Une interprétation des ordres héréditaires dans les algèbres simples centrales comme les anneaux des jauges discrètes

Joachim Verstraete

Boursier de Wallonie-Bruxelles International
Chercheur postdoctoral au Laboratoire de mathématiques de Lens

Séminaire d'algèbre et de logique de Mons, 19 février 2021

Plan

1. Introduction
2. $|\cdot|$-jauges et $\mathcal{O}_{|.|}$-ordres : définitions, propriétés et exemples
3. Le dictionnaire ordres-jauges

Cadre et notations I : valeurs absolues

Corps F.

Valeur absolue non archimédienne discrète $|\cdot|$ sur F , i.e. :

$|\cdot| : F \to [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ satisfait

- $|\alpha| = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$,
- $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$,
- $|\alpha + \beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$
- $|F^\times|$ est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$, càd un sous-groupe de $\mathbb{R}$ cyclique infini.

Pour exposé, supposons char $\overline{\mathcal{O}_{|\cdot|}} = 0$.

Rem : Valeur abs. non arch. (non triviale) = valuation (de rang 1).

Cadre et notations I : valeurs absolues

Corps F.

Valeur absolue non archimédienne discrète $|\cdot|$ sur Fe, i.e. :
$|\cdot| : F \to [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ satisfait

- $|\alpha| = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$,
- $|\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|$,
- $|\alpha + \beta| \leq \max \{|\alpha|, |\beta|\}$
- $|F|$ est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$, càd un sous-groupe de $\mathbb{R}$ cyclique infini.

Pour exposé, supposons $\operatorname{char} \overline{\mathcal{O}_{|\cdot|}} = 0$.

$\mathcal{O}_{|\cdot|} = \{\alpha \in F \mid |\alpha| \leq 1\}$ sous-anneau de F

$\mathfrak{m}_{|\cdot|} = \{\alpha \in F \mid |\alpha| < 1\}$ unique idéal maximal

$\implies \overline{\mathcal{O}_{|\cdot|}} = \mathcal{O}_{|\cdot|}/\mathfrak{m}_{|\cdot|}$ corps résiduel.

$\mathbb{Q}$	corps des nombres rationnels.
t	indéterminée.
$F = \mathbb{Q}(t)$	corps des fractions rationnelles.

Valuation t-adique $|\cdot|_t$ telle que

$$\left|a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_n t^n\right|_t := e^{-k}, \qquad \text{si } a_k \neq 0$$

$$\left|\frac{f}{g}\right|_t := \frac{|f|_t}{|g|_t}, \qquad \text{si } f, g \in \mathbb{Q}[t] \setminus \{0\}\,.$$

Exemple :

$$\left|\frac{1+t}{t^3+t^{10}}\right|_t = \frac{|1+t|_t}{|t^3+t^{10}|_t} = \frac{e^{-0}}{e^{-3}} = e^3.$$

Cadre et notations II : algèbres à division

D algèbre à division (sur F), i.e. : anneau $\neq \{0\}$

- non nécessairement commutatif,
- à division (tout élément non nul est inversible),
- $F \subset D$ et $x\alpha = \alpha x$ pour tout $\alpha \in F, x \in D$,
- $\dim_F D < \infty$.

Exemple : Algèbre de quaternions à division sur un surcorps K de F.

$$K = F(y) = \mathbb{Q}(t)(y) \qquad \text{et} \qquad D = (t, 1+y)_K.$$

Cadre et notations III : algèbres semi-simples

A algèbre semi-simple sur F

$$A \simeq M_{r_1}(D_1) \times \cdots \times M_{r_n}(D_n)$$

avec D_i algèbre à division sur F.

$A_i :\simeq M_{r_i}(D_i)$ algèbre simple.

Pourquoi élargir le contexte des algèbres à division aux algèbres semi-simples ? Produits tensoriels !
L/F extension de corps de degré fini : en général

$$D \otimes_F L \simeq M_{r_1}(D_1) \times \cdots \times M_{r_n}(D_n).$$

Motivation

- *Contexte général* : étudier les jauges ;
  étendre des aspects de la théorie des valuations sur les corps aux algèbres semi-simples.

- *Pour les corps* :
  - correspondance entre les valuations et les anneaux de valuation ;
    $\rightsquigarrow$ dictionnaire : point de vue fonctionnel $\leftrightarrow$ aspects de théorie des anneaux.

- *Algèbres (semi-)simples* :
  - Diverses extensions de ces notions aux algèbres (semi)-simples ont déjà été étudiées ;
  - Un candidat pour les "valuations" : les $|\cdot|$-jauges discrètes ;
  - Un candidat pour les "anneaux de valuation" : les $\mathcal{O}_{|.|}$-ordres héréditaires ($\sim$ arithmétique non commutative) ;
  - Résultat : dictionnaire entre les jauges et les ordres héréditaires.

Référence : J.-P. Tignol and A. R. Wadsworth, *Value Functions on Simple Algebras, and Associated Graded Rings*.

Contexte : Appliquer des techniques de théorie des valuations dans un contexte non commutatif, notamment sur les algèbres à division.

Problèmes des valuations

- Peu nombreuses sur les algèbres à division,
- $$|ab| = |a|\,|b|\,.$$

  Pas de diviseurs de zéro !

Avantages jauges : notion d'extension sans défaut de $|\cdot|$ conçue pour les algèbres semi-simples (de dim. finie).
Donc bons comportements sous les produits tensoriels d'algèbres et l'extension des scalaires,...

$|\cdot|$-jauges discrètes : définition

Pour l'exposé : vision "exponentielle" — Dans la littérature : vision "logarithmique".

$\|\cdot\| : A \to [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ est $|\cdot|$-jauge (discrète) si

1. $\|\cdot\|$ est une $|\cdot|$-valuation d'espace vectoriel
   - $\|x\| = 0 \iff x = 0$
   - $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$
   - $\|x\alpha\| = \|x\||\alpha|$, pour $\alpha \in F$.
2. $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative
   - $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
   - $\|1\| = 1$.
3. $\|\cdot\|$ est sans défaut par rapport à $|\cdot|$:

$$[\mathsf{gr}(A) : \mathsf{gr}(F)] = [A : F].$$

4. La $\mathsf{gr}(F)$-algèbre graduée $\mathsf{gr}(A)$ est *graduée semisimple*.

Pour l'exposé : vision "exponentielle" — Dans la littérature : vision "logarithmique".

$\|\cdot\| : A \to [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ est $|\cdot|$-jauge (discrète) si

1. $\|\cdot\|$ est une $|\cdot|$-valuation d'espace vectoriel
   - $\|x\| = 0 \iff x = 0$
   - $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$
   - $\|x\alpha\| = \|x\||\alpha|$, pour $\alpha \in F$.
2. $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative
   - $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.
   - $\|1\| = 1$.
3. $\|\cdot\|$ est sans défaut par rapport à $|\cdot|$:

$$[\mathsf{gr}(A) : \mathsf{gr}(F)] = [A : F].$$

$\iff \exists\ e_1, \ldots, e_n$ base de A sur F et $c_1, \ldots, c_n > 0$ tels que

$$\|e_1\alpha_1 + \cdots + e_n\alpha_n\| = \max\{c_1|\alpha_1|, \ldots, c_n|\alpha_n|\}.$$

$$A_{\leq r} = \{x \in A \mid \|x\| \leq r\} \qquad A_{<r} = \{x \in A \mid \|x\| < r\}$$

$$A_r = A^{\leq r}/A^{<r} \quad \text{and} \quad \mathsf{gr}\,(A) = \bigoplus_{r \in [0,+\infty[} A_r$$

avec

$$\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = ab + A_{<\|a\|\|b\|} \in A_{\|a\|\|b\|}.$$

Théorème

Il existe toujours au moins une $|\cdot|$-jauge sur A.

Attention ! F/E extension degré fini.
$|\cdot|$-jauge $\|\cdot\|$ est $|\cdot|_{|E}$-jauge $\Leftrightarrow$ $|\cdot|$ unique extension de $|\cdot|_{|E}$ à F.

$\mathcal{O}_{\|\,.\,\|} = \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\}$ Anneau de la jauge

$\mathfrak{m}_{\|\,.\,\|} = \{x \in A \mid \|x\| < 1\}$

Exemple 1 : Supposons en plus F complet pour $|\cdot|$.

V	Espace vectoriel sur F de dimension finie.
$A = \mathrm{End}_F V$	Applications linéaires $f\colon V \to V$
$\|\cdot\|_V$	$|\cdot|$-norme non archimédienne d'espace vectoriel

- $\|x\|_V = 0 \iff x = 0$
- $\|x+y\|_V \le \max\{\|x\|_V, \|y\|_V\}$
- $\|x\alpha\|_V = \|x\|_V\,|\alpha|$, pour $\alpha \in F$.

$$\|f\|_A := \sup_{x\in V, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_V}{\|x\|_V} \qquad |\cdot|\text{- jauge discrète.}$$

Exemple 2 :

$A = M_2(F)$.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_1 = \max \left\{ \begin{pmatrix} |m_{11}| & |m_{12}| \\ & \\ |m_{21}| & |m_{22}| \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit $k > 0$.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_{2,k} = \max \left\{ \begin{pmatrix} |m_{11}| & k^{-1}|m_{12}| \\ & \\ k|m_{21}| & |m_{22}| \end{pmatrix} \right\}.$$

Exemple 3 :

$A = M_3(F)$.

Soit $k_2, k_3 > 0$.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \right\| = \max \left\{ \begin{matrix} |m_{11}| & k_2^{-1}|m_{12}| & k_3^{-1}|m_{13}| \\ \\ k_2|m_{21}| & |m_{22}| & k_2 k_3^{-1}|m_{23}| \\ \\ k_3|m_{31}| & k_3 k_2^{-1}|m_{32}| & |m_{33}| \end{matrix} \right\}.$$

Exemple 4 : Supposons K/F soit une extension de corps de degré de 2.

Supposons $|\cdot|$ a exactement deux extensions $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ à K.

$A = M_2(K)$.

$$\left\|\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\right\| = \max\begin{Bmatrix} |m_{11}|_1 & |m_{12}|_1 \\ |m_{21}|_1 & |m_{22}|_1 \end{Bmatrix}.$$

N'est PAS une $|\cdot|$-jauge :

$$\left[\mathsf{gr}_{\|\cdot\|}(A) : \mathsf{gr}_{|\cdot|}(F)\right] < [A:F]. \qquad \text{(Mais } |\cdot|_1\text{-jauge.)}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\right\| = \max\left\{\begin{matrix} |m_{11}|_1 & k^{-1}|m_{12}|_1 \\ k|m_{21}|_1 & |m_{22}|_1 \end{matrix}, \begin{matrix} |m_{11}|_2 & h^{-1}|m_{12}|_2 \\ h|m_{21}|_2 & |m_{22}|_2 \end{matrix}\right\}.$$

$|\cdot|$-jauge !

$|\cdot|$-jauges discrètes : exemples V

Exemple 5 : (ref. : Tignol & Wadsworth (2010), example 1.16)

$\mathbb{Q}$ avec valuation 3-adique $|\cdot|_3$:

$$\left|3^z \frac{p}{q}\right|_3 = e^{-z}, \qquad p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ non divisibles par 3.}$$

$D = (-1,-1)_{\mathbb{Q}}$ algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$.

- D à division,
- Pas d'extension de $|\cdot|_3$ en une valuation sur D,
- Pour $1, i, j, k$ base standard de D telle que

$$i^2 = -1 = j^2 \qquad \text{et} \qquad ij = k = -ji \qquad :$$

$$\|\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3\| = \max\{|\alpha_0|_3, |\alpha_1|_3, |\alpha_2|_3, |\alpha_3|_3\}$$

est une $|\cdot|_3$-jauge sur D (et pas une valuation).

$\mathcal{O}_{|.|}$-ordres héréditaires : définition

Référence : I. Reiner, *Maximal Orders*.

Premier aperçu : $M_2(\mathcal{O}_{|.|}) \subset M_2(F)$.

$\Lambda \subset A$ est un $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre héréditaire si

1. Λ est un sous-$\mathcal{O}_{|.|}$-module,
2. Λ est un sous-anneau (avec la même unité),
3. Λ est de type fini sur $\mathcal{O}_{|.|}$ et engendre A sur F,
4. (Hér.) tout idéal (gauche/droite) de Λ est un Λ-module projectif.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads] \\ I \arrow[ur, dashed, "\exists"] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Théorème

- *Tout $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre maximal est héréditaire.*
- *Il existe au moins un $\mathcal{O}_{|.|}$-ordre maximal dans A.*

$\operatorname{rad}\Lambda$ Radical de Jacobson

= Intersection des idéaux maximaux à gauche (/ à droite) de Λ.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{|.|} \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{|.|}$

Exemple 1 :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$$

est un $\mathcal{O}$-ordre héréditaire, mais PAS

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m}^2 \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_2(F).$$

Exemple 2 : $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m}^3 & \mathfrak{m}^2 \\ \mathfrak{m}^{-2} & \mathcal{O} & \mathfrak{m}^{-1} \\ \mathfrak{m}^{-1} & \mathfrak{m}^2 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_3(F).$

Exemple 3 : $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m}^2 & \mathfrak{m}^2 \\ \mathfrak{m}^{-1} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{m}^{-1} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \subset M_3(F).$

Théorème (Dictionnaire ordres-jauges I)

$$\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-}\textit{ordres héréditaires de } A\right\} = \left\{\textit{Anneaux des } |\cdot|\text{-}\textit{jauges sur } A\right\}$$

- $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ *est* $\mathcal{O}_{|\cdot|}$*-ordre héréditaire*

  $$\operatorname{rad}\mathcal{O}_{\|\cdot\|} = \mathfrak{m}_{\|\cdot\|}.$$

- *Pour tout* $\mathcal{O}_{|\cdot|}$*-ordre héréditaire* Λ *,*

  $$\Lambda = \mathcal{O}_{\|\cdot\|}$$

  pour une certaine $\|\cdot\|$*.*

Non unicité de la jauge : un exemple

Soit $g > 1$ tel quel $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Soit $1 < k < g$.

$A = M_2(F)$.

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathfrak{m}_{|\cdot|} \\ \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathcal{O}_{|\cdot|} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$ $\qquad$ $\mathcal{O}_{|\cdot|}$-ordre héréditaire.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_k = \max \begin{Bmatrix} |m_{11}| & |m_{12}|k \\ |m_{21}|k^{-1} & |m_{22}| \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{O}_{\|\cdot\|_k} = \Lambda$ pour tout $1 < k < g$ puisque $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

$|m_{21}|k^{-1} \leq 1 \iff |m_{21}| \leq k \iff |m_{21}| \leq 1 \qquad g^{-1} \quad k^{-1} \qquad 1 \quad k \qquad g.$

A algèbre graduée simple sur un corps gradué F.

Théorème de représentation (type Wedderburn) : $\mathsf{A} \simeq \mathsf{End}_{\mathsf{D}}\mathsf{V}$.
Notation : $\mathbb{R}_{\mathsf{D}} = \{r \in \mathbb{R} \,|\, \mathsf{D}_r \neq 0\}$.

$\nu(\mathsf{A}) = |\mathbb{R}_{\mathsf{V}} : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}|$
$\tau(\mathsf{A}) = |\mathbb{R}_{\mathsf{A}} : \mathbb{R}_{\mathsf{D}}|$.

$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \times \cdots \times \mathsf{A}_l$ algèbre graduée semisimple sur un corps gradué F.
$\nu(\mathsf{A}) = \nu(\mathsf{A}_1) + \cdots + \nu(\mathsf{A}_l)$.
$\tau(\mathsf{A}) = \tau(\mathsf{A}_1) + \cdots + \tau(\mathsf{A}_l)$.

Lemme

- $\tau(\mathsf{A}) \geq \nu(\mathsf{A})$.
- $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ $|\cdot|$-*jauges sur* A *avec* $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{O}_{\|\cdot\|_2} \implies$

$$\nu(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|_1}(A)) = \nu(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|_2}(A)).$$

$\|\cdot\|$ est une $|\cdot|$-jauge sur mesure si $\tau(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|}(A)) = \nu(\mathsf{gr}_{\|\cdot\|}(A))$.

Théorème (Dictionnaire ordres-jauges II)

1. $$\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-}ordres\ héréditaires\ de\ A\right\} = \{Anneaux\ des\ |\cdot|\text{-}jauges\ sur\ A\}$$

2. $$\left\{\mathcal{O}_{|\cdot|}\text{-}ordres\ héréditaires\ \Lambda\ de\ A\right\} \xleftrightarrow{1:1} \{\ |\cdot|\text{-}jauges\ sur\ mesure\ \mu\}$$

$$Si\ f\colon A \xrightarrow{\sim} B, \qquad alors \qquad \mu_{f(\Lambda)} = \mu_\Lambda \circ f^{-1}.$$

Jauge sur mesure : un exemple

Soit $g > 1$ tel quel $|F^\times| = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

$A = M_2(F)$.

$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathfrak{m}_{|\cdot|} \\ \mathcal{O}_{|\cdot|} & \mathcal{O}_{|\cdot|} \end{pmatrix} \subset M_2(F)$ $\qquad$ $\mathcal{O}_{|\cdot|}$-ordre héréditaire.

$$\left\| \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \right\|_{\sqrt{g}} = \max \left\{ \begin{matrix} |m_{11}| & |m_{12}|\sqrt{g} \\ |m_{21}|\sqrt{g}^{-1} & |m_{22}| \end{matrix} \right\}$$

$\|\cdot\|_{\sqrt{g}}$ est la $|\cdot|$-jauge sur mesure associée à Λ.

Se base sur : F. Bruhat & J. Tits (1984).

- Sur $M_r(D)$ quand D admet une valuation discrete $|\cdot|$
  "normes d'opérateurs" $\leftrightsquigarrow$ $\mathcal{O}_{|\cdot|_{|Z(D)}}$-ordres héréditaires.
  Correspondance "normes radiques" $\leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{|\cdot|_{|Z(D)}}$-ordres héréditaires.

Idée preuve :

(1) Lorsque F est complet et A simple centrale sur F,
jauges sur mesures = normes radiques.
Alors, comme dans ce cas : jauges = "normes d'opérateurs",
Théorème se déduit essentiellement de B.&T.

(2) Cas général : se ramener à (1) par extension des scalaires au complété de F et propriétés des jauges et ordres héréditaires.