

L'analyse en ondelettes

De la recherche pétrolière aux reliques du Big Bang
(mise à jour)

JEAN-PIERRE ANTOINE

Institut de Recherche en Mathématique et Physique
Université catholique de Louvain

jean-pierre.antoine@uclouvain.be

Résumé

Cet article est une introduction relativement élémentaire à la théorie des ondelettes. Après une introduction consacrée au traitement numérique des signaux et des images, on étudie successivement la transformée en ondelettes (TO) continue et la TO discrète en dimension 1, puis on décrit brièvement quelques applications, jusqu'à la découverte récente des ondes gravitationnelles. On passe ensuite à la TO en dimension 2, continue et discrète, et on mentionne quelques applications et diverses généralisations. Le papier se termine par quelques remarques historiques et bibliographiques. A noter qu'il s'agit ici une mise à jour de l'article, portant le même titre, publié dans la Revue en 2007 [5]. Voir en particulier les Sections 5.1, 7.1 et 9.

Abstract

The present article is a relatively elementary introduction to wavelet theory. After an introduction devoted to the digital analysis of signals and images, we study successively the continuous wavelet transform (WT) and the discrete WT in dimension 1. Then we

describe briefly some applications, up to the recent discovery of gravitational waves. Next we switch to the two-dimensional WT, both continuous and discrete, and we list a few applications and generalizations. Finally we conclude with some historical and bibliographical remarks. Actually, this is an update of the article, with the same title, published in the *Revue des Questions Scientifiques* in 2007 [5]. See, in particular, Sections 5.1, 7.1 and 9.

1 Avant-propos

Nous sommes constamment environnés de signaux : radio, télévision, téléphone portable (smartphone), photos numériques, . . . , et le mode de vie contemporain repose chaque jour davantage sur la transmission de tels signaux. Ceci implique différentes opérations, à savoir, l’acquisition (souvent analogique), la numérisation (c’est-à-dire la discrétisation et l’encodage en langage binaire), la compression (les signaux sont de plus en plus volumineux), la transmission avec un minimum de distorsion, et enfin la réception et la reconstruction du signal avec un niveau de fidélité acceptable.

Parmi les techniques utilisées, l’analyse en ondelettes est particulièrement performante. Le but de cet article est d’en fournir un panorama aussi complet que possible sans recourir à des outils mathématiques sophistiqués. Avant d’entrer dans le vif du sujet, il faut signaler au lecteur le merveilleux petit ouvrage de Barbara Hubbard [9], basé sur une série d’entretiens avec les “pères fondateurs” de la théorie, une lecture incontournable (et quasiment sans formules !) avant d’aborder des ouvrages plus techniques. On lira aussi avec intérêt l’article “Ondelettes” dans l’*Encyclopaedia Universalis* (version 2006 ou ultérieure) [17]. Cet article, non technique lui aussi, est dû à Alex Grossmann et Bruno Torrèsani, deux des interlocuteurs de B. Hubbard.

Pour bien situer l’actualité de notre sujet, il convient de signaler d’emblée que l’analyse en ondelettes est née en 1985, un peu par hasard, c’est donc une technique très récente. Le géophysicien Jean Morlet en a découvert empiriquement le principe, dans le contexte de la recherche pétrolière, et c’est en collaboration avec le physicien mathématicien Alex Grossmann que la méthode fut mise au point [15, 16]. Les développements furent rapides, grâce aux travaux

d’Ingrid Daubechies, Yves Meyer, Stéphane Mallat et bien d’autres, si bien qu’à l’heure actuelle on retrouve les ondelettes dans d’innombrables domaines de la physique, des mathématiques et de l’ingénierie. Quelques remarques historiques et des références bibliographiques détaillées seront données en fin d’article (Section 10).

2 Le traitement numérique des signaux et des images

Avant toutes choses, il convient de préciser l’objet de notre étude, la notion de signal analogique et de signal numérique. Qu’est-ce qu’un signal ? Un signal analogique n’est rien d’autre qu’une fonction $f(t)$ représentant l’évolution temporelle d’une certaine quantité physique, telle qu’une température, un cours de bourse, une tension électrique ou la densité du trafic automobile en un point donné. Un exemple est donné à la Figure 1(a), en l’occurrence un “chirp”, c’est-à-dire un signal dont la fréquence augmente avec le temps. Par contre, un signal numérique est une séquence finie de nombres $\{f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N)\}$, en général multiples d’une unité fixée (p.ex. des entiers).

De la même façon, une image analogique est un signal bidimensionnel, c’est-à-dire une fonction $f(x, y)$ définie dans le plan. Par contre, une *image numérisée* (noir et blanc) est un ensemble de pixels (picture elements), à chacun desquels est attribué, en général, un niveau de gris, de 0 (noir) à 255 (blanc). Le nombre $256 = 2^8$ traduit le codage sur 8 bits en binaire, p.ex. 10010101. Une image numérisée en *niveaux de gris* n’est donc rien d’autre qu’une fonction définie sur une grille discrète et prenant des valeurs discrètes, c’est-à-dire un tableau (matrice) de nombres (binaires). Ce principe de numérisation est illustré à la Figure 2(a), qui montre une telle matrice de taille $M \times N$, où les entiers (m, n) indexent les différents pixels. Une telle image contient donc une quantité d’information énorme (se chiffrant facilement en Mo!).

Par nécessité, représenter un signal sur un ordinateur suppose de le numériser, par échantillonnage. Mais ceci pose tout de suite le problème de la fréquence d’échantillonnage : elle doit être suffisante pour que le signal discret obtenu ne soit pas trop différent du signal continu d’origine. La Figure 1 illustre ce point. Le panneau de gauche présente le signal continu. Sur le panneau de droite, on

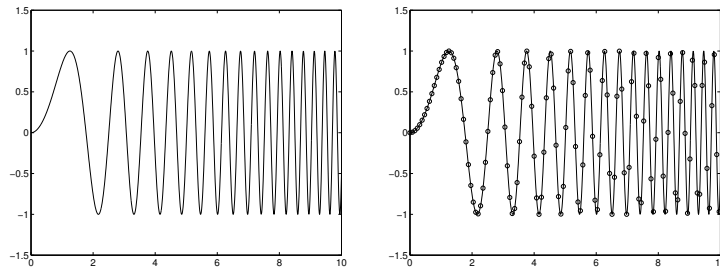


FIGURE 1 – (A gauche) Signal analogique (continu) ; (A droite) Signal numérique obtenu par échantillonnage du signal analogique.

constate que le début du signal, dont la fréquence est basse, est correctement échantillonné, tandis la fin ne l'est plus du tout, la fréquence d'échantillonnage est trop faible, le signal discret a perdu une bonne partie de l'information (on dit que le signal est sous-échantillonné). Ainsi, la qualité d'un fichier audio de type MP3 se mesure à son taux d'échantillonnage, plus celui-ci est élevé, moins les défauts seront audibles. De même la télévision numérique à haute définition présente une qualité d'image nettement supérieure à celle de la télévision tube cathodique.

Le même problème se pose évidemment dans le cas d'une image. Si elle est sous-échantillonnée, des défauts apparaîtront. En effet, de

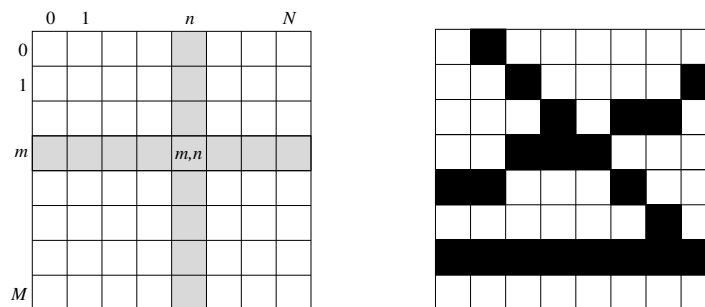


FIGURE 2 – (a) Schéma d'une image numérisée ; (b) Difficultés liées à la pixellisation.

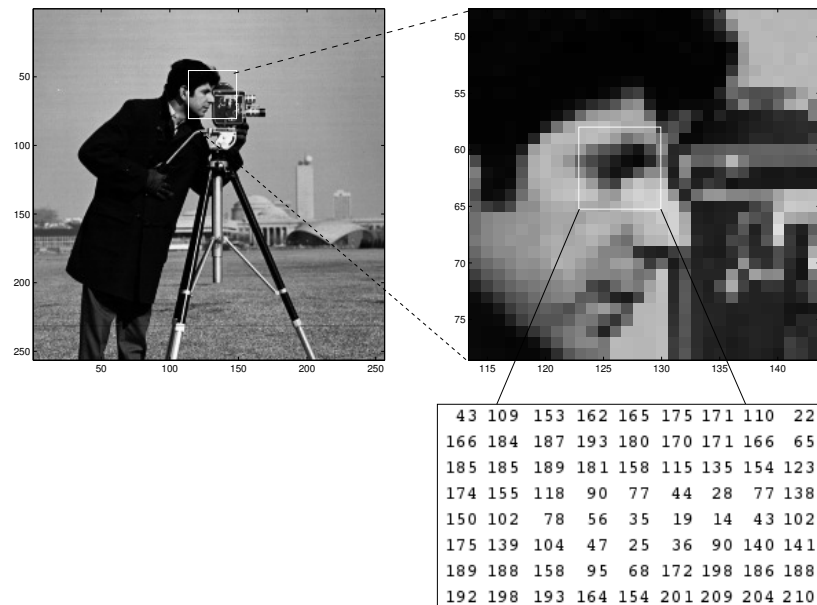


FIGURE 3 – Un exemple concret d'image numérique.

par sa définition même, elle va présenter des difficultés géométriques : courbes et droites sont mal reproduites, il y a des effets de pixellisation (lignes en escalier, p.ex.). La Figure 2(b) illustre ces effets indésirables, tandis que la Figure 3 présente un exemple concret.

Ceci dit, que veut-on faire d'un signal ou d'une image numérisés? Plusieurs types d'actions peuvent être envisagés.

- (1) Analyser : détecter, mesurer, compter divers "objets" particuliers :
 - . détecter des "discontinuités", qui signalent un changement de régime
 - . détecter un motif particulier dans une bande audio ou une image
 - . photos aériennes : détecter routes, bâtiments, ...
 - . images du ciel : localiser des galaxies
 - . fluide, trafic automobile : suivre des "objets" en mouvement
 - . photos : reconnaître des personnages ("image retrieval")
 - . texte : lecture optique
 - . empreintes digitales (FBI)
- (2) Modifier :

- nettoyer le signal ou l'image : enlever le “bruit”, des défauts, améliorer le contraste
- transmettre et reconstruire le signal ou l'image, ce qui implique de le compresser sans perte d'information intolérable (radio, télévision)
- imprimer une signature invisible dans une image (tatouage, “watermarking”).

Il faut remarquer ici que la notion de bruit est relative ; en gros, elle recouvre tous les aspects du signal auxquels on ne s'intéresse pas, aussi bien les défauts que les détails non désirés. En effet, le niveau de fidélité de la reconstruction du signal après transmission dépend du but recherché. Par exemple, s'il faut seulement s'assurer de la présence d'une personne dans une photo, une résolution faible suffira. Tous les détails plus fins peuvent être supprimés, ils sont donc considérés comme du bruit. Par contre, s'il s'agit de vérifier de petits détails, une résolution élevée est nécessaire, il n'y a pas d'autre bruit à éliminer que les défauts éventuels. Les Figures 4 et 5 présentent deux exemples de débruitage d'un signal et d'une image, respectivement.

Pour toutes les opérations mentionnées ci-dessus, il faut rendre le signal plus “propre”, plus petit, mais toujours utilisable, sans perte intolérable d'information. Pour ce faire, l'on devra transformer, manipuler le signal, c'est-à-dire, agir sur les nombres qui le composent. Les techniques utilisées pour arriver à ce but constituent le *traitement numérique des signaux et des images*.

3 Traitement de signaux analogiques en dimension 1

3.1 Principes de base

Le principe de base du traitement du signal consiste à représenter un signal arbitraire, c'est-à-dire une fonction appartenant à une classe que l'on s'est définie, comme combinaison linéaire de fonctions de base φ_n :

$$f = \sum_{n \in I} c_n \varphi_n. \quad (3.1)$$

L'exemple classique est la classe $L^2(\mathbb{R}, dt)$ des signaux d'énergie finie, réalisés par des fonctions mesurables (au sens de Lebesgue) f vérifiant

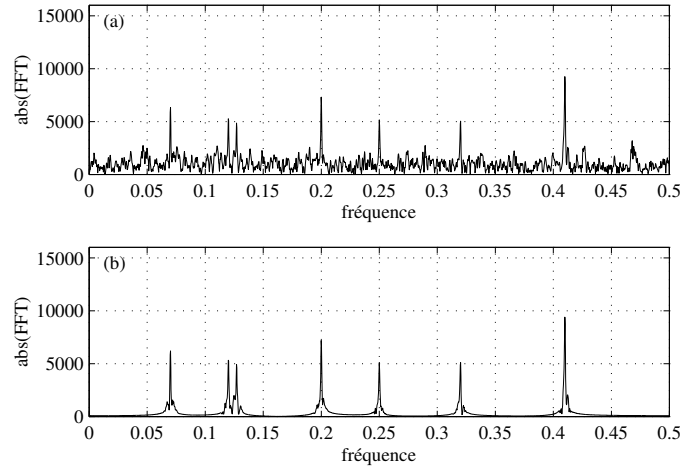


FIGURE 4 – (En haut) signal bruité : spectre RMN original ; (En bas) signal débruité : spectre reconstruit après élimination du “bruit” (d’après [3, Sec.12.7.1]).

la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{fonctions de carré sommable}).$$

Dans la relation symbolique (3.1), l’indice n peut prendre des valeurs continues ou des valeurs discrètes. Evidemment, si l’ensemble d’indices I est infini, comme c’est en général le cas, il faut donner un sens mathématique précis à la sommation. La fonction f est donc équivalente à la famille $\{c_n\}$ de ses coefficients (qui ne sont pas nécessairement uniques, à moins que les fonctions φ_n ne soient linéairement indépendantes). Ce sont ceux-ci que l’on va manipuler et transmettre, éventuellement après les avoir normalisés (“quantification”).

L’étape suivante consiste à tronquer le développement (3.1) après un nombre de termes aussi petit que possible. Nous avons donc maintenant un problème d’*approximation* : dans quelle mesure le développement tronqué représente-t-il correctement le signal f ? Quelle est l’erreur commise ?

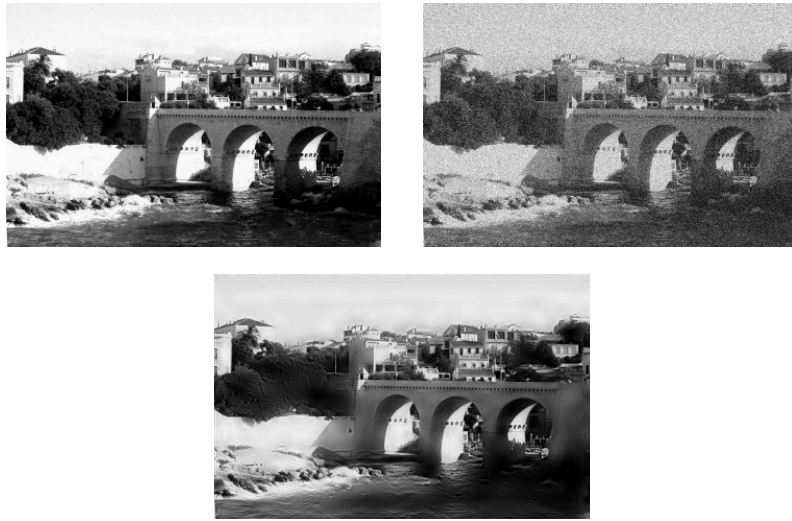


FIGURE 5 – Débruitage d’une image : (En haut, à gauche) Image nette ; (En haut, à droite) Image avec ajout de bruit ; (En bas) Image débruitée (d’après [3, Sec.12.7.1]).

3.2 L’analyse de Fourier

La méthode traditionnelle consiste à prendre pour fonctions de base des fonctions trigonométriques $\varphi_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, (ou des sinusôides/cosinusôides). S’il s’agit d’une fonction 2π -périodique ou d’une fonction sur l’intervalle $[0, 2\pi]$ (que l’on peut identifier avec le cercle unité), on obtient une *série de Fourier*, correspondant à des indices n entiers, $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int} \hat{f}(n), \quad (3.2)$$

et son inverse

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-int} f(t) dt. \quad (3.3)$$

Par contre, s’il s’agit d’un signal à durée indéfinie ($t \in \mathbb{R}$), on

obtient la *transformée de Fourier* :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (3.4)$$

et son inverse

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (3.5)$$

La relation (3.2), qui particularise (3.1), signifie que la fonction $f(t)$ peut être reconstruite à partir de ses “composantes fréquentielles” $\hat{f}(n)$ et, de même, dans le cas continu (3.4).

Cette représentation, universellement utilisée, souffre toutefois de graves défauts. Physiquement, cela se comprend bien. En effet, le signal a en général un début et une fin, contrairement aux fonctions trigonométriques, qui “vivent” de moins l’infini à plus l’infini, la représentation (3.4) ne peut être correcte qu’au prix de sérieuses interférences destructrices .

Dans la représentation (3.4), la fonction $\hat{f}(\omega)$ contient exactement la même information que le signal $f(t)$, mais elle a perdu toute notion de localisation temporelle : à quel moment la composante $\hat{f}(\omega)$ apparaît-elle ? Ceci est évidemment une conséquence immédiate du principe d’incertitude de Fourier. Soit une fonction f bien localisée, en forme de pic de “largeur” Δf (une gaussienne, par exemple). La transformée de Fourier $\hat{f}$ est aussi un pic, de largeur $\Delta \hat{f}$. Alors le principe d’incertitude de Fourier dit que $\Delta f \Delta \hat{f} \geq 1$: on ne peut pas localiser un signal arbitrairement bien à la fois en temps et en fréquence ! En outre, si la fonction f est nulle en dehors d’un intervalle fini, sa transformée de Fourier $\hat{f}$ a nécessairement un support infini, car c’est une fonction analytique (le support de $\hat{f}$ est le plus grand sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ sur lequel $\hat{f} \neq 0$).

Remarquons qu’il s’agit ici de physique *classique*. Mais c’est ce même principe d’incertitude de Fourier qu’applique Heisenberg pour obtenir ses célèbres relations d’incertitude $\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$ en mécanique *quantique*, en interprétant la largeur Δq comme la variance de la distribution des valeurs propres de l’observable position q (ici représentée par un opérateur dans l’espace de Hilbert des états du système), et de même pour l’observable moment p .

Le principe $\Delta f \Delta \hat{f} \geq 1$ implique qu’un signal quasi-monochromatique, c’est-à-dire avec $\Delta \hat{f}$ très petit, est extrêmement mal localisé

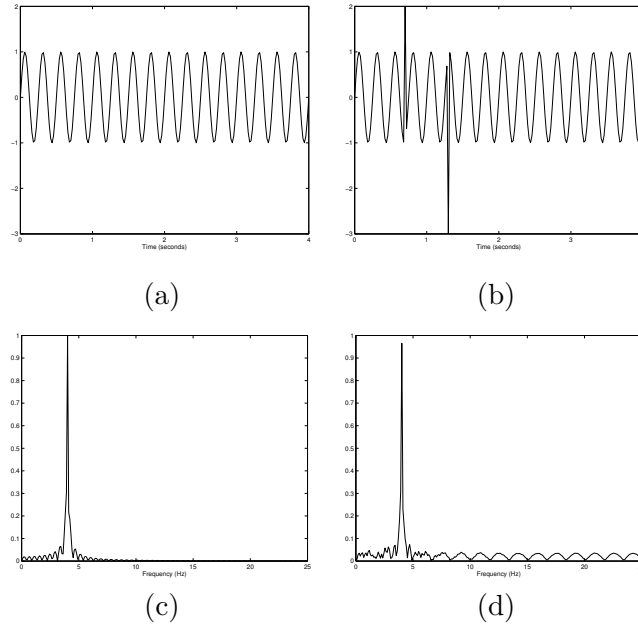


FIGURE 6 – Effet d’une perturbation localisée. (a) Une sinusoïde pure ; (b) La même avec deux perturbations très localisées ; (c) et (d) Valeur absolue des transformées de Fourier des signaux (a) et (b).

en temps, c’est-à-dire que Δf est très grand, et inversement. Ceci est illustré dans la Figure 6. Les deux panneaux de gauche présentent une sinusoïde pure (a), idéalement de durée infinie ($\Delta f \gg 1$), et la valeur absolue de sa transformée de Fourier, qui est extrêmement bien localisée ($\Delta \hat{f} \ll 1$). Les petites oscillations visibles en (c) proviennent du fait que la sinusoïde (a) est tronquée entre 0 et 4. Les deux panneaux de droite présentent en (b) la même sinusoïde à laquelle on a ajouté deux perturbations extrêmement localisées (idéalement des fonctions δ) et en (d) la valeur absolue de la transformée de Fourier correspondante. On constate que les perturbations très localisées en temps ($\Delta f \ll 1$) ont une transformée de Fourier très délocalisée ($\Delta \hat{f} \gg 1$).

Par ailleurs, la représentation de Fourier est très peu économique. En effet, si le signal est plat, et donc ne contient aucune information, il faut calculer l’intégrale (3.4), ou sommer la série infinie dans le cas



FIGURE 7 – Décomposition en blocs d’une image.

discret, pour s’en apercevoir.

Mais surtout, cette représentation est instable, dans le sens qu’une perturbation infime du signal $f(t)$, d’une durée aussi courte et d’une amplitude aussi petite que l’on veut, va bouleverser totalement le spectre de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Un exemple frappant est donné dans la Figure 6 : sur le panneau (d) on constate la présence d’oscillations supplémentaires qui couvrent tout le spectre. La raison en est que la transformée de Fourier est une transformation *globale* et non pas *locale*.

Une critique analogue s’applique à la version discrète de l’analyse de Fourier. Prenons le cas d’une image, plus parlant. La technique consiste à décomposer l’image en *blocs*, dont la taille (4×4 pixels, 8×8 pixels, . . .) varie en fonction de celle des détails qui s’y trouvent (Figure 7), puis à représenter chaque bloc par des fonctions trigonométriques (si on prend des fonctions cosinus, la transformée est appelée DCT ou Discrete Cosine Transform) :

$$f_k(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn}^k \cos mx \cos ny \quad (k^{\text{ième}} \text{ bloc}). \quad (3.6)$$

Dans cette approche, l’image est donc décrite par l’ensemble des coefficients c_{mn}^k .

Ici aussi, la méthode, quoique très largement utilisée, présente de sérieux inconvénients. Elle ne contient aucune notion de *résolution*,

les indices m, n correspondent seulement à une fréquence d'oscillation. Il y a des difficultés de continuité aux frontières entre blocs, ce qui crée des défauts ("blocking effects"). Il y a aussi des difficultés pour représenter des lignes droites obliques et des courbes ("escaliers"), ainsi qu'on l'a vu sur la Figure 2(b); la raison en est évidemment que cette approche est intrinsèquement liée à la géométrie cartésienne " x, y ".

3.3 La transformée en ondelettes continue

La discussion précédente montre que, dans tous les cas, la transformée de Fourier n'est pas suffisante en traitement du signal, il faut trouver autre chose.

Une première condition à satisfaire est d'avoir une transformation *locale*. Une deuxième est d'inclure une notion de *résolution*. En outre, on observe que les signaux réels ont un début et une fin, ils possèdent un large spectre de fréquences et présentent souvent une corrélation entre la durée d'une portion de signal et la fréquence de celle-ci. Ceci est typique par exemple de la voix humaine : les hautes fréquences ont une durée très brève, bien localisée en temps (consonnes), tandis que les basses fréquences ont une durée plus longue (voyelles).

La transformée de Fourier est incapable de reproduire toutes ces caractéristiques. La solution est de recourir à une *représentation temps-fréquence* ou *temps-échelle*. Il faut en effet *deux* paramètres. Le premier, noté a , est un paramètre d'échelle, qui en fait spécifie les *fréquences* présentes, étant donné que $1/a$ équivaut à une fréquence. L'autre, b , indique la position dans le signal : à quel moment une fréquence donnée apparaîtrait-elle ?

En réalité, ce concept de représentation temps-fréquence est connu depuis bien longtemps. L'exemple le plus familier est simplement une partition musicale (Figure 8) : une note est un morceau de son, apparaissant à un instant donné et possédant une hauteur (fréquence) donnée. Ceci est d'ailleurs davantage qu'une analogie. L'article de l'Encyclopaedia Universalis déjà mentionné [17] va jusqu'à dire qu'une ondelette est l'idéalisation mathématique d'une note de musique !

Dès lors, si l'on impose que la transformation soit *linéaire*, ce qui est le cas le plus fréquent, la forme générale d'une transformation

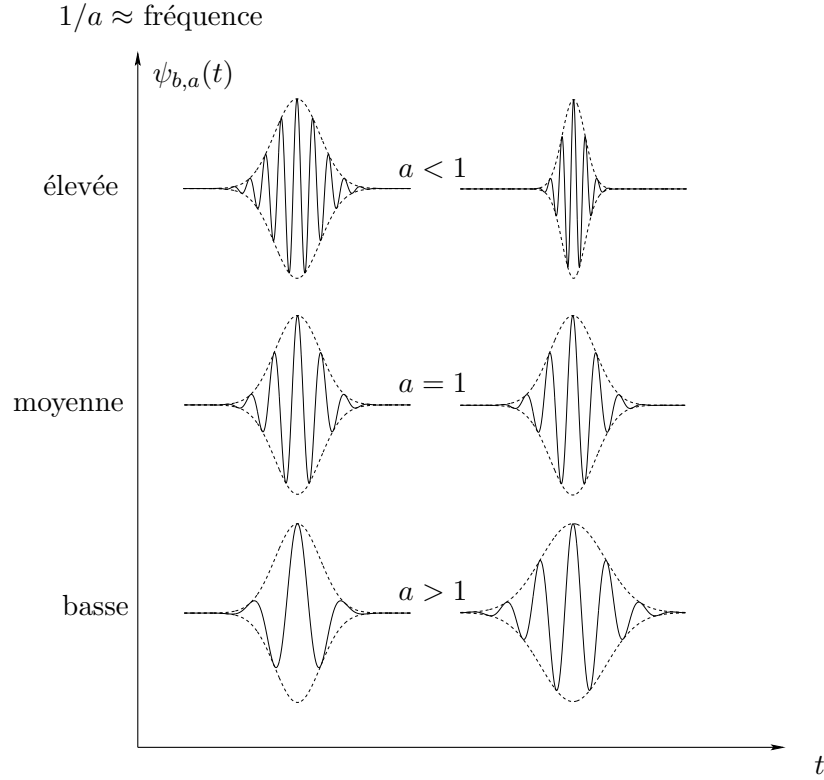


FIGURE 9 –
La fonction $\psi_{b,a}(t)$ pour différentes valeurs du paramètre d'échelle a :
à gauche, transformée de Gabor ; à droite, transformée en ondelettes.

3.3.1 Définitions de base de la TO

Selon (3.7) et (3.8), la transformée en ondelettes (TO) continue s'écrit :

$$S(b, a) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(a^{-1}(t - b))} s(t) dt, \quad (3.9)$$

$$= a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} \widehat{s}(\omega) e^{ib\omega} d\omega. \quad (3.10)$$

La deuxième formule résulte du théorème de Plancherel, qui nous dit que le produit scalaire est invariant par la transformation de Fourier :

$$\langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle = \langle f | g \rangle, \quad \text{pour } f, g \in L^2(\mathbb{R}, dt).$$

La première chose à faire est de préciser les conditions que doit vérifier la fonction ψ . On peut en distinguer quatre :

(i) Le formalisme suppose bien évidemment que $\psi(t)$, donc aussi $\hat{\psi}(\omega)$, soit de carré sommable : $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dt)$.

(ii) ψ doit être *admissible*, c'est-à-dire que l'intégrale suivante doit converger :

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty. \quad (3.11)$$

Cette condition implique (et, en pratique, équivaut à)

$$\hat{\psi}(0) = 0, \quad (3.12)$$

[11, Sec. 2.4], qui est à son tour équivalente à la condition de *moyenne nulle* (donc ψ doit être une fonction oscillante) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.13)$$

Il s'ensuit que la TO d'un signal constant est nulle, ce qui répond à l'une des critiques à l'encontre de la transformée de Fourier.

(iii) Pour obtenir une transformée efficace, $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(\omega)$ doivent toutes deux être *bien localisées*. Un comportement gaussien est ici optimal, ainsi que l'a souligné D. Gabor en 1947 [13] (le résultat est en fait beaucoup plus ancien). En effet, si $\psi(t) = ce^{-t^2/2}$, alors $\hat{\psi}(\omega) = c'e^{-\omega^2/2}$ et on atteint la borne inférieure dans la relation d'incertitude, c'est-à-dire que l'on a $\Delta\psi \Delta\hat{\psi} = 1$.

(iv) En plus de (ii), on impose souvent à ψ d'avoir un certain nombre de *moments nuls* :

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

Cette propriété rend ψ plus efficace pour détecter les singularités d'un signal, puisqu'elle est alors "aveugle" aux polynômes de degré inférieur ou égal à N , c'est-à-dire la partie du signal qui contient le moins d'informations.

Les conditions (i) et (ii) sont essentielles pour l'existence même et l'inversibilité de la TO. Par contre, (iii) et (iv), quoique pas indispensables, garantissent que la TO est un outil efficace pour l'analyse de

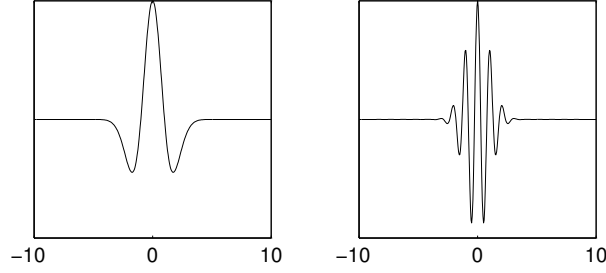


FIGURE 10 – Deux ondelettes usuelles : (à gauche) Ondelette Chapeau mexicain ; (à droite) Ondelette de Morlet (partie réelle).

signaux et seront donc presque toujours imposées. Toutefois, les relations (3.9) et (3.10) permettent une généralisation à d'autres classes de fonctions, voire de distributions (fonctions généralisées au sens de L. Schwartz) : si la fonction s est singulière, le “produit scalaire” (qui n'en n'est plus un) reste bien défini si l'ondelette ψ est suffisamment régulière. On peut ainsi étendre la TO aux distributions tempérées (c'est-à-dire à croissance lente), pour autant que ψ appartienne à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ (fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide).

Donnons deux exemples d'ondelettes, en fait les plus utilisés. Le *Chapeau mexicain* est la dérivée seconde de la gaussienne,

$$\psi_H(t) = -\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2} = (1 - t^2) e^{-t^2/2}, \quad \widehat{\psi_H}(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2}. \quad (3.15)$$

C'est une ondelette admissible, réelle, avec deux moments nuls ($n = 0, 1$).

L'ondelette de *Morlet* est une gaussienne modulée :

$$\psi_M(t) = e^{i\omega_o t} e^{-t^2/2\sigma_o^2} + \varepsilon(t), \quad \widehat{\psi_M}(\omega) = \sigma_o e^{-[(\omega - \omega_o)\sigma_o]^2/2} + \widehat{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Dans ces relations, ω_o représente la fréquence de modulation et σ_o dénote la largeur de la gaussienne ; ces deux paramètres doivent être choisis en fonction du signal analysé. Etant donné que le premier terme seul ne vérifie pas les conditions d'admissibilité (3.12)–(3.13), il faut ajouter une correction ε . Toutefois, pour ω_o suffisamment grand (typiquement $\omega_o \sigma_o \geq 5.5$), ce terme correctif (lui aussi de type gaussien)

est numériquement négligeable (inférieur à 10^{-4}) et sera donc omis en pratique. Les deux ondelettes-type sont représentées à la Figure 10.

L'ondelette de Morlet est à valeurs complexes, donc la transformée correspondante $S(b, a)$ l'est aussi, si bien que l'on peut traiter séparément sa phase $\text{Arg } S(b, a)$ et son module $|S(b, a)|$. La présence de la phase offre des avantages supplémentaires pour certaines applications basées sur la détection de fréquences spécifiques dans un signal, par exemple, la localisation des lignes spectrales (voir par exemple la Figure 4 ou la Figure 15).

3.3.2 Propriétés et interprétation de la TO continue

Exactement comme celle de Fourier, la transformée en ondelettes est inversible et donc elle admet une *formule de reconstruction*, à savoir

$$s(t) = c_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \psi_{b,a}(t) S(b, a) \frac{da db}{a^2}. \quad (3.17)$$

Dans cette relation et les suivantes, $\mathbb{R}_+^2$ désigne le demi-plan temps-échelle $\{a > 0, b \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, le signal est donné par une superposition linéaire des ondelettes $\psi_{b,a}$ définies en (3.8) avec les $S(b, a)$ comme coefficients. Comme les exponentielles dans la transformation de Fourier, les ondelettes $\{\psi_{b,a}\}$ jouent le rôle d'une base continue. On voit ici explicitement le rôle de la condition d'admissibilité $c_\psi < \infty$ donnée en (3.11).

Par ailleurs, on vérifie qu'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+^2, da db/a^2)$ est la transformée en ondelettes d'un certain signal si et seulement si elle vérifie la propriété de reproduction :

$$f(b', a') = c_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \langle \psi_{b',a'} | \psi_{b,a} \rangle f(b, a) \frac{da db}{a^2}. \quad (3.18)$$

Cette relation signifie que la valeur de f au point (b', a') dépend de ses valeurs aux points voisins (b, a) . Elle a des conséquences importantes, car elle signifie que la TO est extrêmement *redondante* (ce qui est normal, puis qu'elle transforme un signal fonction d'une variable en une fonction de deux variables). Nous verrons ci-dessous que cette redondance peut utilement être exploitée (Section 3.3.3).

Comment interpréter la transformée en ondelettes ? D’abord, les relations (3.9)–(3.10) nous apprennent que l’ondelette agit comme un filtre, c’est-à-dire une convolution dans la variable temporelle¹. Ce filtre a deux propriétés essentielles, dont la conjugaison lui confèrent son efficacité : il est bien localisé et sa moyenne est nulle.

Supposons que ψ and $\hat{\psi}$ soient aussi bien localisées que possible. Plus précisément, supposons que ψ ait un support numérique de largeur L , centré autour de 0, tandis que $\hat{\psi}$ a support numérique de largeur Ω , centré autour de ω_o (ceci signifie que chacune des deux fonctions est numériquement négligeable en dehors de ce support). Dès lors, les ondelettes transformées $\psi_{b,a}$ et $\hat{\psi}_{b,a}$ ont, respectivement, un support numérique de largeur aL autour de b et un support numérique de largeur Ω/a autour de ω_o/a .

On notera que le produit des deux largeurs est constant (nous savions déjà qu’il doit être borné inférieurement par une constante, en vertu du principe d’incertitude de Fourier). Ce fait essentiel est illustré à la Figure 11, qui est une représentation temps-échelle ou temps-fréquence, si on se rappelle que $1/a$ équivaut à une fréquence.

En conséquence :

- pour $a \gg 1$, $\psi_{b,a}$ est large et centrée sur une fréquence basse : la TO est sensible aux *basses fréquences*, ce qui convient pour une analyse grossière ;
- pour $a \ll 1$, $\psi_{b,a}$ est étroite et centrée sur une fréquence élevée : la TO est sensible aux *hautes fréquences* et permet donc l’analyse des détails fins.

Dès lors, la TO reproduit la corrélation entre la durée d’une portion de signal et sa fréquence moyenne.

Combinant ces propriétés de support avec le fait que l’ondelette $\psi_{b,a}$ est un filtre de moyenne nulle, on voit que la TO effectue un filtrage local en temps et en échelle :

$$S(b, a) \not\approx 0 \iff \psi_{b,a}(t) \approx s(t), \quad (3.19)$$

autrement dit, l’ondelette $\psi_{b,a}$ filtre la partie du signal, s’il y en a une, qui “vit” autour de l’instant b et de l’échelle a . La TO peut donc s’interpréter comme un *microscope mathématique* positionné en

1. Rappelons que la convolution de deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ est définie par $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - y) g(y) dy$.

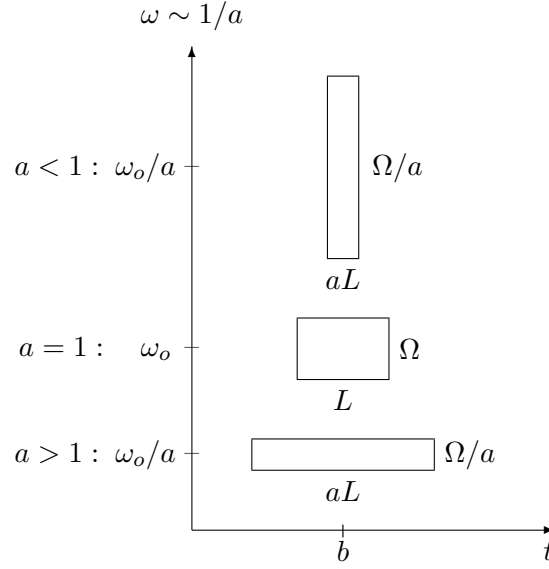


FIGURE 11 – Propriétés de support de $\psi_{b,a}$ et de $\widehat{\psi_{b,a}}$.

b avec une optique ψ et un agrandissement $1/a$. C'est un détecteur et un analyseur de *singularités*. En outre, la relation (3.19) montre que la TO s'adapte au signal, on parlera de zoom automatique.

Tout ceci concerne la TO continue. Mais, en pratique, pour effectuer des calculs, la transformation doit être *discrétisée*, en restreignant les paramètres a et b dans (3.9)–(3.10) à un ensemble discret de points du demi-plan, par exemple le réseau dyadique $\{(k 2^j, 2^j), j, k \in \mathbb{Z}\}$ représenté à la Figure 12 :

$$c_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(2^{-j}t - k)} s(t) dt, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

On remarquera que le réseau dyadique est bien adapté à la géométrie de l'ondelette (invariance par translation et dilatation discrètes). Alors la formule de reconstruction (3.17) prend la forme d'une série discrète

$$s(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \widetilde{\psi_{j,k}}(t), \quad (3.21)$$

dans laquelle les fonctions $\widetilde{\psi_{j,k}}$ peuvent être construites explicitement à partir des $\psi_{j,k}$. Ceci mène à la théorie des *repères*, qui offre un

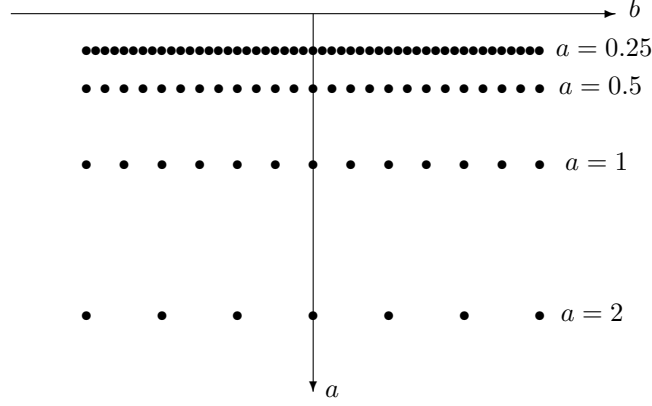


FIGURE 12 – Le réseau dyadique.

substitut efficace aux bases orthonormales [11]. Nous y reviendrons ci-dessous.

3.3.3 Exploitation de la redondance : repères et arêtes

Comme indiqué plus haut, la TO est très redondante. Il n'est donc pas étonnant que toute l'information soit contenue dans un petit sous-ensemble du demi-plan temps-échelle. Cette redondance peut être exploitée de deux façons différentes, les *repères* (frames) ou les *arêtes*.

(a) Repères

Soit $\Gamma = \{(b_{j,k}, a_j), j, k \in \mathbb{Z}\}$ un sous-ensemble discret (un réseau) du demi-plan (b, a) (à noter que le pas d'échantillonnage $b_{j,k}$ de b peut dépendre de l'échelle j , comme pour le réseau dyadique où $b_{j,k} = k 2^j$). On dira que Γ fournit une bonne discrétisation de la TO si un signal arbitraire $s(t)$ peut être représenté par une superposition de la forme

(3.21),

$$s(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{jk} | s \rangle \widetilde{\psi_{jk}}(t), \quad (3.22)$$

où l'on a posé $\psi_{jk} = \psi_{b_{j,k}, a_j}$. Soulignons que (3.22) doit être une représentation *exacte*, c'est-à-dire qu'aucune information n'est perdue par rapport à la représentation continue (3.17). En fait, (3.22) signifie que le signal $s(t)$ peut être remplacé par la famille $\{\langle \psi_{jk} | s \rangle\}$ de ses coefficients d'ondelettes. En outre, on souhaite que la reconstruction de $s(t)$ à partir de ses coefficients soit numériquement stable (c'est-à-dire qu'une petite erreur dans les coefficients n'entraîne qu'une petite erreur dans le signal reconstruit). Comme l'a montré I. Daubechies [11], ceci est garanti si la condition suivante est satisfaite, pour deux constantes $m > 0$, $M < \infty$:

$$m \|s\|^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{jk} | s \rangle|^2 \leq M \|s\|^2 \quad (3.23)$$

(la borne inférieure garantit la stabilité numérique de la reconstruction). Dans ce cas, on dit que la famille $\{\psi_{jk}\}$ constitue un *repère* ('frame' en anglais), avec les bornes m , M . Si $m = M > 1$, le repère est dit *strict* ('tight frame'). Bien sûr, si $m = M = 1$ et $\|\psi\| = 1$, la famille $\{\psi_{jk}\}$ est simplement une base orthonormale.

Le point important est que, en pratique, un bon repère est quasiment aussi bon qu'une base orthonormale. Par 'bon repère', nous entendons que le développement (3.22) converge suffisamment vite et qu'on peut donc le tronquer après un petit nombre de termes en gardant une bonne précision. L'analyse détaillée de Daubechies montre que c'est le cas si $|M/m - 1| \ll 1$, donc en particulier si le repère est strict. Ceci est essentiel, car la discrétisation de la TO ne mène presque jamais à une base orthonormale. En effet, des fonctions ψ très générales vérifiant la condition d'admissibilité (3.11) ou (3.12) peuvent fournir un bon repère, mais pas une base orthonormale, car les fonctions ψ_{jk} ne sont en général pas orthogonales. Ainsi, par exemple, les deux ondelettes canoniques, le Chapeau mexicain (3.15) et l'ondelette de Morlet (3.16), engendrent toutes deux de bons repères, mais non stricts.

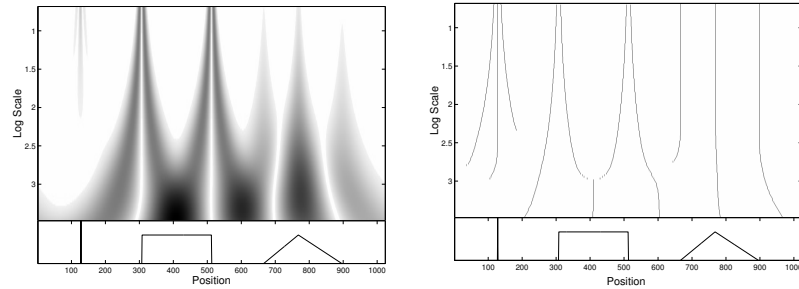


FIGURE 13 – Analyse d’un signal discontinu : à gauche, la TO, à droite, le squelette.

(b) Arêtes et squelette

Une autre façon d’exploiter la redondance de la TO est d’utiliser les *arêtes* ; en gros, celles-ci sont des lignes de maxima locaux. On appelle *squelette* l’ensemble des arêtes et on démontre que la restriction de la TO à son squelette fournit presque toute l’information, avec une erreur contrôlable [12]. En pratique, on remplacera souvent la TO par son squelette, bien plus lisible. On effectue ainsi une réduction considérable du temps de calcul !

A titre d’exemple, la Figure 13 présente l’analyse d’un signal discontinu, comportant un delta de Dirac, un signal carré et un signal triangulaire, reproduits dans les panneaux inférieurs. Le panneau de gauche montre la TO (les niveaux de gris correspondent à l’intensité du module de la TO), celui de droite son squelette : celui-ci est manifestement plus facile à interpréter. On notera que les arêtes convergent, pour $a \rightarrow 0$, vers les positions exactes des discontinuités du signal, d’où leur utilité.

4 La transformée en ondelettes discrète : signaux numériques

Un des succès de la TO fut la découverte qu’il est possible de construire des fonctions ψ pour lesquelles $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ est effectivement une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, dt)$. Une telle base conserve les bonnes propriétés des ondelettes, y compris la localisation à la fois en

temps et en fréquence. De plus, elle fournit des algorithmes rapides, car les matrices impliquées dans ceux-ci sont orthogonales et creuses, donc faciles à inverser. Ceci est la clé de l'efficacité des ondelettes pour les applications.

La construction repose sur deux observations : tout d'abord, quasiment tous les exemples de bases orthonormales d'ondelettes peuvent être déduits d'une *analyse multirésolution*. Ensuite la construction entière peut être traduite dans le langage des filtres, familiers dans la littérature sur le traitement du signal.

L'idée de l'analyse multirésolution découle de l'observation suivante. Supposons qu'une personne regarde un paysage de montagne. Dans un premier temps, elle a une vue d'ensemble. Ensuite elle affine son regard et découvre des détails, par exemple, la présence d'un chalet. Puis elle se focalise davantage et voit des détails plus fins, tels que la présence d'un chien devant le chalet. Notre système visuel fonctionne effectivement suivant ce schéma, popularisé par David Marr [24] : pour passer d'une résolution donnée à une résolution plus fine, il suffit d'ajouter les détails plus fins à l'image plus grossière. Mathématiquement [21], on définira donc une *analyse multirésolution* comme une suite croissante de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}),$$

dont l'intersection est nulle, $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, et qui épuisent l'espace des signaux $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, et qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (1) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$.
- (2) Il existe une fonction $\phi \in V_0$, appelée *fonction d'échelle*, telle que ses translatées entières $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormale de V_0 .

La condition (1) signifie que toutes les échelles sont sur le même pied ($f(2t)$ est la fonction $f(t)$ comprimée d'un facteur 2).

Combinant (1) et (2), il s'ensuit que la famille de fonctions $\{\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de V_j , pour chaque $j \in \mathbb{Z}$. Remarquons que l'on utilise ici aussi le réseau dyadique de la Figure 12 comme ensemble discret du demi-plan (b, a) , ce qui a causé pas mal de confusion au cours des premières années.

Chaque V_j peut être interprété comme un espace d'approximation : l'approximation de $f \in L^2(\mathbb{R})$ à la résolution 2^j est donnée par sa projection sur V_j . Les détails additionnels pour passer de la résolution 2^j à la résolution deux fois plus fine 2^{j+1} sont donnés par la projection de f sur le complémentaire orthogonal W_j de V_j dans V_{j+1} :

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}. \quad (4.1)$$

On obtient alors

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_{j_o} \oplus \left(\bigoplus_{j=j_o}^{\infty} W_j \right),$$

où j_o est la résolution minimale accessible.

Le résultat central est alors que, à partir de ϕ , on peut construire une fonction ψ , telle que l'ensemble $\{\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$: ce sont les ondelettes orthonormales.

Bien sûr, en pratique, on part d'un signal échantillonné dans V_J et on obtient une représentation finie

$$V_J = V_{j_o} \oplus \left(\bigoplus_{j=j_o}^{J-1} W_j \right). \quad (4.2)$$

A titre d'exemple, prenons un signal triangulaire, représenté dans le panneau supérieur de la Figure 14, et effectuons une décomposition sur 6 niveaux pour $J = 0$ et $j_o = -6$. La formule (4.2) nous donne

$$V_0 = V_{-6} \oplus W_{-6} \oplus W_{-5} \oplus W_{-4} \oplus W_{-3} \oplus W_{-2} \oplus W_{-1}.$$

De façon correspondante, le signal $f \in V_0$ se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{-6,k} \phi_{-6,k} + \sum_{j=-6}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{jk} \\ &= c_{-6} + \sum_{j=-6}^{-1} d_j, \quad c_{-6} \in V_{-6}, d_j \in W_j, j = -6, \dots, -1. \end{aligned}$$

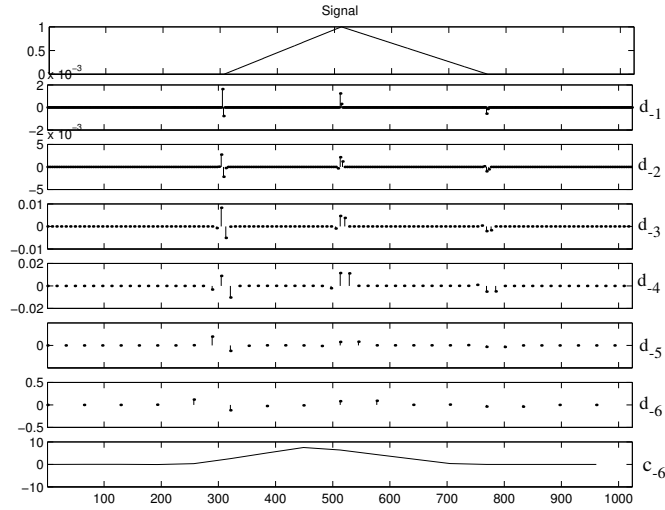


FIGURE 14 – Décomposition d’un signal triangulaire sur 6 niveaux : $j = -6, -5, \dots, -1$. L’approximation à basse résolution $c_{-6} \in V_{-6}$ est donnée dans le panneau inférieur et les 6 niveaux de détails, de résolution croissante, $d_j \in W_j$, $j = 1, \dots, 6$, dans les 6 autres panneaux.

Le panneau inférieur donne l’approximation c_{-6} à $j_o = -6$ et les 6 panneaux au-dessus les détails successifs, de plus en plus fins, $d_{-6}, d_{-5}, d_{-4}, d_{-3}, d_{-2}, d_{-1}$ correspondant à $j = -6, -5, \dots, -1$. La somme des 7 termes redonne bien le signal analysé, présenté dans le panneau supérieur.

Cette TO discrète n’est pas redondante (expression minimale) et se prête particulièrement bien à la *compression* des données et au *débruitage* des signaux. De plus, elle aussi est particulièrement sensible aux singularités. En effet, les coefficients d’ondelettes c_{jk} sont plus grands dans les régions où la fonction analysée a des singularités, ils sont donc localisés dans le plan temps-échelle et décroissent rapidement en dehors de ces régions. Ceci contraste avec la transformée de Fourier, pour laquelle la moindre singularité ruine la décroissance

rapide des coefficients. C'est bien ce que nous avons pu observer dans la Figure 6.

Historiquement, la première base orthonormale d'ondelettes est le système de Haar, introduit en 1910, soit bien avant la notion même d'ondelette (voir [11]) ! La fonction de base ('ondelette-mère') s'écrit

$$\psi_{00}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Cette ondelette est très simple à utiliser, mais elle a un inconvénient majeur : la fonction ψ_{00} , et donc aussi toutes les fonctions ψ_{jk} , est discontinue, si bien que sa transformée de Fourier décroît très lentement, l'ondelette est donc très mal localisée en fréquence.

Malheureusement, la TO discrète est extrêmement rigide, si bien que différentes extensions ont été proposées. Parmi celles-ci, il faut en citer deux.

(1) *Les bases biorthogonales* : au lieu d'imposer les relations d'orthogonalité à l'intérieur d'une même analyse multirésolution $\{V_j\}$, on construit deux hiérarchies d'espaces d'approximation, $\{V_j\}$ et $\{\tilde{V}_j\}$, obéissant à des relations d'orthogonalité croisées [22, Sec.7.4]. En définitive, on obtient deux suites de sous-espaces d'ondelettes $\{W_j\}$ and $\{\tilde{W}_j\}$, avec des bases (duales) $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$, respectivement, qui sont mutuellement orthogonales :

$$\langle \psi_{j,k} | \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'}. \quad (4.3)$$

En termes de ces bases, on obtient deux types de développements, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{\psi}_{j,k} | f \rangle \psi_{j,k} \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{j,k} | f \rangle \tilde{\psi}_{j,k}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Une base duale n'étant pas unique, ce schéma est beaucoup plus flexible que le précédent, et c'est celui qui est adopté dans la plupart des applications.

(2) *Les ondelettes de seconde génération* : ici aussi on utilise la flexibilité dans le choix d'un schéma biorthogonal. La famille $\{V_j\}$ ne détermine pas univoquement la famille $\{\tilde{V}_j\}$, mais l'arbitraire dans le choix de l'ondelette de base se limite à un polynôme trigonométrique. L'idée est alors de partir d'un schéma biorthogonal, très simple en général, et de le modifier de proche en proche jusqu'à obtenir des ondelettes avec les propriétés souhaitées. L'avantage de la méthode, appelée *lifting scheme*, est qu'elle n'utilise ni la transformée de Fourier, ni le schéma dyadique traditionnel. On peut ainsi construire des ondelettes sur un intervalle ou sur une courbe arbitraire, et de même en dimension 2, sur une surface telle que la sphère [26].

5 Applications de la transformée en ondelettes en dimension 1

La TO a connu des multitudes d'applications, tant en physique, en ingénierie qu'en mathématiques. En les examinant, on s'aperçoit qu'il s'agit avant tout de détection de singularités ou de périodicités (localement dans le temps) dans un signal, de débruitage, de compression de données. Ceci correspond parfaitement aux propriétés de la TO que nous avons discutées dans les sections précédentes. Citons-en quelques exemples, en commençant par les applications physiques.

5.1 Applications en physique

Il y a de nombreuses applications de la TO dans des domaines très variés de la physique. On trouvera davantage de détails, ainsi que les références aux articles originaux, dans la Section 12.7 de notre ouvrage [3].

- *Son et acoustique* : musique synthétique, analyse de la parole (détection des formants), décomposition d'un train d'ondes acoustiques sous-marin.

- *Géophysique, astrophysique* : analyse de microséismes en prospection pétrolière, gravimétrie (fluctuations du champ gravitationnel local), sismologie, géomagnétisme (fluctuations du champ magnétique terrestre), astronomie (fluctuations de la longueur du jour, variations de

l'activité solaire, mesurée par les taches solaires, etc.), paléoclimatologie (p.ex., analyse de carottes glaciaires ou benthiques).

- *Fractals, turbulence (1-D et 2-D)* : agrégats limités par la diffusion, phénomènes de croissance arborescente, identification de structures cohérentes dans les fluides turbulents, etc.

- *Physique atomique* : analyse de la génération d'harmoniques d'ordre élevé dans l'interaction laser-atome.

- *Spectroscopie RMN* : soustraction de lignes spectrales, filtrage du bruit. A titre d'exemple, outre le débruitage d'un signal montré dans la Figure 4, nous présentons dans la Figure 15 une autre application en spectroscopie, à savoir la soustraction du pic de l'eau dans un spectre RMN. L'aspect remarquable est que les petits pics, correspondant aux métabolites intéressants, ne sont en rien perturbés après l'élimination de l'énorme pic indésirable [3, Sec.12.7.1].

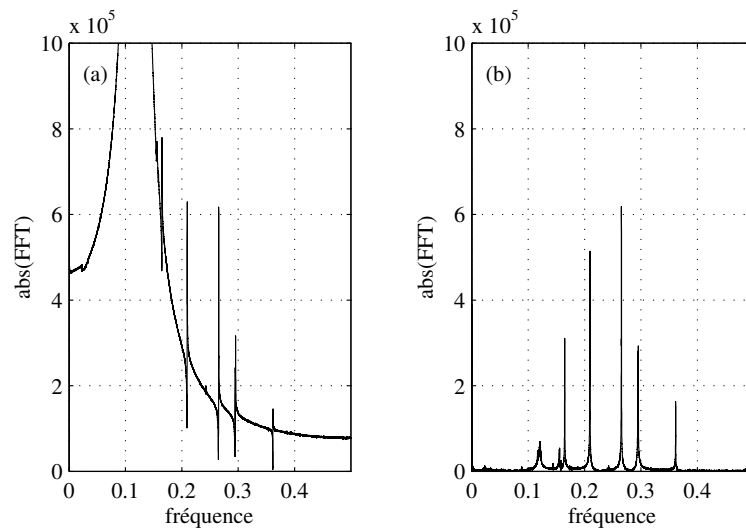


FIGURE 15 – Application de la TO en spectroscopie RMN : Soustraction d'un pic indésirable. (a) Le spectre originel; (b) Le spectre reconstruit après soustraction du pic de l'eau (d'après [3, Sec.12.7.1]).

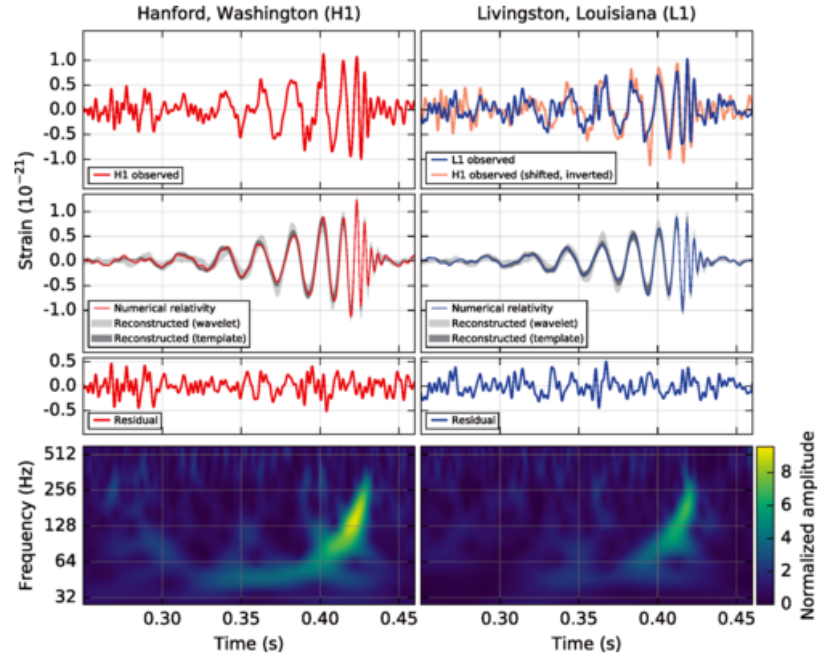


FIGURE 16 – Dans la colonne de gauche, les données de Hanford, dans celle de droite, celles de Livingston. Dans chaque colonne, on donne, de haut en bas, le signal brut ; le signal débruité, avec la prédiction relativiste et la reconstruction par ondelettes ; le résidu ; enfin, la TO du signal (d’après [1]).

. *Cosmologie* : une application spectaculaire récente de la TO a été la première détection des ondes gravitationnelles par l’expérience LIGO [1]. Celle-ci comporte deux interféromètres localisés respectivement à Hanford, WA, et Livingston, LA. Chacun d’eux a enregistré un signal correspondant à l’onde gravitationnelle résultant de la fusion de deux trous noirs ; ceux-ci orbitent en spirale l’un autour de l’autre de plus en plus vite jusqu’à fusionner en un seul trou noir résiduel. La fréquence du signal augmente donc continûment jusqu’à la fusion, c’est-à-dire que l’on a un ‘chirp’ (Figure 16). L’analyse montre que le signal analysé avec une ondelette de Morlet coïncide presque parfait-

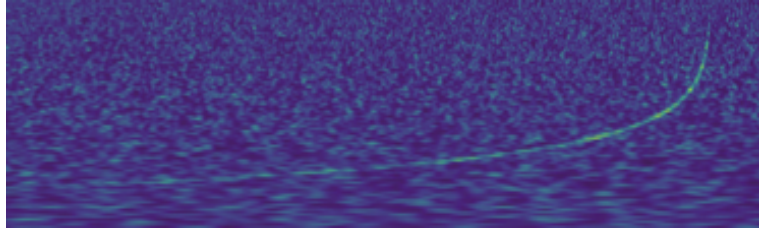


FIGURE 17 – Signal combiné LIGO dû à l’onde gravitationnelle émise par la collision de deux étoiles à neutrons (d’après [8]).

tement avec la forme prédite par la relativité générale. Un événement analogue a ensuite été observé simultanément par LIGO et VIRGO, un détecteur analogue situé en Italie.

Plus récemment, on a observé la collision entre les deux étoiles à neutrons d’un système binaire en rotation en spirale [2, 8]. Cette fois, il y a émission simultanée d’ondes gravitationnelles et d’ondes électromagnétiques, en particulier un “sursaut” gamma (γ burst). Ceci permet de localiser la source et d’estimer sa distance. Ici aussi, la détection et la modélisation des phénomènes est obtenue par une analyse en ondelettes de Morlet, ainsi qu’il ressort de la Figure 17, qui est obtenue en combinant les signaux des deux détecteurs LIGO..

Selon les experts, ces résultats sont fondamentaux et ouvrent une nouvelle ère en astrophysique et en cosmologie.

5.2 Applications en médecine et biologie

Au rayon des applications médicales et biologiques, on trouve l’analyse et le suivi d’électrocardiogrammes, d’électro-encéphalogrammes ou de potentiels évoqués visuels, et notamment la détection de profils particuliers précurseurs d’anomalies (épilepsie, par exemple). La TO est aussi utilisée pour étudier les corrélations à longue distance dans des séquences d’ADN, en particulier distinguer les séquences codantes et non codantes [7]. Dans ce cas précis, elle a permis de résoudre un conflit entre deux écoles, qui présentaient des résultats contradictoires. En fait les résultats étaient parfaitement compatibles, la différence apparente résultant de la présence d’une rampe dans un

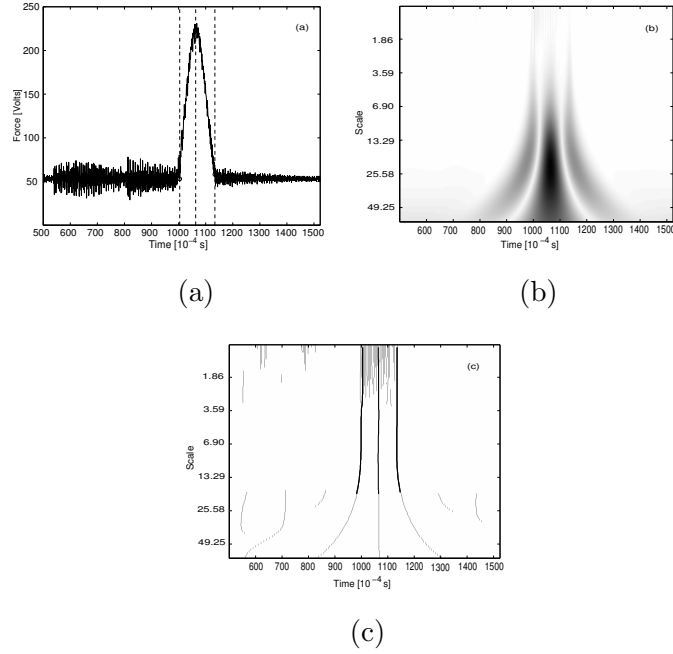


FIGURE 18 – Chute d’un percuteur sur un disque de plastique : analyse d’un signal de rebond avec une ondelette Chapeau mexicain : (a) Signal : accélération (= force) du percuteur qui rebondit et points de discontinuité à détecter ; (b) Valeur absolue de la TO du signal ; (c) Squelette correspondant (d’après [29]).

cas et pas dans l’autre. La TO étant aveugle à une telle rampe, elle a rendu les deux résultats semblables [6].

5.3 Applications industrielles

Du côté des applications industrielles, on trouve la surveillance d’installations nucléaires, électriques ou mécaniques. Un exemple de nature différente est l’analyse du comportement de matériaux sous impact, illustré à la Figure 18 [29]. Pour ce faire, l’expérimentateur fait tomber un percuteur muni d’un accéléromètre sur un disque du matériau à étudier (un plastique). Soit le percuteur rebondit, soit il

perfore le disque. Dans les deux cas, on enregistre le signal d'accélération et on désire en tirer plusieurs informations physiques, telles que l'instant du premier et du dernier contact, celui de la pénétration maximum, les fréquences excitées, etc. Une analyse en TO avec un Chapeau mexicain fournit les trois données temporelles. La figure montre le signal, dans le cas d'un rebond, sa TO et le squelette de celle-ci. Ce dernier panneau donne de façon extrêmement précise l'information souhaitée.

Un autre type d'application de nature industrielle est la *caractérisation de formes* en vision robotique : la TO continue du contour d'un objet est traité comme une courbe dans le plan complexe (ombres chinoises).

5.4 Applications en mathématique

Du côté des mathématiques, c'est plutôt la TO discrète qui est utilisée. On peut citer comme applications l'analyse de singularités locales de fonctions, par la détermination d'exposants de Hölder locaux, l'emploi de la TO dans la résolution d'équations aux dérivées partielles ou les problèmes d'approximation de fonctions. Particulièrement intéressantes sont la caractérisation d'espaces fonctionnels par le type de décroissance des coefficients d'ondelettes (e.g. les espaces de Sobolev ou les espaces de Besov), ou la construction de bases inconditionnelles communes à toute une famille d'espaces de Banach (e.g. les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, dt)$, $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev ou les espaces de Besov). Les coefficients d'ondelettes spécifient aussi les propriétés de régularité de certaines classes de fonctions. Dans une autre direction, des bases d'ondelettes permettent d'obtenir une représentation presque diagonale de certains opérateurs (matrices creuses), ce qui est indispensable pour leur inversion. Enfin, les moments nuls fournissent des stratégies efficaces pour la compression des signaux en vue de leur transmission. Bien sûr, ces applications qualifiées de mathématiques ne sont pas étrangères à la physique ; ces mêmes propriétés sous-tendent les applications physiques citées ci-dessus, et sont même quelques fois utilisées explicitement.

6 La transformée en ondelettes en dimension 2

6.1 Définitions de la TO continue en dimension 2

Très vite s'est posée la question de l'application de la TO aux images. Le problème est de savoir comment généraliser l'outil de une à deux dimensions. Comme souvent, la réponse réside dans la géométrie, autrement dit, la théorie des groupes. Il suffit de déterminer quelles sont les opérations que l'on souhaite appliquer à une image et la forme de la TO bidimensionnelle est fixée.

On procède de manière en tous points parallèle au cas unidimensionnel. Tout d'abord, on définit une *image* comme une fonction définie sur le plan et de carré sommable ("énergie finie" au sens de l'électromagnétisme) $I \in L^2(\mathbb{R}^2, d\vec{x})$:²

$$|I|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |I(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty.$$

Pratiquement, une image en noir et blanc est une fonction positive bornée, prenant des valeurs discrètes entre 0 et 255, correspondant au niveau de gris de chaque pixel, comme expliqué plus haut dans la Section 2 :

$$0 \leq I(\vec{x}) \leq M, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 (M > 0).$$

Le principe est d'analyser l'image point par point à l'aide d'une *sonde* ψ :

$$\langle \psi | I \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi(\vec{x})} I(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Une *ondelette* est alors une sonde admissible, c'est-à-dire une fonction de carré sommable, bien localisée en position *et* en fréquence, et vérifiant la condition d'admissibilité (faible) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \tag{6.1}$$

(c'est donc une fonction oscillante). Sur cette ondelette, on effectue les opérations géométriques suivantes : translation par $\vec{b}$, rotation d'un

2. Pour $\vec{x} = (x, y)$, $d\vec{x} := dx dy$.

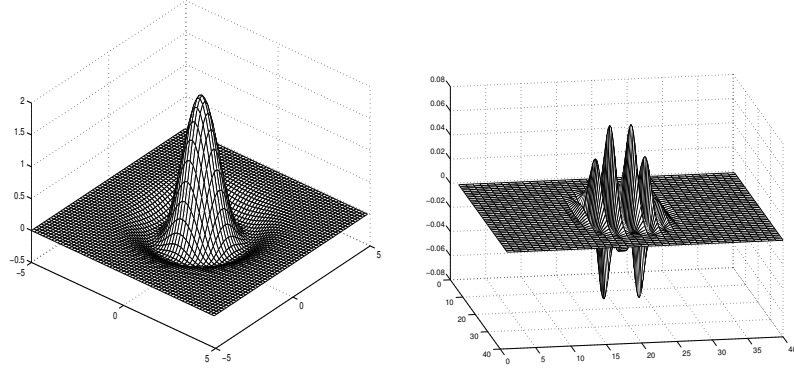


FIGURE 19 – Deux ondelettes bidimensionnelles : (à gauche) le Chapeau mexicain (ondelette de Marr); (à droite) l'ondelette de Morlet (partie réelle).

angle θ et dilatation (zoom) d'un facteur $a > 0$. L'ondelette modifiée s'écrit

$$\psi_{\vec{b},a,\theta}(\vec{x}) = a^{-1} \psi(a^{-1} r_{-\theta}(\vec{x} - \vec{b})), \quad (6.2)$$

où r_{θ} une rotation d'un angle θ , réalisée par la matrice usuelle 2×2 appartenant au groupe $SO(2)$.

La *transformée en ondelettes* est alors donnée par l'analyse de l'image à l'aide de la sonde modifiée :

$$\begin{aligned} W_{\psi} I(\vec{b}, a, \theta) &= \langle \psi_{\vec{b},a,\theta} | I \rangle \\ &= a^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi(a^{-1} r_{-\theta}(\vec{x} - \vec{b}))} I(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Deux exemples standard d'ondelettes bidimensionnelles, en fait les mêmes qu'en dimension 1, sont le Chapeau mexicain (ondelette de Marr) et l'ondelette de Morlet 2-D, présentées à la Figure 19.

6.2 Propriétés essentielles

La TO continue bidimensionnelle a exactement les mêmes propriétés que celle en dimension 1 étudiée jusqu'ici.

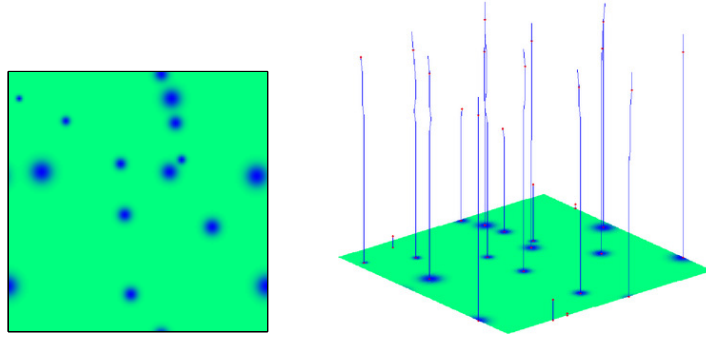


FIGURE 20 – Exemple d’arêtes en 2-D : Simulation de points brillants à la surface du Soleil (d’après [3, Sec.2.3.5]).

(1) La TO est une convolution avec une fonction oscillante de moyenne nulle, dès lors elle prend des valeurs significatives uniquement là où l’ondelette et l’image se ressemblent, ce qui signifie que la TO effectue un *filtrage* en position, en échelle et en direction.

(2) La TO est *inversible* si et seulement si l’ondelette est admissible ; on a donc une *formule de reconstruction*

$$I(\vec{x}) = c_\psi^{-1} \iiint_G \psi_{\vec{b},a,\theta}(\vec{x}) W_\psi I(\vec{b},a,\theta) d\vec{b} \frac{da}{a^3} d\theta, \\ G = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^2, a > 0, \theta \in [0, 2\pi)\}. \quad (6.4)$$

Dans ces relations, ψ admissible signifie $c_\psi < \infty$, où c_ψ est une constante analogue à (3.11).

L’interprétation de la TO est identique aussi : l’image $I(\vec{x})$ est représentée comme combinaison linéaire des ondelettes $\psi_{\vec{b},a,\theta}(\vec{x})$; autrement dit, $\{\psi_{\vec{b},a,\theta}\}$ joue le rôle de base continue.

(3) Propriétés de support en fonction de l’échelle :

- Pour $a \gg 1$, $\psi_{\vec{b},a,\theta}$ est une fenêtre large, centrée autour d’une basse fréquence : TO sensible aux basses fréquences
- Pour $a \ll 1$, $\psi_{\vec{b},a,\theta}$ est une fenêtre étroite, centrée autour d’une haute fréquence : TO sensible aux hautes fréquences

Il s’ensuit que la TO est la plus efficace aux hautes fréquences, c’est-à-dire à petite échelle, et donc, comme en dimension 1, la TO est

un *détecteur de singularités*. En particulier, la TO est efficace pour détecter les arêtes. En effet, une arête est une *ligne* de maxima locaux, c'est-à-dire un objet singulier dans une image 2-D.

(4) La TO est très *redondante*, dès lors toute l'information est contenue dans un (petit) sous-ensemble. Il y a deux possibilités :

- . Les *arêtes*, c'est-à-dire les lignes de maxima locaux, et le *squelette*, c'est-à-dire la restriction de la TO aux arêtes. La Figure 20 présente un exemple d'arêtes 2-D. Il s'agit de détecter des points brillants sur une image du Soleil (en fait, on a une simulation). Le panneau de gauche montre la région analysée, les points bleus simulent des points brillants. Dans le panneau de droite, les lignes verticales bleues sont les arêtes correspondantes [3, Sec.2.3.5].

- . La restriction à un *sous-ensemble discret*, un *réseau* : l'intégrale dans la formule de reconstruction est remplacée par une somme discrète

$$I(\vec{x}) = \sum_{mjl} \psi_{\vec{b}_m, a_j, \theta_l}(\vec{x}) W_\psi I(\vec{b}_m, a_j, \theta_l). \quad (6.5)$$

Les problèmes qui se posent sont familiers, choix du réseau de discrétisation et rapidité de la convergence du développement (6.5) : peut-on tronquer la somme après un petit nombre de termes ?

6.3 Choix de l'ondelette analysante

Un problème nouveau apparaît, celui du choix de l'ondelette analysante, car deux possibilités se présentent, selon le problème à traiter.

- . *Les ondelettes isotropes*, c'est-à-dire *invariantes par rotation*, à utiliser pour une analyse point par point, sans distinguer de détails directionnels. Un exemple typique est le Chapeau mexicain 2-D isotrope présenté à la Figure 19 (gauche).

- . *Les ondelettes directionnelles*, nécessaires pour détecter des détails directionnels (segments, arêtes, champ de vecteurs, ...). Des exemples typiques sont l'ondelette de Morlet 2-D, présentée à la Figure 19 (droite) et, plus généralement les ondelettes coniques, c'est-à-dire des ondelettes dont le support en $\vec{k}$, la fréquence spatiale, est contenu dans un cône convexe avec sommet à l'origine. La Figure 21 en donne un exemple, l'ondelette Gaussienne conique.

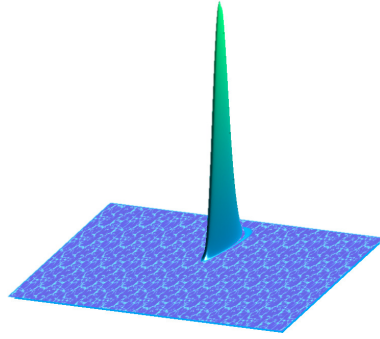


FIGURE 21 – Un exemple d’ondelette conique (d’après [3, Sec. 3.3.4]).



FIGURE 22 – Filtrage directionnel avec une ondelette conique : (a) Le signal ; (b) La TO ; (c) La TO après seuillage (d’après [4, Sec.14.3.2]).

La Figure 22 présente un exemple de filtrage directionnel avec une ondelette conique, une opération difficile pour la plupart des méthodes. Il s’agit de sélectionner tous les segments orientés horizontalement. Pour plus de clarté, on effectue un seuillage sur la TO, afin d’éliminer les traces résiduelles des autres segments.

6.4 La transformée en ondelettes discrète en dimension 2

Comme en dimension 1, une alternative à la TO continue est d’utiliser la TO discrète. Ici aussi, on exige d’emblée une *base orthonormale d’ondelettes*, et on dérive l’ondelette-mère d’une fonction d’échelle.

Le principe de base peut se traduire par la relation $2\text{-D} = 1\text{-D} \otimes$

1-D, c'est-à-dire qu'il n'y a rien de fondamentalement nouveau en passant de une à deux dimensions. On part d'une analyse multirésolution $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R}, dt)$ et on construit une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2, d\vec{x})$ par produit tensoriel $\{\mathbf{V}_j = V_j \otimes V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. Ceci entraîne qu'il faut *une* fonction d'échelle $\Phi(x, y) = \phi(x) \phi(y)$, mais *trois* ondelettes de base :

$$\begin{aligned}\Psi^h(x, y) &= \phi(x) \psi(y), \\ \Psi^v(x, y) &= \psi(x) \phi(y), \\ \Psi^d(x, y) &= \psi(x) \psi(y).\end{aligned}\tag{6.6}$$

L'ondelette Ψ^h détecte préférentiellement les détails additionnels horizontaux (c'est-à-dire les discontinuités dans la direction verticale), tandis que Ψ^v et Ψ^d détectent les détails verticaux et diagonaux, respectivement. Ce résultat se comprend aisément. Prenons la relation fondamentale (4.1) de l'analyse multirésolution 1-D pour $j = 0$, c'est-à-dire $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Passant en 2-D et utilisant la distributivité du produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= V_1 \otimes V_1 \\ &= (V_0^{(x)} \oplus W_0^{(x)}) \otimes (V_0^{(y)} \oplus W_0^{(y)}) \\ &= (V_0^{(x)} \otimes V_0^{(y)}) \oplus (V_0^{(x)} \otimes W_0^{(y)}) \\ &\quad \oplus (W_0^{(x)} \otimes V_0^{(y)}) \oplus (W_0^{(x)} \otimes W_0^{(y)}) \\ &= \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{W}_0^h \oplus \mathbf{W}_0^v \oplus \mathbf{W}_0^d \\ &= \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{W}_0.\end{aligned}$$

Choissant les fonctions de base $\phi \in V_0$ et $\psi \in W_0$, on retrouve bien la fonction d'échelle Φ et les trois ondelettes (6.6). Une telle approche est simple et naturelle, mais le choix de coordonnées cartésiennes (x, y) va mener à des difficultés en présence de courbes ou d'aspects directionnels.

D'après (6.6), le schéma typique d'une analyse d'image sera sa décomposition en approximation grossière plus les détails horizontaux, verticaux et obliques (Figure 23). Un exemple classique est présenté à la Figure 24. Le carré en haut à gauche est l'approximation de base, et de proche en proche, on trouve les détails additionnels des trois types, sur chacun des trois niveaux de résolution.

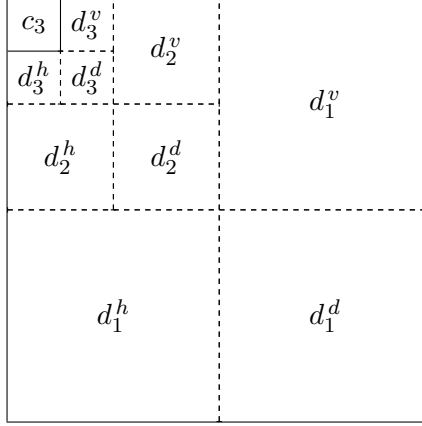


FIGURE 23 – Schéma de la décomposition sur 3 niveaux d’une image en une approximation à basse résolution, plus les détails de plus en plus fins, des trois types (h, v, d) .

Si l’on compare la TO continue et la TO discrète, on constate que les deux méthodes ont des philosophies diamétralement opposées et des propriétés différentes, elles auront donc des applications différentes. La *TO continue* est efficace pour l’analyse des images, la détection d’éléments caractéristiques (p.ex. pour les opérations de surveillance (monitoring)). Par contre, la *TO discrète* sera privilégiée pour la compression en vue de la transmission ((HD)TV, satellites) ou le débruitage.

En termes de *redondance*, la différence est cruciale aussi. La TO continue est très redondante, ce qui lui assure stabilité et résistance au bruit. La TO discrète n’est pas redondante, ce qui garantit une indépendance statistique optimale des coefficients ; elle offrira un excellent taux de compression.

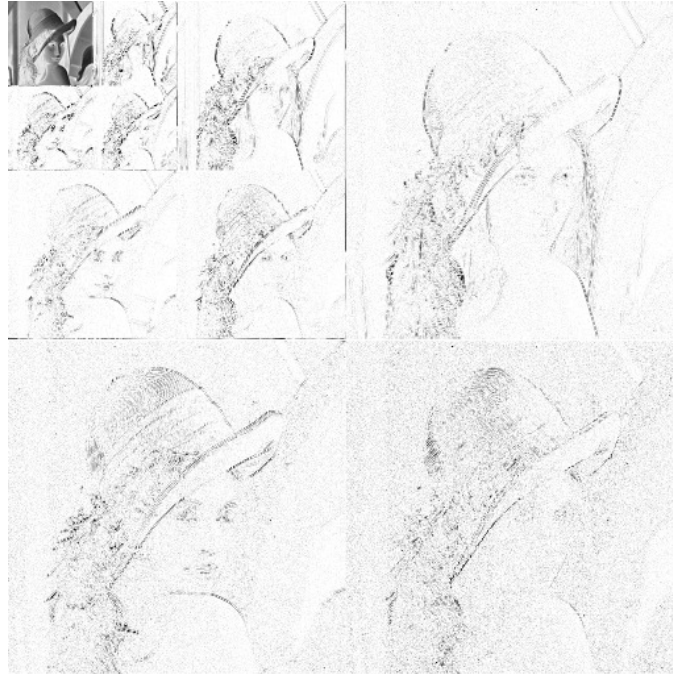


FIGURE 24 – Décomposition typique d’une image sur 3 niveaux.

7 Applications de la transformée en ondelettes en dimension 2

La TO bidimensionnelle a une multitude d’applications, dans tous les domaines, tant en traitement d’images que dans différents problèmes de physique ou d’ingénierie. Nous en citons-en quelques unes ci-dessous. On trouvera une description beaucoup plus complète dans notre ouvrage [3], ainsi que dans ceux de van den Berg [28] et de Jaffard *et al.* [19].

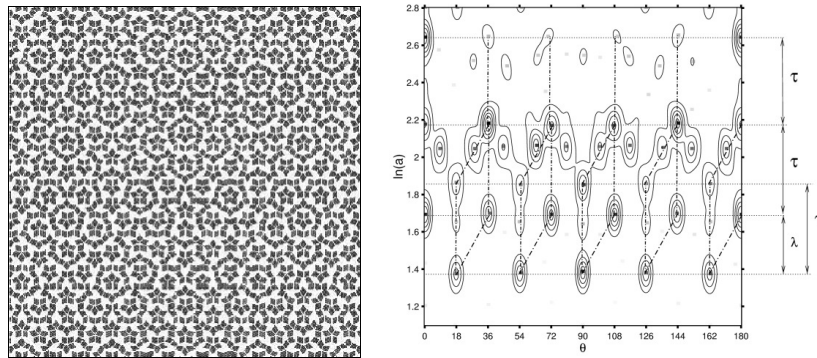


FIGURE 25 – Détection de symétries discrètes par la TO continue : (à gauche) Un pavage de Penrose ; (à droite) Le spectre échelle-angle correspondant $M[s](a, \theta)$, obtenu avec une ondelette conique. Les maxima homologues sont reliés par un trait interrompu.

7.1 Applications de la TO continue bidimensionnelle en traitement d'images

Parmi les nombreuses applications de la TO continue en traitement d'images, on peut citer :

- . *Détection de contours, reconnaissance de caractères* : détection de bord, de contours, de coins ... ; une application possible est la lecture optique.
- . *Détection et reconnaissance d'objets dans des images bruitées* : reconnaissance automatique de cibles (ATR), application à l'imagerie radar infra-rouge, basée sur la détection de détails caractéristiques tant en position qu'en échelle-angle.
- . *Récupération d'images* : reconnaissance d'une image particulière dans une grande banque de données, caractérisation d'images par des détails caractéristiques ; un exemple est la reconnaissance des empreintes digitales par le FBI.
- . *Imagerie médicale et biomédicale* : les images médicales sont souvent floues, avec peu de contraste, et requièrent de pouvoir analyser les objets à différentes échelles et de bien caractériser leur contour, si bien

que la TO continue bidimensionnelle est tout indiquée. Elle sera entre autres utilisée pour l'amélioration du contraste, la segmentation ou l'identification de la région d'intérêt. On la trouvera notamment dans l'imagerie en résonance magnétique (MRI), en mammographie et en biologie, par exemple, dans l'étude de la morphologie des cellules (p.ex. cellules sanguines : distinction entre leukocytes et erythrocytes [10]). De plus les objets d'intérêt ont en général une structure fractale, ce qui suggère le formalisme thermodynamique mentionné dans la Section 7.2.

. *Détection de symétries dans des motifs bidimensionnels* : détection de symétries d'inflation discrète (rotation + dilatation) dans les quasicristaux (mathématiques et réels) ou les ensembles quasipériodiques de points. A titre d'exemple, la Figure 25 montre l'analyse d'un pavage de Penrose à l'aide d'une ondelette conique. L'outil est le spectre échelle-angle de l'image, défini comme l'intégrale sur les translations du carré du module de la TO :

$$M[s](a, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} |S(\vec{b}, a, \theta)|^2 d\vec{b}.$$

On intègre sur toutes les positions, étant donné que le pavage n'est pas invariant par translation, même discrète. Le résultat est que ce pavage, représenté dans la panneau de gauche, possède une symétrie de rotation d'angle $\pi/5$, une symétrie sous dilatation d'un facteur $\tau = 2 \cos(\pi/5) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, le nombre d'or, et une symétrie mixte (inflation), combinant une rotation d'angle $\pi/10$ avec une dilatation d'un facteur $\lambda = 1.36$. Il en résulte que le spectre échelle-angle de ce pavage est une fonction doublement périodique en θ et $\ln a$, comme on peut le constater sur la figure.

. *Débruitage d'images* : élimination du bruit dans des images à l'aide d'ondelettes directionnelles ; un exemple a été donné à la Figure 5.

. *Tatouage d'images (watermarking)* : ajout d'une signature robuste, mais invisible, dans les images (p.ex. avec des ondelettes directionnelles).

7.2 Applications de la TO continue bidimensionnelle en physique

. *Astronomie et astrophysique* : détection de détails caractéristiques dans les images du Soleil, détection de sources gamma dans l’Univers, structure de l’Univers, analyse du rayonnement cosmique micro-ondes résiduel (CMB) et, en particulier, le caractère gaussien ou non de ses fluctuations. Ce dernier point est un sujet brûlant, et l’outil standard des astrophysiciens est la TO sphérique mentionnée ci-dessous [23].

. *Géophysique* : détection de failles en géologie, sismologie, climatologie (détection de cyclones, par exemple).

. *Dynamique des fluides* : détection de structures cohérentes dans les fluides turbulents, mesure du champ de vitesse d’un fluide, démêlage d’un train d’ondes acoustiques sous-marin.

. *Fractales et formalisme thermodynamique* : analyse de fractales bidimensionnelles par la méthode du Maximum de module (méthode WTMM), détermination de la dimension fractale, découverte de lois universelles, reconnaissance de forme et classification de motifs.

. *Analyse de textures* : classification de textures, problème de la reconnaissance de forme à partir de la texture (“Shape from texture” problem).

7.3 Applications de la TO discrète bidimensionnelle

Alors que la TO discrète en dimension 1 a de nombreuses applications en mathématiques pures (espaces fonctionnels, approximation de fonctions, bases inconditionnelles, etc), la TO discrète bidimensionnelle est principalement utilisée en traitement d’images, en particulier pour le débruitage et la compression des images en vue de leur transmission. Par exemple, le code de compression standard JPEG2000 est basé sur les ondelettes orthogonales. Il en va de même pour la compression de séquences vidéo, p.ex. avec le code MPEG4.

8 Extensions et perspectives

La TO continue se généralise sans difficulté en dimension 3, voire $n > 3$, mais peu d’applications ont été développées. Par contre, la

généralisation de la TO continue à la sphère est du plus haut intérêt. Du point de vue mathématique, il s'agit d'un bel exemple d'application de la théorie des groupes, que l'on peut ensuite court-circuiter en invoquant des arguments géométriques. L'idée est de construire la TO sur la sphère en transportant, par projection stéréographique inverse, la TO continue sur le plan tangent au Pôle Nord. Les applications de cette TO sphérique concernent la géographie, mais surtout la cosmologie, par l'étude du rayonnement fossile (Cosmic Microwave Background) [23] qui apporte de précieux renseignements sur la structure et l'histoire de l'Univers (d'où le titre de cet article...). Une extension ultérieure est la construction d'une TO sur des variétés plus générales, telles qu'un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde. Différentes applications demandent de telles ondelettes, notamment en optique (procédé d'imagerie dit 'catadioptrique').

Quant à la TO discrète, elle aussi a connu des généralisations intéressantes. On constate en effet que la TO discrète classique est bien adaptée à l'analyse de singularités ponctuelles, mais très mal à des lignes droites ou courbes, qui sont des objets unidimensionnels plongés dans un univers bidimensionnel. L'idée est alors de remplacer les ondelettes définies dans les "carrés dyadiques", de côté 2^{-j} , par des "objets" allongés, permettant une analyse plus efficace des droites ("ridgelets") et des courbes ("curvelets").

Plus ambitieuse est la théorie des "shearlets", introduite par Kutyniok et ses collaborateurs [20]. L'idée est simplement de remplacer les rotations inhérentes à la TO continue bidimensionnelle par des opérations de cisaillement. Plus précisément, on remplace la matrice de rotation $r_{-\theta}$ dans la relation (6.2) par le produit des deux matrices suivantes :

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

où la matrice A_a effectue une dilatation parabolique et la matrice S_s est une opération de cisaillement. Ceci permet d'obtenir des transformations directionnelles. Au même titre que la TO continue, cette transformation découle d'un groupe de Lie, appelé le "shearlet group". Elle peut ensuite être discrétisée, ce qui mène à une transformation qui généralise la TO discrète bidimensionnelle et qui s'avère être très puissante.

Enfin, le thème à la mode est “Au-delà des ondelettes”. On constate en effet que les ondelettes ne sont pas la panacée universelle, il y a des “atomes” (signaux élémentaires) qui sont plus adaptés, par exemple pour la description des textures. L’idée est alors d’utiliser des “dictionnaires” plus vastes, contenant aussi bien des ondelettes que d’autres atomes, et de chercher à représenter des images de la façon la plus économique possible (avec des matrices très creuses : c’est le concept de “sparsity”). Une étape suivante est de représenter simultanément des signaux de nature différente, par exemple une séquence vidéo *et* la bande audio correspondante : c’est tout le monde du multimédia qui s’ouvre.

9 Ondelettes et états cohérents

Les états cohérents sont les états quantiques les plus proches du monde classique. Entre autres, ils saturent les relations d’incertitude de Heisenberg. Introduits originellement par Schrödinger en 1926, mais rapidement oubliés, ils furent redécouverts dans les années 60 par Glauber, Klauder et Sudarshan, pour décrire l’état d’un faisceau de lumière cohérent, c’est-à-dire un laser. Ces états cohérents, dits canoniques, ont naturellement joué un rôle important en optique quantique. Un peu plus tard, Perelomov et Gilmore, indépendamment, montrèrent que les états cohérents peuvent être dérivés d’une représentation de groupe (dite de carré intégrable). Et précisément, si on prend le groupe affine de la droite $\mathbb{R}$, constitué des translations et des dilations (groupe “ $ax + b$ ”), on obtient exactement la TO continue en 1-D décrite dans la Section 3.3. De même, si on prend le groupe des similitudes du plan $\mathbb{R}^2$, formé des translations, rotations et dilatations et décrit dans l’équation (6.4), on retrouve la TO continue en bidimensionnelle, analysée dans la Section 6. Le formalisme est très général, ainsi le groupe de Weyl-Heisenberg donne la transformée de Gabor (Section 3.3), le “shearlet group” fournit les shearlets [20]. Ces états cohérents, dits covariants, peuvent à leur tour être généralisés, sans plus faire référence à une représentation de groupe. Ils constituent aujourd’hui un vaste domaine à la fois en physique et en mathématique, qui fait l’objet d’une intense activité de recherche. On trouvera une discussion exhaustive et les références aux articles originaux dans l’ou-

vrage de Gazeau [14] ou dans les nôtres [3, 4].

10 Quelques remarques historiques et bibliographiques

A l'issue de ce tour d'horizon, il n'est pas inutile de revenir sur les débuts et de décrire en quelques mots la manière dont la théorie s'est constituée. On trouvera plus de détails dans l'ouvrage [9] de Barbara Hubbard ainsi que dans l'introduction au Chapitre 2 de [18].

Au départ, en 1984, le géophysicien Jean Morlet analysait des données microsismiques dans le contexte de l'exploration pétrolière. La technique traditionnelle consiste à envoyer dans le sol de courtes impulsions (appelées 'ondelettes' par les géophysiciens) et à analyser les signaux obtenus par réflexion sur les discontinuités de densité. Ces signaux sont en général confus et difficiles à interpréter, même avec la transformée de Fourier à fenêtre (ou de Gabor) décrite brièvement dans la Section 3.3. Morlet eut alors l'idée de permuter les rôles dans la transformée : au lieu d'une fenêtre fixe contenant un nombre variable d'oscillations, il choisit un nombre fixe d'oscillations dans une fenêtre de longueur variable. Il baptisa le signal obtenu 'ondelette de forme constante'. Cette méthode fournit de bien meilleurs résultats, mais Morlet ne comprenait pas pourquoi. Sur le conseil d'un collègue, il s'adressa à un physicien de Marseille appelé Alex Grossmann. Après une année de travail conjoint, Morlet et Grossmann découvrirent la raison du succès [15, 16] : une fois de plus, la théorie des groupes expliquait le mécanisme. Celui-ci était connu dans le contexte des états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique (états 'cohérents', à la base de la description quantique du laser), décrits dans la Section 9. D'autres auteurs se joignirent au jeu, principalement Thierry Paul, Ingrid Daubechies et Yves Meyer, un analyste renommé de l'Ecole Polytechnique. Un peu plus tard, ce dernier découvrit avec Stéphane Mallat le concept de multirésolution [21], qui mit les ondelettes en contact avec le monde du traitement du signal, sous la forme de la TO discrète décrite dans la Section 4, et la théorie décolla.

Quant à la TO en dimension 2, l'histoire est quelque peu différente. Mallat fut le premier à l'envisager, sous la forme discrète (Section 6.4). En ce qui concerne la TO continue, on retrouve Alex Grossmann. Durant l'année 1987, ce dernier nous rendait visite à l'UCL, à Louvain-

la-Neuve, et nous cherchions un sujet de thèse pour un jeune étudiant rwandais nommé Romain Murenzi. Il nous vint l'idée d'essayer de réaliser en dimension 2 ce qui avait tant de succès en dimension 1, l'analyse en ondelettes. Mais comment attaquer le problème? Durant l'été, Murenzi descendit à Marseille, où se trouvait aussi Ingrid Daubechies. A son retour à LLN, il ramenait la solution. Il suffisait de partir des opérations que l'on veut appliquer à une image et de mettre en route la machinerie de la théorie des groupes découverte en dimension 1. Cette fois, il s'agissait de translations, de rotations et de dilatations, comme nous l'avons vu plus haut, et la machine fonctionne! Le résultat est non seulement la TO continue en dimension 2, mais un principe général permettant l'extension de la TO aux autres géométries décrites ci-dessus, comme indiqué dans la Section 9.

Pour terminer, donnons quelques indications bibliographiques. Pour le novice, la meilleure introduction est le petit livre de Barbara Hubbard [9]. Ensuite il y a les traités classiques de Daubechies [11], Mallat [22], Torrèsani [27], et beaucoup d'autres, tantôt à dominante mathématique, tantôt avec une approche 'ingénieur', orientée vers le traitement du signal. Plus spécifiquement pour la TO en dimension 2 et ses extensions, nous renvoyons à notre ouvrage [3]. Enfin, pour le lecteur qui désire consulter les papiers originaux, la compilation [18] est un outil incontournable.

En guise de conclusion, on peut dire que la théorie des ondelettes est un exemple particulièrement réussi de fertilisation croisée entre mathématiques, mécanique quantique (l'idée de sonde, états cohérents) et traitement du signal. Les applications concrètes en sont innombrables et extrêmement variées. A titre d'indication, il est symptomatique que le Wavelet Digest, le bulletin d'information de la communauté ondelettes, actif de 1992 à 2012, était consulté régulièrement par plus de 14.000 lecteurs! On le trouvera à l'adresse suivante : <http://www.wavelet.org/>.

Remerciements

C. Cossement, D. Roşca et D. Lambert ont bien voulu relire intégralement le manuscrit de cet article. Leurs commentaires et/ou critiques constructives ont considérablement amélioré le texte sur le plan de la rigueur, de la cohérence et de la pédagogie, je les en remercie tous

trois chaleureusement. Je remercie également deux des referees pour la même raison.

Bibliographie

1. B.P. Abbott *et al.*, Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Physical Review Letters* **116** (2016) 061102.
2. B.P. Abbott *et al.*, GW170817 : Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral, *Physical Review Letters* **119** (2017) 161101.
3. J-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S.T. Ali, *Two-dimensional Wavelets and Their Relatives*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 2004.
4. S.T. Ali, J-P. Antoine, and J-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations*, 2nd edition, Springer, New York *et al.*, 2014.
5. J-P. Antoine, L'analyse en ondelettes — De la recherche pétrolière aux reliques du Big Bang, *Revue des Questions Scientifiques* **178** (2007) 367–410.
6. A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray and J.F. Muzy, *Ondelettes, multifractales et turbulences – De l'ADN aux croissances cristallines*, Diderot, Paris, 1995.
7. A. Arnéodo, Y. d'Aubenton, E. Bacry, P. V. Graves, J.F. Muzy and C. Thermes, Wavelet based fractal analysis of DNA sequences, *Physica D* **96** (1996) 291–320.
8. I. Bartos, A new cosmic messenger, *Phys. World* **31** (2018) 23–26.
9. B. Burke Hubbard, *Ondes et ondelettes – La saga d'un outil mathématique*, Pour la Science, Belin, Paris, 1995 ; Engl. version, *The World According to Wavelets*, 2nd ed., A.K. Peters, Wellesley, MA, 1998.
10. Q. Chen, Y. Fan, L. Udupa, and V.M. Ayres, Cell classification by moments and continuous wavelet transform methods, *Int. J. Nanomedicine* **2007** Jun, 2(2), 181–189.

11. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
12. N. Delprat, B. Escudié, Ph. Guillemain, R. Kronland-Martinet, Ph. Tchamitchian and B. Torrèsani, Asymptotic wavelet and Gabor analysis : Extraction of instantaneous frequencies, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38** (1992) 644–664.
13. D. Gabor, Theory of communication, *J. Inst. Electr. Engrg.(London)* **93** (1946) 429–457.
14. J-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin, 2009.
15. A. Grossmann and J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984) 723–736.
16. A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, Integral transforms associated to square integrable representations. I. General results, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 2473–2479.
17. A. Grossmann et B. Torrèsani, article “Les ondelettes” dans l’Encyclopaedia Universalis (version 2006 ou ultérieure).
18. C. Heil and D.F. Walnut (eds.), *Fundamental Papers in Wavelet Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, and Oxford, 2006.
19. S. Jaffard, Y. Meyer, and R.D. Ryan, *Wavelets, Tools for Science & Technology*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
20. G. Kutyniok and D. Labate (eds.), *Shearlets – Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Birkhäuser, New York *et al.*, 2012.
21. S. G. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* **11** (1989) 674–693.
22. S.G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing – The Sparse Way*, 3rd ed., Academic Press, Burlington, MA, 2009.
23. D. Marinucci, D. Pietrobon, A. Baldi, P. Baldi, P. Cabella, G. Kerkyacharian, P. Natoli, D. Picard, and N. Vittorio, Spherical needlets for CMB data analysis, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **383** (2008) 539–545.

24. D. Marr, *Vision*, Freeman, San Francisco, 1982.
25. A. Suvichakorn, C. Lemke, A. Schuck Jr. and J-P. Antoine, The Continuous Wavelet Transform in MRS, Tutorial text, *Marie Curie Research Training Network FAST* (2011)
<http://www.fast-mariecurie-rtn-project.eu/#Wavelet>.
26. W. Sweldens, The lifting scheme : a custom-design construction of biorthogonal wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **3** (1996) 1186–1200 ; The lifting scheme : a construction of second generation wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, **29** (1998) 511–546.
27. B. Torrèsani, *Analyse continue par ondelettes*, Inter-  ditions/CNRS   ditions, Paris, 1995.
28. J.C. van den Berg (ed.), *Wavelets in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
29. P. Vanderghelynst, J-P. Antoine, E. Van Vyve, A. Goldberg, and I. Doghri, Modelling and simulation of an impact test using wavelets, analytical and finite element models, *International J. of Solids and Structures* **38** (2001) 5481–5508.