residual vector for the weak continuity equation evaluated with the estimate $\mathbf{u}^{proj}$.

An elegant way for solving the mixed problem (4) is computing its Schur complement first

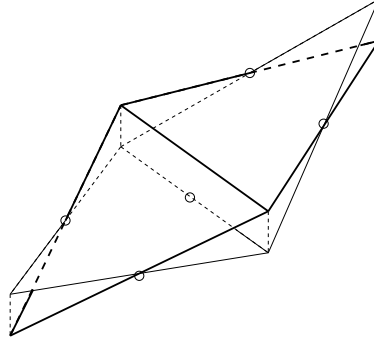


Figure 1: Location of the non-conforming nodal values. It turns out that the linear non-conforming shape functions are discontinuous between elements.

$$-G_{U\Psi}^T M_{UU}^{-1} G_{U\Psi} \Psi = R$$

and then substituting back Ψ into

$$U^{corr} = -M_{UU}^{-1} G_{U\Psi} \Psi.$$

Clearly, the algebraic system (4) has a unique solution if the matrix $G_{U\Psi}^T M_{UU}^{-1} G_{U\Psi}$ is non-singular and if the matrix $G_{U\Psi}$ has no zero eigenvalue. These two algebraic conditions reflects the existence of a BB-like stability condition (Babuska, 1971; Brezzi, 1974; Zienkiewicz et Taylor, 2000). As a consequence, the success of our divergence-free interpolation technique is strongly dependent upon the particular pair of velocity and Lagrange multiplier interpolations employed.

Finally, the divergence-free discrete velocity field $\mathbf{u}^{new}$ on the new mesh is obtained by summing both auxiliary files:

$$\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{proj} + \mathbf{u}^{corr}.$$

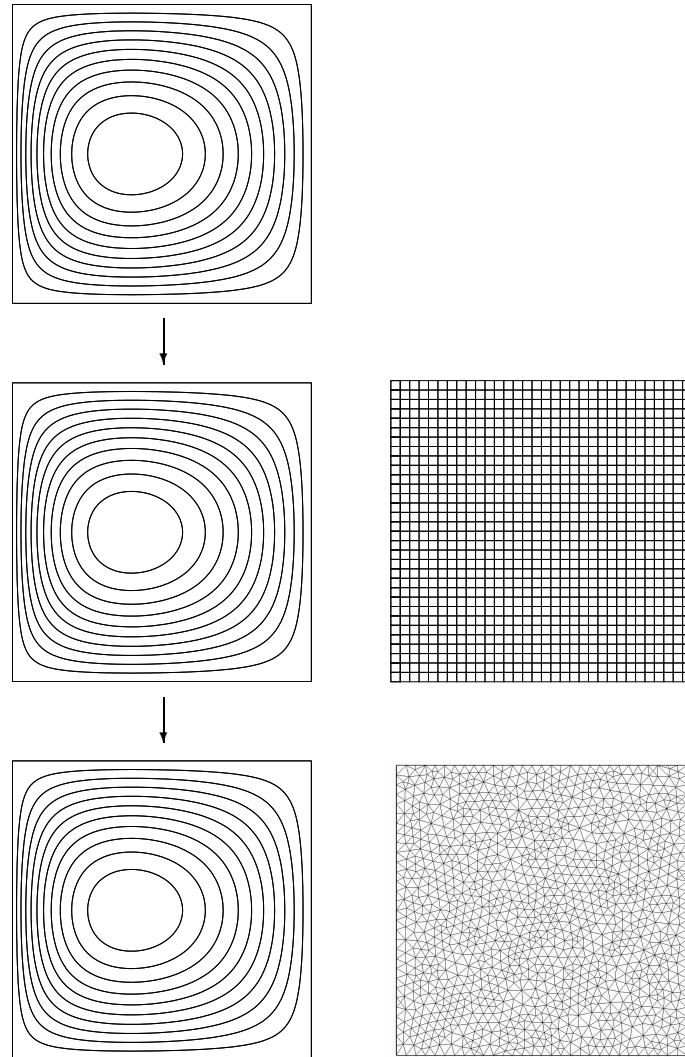


Figure 2: Sketch of the first test-case. The Stommel solution is discretised onto a 33×33 structured grid and then projected onto an unstructured mesh.

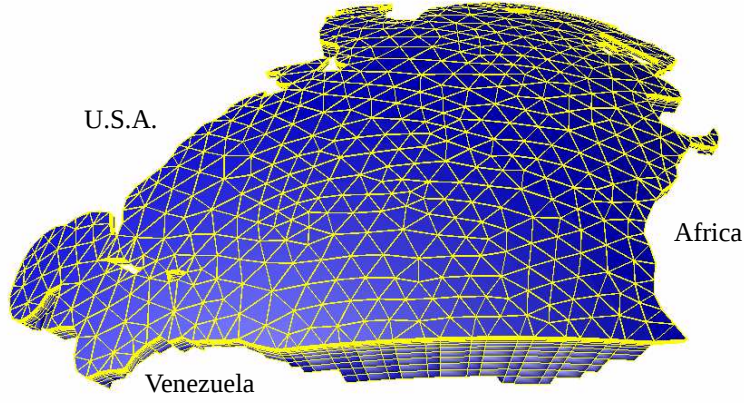


Figure 3: A three-dimensional unstructured mesh of the North Atlantic ocean made of prismatic elements. The vertical direction is stretched by a factor 100.

4 Preliminary examples

Most of the theoretical works on finite element methods for oceanic flow have been performed with a linear shallow-water model. It turned out from these studies that the non-conforming $P_1^{NC} - P_1$ is well-suited to represent shallow water oceanic flows (Hua et Thomasset, 1984; Hanert, 2004; Le Roux *et al.*, 2005). As illustrated in Figure 1, the nodal values for the velocity field are located on the element edges while the nodal values for the "pressure" are located on the vertices. This finite element pair does not generate spurious Coriolis and pressure modes (Le Roux *et al.*, 2005; Hanert, 2004) and seems to fulfill the BB-condition for the Stokes problem. As a consequence, the $P_1^{NC} - P_1$ pair should also be an adequate choice for testing our mass-conservative interpolation technique on the following preliminary examples.

As a first example, the Stommel analytical velocity field (Stommel, 1948) is discretised on a 33×33 structured grid and then projected onto an unstructured mesh (Figure 2). Sensitivity experiments have shown that the regularisation term does not significantly alter the velocity field while the smoothing length scale λ is smaller than the boundary layer width of the Stommel flow. The enforcement of the continuity equation allows the L_2 -error between the projected and the analytical velocity field to decrease.

The second example consists in projecting a three-dimensional velocity field that was simulated by the Louvain-la-Neuve Coupled Large-scale Ice-Ocean model (Campin,

1997; Goosse et Fichefet, 1999) onto an unstructured mesh of the North Atlantic ocean. As shown in Figure 3, this mesh is made of prismatic elements that are generated by a downward extrusion of a surface triangulation such that the horizontal levels of the mesh are identical as those of the CLIO's grid. Figure 4 presents the velocity discretisation. Since the flow is in hydrostatic equilibrium and since its vertical component is several order of magnitude smaller than the horizontal ones, it is convenient to uncouple the horizontal and the vertical components discretisations. The nodal values of the vertical velocity are located at the centre of the horizontal faces. In order to preserve the advantages of the non-conforming $P_1^{NC} - P_1$ finite element pair, the nodal values of the horizontal components can be located either at the centre of the vertical faces or at the edges of the horizontal faces. In this study, they are located at the centre of the vertical faces.

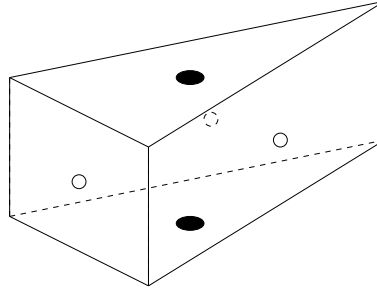


Figure 4: Our prismatic non-conforming element. Symbols $\circ$ and $\bullet$ indicate the nodal values locations for the velocity horizontal components and the vertical component, respectively.

Figure 5 shows both steps of our mass-conservative interpolation techniques. In the first step, both horizontal and vertical components of the CLIO's velocity field are projected onto our unstructured mesh as explained in section 2. As it can be noticed in the neighbourhood of the United States coastlines, the regularisation term insures a smooth extrapolation between the CLIO's field and the no-slip boundary condition. Inside the common domain, the projected velocity field is similar as the CLIO's one despite of the presence of some additional islands as Cuba and Hispaniola. As a consequence, the corrective velocity could be locally substantial, i.e. of the same order of magnitude of the projected field. In order to preserve the vertical velocity field, only a horizontal corrective velocity is computed by uncoupling each horizontal discretisation level. As illustrated in Figure 5, the corrective velocity tends to adapt the flow to the new coastlines, especially in the Strait of Florida and along Venezuela coasts.

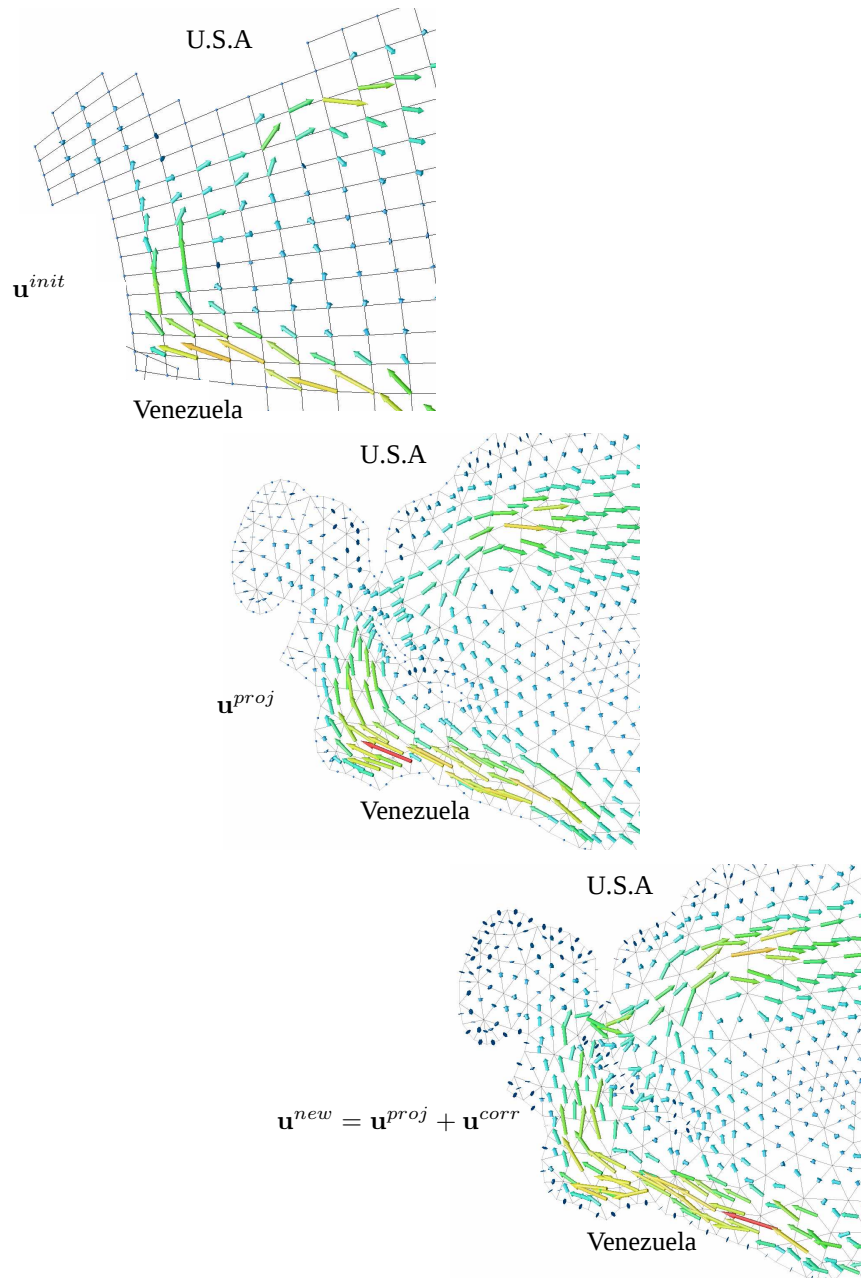


Figure 5: Sketch of the second test-case with a close-up view on the Gulf Stream.

5 Conclusion

An interpolation technique that projects the velocity field from a mesh onto another in an accurate and locally mass-conserving manner has been defined. The philosophy of the method for enforcing the local mass conservation is that the correction on the velocity should be as small as possible. However, only a global norm of this correction is minimized so that, in some regions, the corrective velocity can be far from small. This is most likely to depend on the problem to be solved. In particular, if the smoothing term of the projection operator does not alter the initial velocity field or if both meshes cover an identical computational domain, the corrections seems to be relatively small. This is confirmed by our preliminary examples.

References

- Adcroft, A. and Hallberg, R. 2004. On methods for solving the oceanic equations of motion in generalized vertical coordinates. *Ocean Modelling*, 11:224–233.
- Babuska, I. 1971. Error bounds for finite element methods. *Numerische Mathematik*, 16:322–333.
- Bennett, A. 1992. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press.
- Bretherton, F.P., Davis, R.E., and Fandry, C.B. 1976. A technique for objective analysis and design of oceanographic experiment applied to MODE-73. *Deep Sea Research*, 23:559–582.
- Brezzi, F. 1974. On the existence, uniqueness and approximation of saddle points problems arising from Lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 8:129–151.
- Campin, J.M. 1997. *Modélisation tridimensionnelle de la circulation générale océanique lors du dernier maximum glaciaire*. Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain.
- Chippada, S., Dawson, C.N., Martinez, M.L., and Wheeler, M.F. 1998. A projection method for constructing a mass conservative velocity field. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157:1–10.
- Chorin, A.J. 1968. Numerical solution of the Navier-Stokes Equations. *Mathematics of Computation*, 22:745–762.
- Chua, B.S. and Bennett, A.F. 2001. An inverse ocean modeling system. *Ocean Modelling*, 3:137–165.
- Crouzeix, M. and Raviart, P. 1973. Conforming and non-conforming finite-element methods for solving the stationary Stokes equations. *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, 7:33–76.
- Deleersnijder, E. 2001. Enforcing the continuity equation in numerical models of geophysical fluid flows. *Applied Mathematics Letters*, 14:867–873.
- Delfiner, P. and Delhomme, J.P. 1973. *Proceedings of NATO ASI, Display and Analysis of Spatial Data*. Editors: Davis, J.C. and M.J. McCullagh., chapter Optimum interpolation by kriging, pages 96–114. John Wiley.
- Endlich, R.M. 1967. An iterative method for altering the kinematic properties of wind fields. *Journal of Applied Meteorology*, 6:837–844.
- Goodin, W.R., MacRae, G.J., and Seinfeld, J.H. 1980. An objective analysis technique for constructing three-dimensional urban-scale wind fields. *Journal of Applied Meteorology*, 19:98–108.
- Goosse, H. and Fichefet, T. 1999. Importance of Ice-Ocean Interactions for the Global Ocean Circulation: a Model Study. *Journal of Geophysical Research*, 104 (C10):23337–23355.
- Hanert, E. 2004. *Towards a finite element ocean circulation model*. Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain.
- Hua, B.L. and Thomasset, F. 1984. A noise-free finite element scheme for the two-layer shallow water equations. *Tellus*, 36A:157–165.
- Krige, D.J. 1951. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *J. Chem. Metall. Min. Soc. S. Afr.*, 52:119–139.
- Le Roux, D.Y., Lin, C.A., and Staniforth, A. 1997. An accurate interpolating scheme for semi-Lagrangian advection on an unstructured mesh for ocean modelling. *Tellus*, 49A2:119–138.
- Le Roux, D.Y., Sène, A., Rostand, V., and Hanert, E. 2005. On some spurious modes issues in shallow water models using a linear algebra approach. *Ocean Modelling*, 10:83–94.
- Liu, C.Y. and Goodin, W.R. 1976. An iterative algorithm for objective wind field analysis. *Monthly Weather Review*, 104:784–792.
- McIntosh, P.C. 1990. Oceanographic data interpolation: objective analysis and splines. *Journal of Geophysical Research*, 95(C8):13529–13541.

- Rixen, M., Beckers, J.M., Brankart, J.M., and Brasseur, P. 2000. A numerically efficient data analysis method with error map generation. *Ocean Modelling*, 2(1-2):45–60.
- Stommel, H. 1948. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Transaction of the American Geophysical Union*.
- Valcke, S., Caubel, A., Vogelsang, R., and Declat, D. 2004. OASIS 3: Ocean Atmosphere Sea Ice Soil. User's guide. Technical report, CERFACS, Toulouse.
- Wahba, G. and Wendelberg, J. 1980. Some new mathematical methods for variational objective analyses using splines and cross-validation. *Monthly Weather Review*, 108:1122–1143.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. 2000. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, fifth edition.

Chapitre 4

Maillages pour la Grande Barrière de Corail

La Grande Barrière de Corail s'étale sur plus de 2600 *km*, coincée sur le plateau continental nord-est australien entre les côtes du North Queensland et la Mer de Corail. Elle comprend plus de plus de 2800 îles et récifs dont la surface varie de 0.01 à 100 *km*². Dans certaines régions, ces derniers forment de véritables rubans entrecoupés seulement de passages étroits. Occupant plus de 90% du front du littoral, ils constituent une imposante barrière naturelle pour les courants marins. Dans d'autres régions, les récifs sont plus dispersés, séparés par de larges passages et occupant à peine 10% du front du littoral.

Les effets combinés de cette topographie complexe, des vents, des marées et de la circulation de la Mer de Corail adjacentes influencent fortement l'hydrodynamique de la Grande Barrière de Corail. En particulier, cette dernière joue un rôle crucial dans plusieurs processus importants, tels que le renouvellement des eaux de la Grande Barrière par celles de la Mer de Corail (Wolanski et Spagnol, 2000; Brinkman *et al.*, 2002; Wolanski *et al.*, 2003b), la connectivité des populations des différents récifs par le transport des larves en suspension dans l'eau (Wolanski *et al.*, 1997; Armsworth et Bode, 1999; Wolanski *et al.*, 2004) ou encore le transport d'éléments nutritifs et de polluants amenés par les courants (Done, 1988; Bell et Elmetri, 1995; Wolanski *et al.*, 1999). Tous ces processus se déroulent sur une large gamme d'échelles tant dans le temps que dans l'espace, allant de quelques minutes à plusieurs années ou de quelques mètres à plusieurs centaines de kilomètres (Wolanski *et al.*, 2003a).

Parmi les processus à petite échelle spatiale qui devraient être simulés dans un modèle de l'éco-hydrodynamique de la Grande Barrière, on peut citer les courants de marées et les tourbillons dans le sillage des îles dont l'extension horizontale varie typiquement d'une centaine de mètres à quelques kilomètres. Cependant, des mesures réalisées *in situ*, des images satellites et des simulations numériques à petite échelle montrent que ces phénomènes sont principalement confinés au voisinage des petits récifs, des îles et des passages étroits (Hamner et Hauri, 1981; Wolanski *et al.*, 1988; Wolanski et Hamner, 1988; Deleersnijder et Beckers, 1992; Wolanski *et al.*, 1996). La résolution du maillage devrait dès lors être augmentée jusqu'à 10 ou 100 *m* uniquement dans ces régions, alors qu'une maille plus grossière (jusqu'à quelques kilomètres) pourrait être utilisée sur une grande fraction de la Grande Barrière de Corail. La puissance de calcul nécessaire pour modéliser l'entièreté de la Grande Barrière avec une résolution uniforme de 100 *m* est à l'heure actuelle difficilement abordable. Par exemple, le modèle numérique le plus récent de l'entièreté de la Grande Barrière de Corail (Brinkman *et al.*, 2002) n'a qu'une grille structurée uniforme de 2×2 *km*. Dès lors, l'utilisation d'un maillage à résolution variable apparaît comme une meilleure stratégie.

La contribution originale de ce chapitre réside dans le développement d'une stratégie d'adaptation de maillage appropriée à l'hydrodynamique de la Grande Barrière. Bien que la plupart des stratégies de raffinement de maillages utilisées en modélisation des écoulements marins sur des maillages non-structurés sont basées sur le champ de bathymétrie (Henry et Walters, 1993; Foreman *et al.*, 1995; Jarosz *et al.*, 2005; Walters, 2005), aucune d'entre elles ne produit des maillages appropriés à la simulation précise de phénomènes aussi divers que la propagation de la marée au travers de l'entièreté de la grande barrière et des tourbillons de recirculation générés dans le sillage des îles et des récifs. La stratégie que nous suggérons tient à la fois compte du champ de bathymétrie et d'une distance approximative par rapport aux îles et aux récifs. Cette distance est obtenue en résolvant un opérateur différentiel elliptique pour des conditions aux frontières spécifiques. Les maillages ainsi obtenus illustrent tant la validité que l'efficacité de cette stratégie adaptative. La pertinence du choix des paramètres de notre stratégie est aussi discutée.

Ce chapitre est une version *longue* de l'article *High-resolution, unstructured meshes for hydrodynamic models of the Great Barrier Reef* de S. Legrand, E. Deleersnijder, E. Hanert, V. Legat et E. Wolanski et qui est accepté pour publication dans *Estuarine, Coastal and Shelf Science*.

High-resolution, unstructured meshes for hydrodynamic models of the Great Barrier Reef, Australia

S. Legrand^{1,2}, E. Deleersnijder^{1,2}, E. Hanert^{1,2}, V. Legat² and E. Wolanski³

¹ Institut d'Astronomie et de Géophysique G. Lemaître,
Université Catholique de Louvain,

2 Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

² Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics
Université Catholique de Louvain,

4 Avenue Georges Lemaître, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

³ Australian Institute of Marine Science (AIMS),
PMB No. 3, Townsville MC, Queensland 4810 Australia

E-mail: legrand@astr.ucl.ac.be

This article is accepted for publication in Estuarine, Coastal and Shelf Science.

Abstract

Accuracy and mesh generation are key issues for the high-resolution hydrodynamic modelling of the whole Great Barrier Reef. Our objective is to generate suitable unstructured grids that can resolve topological and dynamical features like tidal jets and recirculation eddies in the wake of islands. A new strategy is suggested to refine the mesh in areas of interest taking into account the bathymetric field and an approximated distance to islands and reefs. Such a distance is obtained by solving an elliptic differential operator, with specific boundary conditions. Meshes produced illustrate both the validity and the efficiency of the adaptive strategy. Selection of refinement and geometrical parameters is discussed.

Keywords: Unstructured grids, Great Barrier Reef, Delaunay triangulation, Finite elements methods, Finite volumes methods

1 Introduction

The Great Barrier Reef comprises over 2800 individual reefs spread over 2600 *km* length of the Australia's north-eastern continental shelf, at the western margin of the Coral Sea as shown in Figure 1. The topography is highly complex, with individual reefs ranging in area from 0.01 to 100 *km*². In some regions, the reefs form a ribbon separated by narrow passages, and occupy approximately 90% of the along-shelf length, thus providing a significant barrier to the water flow. In other regions, the reefs are widely scattered, separated by wide passages and occupy only about 10% of the along shelf length.

The complex topography, the wind, the tides, and the circulation in the adjoining Coral Sea strongly influence the circulation on the Great Barrier Reef shelf. The latter plays a crucial role in a number of important biological processes, including the flushing of Great Barrier Reef waters by Coral Sea waters (Wolanski et Spagnol, 2000; Brinkman *et al.*, 2002; Wolanski *et al.*, 2003b), the connectivity of reef populations as a result of the transport of water-borne larvae between reefs (Wolanski *et al.*, 1997; Armsworth et Bode, 1999; Wolanski *et al.*, 2004) or the transport of nutrients and pollutants by water currents (Done, 1988; Bell et Elmetri, 1995; Wolanski *et al.*, 1999). These processes occur over a wide range of scales in both space and time, ranging from meters to hundreds of kilometers, and from minutes to years (Wolanski *et al.*, 2003a).

Among the small scale processes that should be simulated by an eco-hydrodynamic model of the Great Barrier Reef, there are tidal jets and eddies that occur in the wake of islands. Their length scales range from about hundred meters to a few kilometers. However, in situ measurements, satellite imagery and small-scale numerical simulations show that those phenomena are mainly confined to the neighbourhood of small reefs, islands and passages (Hamner et Hauri, 1981; Wolanski *et al.*, 1988; Wolanski et Hamner, 1988; Deleersnijder et Beckers, 1992; Wolanski *et al.*, 1996). The mesh resolution should therefore be increased up to 10 or 100 *m* only in those regions while it can be much coarser (up to a few kilometers) in a large fraction of the Great Barrier Reef.

Nowadays, the computational power required to model the whole Great Barrier Reef with a 100 *m* uniform mesh is hardly affordable. Therefore, the use of a variable-resolution mesh seems to be a better strategy. This may be achieved either with nested structured grids or with unstructured variable-resolution meshes. The former have the advantage of retaining the inherent simplicity of structured meshes while allowing variable resolution. However,

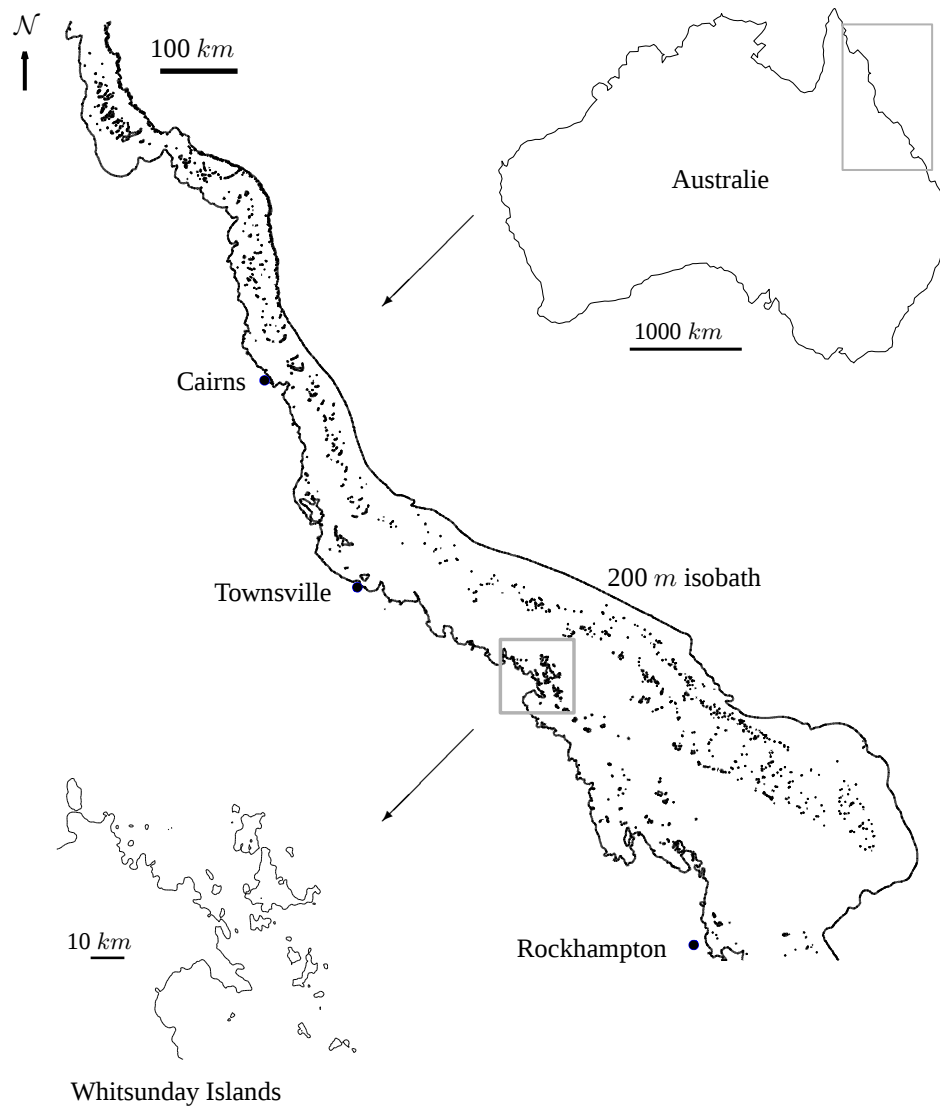


Figure 1: The domain of interest which extends from the Australian coast to the shelf break (isobath 200 m) and from Rockhampton to Cape Direction.

the topography of the Great Barrier Reef is so complex that the implementation of an efficient nested-grid model is likely to be extremely difficult.

On the other hand, the flexibility of unstructured meshes is such that they are able to represent complex coastlines to a high degree of accuracy. In addition, it is possible to build an unstructured mesh in which the ratio of the length of largest elements to that of the smallest is of the order of 100. Therefore, as unstructured mesh marine modelling now is a rapidly growing field of research (Hanert *et al.*, 2005; Walters, 2005; Pietrzak *et al.*, 2005), it is conceivable to develop an unstructured mesh numerical simulation tool of the whole Great Barrier Reef allowing for high space resolution only in regions where this is needed. The first step towards such a model is the construction of appropriate unstructured meshes of the Great Barrier Reef.

The quality of unstructured meshes is mainly related to the efficiency of the numerical model. So, an unstructured mesh is considered as optimal for a specific application if it allows the numerical simulation to reach a given precision on the whole domain with a minimal number of elements (e.g. Frey and George, 2000). This definition implicitly assumes the existence of reliable tools to measure the accuracy of a specific numerical simulation, paving the way for error estimators and adaptive meshes.

Generating unstructured mesh was the scope of a large number of works and softwares and is very well documented in the literature (e.g. Frey and George, 2000). In this work, we use our own code to generate Delaunay-like triangulations (Legrand *et al.*, 2000). It is based on the Watson-Bowyer incremental algorithm (Watson, 1981; Bowyer, 1981) and allows for a dynamical control of the element size, shape and orientation, which is achieved by introducing a prescribed target element metric. The Watson-Bowyer algorithm generates triangulations by incrementally inserting each node of the final triangulation into an intermediate one. The insertion procedure is performed in two steps. The triangle containing the new site is first replaced by three new triangles and the quality of the new triangulation is then improved by swapping well-chosen edges. The major steps of our mesh generation procedure are shown in Figure 2. Starting from a large triangle containing the whole domain, boundary nodes are inserted. Once all boundary edges are created, useless triangles are removed. Then, additional nodes are created to obtain a mesh conformed to the target element size (Frey, 1987). Finally, the mesh quality is optimized by heuristic elliptic techniques that may be accompanied by edge swaps. Algorithmic details as well as implementation issues are described in Legrand *et al.* (2000).

The present article deals with the construction of an unstructured mesh to be used in a high-resolution, eco-hydrodynamical, finite element model of the whole Great Barrier Reef. Section 2 presents a refinement strategy that takes into account the depth of the water column and the distance to the coast, which is defined in Section 3. Then, three gauges of mesh quality are introduced in Section 4. Finally, meshes of the domain of interest are discussed in Section 5 and concluding remarks are given in the last Section.

2 A refinement strategy for the Great Barrier Reef

When designing a mesh for numerical simulations within a particular domain, a refinement strategy has to be defined to what the accuracy of the discrete representation of the unknown fields is prescribed. For the Great Barrier Reef, this target accuracy mainly depends on two major physical features: the small recirculation eddies occurring in the wake of islands and reefs, and the tidal waves propagating throughout the whole Great Barrier Reef.

Fundamental to the method of mesh adaptivity is the definition of a metric which describes the relevant requirements for the size and the shape of the elements of the mesh. The metric contains the full description of the mathematical isomorphism linking the reference equilateral element and each physical element of the mesh. Since no relevant information to design anisotropic meshes can be easily obtained from the bathymetric field, we only focus on isotropic elements. For those meshes, the metric is fully defined by a simple scalar characteristic length: the *target element size* $h(\mathbf{x})$. This function of the position $\mathbf{x}$ provides the characteristic length of the element where $\mathbf{x}$ is located. Obviously, it is an ideal goal that cannot be perfectly satisfied as other constraints on the mesh generation procedure also apply.

In practice, this target size can be defined either a priori from the knowledge of the physics of the problem or a posteriori with an error estimator from a discrete solution computed on a given mesh. However, we do not intend to present dynamically adjusted meshes throughout the course of the integration in response to the solution of a given problem. Even if such an adaptive scheme could appear very attractive, the global handling of a dynamically adaptive calculation requires major modifications of the flow solver. Therefore, the realistic challenge consists in the design of a graded unstructured mesh from the eco-hydrodynamic physics of the Great Barrier Reef.

On the one hand, it is well known that the external inertia-gravity wave celerity is approximatively given by $\sqrt{g D(\mathbf{x})}$ where g and $D(\mathbf{x})$ are the gravitational acceleration and the water column depth, respectively. Our design strategy is based on the assumption that an efficient mesh would exhibit a local element size proportional to this tidal wave velocity (Henry et Walters, 1993). It consists in adjusting the resolution in such a way that, over a given time interval, external inertia gravity waves travel over a distance representing roughly the same fraction of the mesh size. As a result, a coarse mesh can be used to simulate the tide propagation in very deep areas and a finer discretisation is required in shallower regions. Such a requirement can be expressed as follows:

$$\frac{h(\mathbf{x})}{h_{max}} = \sqrt{\frac{D(\mathbf{x})}{D_{max}}},$$

where h_{max} denotes the maximal prescribed element size and D_{max} denotes the maximal value of the depth field.

On the other hand, the size of recirculation eddies that develop downstream of headlands or narrow passages is of the order of hundreds to thousands of meters. Therefore, in the regions where those eddies are likely to occur, the element size must be sufficiently small: h_{min} should range from 50 m to 100 m.

In order to take into account both requirements, we define a *blending function* $\phi(d)$ based on the distance $d(\mathbf{x})$ to the islands and reefs. This blending function vanishes in the vicinity of the islands and reefs, is equal to one in remote areas and connects both parts in a continuous and smooth way. With the help of such a blending function, the target element size is then defined as:

$$h(\mathbf{x}) = h_{min} + \phi(d(\mathbf{x})) \sqrt{\frac{D(\mathbf{x})}{D_{max}}} (h_{max} - h_{min}). \quad (1)$$

A major ingredient of the mesh design is the purely heuristic definition of the blending function and the computation of the distance of each location to the closest island or reef. As a typical blending function, we use a piecewise cubic polynomial:

$$\phi(d) = \begin{cases} 0 & 0 \leq d \leq d_0, \\ 3 \left(\frac{d-d_0}{d_1-d_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{d-d_0}{d_1-d_0} \right)^3 & d_0 \leq d \leq d_1, \\ 1 & d_1 \leq d, \end{cases} \quad (2)$$

where d_0 defines the length of a plateau along the islands in which the element size is prescribed to h_{min} . Similarly, the discretisation is fully prescribed by the tidal wave velocity at a distance from the islands larger than d_1 . In the transition area of width $d_t = d_1 - d_0$, the refinement is obtained as a compromise characterized by the blending function between the tidal wave velocity requirement and the necessity to ensure a smooth transition between both previous regions. The blending function and its geometrical parameters are illustrated in Figure 2.

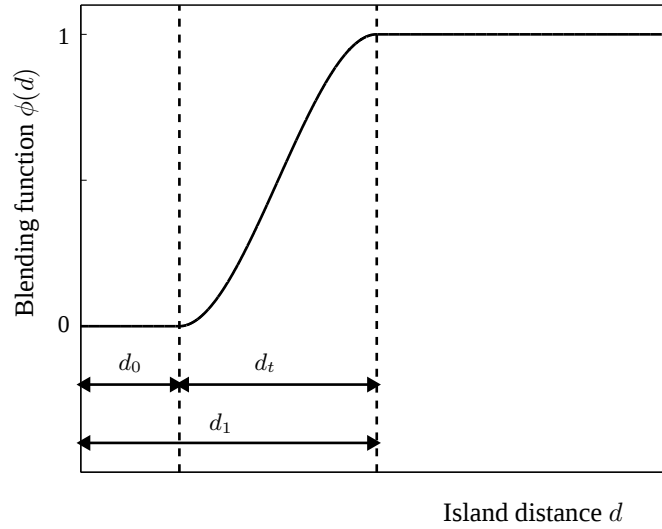


Figure 2: Definition of the geometrical parameters of the bending function $\phi(d)$.

In order to illustrate this refinement strategy, let us restrict ourselves to the simple example shown in Figure 3. A typical bathymetry profile has been extracted from the data of the Great Barrier Reef. In one dimension, it is easy to compute the distance to the coastline at the left-hand side and to the two reefs that are located next to the other side. It is then possible to define the

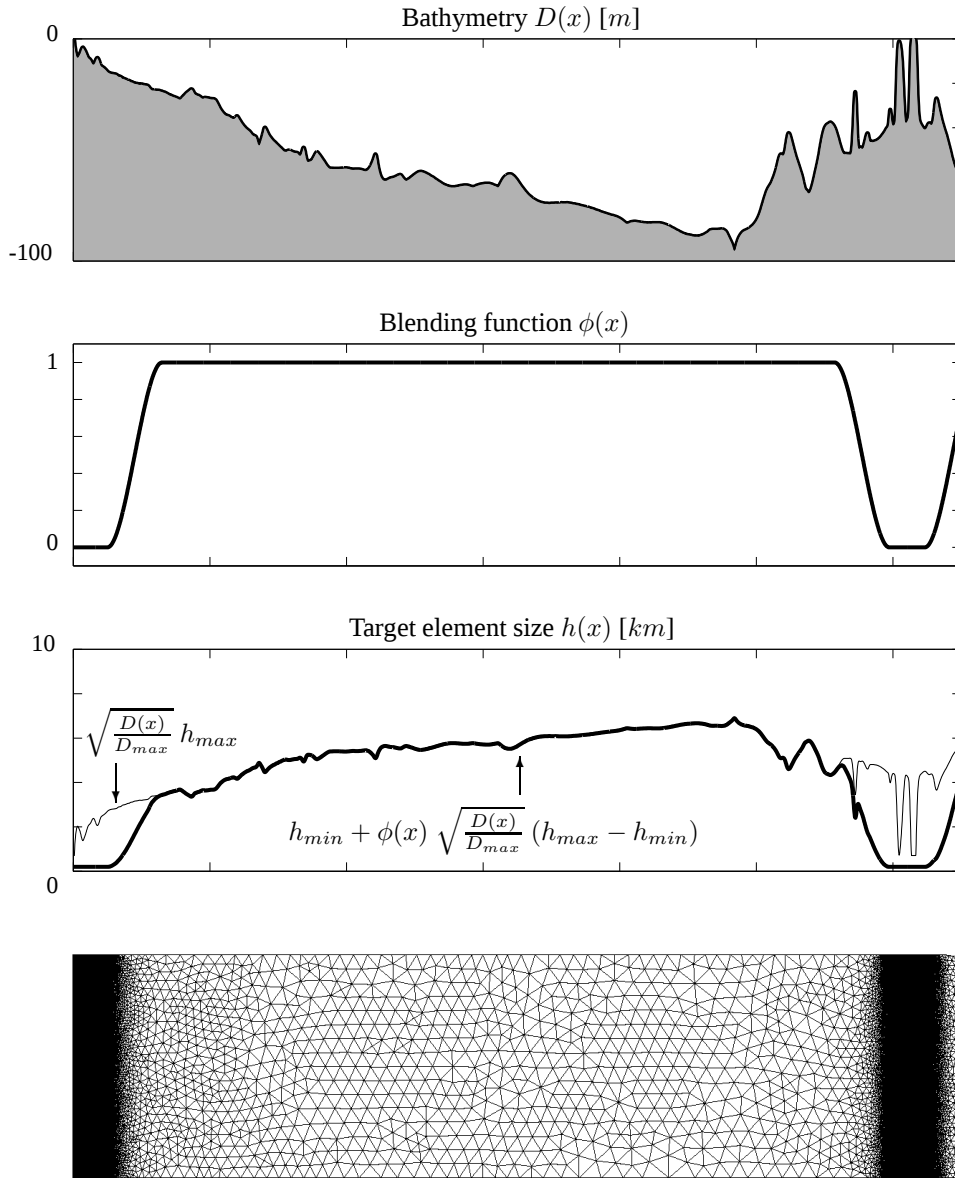


Figure 3: Target element size and generated mesh obtained by the blend of the bathymetry and the refinement required along the islands and reefs.

element target size and to generate a Delaunay-like triangulation along a strip domain. However, estimating the *island distance* $d(\mathbf{x})$ for a two-dimensional problem can be very expensive and difficult.

3 A boundary value problem for the island distance

In view of the complexity of the geometry of the Great Barrier Reef, we reject the naive approach that consists in calculating Euclidian distances to every island. Inspiration has been sought in the methods other Authors have developed to tackle similar problems. Some of them had recourse to a phenomenological boundary value problem to obtain an estimated distance to a given boundary in a two-dimensional or three-dimensional domain (Assaker, 1998; Assaker *et al.*, 1997; Brasseur *et al.*, 1996). Typically, such an issue occurs in turbulent flow calculations involving a mixing length. According to those models, the size of large turbulent eddies at a given location is directly proportional to the distance to the wall. It is not surprising that the most efficient techniques are based on elliptic partial differential equations. Unfortunately, the most efficient partial differential equations which produce the best approximation are often highly non-linear and their resolution would be prohibitive.

To obtain an approximated island distance, we have developed a two-step approach. Firstly, we define a *shore proximity function* $\sigma(\mathbf{x})$ as the solution of the following linear boundary problem.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu^2 \nabla^2 \sigma - \sigma + 1 &= 0 \\ \sigma &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \sigma &= 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} & \text{on islands and reefs} \\ & \text{on other boundaries} \end{array} \quad (3)$$

where μ is a stiffness length and $\mathbf{n}$ is the outward unit normal to the boundary. The elliptic operator ensures a smooth transition from zero along the islands to one in remote areas. In addition, the shore proximity function lies in the interval $[0, 1]$ as is demonstrated in the Appendix.

In a second step, we correlate the estimated island distance and this shore proximity function. To motivate this, let us consider the shore proximity function and the island distance in an one-dimensional semi-infinite domain with an island at the location $x = 0$. The distance coincide with the space coordinate

x and the analytical solution for the shore proximity problem can be easily derived:

$$\begin{aligned} d(x) &= x, \\ \sigma(x) &= 1 - e^{-x/\mu}. \end{aligned}$$

By directly extrapolating the correlation existing for this simplified geometry, we may express the island distance in terms of the shore proximity function:

$$d(\mathbf{x}) = -\mu \ln(1 - \sigma(\mathbf{x})). \quad (4)$$

Let us here mention that such an equation is an approximation of the true connection between the shore proximity function and the island distance. The latter can be easily evaluated.

In order to better grasp the meaning of the estimated island distance, it is possible to combine both Equations (3) and (4) to show that d is in fact the solution of the following non-linear elliptic problem:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 d - \nabla d \cdot \nabla d - 1 &= 0 \\ d &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla d &= 0 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{on islands and reefs} \\ \text{on other boundaries} \end{array} \quad (5)$$

The above problem again exhibits a second-order elliptic operator and a non-linear dissipative term with the suitable boundary conditions. It is important to note that the stiffness length allows us to monitor the impact of the smoothing effect of the Laplacian term. In a simple intuitive statement, it can be stated that such a parameter can be viewed as the result of how the requirement of smoothness and the requirement of accuracy is balanced in the estimated island distance. Finally, our two steps approach allows to substitute the resolution of the non-linear boundary value problem (5) by the linear one (3).

As shown in Figure 4, the stiffness length influences the estimated island distance. On the one hand, a small stiffness length better incorporates small-scale geometrical features in the neighbourhood of the islands and reefs, but the accuracy of the distance everywhere else is quite poor. In other words,

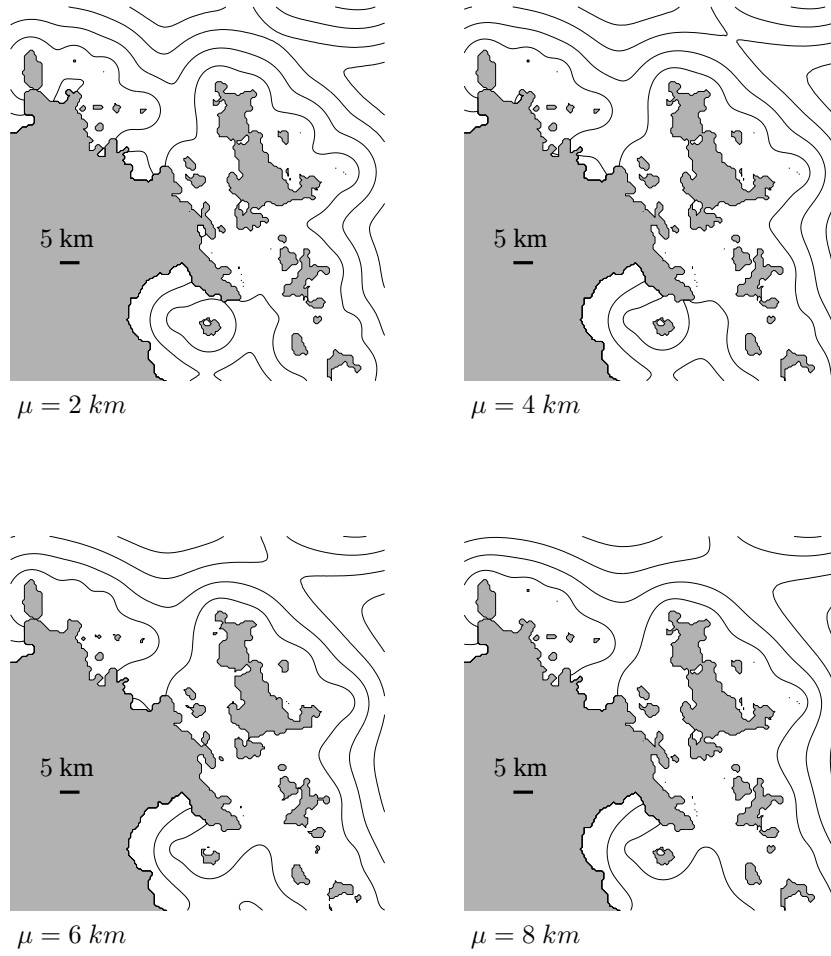


Figure 4: Impact of the stiffness length μ on the estimation of the island distance. Isolines range from 5 to 20 *km* by interval of 5 *km*.

the estimated distance tends very quickly to a constant limit value. On the other hand, a large stiffness length prevents this but smooths all small geometrical features along the islands and reefs. This behaviour is illustrated by the isolines of the estimated island distance obtained with stiffness lengths $\mu = 2, 4, 6$ and 8 km , respectively. All the tests we conducted suggest that selecting 4 km as the value of the stiffness length offers a satisfactory compromise for most applications. Therefore, the estimated island distance is calculated with this value.

In Figure 5, the Great Barrier Reef domain is divided into three regions as a function of the calculated island distance d in kilometers: $[0, 3]$, $[3, 30]$, $[30, \infty]$. Typically, we identify the islands and the reefs neighbourhood, the transition part and the remote region as the three parts of the support of the blending function defined in Equation (2). As a result, the geometrical parameters for the blending function are defined as follows: $d_0 = 3 \text{ km}$ and $d_1 = 30 \text{ km}$. Finally, note that we decide not to refine along the Australian coastline and the shelfbreak, in this calculation.

4 Gauges to evaluate the mesh quality for the Great Barrier Reef

The role of the mesh generator is to create the grid that provides the best numerical accuracy for a given number of degrees of freedoms. Basically, the target element size requirement has to be satisfied along with two other important constraints. For most discretisation techniques like finite volumes or finite elements, it is necessary to avoid large local discrepancies in element sizes. The second key-point is to estimate element equilaterality in the suitable metric. In this section, we define three quality gauges to analyze the geometrical quality of our generated meshes for the Great Barrier Reef.

4.1 The grading gauge

Local element size discrepancies will mainly appear in the transition area of the blending function. Therefore, it can be expected that the grading gauge measuring such local discrepancies could be directly estimated from the design parameters h_{min} , h_{max} and $d_t = d_1 - d_0$. Those three constants characterize the sharpness of the target element size function $h(\mathbf{x})$.

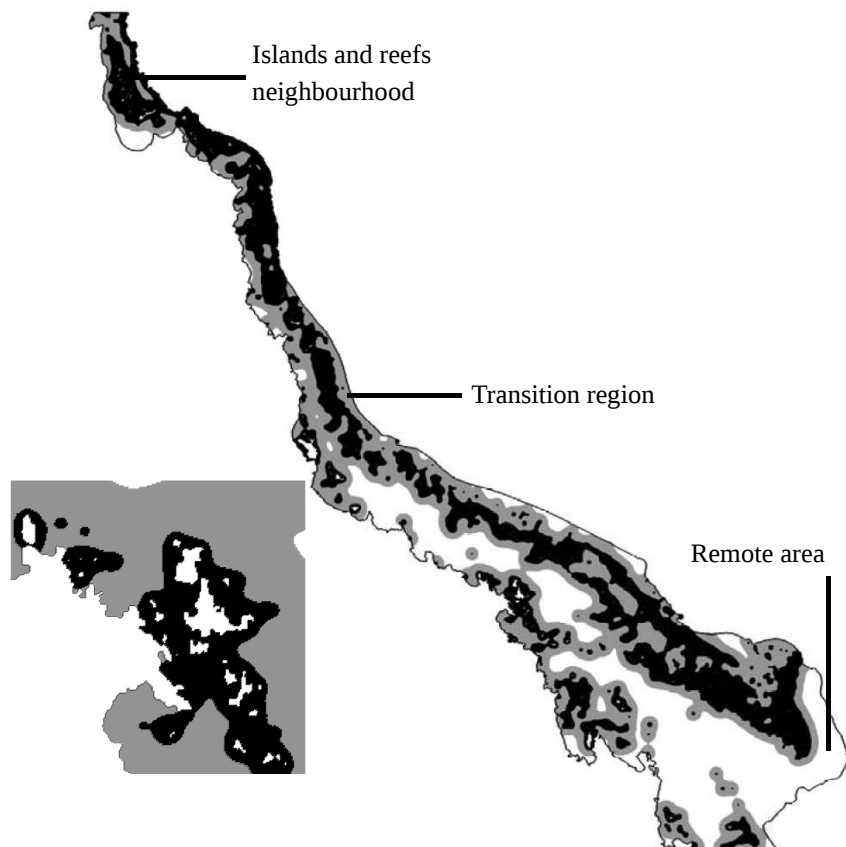


Figure 5: Partition of the domain of interest into three regions. The dark area close to islands and reefs requires a fine discretisation. The white part of the continental shelf far from the islands and reefs is covered only by a coarse discretisation. The grey area provides a smooth transition between the regions previously defined.

The *grading gauge* α is defined as a characteristic size ratio between adjacent elements in the most graded transition areas. In a one-dimensional geometrical distribution of element sizes h_i ranging from h_{min} to h_{max} in an interval of length d_t , the following relations hold:

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= \alpha h_i, & i &= 0, 1, \dots, n \\ h_0 &= h_{min}, \\ h_n &= h_{max} = \alpha^n h_{min}. \end{aligned}$$

Hence, the geometrical distribution requires:

$$\begin{aligned} d_t &= h_{min} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i, \\ d_t &= h_{min} \frac{\alpha - \alpha^n}{1 - \alpha}, \\ d_t &= h_{min} \frac{\alpha}{1 - \alpha} - h_{max} \frac{1}{1 - \alpha} \simeq h_{max} \frac{1}{\alpha - 1}, \end{aligned}$$

where n , the number of elements in the interval, is assumed to be relatively large for the last approximation.

In terms of the design parameters, we can then write the grading gauge in the closed form:

$$\alpha = \frac{d_t + h_{max}}{d_t + h_{min}}. \quad (6)$$

Limiting the grading gauge is required to avoid large local element size discrepancies, but inhibits the advantages of a non-uniform mesh only refined in areas of interest.

4.2 The shape gauge

The Delaunay-like algorithm is based on the idea that a good computational mesh is made of unitary equilateral triangles in a suitable metric. However, in the physical domain, the corresponding mesh may be highly anisotropic, even if it is not considered in this paper. Following Dompierre *et al.* (2003), the local shape measure of an element Ω^e is given by a normalized dimensionless *shape gauge* β_e :

$$\beta_e = \frac{\sqrt{3 b^e \prod_{i=1}^3 (b^e - 2 b_i^e)}}{\left(b^e \max_i b_i^e \right)} , \quad (7)$$

where b_i^e and $b^e = b_1^e + b_2^e + b_3^e$ are the lengths of the edges Γ_i^e of the element Ω^e and its perimeter in the metric space defined by the target element size:

$$(b_i^e)^2 = \int_{\Gamma_i^e} \frac{1}{h^2(\mathbf{x})} d\Gamma . \quad (8)$$

From a geometrical point of view, the shape gauge can be viewed as a normalized ratio of the radius of the inscribed circle of the triangular element Ω^e with respect to its perimeter. The normalization ensures that the shape gauge lies in the interval $[0, 1]$ and is maximal for the ideal case: an equilateral triangle in the metric space.

Finally, we define a global shape index β as the mean value of the local shape indexes of all elements of the mesh. The mesh is usually built in such a way that the value of b_i^e is close to unity at the end of the site insertion procedure (Frey et George, 2000). All the characteristics of the final mesh are therefore contained in the target element size field $h(\mathbf{x})$.

4.3 The edge gauge

The Watson-Bowyer algorithm does not ensure the strict respect of the target element size prescribed. In fact, it only tends to produce the mesh such that all lengths of the edge are close to unity in the metric defined by $h(\mathbf{x})$.

The discrepancy between the prescribed length and the final length of the edge Γ_f obtained by the generator is measured by a normalized dimensionless *edge gauge* γ_f :

$$\gamma_f = 1 - |b_f - 1|, \quad (9)$$

The normalization ensures that the edge gauge lies in the interval $[0, 1]$ and is maximal for the ideal case: $b_f = 1$, i.e. when the obtained length is in perfect agreement with the target element size field. Finally, we define a global edge index γ as the mean value of the local indexes of all edges of the mesh.

Figure 6 shows that the selection of the transition distance d_t strongly influences the distributions of both shape and edge gauges. In particular, the selection of the mesh design parameters is a compromise between the number of elements and the geometrical quality of mesh estimated by those three gauges.

5 Results

The methodology and the gauges introduced above have been used for generating high resolution unstructured meshes for the Great Barrier Reef in an automatic way using our own implementation of the Watson-Bowyer algorithm.

In Figure 7, two recursive close-up views on Whitsunday islands illustrate the performance of our technique. The design parameters of this first example are $h_{min} = 1 \text{ km}$, $h_{max} = 20 \text{ km}$, $d_0 = 3 \text{ km}$ and $d_t = 62 \text{ km}$ selected in such a way that the grading gauge α is 1.3. This example illustrates the ability of generating high quality graded unstructured meshes for the Great Barrier Reef. It also illustrates the graded mesh usefulness. Indeed, the gradual mesh refinement in the neighbourhood of islands and reefs concentrates most

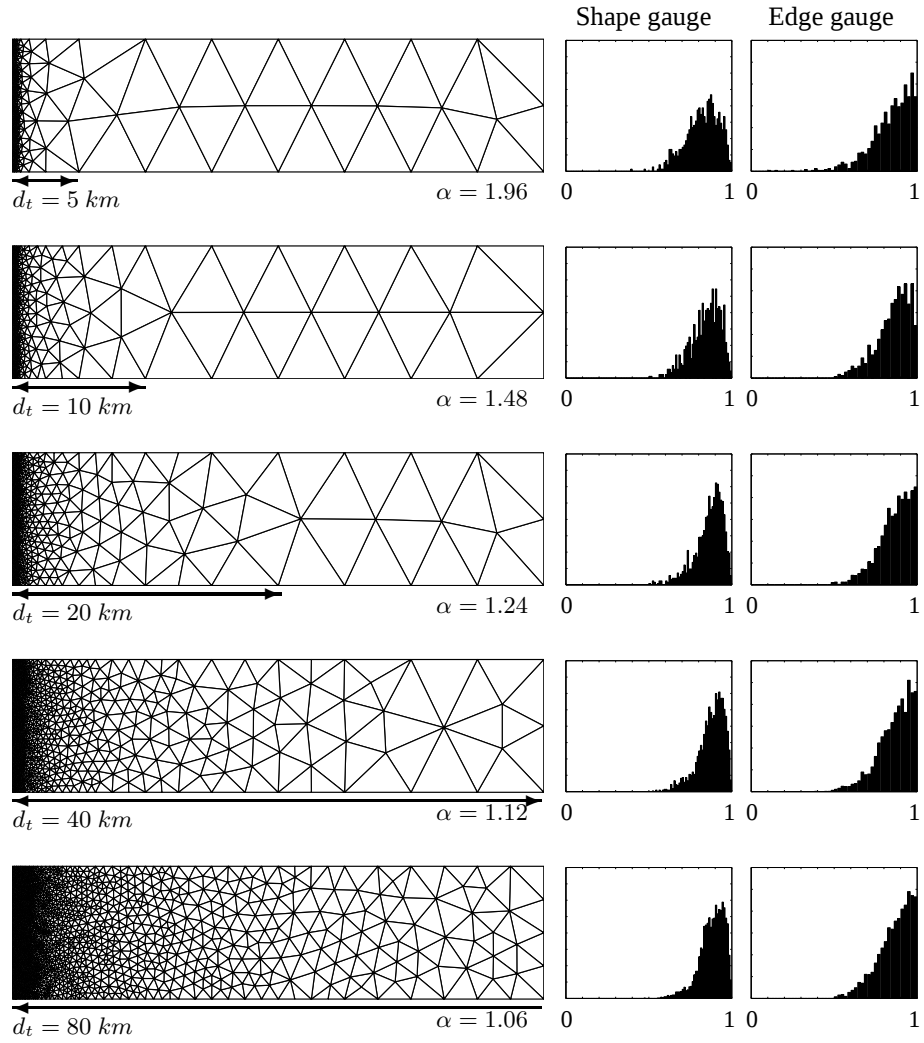


Figure 6: Impact of the transition distance on the generated meshes and on the normalized distributions of the shape gauge and the edge gauge. The smallest and biggest element size are 0.1 and 5 km, respectively.

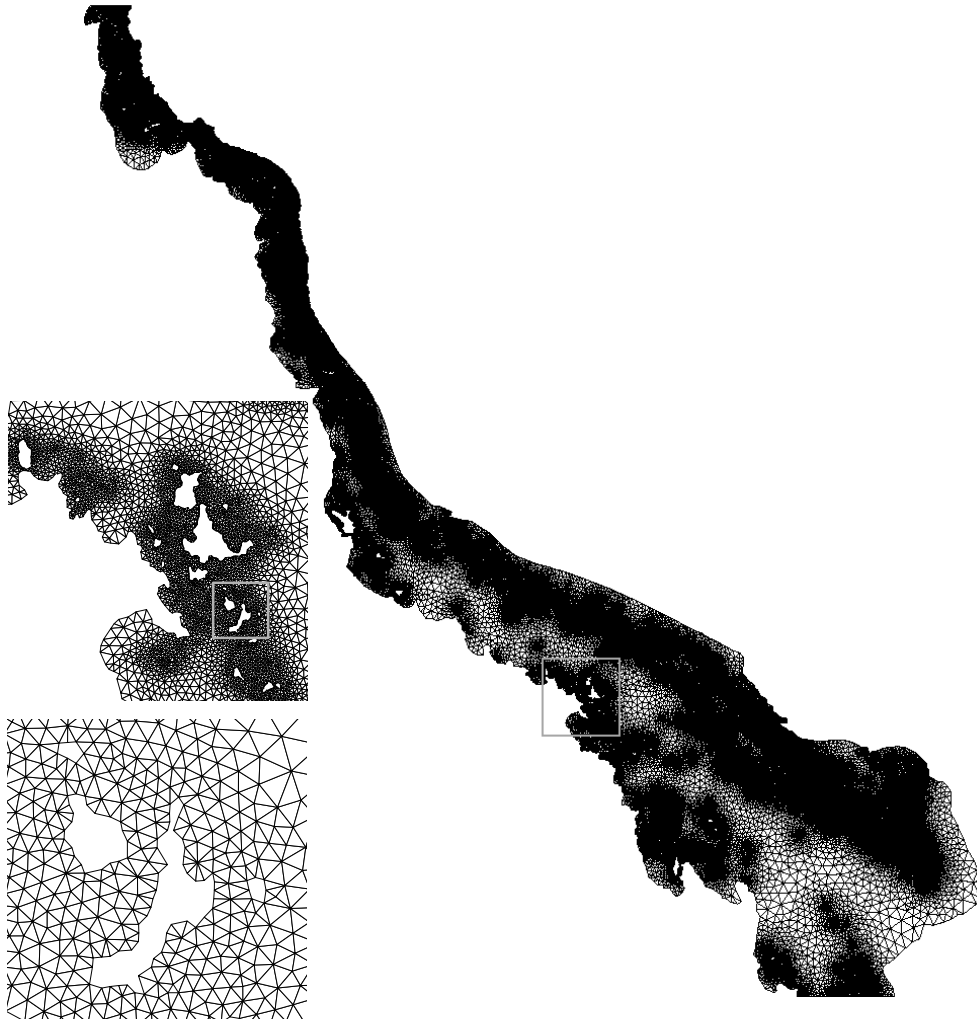


Figure 7: Mesh of the Great Barrier Reef with two recursive close up views illustrating the large spectrum of element sizes. The minimal and the maximal sizes are 1 and 20 *km*, respectively. The number of elements and nodes are 95 843 and 184 142, respectively.

	Mesh 1	Mesh 2	Mesh 3
h_{min}	0.4 km	0.2 km	0.1 km
h_{max}	20.0 km	10.0 km	5.0 km
d_0	3.0 km	3.0 km	3.0 km
d_t	64.9 km	32.5 km	16.2 km
# vertices	438 746	1 448 837	5 141 817
# elements	864 670	2 873 444	10 196 233
# edges	1 304 356	4 323 308	15 319 277
α	1.3	1.3	1.3
β	0.88	0.86	0.87
γ	0.87	0.87	0.87

Table 1: Characteristic dimensions of the meshes of Figure 9.

degrees of freedom on those area during a simulation. It must be noted that 82% of the degrees of freedom is concentrated in the area close to islands and reefs. By contrast, less than 1% of the degrees of freedom covers more 25% of the whole domain in remote regions. Here, we have assumed that the number of variables of an eco-hydrodynamical model defined on a given mesh is directly related to the number of nodes, edges and elements of the mesh. Therefore, the density of the mesh can be correlated with the number of degrees of freedom of the upcoming models. Typically, a uniform mesh would require four times more elements to cover the whole domain with a characteristic size $h = h_{min}$.

The total amount of elements and their repartition into the three regions defined by the blending function depend on the mesh design parameters. As shown in Figure 8, the relative importance of the three regions is directly linked to the selection of d_0 and d_t . Typically, the merging of adjacent islands and reefs neighbourhoods explains the appearance of a plateau in the surface occupied by the region close to islands, for an increasing value of d_0 . On the other hand, the relative importance of the transition area is directly related to the value of d_t and becomes largely predominant for a large transition distance. In order to maintain the computational advantage of a graded mesh, it is therefore mandatory to limit d_t to about 30 km. Logically, the relative importance of the remote regions behaves in an opposite way.

Table 1 gives the characteristic dimensions of some meshes with the corresponding global gauges. In particular, we emphasize that is possible to build a whole family of meshes for the Great Barrier Reef with a same grad-

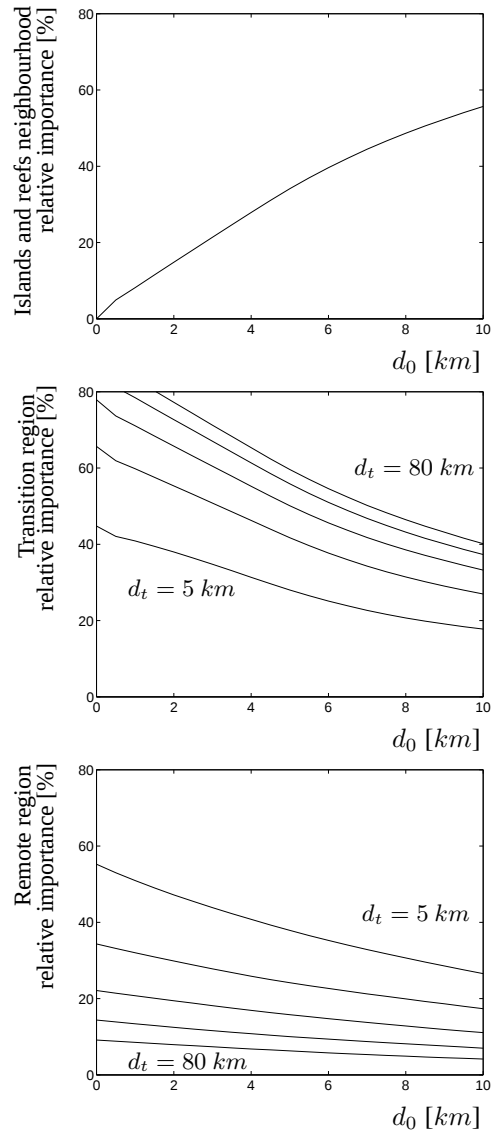


Figure 8: Relative importance of the surface of the three regions as a function of the distances d_0 and d_t . Isolines for $d_t = 5, 10, 20, 40$ and 80 km are represented.

ing gauge $\alpha = 1.3$. Those meshes have been obtained with several minimal and maximal element sizes in kilometers $(h_{min}, h_{max}) = (0.4, 20.0)$, $(0.2, 10.0)$ and $(0.1, 5.0)$. It allows mesh refinement analysis and hierarchical eco-hydrodynamical modelling of the domain. Figure 9 shows two recursive close-up views for this family of meshes.

At this stage, it is important to discuss the data used for generating our meshes: the bathymetric field. The domain covers $2.11 \times 10^5 \text{ km}^2$ from the Australian coastline to the shelfbreak and from Rockhampton to Cape Direction. Fortunately, high resolution ($500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$) bathymetry data from Lewis (2001) are available. As shows Figure 10, the bathymetry field exhibits sharp gradients from the occurrence of islands and reefs with a relatively smooth slope from the continental shelf. First of all, the position of the Australian coastline and islands is deduced by drawing the isobath corresponding to 0 m . The position of the reefs and the shelfbreak is deduced from the 10-meters and the 200-meters isobaths respectively. Finally, the bathymetry has also been used to estimate the tidal wave celerity used for the target element size. In view of the high gradients displayed in Figure 10, it appears useful to use a smoothed bathymetry field $\tilde{D}(\mathbf{x})$ for our refinement strategy. In fact, this modified bathymetry is obtained as the solution of the following boundary value problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda^2 \nabla^2 \tilde{D} - \tilde{D} + D &= 0 \\ \tilde{D} &= 0 \text{ m} \\ \tilde{D} &= 200 \text{ m} \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \text{on the coastlines} \\ \text{on the shelfbreak} \end{array} \quad (10)$$

where λ is a smoothing scale factor. As shown in Figure 10, this length scale corresponds to the length scale of the features we want to smooth. For the meshes displayed in this paper, we use a scale factor equal to 2.5 km . It must be stressed that this smoothed bathymetry is only used for the refinement mesh strategy and that the eco-hydrodynamical model can still be based on the original bathymetry field.

6 Concluding remarks

Mesh adaptivity can be used to generate efficient high-resolution unstructured meshes for the Great Barrier Reef taking advantage of the knowledge of the

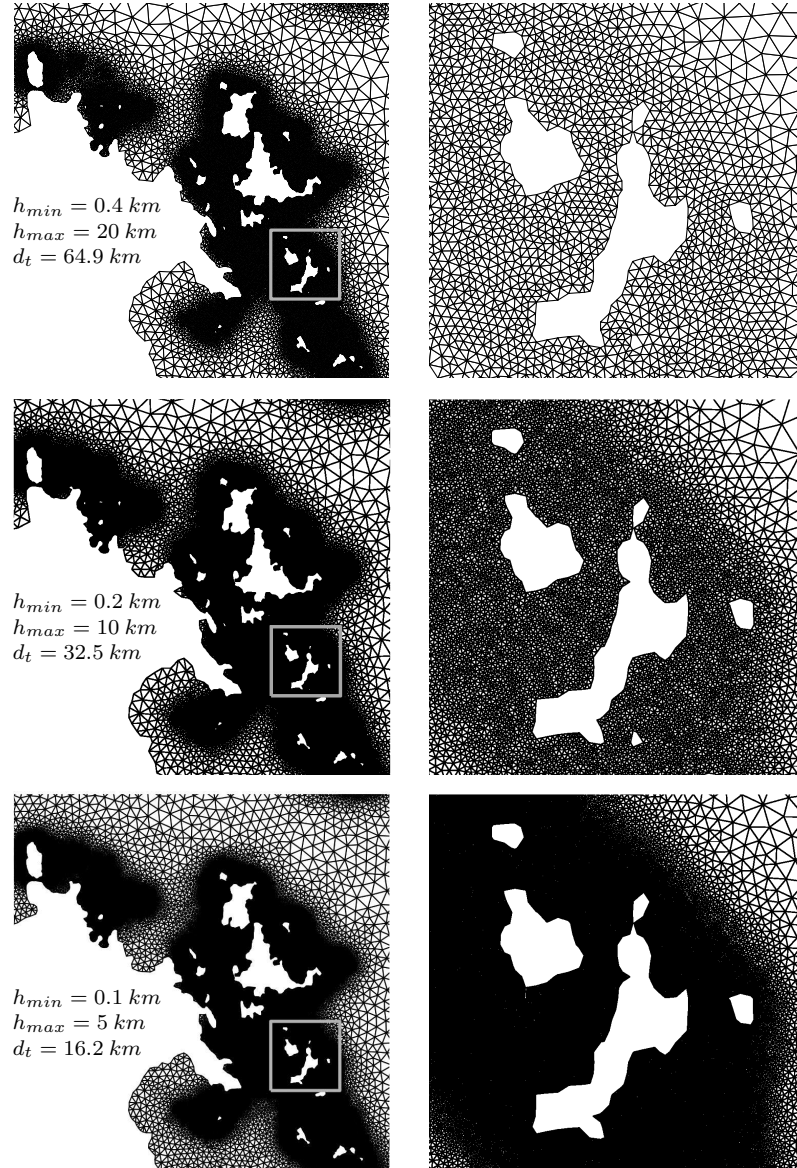


Figure 9: Meshes produced for a refinement analysis with sizes of h , $h/2$ and $h/4$ and the same geometrical parameters.

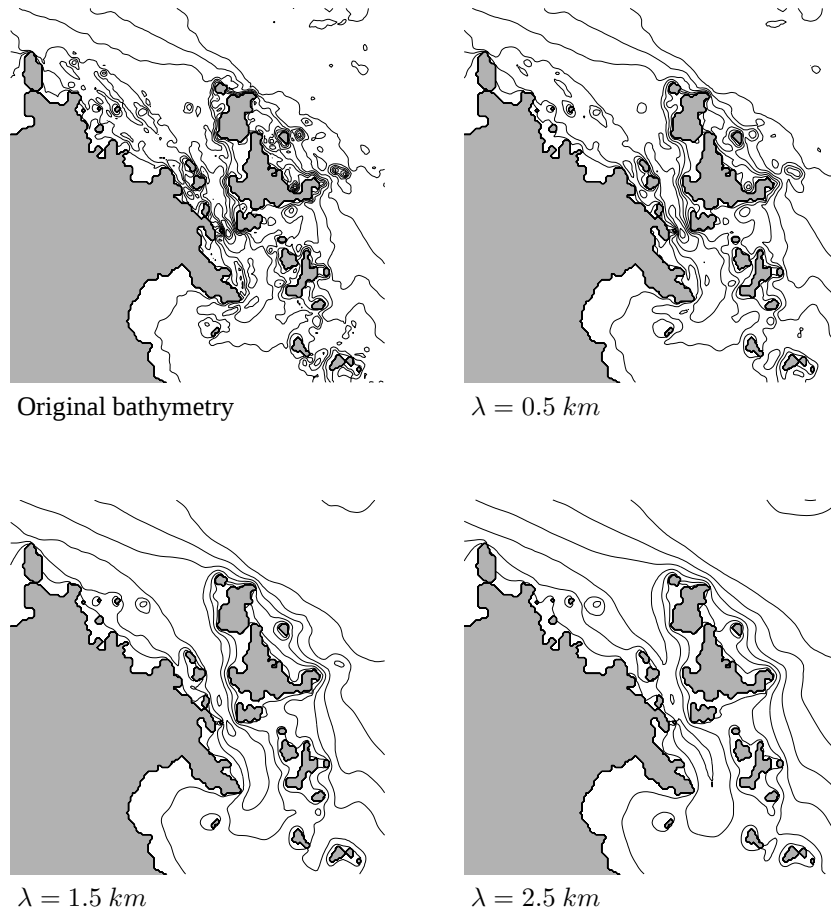


Figure 10: Impact of the scale factor λ on the smoothing of the bathymetry field. Isobaths for -10, -20, -30, -40, -50 meter are represented.

physics of the problem. From the bathymetry, we build meshes on which finite element or control volume numerical simulations can be performed. It is possible to optimise the mesh with respect to several design parameters in order to be able to simulate small scale flow features along islands and reefs without the need to uniformly cover the whole domain with a fine resolution.

The analysis of the quality of the meshes by three quality gauges has been performed and demonstrates that high graded meshes can be obtained with good geometrical properties. The latter ensure good numerical conditioning of the hydrodynamical models solved with those grids. The selection of the suitable design parameters will be tested in numerical simulations of the flow in the whole Great Barrier Reef.

Acknowledgements

Eric Deleersnijder and Emmanuel Hanert are a Research Associate and a Postdoctoral Researcher, respectively, with the Belgian National Fund for Scientific Research (FNRS). The present study was carried out within the scope of the project "A second-generation model of the ocean system", which is funded by the *Communauté Française de Belgique*, as *Actions de Recherche Concertées*, under contract ARC 04/09-316. This work is a contribution to the development of SLIM, the Second-generation Louvain-la-Neuve Ice-ocean Model.

Appendix

Demonstrating that the shore proximity function $\sigma(\mathbf{x})$ satisfies inequalities $0 \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq 1$ is tantamount to see that the negative part of $\sigma(\mathbf{x}) - 0$ and the positive part of $\sigma(\mathbf{x}) - 1$ are zero. The former and the latter are defined as

$$[\sigma(\mathbf{x}) - 0]^- = \frac{(\sigma(\mathbf{x}) - 0) - |\sigma(\mathbf{x}) - 0|}{2} \quad (11)$$

and

$$[\sigma(\mathbf{x}) - 1]^+ = \frac{(\sigma(\mathbf{x}) - 1) + |\sigma(\mathbf{x}) - 1|}{2}, \quad (12)$$

respectively. To demonstrate that (11) and (12) actually are zero, inspiration may be found in Lewandowski (1997) or Deleersnijder *et al.* (2001). Accordingly, the Poisson equation (3) is multiplied by $[\sigma(\mathbf{x}) - 0]^-$ and, after integration

by parts over the domain of interest Ω and substitution of the boundary conditions, the following integral is obtained:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mu^2 \left| \nabla [\sigma(\mathbf{x}) - 0]^- \right|^2 + \left| [\sigma(\mathbf{x}) - 0]^- \right| \left(1 + \left| [\sigma(\mathbf{x}) - 0]^- \right| \right) \right\} d\Omega = 0. \quad (13)$$

All the terms of the integrand of (13) are positive and, yet, this integral is zero. This is possible if and only if $[\sigma(\mathbf{x}) - 0]^-$ is zero at every location $\mathbf{x}$ in the domain of interest.

To show that $[\sigma(\mathbf{x}) - 1]^+$ is also zero, a similar technique is resorted to. The counterpart of integral (13) is then

$$\int_{\Omega} \left\{ \mu^2 \left| \nabla [\sigma(\mathbf{x}) - 1]^+ \right|^2 + \left([\sigma(\mathbf{x}) - 1]^+ \right)^2 \right\} d\Omega = 0, \quad (14)$$

implying that $[\sigma(\mathbf{x}) - 1]^+$ must be zero. QED.

References

- Armsworth, P., Bode, L., 1999. The consequences of non-passive advection and directed motion for population dynamics. *Proceedings of the royal Society of London Series A-Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455, 4045–4060.
- Assaker, R., 1998. Magnetohydrodynamics in crystal growth. Ph.D. thesis, Université catholique de Louvain.
- Assaker, R., Van den Bogaert, N., Dupret, F., 1997. Time-dependent simulation of growth of large silicon crystal by the Czochralski technique using a turbulent model for melt convection. *Journal of Crystal Growth* 180, 450–460.
- Bell, R., Elmetri, I., 1995. Ecological indicators of large-scale eutrophication in the Great Barrier Reef lagoon. *Ambio* 24, 208–215.
- Bowyer, A., 1981. Computing Dirichlet tessellations. *The Computer Journal* 24 (2), 162–167.
- Brasseur, P., Beckers, J.-M., Brankart, J.-M., Schoenau, R., 1996. Seasonal temperature and salinity fields in the Mediterranean Sea: Climatological analyses of a historical data set. *Deep-Sea Research I* 43, 159–192.
- Brinkman, R., Wolanski, E., Deleersnijder, E., McAllister, F., Skirving, W., 2002. Oceanic inflow from the Coral Sea into the Great Barrier Reef. *Estuarine, Coastal and Shelf Science* 54, 655–668.
- Deleersnijder, E., Campin, J.-M., Delhez, E.J.M., 2001. The concept of age in marine modelling: I. Theory and preliminary model results. *Journal of Marine Systems* 28, 229–267.
- Deleersnijder, E., Norro, A., Wolanski, E., 1992. A three-dimensional model of the water circulation around an island in shallow water. *Continental Shelf Research* 12, 891–906.
- Dompierre, J., Vallet, M.-G., Labbé, P., Guibault, F., 2003. On simplex shape measures with extension for anisotropic meshes. In: *Workshop on mesh quality and dynamic meshing*. Sandia National Laboratories - Livermore, CA, pp. 46–71.
- Done, T., 1988. Simulations of the recovery of pre-disturbance size structure in populations of porites spp. damaged by crown-of-thorns starfish. *Marine Biology* 100, 51–61.
- Foreman, M.G.G., Walters, R.A., Henry, R.F., Keller, C.P., Dolling, A.G., 1995. A tidal model for eastern Juan de Fuca Strait and the southern Strait

- of Georgia. *Journal of Geophysical Research* 100 (C1), 721–740.
- Frey, P., George, P., 2000. Mesh generation : Application to finite elements. Hermes Science Publishing.
- Frey, W., 1987. Selective refinement: A new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (11), 2183–2200.
- Hamner, W., Hauri, I., 1981. Effect of island mass: water flow and plankton pattern around a reef in the Great Barrier Reef lagoon. *Limnology & Oceanography* 26, 1084–1102.
- Hanert, E., Le Roux, D.Y., Legat, V., Deleersnijder, E., 2005. An efficient Eulerian finite element for the shallow water equations. *Ocean Modelling* 10, 115–136.
- Henry, R., Walters, R., 1993. Geometrically based, automatic generator for irregular networks. *Communications in Numerical Methods in engineering* 9, 555–566.
- Jarosz, E., Blain, C.A., Murray, S.P., Inoue, M., 2005. Barotropic tides in the Bab el Mandab Straits — numerical simulations. *Continental Shelf Research* 25, 1225–1247.
- Légrand, S., Legat, V., Deleersnijder, E., 2000. Delaunay mesh generation for an unstructured-grid ocean general circulation model. *Ocean Modelling* 2, 17–28.
- Lewandowski, R., 1997. *Analyse Mathématique et Océanographie*. Masson(Paris).
- Lewis, A., 2001. Great Barrier Reef depth and elevation model: GBRDEM. Technical Report 33, CRC Reef Research Centre Ltd, Townsville, Australia, 58 pp.
- Pietrzak, J., Deleersnijder, E., Schroeter, J. (Eds.), 2005. The Second International Workshop on Unstructured Mesh Numerical Modelling of Coastal, Shelf and Ocean Flows. *Ocean Modelling* (special issue) 10, 1–252.
- Shewchuk, J.R., 1996. Triangle: Engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. In: *First Workshop on Applied Computational Geometry* (Philadelphia, Pennsylvania). Association for Computing Machinery, pp. 124–133.
- Walters, R., 2005. Coastal ocean models: Two useful finite element methods. *Continental Shelf Research* 25, 775–793.
- Watson, D., 1981. Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes. *The Computer Journal* 24 (2), 167–172.
- Wolanski, E., Asaeda, T., Tanaka, A., Deleersnijder, E., 1996. Three-dimensional island wakes in the field, laboratory and numerical models. *Continental Shelf Research* 16, 1437–1452.
- Wolanski, E., Brinkman, R., Spagnol, S., McAllister, F., Steinberg, C., Skirving, W., Deleersnijder, W., 2003a. *Advances in Coastal Modeling*. Elsevier, Ch. Merging scales in models of water circulation: Perspectives from the Great Barrier Reef, pp. 411–429.
- Wolanski, E., Doherty, P., Carleton, J., 1997. Directional swimming of fish larvae determines connectivity of fish populations on the Great Barrier Reef. *Naturwissenschaften* 84, 262–268.
- Wolanski, E., Drew, E., Abel, K., O'Brien, J., 1988. Tidal jets, nutrient upwelling and their influence on the productivity of the algal *Halimeda* in the Ribbon Reefs, Great Barrier Reef. *Estuarine, Coastal and Shelf Science* 26, 169–201.
- Wolanski, E., Hamner, W., 1988. Topographically controlled fronts in the ocean and their biological influence. *Science* 241, 177–181.
- Wolanski, E., King, B., Spagnol, S., 1999. Perspectives in Integrated Coastal Zone Management. Springer-Verlag, Berlin, Ch. The implication of oceanographic chaos for coastal management, pp. 129–141.
- Wolanski, E., Marshall, K., Spagnol, S., 2003b. Nepheloid layer dynamics in coastal waters of the Great Barrier Reef, Australia. *Journal of Coastal Research* 19, 748–752.
- Wolanski, E., Richmond, R., McCook, L., 2004. A model of the effects of land-based, human activities on the health of coral reefs in the Great Barrier Reef and in Fouha Bay, Guam, Micronesia. *Journal of Marine Systems* 46, 133–144.
- Wolanski, E., Spagnol, S., 2000. Pollution by mud of Great Barrier Reef coastal waters. *Journal of Coastal Research* 16, 1151–1156.

Chapitre 5

Maillages anisotropes pour un talus continental

La modélisation de l'hydrodynamique des talus continentaux est un véritable défi. Situés à l'interface entre les mers continentales et l'océan profond, ils sont le siège de nombreux phénomènes dynamiques qui couvrent un large spectre d'échelles spatiales et temporelles. Les exemples typiques de ces phénomènes sont l'intensification des courants de marée, les interactions non-linéaires entre les structures de densité et la topographie abrupte, les résurgences induites par le vent d'eau profonde et froide, la génération de fronts, d'instabilités ou d'ondes de marées internes, sources d'énergie cinétique turbulente et de mélange. Comme tous ces phénomènes interagissent les uns avec les autres, il est virtuellement impossible d'isoler et de simuler avec un haut degré de réalisme un unique phénomène. En particulier, la présence de deux dynamiques essentiellement différentes de chaque côté du talus continental nécessite un raffinement adéquat du maillage à cet endroit en tenant compte du fait que les phénomènes dans la direction tangente à l'arête du talus sont totalement différents de ceux présents dans la direction normale. L'introduction de mailles anisotropes apparaît donc comme une solution particulièrement prometteuse.

La contribution originale de ce chapitre réside dans le développement d'une stratégie anisotrope d'adaptation de maillage pour le plateau continental nord-ouest européen, le talus continental et l'océan voisin. Notre objectif est de montrer l'intérêt des maillages anisotropes pour simuler, sur une unique grille, les divers phénomènes hydrodynamiques propres à ces trois régions. En particulier, la stratégie présentée tente de concilier des considérations hydrodynamiques comme la propagation des ondes de

marées sur le plateau continental et des considérations numériques comme le respect de la condition de compatibilité hydrostatique. Différents maillages illustrent la validité et l'efficacité de notre approche. Finalement, nous suggérons une approche basée sur les ellipses de marées pour introduire une autre cause d'anisotropie du maillage.

Ce chapitre est la transcription du manuscrit *Unstructured, anisotropic mesh generation for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean* de S. Legrand, E. Deleersnijder, E. Delhez et V. Legat qui est soumis pour publication dans *Continental Shelf Research*.

Unstructured, anisotropic mesh generation for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean

S. Legrand^{1,2}, E. Deleersnijder^{1,2}, E. Delhez³ and V. Legat²

¹ Institut d'Astronomie et de Géophysique G. Lemaître,
Université Catholique de Louvain,
2 Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

² Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics
Université Catholique de Louvain,
4 Avenue Georges Lemaître, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

³ Modélisation et Méthodes Mathématiques,
Université de Liège,
Sart Tilman B37, B-4000 Liège, Belgium

E-mail: legrand@astr.ucl.ac.be

This article is submitted for publication in Continental Shelf Research.

Abstract

A new mesh refinement strategy for generating high quality unstructured meshes of the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean is presented. Our objective is to demonstrate the ability of anisotropic unstructured meshes to adequately address the challenge of simulating the peculiar hydrodynamics occurring in these three regions within a unique mesh. The refinement criteria blend several hydrodynamic considerations as the tidal wave propagation on the continental shelf and the hydrostatic consistency condition in steep areas. Several meshes illustrate both the validity and the efficiency of the refinement strategy. The selection of the refinement parameters is discussed. Finally, an attempt is made to take into account tidal ellipses, providing another cause for anisotropy in the mesh.

Keywords: Unstructured grids, Northwestern European continental shelf, Delaunay triangulation, Finite elements methods, Finite volumes methods

1 Introduction

During the last decade, the focus in shelf oceanography moved from the shelf itself to more coastal areas, on the one side, and to the shelf break region, on the other side. In particular, recognizing the major influence of the exchanges between the shelf and the deep ocean on the climate, the primary productivity and many pollution issues of shelf seas (Walsh, 1991), numerous research programs were initiated to describe, understand and quantify the fluxes across the shelf break (e.g. ECOMARGE, MORENA, ARCANÉ, OMEX, SEFOS, SES, ENAM II, SEEP I and II, CODE7,...)

The European Union's Ocean Margin EXchange (OMEX) studied carbon and nitrogen distributions and fluxes on the Northwestern European continental shelf margin and slope (Wollast et Chou, 2001). The UK Natural Environment Research Council (NERC) Land Ocean-Interaction Study (LOIS) Shelf Edge Study (LOIS-SES) aimed at the quantification of the contributions to ocean-shelf water exchange by physical processes in the shelf-edge region west of Scotland (Souza *et al.*, 2001). The resulting analysis provided the background of more environmental oriented studies in which fluxes of dissolved and suspended sediments were estimated. Similar projects like the Shelf Edge Exchange Processes studies (SEEP-I, SEEP-II) focused on the Middle Atlantic Bight of the eastern U.S. continental shelf and slope (Walsh *et al.*, 1988; Biscaye *et al.*, 1994).

Extended measurement campaigns in shelf break regions are always severely constrained by the weather and their significance is also difficult to assess because of the high spatial and temporal variability of the hydrodynamics of these regions. The same high level of variability and the large number of interacting processes make the numerical approach also very challenging. In order to estimate the fluxes between the deep ocean and the shelf, a model must not only be able to describe the hydrodynamics of both regions but also manage to capture the physics of the shelf break region (Huthnance, 1995) : complex bathymetry, intensification of tidal currents near the shelf edge, non-linear interactions with the steep topography and the density structure, wind induced upwelling of deep cold water in a bottom boundary layer with enhanced mixing over the shelf or downwelling of light surface water with rapid vertical mixing, formation and instabilities of shelf-edge fronts, generation of internal tides and associated turbulence energy and mixing,... Davies et Xing (2005) present a review, based upon numerical process models and references literature, of these processes that influence the exchange between ocean and shelf.

Candidate models must not only be fully non linear but also provide a very high spatial resolution for the accurate description of the complex hydrodynamics in the shelf break region. Coelho *et al.* (2002), using a 8.5 km horizontal resolution model of the west coasts of Iberia and Morocco, stress that the use of high resolution implies a limited extent model for which boundary conditions are difficult to assess. The usual approach is therefore to use high-resolution process models of the shelf break region or nested models with increased resolution at the shelf break. In the LOIS Shelf Edge Study project, for instance, a 3-D hydrodynamic model with grid resolution $1/24^\circ \times 1/24^\circ$ was used to study spatial variability of the tides and wind-driven circulation west of Scotland. The model was then used in the form of a cross-shelf section with finer resolution (about 1 km or less) to examine the generation of internal tides (Xing et Davies, 1997), the dynamics of suspended sediments (Xing et Davies, 1998), small scale mixing (Davies et Xing, 2002) and tidal rectification and other non-linear processes (Davies et Xing, 2003). Finally, a 2-D model of the cross-slope section was run for a seasonal cycle of stratification with tidal, wind and thermal forcing (Xing *et al.*, 1999). Microbiological models were incorporated to model the primary production cycle in conjunction with physics and SPM transports (Proctor *et al.*, 2003).

Most current models of the large-scale ocean circulation encompass (part of) the adjacent shelf regions. Similarly, the open boundary of most shelf models has been moved from the shelf break itself to deeper areas. The aim of such expansion of the geographic extent is generally to provide more appropriate boundary conditions. In some model systems, a nesting approach is used with large-scale ocean models providing boundary conditions to force fine resolution model of the shelf or part of it.

In the so-called 'Atlantic-Margin' configuration of the POLCOMS model system (Holt *et al.*, 2005), for instance, the western boundary of the shelf model is located in the deep ocean and the boundary data are obtained from the U.K. Meteorological Office Forecasting Ocean Assimilation Model — FOAM — (Bell *et al.*, 2000). Higher resolution nested models are also included to describe specific parts of the Northwestern European Continental Shelf (Holt *et al.*, 2004).

Multiscale modelling exercises are planned in which the output of the large scale MERCATOR ocean model systems are used to force coastal models (Chanut et Etienne, 2005).

Lynch *et al.* (2003 and 2004) model the hydrodynamics of the Western Irish Sea region with their QUODDY finite element model using a graded mesh of

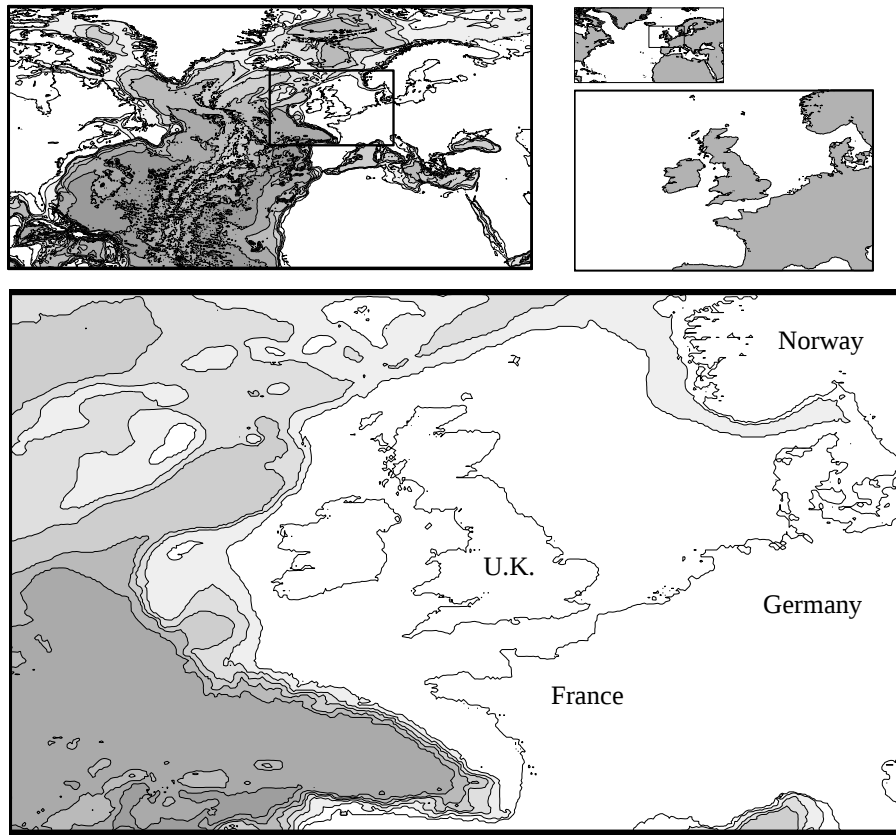


Figure 1: The domain of interest, which extends from $20^{\circ}W$ to $13^{\circ}E$ and from $43^{\circ}N$ to $63^{\circ}N$. The filled isobaths ranges from -6000 m to -1000 m by step of 1000 m . The continental shelf is visualized by the -200 m isobath.

triangles with 5 discrete levels of resolution increasing from 0.02 degree at the Irish coast to .32 degree in the shelf break region and in the deep ocean.

Such a nesting approach is only partly satisfactory. While an increased resolution is provided in the area of interest — part of the shelf region — and larger scales influences from the adjacent ocean are taken into account in some way in the local model, the dynamics of the shelf break region is generally poorly represented. As a consequence, the exchange processes between the shelf and the deep ocean are not properly described.

An alternative approach is the use of unstructured meshes that easily allow within the same mesh local refinement along the shelf break while covering the oceanic and shelf domains at an appropriate resolution. Indeed, as unstructured mesh marine modelling is a rapidly growing field of research (Hantert *et al.*, 2005; Walters, 2005; Pietrzak *et al.*, 2005; Pain *et al.*, 2005), it is now conceivable to develop an unstructured mesh numerical simulation tool of the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean.

The present article deals with the first step towards the development of such a model, i.e. the construction of an appropriate mesh for the Northwestern European continental shelf and a part of the North Atlantic Ocean (Figure 1). As the small aspect ratio of most marine flows suggests to explicitly preserve the vertical direction in the mesh, we have chosen to use *prismatic elements* that may be obtained from a downwards extrusion of a surface triangulation. This allows to treat separately the horizontal triangulation at the surface and the positioning of the nodes along each vertical. Only the first problem is addressed herein.

Since generating triangulation is very well documented in the literature (Watson, 1981; Bowyer, 1981; Frey, 1987; Shewchuk, 1996; Frey et George, 2000; Legrand *et al.*, 2000), the challenge consists in the design of a suitable mesh refinement strategy. This task is crucial in order for the model to take advantage of all of the aspects of unstructured meshes. As mesh refinement results from the consideration of many constraints, setting up a feasible unstructured mesh refinement strategy is a non-trivial task. This should be guided by the major physical processes occurring along the shelf break and on the continental shelf. In particular, the strong and narrow slope current that flows from the Bay of Biscay to the Norwegian Trench suggests the introduction of some anisotropy along the shelf break. However, physical considerations are not the only constraints which apply on the mesh generation procedure. For instance, the hydrostatic consistency criterion has also to be considered at the

shelf break in order to limit the error on the pressure gradient term inherent in generalized vertical coordinates.

Section 2 details our refinement strategy. Section 3 introduces two gauges to evaluate the quality of the Northwestern European continental shelf triangulations that are presented in section 4. Finally, concluding remarks are given.

2 A refinement strategy for the Northwestern European continental shelf

A mesh generator is a tool that takes into account constraints on the size, the shape and the orientation of the elements making up a triangulation of the domain of interest. It is assumed that the ideal mesh is composed of unitary equilateral triangles in a dual space where the modified coordinates $\mathbf{x}'$ are obtained from the transformation of the coordinates $\mathbf{x}$ in the physical space: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. This transformation is characterized by the metric tensor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ that relates length between both spaces:

$$d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (1)$$

The length of a curve Γ in the physical space and the dual space are thus respectively given by

$$l = \int_{\Gamma} \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}$$

$$l' = \int_{\Gamma} \sqrt{d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}'} = \int_{\Gamma} \sqrt{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}}.$$

In this framework, the goal of the mesh generator consists in creating a mesh with all edges exhibiting a length in the dual space as close as possible to unity. To reach such a goal, vertices can be created, removed or displaced. Topological operations like edge flipping or re-performing a partial Delaunay triangulation can also be done (Legrand *et al.*, 2000). Of course, the suitable metric $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ needs to be available.

To adequately build up a metric for a two-dimensional domain, only three parameters have to be provided. Those are the *privileged direction* — i.e. a unit vector (v_x, v_y) — along which the element should be elongated and two *target element size* function $h_{//}(\mathbf{x})$ and $h_{\perp}(\mathbf{x})$ that set the element length along the privileged direction (v_x, v_y) and the normal direction $(-v_y, v_x)$, respectively. Those three parameters fully determine the orthonormal eigenvectors

and eigenvalues of the metric tensor:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} v_x(\mathbf{x}) & -v_y(\mathbf{x}) \\ v_y(\mathbf{x}) & v_x(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{//}^2(\mathbf{x})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{\perp}^2(\mathbf{x})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(\mathbf{x}) & v_y(\mathbf{x}) \\ -v_y(\mathbf{x}) & v_x(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{v_x^2}{h_{//}^2} + \frac{v_y^2}{h_{\perp}^2} & \frac{v_x v_y}{h_{//}^2} - \frac{v_x v_y}{h_{\perp}^2} \\ \frac{v_x v_y}{h_{//}^2} - \frac{v_x v_y}{h_{\perp}^2} & \frac{v_y^2}{h_{//}^2} + \frac{v_x^2}{h_{\perp}^2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Thus, setting up a mesh refinement strategy is tantamount to suggesting a method for evaluating the parameters $h_{\perp}$, $h_{//}$ and (v_x, v_y) at any location in the domain of interest. This will be done by taking into account some aspects of the physics of tidal propagation and a numerical accuracy constraint related to the evaluation of the pressure force in regions where the seabed exhibits steep slopes (e.g. Haney 1991, Deleersnijder and Beckers 1992), i.e. essentially the shelf break and the continental slope.

2.1 Tidal propagation

Tides are the most energetic processes occurring on the Northwestern European continental shelf. As Henry et Walters (1993), Foreman *et al.* (1995), Hagen *et al.* (2001), Jarosz *et al.* (2005), Walters (2005) or Legrand *et al.* (2006b), we may therefore assume that the resolution of an appropriate mesh should be adjusted in such a way that external inertia-gravity waves travel over a given time interval roughly the same fraction of the mesh elements. Since the tide celerity is approximately given by $\sqrt{g D(\mathbf{x})}$ — where g and $D(\mathbf{x})$ are the gravitational acceleration and the water column depth, respectively — such a requirement can be expressed as

$$\frac{h_{//}(\mathbf{x})}{h^*} = \sqrt{\frac{D(\mathbf{x})}{D^*}}. \tag{3}$$

This relation specifies the target element size $h_{//}(\mathbf{x})$ in terms of the water column depth field $D(\mathbf{x})$ and a user specified target element size h^* for a given water column depth D^* . As a result, this strategy tends to produce coarse elements in the deepest parts of the domain of interest and finer ones in shallower regions.

As no privileged direction was specified, expression (3) introduces no anisotropy in the mesh: $h_{\perp}(\mathbf{x})$ should be equal to $h_{\parallel}(\mathbf{x})$. However, anisotropy is necessary in specific regions, as explained below.

2.2 Shelf break and continental slope

The region of the shelf break and the continental slope exhibits a peculiar hydrodynamics. A typical example thereof is the current following the continental slope from the Bay of Biscay to the Norwegian Trench. For modelling such features, it is necessary to resolve the details of the bottom topography and the forces driving the flow. In particular, the discretisation of the pressure force is no trivial task in regions characterised by steep slopes of the seabed.

A first strategy for refining the mesh in the region of the shelf break may be based on the Hessian matrix of the water column depth (Gorman *et al.*, 2005). However, this approach aims at uniformly distributing over the mesh the discretisation errors associated with the water column depth and is not directly related to hydrodynamic processes. This is the reason why we prefer to adopt a strategy that is explicitly based on errors due to the discretisation of some critical terms of the momentum equations. For a region of steep bottom slopes, the hydrostatic consistency condition is the refinement criterion of choice, provided the discretisation in the vertical direction bears similarities with the terrain-following σ -coordinate system ($\sigma = 0$ at the seabed and $\sigma = 1$ at the sea surface). In the notations of the present study, this condition,

$$\left\| \frac{1-\sigma}{D(\mathbf{x})} \nabla D(\mathbf{x}) \right\| h_{\perp}(\mathbf{x}) < \delta\sigma, \quad (4)$$

requires a sufficiently small element size in the direction of the depth gradient for a given vertical grid increment $\delta\sigma$ for the error on the numerical estimate of the pressure force to be small in the direction orthogonal to the isobaths (Janjic, 1977; Mesinger, 1982; Haney, 1991; Deleersnijder et Beckers, 1992; Beckmann et Haidvogel, 1993; Shchepetkin et McWilliams, 2003). Since the hydrostatic consistency condition is the most stringent at the seabed, we define the target element size along the depth gradient direction as

$$h_{\perp}(\mathbf{x}) = s \left\| \frac{\nabla D(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \right\|^{-1}. \quad (5)$$

The value of the user specified parameter s must be smaller than the vertical increment $\delta\sigma$ at the seabed. Actually, even if numerical considerations motivate relation (5), the horizontal length scale $\left\| \frac{\nabla D(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \right\|^{-1}$ appears in every

analytical study of the shelf break dynamics (Huthnance, 1995). This provides a physically-based justification to our choice.

2.3 Building the metric tensor

Based on the considerations above, the metric tensor will be built as illustrated in Figure 2. The following steps are performed:

- The privileged direction (v_x, v_y) is set along the direction of the bathymetry gradient. In case of no privileged direction — no gradient — the mesh refinement strategy should be isotropic: $h_{//}$ is equal to $h_{\perp}$ such that, according to (2), the privileged direction can be set to an arbitrary value.
- From bathymetric data, the speed of external gravity waves, i.e. $\sqrt{g D}$, is evaluated in the domain of interest. Using (3), this leads to a first estimate of the mesh size target $h_{//}$. In the deepest (shallowest) regions of the domain, however, this may lead to excessively large (small), mesh size, which is why $h_{//}$ must be forced to remain between minimum (h_{min}) and maximum (h_{max}) values set a priori. In other words, the mesh size target $h_{//}$ is prescribed as

$$h_{//} = \max \left[h_{min}, \min \left(h_{max}, h^* \sqrt{\frac{D(\mathbf{x})}{D^*}} \right) \right]. \quad (6)$$

- Using expression (5), $h_{\perp}$ is estimated as

$$h_{\perp} = \min \left[h_{//}(\mathbf{x}), s \left\| \frac{\nabla D(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \right\|^{-1} \right]. \quad (7)$$

This simple definition works out the compromise between the assumed requirement of isotropy on the shelf and the possible need of anisotropy for accurately modelling the shelf break dynamics.

So, if the bathymetric gradient is small, the mesh size targets $h_{//}$ and $h_{\perp}$ will be equal; otherwise, $h_{\perp}$ will be set to a value smaller than $h_{//}$ and the mesh will tend to exhibit an appropriate degree of anisotropy. As shown in Figure 3, anisotropic elements are likely to be generated at the shelf margin, along the coastlines and close to the highest seamounts.

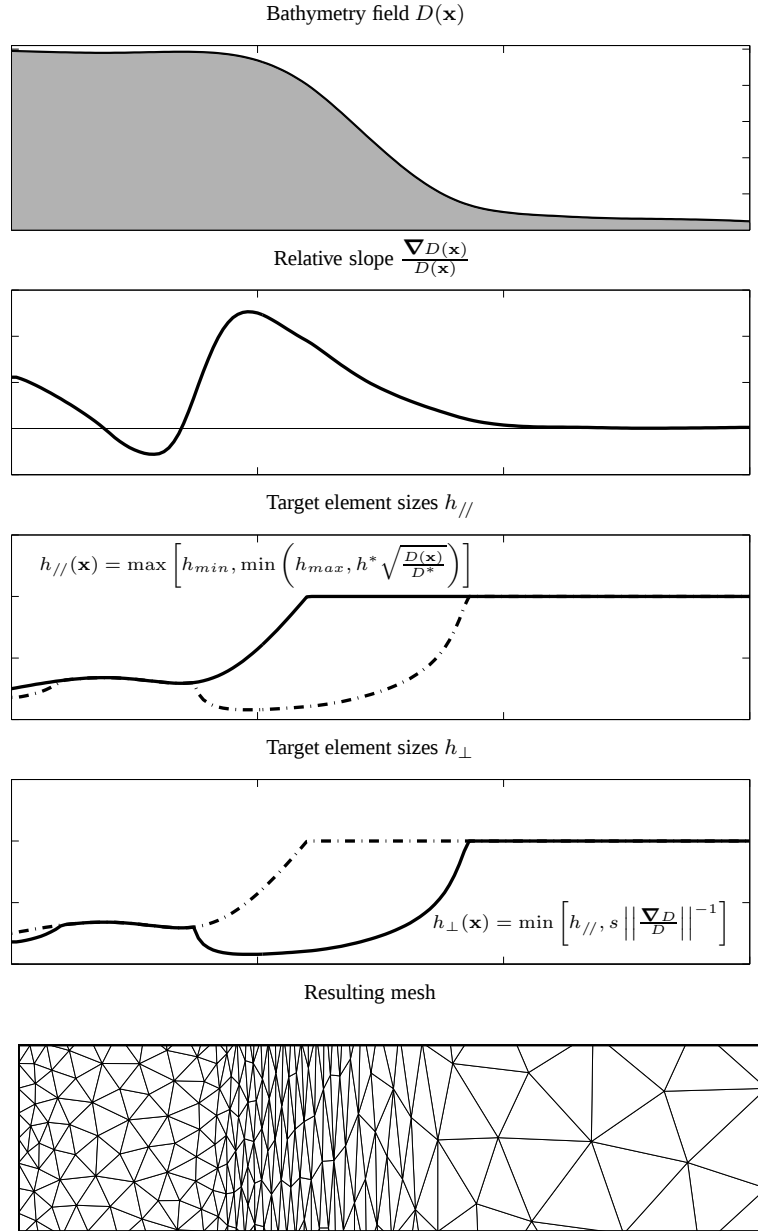


Figure 2: Illustration of our anisotropic mesh refinement strategy for an idealised bathymetric profile including three regions that may be regarded as, from left to right, the shelf, the continental slope and the ocean.

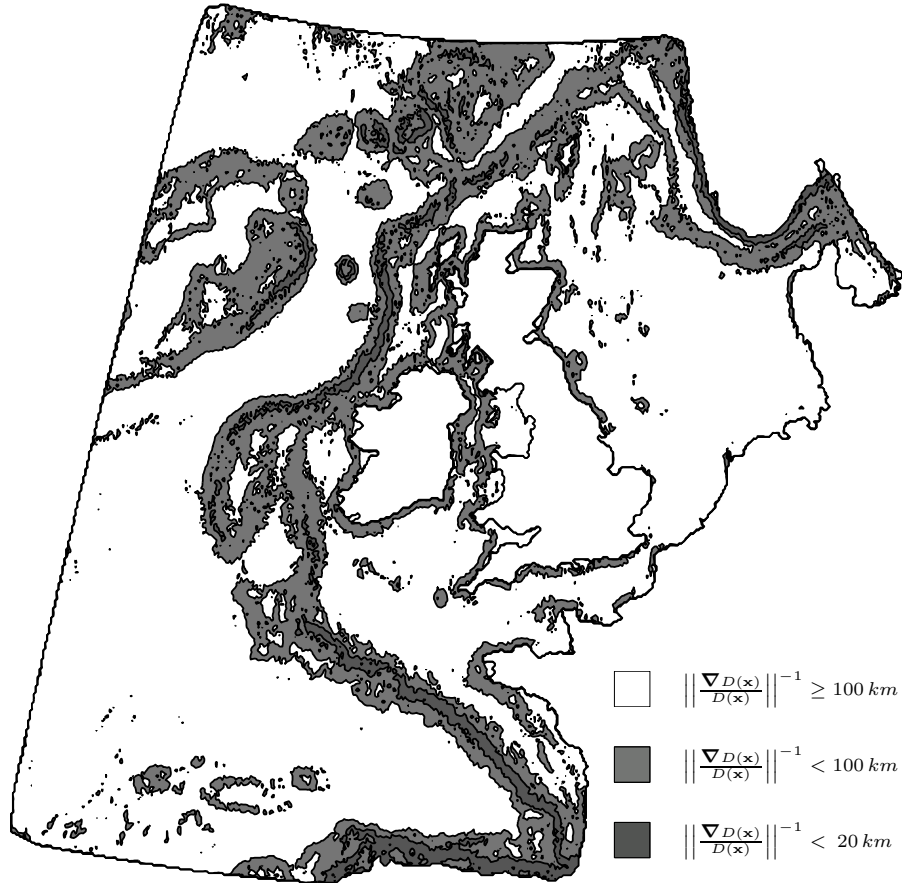


Figure 3: The spatial distribution of the horizontal length scale $\left\| \frac{\nabla D(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \right\|^{-1}$. The regions where the latter is relatively small are those in which anisotropic elements are likely to be needed, i.e. the continental slope, coastal regions and seamounts.

3 Gauges to evaluate the mesh quality

The role of the mesh generator is to create the grid that provides the best numerical accuracy for a given number of degrees of freedoms. Basically, the target element size requirement has to be satisfied along with two other important constraints. For most discretisation techniques like finite volumes or finite elements, it is necessary to avoid large local discrepancies in element sizes. The second key-point is to estimate element equilaterality in the suitable metric. In this section, we define two quality gauges to analyze the geometrical quality of our generated meshes: a *shape gauge* and an *edge gauge* (Legrand *et al.*, 2006b).

Following Dompierre *et al.* (2003), the local shape measure of an element Ω^e is given by a normalized dimensionless *shape gauge* β_e :

$$\beta_e = \frac{\sqrt{3 b^e \prod_{i=1}^3 (b^e - 2 b_i^e)}}{\left(b^e \max_i b_i^e \right)}, \quad (8)$$

where b_i^e and $b^e = b_1^e + b_2^e + b_3^e$ are the lengths of the edges Γ_i^e of the element Ω^e and its perimeter in the dual space :

$$b_i^e = \int_{\Gamma_i^e} \sqrt{dx \cdot g(x) \cdot dx}. \quad (9)$$

This gauge can be viewed as a normalized ratio of the radius of the inscribed circle of the triangular element Ω^e in the dual space with respect to its perimeter. The normalization ensures that the shape gauge lies in the interval $[0, 1]$ and is maximal for the ideal case: an equilateral triangle in the dual space or, equivalently, an anisotropic triangle whose shape and orientation in the physical space exactly fulfill the metric tensor constraints.

As the shape gauge does not give any piece of information about the size of the elements, we introduce a second quality gauge that measures the discrepancy between the target length (1 in the dual space) and the length of an edge Γ_f . This *edge gauge* γ_f , defined as

$$\gamma_f = 1 - |b_f - 1|, \quad (10)$$

is maximal for the ideal case: $b_f = 1$, i.e. when the obtained length is in perfect agreement with the target element size fields.

Finally, two global quality indexes β and γ may be defined as the average values of both gauges β_e and γ_f over the whole mesh, respectively.

4 Results

The methodology and the gauges introduced above are now used for generating and assessing anisotropic unstructured meshes for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean in an automatic way using our own implementation of the Watson-Bowyer algorithm (Legrand *et al.*, 2000). Although the geographical domain spreads from $20^\circ W$ to $13^\circ E$ and from $43^\circ N$ to $63^\circ N$, UTM coordinates have been used in order to easily evaluate lengths in the international metric system. Bathymetry gradients have been obtained from the ETOPO-5 gridded dataset (National Geophysical Data Center, 1988).

Figure 4 illustrates the ability of our mesh refinement strategy to adequately resolve the continental shelf, the shelf break and the seamounts. The design parameters are summarized in Table 1. For this first ‘coarse’ example, the element size ranges from 6 km in the nearshore region to about 40 km in the open ocean. Element size variation in terms of the square root of the water depth may clearly be noticed on the continental shelf. The close-up view on the Hebridean shelf shows that the anisotropy is mainly confined along the shelf break and the seamounts. The minimal transverse element size $h_\perp$ is about 3 km in the shelf break. This corresponds to a maximal anisotropy factor $r = h_{//}/h_\perp$ of about 10. Another advantage of the unstructured meshes is their ability to resolve islands, channels and shorelines without introducing any ‘staircase’ discretisation. The latter, as is well known, are likely to cause spurious coastal boundary layers (Adcroft et Marshall, 1998) that can limit the model accuracy in coastal areas.

Figure 5 shows the way our mesh generator can fulfill the mesh refinement strategy under quality constraints. The first column refers to the coarse mesh presented in Figure 4. That the mean values of the shape gauge ($\beta = 0.83$) and the edge gauges ($\gamma = 0.87$) are rather close to unity indicates that the generated mesh is in a good agreement with the metric tensor prescriptions in most regions of the domain of interest. However, several under-resolved regions — as the narrow passages between the Anton Dohrn seamount and the Hebridean shelf — exhibit some discrepancies with those prescriptions. They may be brought to the fore by graphically comparing the length, the shape and the orientation of the generated elements with ellipses that delimit regions

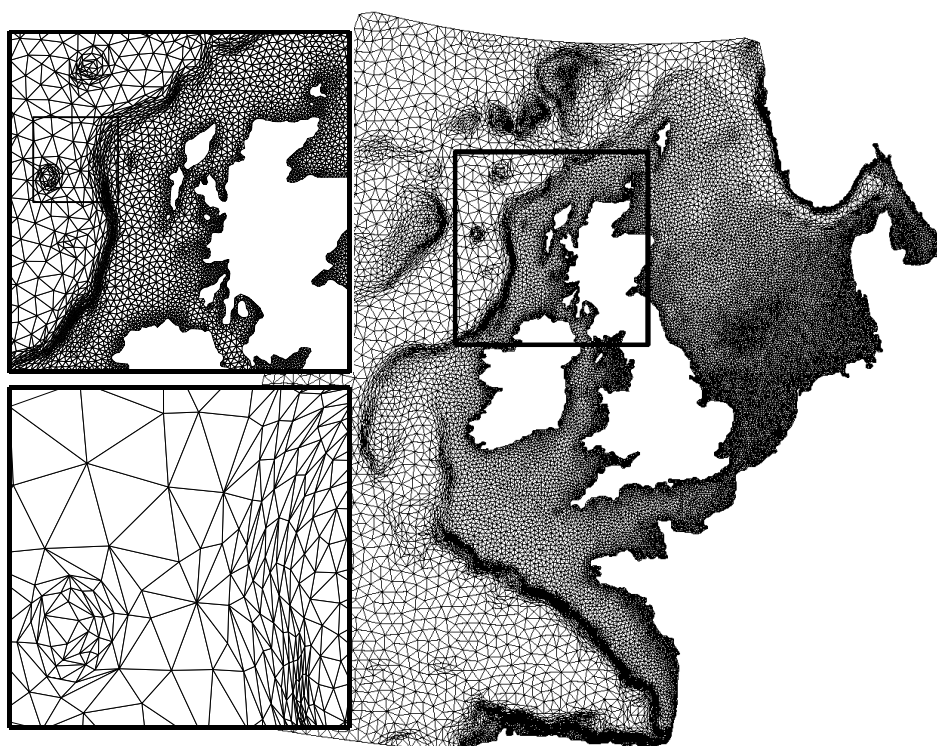


Figure 4: A rather coarse mesh of the domain of interest with two recursive close-up views on the Hebridean shelf and the Anton Dohrn sea-mount.

	Coarse mesh	Fine mesh
D^*	25 m	10 m
h^*	6 km	0.5 km
s	0.3	0.05
h_{min}	6 km	0.5 km
h_{max}	38 km	5 km
# vertices	29 121	865 754
# elements	55 209	1 714 057
# edges	84 355	2 579 855
β	0.83	0.87
γ	0.87	0.89

Table 1: The values of our mesh refinement strategy parameters and the basic features of the corresponding meshes.

laying at a distance of $1/2$ in the dual space from mesh vertices: overlapping ellipses in the narrow passage indicates the poor quality elements. These increase the length of the tail of both quality gauges normalized distributions to an unacceptable limit.

The second column of Figure 5 presents results with another set of the design parameters values (Table 1). These have been chosen according to recommendations in Xing *et al.* (1999): a transverse element size $h_{\perp}$ of about 0.5 km in the steepest areas of the shelf break and a vertical increment $\delta\sigma$ at the seabed of a few hundredth ($s = 0.05$). The nearshore region is covered with elements of 0.5 km in length while the length of the elements in the open ocean is of order 5 km. These design parameters values allow a better resolution of the topographic features leading to a better quality mesh. In particular, the fine mesh does not have overlapping ellipses while the tails of both gauges normalized distribution are drastically shortened: the worst values for both quality gauges are greater than 0.5. Finally, it must be pointed out that the 1.7 millions of elements contained in this fine mesh is still a quite small number in comparison with the 12.4 millions of squares needed to cover the whole domain ($3.1 \cdot 10^6 \text{ km}^2$) with a uniform structured grid whose elements edges present the same typical size, i.e. 0.5 km.

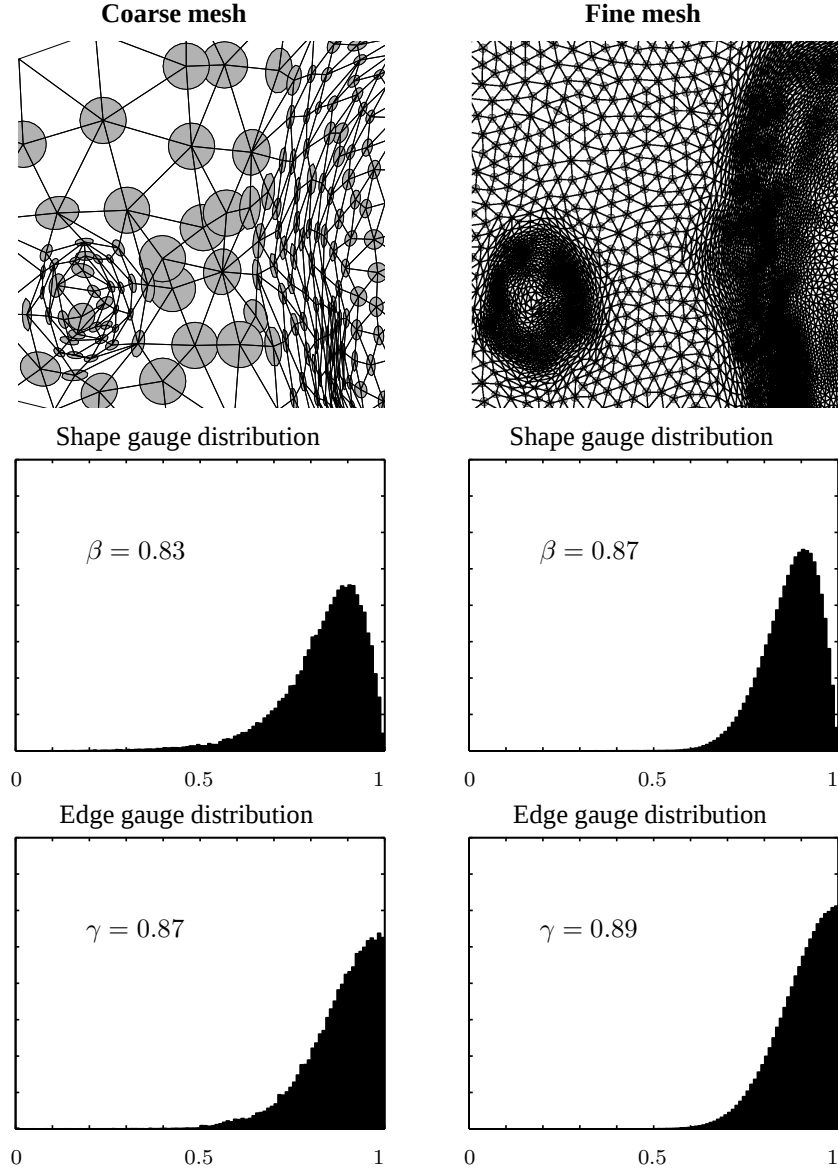


Figure 5: Comparison between the length, the shape and the orientation of the ellipses and mesh elements to illustrate the way our mesh generator can fulfill the prescribed metric under quality constraints. Since the ellipse length is the half of the target element size, we may conclude that most discrepancies arise in areas of large element size variations. The normalized distribution of both quality gauges for the whole meshes.

5 Concluding remarks

This paper presents the potential advantages of anisotropic unstructured meshes for modelling the hydrodynamics of the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean within the same mesh. Taking advantages of the knowledge of the dynamics of the three parts of the domain, we have developed a simple but efficient strategy in which the mesh refinement is controlled through a few design parameters. The analyses of the quality of the generated meshes demonstrate that, while major topographic features are correctly resolved, anisotropic graded meshes can be obtained with good geometrical properties. The latter ensure a good numerical conditioning for a subsequent implementation of finite element or finite volume hydrodynamic models.

The strong point of our mesh refinement strategy is its relative simplicity. However, this also lets room for specific improvements. Let us give two attractive examples. First, the accurate simulation of small-scale details of the pollutants transport could require the enhancement of the nearshore resolution by blending our mesh refinement strategy with other constraints based on the distance to the shore. Details may be found in Legrand *et al.* (2006b). A second potential improvement could be the exploitation of tidal ellipses in order to introduce some anisotropy on the continental shelf. For instance, to take into account the fact that the flows are mainly oriented along narrow channels as the North Channel or the Saint George's Channel in the Irish sea, the privileged directions of Figure 6 are given by the M_2 tide ellipses (Luyten *et al.*, 1999); the mesh size $h_{//}$ by relation (6) and finally, the anisotropy factor $r = h_{//}/h_{\perp}$ by an adequate fraction of the ratio between the semi-axis of these tidal ellipses. Although this seems very attractive, no claim can be made at this stage that this will improve the simulations accuracy. However, it illustrates a way to extend our approach to dynamically adjusted meshes.

Acknowledgements

Eric Deleersnijder is a Research Associate with the Belgian National Fund for Scientific Research (FNRS). The present study was carried out within the scope of the project "A second-generation model of the ocean system", which is funded by the *Communauté Française de Belgique*, as *Actions de Recherche Concertées*, under contract ARC 04/09-316. This work is a contribution to the development of SLIM, the Second-generation Louvain-la-Neuve

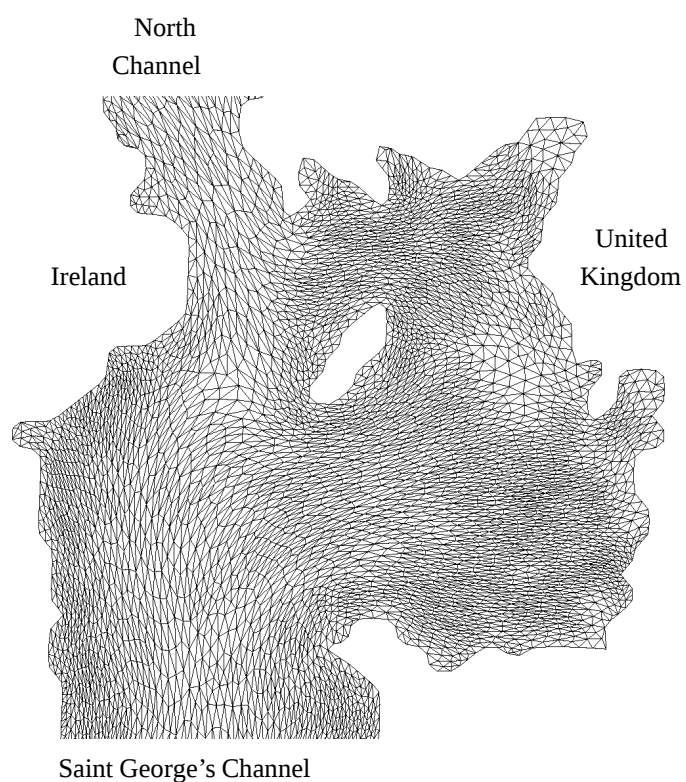


Figure 6: A close-up view of a mesh in which the tidal ellipses are taken into account to introduce some anisotropy on the continental shelf. This may be an attractive improvement of our mesh refinement strategy in order to take into account the 'channel effect' that guides the flow through narrow passages as the North Channel or the Saint George's one.

Ice-ocean Model. The authors are indebted to Georges Pichot and Virginie Pison for providing tidal currents time-series computed with COHERENS (Luyten *et al.*, 1999).

References

- Adcroft, A., Marshall, D., 1998. How slippery are piecewise-constant coastlines in numerical models? *Tellus* 50 A, 95–108.
- Beckmann, A., Haidvogel, D., 1993. Numerical simulation of flow around a tall isolated seamount. part I: problem formulation and model accuracy. *Journal of Physical Oceanography* 23, 1736–1753.
- Bell, M.J., Forbes, R.M., Hines, A., 2000. Assessment of the FOAM global data assimilation system for real-time operational ocean forecasting. *Journal of Marine Systems* 25, 1–22.
- Biscaye, P.E., Flagg, C.N., Falkowski, P.G., 1994. The shelf edge exchange processes experiment, SEEP-II: an introduction to hypotheses, results and conclusions. *Deep Sea Research II* 41, 231–252.
- Bowyer, A., 1981. Computing Dirichlet tessellations. *The Computer Journal* 24 (2), 162–167.
- Chanut, J., Etienne, H., 2005. Forcing coastal model with MERCATOR data. *Mercator Ocean Quarterly Newsletter* 18, 2–3.
- Coelho, H.S., Neves, R.J.J., White, M., Leitão, P.C., Santos, A.J., 2002. A model for ocean circulation on the Iberian coast. *Journal of Marine Systems* 32 (1-3), 153–179.
- Davies, A.M., Xing, J., 2002. Processes influencing sediment movement on the Malin-Hebrides shelf. *Continental Shelf Research* 22, 2081–2113.
- Davies, A.M., Xing, J., 2003. On the interaction between internal tides and wind induced near inertial currents at the shelf edge. *Journal of Geophysical Research* 108(C3), 3099.
- Davies, A.M., Xing, J., 2005. Modelling process influencing shelf edge exchange of water and suspended sediment. *Continental Shelf Research* 25, 973–1001.
- Deleersnijder, E., Beckers, J.-M., 1992. On the use of σ -coordinate in regions of large bathymetric variations. *Journal of Marine Systems* 3, 381–390.
- Dompiere, J., Vallet, M.-G., Labbé, P., Guibault, F., 2003. On simplex shape measures with extension for anisotropic meshes. In: *Workshop on mesh quality and dynamic meshing*. Sandia National Laboratories - Livermore, CA, pp. 46–71.
- Foreman, M.G.G., Walters, R.A., Henry, R.F., Keller, C.P., Dolling, A.G., 1995. A tidal model for eastern Juan de Fuca Strait and the southern Strait of Georgia. *Journal of Geophysical Research* 100 (C1), 721–740.
- Frey, P., George, P., 2000. *Mesh generation : Application to finite elements*. Hermes Science Publishing.
- Frey, W., 1987. Selective refinement: A new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (11), 2183–2200.
- Gorman, G.J., Piggott, M.D., Pain, C.C., de Oliveira, C.R.E., Umpleby, A.P., Goddard, A.J.H., 2005. Optimisation based bathymetry approximation through constrained unstructured mesh adaptivity. *Ocean Modelling* accepted for publication.
- Hagen, S.C., Westerink, J.J., Kolar, R.L., Horstmann, O., 2001. Two-dimensional, unstructured mesh generation for tidal models. *International Journal for Numerical Methods in fluids* 35, 669–686.
- Hanert, E., Le Roux, D.Y., Legat, V., Deleersnijder, E., 2005. An efficient Eulerian finite element for the shallow water equations. *Ocean Modelling* 10, 115–136.
- Haney, R.L., 1991. On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models. *Journal of Physical Oceanography* 21, 610–619.
- Henry, R., Walters, R., 1993. Geometrically based, automatic generator for irregular networks. *Communications in Numerical Methods in engineering* 9, 555–566.
- Holt, J.T., Allen, J.I., Proctor, R., Gilbert, F., 2005. Error quantification of a high-resolution coupled hydrodynamic-ecosystem coastal-ocean model: Part 1 model overview and assessment of the hydrodynamics. *Journal of Marine Systems* 57 (1-2), 167–188.
- Holt, J.T., Proctor, R., Blackford, J.C., Allen, J.I., Ashworth, M., 2004. Advective controls on primary production in the stratified western Irish Sea: an eddy-resolving model study. *Journal of Geophysical Research* 109, 5024.
- Huthnance, J.M., 1995. Circulation, exchange and water masses at the ocean margin: the role of physical processes at the shelf edge. *Progress in Oceanography* 35, 353–431.
- Janjic, Z.I., 1977. Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography. *Contributions to Atmospheric Physics* 50, 186–199.
- Jarosz, E., Blain, C.A., Murray, S.P., Inoue, M., 2005. Barotropic tides in the Bab el Mandab Straits — numerical simulations. *Continental Shelf Research* 25, 1225–1247.
- Legrand, S., Deleersnijder, E., Hanert, E., Legat, V., Wolanski, E., 2005. High-resolution, unstructured meshes for hydrodynamic models of the Great Barrier Reef, Australia. *Estuarine, Coastal and Shelf Science* accepted for publication.

- Légrand, S., Legat, V., Deleersnijder, E., 2000. Delaunay mesh generation for an unstructured-grid ocean general circulation model. *Ocean Modelling* 2, 17–28.
- Luyten, P.J., Jones, J.E., Proctor, R., Tabor, A., Tett, P., Wild-Allen, K., 1999. Coherens - a coupled hydrodynamical-ecological model for regional and shelf seas: User documentation. MUMM report, Management Unit of the Mathematical Models of the North Sea.
- Lynch, D.R., Naimie, C.E., Smith, K.W., 2003. Tidal atlas for the Irish Shelf Seas. Numerical Methods Laboratory Report NML-03-7, Dartmouth College, Hanover NH USA.
- Lynch, D.R., Smith, K.W., Cahill, B., 2004. Seasonal mean circulation on the Irish shelf? a model-generated climatology. *Continental Shelf Research* 24, 2215–2244.
- Mesinger, F., 1982. On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models. *Geophysical, Astrophysical Fluid Dynamics* 19, 105–117.
- National Geophysical Data Center, 1988. Digital relief of the surface of the earth. Tech. Rep. Data Announcement 88-MGG-02, NOAA, Boulder.
- Pain, C.C., Piggott, M.D., Goddard, A.J.H., Fang, F., Gorman, G.J., Marshall, D.P., Eaton, M.D., Power, P.W., de Oliveira, C.R.E., 2005. Three-dimensional unstructured mesh ocean modelling. *Ocean Modelling* 10 (1-2), 5–33.
- Pietrzak, J., Deleersnijder, E., Schroeter, J. (Eds.), 2005. The Second International Workshop on Unstructured Mesh Numerical Modelling of Coastal, Shelf and Ocean Flows. *Ocean Modelling* (special issue) 10 (1-2), 1–252.
- Proctor, R., Chen, F., Tett, P.B., 2003. Carbon and nitrogen fluxes across the Hebridean shelf break, estimated by 2D coupled physical-microbiological model. *The Sciences of the Total Environment* 314–316, 787–800.
- Shchepetkin, A.F., McWilliams, J.C., 2003. A method for computing horizontal pressure-gradient force in an oceanic model with a nonaligned vertical coordinate. *Journal of Geophysical Research* 108 (C3), 3090.
- Shewchuk, J.R., 1996. Triangle: Engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. In: *First Workshop on Applied Computational Geometry* (Philadelphia, Pennsylvania). Association for Computing Machinery, pp. 124–133.
- Souza, A.J., Simpson, J.H., Harikrishnan, M., Malarkey, J., 2001. Flow structure and seasonability in the Hebridean slope current. *Oceanol Acta* 24, S63–S76.
- Walsh, J.J., 1991. Importance of continental margins in the marine biogeochemical cycling of carbon and nitrogen. *Nature* 350 (6313), 53–55.
- Walsh, J.J., Biscaye, P.E., Csanady, G.T., 1988. The 1983-1984 Shelf Edge Exchange Processes (Seep)-I: hypotheses and highlights. *Continental Shelf Research* 8, 435–456.
- Walters, R., 2005. Coastal ocean models: Two useful finite element methods. *Continental Shelf Research* 25, 775–793.
- Watson, D., 1981. Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes. *The Computer Journal* 24 (2), 167–172.
- Wollast, R., Chou, L., 2001. Ocean Margin Exchange in the Northern Gulf of Biscay: OMEX I an introduction. *Deep Sea Research II* 48 (14/15), 2971–2978.
- Xing, J., Davies, A.M., 1997. The influence of wind effects upon internal tides in the shelf edge regions. *Journal of Physical Oceanography* 27, 2100–2125.
- Xing, J.X., Chen, F., Proctor, R., 1999. A two-dimensional slice model of the shelf edge region off the west coast of Scotland: model response to realistic seasonal forcing and the role of M2 tide. *Continental Shelf Research* 19 (10), 1353–1386.
- Xing, J.X., Davies, A.M., 1998. Formulation of a three-dimensional shelf edge model and its application to inertial tide generation. *Continental Shelf Research* 18 (2-4), 405–440.

Conclusions

L'objectif principal de cette thèse était la conception, l'implémentation et l'analyse d'algorithmes de génération de maillages non-structurés pour des applications océaniques globales, régionales et côtières. En tirant profit des technologies de génération de triangulations déjà existantes et en les adaptant aux applications océaniques, nous avons construit les outils nécessaires à la génération de discrétisations de l'océan à résolution variable. Celles-ci permettent une représentation plus réaliste des côtes et des autres caractéristiques topographiques et dynamiques. Elles sont au coeur de la nouvelle génération de modèles océaniques que développent différentes équipes de par le monde.

Notre travail a permis d'aboutir sur plusieurs contributions originales qui ont fait l'objet de communications scientifiques. Tout d'abord, nous avons implémenté une technique de triangulation de l'Océan Mondial sur la sphère et nous avons bâti les outils géométriques pour écrire une formulation discrète par éléments finis des équations de la dynamique des fluides géophysiques. Sur cette base, des résultats préliminaires de simulations ont déjà été obtenus au sein de notre laboratoire de recherche.

Ensuite, nous nous sommes attachés à définir plusieurs stratégies adaptatives qui orchestrent la distribution de la taille et de la forme des éléments du maillage afin d'optimiser la précision et le coût du schéma numérique. Définir de telles stratégies n'est pas une tâche aisée car de nombreuses contraintes doivent être prises en considération. En nous basant sur une connaissance préalable de la physique, nous avons montré comment identifier et mélanger des contraintes topographiques, dynamiques, de proximité géographique et de précision numérique afin d'étendre au maximum la gamme des phénomènes modélisables. L'application de ces stratégies à des domaines réalistes comme la Grande Barrière de Corail ou le plateau continental nord-ouest européen a démontré la validité et l'efficacité de notre approche. En particulier, nous avons montré avec la Grande Barrière de Corail comment évaluer de manière adéquate la distance à l'île la plus proche et comment produire des maillages dont la résolution peut va-

rier d'un facteur 1 à 100, la taille des mailles allant de quelques dizaines de mètres dans le voisinage immédiat des îles et des récifs à plusieurs kilomètres. De même, nous avons montré comment une stratégie anisotrope d'adaptation de maillages permettait de prendre en considération les différences entre les processus dynamiques qui se produisent le long d'un talus continental et ceux qui se produisent dans la direction perpendiculaire. L'analyse de nos résultats par trois jauges de qualité a démontré que nos stratégies d'adaptation permettaient de générer des maillages qui présentent de bonnes propriétés géométriques. Ces dernières assurent le bon conditionnement numérique des modèles hydrodynamiques utilisant une méthode d'éléments finis ou de volumes finis.

Finalement, nous nous sommes intéressés au problème classique de l'interpolation de données d'un premier maillage vers un second. Il s'agit d'une étape incontournable lorsque l'on souhaite initialiser un modèle avec des données climatologiques réinterprétées, coupler des modèles ayant des maillages distincts ou mettre en oeuvre une procédure dynamique d'adaptation de maillage. En tirant profit de travaux réalisés en modélisation inverse et en assimilation de données, nous avons développé une procédure d'interpolation basée sur une approche variationnelle. Notre fonction de pénalité inclut un opérateur elliptique de régularisation et une contrainte de proximité aux données. L'avantage principal de notre approche est que d'autres contraintes peuvent facilement être ajoutées à la fonction de pénalité afin, par exemple, de reconstruire un champ de vitesse incompressible.

Perspectives

Bien que fondamental, le travail réalisé dans le cadre de cette thèse ne représente qu'une première étape dans le développement du projet *SLIM, the Second-generation Louvain-la-Neuve Ice-Ocean Model*. De nombreux problèmes doivent encore être considérés avant de pouvoir réaliser la première simulation barocline de l'Océan Mondial couplée à la glace de mer.

L'étape suivante est la validation du modèle *SLIM-2D*. Ce dernier résout les équations des eaux peu profondes à l'aide de l'élément fini $P_1^{NC} - P_1$ (Hanert, 2004). La capacité de *SLIM-2D* à reproduire les instabilités barotropes et baroclines a été déjà validée (White *et al.*, 2006). D'autres tests plus réalistes sont actuellement en cours d'élaboration. Ils concernent la simulation de l'hydrodynamique de la Grande Barrière de Corail et celle de l'épilimnion du Lac Tanganyika. Ces simulations permettront d'une part de valider nos stratégies de raffinement de maillages et d'autre part d'aborder plusieurs problèmes techniques comme l'imposition des conditions aux frontières en mer ouverte, le recourt au calcul parallèle ou la mise aux points de certaines paramétrisa-

tions. L'extension du modèle *SLIM-2D* à la géométrie sphérique telle que présentée au chapitre 2 sera validée sur les cas tests de Williamson *et al.* (1992). Son extension au cas de la couche épaisse pour simuler la dynamique de l'océan d'Europe, un satellite de Jupiter, est aussi à l'étude. Bien que tous ces tests représentent un investissement important dans l'élément $P_1^{NC} - P_1$, les autres méthodes d'éléments finis, comme les méthodes de Galerkin discontinues (Bernard *et al.*, 2006), ne sont pas écartées pour autant.

Le développement du modèle tridimensionnel *SLIM-3D* est la troisième phase du projet de *SLIM*. Afin de simuler aisément l'équilibre hydrostatique, nous pensons qu'il est préférable de préserver explicitement la direction verticale dans le système de coordonnées curvilignes de sorte que les valeurs nodales associés à une même colonne d'eau soient alignées le long de la même verticale. Des études préliminaires unidimensionnelles concernant la modélisation de la turbulence (Hanert *et al.*, 2006) et la modélisation de la couche logarithmique de fond ont déjà été menées. Une première version hydrostatique et barotrope de *SLIM-3D* est en développement. A moyen terme, les effets baroclines seront inclus au modèle et un système de coordonnées verticales généralisées sera développé. Ce dernier suivra les coordonnées z à proximité de la surface, les coordonnées isopycnales aux profondeurs moyennes et les coordonnées σ à proximité du fond des océans. La nécessité de lever l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique sera aussi évaluée.

Le modèle *SLIM* n'utilisera jamais toute la flexibilité des maillages non-structurés sans le développement de techniques qui adaptent dynamiquement les maillages au cours de simulations transitoires. L'intérêt pour ces techniques en modélisation marine et océanique est réel : de nombreux phénomènes que l'on souhaite résoudre, comme les tourbillons de la méso-échelle, les fronts polaires ou les courants de bord ouest, sont extrêmement localisés et se déplacent au cours du temps. Typiquement, les procédures d'adaptation de maillages reposent sur trois étapes successives qui sont répétées régulièrement au cours de la simulation. Tout d'abord, un estimateur d'erreur à posteriori mesure la qualité de la solution numérique calculée sur le maillage courant. Celui-ci est ensuite modifié de sorte que l'erreur estimée soit répartie uniformément sur l'entière du nouveau maillage. Cette étape de remaillage peut aussi bien préserver la topologie du maillage (*r*-adaptation) que la modifier (*h*-adaptation). Dans ce dernier cas, les champs d'inconnues doivent être interpolés de l'ancien maillage vers le nouveau afin de pouvoir poursuivre la simulation. C'est la troisième étape de la procédure. La seule étape de cette procédure que nous n'avons pas étudiée dans cette thèse est le développement d'un estimateur d'erreur à posteriori qui soit adaptés aux applications marines et océaniques. Si, dans le cadre des méthodes discontinues, les estimateurs d'erreur basés sur les sauts de la solution entre éléments semblent les plus faciles à mettre en oeuvre (Bernard *et al.*, 2006), les estimateurs d'erreur basés sur la matrice hessienne d'un ou plusieurs diagnostics (Cascon *et al.*, 2003; Remacle *et al.*, 2005)

ou les estimateurs d'erreur hiérarchiques basés sur une technique efficace d'enrichissement des fonctions de forme (Belhamadia *et al.*, 2004) sont autant d'approches à approfondir.

Finalement, le développement de *SLIM* ne pourra être parachevé sans traiter le problème fondamental de l'interaction entre le maillage et la dynamique simulée et ses conséquences en terme d'adaptation des paramétrisations et/ou des hypothèses du modèle en fonction de la taille des éléments du maillages et des phénomènes à simuler. Par exemple, ce problème pourrait se poser lorsque la taille des mailles est suffisamment petite pour que, localement, le caractère non-hydrostatique des processus simulés ne soit plus négligeable.

Bibliographie

- Adcroft, A. et Hallberg, R. 2004. On methods for solving the oceanic equations of motion in generalized vertical coordinates. *Ocean Modelling*, 11 :224–233.
- Adcroft, A. et Marshall, D. 1998. How slippery are piecewise-constant coastlines in numerical models ? *Tellus*, 50 A :95–108.
- Adcroft, A., Campin, J.M., Hill, C., et Marshall, J. 2004. Implementation of an atmospheric-ocean general circulation model on the expanded spherical cube. *Monthly Weather Review*, 132 :2845–2863.
- Ait-Ali-Yahia, D., Baruzzi, G., Habashi, W.G., Fortin, M., Dompierre, J., et Vallet, M.-G. 2002. Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent, and solver-independent CFD. Part II : structured grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39 :657–673.
- Aris, R. 1962. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall.
- Armsworth, P.R. et Bode, L. 1999. The consequences of non-passive advection and directed motion for population dynamics. *Proceedings of the royal Society of London Series A-Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455 :4045–4060.
- Assaker, R. 1998. *Magnetohydrodynamics in crystal growth*. Ph.D. thesis, Université catholique de Louvain.
- Assaker, R., Van den Bogaert, N., et Dupret, F. 1997. Time-dependent simulation of growth of large silicon crystal by the Czochralski technique using a turbulent model for melt convection. *Journal of Crystal Growth*, 180 :450–460.
- Babuska, I. 1971. Error bounds for finite element methods. *Numerische Mathematik*, 16 :322–333.
- Beckmann, A. et Haidvogel, D.B. 1993. Numerical simulation of flow around a tall isolated seamount. Part I : problem formulation and model accuracy. *Journal of Physical Oceanography*, 23 :1736–1753.

- Belhamadia, Y., Fortin, A., et Chamberland, E. 2004. Anisotropic mesh adaptation for the solution of the Stephan problem. *Journal of computational physics*, 194 :233–255.
- Bell, M.J., Forbes, R.M., et Hines, A. 2000. Assessment of the FOAM global data assimilation system for real-time operational ocean forecasting. *Journal of Marine Systems*, 25 :1–22.
- Bell, R.P.F. et Elmetri, I. 1995. Ecological indicators of large-scale eutrophication in the Great Barrier Reef lagoon. *Ambio*, 24 :208–215.
- Bennett, A. 1992. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press.
- Bentsen, M., Evensen, G., Drange, H., et Jenkins, A.D. 1999. Coordinate transformation on a sphere using conformal mapping. *Monthly Weather Review*, 127(12) :2733–2740.
- Bernard, P.-E., Chevaugnon, N., Legat, V., Deleersnijder, E., et Remacle, J.-F. 2006. High-order h-adaptive Discontinuous Galerkin methods for ocean modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submitted.
- Biscaye, P.E., Flagg, C.N., et Falkowski, P.G. 1994. The shelf edge exchange processes experiment, SEEP-II : an introduction to hypotheses, results and conclusions. *Deep Sea Research II*, 41 :231–252.
- Blayo, E. et Debreu, L. 1999. Adaptive mesh refinement for finite-difference ocean models : first experiments. *Journal of Physical Oceanography*, 29(6) :1239–1250.
- Bowyer, A. 1981. Computing Dirichlet Tessellations. *The Computer Journal*, 24(2) :162–167.
- Brasseur, P., Beckers, J.-M., Brankart, J.-M., et Schoenauen, R. 1996. Seasonal temperature and salinity fields in the Mediterranean Sea : Climatological analyses of a historical data set. *Deep-Sea Research I*, 43 :159–192.
- Bretherton, F.P., Davis, R.E., et Fandry, C.B. 1976. A technique for objective analysis and design of oceanographic experiment applied to MODE-73. *Deep Sea Research*, 23 :559–582.
- Brezzi, F. 1974. On the existence, uniqueness and approximation of saddle points problems arising from Lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 8 :129–151.
- Brinkman, R., Wolanski, E., Deleersnijder, E., McAllister, F., et Skirving, W. 2002. Oceanic inflow from the Coral Sea into the Great Barrier Reef. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 54 :655–668.

- Bryan, K. 1969. A numerical method for the study of the circulation of the World Ocean. *Journal of Computational Physics* 1969, 4 :347–376.
- Bryan, K. et Cox, M.D. 1967. A numerical investigation of the oceanic general circulation. *Tellus*, 19 :54–80.
- Bryan, K., Manabe, S., et Pacanowski, R.C. 1975. A global ocean-atmosphere climate model. Part II : the oceanic circulation. *Journal of Physical Oceanography*, 5 :30–46.
- Campin, J.M. 1997. *Modélisation tridimensionnelle de la circulation générale océanique lors du dernier maximum glaciaire*. Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain.
- Cascon, J.M., Garcia, G.C., et Rodrigues, R. 2003. A priori and a posteriori error analysis for a large-scale ocean circulation finite element model. *computer methods in applied mechanics and engineering*, 192 :5305–5327.
- Chanut, J. et Etienne, H. 2005. Forcing coastal model with MERCATOR data. *Mercator Ocean Quarterly Newsletter*, 18 :2–3.
- Chippada, S., Dawson, C.N., Martinez, M.L., et Wheeler, M.F. 1998. A projection method for constructing a mass conservative velocity field. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157 :1–10.
- Chorin, A.J. 1968. Numerical solution of the Navier-Stokes Equations. *Mathematics of Computation*, 22 :745–762.
- Chua, B.S. et Bennett, A.F. 2001. An inverse ocean modeling system. *Ocean Modelling*, 3 :137–165.
- Ciarlet, P. 1979. *The finite element method for elliptic problem*. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland.
- Cockburn, B., Karniadakis, G., et Shu, C. 2000. *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, computation and applications*. Lecture notes in computational science and engineering. Springer.
- Coelho, H.S., Neves, R.J.J., White, M., Leitão, P.C., et Santos, A.J. 2002. A model for ocean circulation on the Iberian coast. *Journal of Marine Systems*, 32(1-3) :153–179.
- Coward, A., Killworth, P., et Blundell, J. 1994. Tests of a 2-grid world ocean model. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 99 :C11 :22725–22735.
- Davies, A.M. et Xing, J. 2002. Processes influencing sediment movement on the Malin-Hebrides shelf. *Continental Shelf Research*, 22 :2081–2113.

- Davies, A.M. et Xing, J. 2003. On the interaction between internal tides and wind induced near inertial currents at the shelf edge. *Journal of Geophysical Research*, 108(C3) :3099.
- Davies, A.M. et Xing, J. 2005. Modelling process influencing shelf edge exchange of water and suspended sediment. *Continental Shelf Research*, 25 :973–1001.
- Delaunay, B. 1934. Sur la sphère vide. *Bul. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat.*, pages 793–800.
- Deleersnijder, E. 2001. Enforcing the continuity equation in numerical models of geophysical fluid flows. *Applied Mathematics Letters*, 14 :867–873.
- Deleersnijder, E. et Beckers, J.-M. 1992. On the use of σ -coordinate in regions of large bathymetric variations. *Journal of Marine Systems*, 3 :381–390.
- Deleersnijder, E. et Ruddick, K.G. 1992. A generalized vertical coordinate for 3D marine models. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 61(6) :489–502.
- Deleersnijder, E., van Ypersele, J.P., et Campin, J.M. 1993. An orthogonal, curvilinear coordinate system for a world ocean model. *Ocean Modelling*, 100 :7–20.
- Deleersnijder, E., Campin, J.-M., et Delhez, E.J.M. 2001. The concept of age in marine modelling : I.Theory and preliminary model results. *Journal of Marine Systems*, 28 :229–267.
- Deleersnijder, E., Fichefet, T., Legat, V., et Remacle, J.-F. 2003. *A second generation model of the ocean system. Proposal for an Action de Recherches Concertées (ARC)*. UCL.
- Delfiner, P. et Delhomme, J.P. 1973. *Proceedings of NATO ASI, Display and Analysis of Spatial Dat. Editors : Davis, J.C. and M.J. McCullagh.*, chapter Optimum interpolation by kriging, pages 96–114. John Wiley.
- Dompierre, J., Vallet, M.-G., Bourgault, Y., Fortin, M., et Habashi, W.G. 2002. Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent, and solver-independent CFD. Part III : unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39 :675–702.
- Dompierre, J., Vallet, M.-G., Labbé, P., et Guibault, F. 2003. On simplex shape measures with extension for anisotropic meshes. In *Workshop on Mesh Quality and Dynamic Meshing*. Sandia National Laboratories - Livermore, CA.
- Done, T.J. 1988. Simulations of the recovery of pre-disturbance size structure in populations of *Porites* spp. damaged by crown-of-thorns starfish. *Marine Biology*, 100 :51–61.

- Du, Q. et Ju, L. 2003. Finite volume methods on spheres and spherical centroidal Voronoi meshes. Technical report, Eberly College of Science.
- Dupont, F., Straub, D.N., et Lin, C.A. 2003. Influence of a step-like coastline on the basin scale vorticity budget of mid-latitude gyre models. *Tellus*, 55A :255–272.
- Eby, M. et Holloway, G. 1994. Grid transformation for incorporating the Arctic in a global ocean model. *Climate Dynamics*, 10 :241–247.
- Endlich, R.M. 1967. An iterative method for altering the kinematic properties of wind fields. *Journal of Applied Meteorology*, 6 :837–844.
- Foreman, M.G.G., Walters, R.A., Henry, R.F., Keller, C.P., et Dolling, A.G. 1995. A tidal model for eastern Juan de Fuca Strait and the southern Strait of Georgia. *Journal of Geophysical Research*, 100(C1) :721–740.
- Fortune, S. 1987. A sweepline algorithm for Voronoi diagram. *Algorithmica*, 2 :153–174.
- Fournier, A., Taylor, M.A., et Tribbia, J.J. 2004. The Spectral Element Atmosphere Model (SEAM) : High-resolution parallel computation and localized resolution of regional dynamics. *Monthly Weather Review*, 132 :726–748.
- Fox, A.D. et Maskell, S.K. 1995. Two-way interactive nesting of primitive equation ocean models with topography. *Journal of Physical Oceanography*, 25 :2977–2996.
- Frey, P.J. et George, P.L. 2000. *Mesh generation : Application to finite elements*. Hermes Science Publishing.
- Frey, W.H. 1987. Selective Refinement : A new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(11) :2183–2200.
- George, P.L. et Borouchaki, H. 1997. *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*. Hermes.
- Giraldo, F.X. 1997. Lagrange-Galerkin methods on spherical geodesic grids. *Journal of Computational Physics*, 136 :197–213.
- Giraldo, F.X. et Rosmond, T.E. 2004. A scalable Spectral Element Eulerian Atmospheric Model (SEE-AM) for NWP : Dynamical core tests. *Monthly Weather Review*, 132 :133–153.
- Goodin, W.R., MacRae, G.J., et Seinfeld, J.H. 1980. An objective analysis technique for constructing three-dimensional urban-scale wind fields. *Journal of Applied Meteorology*, 19 :98–108.

- Goodman, J. et O'Rourke, J., editors. 1997. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press.
- Goosse, H. et Fichefet, T. 1999. Importance of Ice-Ocean Interactions for the Global Ocean Circulation : a Model Study. *Journal of Geophysical Research*, 104 (C10) :23337–23355.
- Gorman, G.J., Piggott, M.D., Pain, C.C., de Oliveira, C.R.E., Umpleby, A.P., et Goddard, A.J.H. 2005. Optimisation based bathymetry approximation through constrained unstructured mesh adaptivity. *Ocean Modelling*, 12 :436–452.
- Green, P. et Sibson, R. 1978. Computing Dirichlet tessellation in the plane. *Computing Journal*, 21 :168–173.
- Griffies, S.M., Bning, C., Bryan, F.O., Chassignet, E.P., Gerdes, R., Hasumi, H., Hirst, A., Treguier, A.-M., et Webb, D. 2000. Developments in ocean modelling. *Ocean Modelling*, 2 :123–192.
- Grima, C.I. et Marquez, A. 2001. *Computational geometry on surfaces. Performing computational geometry on the cylinder, the sphere, the torus and the cone*. Kluwer Academic Publishers.
- Habashi, W.G., Dompierre, J., Bourgault, Y., Ait-Ali-Yahia, D., Fortin, M., et Vallet, M.-G. 2000. Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent, and solver-independent CFD. Part I : general principles. *International journal for numerical methods in fluids*, 32 :725–744.
- Hagen, S.C., Westerink, J.J., Kolar, R.L., et Horstmann, O. 2001. Two-dimensional, unstructured mesh generation for tidal models. *International Journal for Numerical Methods in fluids*, 35 :669–686.
- Hamner, W.M. et Hauri, I. 1981. Effect of island mass : water flow and plankton pattern around a reef in the Great Barrier Reef lagoon. *Limnology & Oceanography*, 26 :1084–1102.
- Hanert, E. 2004. *Towards a finite element ocean circulation model*. Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain.
- Hanert, E., Legat, V., et Deleersnijder, E. 2003. A comparison of three finite elements to solve the linear shallow water equations. *Ocean Modelling*, 5 :17–35.
- Hanert, E., Le Roux, D.Y., Legat, V., et Deleersnijder, E. 2005. An efficient Eulerian finite element for the shallow water equations. *Ocean Modelling*, 10 :115–136.
- Hanert, E., Deleersnijder, E., et Legat, V. 2006. An adaptive finite element water column model using the Mellor-Yamada 2.5 turbulence closure scheme. *Ocean Modelling*, 12 :205–223.

- Haney, R.L. 1991. On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models. *Journal of Physical Oceanography*, 21 :610–619.
- Heikes, R. et Randall, D.A. 1995. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part I : basic design and results of tests. *Monthly Weather Review*, 123 :1862.
- Heinze, T. 1998. *Ein numerisches verfahren zur losung der flachwassergleichungen auf einer rotierende kugel mittels der Lagrange-Galerkin-Methode*. Master's thesis, Institut für Angewandte Mathematik der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
- Henry, R.F. et Walters, R.A. 1993. Geometrically based, automatic generator for irregular networks. *Communications in Numerical Methods in engineering*, 9 :555–566.
- Holt, J.T., Proctor, R., Blackford, J.C., Allen, J.I., et Ashworth, M. 2004. Advective controls on primary production in the stratified western Irish Sea : an eddy-resolving model study. *Journal of Geophysical Research*, 109 :5024.
- Holt, J.T., Allen, J.I., Proctor, R., et Gilbert, F. 2005. Error quantification of a high-resolution coupled hydrodynamic-ecosystem coastal-ocean model : Part 1 model overview and assessment of the hydrodynamics. *Journal of Marine Systems*, 57 (1-2) :167–188.
- Hortal, M. et Simmons, A. 1991. Use of reduced gaussian grids in spectral models. *Monthly Weather Review*, 119 :1057–1074.
- Hua, B.L. et Thomasset, F. 1984. A noise-free finite element scheme for the two-layer shallow water equations. *Tellus*, 36A :157–165.
- Hughes, T.J.R. 1987. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publication.
- Hughes, T.J.R., Engel, G., Mazzei, L., et Larson, M.G. 2000. The continuous Galerkin method is locally conservative. *Journal of Computational Physics*, 163 :467–488.
- Huthnance, J.M. 1995. Circulation, exchange and water masses at the ocean margin : the role of physical processes at the shelf edge. *Progress in Oceanography*, 35 :353–431.
- Janjic, Z.I. 1977. Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography. *Contributions to Atmospheric Physics*, 50 :186–199.
- Jarosz, E., Blain, C.A., Murray, S.P., et Inoue, M. 2005. Barotropic tides in the Bab el Mandab Straits — numerical simulations. *Continental Shelf Research*, 25 :1225–1247.

- Kasahara, A. 1974. Various vertical coordinate systems used for numerical weather predictions. *Monthly Weather Review*, 102 :509–522.
- Krige, D.J. 1951. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *J. Chem. Metall. Min. Soc. S. Afr.*, 52 :119–139.
- Lawson, C.L. 1972. Transforming triangulations. *Discrete Mathematica*, 3 :365–372.
- Le Provost, C., Bernier, C., et Blayo, E. 1994. A comparison of two numerical methods for integrating a quasi-geostrophic multilayer model of ocean circulations : finite element and finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 110 :341–359.
- Le Roux, D.Y., Lin, C.A., et Staniforth, A. 1997. An accurate interpolating scheme for semi-Lagrangian advection on an unstructured mesh for ocean modelling. *Tellus*, 49A2 :119–138.
- Le Roux, D.Y., Staniforth, A., et Lin, C.A. 1998. Finite elements for shallow-water equation ocean models. *Monthly Weather Review*, 126 :7 :1931–1951.
- Le Roux, D.Y., Sène, A., Rostand, V., et Hanert, E. 2005. On some spurious modes issues in shallow water models using a linear algebra approach. *Ocean Modelling*, 10 :83–94.
- Legrand, S., Legat, V., et Deleersnijder, E. 2000. Delaunay mesh generation for an unstructured-grid ocean general circulation model. *Ocean Modelling*, 2 :17–28.
- Legrand, S., Legat, V., et Deleersnijder, E. 2003. Mass conservation in global ocean model on unstructured meshes. *Proceedings of 6th national congress on theoretical and applied mechanics*, 26-27 May 2003, Ghent, Belgium.
- Legrand, S., Deleersnijder, E., Delhez, E., et Legat, V. 2006a. Unstructured, anisotropic mesh generation for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean. *Continental Shelf Research*, submitted.
- Legrand, S., Deleersnijder, E., Hanert, E., Legat, V., et Wolanski, E. 2006b. High-resolution, unstructured meshes for hydrodynamic models of the Great Barrier Reef, Australia. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, in press.
- Lewandowski, R. 1997. *Analyse Mathématique et Océanographie*. Masson(Paris).
- Lewis, A. 2001. Great Barrier Reef Depth and Elevation Model : GBRDEM. Technical Report 33, CRC Reef Research Centre Ltd, Townsville, Australia. 58 pp.
- Liu, C.Y. et Goodin, W.R. 1976. An iterative algorithm for objective wind field analysis. *Monthly Weather Review*, 104 :784–792.

- Luyten, P.J., Jones, J.E., Proctor, R., Tabor, A., Tett, P., et Wild-Allen, K. 1999. CO-HERENS - A Coupled Hydrodynamical-Ecological Model for Regional and Shelf Seas : User Documentation. MUMM report, Management Unit of the Mathematical Models of the North Sea.
- Lynch, D.R., Naimie, C.E., et Smith, K.W. 2003. Tidal Atlas for the Irish Shelf Seas. Numerical Methods Laboratory Report NML-03-7, Dartmouth College, Hanover NH USA.
- Lynch, D.R., Smith, K.W., et Cahill, B. 2004. Seasonal mean circulation on the Irish shelf ? a model-generated climatology. *Continental Shelf Research*, 24 :2215–2244.
- Madec, G. et Imbard, M. 1996. A global ocean mesh to overcome the North Pole singularity. *Climate Dynamics*, 12 :381–388.
- Madec, G., Delecluse, P., Imbard, M., et Lévy, C. 1998. OPA 8.1 : Ocean General Circulation Model. Reference Manual. Note 11, Laboratoire d’Océanographie Dynamique et de Climatologie.
- Majewski, D., Liermann, D., Prohl, P., Ritter, B., Buchhold, M., Hanish, T., Paul, G., et Wergen, W. 2002. The operational global icosahedral-hexagonal gridpoint model GME : Description and high-resolution tests. *Monthly Weather Review*, 130 :319–338.
- Malone, R.C., Smith, R.D., Maltrud, M.E., et Hecht, M.W. 2003. Eddy-resolving ocean modeling. *Los Alamos Science*, 28 :223–231.
- McIntosh, P.C. 1990. Oceanographic data interpolation : objective analysis and splines. *Journal of Geophysical Research*, 95(C8) :13529–13541.
- Mesinger, F. 1982. On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models. *Geophysical, Astrophysical Fluid Dynamics*, 19 :105–117.
- Murray, R.J. 1996. Explicit generation of orthogonal grids for ocean models. *Journal of Computational Physics*, 126 :251–273.
- Nair, R.D., Thomas, S.J., et Loft, R.D. 2005a. A discontinuous Galerkin global shallow water model. *Monthly Weather Review*, 133 :876–888.
- Nair, R.D., Thomas, S.J., et Loft, R.D. 2005b. A discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review*, 133 :814–828.
- National Geophysical Data Center. 1988. Digital relief of the surface of the Earth. Technical Report Data Announcement 88-MGG-02, NOAA, Boulder.

- Pain, C.C., Piggott, M.D., Goddard, A.J.H., Fang, F., Gorman, G.J., Marshall, D.P., Eaton, M.D., Power, P.W., et de Oliveira, C.R.E. 2005. Three-dimensional unstructured mesh ocean modelling. *Ocean Modelling*, 10(1-2) :5–33.
- Pesch, L. 2003. A finite-volume discretization of the shallow-water equations in spherical geometry.
- Pietrzak, J., Deleersnijder, E., et Schroeter, J., editors. 2005. *The second international workshop on unstructured mesh numerical modelling of coastal, shelf and ocean flows*. *Ocean Modelling* (special issue) 10, 1-252.
- Proctor, R., Chen, F., et Tett, P.B. 2003. Carbon and nitrogen fluxes across the Hebridean shelf break, estimated by 2D coupled physical-microbiological model. *The Sciences of the Total Environment*, 314-316 :787–800.
- Purser, R.J. et Rančić, M. 1997. Conformal octagon : an attractive framework for global models offering quasi-uniform regional enhancement of resolution. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 62 :33–48.
- Rancic, M., Purser, R.J., et Mesinger, F. 1996. A global shallow-water model using an expanded spherical cube : Gnomonic versus conformal coordinates. *Quaternary Journal of Royal Meteorology Society*, 122 :959–982.
- Randall, D.A., Ringler, T.D., Heikes, R.P., Jones, P., et Baumgardner, J. 2002. Climate modelling with spherical geodesic grids. *Computing in Science & Engineering*, pages 32–41.
- Remacle, J.-F., Li, X., Shepard, M.S., et Flaherty, J.E. 2005. Anisotropic adaptive simulation of transient flows using discontinuous Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(7) :899–923.
- Renka, R.J. 1997. Algorithm 772 : STRIPACK : Delaunay triangulation and Voronoi diagram on the surface of a sphere. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23 (3) :416–434.
- Rixen, M., Beckers, J.M., Brankart, J.M., et Brasseur, P. 2000. A numerically efficient data analysis method with error map generation. *Ocean Modelling*, 2(1-2) :45–60.
- Roberts, J.L., Heil, P., Murray, R.J., Holloway, D.S., et Bindoff, N.L. 2006. Pole relocation for an orthogonal grid : an analytic method. *Ocean Modelling*, 12 :16–31.
- Sadourny, R. 1972. Conservative Finite-Difference Approximations of the Primitive Equations on Quasi-Uniform Spherical Grids. *Monthly Weather Review*, 100(2) :136–144.

- Sadourny, R., Arakawa, A., et Mintz, Y. 1968. Integration of the non-divergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere. *Monthly Weather Review*, 96 :351–356.
- Semtner, A.J. et Chervin, R.M. 1988. A simulation of the global ocean circulation with resolved eddies. *Journal of Geophysical Research*, 93(15) :502–522.
- Shchepetkin, A.F. et McWilliams, J.C. 2003. A method for computing horizontal pressure-gradient force in an oceanic model with a nonaligned vertical coordinate. *Journal of Geophysical Research*, 108(C3) :3090.
- Shewchuk, J.R. 1996. Triangle : engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator. In *First Workshop on Applied Computational Geometry (Philadelphia, Pennsylvania)*, pages 124–133. Association for Computing Machinery.
- Souza, A.J., Simpson, J.H., Harikrishnan, M., et Malarkey, J. 2001. Flow structure and seasonability in the Hebridean slope current. *Oceanol Acta*, 24 :S63–S76.
- Spall, M.A. et Holland, W.R. 1991. A nested primitive equation model for oceanic applications. *Journal of Physical Oceanography*, 21 :205–220.
- Stommel, H. 1948. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Transaction of the American Geophysical Union*.
- Stuhne, G.R. et Peltier, W.R. 1996. Vortex erosion and amalgamation in a new model of large scale flow on the sphere. *Journal of computational Physics*, 128 :58–81.
- Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., et Mastin, C.W. 1985. *Numerical Grid Generation. Foundations and applications*. North Holland.
- Thuburn, J. 1996. A PV-based shallow-water model on a hexagonal-icosahedral grid. *Monthly Weather Review*, 125 :2328–2347.
- Valcke, S., Caubel, A., Vogelsang, R., et Declat, D. 2004. OASIS 3 : Ocean Atmosphere Sea Ice Soil. User's guide. Technical report, CERFACS, Toulouse.
- Voronoï, G. 1908. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal Reine angew. Math.*, 134.
- Vreugdenhill, C.B. 1994. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Water Science and Technology Library. Kluwer Academic Publishers.
- Wahba, G. et Wendelberg, J. 1980. Some new mathematical methods for variational objective analyses using splines and cross-validation. *Monthly Weather Review*, 108 :1122–1143.

- Walsh, J.J. 1991. Importance of continental margins in the marine biogeochemical cycling of carbon and nitrogen. *Nature*, 350(6313) :53–55.
- Walsh, J.J., Biscaye, P.E., et Csanady, G.T. 1988. The 1983-1984 Shelf Edge Exchange Processes (Seep)-I : hypotheses and highlights. *Continental Shelf Research*, 8 :435–456.
- Walters, R.A. 2005. Coastal ocean models : Two useful finite element methods. *Continental Shelf Research*, 25 :775–793.
- Walters, R.A. et Carey, G.F. 1984. Numerical noise in ocean and estuarine models. *Advances in Water Resources*, 7 :15–20.
- Watson, D.F. 1981. Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes. *The Computer Journal*, 24(2) :167–172.
- Weinberg, S. 1972. *Gravitation and cosmology. Principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley and Sons.
- Westerink, J.J., Luetich, R.A., Wu, J.K., et Kolar, R.L. 1994. The influence of normal flow boundary conditions on spurious modes in finite element solutions to the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18 :1021–1060.
- White, L. 2002. Modeling of the general circulation of the World Ocean using finite elements. Université catholique de Louvain.
- White, L., Beckers, r., Deleersnijder, E., et Legat, V. 2006. Comparison of free-surface and rigid-lid finite element models of barotropic instabilities. *Ocean Dynamics*, in press.
- Wilkin, J. et Hedstrom, K.S. 1998. User's manual for an orthogonal curvilinear grid-generation package. Technical report, University of Auckland.
- Willemet, M. 2005. Modélisation numérique de l'océan d'Europe, satellite de Jupiter. Université catholique de Louvain.
- Williamson, D.L. 1968. Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid. *Tellus*, 20 :642–653.
- Williamson, D.L. 1979. *Difference approximation for fluid flow on a sphere*. In : *Numerical Methods Used in Atmospheric Models (vol. II)*, volume 17 of *GARP Publication Series*. WMO-ICSU.
- Williamson, D.L., Drake, J.B., Hack, J.J., Jakob, R., et Swarztrauber, P.N. 1992. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 102 :211–224.

- Wolanski, E. et Hamner, W.M. 1988. Topographically controlled fronts in the ocean and their biological influence. *Science*, 241 :177–181.
- Wolanski, E. et Spagnol, S. 2000. Pollution by mud of Great Barrier Reef coastal waters. *Journal of Coastal Research*, 16 :1151–1156.
- Wolanski, E., Drew, E., Abel, K., et O'Brien, J. 1988. Tidal jets, nutrient upwelling and their influence on the productivity of the algal *Halimeda* in the Ribbon Reefs, Great Barrier Reef. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 26 :169–201.
- Wolanski, E., Asaeda, T., Tanaka, A., et Deleersnijder, E. 1996. Three-dimensional island wakes in the field, laboratory and numerical models. *Continental Shelf Research*, 16 :1437–1452.
- Wolanski, E., Doherty, P., et Carleton, J. 1997. Directional swimming of fish larvae determines connectivity of fish populations on the Great Barrier Reef. *Naturwissenschaften*, 84 :262–268.
- Wolanski, E., King, B., et Spagnol, S. 1999. *Perspectives in Integrated Coastal Zone Management*, chapter The implication of oceanographic chaos for coastal management, pages 129–141. Springer-Verlag, Berlin.
- Wolanski, E., Brinkman, R., Spagnol, S., McAllister, F., Steinberg, C., Skirving, W., et Deleersnijder, W. 2003a. *Advances in Coastal Modeling*, chapter Merging scales in models of water circulation : Perspectives from the Great Barrier Reef, pages 411–429. Elsevier.
- Wolanski, E., Marshall, K., et Spagnol, S. 2003b. Nepheloid layer dynamics in coastal waters of the Great Barrier Reef, Australia. *Journal of Coastal Research*, 19 :748–752.
- Wolanski, E., Richmond, R.H., et McCook, L. 2004. A model of the effects of land-based, human activities on the health of coral reefs in the Great Barrier Reef and in Fouha Bay, Guam, Micronesia. *Journal of Marine Systems*, 46 :133–144.
- Wollast, R. et Chou, L. 2001. Ocean Margin Exchange in the Northern Gulf of Biscay : OMEX I An introduction. *Deep Sea Research II*, 48(14/15) :2971–2978.
- Xing, J. et Davies, A.M. 1997. The influence of wind effects upon internal tides in the shelf edge regions. *Journal of Physical Oceanography*, 27 :2100–2125.
- Xing, J.X. et Davies, A.M. 1998. Formulation of a three-dimensional shelf edge model and its application to inertial tide generation. *Continental Shelf Research*, 18(2-4) :405–440.
- Xing, J.X., Chen, F., et Proctor, R. 1999. A two-dimensional slice model of the shelf edge region off the west coast of Scotland : model response to realistic seasonal forcing and the role of M2 tide. *Continental Shelf Research*, 19(10) :1353–1386.

Zienkiewicz, O.C. et Taylor, R.L. 2000. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, fifth edition.