
Métodos Clássicos em Teoria do Potencial

Augusto C. Ponce

Université catholique de Louvain

Minicurso apresentado durante a
II Escola de Equações Diferenciais

Rio de Janeiro, 23–27 de janeiro de 2006

*“[...] la physique ne nous donne pas seulement
l'occasion de résoudre des problèmes;
elle nous aide à en trouver les moyens [...].”*

(Henri Poincaré)

À minha terra natal.

Sumário

Prólogo	ix
1 Introdução	1
1.1 Histórico	1
1.2 A equação de Laplace	4
1.3 A equação de Poisson	7
1.4 A fórmula da média	14
1.5 O princípio do máximo	18
1.6 Exercícios	21
2 Os trabalhos pioneiros	25
2.1 O método de Fourier	25
2.1.1 O problema de equilíbrio térmico	26
2.1.2 O argumento de Fourier	32
2.1.3 Demonstração do Teorema 2.1	37
2.2 A função de Green	41
2.2.1 Construção da função de Green	42
2.2.2 A fórmula de Poisson	46
2.2.3 Sobre a existência da função de Green	51
2.3 Exercícios	57
3 O Princípio de Dirichlet	61
3.1 Sobre o chamado Princípio de Dirichlet	61
3.2 O Teorema da Aplicação Conforme	66

3.3	O fim do Princípio de Dirichlet	68
3.3.1	O criticismo de Weierstrass	68
3.3.2	O exemplo de Prym	70
3.3.3	O exemplo de Hadamard	74
3.4	Exercícios	77
4	Métodos alternativos de resolução	79
4.1	O processo alternante de Schwarz	79
4.2	O método da equação integral de Fredholm	86
4.3	O método de varredura de Poincaré	92
4.4	Nova crise no problema de Dirichlet	102
4.5	O método das funções sub-harmônicas de Perron	106
4.6	Exercícios	114
5	A ressurreição do Princípio de Dirichlet	117
5.1	Métodos diretos do Cálculo das Variações	118
5.2	Formulação fraca do Princípio de Dirichlet	127
5.3	O método da projeção ortogonal de Weyl	132
5.4	Soluções fracas <i>versus</i> soluções clássicas	136
5.5	Exercícios	138
	Referências Bibliográficas	143
	Notação	151
	Índice Remissivo	153

Prólogo

Há muitos anos, deparei-me com uma citação de Henri Poincaré na qual este afirmava que “o papel do educador consiste em fazer com que a criança passe novamente por onde estiveram seus antepassados, atravessando algumas etapas mais rapidamente, mas sem omitir nenhuma; a história da Ciência deve ser nosso guia.”⁽¹⁾

A proposta de Poincaré é nada convencional e raramente colocada em prática. Nos livros de Matemática em geral, a História é colocada à parte, quer como algo impuro, distante das *coisas sérias*, ou como se fosse sagrada e que não poderia ser tocada senão pelos especialistas.

Como resultado, temos a seguinte situação: de um lado estão os compêndios em História da Matemática, os quais, com algumas exceções, preocupam-se em transmitir intrigas sobre matemáticos famosos cujas obras são feitos inatingíveis e inquestionáveis, verdadeiros objetos de inspiração divina; do outro lado encontram-se os textos didáticos que se abstêm dos fatos históricos (pertinentes) envolvidos. O resultado dessa cisão é um estudante mal informado (e por que não dizer desmotivado?) sobre seu objeto de interesse.

Neste trabalho, pretendemos apresentar vários métodos de reso-

⁽¹⁾“L’éducateur doit faire repasser l’enfant par où ont passé ses pères ; plus rapidement mais sans brûler d’étape. À ce compte, l’histoire de la science doit être notre premier guide.” (H. Poincaré, [60], p.71)

lução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

seguindo a proposta de Poincaré.

É preciso deixar claro que o leitor não está diante de um trabalho em História da Matemática, a despeito do enfoque dado. A seqüência histórica é utilizada somente como um palco onde é apresentada a evolução temporal de determinados tópicos. O texto, contudo, não segue a ordem cronológica dos fatos.

Com respeito aos métodos apresentados, foi dada preferência a uma apresentação mais moderna, aproveitando os recursos que a Matemática nos proporciona atualmente. Mas em muitos casos encontram-se comentários sobre as demonstrações originais e, principalmente, sobre alguns graves erros cometidos na época. Isso visa mostrar ao leitor um período de trevas até meados do século 19, numa época em que não se tinha uma idéia muito clara dos limites da Matemática.

No primeiro capítulo, encontra-se um breve histórico sobre a equação de Laplace, bem como algumas propriedades fundamentais sobre funções harmônicas que serão utilizadas na seqüência. Após um retrospecto dos fenômenos que deram origem à equação de Laplace, apresentamos uma comparação entre esta e a equação de Poisson.

O Capítulo 2 se concentra no período anterior ao célebre Princípio de Dirichlet. O primeiro método apresentado é o de Fourier, baseado na separação de variáveis. Em seguida, passamos à construção e existência da função de Green associada a (P).

O tema central do terceiro capítulo é o Princípio de Dirichlet, cuja formulação original estava incorreta, mas mesmo assim seria utilizado por Green, Dirichlet e Riemann para garantir a existência de soluções do problema de Dirichlet. A possibilidade de solução de (P) auxiliaria Riemann na obtenção do Teorema de Representação Conforme em variáveis complexas.

O Capítulo 4 apresenta alguns métodos alternativos para a resolução de (P) surgidos a partir de 1870, logo após o fim do Princípio de Dirichlet: o processo alternante de Schwarz e os métodos da equação integral de Fredholm, de varredura de Poincaré e o das funções sub-harmônicas de Perron.

O último capítulo é dedicado ao resgate do Princípio de Dirichlet proposto independentemente por Weber, Arzelà e Hilbert no final do século 19. A idéia deles consistia em utilizar seqüências minimizantes para obter o ponto de mínimo da integral de Dirichlet

$$\mathcal{I}(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

sobre uma classe de funções admissíveis conveniente. O Capítulo 5 inicia-se com a utilização de seqüências minimizantes em $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. No entanto, esse espaço não é bem adaptado a tais problemas de minimização. Para remediar essa situação, é mais natural considerar a formulação fraca do problema de Dirichlet via espaços de Sobolev. Em seguida, passamos ao método de projeção ortogonal de Weyl. Por fim, apresentamos uma comparação entre as formulações clássica e fraca associadas a (P).

Meus agradecimentos a Djairo Guedes de Figueiredo pelo seu entusiasmo e a todos os colegas que me incentivaram durante a preparação do manuscrito. Correções e comentários serão sempre bem-vindos.

Na presente reimpressão corriji alguns erros apontados por alunos. Meus agradecimentos à generosa contribuição que eles apresentaram à monografia.

Augusto C. Ponce

e-mail: Augusto.Ponce@uclouvain.be

Louvain-la-Neuve, agosto de 2009

Lista de Figuras

2.1	Gráfico de $u(x, y)$	30
2.2	Somas parciais da série	39
2.3	O domínio Ω do exemplo	46
3.1	Elementos da família u_ε	69
3.2	O exemplo de Prym	72
3.3	O exemplo de Hadamard	75
3.4	Gráfico de f	77
4.1	Orientação de $\partial\Omega$	81
4.2	Curvas γ_1, γ_2 e σ em $\overline{\Omega}$	82
4.3	As regiões Ω_1 e Ω_2	84
4.4	Curvas de nível do potencial gravitacional u	104
4.5	Curvas de nível de u no plano x_1x_2	105

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico

A palavra potencial tem origem do latim *potentialis*, derivado de *potens*, e sua utilização no contexto da Filosofia remonta aos séculos 15 e 16, em referência a algo em estado latente mas que não possui efeito real⁽¹⁾.

Dieudonné⁽²⁾ observa que seu uso em Matemática deve ter sido influenciado pelos filósofos naturais do século 18, o que poderia explicar o fato de tanto George Green⁽³⁾ (1793-1841) (recorrendo à expressão *potential function*, em inglês) como Karl Friedrich Gauss⁽⁴⁾ (1777-1855) (*potential*, em alemão) apelarem ao mesmo termo, mas de forma totalmente independente, para se referirem às soluções da equação de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

⁽¹⁾POTENTIEL. In : P. Robert, [64], v.7, pp.645–646.

⁽²⁾J. A. Dieudonné, [16], p.35.

⁽³⁾G. Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*. In : *Papers*, pp.1-115. Apud G. D. Birkhoff, [4], pp.347–358.

⁽⁴⁾K. F. Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstoßungskräfte*. In : *Werke*, v.5, p.200 et seq. Apud O. D. Kellogg, [40], p.52.

Parece provável que tenha ocorrido tal influência, mas coube a Daniel Bernoulli (1700-1782) a primeira referência ao conceito de potencial, em sua obra *Hydrodynamica* (1738), utilizando a idéia de *vis potentialis* (energia potencial), como sendo uma quantidade a partir da qual um campo de forças poderia ser obtido.

Até meados do século 18, o termo potencial estava longe de se consolidar. Na *Encyclopédie*, a palavra francesa que mais se aproxima é *puissance* (potência) e, muito embora já viesse sendo bastante utilizada naquela época, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) reconhece que tal conceito possuía um significado um tanto confuso⁽⁵⁾.

A equação de Laplace por sua vez viria à luz somente em 1752, no trabalho *Princípios do Movimento dos Fluidos* de Leonhard Euler (1707-1783).

O objetivo de Euler era estudar o comportamento do campo de velocidades V de um líquido incompressível numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nesse caso, temos $\text{rot } V = 0$ e, sendo Ω simplesmente conexo, V é um campo gradiente; em outras palavras, existe uma função v (que viria a ser chamada potencial de velocidades por Hermann von Helmholtz (1821-1894), em 1868) tal que $V = \nabla v$. Por outro lado, sendo o líquido incompressível, o campo de velocidades está sujeito à Lei de Continuidade $\text{div } V = 0$, e, portanto, $\Delta v = 0$ em Ω . Euler limitou-se às soluções desta equação na forma polinomial, uma vez que reconheceu não ser capaz de determinar uma solução geral para ela.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) obteve resultados semelhantes em 1762⁽⁶⁾ sem que fizesse qualquer menção ao trabalho de Euler.

Mas os primeiros avanços realmente reconhecidos no campo da Teoria do Potencial estão ligados à Astronomia, que recebeu grande parte dos esforços dos matemáticos do século 18, numa busca inces-

⁽⁵⁾PUISSANCE : "[...] & plusieurs autres théorèmes semblables qui ne sont pas toujours démontrés dans la pratique avec toute la précision possible, parce qu'on y donne communément une notion un peu confuse du mot de *puissance*". (J. le R. d'Alembert) In : [15], v.13, pp.555-556.

⁽⁶⁾J. L. Lagrange, *Misc. Taur.* 2 (1760\61), publ. 1762, 196-298; *Œuvres*, v.1, pp.365-468. Apud M. Kline, [41], p.525.

sante de aprimoramento dos trabalhos de Isaac Newton (1642-1727). O objetivo era de prever e descrever o movimento de corpos celestes.

Segundo a Lei da Gravitação Universal, o campo gravitacional gerado por uma partícula de massa m no vácuo pode ser expresso por

$$F(x) = -\frac{x}{|x|^3}m \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

No caso de uma distribuição de massa numa região Ω com densidade ρ , o campo de forças resultante é

$$F(x) = - \int_{\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(y) dy \quad \forall x \notin \overline{\Omega}.$$

Em 1773, Lagrange⁽⁷⁾ constatou que, nessas condições, temos

$$F = \nabla v, \quad \text{onde} \quad v(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dy.$$

Essa observação foi de grande valia a Pierre Simon de Laplace (1749-1827), pois transformava o estudo do campo gravitacional, com três componentes, à análise de uma única função escalar. Laplace verificou que v satisfazia a equação $\Delta v = 0$ no exterior da região $\overline{\Omega}$, primeiramente em coordenadas polares⁽⁸⁾ em 1782 e, posteriormente, em coordenadas cartesianas⁽⁹⁾ em 1787. Tal equação, conforme observou Siméon Denis Poisson⁽¹⁰⁾ (1781-1840), serviu de base para belas investigações sobre a atração de esferóides.

A equação de Laplace também se mostrou presente nos fenômenos eletrostáticos e magnetostáticos no vácuo graças aos trabalhos

⁽⁷⁾J. L. Lagrange, *Mém. des sav. étrangers* 7 (1773); *Œuvres*, v.6, p.348. Apud O. D. Kellogg, loc cit.

⁽⁸⁾P. S. Laplace, “Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes”, *Mém. Acad. Sci. Paris* 1782 (1785); *Œuvres*, X, pp.339–419. Apud G. D. Birkhoff, [4], pp.336–338.

⁽⁹⁾ P. S. Laplace, “Mémoire sur la théorie de l’anneau de Saturne”, *Mém. Acad. Sci. Paris* 1787 (1789); *Œuvres*, XI, pp.273–292. Apud G. D. Birkhoff, loc cit.

⁽¹⁰⁾S. D. Poisson, “Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie de l’attraction des sphéroïdes”, *Bull. Soc. Philomath. Paris* 3 (1813), 388–392. In : G. D. Birkhoff, op cit, pp.342–346.

de Charles Augustin Coulomb (1736-1806) na década de 1780⁽¹¹⁾ e que, por sua vez, já haviam sido detectados experimentalmente por Daniel Bernoulli antes mesmo de 1760⁽¹²⁾.

Baseado em seus estudos sobre o fenômeno de condução do calor, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) submete em 1807 à Academia de Ciências de Paris um artigo intitulado “Sur la Théorie de la Chaleur”, segundo o qual a evolução da temperatura u de um corpo homogêneo deve satisfazer a equação

$$u_t = \Delta u. \quad (1.1)$$

Admitindo-se que a temperatura u de um sólido homogêneo esteja em equilíbrio, segue de (1.1) que $\Delta u = 0$, e mais uma vez obtemos a equação de Laplace.

1.2 A equação de Laplace

O fato de a equação de Laplace aparecer na formulação de modelos físicos tão diversos é, sem dúvida alguma, intrigante. Na verdade, foi necessário algum tempo para que os matemáticos do século 19 percebessem que deveria haver um conceito comum por trás disso.

A resposta encontra-se na idéia de *equilíbrio*, i.e., que podemos associar a cada um desses fenômenos uma quantidade cujo fluxo total em qualquer região seja nulo. Mais explicitamente, temos:

- Num líquido incompressível, a quantidade de matéria que penetra numa região deverá ser compensada pela saída de igual volume, para evitar uma eventual mudança de densidade do líquido.
- O campo de forças gerado por uma partícula (ou uma carga elétrica) pode ser associado por analogia aos raios luminosos

⁽¹¹⁾C. A. Coulomb, *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris* (1785), 569–577. Apud O. D. Kellogg, *op cit*, p.175.

⁽¹²⁾Cf. M. Kline, [41], p.507.

produzidos por uma fonte pontual. Nesse caso, todos os raios que incidem sobre uma região que não contenha tal ponto luminoso necessariamente irão sair dela, e o fluxo total será nulo⁽¹³⁾.

- Num sólido homogêneo em equilíbrio térmico, as trocas de calor entre as diversas partes do corpo devem se compensar, para que não ocorram variações de temperatura.

Em termos matemáticos, se considerarmos u como sendo uma grandeza física satisfazendo a condição

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0 \quad \forall \omega \subset\subset \Omega,$$

seguirá do Teorema do Divergente (Vid Equação (2.36)) que

$$\int_{\omega} \Delta u dx = \int_{\omega} \operatorname{div} \nabla u dx = \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Sendo o aberto $\omega \subset\subset \Omega$ arbitrário, devemos ter

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (1.2)$$

Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz (1.2), então diremos que u é uma *função harmônica*.

Inversamente, podemos considerar tudo o que foi visto até aqui do ponto de vista puramente matemático e associar fenômenos físicos generalizados para regiões abertas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. O potencial gerado por uma partícula em $\mathbb{R}^n$ corresponde às soluções radiais da equação $\Delta u = 0$, e que são da forma (Vid Exercício 1.1)

$$\begin{aligned} u(x) &= a \log |x| + b, & \text{se } n = 2, \\ u(x) &= a \frac{1}{|x|^{n-2}} + b, & \text{se } n > 2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Começaremos com uma noção clássica em Teoria do Potencial:

⁽¹³⁾É plausível que esta analogia possa ter auxiliado Newton a formular sua Lei da Gravitação Universal.

DEFINIÇÃO (SOLUÇÃO FUNDAMENTAL) *A solução fundamental da equação de Laplace é definida como*

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n > 2, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \quad (1.4)$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Na definição da solução fundamental as constantes a e b foram escolhidas de forma que na linguagem moderna da Teoria das Distribuições tenhamos

$$-\Delta \vartheta = \delta_0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, (Vid Exercício 1.2)

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta(x-y) \Delta \varphi(y) dy = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.5)$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto qualquer. Consideremos a seguinte

QUESTÃO Existe uma configuração de equilíbrio de temperatura sobre Ω , sabendo-se que sobre a superfície $\partial\Omega$ do condutor a temperatura é dada por f ?

Matematicamente, temos o seguinte *problema de Dirichlet*:

Determinar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde por solução consideraremos as funções que satisfazem (1.6) no sentido clássico, i.e., tais que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Caso Ω seja limitado, segue do princípio do máximo que, se existir solução para o problema acima, então ela é necessariamente única

(Vid Corolário 1.8.1). Note que essa conclusão é falsa caso Ω seja ilimitado. Com efeito, se $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ for o semi-espaço superior, então

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{-x_n} \cos x_1 \\ u_2(x) &= e^{x_n} \cos x_1 \end{aligned}$$

satisfazem a equação $\Delta u = 0$ com a mesma condição de contorno sobre $\partial\mathbb{R}_+^n$.

1.3 A equação de Poisson

A generalização imediata do potencial gravitacional gerado por uma distribuição de massa com densidade ρ num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é a seguinte:

$$u(x) = \int_{\Omega} \vartheta(x-y)\rho(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Tal função u é chamada de *potencial newtoniano* gerado pela densidade ρ .⁽¹⁴⁾

Uma análise mais atenta dessa expressão nos mostra que se $\rho \in L^\infty(\Omega)$, então u está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$; além disso, $\Delta u = 0$ se $x \notin \bar{\Omega}$ (Vid Exercício 1.3).

Nosso objetivo nessa seção será de demonstrar o seguinte⁽¹⁵⁾

TEOREMA 1.1 (HÖLDER) *Seja u dada por (1.7). Se ρ for Hölder-contínua, então u é de classe $C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega)$ e satisfaz a equação de Poisson*

$$-\Delta u = \rho \quad \text{em } \Omega.$$

Observe que se ρ for contínua, mas não Hölder-contínua, então u não é necessariamente de classe C^2 (Vid Exemplo 1.1).

⁽¹⁴⁾Embora ρ seja uma distribuição de massa, admitiremos que ρ possa assumir tanto valores negativos quanto positivos.

⁽¹⁵⁾L. O. Hölder, *Beiträge zur Potentialtheorie*, Stuttgart, 1882 (Tese). Apud O. D. Kellogg, op cit, p.152.

O fato de u não ser harmônica em Ω foi constatado por Poisson em 1813⁽¹⁶⁾. Poisson comenta que até então o potencial newtoniano (1.7) vinha sendo utilizado apenas na região exterior a Ω , razão pela qual tal fenômeno não havia sido constatado antes. O historiador Morris Kline, no entanto, argumenta que num artigo de Laplace de 1789 este assumira implicitamente que u seria harmônica inclusive nas regiões contendo matéria⁽¹⁷⁾.

O Teorema 1.1 será demonstrado com o auxílio de três lemas⁽¹⁸⁾:

LEMA 1.2 *Para todo $1 \leq i, j \leq n$:*

$$\left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x) \right| \leq C \frac{1}{|x|^{n-1}}, \quad (1.8)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \leq C \frac{1}{|x|^n}. \quad (1.9)$$

Demonstração. As estimativas acima seguem do cálculo direto das derivadas de ϑ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x) &= -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i}{|x|^n}, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{1}{n\omega_n} \frac{1}{|x|^n} \left\{ n \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|} - \delta_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

■

LEMA 1.3 *Se ρ for limitada e integrável, então $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \rho(y) dy. \quad (1.10)$$

Demonstração. Escrevendo

$$v_i(x) := \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \rho(y) dy,$$

⁽¹⁶⁾S. D. Poisson, loc cit.

⁽¹⁷⁾Cf. M. Kline, op cit, p.530.

⁽¹⁸⁾Cf. D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [33], pp.54–56.

segue da estimativa (1.8) que v está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Nosso objetivo será mostrar que $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Para tanto, vamos fixar uma função $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(t) = 0$ se $t \leq 1$, $\eta(t) = 1$ se $t \geq 2$ e $0 \leq \eta' \leq 2$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos:

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \vartheta(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \rho(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\eta_\varepsilon(x-y) := \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$.

Pela construção de η , é imediato que $u_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$v_i(x) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega \cap B_{2\varepsilon}(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \vartheta(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] \right\} \rho(y) dy.$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \left| v_i(x) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \sup_{\Omega} |\rho| \int_{B_{2\varepsilon}(0)} \left(\left| \frac{\partial \vartheta}{\partial z_i} \right| + \frac{2}{\varepsilon} |\vartheta| \right) dz \\ &\leq \sup_{\Omega} |\rho| \begin{cases} C\varepsilon(1 + |\log 2\varepsilon|) & \text{se } n = 2, \\ C\varepsilon & \text{se } n > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que u_ε e $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$ convergem uniformemente a u e v , respectivamente, em $\mathbb{R}^n$. Logo, $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. ■

Note que $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}$ não é integrável na vizinhança de $x = 0$. Assim, devemos ser cautelosos no cálculo das derivadas segundas de u . Para a demonstração de $u \in C^2(\Omega)$, utilizaremos que ρ é Hölder-contínua em Ω com expoente $0 < \alpha \leq 1$, ou seja,⁽¹⁹⁾

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

⁽¹⁹⁾Foi com essa finalidade que Ludwig Otto Hölder (1859–1937) introduziu tal condição. Cf. L. O. Hölder, op cit.

LEMA 1.4 *Se ρ for Hölder-contínua com expoente $0 < \alpha \leq 1$, então $u \in C^2(\Omega)$ e, para todo $x \in \Omega$,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = & \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) [\rho(y) - \rho(x)] dy + \\ & - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y, \quad (1.11) \end{aligned}$$

onde $\Omega_0 \supset \supset \Omega$ é um aberto limitado com bordo regular e ρ é estendida como identicamente nula em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Em particular, o membro da direita é independente da escolha de Ω_0 .

Demonstração. Por conta da estimativa (1.9) e do fato de ρ ser Hölder-contínua, a função

$$\begin{aligned} w_{ij}(x) := & \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) [\rho(y) - \rho(x)] dy + \\ & - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y \end{aligned}$$

está bem definida para todo $x \in \Omega$.

Mantendo a notação do lema anterior, definimos

$$v_{i\varepsilon}(x) := \int_{\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \rho(y) dy.$$

Dessa forma, $v_{i\varepsilon} \in C^1(\Omega)$ e, por aplicação da fórmula de integração

por partes, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x_j} &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} (x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right\} \rho(y) dy \\
 &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} (x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right\} [\rho(y) - \rho(x)] dy + \\
 &\quad - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} (x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \nu_j d\sigma_y \\
 &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} (x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right\} [\rho(y) - \rho(x)] dy + \\
 &\quad - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} (x-y) \nu_j(y) d\sigma_y,
 \end{aligned}$$

onde na última igualdade estamos supondo $2\varepsilon < d(\Omega, \partial\Omega_0)$. Assim, se $x \in \Omega_{2\varepsilon} := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$, temos

$$\begin{aligned}
 \left| w_{ij}(x) - \frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x_j}(x) \right| &= \\
 &= \left| \int_{|x-y| < 2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} (x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] \right\} [\rho(y) - \rho(x)] dy \right| \\
 &\leq C \int_{|z| < 2\varepsilon} \left\{ \left| \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z_i \partial z_j} \right| + \frac{2}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial z_i} \right| \right\} |z|^\alpha dz \leq C\varepsilon^\alpha.
 \end{aligned}$$

Sendo $\alpha > 0$, $\frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x_j}$ converge uniformemente a w_{ij} nas partes compactas de Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como pelo lema anterior $v_{i\varepsilon} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que $u \in C^2(\Omega)$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = w_{ij}$. ■

A conclusão do Lema 1.4 é *falsa* caso ρ seja somente contínua, como podemos verificar no exemplo abaixo⁽²⁰⁾:

⁽²⁰⁾Cf. B. Dacorogna, [13], p.127.

EXEMPLO 1.1 Sejam $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\rho(x) := \begin{cases} \alpha \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^2} |\log |x||^{\alpha-2} (\alpha - 1 + 4 \log |x|) & \text{se } 0 < |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$. Assim, $\rho \in C(\overline{\Omega})$, mas o potencial u gerado por ρ não é de classe C^2 . De fato, u se escreve na forma $u = v + h$ em Ω (Vid Exercício 1.4), onde $h \in C^2(\Omega)$ é harmônica e $v \notin C^2(\Omega)$ é dada por

$$v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2) |\log |x||^\alpha & \text{se } 0 < |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

■

Finalmente o resultado que queríamos:

Demonstração do Teorema 1.1. Dado $x \in \Omega$, vamos fixar $R > 0$ suficientemente grande tal que $\Omega \subset\subset B_R(x)$. Assim, tomando $\Omega_0 = B_R(x)$, pela equação (1.11) temos

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\int_{\Omega_0} \Delta_x \vartheta(x-y) [\rho(y) - \rho(x)] dy + \\ &\quad + \frac{1}{n\sigma_n R^{n-1}} \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^n \nu_i \nu_i d\sigma = \rho(x). \end{aligned}$$

Acima, utilizamos que $y \mapsto \Delta_x \vartheta(x-y) [\rho(y) - \rho(x)]$ é uma função integrável e nula exceto em $y = x$. ■

O problema de Dirichlet clássico para a equação de Poisson consiste em obter uma função $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta v = \rho & \text{em } \Omega, \\ v = f & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Como estamos supondo Ω limitado, o princípio do máximo nos garante a existência de, no máximo, uma solução. Por outro lado,

suponhamos que ρ seja Hölder-contínua. Seja $w = v - u$, onde u é o potencial newtoniano associado a ρ , e v satisfaz (1.12). Assim, w verifica

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = f - u|_{\partial\Omega} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.13)$$

Em outras palavras, o problema de Poisson resume-se a encontrar uma solução do problema de Dirichlet com condição de fronteira

$$f - u|_{\partial\Omega},$$

ou seja,

COROLÁRIO 1.4.1 *Se (1.6) admitir uma solução para toda $f \in C(\partial\Omega)$ e se ρ for Hölder-contínua, então o problema (1.12) também possui solução para toda $f \in C(\partial\Omega)$.*

A equação de Poisson foi obtida originalmente por Poisson apenas sob a hipótese de continuidade de ρ e o argumento utilizado foi o seguinte:

Suponhamos Ω homogêneo, i.e., que ρ seja constante. Utilizando uma relação demonstrada por Newton, conclui-se facilmente que o potencial gravitacional u satisfaz a equação $-\Delta u = \rho$. Caso Ω seja heterogêneo e ρ , apenas contínua, fixamos arbitrariamente um ponto $x \in \Omega$. Para toda bola $B_\varepsilon(x)$ suficientemente pequena, vemos que o potencial resultante sobre x pode ser decomposto em duas partes: a primeira, u_1 , gerada por $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$, que é harmônica, e uma segunda, u_2 , que é gerada por $B_\varepsilon(x)$. Em nosso caso, estamos interessados apenas em u_2 (pois já sabemos que $\Delta u_1 = 0$). Escolhendo ε tão pequeno quanto se queira, podemos supor, com um erro desprezível, que ρ valha $\rho(x)$ em $B_\varepsilon(x)$ e portanto, pelo caso anterior, temos $-\Delta u_2(x) = \rho(x)$. Segue das equações correspondentes para u_1 e u_2 que $-\Delta u(x) = \rho(x)$, $\forall x \in \Omega$.

O erro de Poisson está no forte apelo físico utilizado, escondendo as questões genuinamente matemáticas envolvidas⁽²¹⁾; como veremos nas próximas seções, esse tipo de argumento seria comum até meados do século 19.

1.4 A fórmula da média

Parece ter sido Gauss, num estudo sobre o potencial eletrostático, o primeiro a constatar que uma função harmônica u , definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, deve satisfazer a chamada fórmula da média⁽²²⁾:

TEOREMA 1.5 (FÓRMULA DA MÉDIA) *Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz $\Delta u = 0$ em Ω . Então,*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\sigma \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega \quad (1.14)$$

e

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, d\sigma \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega. \quad (1.15)$$

Demonstração. Para $r > 0$ suficientemente pequeno podemos definir

$$\phi(r) := \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) \, d\sigma_z. \quad (1.16)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, d\sigma_z \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + rz) \, d\sigma_z \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(x + rz) \, dz = \frac{1}{\sigma_n r^n} \int_{B_r(x)} \Delta u \, dy, \end{aligned} \quad (1.17)$$

⁽²¹⁾Segundo M. Kline (op cit, p.682), Poisson reconheceu que sua demonstração não era rigorosa; no entanto, no artigo original de Poisson não há referências a esse fato.

⁽²²⁾K. F. Gauss, "Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstoßungskräfte". In : *Werke*, V, pp.191–242 [pp.221–226]. Apud G. D. Birkhoff, op cit, pp.358–361.

onde na terceira igualdade utilizamos o Teorema do Divergente com $\vec{F} = \nabla u$. Como $\Delta u = 0$, devemos ter $\phi(r)$ constante. Por outro lado, fazendo $r \rightarrow 0$, temos $\phi(r) \rightarrow u(x)$ e, portanto, (1.14) se verifica. Pela integração de $\sigma_n r^{n-1} u(x)$ com relação a r entre 0 e R ,

$$\sigma_n \frac{R^n}{n} u(x) = \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma \, dr = \int_{B_R(x)} u \, dy,$$

de onde obtemos (1.15). ■

É curioso observar que (1.14) (ou (1.15)) caracteriza completamente as funções harmônicas. Essa recíproca do Teorema de Gauss foi demonstrada em 1906 por Paul Koebe (1882-1945) e por Maxime Bôcher (1867-1918) de forma totalmente independente⁽²³⁾; segue em particular que toda função harmônica é de classe C^∞ .

TEOREMA 1.6 (BÔCHER-KOEBE) *Se $u \in L^1(\Omega)$ satisfaz*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\sigma \quad \text{para quase toda } B_R(x) \subset\subset \Omega, \quad (1.18)$$

então $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω .

Demonstração. Seja

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy \quad \forall x \in \Omega,$$

onde $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset B_1(0)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx = 1$. Em particular, $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Dado $x \in \Omega_\varepsilon$, utilizando (1.18) teremos:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(x)} \rho_\varepsilon(r) u(z) \, d\sigma_z \, dr \\ &= \left(\int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r) \sigma_n r^{n-1} \, dr \right) u(x) = \left(\int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon \, dy \right) u(x) = u(x). \end{aligned}$$

⁽²³⁾P. Koebe, *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.* **5** (1906), 39–42; M. Bôcher, *Proc. Amer. Acad. Arts Sc.* **41** (1906). Apud O. D. Kellogg, op cit, p.226.

Logo, $u_\varepsilon = u$ q.t.p. em Ω_ε . Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, então $u \in C^\infty(\Omega)$ e (1.18) se verifica para toda bola em Ω .

Resta demonstrarmos que $\Delta u = 0$ em Ω . Caso $\Delta u(x) > 0$ para algum $x \in \Omega$ (o caso $\Delta u < 0$ é tratado de forma análoga), por (1.17) teríamos $\phi'(r) > 0$ para todo r suficientemente pequeno, contradizendo o fato de ϕ ser constante, onde ϕ é dada por (1.16) ■

Vamos apresentar uma segunda demonstração da recíproca ao Teorema de Gauss, que depende apenas da observação de que uma função contínua que satisfaz a fórmula do valor médio também deve satisfazer o princípio do máximo.

TEOREMA 1.7 *Se $u \in L^1(\Omega)$ satisfaz*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, dy \quad \text{para quase toda } B_R(x) \subset\subset \Omega,$$

então $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω .

Demonstração. Segue do Teorema da Convergência Dominada que a função

$$x \longmapsto \int_{B_R(x)} u \, dy$$

é contínua para cada $R > 0$. Logo, $u \in C(\Omega)$ e

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, dy \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega,$$

Fixada $B_R(x) \subset\subset \Omega$, seja v a única solução do problema de Dirichlet em $B_R(x)$, com condição de contorno u (a existência de v decorre da fórmula de Poisson, que será demonstrada no próximo capítulo; Vid Teorema 2.5). A função $w := v - u$ satisfaz a fórmula do valor médio em $B_R(x)$ e $w \equiv 0$ sobre $\partial B_R(x)$.

Seja M o máximo de w em $\overline{B_R(x)}$. Vamos mostrar que $M = 0$. Suponhamos por contradição que $M > 0$. Como $w = 0$ sobre $\partial B_R(x)$, então existe $y_0 \in B_R(x)$ tal que $w(y_0) = M > 0$. Seja

$$A := \{y \in \overline{B_R(x)} : w(y) = M\}.$$

Por hipótese, A é não-vazio. Além disso, A é fechado. Observemos que A também é aberto. De fato, dado $z_0 \in A$ e $r > 0$ pequeno tal que $B_r(z_0) \subset\subset B_R(x)$, então segue da fórmula da média satisfeita por w que

$$M = w(z_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(z_0)} w \, dy \leq M.$$

Conseqüentemente, $w \equiv M$ sobre $B_r(z_0)$, ou seja, $B_r(z_0) \subset A$. Assim, A é um subconjunto aberto, fechado e não-vazio de $\overline{B_R(x)}$. Por conexidade, devemos ter $A = \overline{B_R(x)}$, o que contradiz a condição de contorno $w \equiv 0$ sobre $\partial B_R(x)$. Assim concluímos que $M = 0$; em outras palavras, $w \leq 0$ em $\overline{B_R(x)}$. Utilizando um argumento análogo, $w \geq 0$ em $\overline{B_R(x)}$. Logo, $w \equiv 0$ em $B_R(x)$ e $u = v$. ■

O corolário abaixo generaliza um resultado de convergência de funções harmônicas devido a Alex Harnack⁽²⁴⁾ (1851-1888):

COROLÁRIO 1.7.1 *Seja $(u_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de funções harmônicas em Ω tal que $u_k \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Logo, $u \in C^\infty(\Omega)$ e u é harmônica.*

Demonstração. Dados $x \in \Omega$ e $B_R(x) \subset\subset \Omega$, temos

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u_k \, dx. \quad (1.19)$$

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p.}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ em (1.19), concluímos que u satisfaz a fórmula do valor médio. Pelo Teorema 1.6, $u \in C^\infty(\Omega)$ e u é harmônica. ■

⁽²⁴⁾A. Harnack, *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, Leipzig, 1887, p.66. Apud O. D. Kellogg, loc cit, p.248.

1.5 O princípio do máximo

O princípio do máximo é uma propriedade simples mas bastante útil no estudo do problema de Dirichlet, segundo a qual o máximo de uma função harmônica é atingido na fronteira do domínio; mais precisamente,

TEOREMA 1.8 (PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Dada $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmônica, então*

$$\max_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u. \quad (1.20)$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, definiremos $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$, $\forall x \in \Omega$. Nesse caso,

$$-\Delta u_\varepsilon = -\Delta u - 2n\varepsilon < 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Suponhamos por contradição que o máximo de u_ε fosse atingido num ponto $x_0 \in \Omega$. Assim, $\nabla u_\varepsilon(x_0) = 0$ e $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_k^2}(x_0) \leq 0$, se $1 \leq k \leq n$, de onde segue que $-\Delta u_\varepsilon(x_0) \geq 0$, um absurdo. Conseqüentemente,

$$\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon = \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos a identidade correspondente a u . ■

Como primeira consequência, temos o seguinte

COROLÁRIO 1.8.1 (UNICIDADE) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Dada $f \in C(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.21)$$

admite, no máximo, uma solução clássica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Sejam u_1, u_2 duas soluções de (1.21). Aplicando o princípio do máximo fraco a $u_1 - u_2$ e a $u_2 - u_1$, deduzimos que $u_1 = u_2$ em Ω , de onde segue o resultado. ■

Como veremos mais adiante, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ for um aberto limitado suave, então o problema de Dirichlet sempre admite solução; pelo corolário acima tal solução é única. Assim, a cada $f \in C(\overline{\Omega})$ existe uma única função harmônica $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $u_0 = f$ sobre $\partial\Omega$.

COROLÁRIO 1.8.2 (CONTINUIDADE) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e suave. Então, o operador*

$$S_0 : f \in C(\partial\Omega) \longmapsto u_0 \in C(\overline{\Omega})$$

é linear e contínuo.

Demonstração. A linearidade do operador S_0 é óbvia. Pelo princípio do máximo fraco aplicado a u_0 e a $-u_0$, obtemos

$$\min_{\partial\Omega} f \leq u_0(x) \leq \max_{\partial\Omega} f \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo,

$$\|u_0\|_{C(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C(\partial\Omega)},$$

de onde segue a continuidade de S_0 . ■

O próximo resultado fornece um refinamento do Teorema 1.8:

TEOREMA 1.9 (PRINCÍPIO DO MÁXIMO FORTE) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função harmônica. Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então u é constante em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Seja $A := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Assim, A é não-vazio e fechado em Ω . Dado $x \in A$, fixemos $R > 0$ tal que $B_R(x) \subset \subset \Omega$. Logo,

$$M = u(x) \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, dy \leq \frac{1}{\omega_n R^n} M \omega_n R^n = M.$$

Conseqüentemente, $u \equiv M$ sobre $B_R(x)$ e $B_R(x) \subset A$. Dessa forma, A também é aberto em Ω e, sendo este conexo, $A = \Omega$, de onde segue o resultado. ■

Motivados pelo princípio do máximo, vamos introduzir a seguinte

DEFINIÇÃO (FUNÇÃO SUB-HARMÔNICA) *Seja $v \in C(\overline{\Omega})$. Diremos que v é sub-harmônica se para toda bola $B \subset\subset \Omega$ e para toda função harmônica $h \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ tivermos*

$$v \leq h \text{ sobre } \partial B \implies v \leq h \text{ em } \overline{B}.$$

Pelo princípio do máximo toda função harmônica é sub-harmônica.

A seguinte propriedade decorre imediatamente da definição acima (Vid Exercício 1.7):

PROPOSIÇÃO 1.10 *Se v_1, v_2 são sub-harmônicas, então $\max\{v_1, v_2\}$ também é sub-harmônica.*

Na definição abaixo, vamos admitir que o problema de Dirichlet sempre tenha solução em bolas; isso será demonstrado no próximo capítulo (Vid Teorema 2.5).

DEFINIÇÃO (LEVANTAMENTO HARMÔNICO) *Dadas uma função sub-harmônica $v \in C(\Omega)$ e uma bola $B \subset\subset \Omega$, seja $\bar{v}$ a função harmônica em $\bar{B}$ tal que $\bar{v} = v$ sobre ∂B . Definimos o levantamento harmônico de v em B como sendo a função $V \in C(\Omega)$ dada por*

$$V(x) := \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus B, \\ \bar{v}(x) & \text{se } x \in \bar{B}. \end{cases}$$

O nome levantamento harmônico dado a V vem do seguinte

TEOREMA 1.11 *V é uma função sub-harmônica e $v \leq V$ em Ω .*

Demonstração. Como v é sub-harmônica, $v \leq \bar{v}$ em B ; assim, temos $v \leq V$ em Ω . Vamos verificar que V é sub-harmônica. De fato, sejam $\tilde{B} \subset\subset \Omega$ uma bola e h uma função harmônica em $\tilde{B}$ tal que $V \leq h$ sobre $\partial \tilde{B}$. Caso $\tilde{B} \cap B = \emptyset$, é claro que $V \leq h$ em $\tilde{B}$ pois $V = v$

em $\tilde{B}$ é sub-harmônica. Suponhamos então que $\tilde{B} \cap B \neq \emptyset$. Como $v \leq V \leq h$ sobre $\partial\tilde{B}$, então

$$v \leq h \quad \text{em } \tilde{B}. \quad (1.22)$$

Em particular, $\bar{v} \leq h$ sobre $\partial(\tilde{B} \cap B)$; pelo princípio do máximo,

$$\bar{v} \leq h \quad \text{em } \tilde{B} \cap B. \quad (1.23)$$

Combinando (1.22) e (1.23), concluímos que $V \leq h$ e portanto V é sub-harmônica. ■

OBSERVAÇÃO 1 De maneira análoga, podemos definir funções super-harmônicas. Propriedades similares são obtidas substituindo-se o prefixo sub por super. A construção análoga ao levantamento harmônico para funções super-harmônicas será chamada de *rebaixamento harmônico*.

1.6 Exercícios

EXERCÍCIO 1.1

1. Mostre que se u é uma função radial em $\mathbb{R}^n$, então Δu se escreve como

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r.$$

2. Mostre que as soluções radiais de $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ são dadas por (1.3).

EXERCÍCIO 1.2 Demonstre (1.5).

Sugestão: Utilize a fórmula de integração por partes a

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \vartheta(x-y) \Delta \varphi(y) dy;$$

obtenha (1.5) notando que

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \vartheta(x-y) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y) d\sigma_y \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu_y}(x-y) \varphi(y) d\sigma_y \rightarrow \varphi(x),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde ν é a normal exterior a $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)$.

EXERCÍCIO 1.3 Mostre que se $\rho \in L^\infty(\Omega)$, então u dada por (1.7) é contínua em $\mathbb{R}^n$. Verifique ainda que u é harmônica fora de $\overline{\Omega}$.

EXERCÍCIO 1.4 Verifique o Exemplo 1.1:

1. Mostre que a função v do exemplo satisfaz $-\Delta v = \rho$ em $\Omega \setminus \{0\}$; $v \in C^1(\Omega)$, mas v não é de classe C^2 em Ω .
2. Mostre que u e v satisfazem

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \rho \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Sugestão: Cf. E. Lieb e M. Loss, [51], pp.149–150.

3. Utilizando o Lema de Weyl (Vid Lema 5.13), conclua que a função $u - v$ é harmônica.

EXERCÍCIO 1.5 Sem fazer uso de funções harmônicas, prove que as propriedades (1.14) e (1.15) são equivalentes.

EXERCÍCIO 1.6 Seja $\omega \subset\subset \Omega$ fixado. Dada uma função harmônica u em Ω , mostre que

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\omega)} \leq C \|u\|_{L^1(\Omega)},$$

onde a constante $C > 0$ depende apenas de ω e n .

Sugestão: Utilize a fórmula da média.

EXERCÍCIO 1.7 Demonstre a Proposição 1.10.

EXERCÍCIO 1.8 Seja $v \in C(\Omega)$ tal que

$$v(x) \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} v \, dy \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega.$$

Mostre que v satisfaz o princípio do máximo forte; mais precisamente, se Ω é conexo e se v atinge seu máximo em Ω , então v é constante.

Sugestão: Seja M o máximo de v em Ω . Mostre que o conjunto

$$A := \{x \in \Omega : v(x) = M\}$$

é aberto e fechado em Ω .

EXERCÍCIO 1.9 Seja $v \in C(\Omega)$. Utilizando o Exercício 1.8, mostre que v é sub-harmônica se, e somente se,

$$v(x) \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} v \, dy \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega.$$

Conclua que o princípio do máximo forte permanece válido para funções sub-harmônicas. Qual é o resultado análogo para funções super-harmônicas?

EXERCÍCIO 1.10 Sejam $v, w \in C(\overline{\Omega})$.

1. Mostre que se v é sub-harmônica e $v \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, então $v \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.
2. Conclua que se v é sub-harmônica, w é super-harmônica e se $v \leq w$ sobre $\partial\Omega$, então $v \leq w$ em $\overline{\Omega}$.

EXERCÍCIO 1.11 Seja u harmônica e positiva. Mostre que u^p é sub-harmônica se $p > 1$ e super-harmônica se $0 < p < 1$.

EXERCÍCIO 1.12 Dada uma função $v \in C^2(\Omega)$, mostre que v é sub-harmônica se, e somente se, $\Delta v \geq 0$ em Ω .

Capítulo 2

Os trabalhos pioneiros

Somente no início do século 19 surgiriam os primeiros métodos de resolução do problema de Dirichlet. Mas os trabalhos de Fourier, Green e Poisson pecavam pela falta de rigor. O próprio Cálculo atravessara o século 18 sem uma definição precisa dos diferenciais de Leibniz.

Em 1807, com a publicação dos primeiros trabalhos de Fourier sobre a condução do calor e a decomposição de uma função em séries trigonométricas, a situação se tornaria insustentável. Essa data marcaria o nascimento da Análise.

2.1 O método de Fourier

O método de Fourier representa o primeiro tratamento sistemático para a resolução de equações diferenciais parciais. Embora sua aplicação esteja restrita a regiões com simetrias, tal método teve um papel inquestionável no desenvolvimento da Matemática porque foi um dos motivos que levaram os matemáticos do século 19 a construir toda uma base lógica que até então praticamente não existia. Afinal, o estudo da convergência das séries de Fourier traria à luz

um grande número de questões envolvendo conceitos fundamentais que já não podiam mais ser desprezadas.

2.1.1 O problema de equilíbrio térmico

Denotaremos por Ω uma placa infinita e homogênea de largura π no semiplano superior de $\mathbb{R}^2$, delimitada pelas retas $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, e vamos supor que a superfície desta placa esteja termicamente isolada, de maneira que não ocorram trocas de calor na superfície.

Nosso objetivo será determinar sua configuração de equilíbrio térmico, sabendo que a temperatura sobre as retas $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$ é mantida em 0, e que, sobre o segmento $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ do eixo x , a temperatura é dada por uma função f que independe do tempo (nenhuma hipótese será feita sobre o valor de f nas extremidades desse segmento).

Como foi visto na Seção 1.1, Fourier observou que a temperatura de equilíbrio u sobre a placa Ω satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

Vamos supor inicialmente que u possa ser escrita como o produto de funções $v = v(x)$ e $w = w(y)$, i.e., $u(x, y) = v(x)w(y)$. Neste caso, após substituição dessa expressão na equação de Laplace, teremos

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Ora, sendo o 1º membro função somente de x , e o 2º, apenas de y , então ambos devem ser constantes e iguais a μ . Logo, v e w satisfazem as equações

$$\begin{cases} v''(x) - \mu v(x) = 0, \\ w''(y) + \mu w(y) = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, temos $v(-\frac{\pi}{2}) = v(\frac{\pi}{2}) = 0$, correspondente às condições de contorno e, como estamos interessados em soluções não-triviais, devemos supor $\mu = -\lambda^2 < 0$, de onde segue que λ é

inteiro e

$$w(y) = e^{-\lambda y},$$

$$v(x) = \begin{cases} \cos \lambda x & \text{se } \lambda = \pm 1, \pm 3, \dots, \\ \sin \lambda x & \text{se } \lambda = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

Como já havíamos observado, trataremos apenas das soluções limitadas (o que, do ponto de vista físico, é bastante plausível). Eliminando os valores negativos de λ , teremos

$$u(x, y) = \begin{cases} e^{-\lambda y} \cos \lambda x & \text{se } \lambda = 1, 3, \dots, \\ e^{-\lambda y} \sin \lambda x & \text{se } \lambda = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Pelo Princípio de Superposição, uma combinação finita das funções acima continuará sendo solução da equação de Laplace, satisfazendo as condições de contorno nas laterais da placa. No entanto, a condição de contorno não será atendida sobre o eixo x em geral.

A idéia de Fourier foi considerar a série

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k e^{-(2k-1)y} \cos (2k-1)x + \beta_k e^{-2ky} \sin 2kx \right\} \quad (2.1)$$

e tentar determinar os coeficientes α_k e β_k de maneira que, para $y = 0$, tenhamos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \cos (2k-1)x + \beta_k \sin 2kx \right\}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \quad (2.2)$$

Vamos admitir, ao menos por enquanto, que uma função g definida num intervalo (a, b) e com *boas propriedades* sempre admita uma expansão em séries de Fourier da forma

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ a_j \cos \left(\frac{2\pi j}{b-a} x \right) + b_j \sin \left(\frac{2\pi j}{b-a} x \right) \right\}, \quad (2.3)$$

onde os coeficientes são obtidos a partir das relações de ortogonalidade entre as funções trigonométricas (Vid Equação (2.35)):

$$a_j = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \cos\left(\frac{2\pi j}{b-a}x\right) dx \quad (2.4)$$

$$b_j = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \sin\left(\frac{2\pi j}{b-a}x\right) dx. \quad (2.5)$$

O cálculo dos coeficientes de Fourier de f diretamente sobre o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ não irá nos fornecer, em geral, uma expansão da forma (2.2). Para tanto, devemos estender f convenientemente sobre $(-\pi, \pi)$ como uma função $\tilde{f}$ tal que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -f(\pi - x) & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \\ -f(-\pi - x) & \text{se } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Com essa escolha, verifica-se facilmente que a série de Fourier de $\tilde{f}$ é da forma (2.2), com

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k-1)x \, dx, \quad (2.6)$$

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2kx \, dx. \quad (2.7)$$

Espera-se então que a solução do problema posto inicialmente sobre a temperatura de equilíbrio da placa seja dada pela expressão (2.1), onde os coeficientes α_k e β_k são dados por (2.6) e (2.7), respectivamente.

Um leitor um pouco mais desatento poderia acreditar que o nosso problema está encerrado, enquanto ainda mal tocamos nas questões matemáticas envolvidas. Com efeito, uma série de perguntas necessitam ser respondidas:

1. Sob quais condições a série (2.2) converge?

2. Quando a igualdade em (2.2) ocorre, sabendo-se que a série converge?
3. Será que u dada por (2.2) é de classe C^2 e que $\Delta u = 0$ em Ω ?
4. u satisfaz as condições de contorno do problema?

Historicamente, o caso $f \equiv 1$ sobre o segmento $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é particularmente interessante pois se trata do primeiro exemplo tratado por Fourier⁽¹⁾ na sua obra *Théorie Analytique de la Chaleur*. Nesse caso, temos o seguinte

TEOREMA 2.1 *Sejam $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, +\infty)$ e*

$$u(x, y) := \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}. \quad (2.8)$$

Então, u pertence a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus (\pm\frac{\pi}{2}, 0))$ e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 1 & \text{sobre } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{0\}, \\ u = 0 & \text{sobre } \{\pm\frac{\pi}{2}\} \times [0, +\infty). \end{cases} \quad (2.9)$$

A demonstração do Teorema 2.1 será apresentada na Seção 2.1.3. Observe que os coeficientes de Fourier associados a $f \equiv 1$ dados por (2.6) e (2.7) são

$$\alpha_k = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \quad \text{e} \quad \beta_k = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Em particular, (2.2) toma a forma

$$1 = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \cdots \right\}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \quad (2.10)$$

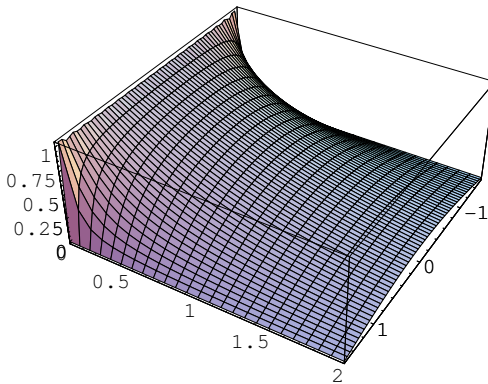


Figura 2.1: Gráfico de $u(x, y)$ dada por (2.8)

O fato de (2.10) representar uma função constante como uma série formada apenas por co-senos foi um grande golpe nas crenças (sic) dos matemáticos do início do século 19. Os ataques feitos a essa expansão em série trigonométrica foram bastante duros, principalmente porque, no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, seu valor muda bruscamente para -1 . Para a época, isso era inconcebível!

Alguns matemáticos da Academia de Ciências de Paris, destacadamente Lagrange, não podiam admitir que uma soma infinita de funções levaria a algo que na época sequer era considerado uma função. Embora não existisse ainda uma definição precisa de função até então, digamos que a mais flexível admitia por função todas as curvas capazes de ser desenhadas no papel, sem que o lápis fosse retirado da folha. Lagrange, por sua vez, acreditava que uma função estaria completamente determinada pelos seus valores em um intervalo arbitrariamente pequeno (o que corresponderia às funções analíticas). Além disso, Lagrange negava veementemente a possibilidade de que toda função pudesse ser escrita em série de senos e

⁽¹⁾J. B. J. Fourier, [28], p.141 et seq.

co-senos, como Fourier afirmara⁽²⁾.

Como os críticos à utilização das séries de Fourier não conseguiam precisar o problema dessa representação, decidiram partir ao ataque da questão de convergência global da série, além da falta de rigor no trabalho de Fourier⁽³⁾. Note que Fourier acreditava que todo o problema se restringia a mostrar que a sua série era convergente pois, pela própria construção dos coeficientes, o limite deveria corresponder ao valor desejado⁽⁴⁾.

Correspondem a esse período os primeiros trabalhos na tentativa de estabelecer os conceitos de diferencial e integral em bases mais rigorosas. Vale observar que, ao longo de todo o século 18, esse objetivo foi insistentemente perseguido, mas os resultados não foram nada animadores. Além disso, como a série (2.10) não é absolutamente convergente, teoremas de convergência bastante delicados faziam-se necessários.

No tratamento dessas questões durante as três primeiras décadas do século 19 destacaram-se, direta ou indiretamente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Henrik Niels Abel (1802-1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), Poisson e o próprio Fourier. O objetivo estava em responder se as representações de funções por meio das séries de Fourier estavam corretas.

Somente na década de 1820 surgiram os primeiros resultados favoráveis a Fourier.

⁽²⁾Vid nota (13).

⁽³⁾Aparentemente, não existe um consenso aqui. Segundo D. Bressoud ([6], p.219), essa falta de rigor se refere à maneira que Fourier utilizara para obter a equação do calor; M. Kline (op cit, p.678), por sua vez, acredita que tais críticas eram devidas à falta de rigor no trabalho de Fourier em geral. De qualquer forma, fica difícil saber o quão adequadas eram as manipulações formais adotadas por Fourier, para os padrões pré-Cauchy do início do século 19.

⁽⁴⁾A respeito da série (2.10), Fourier escreveu: “Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente ; c’est-à-dire que, en mettant au lieu de $y[x]$ un nombre quelconque et en poursuivant le calcul des coefficients, on approche de plus en plus d’une valeur fixe ; en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration que le lecteur peut supplier, [...]”. (J. B. J. Fourier, opus cit, p.156)

2.1.2 O argumento de Fourier

A obra de Fourier apresenta uma rara oportunidade para se compreender o processo de criação em Matemática. Embora Fourier pudesse ter iniciado pelas expressões integrais dos coeficientes (2.4) e (2.5), ele preferiu expor todo o raciocínio que o levou a tais representações. Tal argumento nos fornece um interessante exemplo da importância das manipulações formais de séries na época.

Vamos tratar abaixo do segundo exemplo apresentado por Fourier no seu livro *Théorie Analytique de la Chaleur* de 1822 (como já observamos, o primeiro corresponde a (2.10)).

Dada uma função ímpar e suave f , nosso objetivo será determinar os coeficientes b_k de maneira que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx, \quad 0 < x < \pi. \quad (2.11)$$

Expandindo ambos os membros da equação (2.11) em série de potências em torno de $x = 0$, obtemos o seguinte sistema linear infinito nas incógnitas b_k :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'(0) & = & 1^1 b_1 + 2^1 b_2 + 3^1 b_3 + 4^1 b_4 + \cdots, \\ 0 & = & 1^2 b_1 + 2^2 b_2 + 3^2 b_3 + 4^2 b_4 + \cdots, \\ -f'''(0) & = & 1^3 b_1 + 2^3 b_2 + 3^3 b_3 + 4^3 b_4 + \cdots, \\ 0 & = & 1^4 b_1 + 2^4 b_2 + 3^4 b_3 + 4^4 b_4 + \cdots, \\ f^v(0) & = & 1^5 b_1 + 2^5 b_2 + 3^5 b_3 + 4^5 b_4 + \cdots, \\ & \vdots & \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Aparentemente, ao expandir ambos os membros de (2.11) em série de potências, Fourier estava à procura de algo que atestasse a possibilidade de representação de f na forma (2.11). Afinal, Fourier não estava numa posição muito confortável, pois nada lhe garantia a viabilidade de uma decomposição de f em série de senos⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾Embora tanto Euler como Daniel Bernoulli já tivessem se utilizado de expansões em séries trigonométricas, é realmente difícil saber o quanto Fourier conhecia do tra-

É possível que, aos olhos de Fourier, a solução unívoca do sistema (2.12) significaria que não faltavam nem sobravam termos em (2.11).

A resolução de um sistema infinito realmente não é tarefa das mais fáceis, pois além de envolver laboriosos cálculos, leva à questão da própria convergência de cada equação. No entanto, a manipulação de somas infinitas era o menor dos problemas para a época.

A idéia de Fourier foi partir da resolução de sistemas finitos⁽⁶⁾. Para isso, ele considera apenas as n primeiras equações em (2.12), supõe $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0$, e resolve o sistema em n equações a n incógnitas. É bastante razoável que, ao aumentar n , tais soluções se aproximem dos coeficientes que devem satisfazer o sistema infinito de partida.

As expressões dos coeficientes b_k são então obtidas na forma de produtos infinitos e, após várias páginas de fatigantes manipulações algébricas, obtém-se a seguinte representação para os coeficientes em termos de uma série envolvendo todas as derivadas de f em $x = 0$:

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} \frac{k}{2} b_k = & \left\{ \frac{1}{1} \right\} f'(0) \\ & + \left\{ \frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{k^2} \right\} f'''(0) \\ & + \left\{ \frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{k^2} \frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{k^4} \right\} f^v(0) \\ & + \left\{ \frac{\pi^6}{7!} - \frac{1}{k^2} \frac{\pi^4}{5!} + \frac{1}{k^4} \frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{k^6} \right\} f^{vii}(0) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Agrupando os termos de uma mesma coluna, vemos que a j -ésima coluna corresponde à série de Taylor da $2(j-1)$ -ésima deri-

balho de seus antecessores nessa área. Num artigo de 1825, ele escreve que Lacroix o informara sobre tais trabalhos, mas não se refere quando isso ocorrera. Cf. M. Kline, opus cit, p.676.

⁽⁶⁾Este recurso foi utilizado por Fredholm, na forma de determinantes infinitos, para a resolução de equações integrais, e foi neste contexto que ele formulou a Alternativa de Fredholm. Cf. E. I. Fredholm, [29].

vada de $\frac{1}{k^{2(j-1)\pi}} f$, avaliada em $x = \pi$. Com base nessas observações, obtemos uma expressão um pouco mais simples para b_k :

$$(-1)^{k-1} \frac{k\pi}{2} b_k = f(\pi) - \frac{1}{k^2} f^{ii}(\pi) + \frac{1}{k^4} f^{iv}(\pi) - \frac{1}{k^6} f^{vi}(\pi) + \dots,$$

de onde vem a seguinte representação de f em série de Fourier:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f(\pi) - \frac{1}{k^2} f^{ii}(\pi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^4} f^{iv}(\pi) - \frac{1}{k^6} f^{vi}(\pi) + \dots \right\} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

No caso da função $f(x) = e^x - e^{-x}$, Fourier obtém explicitamente

$$\frac{\pi}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k + \frac{1}{k}} \sin kx. \quad (2.14)$$

À primeira vista, não há nenhum problema com a expressão (2.14). A função f sendo analítica, todas as etapas acima poderiam ser justificadas. No entanto, pelo cálculo direto do coeficiente de $\sin x$ em (2.13), constatamos que Fourier utiliza-se da “identidade”

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2},$$

obtida a partir da série geométrica

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \frac{1}{1 + t} \quad (2.15)$$

calculada em $t = 1$.

Aqui encontramos um dos mais básicos exemplos de utilização das chamadas séries divergentes, que se disseminaram durante o século 18 e que consistia em utilizar uma identidade fora do seu intervalo de convergência (como em (2.15) para $t = 1$). Já no século 18, a manipulação formal de somas infinitas há muito ultrapassara a capacidade de justificá-la. Como observa M. Kline⁽⁷⁾, os matemáticos

⁽⁷⁾Cf. M. Kline, [42], pp.151-152.

começaram a confiar nos símbolos mais do que na própria lógica, sustentando-se em argumentos metafísicos para explicar seus procedimentos.

Como apenas a geometria possuía uma estrutura lógica consistente, isso graças aos *Elementos*, de Euclides, as demais áreas da Matemática viviam num constante conflito sobre o que estaria correto ou não, de forma que essas discussões deslocavam-se rapidamente para questões de ordem filosófica ou até mesmo religiosa⁽⁸⁾, mas que no fundo era apenas uma forma de sustentar uma opinião pessoal sobre o assunto.

Sobre as questões envolvendo as séries divergentes, simplesmente não havia um consenso. Enquanto Euler as defendia ardorosamente contra qualquer objeção, d'Alembert não as via com bons olhos⁽⁹⁾. De qualquer maneira, suas razões não estavam estabeleci-

⁽⁸⁾A interferência de questões religiosas na Matemática constitui um capítulo à parte nessa história. A presença de Deus foi muito marcante no estabelecimento de equações matemáticas que modelassem os fenômenos físicos do universo. Na verdade, até os séculos 16 e 17, a existência de Deus já era motivo para que um modelo matemático simples, descrevendo um determinado fenômeno natural, estivesse correto, pois essa simplicidade refletia a perfeição da obra de seu Criador. Quando Newton publica sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, os modelos matemáticos propostos foram considerados corretos ainda com base nesses princípios teológicos, muito embora, logo em seguida, tenham se sustentado na comprovação experimental de suas consequências. No caso da trajetória dos corpos celestes, a Lei da Gravitação Universal garante a estabilidade do sistema formado por dois corpos. No entanto, haveria uma instabilidade no Sistema Solar devido à perturbação entre os planetas. Newton argumenta que Deus se encarregava constantemente de corrigir as órbitas, e a estabilidade estaria garantida. Aqui já observamos como Deus é colocado num papel secundário, de mero coadjuvante. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) chama então a obra de Newton de anti-cristã, pois as equações aí contidas modelam de forma tão completa os fenômenos do Universo, que a existência de Deus era na verdade desnecessária. E assim, ao entrar no século 18, os mesmos modelos matemáticos que haviam se sustentado na existência de Deus passaram a negá-la. Esse fato teve implicações profundas em toda a Ciência, que, por essa visão mecanicista do mundo, colocava uma Matemática ainda débil do ponto de vista lógico, como o grande Norte do século 18. A Idade da Razão estaria apenas começando...

⁽⁹⁾"Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements et les calculs fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très suspects". (J. R. d'Alembert, *Opusc. Mathem.*, v.5, 1768, p.35; *Mémoire*,

das em qualquer princípio lógico mas, tão-somente, na conveniência.

Mesmo quando se inicia o processo de rigorização do Cálculo, as séries divergentes já estavam tão enraizadas que Cauchy lamenta não conseguir estabelecer uma base lógica para elas⁽¹⁰⁾. Esse tipo de observação não escapa a Abel, que considera vergonhoso alguém ainda tentar formalizar o uso de tais séries⁽¹¹⁾.

Retomando a expansão de f dada por (2.13), devemos procurar uma forma mais *tratável* para os coeficientes. Para isso, definimos

$$s_k(x) = f(x) - \frac{1}{k^2} f^{ii}(x) + \frac{1}{k^4} f^{iv}(x) - \frac{1}{k^6} f^{vi}(x) + \dots$$

e, pela derivação formal de s_k , obtemos a seguinte equação:

$$s_k + \frac{1}{k^2} \frac{d^2 s_k}{dx^2} = f. \quad (2.16)$$

Portanto, s_k pode ser escrita na forma

$$s_k(x) = a \cos kx + b \sin kx + k \int_0^x f(t) \sin k(x-t) dt, \quad (2.17)$$

onde a e b são constantes (Vid Exercício 2.4).

Como $s_k(0) = 0$, devemos ter $a = 0$. Assim, tomando $x = \pi$, obtemos

$$s_k(\pi) = (-1)^{k-1} k \int_0^\pi f(t) \sin kt dt$$

e, conseqüentemente, os coeficientes b_k da série de Fourier de f são dados por

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx.$$

p.183. Apud K. Knopp, [43], p.458.)

⁽¹⁰⁾“Je me suis vu forcé d’admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures, par exemple qu’une série divergente n’a pas de somme”. (A. L. Cauchy, prefácio à *Analyse Algébrique*. Apud K. Knopp, opus cit, p.459.)

⁽¹¹⁾“Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c’est une honte qu’on ose y fonder aucune démonstration”. (Abel em carta a Michael Berndt Holmbøe, 16 de janeiro de 1826. Apud K. Knopp, loc cit.)

Impressiona o fato de se obter o resultado correto após tantos argumentos nada precisos!⁽¹²⁾

Sobre a série (2.11), Fourier observa que embora tais coeficientes tenham sido obtidos para funções de classe C^∞ , tal representação permanece válida para funções descontínuas e totalmente arbitrárias⁽¹³⁾. É realmente difícil saber qual a extensão que o comentário de Fourier assume, mas essa pretensa generalidade não deixa de ser curiosa. Para Euler, por exemplo, uma função descontínua era uma curva traçada continuamente, mas com eventuais descontinuidades na derivada. Ao que parece, Fourier tinha em mente as funções seccionalmente contínuas.

Uma vez convencido (sic) da validade da expansão (2.11), Fourier passa ao cálculo direto dos coeficientes da série por meio das relações de ortogonalidade das funções trigonométricas...

2.1.3 Demonstração do Teorema 2.1

Somente em 1821, com a publicação das *Leçons sur le calcul infinitésimal* por Cauchy, as bases rigorosas da Análise começariam a ser lançadas.

Entre 1807, quando Fourier submete seu primeiro trabalho sobre a utilização de séries trigonométricas, e 1822, quando é publicada a *Théorie Analytique de la Chaleur*, não havia ainda muitos progressos no estudo da convergência das séries de Fourier, muito embora Fourier se esforçasse em divulgar a utilidade de suas séries no estudo da condução do calor.

Poisson apresenta em 1820 uma demonstração para a convergência das séries de Fourier que estaria correta, não fosse pelo detalhe de Poisson ter assumido em determinado ponto de seu artigo que

⁽¹²⁾Um outro exemplo surpreendente desse tipo de fenômeno está na obtenção original da fórmula de Stirling por Abraham de Moivre (1667-1754) e James Stirling (1692-1770), publicada em 1730. Cf. D. Bressoud, [6], pp.294–303 e 122–123.

⁽¹³⁾“On peut étendre les mêmes conséquences à des fonctions quelconques, même à celles qui seraient discontinues et entièrement arbitraires”. (J. B. J. Fourier, opus cit, p.207)

tais séries convergiriam! Fourier também procurou apresentar uma demonstração para esse resultado. Embora não tivesse sucesso, foi capaz de mostrar qual a direção que deveria ser seguida.

Em 1826, Cauchy tratou do problema de convergência, publicando o que acreditava ser uma solução. Porém havia falhas em seu tratamento. Dentre elas, ele assumiu que, dadas duas seqüências $(a_k)_{k \geq 1}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$, tais que $\sum_k a_k$ converge e $|a_k - b_k| \rightarrow 0$, então $\sum_k b_k$ também deveria convergir. Dirichlet, no entanto, observou que, tomando $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ e $b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$, as hipóteses são atendidas, mas $\sum_k b_k$ evidentemente não converge⁽¹⁴⁾.

Finalmente, em 1829, Dirichlet publica uma primeira demonstração satisfatória para a convergência das séries de Fourier, e que teve uma versão mais detalhada em 1837⁽¹⁵⁾. O teorema era essencialmente o seguinte⁽¹⁶⁾:

TEOREMA 2.2 (DIRICHLET) *Seja $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, seccionalmente contínua e seccionalmente monótona em $(-\pi, \pi)$. Logo,*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

onde a_k e b_k são os coeficientes de Fourier de f :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad (2.18)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (2.19)$$

Uma função $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se existem pontos

$$-\pi = c_0 < c_1 < \dots < c_j = \pi$$

⁽¹⁴⁾P. G. L. Dirichlet, [17].

⁽¹⁵⁾P. G. L. Dirichlet, [18].

⁽¹⁶⁾Cf. D. Bressoud, op cit, pp.220–234; D. G. de Figueiredo, [24].

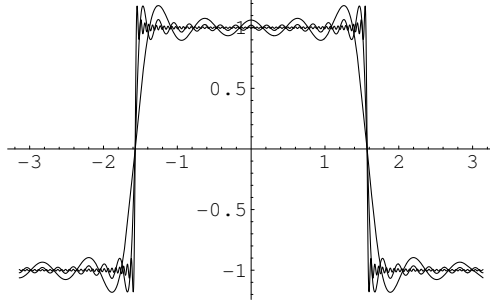


Figura 2.2: Somas parciais dos n primeiros termos de (2.10), para $n = 5, 15$ e 60

tais que f é contínua em cada intervalo aberto (c_i, c_{i+1}) e os limites laterais

$$f(c_i^+) = \lim_{x \downarrow c_i} f(x) \quad \text{e} \quad f(c_i^-) = \lim_{x \uparrow c_i} f(x)$$

existem para todo i ; f é seccionalmente monótona se f é crescente ou decrescente em cada intervalo (c_i, c_{i+1}) .

Demonstração do Teorema 2.1. Pela aplicação do Teorema 2.2 a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -1 & \text{se } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases}$$

concluimos a validade da representação

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Denotando por Ω_ε a parte da placa Ω acima da reta $y = \varepsilon$, segue de uma verificação imediata que u e todas as séries obtidas por derivações formais sucessivas de u convergem uniformemente em $\overline{\Omega}_\varepsilon$; portanto, $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$. Em particular, $\Delta u = 0$ em Ω e as condições de contorno laterais da placa são atendidas.

Resta verificar a continuidade de u numa vizinhança do segmento $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sobre o eixo x . Para isso precisaremos do seguinte resultado

demonstrado por Abel em 1826 num estudo sobre a convergência da série de Taylor⁽¹⁷⁾:

LEMA 2.3 (ABEL) *Sejam $(c_k)_{k \geq 1}$ e $(v_k)_{k \geq 1}$ duas seqüências em $\mathbb{R}$. Suponha que*

$$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots \geq 0$$

e que exista uma constante $M > 0$ satisfazendo

$$\left| \sum_{k=1}^n v_k \right| \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

Logo,

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k v_k \right| \leq c_1 M \quad \forall n \geq 1.$$

Demonstração. Definindo $s_k := \sum_{k=1}^n v_k$, teremos

$$v_1 = s_1, \quad v_2 = s_2 - s_1, \quad v_3 = s_3 - s_2, \quad \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k v_k &= c_1 s_1 + c_2 (s_2 - s_1) + \dots + c_n (s_n - s_{n-1}) \\ &= (c_1 - c_2) s_1 + (c_2 - c_3) s_2 + \dots + (c_{n-1} - c_n) s_{n-1} + c_n s_n. \end{aligned}$$

Como c_n e os termos entre parêntesis são positivos, o resultado segue imediatamente da estimativa uniforme para $|s_k|$. ■

Vamos aplicar o lema acima com

$$c_k(y) := \frac{1}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \quad \text{e} \quad v_k(x) := (-1)^{k-1} \cos(2k-1)x.$$

Como (Vid Exercício 2.1)

$$\left| \sum_{k=m}^n v_k(x) \right| \leq \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{se } m \leq n, \quad (2.20)$$

⁽¹⁷⁾H. N. Abel, *Œuvres*, I, pp.219–250. Apud G. D. Birkhoff, op cit, pp.68–70.

tais somas permanecem uniformemente limitadas sobre o intervalo $(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta)$. Seja Ω^δ os pontos da placa Ω a uma distância δ de suas laterais, i.e., das retas $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Se $(x, y) \in \overline{\Omega}^\delta$, então pelo Lema 2.3 temos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{2m-1} \sec\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

se $m \leq n$. Dessa forma, a série em (2.8) converge uniformemente em $\overline{\Omega}^\delta$, para todo $\delta > 0$. Em particular, $u(x, y) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y \rightarrow 0$. ■

O leitor interessado encontrará outros resultados sobre as séries de Fourier na bibliografia sobre o assunto⁽¹⁸⁾.

2.2 A função de Green

Em 1828, Green publicou um pequeno livro intitulado *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*, no qual apresentou suas três identidades, obtidas a partir do Teorema do Divergente, e construiu a função de Green para regiões limitadas. Seu objetivo era estudar a relação entre a densidade superficial de cargas sobre $\partial\Omega$ e o potencial eletrostático resultante.

Nesse livro, Green apresenta uma suposta demonstração de existência de soluções do problema de Dirichlet para a equação de Laplace. No entanto, em vista do isolamento que a Matemática inglesa já vinha enfrentando havia mais de um século (por conta das diferentes posturas adotadas no desenvolvimento de conceitos fundamentais do Cálculo⁽¹⁹⁾), esse trabalho de Green permaneceria incó-

⁽¹⁸⁾Cf. G. D. Birkhoff, op cit; D. G. de Figueiredo, [24]; M. Kline, op cit.

⁽¹⁹⁾Enquanto na Inglaterra buscava-se construir um Cálculo baseado nas idéias geométricas e físicas de Newton, apelando para velocidades instantâneas, na parte continental da Europa desenvolviam-se os diferenciais, i.e., as quantidades infinita-

gnito à Europa continental por um longo tempo⁽²⁰⁾.

2.2.1 Construção da função de Green

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e suave, o seguinte teorema se verifica (Vid Exercício 2.5):

TEOREMA 2.4 (IDENTIDADES DE GREEN) *Se $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma, \quad (2.21)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma \quad (2.22)$$

e

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\vartheta(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}(y-x) u(y) \right) d\sigma_y - \int_{\Omega} \vartheta(y-x) \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.23)$$

A segunda identidade de Green foi obtida independentemente, também em 1828, pelo matemático russo Mikhail Vassilievich Ostrogradski⁽²¹⁾ (1801-1861).

A terceira identidade de Green merece uma atenção especial por fornecer uma representação para u em termos de integrais. Fisicamente, (2.23) significa que toda função suave u pode ser expressa como a combinação de três potenciais, a saber:

mente pequenas de Leibniz. Embora nenhuma dessas vertentes conseguisse estabelecer uma base lógica para seus conceitos, o uso dos diferenciais era bem mais flexível, levando a todo um aparato de manipulações algébricas formais que seriam largamente utilizadas no século 18.

⁽²⁰⁾E ficou praticamente esquecido até que Sir William Thompson (1824-1907), futuro Lorde Kelvin, intercedesse para que fosse publicado no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. Cf. G. Green, *J. Reine Angew. Math.* **39** (1850), 73–79; **44** (1852), 356–374; **47** (1854), 161–221. Apud M. Kline, op cit, p.683.

⁽²¹⁾M. V. Ostrogradski, *Mém. Akad. Sci. St. Peters.* (6) **1** (1831), 39–53. Apud M. Kline, loc cit.

- $u_1(x) = \int_{\partial\Omega} \vartheta(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma_y$, correspondendo ao potencial eletrostático gerado por uma distribuição superficial de cargas sobre $\partial\Omega$ com densidade $\frac{\partial u}{\partial \nu}$;
- $u_2(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu_y}(y-x) u(y) d\sigma_y$, o potencial de camada dupla de densidade u sobre $\partial\Omega$;
- $u_3(x) = - \int_{\Omega} \vartheta(y-x) \Delta u(y) dy$, o potencial elétrico gerado por uma distribuição volumétrica de cargas, com densidade $-\Delta u$ em Ω .

A função de Green visa obter uma representação integral da solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.24)$$

em termos apenas de f .

Antes de introduzir a função de Green, vamos apresentar a motivação baseada no Teorema 2.4. Dado $x \in \Omega$, seja ϕ_x seja uma função harmônica em Ω a ser determinada. Pela segunda identidade de Green, aplicada com $v := \phi_x$,

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(\phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y + \int_{\Omega} \phi_x(y) \Delta u(y) dy.$$

Subtraindo essa expressão de (2.23), temos

$$\begin{aligned} u(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\vartheta(y-x) - \phi_x(y) \right] \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) + \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}(y-x) - \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu_y}(y) \right] u(y) \right\} d\sigma_y + \\ - \int_{\Omega} \left\{ \vartheta(y-x) - \phi_x(y) \right\} \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nosso interesse é de eliminar o termo $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ dessa representação integral. Para isso, devemos escolher ϕ_x harmônica tal que $\phi_x(y) = \vartheta(y - x)$, $\forall y \in \partial\Omega$. Com base nestas observações, definimos:

DEFINIÇÃO (FUNÇÃO DE GREEN) *A função de Green associada ao problema de Dirichlet para a equação de Laplace em Ω será dada por*

$$G(x, y) := \vartheta(y - x) - \phi_x(y) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in \overline{\Omega},$$

onde ϑ é a solução fundamental de $-\Delta$ em $\mathbb{R}^n$ e $\phi_x(y)$, a parte regular da função de Green, satisfaz para cada $x \in \Omega$ o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y \phi_x = 0 & \text{em } \Omega, \\ \phi_x(y) = \vartheta(y - x) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.26)$$

OBSERVAÇÃO 2 Pelo princípio do máximo, é fácil verificar que

$$G(x, y) \geq 0.$$

Além disso, pode ser demonstrado utilizando a segunda identidade de Green que G é simétrica, i.e., $G(x, y) = G(y, x)$, a despeito da definição totalmente assimétrica da parte regular da função de Green (Vid Exercício 2.6).

Utilizando a função de Green, podemos reescrever (2.25) como

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega.$$

Em particular, se u for harmônica em Ω , então teremos a seguinte representação integral para u :

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.27)$$

a qual depende apenas dos valores de u sobre $\partial\Omega$.

Em vista de (2.27), a resolução do problema de Dirichlet reduz-se à determinação da função de Green associada a Ω . No entanto, isso significa encontrar sua parte regular satisfazendo (2.26). A fórmula (2.27) foi obtida de maneira formal; de fato, duas questões básicas precisam ser respondidas:

1. A função ϕ_x existe para todo $x \in \Omega$?
2. Qual é a regularidade da função de Green G ?

A obtenção explícita da função de Green pode ser feita apenas para domínios extremamente particulares, como por exemplo o semi-espaço ou a bola em $\mathbb{R}^n$. Como aplicação das técnicas ilustradas aqui, na próxima seção iremos demonstrar a existência de soluções para o problema de Dirichlet sobre $B_R(0)$. Em seguida, trataremos da existência da função de Green para regiões mais gerais, como uma bela aplicação do Teorema de Hahn-Banach.

Por outro lado, o fato de a parte regular da função de Green não ser necessariamente de classe C^1 passou despercebido até o final do século 19. Em 1890, por exemplo, Poincaré ainda não parecia se deter muito nessa questão de regularidade, pois ao resolver um caso particular do problema de Dirichlet (sobre a existência de um potencial condutor para Ω), ele observa que o caso geral poderia ser obtido por meio da função de Green⁽²²⁾.

Tal problema somente seria resolvido por Alexander Liapounoff⁽²³⁾ (1857-1918) em 1898, garantindo a possibilidade de extensão contínua das derivadas de ϕ_x sobre $\bar{\Omega}$, desde que Ω seja suficientemente regular⁽²⁴⁾.

Note que para abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbitrários, a função ϕ_x pode não pertencer a $C^1(\bar{\Omega})$ como podemos observar no exemplo seguinte⁽²⁵⁾:

EXEMPLO 2.1 Consideremos a região em forma de L dada por $\Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1)^2$ (Vid Figura 2.3). Parametrizando-a em coordenadas polares, segue que a função $u(r, \varphi) := r^{2/3} \sin\left(\frac{2\varphi - \pi}{3}\right)$ é harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$; além disso, $u|_{\partial\Omega}$ é suave. Como veremos no Capítulo 4, o problema de Dirichlet sempre irá admitir solução em Ω ; no entanto, $u \notin C^1(\bar{\Omega})$. ■

⁽²²⁾“C’est un cas particulier du problème de Dirichlet, mais on connaît un moyen (par les fonctions de Green) de ramener le cas général à ce cas particulier”. (H. Poincaré, [57], p.29)

⁽²³⁾Cf. A. Liapounoff, [50].

⁽²⁴⁾Cf. G. B. Folland, [25], pp.263–265.

⁽²⁵⁾Cf. W. Hackbusch, [35], pp.13–14.

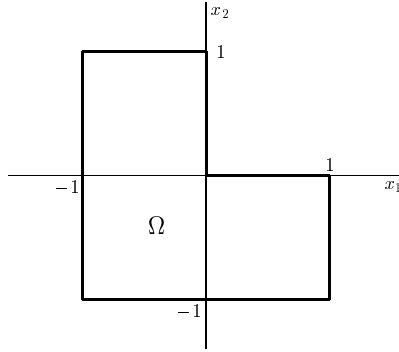


Figura 2.3: O domínio Ω do Exemplo 2.1

2.2.2 A fórmula de Poisson

Nosso objetivo será obter uma fórmula explícita para as soluções do problema de Dirichlet sobre $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, partindo da construção da função de Green associada a $B_R(0)$. Nesse caso particular, seremos capazes de verificar diretamente que a expressão (2.27) realmente resolve nosso problema no sentido clássico, para toda $f \in C(\partial B_R(0))$.

Nessa seção, vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA 2.5 (FÓRMULA DE POISSON) *Para toda $f \in C(\partial B_R(0))$, a solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_R(0), \\ u = f & \text{sobre } \partial B_R(0), \end{cases}$$

é dada por

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(y)}{|y - x|^n} d\sigma_y \quad \forall x \in B_R(0). \quad (2.28)$$

A fórmula de Poisson foi obtida por Poisson em 1820⁽²⁶⁾. Além de garantir a existência do problema de Dirichlet em $B_R(0)$ por meio

⁽²⁶⁾S. D. Poisson, [62].

de uma fórmula explícita, essa expressão permite obter estimativas de crescimento de funções harmônicas por meio da desigualdade de Harnack⁽²⁷⁾:

PROPOSIÇÃO 2.6 (DESIGUALDADE DE HARNACK) *Seja u uma função harmônica e não-negativa em $\overline{B_R(0)}$. Logo,*

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0),$$

para todo $x \in B_R(0)$. Em particular,

$$\sup_{x \in B_{\frac{R}{2}}(0)} u(x) \leq C_n \inf_{x \in B_{\frac{R}{2}}(0)} u(x).$$

Demonstração. A proposição segue da estimativa do núcleo da fórmula de Poisson a partir da desigualdade triangular

$$R - |x| \leq |y - x| \leq R + |x| \quad \forall x \in B_R(0) \quad \forall y \in \partial B_R(0),$$

e do valor de u calculado em $x = 0$, utilizando a fórmula de Poisson⁽²⁸⁾:

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(0)} u \, d\sigma.$$

■

Para a obtenção da parte regular da função de Green associada a $B_R(0)$, utilizaremos um princípio de reflexão de cargas eletrostáticas: dada uma carga pontual numa região Ω , devemos determinar a posição de outra carga, no exterior de Ω , gerando o mesmo potencial sobre $\partial\Omega$. Esse potencial será a função procurada.

DEFINIÇÃO Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, vamos definir a reflexão de x com respeito a $\partial B_R(0)$ como sendo o ponto x' , na direção positiva de x , tal

⁽²⁷⁾A. Harnack, *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, Leipzig, 1887, p.62. Apud O. D. Kellogg, op cit, p.262.

⁽²⁸⁾Essa é a fórmula da média que foi vista na Seção 1.4.

que $|x||x'| = R^2$; matematicamente, podemos escrever $x' := \frac{R^2}{|x|^2}x$. Em particular, $(x')' = x$.

O ponto x' possui uma propriedade geométrica bastante elementar, mas que será de grande utilidade:

PROPOSIÇÃO 2.7 *Se $x \notin \partial B_R(0)$ e $x \neq 0$, então*

$$\frac{|y - x|}{|y - x'|} = \frac{|x|}{R} \quad \forall y \in \partial B_R(0).$$

Por outro lado, se $y \notin B_R(0)$, então

$$\begin{aligned} \frac{|y - x|}{|y - x'|} &\geq \frac{|x|}{R} \quad \forall x \in B_R(0), x \neq 0, \\ \frac{|y - x|}{|y - x'|} &\leq \frac{|x|}{R} \quad \forall x \notin B_R(0). \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração desses fatos é elementar e segue da expressão

$$\frac{|y - x|^2}{|y - x'|^2} = \frac{|y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{|y|^2 - 2\frac{R^2}{|x|^2}\langle y, x \rangle + \frac{R^4}{|x|^2}} = \frac{|x|^2}{R^2} \cdot \frac{|y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 - 2\langle y, x \rangle + R^2}.$$

Se $y \in \partial B_R(0)$, então obtemos a primeira identidade. As outras duas relações são consequência direta de

$$\left(|y|^2 + |x|^2\right) - \left(\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 + R^2\right) = \left(|y|^2 - R^2\right)\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right).$$

■

Com base na proposição acima e na dependência radial da solução fundamental ϑ , concluímos que

$$\vartheta(y - x) = \vartheta\left(\frac{|x|}{R}(y - x')\right) \quad \forall y \in \partial B_R(0), \quad \forall x \in B_R(0), x \neq 0.$$

Além disso, como $x' \notin B_R(0)$, se $x \in B_R(0)$, então a parte regular da função de Green deverá ser dada por (Vid Exercício 2.10)

$$\phi_x(y) = \begin{cases} \vartheta \left(\frac{|x|}{R} (y - x') \right) & \text{se } x \in B_R(0), x \neq 0, \\ \vartheta(y) & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Demonstração do Teorema 2.5. Utilizando a expressão de $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$ e a proposição anterior, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) = -\frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \frac{1}{|y - x|^n}. \quad (2.30)$$

Por verificação direta (ou utilizando a simetria da função de Green), conclui-se que u é harmônica em $B_R(0)$, de forma que o ponto delicado da demonstração está na constatação de que u assume o valor de contorno desejado, em outras palavras, resta-nos demonstrar que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \partial B_R(0).$$

Para isso, utilizaremos o lema seguinte, o qual é consequência imediata da identidade (2.27) aplicada a $u \equiv 1$:

LEMA 2.8

$$\frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|y - x|^n} d\sigma_y = 1 \quad \forall x \in B_R(0).$$

Pela continuidade de f , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|y - x_0| < \delta$ implica $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Com essa notação e pelo Lema 2.8,

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 u(x) - f(x_0) &= \\
 &= \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|y - x|^n} [f(y) - f(x_0)] d\sigma_y \\
 &= \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \left\{ \int_{\partial B_R(0) \cap B_\delta(x_0)} \frac{1}{|y - x|^n} [f(y) - f(x_0)] d\sigma_y + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial B_R(0) \setminus B_\delta(x_0)} \frac{1}{|y - x|^n} [f(y) - f(x_0)] d\sigma_y \right\} \\
 &=: A + B.
 \end{aligned}$$

Seja $\ell > 0$ tal que

$$d(y, B_{\delta/2}(x_0)) > \ell \quad \forall y \in \partial B_R(0) \setminus B_\delta(x_0).$$

Logo, se $x \in B_{\delta/2}(x_0)$, então segue da continuidade de f e do Lema 2.8 que

$$\begin{aligned}
 |A| &< \varepsilon \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{d\sigma_y}{|y - x|^n} = \varepsilon, \\
 |B| &< \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \cdot \sigma_n R^{n-1} \cdot \frac{1}{\ell^n} \cdot 2\|f\|_{L^\infty} \\
 &= \frac{2\|f\|_{L^\infty} R^{n-2}}{\ell^n} (R^2 - |x|^2) \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

quando $x \rightarrow x_0$. Conseqüentemente,

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_R(0)}} |u(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \partial B_R(0)$$

Portanto, a função u dada por (2.28) satisfaz o problema de Dirichlet para a equação de Laplace, com condição de contorno f . ■

2.2.3 Sobre a existência da função de Green

O fato de a função de Green não ter sido explorada de forma mais sistemática durante o século 19 se deve em grande parte, como já observamos, ao desconhecimento do trabalho de Green na Europa continental. De qualquer forma, a resolução do problema particular

$$\begin{cases} \Delta_y \phi_x = 0 & \text{em } \Omega, \\ \phi_x(y) = \vartheta(y - x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

não simplificava muito a questão original.

Nesta seção, apresentaremos uma demonstração da existência da função de Green para abertos limitados de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a propriedade da esfera interior e exterior:

DEFINIÇÃO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *satisfaz a condição da esfera interior e exterior se existir $r > 0$ tal que, para todo $y_0 \in \partial\Omega$, existam $y_1 \in \Omega$ e $y_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$B_r(y_1) \subset \Omega, \quad \partial B_r(y_1) \cap \partial\Omega = \{y_0\}, \quad (\text{esfera interior}) \quad (2.31)$$

$$B_r(y_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \quad \partial B_r(y_2) \cap \partial\Omega = \{y_0\}. \quad (\text{esfera exterior}) \quad (2.32)$$

OBSERVAÇÃO 3 Para cada y_0 , como $B_r(y_1)$ e $B_r(y_2)$ não se interceptam, o plano tangente a $\partial\Omega$ em y_0 está bem definido; em particular, os pontos y_1 e y_2 estão unicamente determinados para todo $r > 0$ suficientemente pequeno.

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte⁽²⁹⁾

TEOREMA 2.9 (POINCARÉ) *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaça a condição da esfera interior e exterior. Então, existe a função de Green G associada a Ω .*

A demonstração que apresentaremos aqui utiliza o Teorema de Hahn-Banach⁽³⁰⁾ e é devida a Peter D. Lax⁽³¹⁾.

⁽²⁹⁾H. Poincaré, [57].

⁽³⁰⁾S. Banach, [3].

⁽³¹⁾P. D. Lax, [45].

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ o subespaço vetorial de $C(\partial\Omega)$ formado pelas funções f para as quais o problema de Dirichlet admite solução clássica, a qual denotaremos por u_f . Pelo princípio do máximo, para cada $x \in \Omega$, a aplicação

$$\begin{aligned} L_x : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto u_f(x) \end{aligned}$$

é um operador linear contínuo. Além disso, L_x é monótona crescente, i.e., $f_1 \leq f_2$ implica $L_x(f_1) \leq L_x(f_2)$ ou, equivalentemente, $f \leq 0$ implica $L_x(f) \leq 0$.

Vamos dividir a demonstração do Teorema 2.9 em duas etapas:

1ª etapa. Existe uma extensão linear contínua de L_x em $C(\partial\Omega)$ que é monótona crescente.

Para isso, vamos utilizar a forma analítica do Teorema de Hahn-Banach⁽³²⁾:

TEOREMA 2.10 (HAHN-BANACH) *Sejam $\mathbb{E}$ um espaço vetorial normado e $p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subaditiva e homogênea positiva, ou seja,*

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &\leq p(\mathbf{x}_1) + p(\mathbf{x}_2) \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{E}, \\ p(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda p(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Dados $F \subset \mathbb{E}$ um subespaço vetorial e um funcional linear $T : F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in F$, então existe uma extensão linear $\bar{T}$ de T em $\mathbb{E}$ tal que $\bar{T}(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$.

Para cada $x \in \Omega$, vamos aplicar o Teorema 2.10 com a função $p_x : C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p_x(g) := \inf_{\substack{f \geq g \\ f \in \mathcal{B}}} L_x(f).$$

Vamos mostrar que a função p_x está bem definida. De fato, toda função $g \in C(\partial\Omega)$ é limitada e para todo $y \in \partial\Omega$, $g(y) \leq \sup_{\partial\Omega} g$.

⁽³²⁾Cf. H. Brezis, [7], pp.1-3.

Como o problema de Dirichlet tem solução para a função constante $x \in \partial\Omega \mapsto \sup_{\partial\Omega} g$, ela pertence à classe $\mathcal{B}$ e assim o ínfimo na definição de p_x é calculado numa classe não vazia. Além disso,

$$p_x(g) \leq \sup_{\partial\Omega} g.$$

Por outro lado, como para todo $y \in \partial\Omega$, $g(y) \geq \inf_{\partial\Omega} g$, se $f \in C(\partial\Omega)$ é uma função tal que $f \geq g$ e $f \in \mathcal{B}$, então para todo $y \in \partial\Omega$, $f(y) \geq \inf_{\partial\Omega} g$ e segue do princípio do máximo que a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira f é superior à $\inf_{\partial\Omega} g$. Em particular, $L_x(f) \geq \inf_{\partial\Omega} g$. Consequentemente, como a função f é arbitrária,

$$p_x(g) \geq \inf_{\partial\Omega} g.$$

Isso mostra que $p_x(g)$ é um número real.

Segue imediatamente da definição que p_x é homogênea positiva e $L_x(f) = p_x(f)$, $\forall f \in \mathcal{B}$. Para verificar a subaditividade de p_x , tomemos $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $f_1, f_2 \in C(\partial\Omega)$ tais que para $i \in \{1, 2\}$,

$$f_i \geq g_i, \quad f_i \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad p_x(g_i) \geq L_x(f_i) - \varepsilon.$$

Ora,

$$f_1 + f_2 \geq g_1 + g_2 \quad \text{e} \quad f_1 + f_2 \in \mathcal{B}.$$

Assim, pela definição de $p_x(g_1 + g_2)$,

$$\begin{aligned} p_x(g_1 + g_2) &\leq L_x(f_1 + f_2) = L_x(f_1) + L_x(f_2) \\ &\leq p_x(g_1) + p_x(g_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$p_x(g_1 + g_2) \leq p_x(g_1) + p_x(g_2).$$

Logo, p_x é subaditiva.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\bar{L}_x : C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que estende L_x e tal que

$$\bar{L}_x(g) \leq p_x(g) \quad \forall g \in C(\partial\Omega).$$

Em particular, $\bar{L}_x$ é monótona crescente, pois $g \leq 0$ implica $\bar{L}_x(g) \geq p_x(g) \leq 0$.

Resta mostrar que o funcional $\bar{L}_x$ é contínuo. Ora, para toda $g \in C(\partial\Omega)$, vimos que $p_x(g) \leq \sup_{\partial\Omega} g$. Assim,

$$\bar{L}_x(g) \leq p_x(g) \leq \sup_{\partial\Omega} g.$$

Aplicando esta estimativa a $-g$, pela linearidade do funcional $\bar{L}_x$ obtemos

$$-\bar{L}_x(g) \leq -\inf_{\partial\Omega} g.$$

Conseqüentemente,

$$\inf_{\partial\Omega} g \leq \bar{L}_x(g) \leq \sup_{\partial\Omega} g,$$

de onde temos

$$|\bar{L}_x(g)| \leq \|g\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Assim o funcional $\bar{L}_x(g)$ é contínuo.

2ª etapa. Dado $x \in \Omega$, seja

$$\phi_x(y) := \bar{L}_x(\vartheta_y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega,$$

onde $\vartheta_y(z) := \vartheta(y-z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$. Então, ϕ_x se estende continuamente como uma função em $\mathbb{R}^n$.

Dado $y \notin \partial\Omega$, a aplicação $\vartheta_y : z \mapsto \vartheta(z-y)$ pertence a $C(\partial\Omega)$. Logo, ϕ_x está bem definida sobre $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. Ainda, se $y \notin \bar{\Omega}$, então $\vartheta_y \in \mathcal{B}$, de onde segue que

$$\phi_x(y) = \bar{L}_x(\vartheta_y) = \vartheta(y-x) \quad \forall y \notin \bar{\Omega}. \quad (2.33)$$

Seja $y \in \Omega$, com $h := d(y, \partial\Omega) < r$, onde $r > 0$ satisfaz a condição da esfera exterior e interior. Observe que existe um único ponto y_0 que

minimiza a distância entre y e $\partial\Omega$. De fato, $B_h(y)$ e $B_r(y_1)$ devem estar no mesmo subespaço afim determinado pelo plano tangente a $\partial\Omega$ em y_0 . Como este plano tangente também tangencia $B_h(y)$ e $B_r(y_1)$ em y_0 , e $h < r$, então $B_h(y) \subset B_r(y_1)$. Logo, $\overline{B_h(y)} \cap \partial\Omega = \{y_0\}$. Além disso, temos $y \in [y_0, y_1]$, i.e., y está no segmento que liga y_0 a y_1 . Como $y \neq y_1$ e $y \neq y_2$, podemos definir y' e y'' , as reflexões de y com relação a $\partial B_r(y_1)$ e $\partial B_r(y_2)$, respectivamente.

Nosso objetivo será mostrar que, caso y esteja suficientemente próximo de $\partial\Omega$, então y' e y'' não pertencem a Ω . Isso será feito com o auxílio do seguinte

LEMA 2.11 *Se $y \in \Omega$ e $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$, então $y', y'' \notin \bar{\Omega}$.*

Demonstração. No caso de y'' , não há problema, pois $y \in \Omega$ significa $y \notin \overline{B_r(y_2)}$ e, portanto, $y'' \in B_r(y_2)$.

Vamos supor $y \in \Omega$ e que $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$. Se y_0 for o ponto que minimiza a distância entre y e $\partial\Omega$, então $y \in [y_0, y_1]$; mais precisamente, $y = y_1 + t(y_0 - y_1)$, com $\frac{1}{3} < t < 1$. Logo $y' = y_1 + s(y_0 - y_1)$, com $1 < s < 3$. Em particular, $|y' - y_2| < r$ e $y' \in B_r(y_2)$. ■

Vamos retomar a demonstração do Teorema 2.9. Se $z \in \partial\Omega$, então $z \notin B_r(y_1)$ e $z \notin B_r(y_2)$. Logo, aplicando a segunda parte da Proposição 2.7, com as devidas modificações de notação, teremos

$$\frac{r}{|y - y_2|} \cdot \frac{1}{|y'' - z|} \leq \frac{1}{|y - z|} \leq \frac{r}{|y - y_1|} \cdot \frac{1}{|y' - z|} \quad \forall z \in \partial\Omega,$$

onde estamos supondo $y \in \Omega$ e $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$.

Vamos supor $n > 2$; o caso $n = 2$ pode ser tratado de forma análoga (Vid Exercício 2.12). Segue da relação acima que

$$\left(\frac{r}{|y - y_2|} \right)^{n-2} \vartheta_{y''}(z) \leq \vartheta_y(z) \leq \left(\frac{r}{|y - y_1|} \right)^{n-2} \vartheta_{y'}(z) \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Como $\bar{L}_x$ é um funcional linear monótono crescente, aplicando esse operador à expressão acima, as desigualdades serão mantidas. Como

$y', y'' \notin \bar{\Omega}$, segue de (2.33) que

$$\left(\frac{r}{|y - y_2|}\right)^{n-2} \vartheta(y'' - x) \leq \phi_x(y) \leq \left(\frac{r}{|y - y_1|}\right)^{n-2} \vartheta(y' - x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.34)$$

Fixado $\bar{y} \in \partial\Omega$, observe que $y \rightarrow \bar{y}$ implica $|y - y_1|, |y - y_2| \rightarrow r$ e, portanto, $y', y'' \rightarrow \bar{y}$. Em vista de (2.34), teremos

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \bar{y} \\ y \in \Omega}} \phi_x(y) = \vartheta(\bar{y} - x) \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega.$$

3ª etapa. ϕ_x é a parte regular da função de Green de Ω .

Pela etapa precedente, sabemos que ϕ_x é contínua em $\mathbb{R}^n$ e

$$\phi_x(\bar{y}) = \vartheta(\bar{y} - x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega.$$

Sendo $\bar{L}_x$ linear e contínua, teremos

$$\Delta_y \phi_x(y) = \bar{L}_x(\Delta_y \vartheta_y) = 0 \quad \forall y \in \Omega,$$

de maneira que ϕ_x é harmônica em Ω . Em outras palavras, ϕ_x é a parte regular da função de Green. ■

Como já observamos, Green utilizara sua função com o intuito de demonstrar a existência de solução para o problema de Dirichlet. Mas afinal, como poderia ele ter alcançado tal objetivo se no início do século 19 ainda mal dispunha das ferramentas necessárias? Ora, seguindo um recurso bastante empregado na época, confundindo o fenômeno físico com o modelo matemático que procura descrevê-lo, no caso o potencial eletrostático⁽³³⁾.

⁽³³⁾“To convince ourselves that there does exist such a function as we have supposed $U[G]$ to be, conceive the surface to be a perfect conductor put in communication with the earth, and a unit of positive electricity to be concentrated in the point $p' [x]$; then the total potential function arising from $p' [x]$ and from the electricity it will induce upon the surface will be the required value of $U[G]'$. (G. Green, op cit. Apud G. D. Birkhoff, op cit, p.356.)

Além disso, já ressaltamos que a questão da diferenciabilidade de G sobre $\partial\Omega$ estava longe ser constatada por Green, de maneira que por construção

$$u(x) := - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) f(y) d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega,$$

deveria ser harmônica em Ω . Finalmente, para verificar a condição de contorno, Green observa que a forma de $\partial\Omega$ não é relevante, e o resultado segue do decaimento rápido de $\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y)$ quando x se afasta de $y \in \partial\Omega$, como no caso da esfera (Vid Equação (2.30)).

2.3 Exercícios

EXERCÍCIO 2.1 Verifique (2.20).

Sugestão: Note que $v_k(x)$ é a parte real de $(-1)^{k-1} e^{i(2k-1)x}$ e utilize a fórmula da soma de uma progressão geométrica.

EXERCÍCIO 2.2 Utilizando as relações de ortogonalidade

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \sin kx dx = \delta_{jk}, \quad (2.35)$$

obtenha a série de Fourier de $f(x) = e^x - e^{-x}$ em $(-\pi, \pi)$; compare com (2.14).

EXERCÍCIO 2.3 Mostre que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k + \frac{1}{k}} \sin kx \quad \text{converge para todo } x \in \mathbb{R},$$

utilizando apenas o Lema de Abel.

EXERCÍCIO 2.4 Mostre que as soluções de (2.16) são dadas por (2.17).

EXERCÍCIO 2.5 Deduza o Teorema 2.4 utilizando o Teorema do Divergente:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \quad \forall \vec{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n). \quad (2.36)$$

Sugestão: Para obter (2.23), utilize a segunda identidade de Green sobre o conjunto $\Omega \setminus B_{\varepsilon}(x)$ e faça $\varepsilon \rightarrow 0$. Cf. D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [33], pp.17–18.

EXERCÍCIO 2.6 Seja Ω um domínio para o qual a função de Green existe. Mostre que

$$G(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad G(x, y) = G(y, x) \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Sugestão: Cf. L. C. Evans, [20], pp.35–36.

EXERCÍCIO 2.7 Verifique o Exemplo 2.1.

EXERCÍCIO 2.8 Utilizando a desigualdade de Harnack, demonstre o Teorema de Liouville:

Se u for harmônica e limitada em $\mathbb{R}^n$, então u é constante.

EXERCÍCIO 2.9 Na Seção 1.4, vimos que toda função harmônica é de classe C^{∞} . Utilizando a fórmula de Poisson, mostre que toda função harmônica é analítica.

EXERCÍCIO 2.10 Mostre que a função $(x, y) \mapsto \phi_x(y)$ em (2.29) é de classe C^{∞} .

EXERCÍCIO 2.11 Calcule a função de Green do semi-espço $\mathbb{R}_+^n$. Em seguida, mostre que

$$u(x) := \frac{2x_n}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{f(y)}{|x-y|^n} dy \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u = f & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

para toda função contínua e limitada f .

EXERCÍCIO 2.12 Demonstre o Teorema 2.9 em dimensão $n = 2$.

Observação: A existência da parte regular da função de Green para $n = 2$ pode ser obtida de forma mais simples, além disso supondo apenas que a curva simples e fechada $\partial\Omega$ seja suave por partes. Cf. P. D. Lax, loc cit; A. E. Taylor, [68], pp.188–190.

Capítulo 3

O Princípio de Dirichlet

Num artigo de 1870⁽¹⁾, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) reproduz uma carta de Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), onde este descreve uma nova abordagem do problema de Dirichlet que lhe fora apresentada por Dirichlet no verão de 1856. Tal método já vinha sendo utilizado por muitos outros matemáticos, destacadamente Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que o denominou *Princípio de Dirichlet* em homenagem a seu antigo professor⁽²⁾.

3.1 Sobre o chamado Princípio de Dirichlet

O Princípio de Dirichlet consiste em transformar o problema de

⁽¹⁾K. T. W. Weierstrass, [72].

⁽²⁾“In seinen Vorlesungen über die Kräfte, welche nach dem Newton’schen Gesetz wirken, hat sich Lejeune Dirichlet zur Begründung eines Hauptsatzes der Potentialtheorie einer eigenthümlichen Schlussweise bedient, welche später auch von anderen Mathematikern, namentlich von Riemann, vielfach angewandt worden ist und den Namen ‘Dirichlet’sche Princip’ erhalten hat.” (K. T. W. Weierstrass, loc cit.)

Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

no problema variacional de se determinar a função que minimiza o funcional

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad (3.2)$$

sobre $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com a restrição “ $u = f$ sobre $\partial\Omega$ ”.

De fato, sejam m o ínfimo de (3.2) e u_0 uma função admissível satisfazendo a condição de contorno f em $\partial\Omega$ e tal que $\mathcal{I}(u_0) = m$. Para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, é claro que $u_0 + t\varphi$ continua sendo uma função admissível, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso,

$$\mathcal{I}(u_0 + t\varphi) - \mathcal{I}(u_0) = 2t \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi dx + t^2 \mathcal{I}(\varphi) \geq 0.$$

Para que a última desigualdade permaneça válida para todo $t \in \mathbb{R}$, devemos ter

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Utilizando a fórmula de integração por partes, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \Delta u_0 \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ou seja, $\Delta u_0 = 0$ em Ω .

Como $u_0 = f$ sobre $\partial\Omega$, ter-se-ia acima uma demonstração bastante elegante sobre a solubilidade do problema de Dirichlet, desde que sejamos capazes de demonstrar que

1. $m < \infty$, em outras palavras, a classe de funções admissíveis é não-vazia;
2. Existe uma função admissível $u_0 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u_0 = f$ sobre $\partial\Omega$, que minimiza a integral de Dirichlet (3.2);

3. A função que minimiza a integral de Dirichlet pertence a $C^2(\Omega)$.

Embora a necessidade de estabelecer tais fatos seja clara aos nossos olhos, o mesmo não pode ser dito sobre a utilização do Princípio de Dirichlet em meados do século 19. Na verdade, essas três condições passariam despercebidas aos matemáticos daquele período por mais de duas décadas, até 1870.

Muito embora Dirichlet tenha levado os créditos no princípio variacional que ostenta seu nome, na mesma época o Princípio de Dirichlet também esteve presente em trabalhos de William Thompson (futuro Lorde Kelvin) (1824-1907) e de Riemann.

O pioneirismo em tal abordagem coube a Green⁽³⁾ que, já em 1833, a utilizara para “demonstrar” a existência de soluções do problema de Dirichlet. No entanto, como já observamos no capítulo anterior, os trabalhos de Green tiveram pouca influência na Europa continental.

Gauss, por meio de uma formulação um pouco mais primitiva envolvendo a energia potencial de um campo eletrostático⁽⁴⁾ também “garantiu” a existência de soluções para o problema de Dirichlet⁽⁵⁾.

No entanto, se Green e Gauss sustentaram seus trabalhos, mesmo que implicitamente, no modelo físico de equilíbrio de cargas eletrostáticas⁽⁶⁾, estranhamente o mesmo não aparece ocorrer com Thompson, Dirichlet e Riemann.

Com relação a Thompson e Dirichlet, ambos acreditavam que a existência do mínimo u_0 para a integral de Dirichlet era uma consequência do fato de

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

⁽³⁾G. Green, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **5** (1835), 395–430; *Mathematical Papers*, pp.187–222. Apud M. Kline, [41], p.684.

⁽⁴⁾K. F. Gauss, “Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstoßungskräfte”. In : *Werke*, V, pp.191–242 [pp.221–226]. Apud G. D. Birkhoff, op cit, pp.358–361. Cf. D. Birkhoff, op cit, p.379.

⁽⁵⁾Cf. J. A. Dieudonné, [16], p.36.

⁽⁶⁾Cf. O. D. Kellogg, [40], pp.79–81 e 278–279.

ser positiva para toda função admissível.

Thompson⁽⁷⁾ utiliza uma formulação um pouco mais geral para o Princípio de Dirichlet, com o intuito de demonstrar a existência de soluções para a equação $\operatorname{div}(\alpha^2 \nabla u) = \rho$ em Ω , onde α e ρ são funções dadas, a qual se reduz à equação de Poisson quando $\alpha \equiv 1$. No entanto, em nenhum momento é feita qualquer menção a fenômenos físicos (muito embora a equação estudada tenha origem nesse tipo de problema): seu trabalho tem um conteúdo puramente matemático.

Com Dirichlet a situação é ainda mais drástica. Num livro publicado postumamente⁽⁸⁾, Dirichlet se propõe a demonstrar que, dada uma função contínua sobre $\partial\Omega$, existe uma distribuição de massas sobre $\partial\Omega$ capaz de gerar um potencial gravitacional que assuma tais valores pré-estabelecidos sobre $\partial\Omega$.

Dirichlet observa que tal problema se resume a mostrar a existência de soluções de $\Delta u = 0$ em Ω , com condição de contorno dada. Ele lamenta que a determinação de uma tal função não seja construtiva; no entanto, comenta que a resolução da equação de Laplace não oferece quaisquer dificuldades (sic)⁽⁹⁾ e utiliza o Princípio de Dirichlet, sem se preocupar com nenhuma das questões levantadas acima, em particular, sobre a existência de um mínimo para $\mathcal{I}(u)$ sujeito às condições de contorno.

Tais exemplos ilustram uma certa tentativa de evitar a utilização de problemas físicos na resolução de questões de ordem puramente matemática. No caso de Dirichlet, essa postura parece ser levada ao extremo quando este recorre à possibilidade de solução do problema matemático para tratar do problema físico associado, como numa tentativa de justificar a si mesmo que a intuição havia sido deixada

⁽⁷⁾W. Thompson, "Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations", *Cambridge Dublin Math. J.* **3** (1948), 84 et seq; *J. Math.* **12** (1847), 496 et seq; *Math. and Phys. Papers* **1**, 93–96. In : G. D. Birkhoff, op cit, pp.380–382.

⁽⁸⁾P. G. L. Dirichlet, *Die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, Leipzig, 1876. Apud G. D. Birkhoff, [4], p.385.

⁽⁹⁾"The latter presents no difficulty". (P. G. L. Dirichlet, op cit, §32. Apud G. D. Birkhoff, loc cit.)

de lado.

Isso mostra o impacto da refundição lógica pela qual passou a Análise no século 19, com os trabalhos de Cauchy por volta de 1820. Mas até as décadas de 1850 e 1860, esse processo ainda não estava consolidado: as idéias físicas ainda permeavam os espíritos dos matemáticos, em muitos casos de forma bastante sutil para os padrões da época.

Uma questão levantada por Henri Poincaré (1854-1912) aborda essa interferência de fenômenos físicos na resolução de problemas matemáticos⁽¹⁰⁾.

Sabemos que um modelo físico é obtido a partir de uma série de considerações aproximativas, a partir de simplificações do fenômeno que se planeja estudar; em muitos casos, ainda, os argumentos matemáticos envolvidos são altamente questionáveis.

Chegamos então ao seguinte dilema envolvendo o Princípio de Dirichlet: realmente é necessária uma demonstração para a existência de soluções do problema de Dirichlet, mesmo sabendo que isso pode ser obtido por argumentos puramente físicos? Além disso, sendo uma demonstração necessária, tal problema deveria ser tratado com o mesmo rigor de uma questão de Análise Pura, mesmo que isso possa parecer um pedantismo inútil?

Para Poincaré, a equação resultante de um modelo físico representa um desafio a ser vencido, utilizando para isso todo o rigor necessário a uma questão, agora, puramente matemática. Além disso, nada impede que equações provenientes da Física tenham, algum dia, profundas implicações na Matemática⁽¹¹⁾.

No caso específico do Princípio de Dirichlet em meados do século 19, Riemann o utilizaria no estudo de problemas envolvendo aplica-

⁽¹⁰⁾H. Poincaré, [58], pp.31–32.

⁽¹¹⁾“Est-il encore permis de se contenter d’une demi-rigueur ? Et qui nous dit que les autres problèmes de la Physique mathématique ne seront pas un jour, comme l’a déjà été le plus simple d’entre eux appelés à jouer en Analyse un rôle considérable ?” (H. Poincaré, op cit, p.32.)

ções conformes⁽¹²⁾ e integrais abelianas⁽¹³⁾.

Em 1870, Weierstrass iria apontar uma grave falha nessa abordagem.

3.2 O Teorema da Aplicação Conforme

Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Princípio de Dirichlet ao problema de representação conforme:

TEOREMA 3.1 (RIEMANN) *Dois abertos simplesmente conexos e limitados $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ possuem uma bijeção conforme $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$.*

Dados dois abertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ de classe C^1 é dita conforme se f preserva os ângulos; mais precisamente, se dados $x \in \Omega_1$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ não-nulos, então a transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva e

$$\angle(f'(x)v_1, f'(x)v_2) = \angle(v_1, v_2).$$

Em dimensão $n = 2$, podemos fazer uso das funções analíticas no estudo das transformações conformes. Com efeito, se f for analítica, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ forem não-nulos, e $f'(x) \neq 0$, teremos

$$\begin{aligned} \arg f'(x)v_1 - \arg f'(x)v_2 &= \arg f'(x) + \arg v_1 - \arg f'(x) + \arg v_2 \\ &= \arg v_1 - \arg v_2. \end{aligned}$$

A recíproca também é verdadeira. De fato, se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é conforme, então f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e, portanto, é analítica⁽¹⁴⁾.

⁽¹²⁾G. F. B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Göttingen, 1851 (Tese); *Werke*, pp.3–43. Apud M. Kline, op cit, p.655.

⁽¹³⁾G. F. B. Riemann, “Theorie der Abel’sche Functionen”, *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857); *Werke*, 2ª ed., pp.82–142 [88–96]. In : G. D. Birkhoff, op cit, pp.50–56.

⁽¹⁴⁾Cf. L. V. Ahlfors, [2], pp.73–74.

Na demonstração do Teorema 3.1, utilizaremos um resultado clássico da teoria de funções analíticas⁽¹⁵⁾:

LEMA 3.2 (ROUCHÉ) *Seja Γ uma curva simples e contraível em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se f e g forem analíticas em Ω , e tais que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in \Gamma$, então Γ envolve o mesmo número de zeros de f e g , incluindo suas multiplicidades.*

Para demonstrar o Teorema 3.1, vamos admitir que o problema de Dirichlet sempre admita solução nas regiões simplesmente conexas do plano. Embora esse resultado seja verdadeiro (Vid Capítulo 4), Riemann se utilizou do Princípio de Dirichlet para concluir que o problema de Dirichlet teria solução para todo (sic) aberto de $\mathbb{R}^2$.

Demonstração do Teorema 3.1. Como a composição de aplicações conformes também é conforme, basta demonstrarmos o resultado quando um dos abertos é a bola unitária $B_1(0)$; o outro conjunto denotaremos simplesmente por Ω .

Fixado $z_0 \in \Omega$, seja $u := \phi_{z_0}$ a parte regular da função de Green G associada a Ω , i.e., u é harmônica e $u(z) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z - z_0|}$, se $z \in \partial\Omega$ (aqui fazemos uso do Princípio de Dirichlet para garantir a existência da parte regular da função de Green). Como Ω é simplesmente conexo, o complexo conjugado de u , que denotaremos por v , está bem definido a menos de uma constante arbitrária.

Seja $h(z) := (z - z_0)e^{2\pi[u(z) + iv(z)]}$. Dessa forma, h é analítica em Ω e $h(z) = 0$ se, e somente se, $z = z_0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |h(z)| &= |z - z_0|e^{2\pi u(z)} \\ &= e^{2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \log |z - z_0| + \phi_{z_0}(z) \right]} = e^{-2\pi G(z, z_0)} < 1 \quad \forall z \in \Omega, \end{aligned}$$

pois $G > 0$ em Ω . Em particular, $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$; além disso, temos $|h(z)| \rightarrow 1$ quando $d(z, \partial\Omega) \rightarrow 0$.

Vamos verificar que h é, de fato, uma bijeção; em outras palavras, dado $w \in B_1(0)$, devemos mostrar que existe um único $z \in \Omega$ tal que $h(z) = w$.

⁽¹⁵⁾Cf. L. V. Ahlfors, op cit, pp.153–154.

Com efeito, como $|w| < 1$ e $\lim_{d(z, \partial\Omega) \rightarrow 0} |h(z)| = 1$, podemos encontrar uma curva simples e contraível Γ em Ω , suficientemente próxima de $\partial\Omega$, tal que $|h(z)| > |w| = |h(z) - [h(z) - w]|$ sobre a região compreendida entre $\partial\Omega$ e Γ , inclusive. Pelo Lema de Rouché, o número de raízes de $h(z)$ e $h(z) - w$ devem coincidir na região limitada por Γ . Como h possui um único zero, a equação $h(z) = w$ deverá admitir uma única solução no interior de Γ e, portanto, em Ω .

Para concluir a demonstração do teorema, resta mostrarmos que $h' \neq 0$ em Ω ; como já observamos acima, isso implica que h é conforme. Suponhamos por contradição que $h'(z_1) = 0$ para algum $z_1 \in \Omega$. Em particular, z_1 é um zero de $h - h(z_1)$ de ordem superior ou igual a 2. Logo, para todo $w \neq h(z_1)$ numa vizinhança de $h(z_1)$, a equação $h - w$ admite pelo menos 2 soluções distintas⁽¹⁶⁾, contradizendo a injetividade de h . Consequentemente, $h' \neq 0$ em Ω e, portanto, h é conforme. ■

3.3 O fim do Princípio de Dirichlet

3.3.1 O criticismo de Weierstrass

Por volta de 1870, a Matemática passaria por uma onda de contestações, tendo por objetivo o questionamento de fatos que até então eram tratados como óbvios. Esse movimento, liderado por Weierstrass, apontou inúmeras patologias que não poderiam ser detectadas pela simples intuição.

O Princípio de Dirichlet, da forma com que vinha sendo utilizado, certamente não poderia passar despercebido: o objetivo de Weierstrass no seu artigo de 1870 era de apresentar um funcional positivo, mas que não possuísse um mínimo:

⁽¹⁶⁾Cf. L. V. Ahlfors, op cit, p.131, Teorema 11.

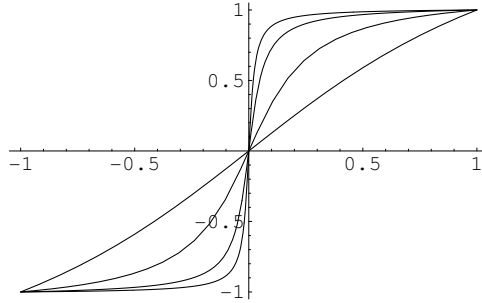


Figura 3.1: Elementos da família u_ε com $a = -1$ e $b = 1$, para $\varepsilon = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{50}$

TEOREMA 3.3 (WEIERSTRASS) *Dada $u \in C^1[-1, 1]$, seja*

$$I(u) := \int_{-1}^1 \left[x \frac{du}{dx}(x) \right]^2 dx.$$

Então,

$$\inf \left\{ I(u) : u \in C^1[-1, 1], u(-1) = a \text{ e } u(1) = b \right\} = 0,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Em particular, o ínfimo é atingido se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Vamos definir (Vid Figura 3.1)

$$u_\varepsilon(x) := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Dessa forma, u_ε é uma função admissível e

$$\frac{du_\varepsilon}{dx}(x) = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Logo,

$$I(u_\varepsilon) \leq \int_{-1}^1 (x^2 + \varepsilon^2) \left[\frac{du_\varepsilon}{dx}(x) \right]^2 dx \quad (3.3)$$

$$= \varepsilon \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Conseqüentemente, $\inf I = 0$. No entanto, é claro que esse ínfimo somente poderá ser atingido por uma função constante, a qual não é uma função admissível se $a \neq b$. ■

Nas palavras de Weierstrass, chegamos à conclusão de que o Princípio de Dirichlet, tal como proposto em meados do século 19, nos conduz a um resultado falso⁽¹⁷⁾.

3.3.2 O exemplo de Prym

Embora Weierstrass não tratasse exatamente da integral de Dirichlet, o exemplo que apresentamos na seção anterior foi suficiente para aniquilar as esperanças de que o Princípio de Dirichlet pudesse estar correto.

Provavelmente, antes mesmo de 1870 já pairavam dúvidas sobre ele. Talvez por medo das críticas que poderiam sobrevir, ou mesmo pela mais pura fé de que o Princípio de Dirichlet estivesse correto, não houve contestações abertas. De qualquer maneira, Weierstrass rompeu a linha tênue que sustentara tal argumento por tantos anos.

Em 1871, Friedrich Emil Prym (1841-1915) publicou um artigo⁽¹⁸⁾ onde era levantada uma questão que nem Weierstrass parece ter observado: mesmo que o problema de Dirichlet tenha uma solução u em Ω , nada garante que a integral de Dirichlet calculada em u seja finita, i.e., $\mathcal{I}(u) < \infty$.

Mais precisamente,

⁽¹⁷⁾“Die Dirichlet’sche Schlussweise führt also in dem betrachteten Falle offenbar zu einem falschen Resultat”. (K. T. W. Weierstrass, op cit, p.54)

⁽¹⁸⁾F. E. Prym, [63].

TEOREMA 3.4 (PRYM) *Seja $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário. Existe uma função harmônica u_0 em $C^\infty(B_1) \cap C(\overline{B}_1)$ tal que*

$$\mathcal{I}(u_0) = \int_{B_1} |\nabla u_0|^2 dx = +\infty.$$

Veremos na Seção 5.4 (Vid Exercício 5.19) que toda função $u \in C^1(B_1) \cap C(\overline{B}_1)$ tal que $u = u_0|_{\partial B_1}$ sobre ∂B_1 satisfaz

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx = +\infty,$$

onde u_0 é a função dada pelo Teorema 3.4. Em outras palavras, não existem funções admissíveis com condição de contorno $u_0|_{\partial B_1}$. Isso mostra que o problema de Dirichlet e sua formulação variacional não são equivalentes.

Embora esteja quase esquecido atualmente, apresentamos o exemplo original de Prym abaixo, construído num semicírculo de raio $R < \frac{1}{2}$:

Demonstração do Teorema 3.4. Vamos fixar um ramo da função log sobre o plano complexo, do qual excluimos os números reais não-positivos e, considerando a representação de um ponto nessa região em coordenadas polares como $z = \rho e^{i\varphi}$, com $-\pi < \varphi < \pi$, escrevemos $\log z = \log \rho + i\varphi$.

A função analítica $u + iv := i\sqrt{-\log(R + x + iy)}$, com $R > 0$, está bem definida exceto para os números reais menores que ou iguais a $-R$. Vamos supor $R < \frac{1}{2}$ e considerar a parametrização do semicírculo fechado Ω , de centro $-R$ e raio $2R$, em coordenadas polares:

$$\begin{cases} x + R = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

com $0 \leq \rho \leq 2R$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Como

$$-\log(R + x + iy) = -\log \rho - i\varphi = -\sqrt{\log^2 \rho + \varphi^2} e^{i \arctg(\frac{\varphi}{\log \rho})},$$

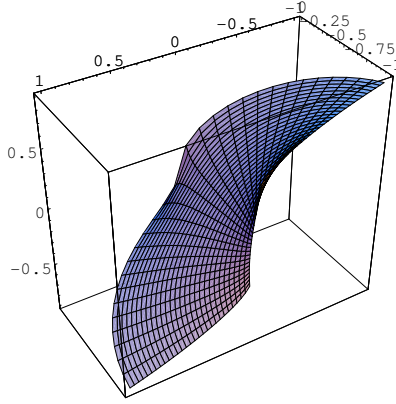


Figura 3.2: O exemplo de Prym

obtemos as seguintes expressões para u e v sobre $\overline{\Omega}$:

$$u(\rho, \varphi) = (\log^2 \rho + \varphi^2)^{\frac{1}{4}} \sin \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right],$$

$$v(\rho, \varphi) = -(\log^2 \rho + \varphi^2)^{\frac{1}{4}} \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right].$$

Vamos nos restringir à função u (Vid Figura 3.2) e estudar seu comportamento em $\partial\Omega$, em especial no ponto $(x, y) = (-R, 0)$; equivalentemente, $(\rho, \varphi) = (0, 0)$. Para isso, definimos as funções

$$\tilde{\xi}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{u}(\xi, \varphi) = \left(\frac{\varphi^2}{\sin^2 2\xi} \right)^{\frac{1}{4}} \sin \xi;$$

verifica-se facilmente que $u(\rho, \varphi) = \tilde{u}(\tilde{\xi}(\rho, \varphi), \varphi)$.

Observando que $\tilde{\xi}(\rho, \varphi) \rightarrow 0$ e $\tilde{u}(\xi, \varphi) \rightarrow 0$ uniformemente em φ quando $\rho \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 0$, respectivamente, segue que

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0+ \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Portanto, u é harmônica e pode ser estendida continuamente ao bordo $\partial\Omega$ do semicírculo.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{1}{2} (\log^2 \rho + \varphi^2)^{-\frac{3}{4}} \times \\ &\times \left\{ \frac{\log \rho}{\rho} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] - \frac{\varphi}{\rho} \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} (\log^2 \rho + \varphi^2)^{-\frac{3}{4}} \times \\ &\times \left\{ \varphi \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] + \log \rho \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Dessa forma, fixado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a integral de Dirichlet $\mathcal{I}_\varepsilon$ de u sobre a região Ω^ε , onde excluímos de Ω a vizinhança de $-R$ com raio ε , será dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon(u) &= \int_\varepsilon^{2R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{2R} \frac{d\rho}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\log^2 \rho + \varphi^2}}\end{aligned}\tag{3.5}$$

e, pelo último membro de (3.5),

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon(u) &\geq \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{2R} \frac{d\rho}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\log^2 \rho + 4}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_\varepsilon^{2R} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\log^2 \rho + 4}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \operatorname{arsenh} \left(\frac{1}{2} \log 2R \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mathcal{I}_\varepsilon = +\infty$, de onde segue que a integral de Dirichlet de u sobre Ω diverge. ■

3.3.3 O exemplo de Hadamard

Passados mais de 30 anos, o exemplo de Prym havia caído em esquecimento. Em 1906, Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) construiu um novo exemplo de não-equivalência entre o problema de Dirichlet e o Princípio de Dirichlet, apelando dessa vez para a representação de uma função harmônica por meio de séries de Fourier sobre o disco unitário em $\mathbb{R}^2$.⁽¹⁹⁾

Lembremos que toda função em $C(\partial B_1)$, onde $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco de raio 1, pode ser expressa de forma equivalente como sendo uma função contínua $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2\pi)$. Neste caso, a condição de contorno sobre $\partial B_1(0)$ associada a essa função num ponto $x = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, vale $f(\theta)$.

Utilizando a representação do laplaciano em coordenadas polares

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

e aplicando o método de separação de variáveis, segue que o candidato a solução clássica para o problema de Dirichlet sobre B_1 , com condição de contorno f , é dado por

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (3.6)$$

onde a_k e b_k são os coeficientes de Fourier de f , i.e.,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta \, d\theta.$$

Embora f seja somente contínua, o que significa que f pode não coincidir com sua série de Fourier, (3.6) realmente define a solução desejada! De fato, é possível verificar (Vid Exercício 3.2) que (3.6)

⁽¹⁹⁾J. S. Hadamard, [36].

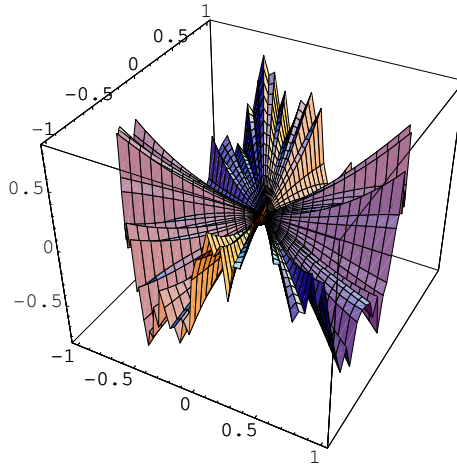


Figura 3.3: O exemplo de Hadamard

coincide com a fórmula de Poisson de f no disco unitário, que já sabemos ser solução do problema de Dirichlet.

Como as seqüências $(a_k)_{k \geq 1}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ são limitadas, as derivadas u_r e u_θ de u podem ser obtidas por derivação termo-a-termo da série em (3.6), e obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} k r^k (-a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta).\end{aligned}$$

Logo, a integral de Dirichlet de u sobre $B_\rho(0)$, com $\rho < 1$, pode ser

escrita como

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(0)} |\nabla u|^2 dx &= \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \\ &= \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) r^{2k-1} dr d\theta \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^2 + b_k^2) \rho^{2k}.\end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $\rho \rightarrow 1$, temos

$$\mathcal{I}(u) = \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.7)$$

O exemplo de Hadamard repousa sobre a identidade (3.7). Na verdade, basta escolhermos os coeficientes a_k e b_k de forma que

$$f(\theta) := \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

seja absolutamente convergente (e, portanto, f é contínua), mas que a série em (3.7) seja divergente.

Tomando por exemplo

$$\begin{aligned}a_k &= 0, \\ b_k &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 2^{2n}, \\ \frac{1}{2^n} & \text{se } k = 2^{2n}, \end{cases}\end{aligned}$$

teremos que (Vid Figura 3.4)

$$f(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 2^{2n} \theta \quad (3.8)$$

é contínua, mas a solução u do problema de Dirichlet com condição de contorno f satisfaz

$$\mathcal{I}(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

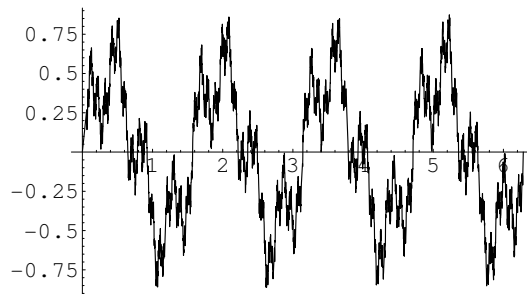


Figura 3.4: Gráfico de f dada por (3.8)

Hadamard, ao contrário de Prym, observou que a classe de funções admissíveis para o Princípio de Dirichlet nesse caso é vazia; isso será verificado na Seção 5.4 (Vid Exercício 5.19).

3.4 Exercícios

EXERCÍCIO 3.1 Mostre a “recíproca” do Princípio de Dirichlet: se u for solução do problema de Dirichlet, então u minimiza a integral de Dirichlet (3.2).

EXERCÍCIO 3.2 Utilizando o método de separação de variáveis, mostre que (3.6) é solução do problema de Dirichlet no disco. Deduza a fórmula de Poisson em dimensão $n = 2$ a partir de (3.6).

Observação: Foi dessa maneira que Poisson obteve (2.28). Cf. S. D. Poisson, [62].

Capítulo 4

Métodos alternativos de resolução do problema de Dirichlet

O Princípio de Dirichlet estava morto! As tentativas subsequentes de Weierstrass e de alguns de seus alunos em resgatar a validade dessa formulação variacional estariam fadadas ao fracasso.

Restava agora procurar novos métodos para garantir a existência de soluções do problema de Dirichlet. Afinal, os trabalhos de Riemann sobre representações conformes no plano e sobre integrais abelianas precisavam ser revalidados.

4.1 O processo alternante de Schwarz

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) não estava muito satisfeito com a Teoria de Representação Conforme de Riemann por ser muito abstrata. Por volta de 1864, já teria observado que não conhecia nenhuma aplicação conforme explícita, e não-trivial, que

transformasse uma dada região sobre o disco unitário⁽¹⁾.

Por esse motivo, Schwarz, juntamente com Karl Gottfried Neumann (1832-1925), começou a construir explicitamente aplicações conformes para polígonos convexos⁽²⁾. Por aproximações, ambos foram capazes de resolver o problema de representações conformes para as regiões convexas e limitadas do plano⁽³⁾.

Seja $h : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ uma aplicação conforme (no nosso caso, uma função analítica) de $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$ sobre $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{C}$, de maneira que $h|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \partial B_1(0)$ seja um homeomorfismo. Nesse caso, o problema de Dirichlet em Ω sempre admite uma solução.

De fato, dada $f \in C(\partial\Omega)$, então $g := f \circ (h|_{\partial\Omega})^{-1}$ é uma função contínua sobre $\partial B_1(0)$. Seja u a solução do problema de Dirichlet em $B_1(0)$, com condição de contorno g ; a função $v := u \circ h$ será harmônica em Ω (pois h é analítica) e coincidirá com f sobre $\partial\Omega$.

Ciente desse fato, Schwarz construiu um engenhoso aparato sobre $\mathbb{C}$ envolvendo o problema de representações conformes, tendo por objetivo seguir o caminho inverso de Riemann, e assim obter a solubilidade do problema de Dirichlet em abertos do plano.

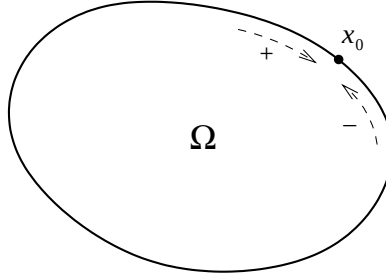
Como já observamos acima, Schwarz e Neumann já haviam resolvido tal problema nas regiões convexas do plano e restava estender tal resultado para regiões ainda mais gerais.

Para lidar com essa questão, Schwarz desenvolveu um interessante método, denominado processo alternante (*alternierende Verfahren*), segundo o qual é possível construir a solução do problema de Dirichlet em uma região $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, sabendo-se que o problema de Dirichlet admite solução nos abertos Ω_1 e Ω_2 . Mais precisamente,

⁽¹⁾Cf. G. D. Birkhoff, [4], pp.47–48.

⁽²⁾Cf. H. A. Schwarz, *Gesammelte Werke*, v.2, pp.108–306, passim; K. G. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, 2ª ed., 1884; *Über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Leipzig : Teubner, 1877; *Math. Ann.* **3** (1871), 325–349; **11** (1877), 558–566; **13** (1878), 255–300; **16** (1880), 409–431. Apud A. R. Forsyth, [27], v.2, p.458.

⁽³⁾Cf. R. V. Churchill, [9], p.166 et seq.

Figura 4.1: Orientação de $\partial\Omega$

TEOREMA 4.1 (SCHWARZ) *Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ dois abertos suaves tais que $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ não se tangenciam em nenhum ponto de $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Se o problema de Dirichlet sempre admitir solução em Ω_1 e Ω_2 , então o mesmo ocorre a $\Omega_1 \cup \Omega_2$.*

Antes de demonstrar o Teorema 4.1, vamos estudar a existência de soluções da equação de Laplace com condições de contorno seccionalmente contínuas.

No que segue, vamos supor que Ω seja um aberto limitado e suave. Dado $x_0 \in \partial\Omega$, podemos fixar uma determinação contínua de ângulo sobre $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ com relação a x_0 , que denotaremos por $\arg_{x_0}$. A função $\arg_{x_0}(x)$ é harmônica em Ω , contínua em $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e tal que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x \in \partial\Omega}} \arg_{x_0}(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x \in \partial\Omega}} \arg_{x_0}(x) = \pi.$$

A escolha da orientação $\pm$ nos limites acima é indicada na Figura 4.1.

Feitas tais observações sobre a função $\arg_{x_0}$, vamos demonstrar o seguinte lema:

LEMA 4.2 *Seja $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua. Se o problema de Dirichlet sempre admitir solução em Ω com condição de fronteira contínua, então existe uma função u harmônica em Ω tal que $u = f$ em $\partial\Omega$ e u é contínua em $\bar{\Omega}$, exceto pelos pontos de descontinuidade de f .*

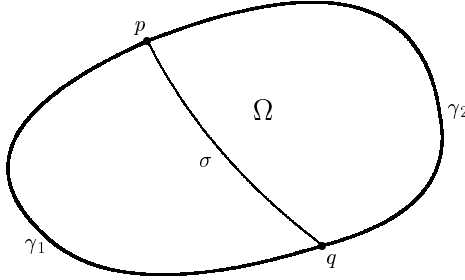


Figura 4.2: Curvas γ_1, γ_2 e σ em $\overline{\Omega}$

Demonstração. Sejam $\{x_1, \dots, x_k\}$ os pontos de descontinuidade de f . Denotaremos por α_i o salto da função f em x_i , i.e.,

$$\alpha_i := \lim_{\substack{x \rightarrow x_i^- \\ x \in \partial\Omega}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_i^+ \\ x \in \partial\Omega}} f(x).$$

Definindo

$$g(x) := \begin{cases} f(x) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\arg_{x_i}(x)}{\pi} & x \in \partial\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}, \\ 0 & x \in \{x_1, \dots, x_k\}, \end{cases}$$

vemos que g é contínua em $\partial\Omega$ e, por hipótese de solubilidade do problema de Dirichlet, existe uma função v satisfazendo o problema de Dirichlet em Ω , com condição de contorno g . Para concluirmos a demonstração, basta observar que

$$u := v + \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\arg_{x_i}}{\pi}$$

satisfaz as condições desejadas. ■

Fixados dois pontos p e q distintos em $\partial\Omega$, seja σ uma curva seccionalmente diferenciável em Ω , com extremos p e q , e que não seja tangente a $\partial\Omega$ nestes pontos (Vid Figura 4.2). Denotaremos, ainda,

por γ_1 e γ_2 os dois segmentos abertos de $\partial\Omega$ delimitados por tais pontos (γ_1 liga p a q , nesta ordem). Vamos supor, ainda, que o problema de Dirichlet sempre admita solução em Ω .

Pelo lema anterior, existe uma função harmônica u_0 em Ω que assume o valor 1 em γ_1 e 0 em γ_2 . Além disso, pelo princípio do máximo, $u_0 < 1$ sobre σ e, como σ não é tangente a $\partial\Omega$ em suas extremidades, segue da construção de u_0 que $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in \sigma}} u_0(x) < 1$, o mesmo ocorrendo em q . Logo,

$$\theta_\sigma := \sup_{x \in \sigma} u_0(x) < 1.$$

Com base nessa notação, temos o seguinte

LEMA 4.3 *Seja $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que v é harmônica e $v \equiv 0$ sobre γ_2 . Então,*

$$\max_{x \in \sigma} v(x) \leq \theta_\sigma \max_{x \in \partial\Omega} v(x). \quad (4.1)$$

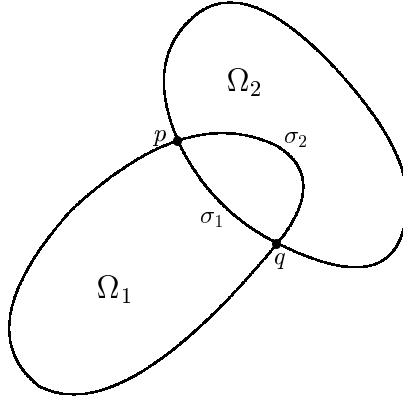
Demonstração. Denotando por $M := \max_{\partial\Omega} |v|$, então $v - Mu_0$ é harmônica e não-positiva em $\partial\Omega$, onde u_0 é dada acima. Pelo princípio do máximo, $v \leq Mu_0$ em Ω e, portanto,

$$v \leq \theta_\sigma M \quad \text{sobre } \sigma. \quad (4.2)$$

■

Agora estamos em condições de apresentar a

Demonstração do Teorema 4.1. Seja f uma função contínua sobre $\partial\Omega$, onde $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Nosso objetivo será construir, a partir de f , seqüências de funções harmônicas $(u_k)_{k \geq 1}$ e $(v_k)_{k \geq 1}$ em $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$, respectivamente, que deverão convergir para a solução procurada. Fixada uma extensão contínua h_1 de f sobre $\partial\Omega_2$, escolhemos v_1 como sendo a solução do problema de Dirichlet em Ω_2 , com condição de contorno h_1 . Analogamente, definimos g_1 sobre $\partial\Omega_1$ como sendo a função contínua dada por f em $\partial\Omega_1 \setminus \sigma_2$ e por v_1 em σ_2 . Tome-mos u_1 , a solução do problema de Dirichlet em Ω_1 com condição de contorno g_1 .

Figura 4.3: As regiões Ω_1 e Ω_2

Estando definidas as funções harmônicas u_{j-1} em $\overline{\Omega}_1$ e v_j em $\overline{\Omega}_2$, seja

$$g_j(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \partial\Omega_1 \setminus \sigma_2, \\ v_j(x) & \text{se } x \in \sigma_2. \end{cases}$$

Assim, $g_j \in C(\partial\Omega_1)$ e existe u_j correspondente à solução do problema de Dirichlet em Ω_1 , com condição de contorno g_j ; nesse caso, podemos definir

$$h_{j+1}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \partial\Omega_2 \setminus \sigma_1, \\ u_j(x) & \text{se } x \in \sigma_1, \end{cases}$$

e escolhemos v_{j+1} como sendo a solução do problema de Dirichlet em Ω_2 , com condição de contorno contínua h_{j+1} .

Fixado $k \geq 1$ inteiro, escrevemos

$$u_k = u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_k - u_{k-1}), \quad (4.3)$$

$$v_k = v_1 + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_k - v_{k-1}). \quad (4.4)$$

Sejam

$$M := \max_{\partial\Omega} |f| + \max_{\partial\Omega_2} |h_1| \quad \text{e} \quad \theta := \max \{ \theta_{\sigma_1}, \theta_{\sigma_2} \},$$

onde $\theta_{\sigma_1}, \theta_{\sigma_2} < 1$ são dados pelo Lema 4.3 com respeito a Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Pelo princípio do máximo, $|v_1| \leq M$ e $|v_2| \leq M$ em Ω_2 ; logo, $|v_2 - v_1| \leq 2M$ sobre σ_1 . Além disso, $v_2 - v_1 = 0$ sobre $\partial\Omega_2 \setminus \sigma_1$. Segue do Lema 4.3 que

$$|v_2 - v_1| \leq 2\theta_{\sigma_2} M \leq 2\theta M \quad \text{em } \sigma_2.$$

Portanto, $|u_2 - u_1| \leq 2\theta M$ em $\partial\Omega_1$. Pelo princípio do máximo,

$$|u_2 - u_1| \leq 2\theta M \quad \text{em } \overline{\Omega}_1.$$

Da mesma forma, obtemos

$$|v_3 - v_2| \leq 2\theta^2 M \quad \text{em } \overline{\Omega}_2.$$

Repetindo sucessivamente o argumento acima, teremos

$$|u_{j+1} - u_j| \leq 2\theta^{2j-1} M \quad \text{em } \overline{\Omega}_1 \quad \text{e} \quad |v_{j+1} - v_j| \leq 2\theta^{2j-2} M \quad \text{em } \overline{\Omega}_2,$$

para todo $j \geq 1$. Segue das estimativas acima que

$$\begin{aligned} |u_2 - u_1| + \cdots + |u_{k+1} - u_k| &\leq \\ &\leq 2\theta M + \cdots + 2\theta^{2k-1} M < \frac{2\theta M}{1 - \theta^2} \\ |v_2 - v_1| + \cdots + |v_{k+1} - v_k| &\leq \\ &\leq 2M + 2\theta^2 M + \cdots + 2\theta^{2k-2} M < \frac{2M}{1 - \theta^2} \end{aligned}$$

e, portanto, as somas parciais (4.3) e (4.4) convergem uniformemente para u em $\overline{\Omega}_1$ e v em $\overline{\Omega}_2$, respectivamente. Além disso, segue do Corolário 1.7.1 que u e v são harmônicas em seus respectivos domínios.

Fixando nossas atenções em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, vemos que ambas as seqüências $(v_k - u_k)_{k \geq 1}$ e $(v_{k+1} - u_k)_{k \geq 1}$ convergem uniformemente a $v - u$ em $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$. Ainda, por construção, $v_k = u_k$ sobre σ_2 e $v_{k+1} = u_k$ sobre σ_1 , $\forall k \geq 1$. Portanto, $u = v$ em $\sigma_1 \cup \sigma_2$, de onde temos $u = v$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

A função w que vale u em Ω_1 e v em Ω_2 satisfaz o problema de Dirichlet em $\Omega_1 \cup \Omega_2$ com condição de contorno f . ■

O método de Schwarz, embora forneça a possibilidade de resolução do problema de Dirichlet para uma classe bastante ampla de regiões no plano, utiliza-se fortemente das funções analíticas, as quais, por sua vez, estão intimamente ligadas às transformações conformes no plano.

O teorema abaixo mostra que a situação é bem diferente em dimensão $n \geq 3$:⁽⁴⁾

TEOREMA 4.4 (LIOUVILLE) *Se $n \geq 3$, então todas as transformações conformes em $\mathbb{R}^n$ são obtidas por composição das seguintes operações:*

1. *Translação:* $x \mapsto x + h, h \in \mathbb{R}^n$;
2. *Homotetia:* $x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$;
3. *Rotação:* $x \mapsto Ax, A \in O(n)$;
4. *Inversão:* $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$.

Poincaré iria posteriormente encontrar uma maneira eficiente de estender o método de Schwarz em dimensão superior (Vid Seção 4.3).

4.2 O método da equação integral de Fredholm

Embora o método de Schwarz tratasse do problema de Dirichlet de forma bastante geral, permanecia o sério inconveniente de estar restrito à dimensão 2. Não havendo uma teoria de representação conforme suficientemente ampla em dimensão superior, surgiu a idéia de transformar o problema de Dirichlet numa equação integral.

⁽⁴⁾Cf. R. Nevanlinna, [54].

Como vimos no Capítulo 1, o potencial eletrostático gerado por uma densidade de cargas ρ na superfície de um condutor $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é dado por

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dy \quad \forall x \in \Omega.$$

Assim, ficava a questão de se determinar uma densidade ρ capaz de gerar o potencial desejado sobre $\partial\Omega$.

Esse trabalho foi posto em prática de maneira independente por Neumann⁽⁵⁾ e Gustave Robin⁽⁶⁾ (1855-1897) durante as décadas de 1870 e 1880. Suas demonstrações basearam-se no método de aproximações sucessivas; no entanto, seus resultados ainda se restringiam ao caso em que Ω fosse convexo.

Entre 1900 e 1903, Erik Ivar Fredholm (1866-1927) tratou de equações integrais mais gerais da forma⁽⁷⁾

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \phi(y) dy.$$

Para isso, Fredholm desenvolveu um interessante aparato de determinantes infinitos. Tais determinantes infinitos constituíam uma versão rigorosa das idéias imprecisas que Fourier utilizara na obtenção dos coeficientes de sua série. Essa técnica daria origem a um resultado clássico da Análise Funcional:

TEOREMA 4.5 (ALTERNATIVA DE FREDHOLM) *Sejam $\mathbb{E}$ um espaço de Banach e $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ um operador linear contínuo e compacto. Logo, exatamente uma das condições seguintes se verifica:*

- $(I + L)\mathbb{E} = \mathbb{E}$.
- Existe $x \neq 0$ tal que $(I + L)x = 0$.

⁽⁵⁾K. G. Neumann, *Untersuchungen über das logarithmische und newtonische Potential*, Leipzig, 1877. Apud C. E. Picard, [56], p.257.

⁽⁶⁾G. Robin, [65]

⁽⁷⁾E. I. Fredholm, *Kongl. Svenska Akad. For.* **57** (1900), 39–46; [29].

Lembramos que um operador $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ é compacto se para todo conjunto limitado $A \subset \mathbb{E}$, então $L(A)$ é relativamente compacto.

O trabalho de Fredholm representou o pontapé inicial para um estudo sistemático das equações integrais, no qual se destacou Hilbert⁽⁸⁾ durante a primeira década do século 20.

Como forma de apresentar uma aplicação da Alternativa de Fredholm, vamos obter as soluções do problema de Dirichlet na forma de um potencial de camada dupla. Mais precisamente,⁽⁹⁾

TEOREMA 4.6 (NEUMANN-ROBIN) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado suave. Dada $f \in C(\partial\Omega)$, existe $\mu \in C(\partial\Omega)$ tal que*

$$u(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log |x - y| d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega \quad (4.5)$$

é solução clássica do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Um outro ingrediente na demonstração do Teorema 4.6 é o bem conhecido

TEOREMA 4.7 (ASCOLI-ARZELÀ) *Sejam K um espaço métrico compacto e $(u_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de funções contínuas em K . Se $(u_k)_{k \geq 1}$ for equicontínua, então existe uma subseqüência $(u_{k_j})_{j \geq 1}$ tal que*

$$u_{k_j} \rightarrow u \quad \text{uniformemente em } K$$

para algum $u \in C(K)$.

Uma seqüência $(u_k)_{k \geq 1}$ é dita equicontínua se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon \quad \forall k \geq 1.$$

Vamos também precisar do seguinte (Vid Exercício 4.1)

⁽⁸⁾D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig, 1912. Apud G. D. Birkhoff, op cit, p.437.

⁽⁹⁾Cf. B. Epstein, [19], pp.179–182.

LEMA 4.8 Dada $\mu \in C(\partial\Omega)$, seja

$$v(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x-y| d\sigma_y \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Então v é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$. Além disso, para todo $x_0 \in \partial\Omega$ temos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} v(x) = \mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x_0-y| d\sigma_y, \quad (4.7)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin \Omega}} v(x) = -\mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x_0-y| d\sigma_y \quad (4.8)$$

e as derivadas normais internas e externas de v coincidem:

$$\frac{\partial v}{\partial\nu_i}(x_0) = \frac{\partial v}{\partial\nu_e}(x_0). \quad (4.9)$$

Demonstração do Teorema 4.6. Vamos dividir a demonstração em quatro etapas:

1ª etapa. O problema (4.5)–(4.6) é equivalente a encontrar $\mu \in C(\partial\Omega)$ tal que

$$f(x) = \mu(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x-y| d\sigma_y \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (4.10)$$

Suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ seja uma função harmônica em Ω , sendo representada por um potencial de camada dupla gerado por uma densidade contínua μ sobre $\partial\Omega$, dada por (4.5).

Vamos definir $f := u|_{\partial\Omega}$. Segue então do Lema 4.8 acima que para todo $x_0 \in \partial\Omega$ temos

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = \mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x_0-y| d\sigma_y.$$

Reciprocamente, se $\mu \in C(\partial\Omega)$ verifica (4.10), então um argumento análogo mostra que u , dada por (4.5), satisfaz o problema de Dirichlet (4.6).

2ª etapa. Dada $\mu \in C(\partial\Omega)$, seja

$$(L\mu)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x-y| d\sigma_y \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (4.11)$$

Então, $L : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ é um operador linear contínuo e compacto.

Vamos primeiramente estudar o núcleo do operador integral acima, que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x-y| = -\frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot \nu_y. \quad (4.12)$$

Sendo $\partial\Omega$ uma curva suave (portanto com curvatura contínua), segue de um cálculo elementar que tal núcleo define uma função contínua sobre $\partial\Omega \times \partial\Omega$ (Vid Exercício 4.2). Em particular, se $\mu \in C(\partial\Omega)$, então

$$x \in \partial\Omega \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x-y| d\sigma_y$$

define uma função contínua na variável x .

Assim, o operador linear $L : C(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)$ está bem definido, é linear e contínuo (pois o núcleo é limitado). Resta verificar que L é compacto. Com efeito, se $(\mu_k)_{k \geq 1}$ for uma seqüência limitada em $C(\partial\Omega)$, então $(L\mu_k)_{k \geq 1}$ é limitada e, tendo a integral um núcleo contínuo, é eqüicontínua. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, existe uma subseqüência convergente de $(L\mu_k)_{k \geq 1}$ e, portanto, L é um operador compacto.

3ª etapa. Se $\mu \in C(\partial\Omega)$ satisfaz $(I + L)\mu = 0$, então $\mu = 0$.

Seja $\mu \in C(\partial\Omega)$ tal que

$$\mu(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x_0-y| d\sigma_y = 0 \quad \forall x_0 \in \partial\Omega. \quad (4.13)$$

Vamos definir o potencial de camada dupla em $\mathbb{R}^2$ resultante da distribuição μ em $\partial\Omega$:

$$v(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \log|x-y| d\sigma_y \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.14)$$

Fazendo $x \rightarrow x_0$, $x \in \Omega$ em (4.14), segue de (4.7) e de (4.13) que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} v(x) = 0.$$

Dessa forma, v é uma função harmônica em Ω , convergindo a zero na fronteira $\partial\Omega$. Pelo princípio do máximo, $v \equiv 0$ em Ω e, em particular, $\left. \frac{\partial v}{\partial \nu_1} \right|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Utilizando a identidade (4.9), teremos $\left. \frac{\partial v}{\partial \nu_e} \right|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Seja $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ uma bola com raio R grande o suficiente tal que $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$. Como v é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$ e $\frac{\partial v}{\partial \nu_e} \equiv 0$ em $\partial\Omega$, então a primeira identidade de Green (2.21), aplicada à função v sobre a região compreendida entre $\partial B_R(0)$ e $\partial\Omega$, nos fornece:

$$\int_{B_R(0) \setminus \bar{\Omega}} |\nabla v|^2 dx = \int_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma. \quad (4.15)$$

Vamos mostrar que a segunda integral em (4.15) converge a zero quando $R \rightarrow \infty$.

Com efeito, segue de (4.12) que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log |x - y| \right| \leq \frac{C}{|x - y|} \quad \text{e} \quad \left| \nabla_x \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log |x - y| \right\} \right| \leq \frac{C}{|x - y|^2},$$

de onde obtemos as estimativas:

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \frac{C}{d(\partial\Omega; \partial B_R(0))} \\ |\nabla v(x)| &\leq \frac{C}{d(\partial\Omega; \partial B_R(0))^2} \end{aligned} \quad \forall x \in \partial B_R(0).$$

Conseqüentemente,

$$\left| \int_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma \right| \leq C \frac{R}{d(\partial\Omega; \partial B_R(0))^3} \rightarrow 0$$

quando $R \rightarrow \infty$.

Logo, por (4.15), temos $\nabla v \equiv 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ e, portanto, v é constante em $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$. Ora, como $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, isso significa que

$v \equiv 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$. Por outro lado, (4.7) e (4.8) indicam que v sofre uma variação de 2μ ao atravessar a fronteira $\partial\Omega$ e, conseqüentemente, $\mu = 0$, como queríamos mostrar.

4ª etapa. Fim da demonstração.

Reescrevendo a equação (4.10) em termos de L , temos:

$$f = (I + L)\mu,$$

onde $f, \mu \in C(\partial\Omega)$.

Pela 2ª etapa, o operador L satisfaz as hipóteses da Alternativa de Fredholm. Segue da etapa precedente que dado $f \in C(\partial\Omega)$ existe um único $\mu \in C(\partial\Omega)$ tal que $f = (I + L)\mu$ ou, equivalentemente, satisfazendo a equação (4.10). Logo, a função u dada por

$$u(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log |x - y| d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega,$$

satisfaz o problema de Dirichlet (4.6). ■

No caso de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, a extensão natural do Teorema 4.6 consiste em procurar representações de funções harmônicas na forma

$$u(x) := - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega.$$

Ao contrário do que ocorre em dimensão 2, a equação integral resultante não tem núcleo contínuo, de maneira que a Alternativa de Fredholm deve ser utilizada após uma convolução de núcleos, até que seja atingida a compacidade do operador resultante⁽¹⁰⁾.

4.3 O método de varredura de Poincaré

Pelos quase 20 anos que se seguiram ao exemplo de Weierstrass, várias foram as tentativas de resolução do problema de Dirichlet. No entanto, nenhuma era capaz de colocar um ponto final à questão.

⁽¹⁰⁾Cf. S. L. Sobolev, [67], p.256 et seq.

Entre 1870 e 1890, alguns métodos foram desenvolvidos com esse intuito, dentre os quais podemos destacar aqueles ligados a Schwarz, Neumann, Harnack, Robin e Murphy, além de um sem-número de outros métodos, que Poincaré denomina métodos alternantes (*méthodes alternantes*)⁽¹¹⁾.

Em 1887, Poincaré submete à Academia de Ciências de Paris um artigo de apenas três páginas intitulado *Sur le Problème de la Distribution Électrique*⁽¹²⁾, propondo um novo método de resolução para o problema de Dirichlet. Uma nova versão corrigida e mais detalhada seria publicada em 1890 no então recém criado *American Journal of Mathematics*⁽¹³⁾.

Ilustraremos o método de varredura na construção do chamado potencial condutor de um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

DEFINIÇÃO (POTENCIAL CONDUTOR) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será denominada um potencial condutor de Ω se as seguintes condições se verificam:*

- *u é contínua em $\mathbb{R}^n$ e harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$;*
- *$u \equiv 1$ sobre $\overline{\Omega}$;*
- *$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.*

Pelo princípio do máximo, sabemos que caso uma tal função exista ela deverá ser única (Vid Exercício 4.3). Note que não existem potenciais condutores em dimensão $n = 2$. De fato,

PROPOSIÇÃO 4.9 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ for um aberto limitado, então Ω não possui um potencial condutor.*

Demonstração. Vamos supor por simplicidade que $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde Ω é um aberto limitado que admita um potencial condutor u . Se

⁽¹¹⁾Cf. H. Poincaré, [58], p.33.

⁽¹²⁾H. Poincaré, [57].

⁽¹³⁾H. Poincaré, [58].

$r > 0$ for tal que $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$, então para cada $\varepsilon > 0$ teremos

$$1 + \varepsilon \log \frac{r}{|x|} < 1 = u(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Além disso, se $|x| \geq re^{1/\varepsilon}$, então

$$1 + \varepsilon \log \frac{r}{|x|} \leq 0 < u(x).$$

Conseqüentemente, segue do princípio do máximo que

$$1 + \varepsilon \log \frac{r}{|x|} < u(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}. \quad (4.16)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (4.16), obtemos $u(x) = 1$ para todo $x \notin \overline{\Omega}$, um absurdo. ■

Quando $n \geq 3$, temos o seguinte

TEOREMA 4.10 (POINCARÉ) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, satisfaz a condição da esfera interior, então o potencial condutor de Ω existe.*

Demonstração. Fixemos $R > 0$ suficientemente grande tal que $\overline{\Omega} \subset B_R(0)$; vamos denotar por $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ o potencial condutor de $B_R(0)$, i.e.,

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_R(0) \\ \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} & \text{se } x \notin B_R(0). \end{cases}$$

Seja, ainda, $B_1, B_2, B_3, \dots$ uma família enumerável de bolas abertas que cobrem $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Vamos construir uma seqüência de funções $(u_k)_{k \geq 1}$, de maneira que u_1 seja o rebaixamento harmônico de u_0 em B_1 e, para $k > 1$, definiremos u_k como sendo o rebaixamento harmônico de u_{k-1} em B_{j_k} , onde B_{j_k} é a k -ésima bola da seqüência

$$B_1 B_2 B_1 B_2 B_3 B_1 B_2 B_3 B_4 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 \cdots, \quad (4.17)$$

e cada bola aparece um número infinito de vezes.

Como u_0 é super-harmônica e o rebaixamento harmônico de funções super-harmônicas preserva essa propriedade (Vid Seção 1.5), segue que $(u_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de funções super-harmônicas; além disso, tal seqüência é não-crescente, em outras palavras,

$$u_0(x) \geq u_1(x) \geq u_2(x) \geq u_3(x) \geq \dots \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Seja $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$.

Fixada uma bola $B := B_j$, vamos denotar por $\mathbb{N}_j \subset \mathbb{N}$ o conjunto das posições onde B aparece na seqüência (4.17); assim, se $k \in \mathbb{N}_j$, então u_k é o rebaixamento harmônico de u_{k-1} sobre B ; em particular, a função u_k é harmônica em B , $\forall k \in \mathbb{N}_j$.

Sendo $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_j}$ uma seqüência de funções harmônicas convergindo em B , segue do Corolário 1.7.1 que $u = \lim_{k \in \mathbb{N}_j} u_k$ é harmônica em B .

Como B é um elemento arbitrário de nossa família, então u deve ser harmônica sobre $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Além disso, como $u_0 \geq u \geq 0$, então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Resta analisarmos o comportamento de u próximo a $\partial\Omega$: Dado $z \in \partial\Omega$, seja $B_r(z_0) \subset \Omega$ uma bola satisfazendo a condição da esfera interior, i.e., $\overline{B_r(z_0)} \cap \partial\Omega = \{z\}$. Utilizando o princípio do máximo temos

$$1 \geq u_0(x) \geq \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Sendo $x \mapsto \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}}$ uma função harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, devemos ter

$$1 \geq u_k(x) \geq \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \quad \forall k \geq 1.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ na expressão acima, virá

$$1 \geq u(x) \geq \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Logo, $\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \notin \overline{\Omega}}} u(x) = 1.$ ■

Fisicamente, o método de Poincaré consiste em varrer (ou *balayer*, em francês) as cargas positivas de densidade inicial $-\Delta u_0$ para a superfície de $\bar{\Omega}$.

Como veremos a seguir, o conhecimento dos potenciais condutores em $\mathbb{R}^n$ permite construir a parte regular da função de Green associada ao problema de Dirichlet num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. De fato, utilizando o Teorema 4.10, podemos deduzir o seguinte

TEOREMA 4.11 (POINCARÉ) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, satisfaz a condição da esfera exterior, então existe a função de Green em Ω .*

Para demonstrar o Teorema 4.11 a partir do Teorema 4.10, necessitaremos de dois resultados clássicos em Teoria do Potencial. O primeiro é o Princípio da Singularidade Removível, devido a Émile Picard (1856-1941); o segundo resultado diz respeito à transformação de Kelvin, que havia sido proposta por Thompson numa carta a Liouville quando aquele tinha apenas 21 anos⁽¹⁴⁾.

PROPOSIÇÃO 4.12 (PRINCÍPIO DA SINGULARIDADE REMOVÍVEL)
Seja u uma função harmônica e limitada em $\bar{B}_r(x_0) \setminus \{x_0\}$. Logo, u pode ser estendida continuamente a $\bar{B}_r(x_0)$, e a extensão resultante é harmônica em $B_r(x_0)$.

Demonstração. Vamos supor por simplicidade que $n \geq 3$ (Vid Exercício 4.5). Seja v a solução do problema de Dirichlet em $B_r(x_0)$, com condição de contorno $u|_{\partial B_r(x_0)}$. Substituindo u por $u - v$, podemos supor de início $u|_{\partial B_r(x_0)} \equiv 0$ e, nesse caso, será suficiente mostrarmos que $u \equiv 0$ em $\bar{B}_r(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Seja $M > 0$ tal que $|u| \leq M$ em $\bar{B}_r(x_0) \setminus \{x_0\}$. Fixado $0 < \varepsilon < r$, teremos

$$M \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x - x_0|^{n-2}} = M \geq |u(x)| \quad \forall x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$$

e

$$M \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x - x_0|^{n-2}} > 0 = |u(x)| \quad \forall x \in \partial B_r(x_0).$$

⁽¹⁴⁾W. Thompson, [69].

Como a função $x \mapsto M \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x-x_0|^{n-2}}$ é harmônica em $B_r(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, segue do princípio do máximo que

$$|u(x)| \leq M \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x-x_0|^{n-2}} \quad \forall x \in B_r(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.18)$$

A desigualdade (4.18) é claramente verdadeira em $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$; logo,

$$|u(x)| \leq M \frac{\varepsilon^{n-2}}{|x-x_0|^{n-2}} \quad \forall x \in B_r(x_0), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, teremos $u(x) = 0$. ■

PROPOSIÇÃO 4.13 (TRANSFORMAÇÃO DE KELVIN) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um aberto limitado contendo a origem e Ω^* a reflexão de $\Omega \setminus \{0\}$ com relação a $\partial B_1(0)$ ⁽¹⁵⁾. Dada uma função u harmônica em Ω^* tal que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$, então*

$$v(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \quad (4.19)$$

define uma função harmônica em Ω .

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que v é harmônica em $\Omega \setminus \{0\}$. Definindo $y := \frac{x}{|x|^2}$, se $x \neq 0$, virá

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) u(y) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u(y) + \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(y). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Portanto, como $\Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) = -(n-2) \frac{x_k}{|x|^n}$,

$$\Delta v = -\frac{2(n-2)}{|x|^n} x \cdot \nabla_x u(y) + \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta_x u(y). \quad (4.21)$$

⁽¹⁵⁾Vid Seção 2.2.2.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} u(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(y) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} \\ &= 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x \cdot \nabla_x u(y) &= \sum_{i=1}^n x \cdot \nabla y_i \frac{\partial u}{\partial y_i}, \\ \Delta_x u(y) &= 2 \sum_{i < j} \nabla y_i \cdot \nabla y_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{l=1}^n |\nabla y_l|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} + \Delta y \cdot \nabla u.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial x_k} &= \frac{\delta_{ik}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_k}{|x|^4}, \\ \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} &= -\frac{4x_k}{|x|^4} \delta_{ik} - \frac{2x_i}{|x|^4} + \frac{8x_i x_k^2}{|x|^6}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x \cdot \nabla y_i &= -\frac{x_i}{|x|^2}, \\ \nabla y_i \cdot \nabla y_j &= \frac{\delta_{ij}}{|x|^4}, \\ \Delta y &= -2(n-2) \frac{x}{|x|^4},\end{aligned}$$

de onde temos, após substituição das expressões acima em (4.22),

$$\begin{aligned}x \cdot \nabla_x u(y) &= -\frac{1}{|x|^2} x \cdot \nabla u, \\ \Delta_x u(y) &= \frac{1}{|x|^4} \Delta u - \frac{2(n-2)}{|x|^4} x \cdot \nabla u\end{aligned}$$

e, conseqüentemente, segue de (4.21) que

$$\Delta v(x) = \frac{1}{|x|^{n+2}} \Delta u(y).$$

Sendo u uma função harmônica, obtemos finalmente $\Delta v = 0$ em $\Omega \setminus \{0\}$.

Resta demonstrar que v pode ser estendida continuamente a $0 \in \Omega$ e que a extensão é harmônica nesse ponto. Em vista da proposição anterior, basta verificar que v permanece limitada numa vizinhança de 0.

Com efeito, seja $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \subset \Omega$; vamos mostrar que

$$|v(x)| \leq \frac{M}{r^{n-2}} \quad \forall x \in B_r(0) \setminus \{0\}, \quad (4.23)$$

onde $M = \max_{y \in \partial B_{1/r}(0)} |u(y)|$. Note que $\mathbb{R}^n \setminus B_{1/r}(0) \subset \Omega^*$; assim, u está bem definida em $\partial B_{1/r}(0)$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ temos

$$|u(y)| \leq M < M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} + \varepsilon \quad \forall y \in \partial B_{1/r}(0).$$

Como $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$, existe $R > 1/r > 0$ tal que $|u(y)| < \varepsilon$ se $|y| \geq R$; portanto,

$$|u(y)| \leq \varepsilon < M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} + \varepsilon \quad \forall y \in \partial B_{R_1}(0), \quad \forall R_1 \geq R.$$

Segue do princípio do máximo que

$$|u(y)| < M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} + \varepsilon \quad \text{se } |y| \geq \frac{1}{r}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos fazer $\varepsilon \rightarrow 0$ na expressão acima e teremos

$$|u(y)| \leq M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} \quad \text{se } |y| \geq \frac{1}{r}.$$

Portanto, tomando $y = \frac{x}{|x|^2}$, onde $x \in B_r(0)$ e $x \neq 0$, obtemos finalmente

$$|v(x)| = \frac{1}{|x|^{n-2}} \left| u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right| = |y|^{n-2} |u(y)| \leq \frac{M}{r^{n-2}}.$$

Utilizando o Princípio da Singularidade Removível, concluímos que v pode ser estendida continuamente a 0, e a extensão resultante é harmônica em Ω . ■

A transformação de Kelvin pode ser imediatamente generalizada por meio de translações e homotetias. Por exemplo, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $x_0 \in \Omega$, seja $\Omega_{x_0}^*$ a reflexão de $\Omega \setminus \{x_0\}$ com relação a $\partial B_1(x_0)$, i.e., $\Omega_{x_0}^*$ é a imagem de $\Omega \setminus \{x_0\}$ por meio da aplicação $y(x) := \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0$. Nesse caso, dada uma função u harmônica em $\Omega_{x_0}^*$ tal que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$, então

$$v_{x_0}(x) := \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} u\left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0\right) \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\}, \quad (4.24)$$

se estende a uma função harmônica em Ω .

Demonstração do Teorema 4.11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado; então, para cada $x_0 \in \Omega$, o conjunto $\omega_{x_0} := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_{x_0}^*}$ é um aberto limitado satisfazendo a condição da esfera interior. Pelo Teorema 4.10, existe um potencial condutor u_{x_0} associado a ω_{x_0} .

A função v_{x_0} dada por (4.24) com $u = u_{x_0}$ é harmônica em Ω e, como $u_{x_0}|_{\partial\Omega_{x_0}^*} \equiv 1$, devemos ter $v_{x_0}(x) = \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}}$ sobre $\partial\Omega$, ou seja, v_{x_0} é a parte regular da função de Green em Ω , a menos de um fator multiplicativo constante. ■

É possível adaptar o método de varredura para construir a solução do problema de Dirichlet com condição de contorno $f \in C(\partial\Omega)$:

TEOREMA 4.14 (POINCARÉ) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, satisfaz a condição da*

esfera exterior, então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.25)$$

admite solução para toda $f \in C(\partial\Omega)$.

Esboço da demonstração. (Vid Exercício 4.6)

1ª etapa. Suponha que exista $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ super-harmônica tal que $u_0 = f$ sobre $\partial\Omega$. Então, (4.25) tem uma solução.

Partindo da função u_0 , a demonstração do Teorema 4.10 nos fornece uma função harmônica u em Ω . Utilizando a mesma demonstração da Proposição 4.18 (Vid Seção 4.5 abaixo), é possível concluir que u é contínua em $\overline{\Omega}$ e $u = f$ sobre $\partial\Omega$.

2ª etapa. Suponha que exista $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_0 = f$ sobre $\partial\Omega$. Então, (4.25) tem uma solução.

Seja $\alpha := \frac{1}{2n} \max_{\overline{\Omega}} \Delta u_0$. Aplicando a etapa precedente separadamente a $(u_0 - \alpha|x|^2)$ e a $(-\alpha|x|^2)$, que nesse caso são super-harmônicas, também podemos resolver o problema para uma tal função f .

3ª etapa. Fim da demonstração.

Dada $f \in C(\partial\Omega)$, utilizamos o Teorema de Tietze para estendê-la a uma função $\tilde{f} \in C(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, $\tilde{f}$ pode ser aproximada uniformemente por funções polinomiais em x , a partir das quais podemos resolver o problema de Dirichlet em virtude da etapa precedente. Segue do princípio do máximo que as soluções associadas a tais polinômios deverão convergir para a solução do problema de Dirichlet com condição de contorno f . ■

Muito embora o método de Poincaré resolva o problema de Dirichlet para uma classe suficientemente ampla de regiões limitadas em $\mathbb{R}^n$, essa técnica possui o inconveniente de não se aplicar diretamente a condições de contorno $f \in C(\partial\Omega)$. Contudo, já se esboçava aqui uma certa tendência de divisão do problema de Dirichlet em duas partes:

1. Resolver o problema de Dirichlet no interior do domínio Ω ;
2. Estudar o comportamento das soluções próximo a $\partial\Omega$.

Tal estratégia seria decisiva nas tentativas subseqüentes de se entender os resultados obtidos por Poincaré.

4.4 Nova crise no problema de Dirichlet

Muito embora os trabalhos de Poincaré no final do século 19 tenham dado um grande impulso ao estudo do problema de Dirichlet, este resistia bravamente às tentativas posteriores de resolvê-lo completamente, i.e., de se demonstrar que a equação de Laplace, sujeita a condições de contorno contínuas, sempre teria solução para todo aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Como observa Kellogg⁽¹⁶⁾, até o início do século 20 acreditava-se que esse objetivo não era atingido pelas limitações inerentes que cada demonstração impunha à solubilidade do problema. No entanto, num artigo publicado em 1911, Stanislaw Zaremba (1863-1942) iria apresentar um exemplo bastante elementar de não-existência de solução do problema de Dirichlet⁽¹⁷⁾:

PROPOSIÇÃO 4.15 (ZAREMBA) *Sejam $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, se $x \in \partial B_1(0)$, e $f(0) = 1$. Então, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

não admite uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Se existisse uma tal solução seguir-se-ia do Princípio da Singularidade Removível que u deveria ser harmônica em $B_1(0)$, mas cujo máximo seria atingido no interior dessa região, o que é um absurdo. ■

⁽¹⁶⁾Cf. O. D. Kellogg, [40], p.285.

⁽¹⁷⁾S. Zaremba, [76]

Em 1913, Henri Léon Lebesgue (1875-1941) iria apresentar um exemplo bem mais surpreendente de não-solubilidade do problema de Dirichlet em $\mathbb{R}^3$.⁽¹⁸⁾

TEOREMA 4.16 (LEBESGUE) *Existem um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo à bola B_1 e $f \in C(\partial\Omega)$ para os quais o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

não admite uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Consideremos uma barra L de comprimento 1 em $\mathbb{R}^3$ posicionada sobre o semi-eixo x positivo, com uma das extremidades na origem, e com uma densidade linear (de massa) λ dada por $\lambda(x) = x_1$. Nesse caso, o potencial gravitacional resultante será (Vid Figura 4.4):

$$u(x) = \int_0^1 \frac{s \, ds}{\sqrt{(x_1 - s)^2 + \rho^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus L, \quad (4.26)$$

onde $\rho := \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Para $\rho \neq 0$ teremos

$$\begin{aligned} u(x) &= x_1 \int_{x_1-1}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} - \int_{x_1-1}^{x_1} \frac{t \, dt}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} \\ &=: x_1 A(x) - B(x). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Fazendo a mudança de coordenadas $t = \rho \sinh \xi$ na integral A , virá

⁽¹⁸⁾H. L. Lebesgue, [48].

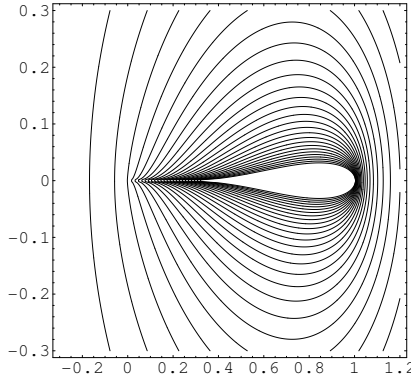


Figura 4.4: Curvas de nível do potencial gravitacional gerado por L

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \int_{x_1-1}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} \\
 &= \operatorname{arsenh} \left(\frac{x_1}{\rho} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{1-x_1}{\rho} \right) \\
 &= \log \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2}}{\rho} + \log \frac{(1-x_1) + \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2}}{\rho} \\
 &= -2 \log \rho + \\
 &\quad + \log \left[\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2} \right) \left(1-x_1 + \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Por outro lado, por integração direta,

$$B(x) = \sqrt{x_1^2 + \rho^2} - \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2}.$$

Devemos estudar o comportamento do potencial u numa vizinhança

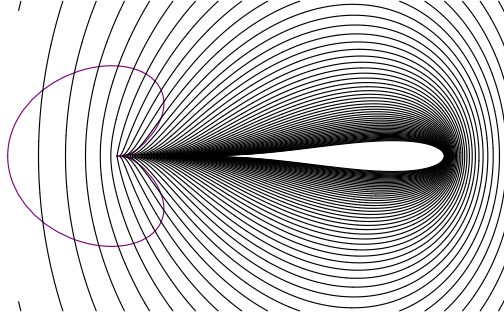


Figura 4.5: Curvas de nível de u em Ω no plano x_1x_2

de 0. Para tanto, observemos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \notin L}} x_1 \log \left[\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2} \right) \left(1 - x_1 + \sqrt{(1 - x_1)^2 + \rho^2} \right) \right] = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \notin L}} \left\{ \sqrt{x_1^2 + \rho^2} - \sqrt{(1 - x_1)^2 + \rho^2} \right\} = -1.$$

Dessa forma, se aproximarmos de 0 ao longo das superfícies da forma $\rho = x_1^k$, segue de (4.27) que $u(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$. No entanto, fazendo $x \rightarrow 0$ ao longo das superfícies $\rho = e^{-\frac{\alpha}{2x_1}}$, onde $\alpha > 0$, então $u(x) \rightarrow 1 + \alpha$, ou seja, u não é contínua em 0. Por outro lado, sabemos da representação integral (4.26) que u é contínua em $\mathbb{R}^3 \setminus L$.

Consideremos uma curva Γ no plano x_1x_2 , simétrica com relação ao eixo x_1 , que tenha a mesma forma da curva fechada da Figura 4.5 de maneira que, próxima à origem, seja dada pela curva $x_2 = \pm e^{-\frac{1}{x_1}}$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a região contida na superfície gerada pela rotação de Γ em torno do eixo x_1 . Por construção, $u|_{\Omega}$ é harmônica e limitada, mas u não é contínua em $\bar{\Omega}$, muito embora $u|_{\partial\Omega}$ defina uma função contínua em $\partial\Omega$ e que, em particular,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \partial\Omega}} u(x) = 3.$$

Resta mostrar que o problema de Dirichlet não admite solução em Ω com condição de contorno $u|_{\partial\Omega}$. Com efeito, suponhamos que existisse uma função $v \in C(\overline{\Omega})$, harmônica em Ω , que coincidisse com u sobre $\partial\Omega$. Nesse caso, $u - v$ deve ser harmônica em Ω e nula sobre $\partial\Omega$. Segue de uma variante do Princípio da Singularidade Removível (Vid Exercício 4.5) que $u = v$ em $\overline{\Omega}$. Isso é uma contradição, pois u não está definida continuamente em $\overline{\Omega}$. ■

Os exemplos que apresentamos acima modificaram consideravelmente as formas de abordagem do problema de Dirichlet: a partir de então seria necessário determinar um critério que permitisse garantir a solubilidade do problema, mas também sua não-solubilidade.

4.5 O método das funções sub-harmônicas de Perron

A verdadeira natureza do problema de Dirichlet para a equação de Laplace seria revelada na década de 1920, quando verificou-se que a possibilidade ou não de sua resolução não dependia do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ considerado, mas apenas do comportamento local de cada um dos pontos de $\partial\Omega$.

Dentre os inúmeros matemáticos que trataram desse assunto no início do século 20, podemos destacar G. Bouligand, H. L. Lebesgue, Oskar Perron (1880-1975) e Norbert Wiener (1894-1964).

O método de Perron baseia-se no seguinte⁽¹⁹⁾

TEOREMA 4.17 (PERRON) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado qualquer. Dada $f \in C(\partial\Omega)$, definimos*

$$\mathcal{A}_f := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ é sub-harmônica e } v \leq f \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Então, a função

$$u_0(x) := \sup_{v \in \mathcal{A}_f} v(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (4.28)$$

⁽¹⁹⁾O. Perron, [55].

é harmônica.

Como f é limitada inferiormente, a função constante em $\bar{\Omega}$ igual a $\min_{\partial\Omega} f$ é um elemento de $\mathcal{A}_f$ e, portanto, $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$. Além disso, como $v \leq \sup_{\partial\Omega} f, \forall v \in \mathcal{A}_f$, a função u_0 dada por (4.28) está bem definida.

Observamos ainda que se o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.29)$$

tiver uma solução u , então $u_0 = u$. De fato, observe que $u \in \mathcal{A}_f$. Pelo princípio do máximo, devemos ter $v \leq u, \forall v \in \mathcal{A}_f$ (Vid Exercício 1.10). Logo, $u_0 = u$ em Ω .

Demonstração do Teorema 4.17. Vamos dividir a demonstração em duas etapas:

1ª etapa. Dada $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, então existe uma função semicontínua inferiormente (s.c.i.) U em $\bar{\Omega}$ tal que $U \leq u_0$ em $\bar{\Omega}$, U é harmônica em $B_R(x_0)$ e $U(x_0) = u_0(x_0)$.

Seja $(u_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{A}_f$ tal que $u_k(x_0) \rightarrow u_0(x_0)$. Como o máximo de funções sub-harmônicas também é sub-harmônico, temos $\max_{1 \leq j \leq k} u_j \in \mathcal{A}_f$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que a seqüência $(u_k)_{k \geq 1}$ é não-decrescente. Seja U_k o levantamento harmônico de u_k com respeito a $B_R(x_0)$. A seqüência $(U_k)_{k \geq 1}$ também é não-decrescente e definimos

$$U(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(x) = \sup_{k \geq 1} U_k(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

A função U é s.c.i., sub-harmônica e $U \leq f$ sobre $\partial\Omega$ (Vid Exercício 4.7). Por construção, $U \leq u_0$ em $\bar{\Omega}$. Além disso, $U(x_0) = u_0(x_0)$ e, pelo Corolário 1.7.1, U é harmônica em $B_R(x_0)$.

2ª etapa. u_0 é harmônica.

Sejam $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ e U a função dada pela etapa precedente. Como U é harmônica em $B_R(x_0)$, é suficiente mostrar que $U = u_0$ em $B_R(x_0)$.

Suponha por contradição que exista $y_0 \in B_R(x_0)$ tal que $U(y_0) < u_0(y_0)$. Seja $v \in \mathcal{A}_f$ tal que $v(y_0) > U(y_0)$. Considere $(U_k)_{k \geq 1}$ a sequência de levantamentos harmônicos utilizada na 1ª etapa. Para cada $k \geq 1$, vamos denotar por W_k o levantamento harmônico de máx $\{U_k, v\}$ com respeito a $B_R(x_0)$. Seja

$$W(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} W_k(x) = \sup_{k \geq 1} W_k(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, W também é s.c.i. em $\overline{\Omega}$, W é harmônica em $B_R(x_0)$ e $W \geq U$ sobre $B_R(x_0)$. Por outro lado, $W(x_0) = u_0(x_0) = U(x_0)$. Logo, pelo princípio do máximo forte, $W = U$ em $B_R(x_0)$. Isso contradiz a hipótese $W(y_0) \geq v(y_0) > U(y_0)$. Concluimos então que $u_0 = U$ em $B_R(x_0)$. ■

Em virtude do Teorema 4.17, caso estejamos interessados em verificar a solubilidade de (4.29) numa região Ω , então u_0 dada por (4.28) será nossa candidata natural a satisfazer tal problema. Por essa razão, diremos que $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por (4.28), é uma *solução generalizada* do problema de Dirichlet. Todo nosso trabalho se resume então a verificar se u_0 se estende continuamente a $\partial\Omega$, onde deve coincidir com f ; ou seja, devemos verificar se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u_0(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

Um aparato bastante útil para estudar o comportamento de u_0 próximo a $\partial\Omega$ é a noção de barreira que, muito embora tivesse sido utilizada implicitamente por Poincaré, sua importância seria reconhecida por Lebesgue em 1912, quem lhe conferiu esse nome⁽²⁰⁾:

DEFINIÇÃO (BARREIRA) *Uma função $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma barreira em $x_0 \in \partial\Omega$ com respeito a Ω se φ for super-harmônica, $\varphi(x_0) = 0$ e $\varphi(x) > 0$, se $x \neq x_0$.*

Muito embora tal propriedade diga respeito a um comportamento global de φ com respeito a Ω , Bouligand observou que a existência

⁽²⁰⁾H. L. Lebesgue, [47].

de barreiras em um ponto x_0 depende unicamente do comportamento de $\partial\Omega$ numa vizinhança desse ponto. Para explicar tal propriedade, vamos introduzir a seguinte

DEFINIÇÃO (BARREIRA LOCAL) *Um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ possui uma barreira local se existir uma barreira em x_0 com respeito a $\Omega \cap B_r(x_0)$ para algum $r > 0$. Nesse caso, dizemos que x_0 é um ponto regular de Ω .*

Evidentemente, toda barreira é uma barreira local. Reciprocamente, se φ é uma barreira local em x_0 , então existe uma barreira (global) $\bar{\varphi}$ em x_0 que coincide com φ numa vizinhança de x_0 . Com efeito, seja φ uma barreira local em x_0 , ou seja, φ é uma barreira com respeito a $\Omega \cap B_r(x_0)$ para algum $r > 0$. Denotando por

$$A := B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0) \quad \text{e} \quad \alpha := \inf_A \varphi > 0,$$

definimos $\bar{\varphi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\bar{\varphi}(x) := \begin{cases} \min \{ \varphi(x), \alpha \} & \text{se } x \in \Omega \cap B_r(x_0), \\ \alpha & \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(x_0). \end{cases} \quad (4.30)$$

Nesse caso, $\bar{\varphi}(x_0) = 0$, $\bar{\varphi}(x) > 0$ se $x \neq x_0$ e, além disso, $\bar{\varphi}$ é super-harmônica (Vid Exercício 4.8). Portanto, $\bar{\varphi}$ é uma barreira em x_0 com respeito a todo o conjunto Ω .

Vejamos alguns exemplos de domínios com pontos regulares:

EXEMPLO 4.1 Suponhamos $n = 2$ e que exista uma curva não-constante γ em $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ partindo de $x_0 \in \partial\Omega$; nessas condições, é possível definir um ramo da função $\log$ numa vizinhança de x_0 , da qual excluimos γ . Assim,

$$\varphi(z) := -\operatorname{Re} \frac{1}{\log z} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

irá definir uma barreira local em x_0 e, portanto, x_0 é um ponto regular de $\partial\Omega$. ■

EXEMPLO 4.2 Vamos considerar o caso de dimensão $n \geq 3$. Suponhamos que $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaça a condição da esfera exterior, i.e., que existam $r > 0$ e $y_0 \notin \bar{\Omega}$ tais que $\overline{B_r(y_0)} \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$. Nesse caso,

$$\varphi(x) := 1 - \frac{r^{n-2}}{|x - y_0|^{n-2}} \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

define uma barreira em x_0 . Portanto, todos os pontos que satisfazem a propriedade da esfera exterior são regulares. ■

EXEMPLO 4.3 Se $n \geq 2$ e se o problema de Dirichlet sempre admitir solução em Ω , então todos os pontos de $\partial\Omega$ são regulares. De fato, dado $x_0 \in \partial\Omega$, então a solução do problema de Dirichlet com condição de contorno $f(x) := |x - x_0|$ será uma barreira em x_0 em virtude do princípio do máximo. ■

O conhecimento dos pontos regulares de $\partial\Omega$ é útil por conta da seguinte

PROPOSIÇÃO 4.18 *Se $x_0 \in \partial\Omega$ for um ponto regular, então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_0(x) = f(x_0),$$

onde $f \in C(\partial\Omega)$ e u_0 é dada por (4.28).

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em $\partial\Omega$, existe $\delta > 0$ tal que tal que $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; além disso, o quociente $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$ é limitado por uma constante $M > 0$ em $\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$, ou seja,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| \quad \text{se } |x - x_0| \geq \delta.$$

Se x_0 for regular, então existe uma barreira (global) φ nesse ponto. Sendo φ positiva no compacto $\bar{\Omega} \setminus B_\delta(x_0)$, existe uma constante $b > 0$ tal que

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \geq b \quad \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus B_\delta(x_0),$$

de onde temos

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| \leq \frac{M}{b}\varphi(x) \quad \text{se } x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0). \quad (4.31)$$

Finalmente, segue de (4.31) e da continuidade de f que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon + \frac{M}{b}\varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (4.32)$$

Sejam

$$\begin{aligned} v(x) &:= f(x_0) - \varepsilon - \frac{M}{b}\varphi(x), \\ w(x) &:= f(x_0) + \varepsilon + \frac{M}{b}\varphi(x). \end{aligned}$$

Segue de (4.32) que $v \leq f \leq w$ sobre $\partial\Omega$. Como v é sub-harmônica, $v \in \mathcal{A}_f$; além disso, sendo w uma função super-harmônica, então w é maior que ou igual a todo elemento de $\mathcal{A}_f$ (Vid Exercício 1.10). Conseqüentemente,

$$v(x) \leq u_0(x) \leq w(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Fazendo $x \rightarrow x_0$, temos

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} u_0(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} u_0(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

e, sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos que $u_0(x) \rightarrow f(x_0)$ quando $x \rightarrow x_0$. ■

Pela Proposição 4.18, u_0 assume os valores de contorno desejados em todos os pontos regulares de $\partial\Omega$. Segue então do Exemplo 4.3 o seguinte

TEOREMA 4.19 *O problema de Dirichlet (4.29) possui uma solução para toda condição de contorno contínua se, e somente se, todos os pontos de $\partial\Omega$ forem regulares.*

Logo, a solubilidade do problema de Dirichlet depende apenas do comportamento local de cada um dos pontos de $\partial\Omega$, e não das condições de contorno dadas. Resta a questão de determinar a existência de barreiras locais em $\partial\Omega$.

Em 1924, Wiener publicou um artigo onde a construção de barreiras era transformada num problema de estimar uma certa série⁽²¹⁾. Antes de apresentar o resultado de Wiener, precisamos introduzir a noção de capacidade de um conjunto⁽²²⁾:

DEFINIÇÃO *Sejam $n \geq 3$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. A capacidade de K é definida como*

$$\text{Cap } K := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } \varphi \geq 1 \text{ sobre } K \right\}.$$

OBSERVAÇÃO 4 Se u_K for o potencial condutor de K , então é possível mostrar que $\text{Cap } K$ é a quantidade total de carga em K necessária para gerar u_K ; mais precisamente,

$$\text{Cap } K = \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\nabla u_K|^2 dx.$$

A observação acima nos permite determinar a capacidade de uma bola em $\mathbb{R}^n$:

EXEMPLO 4.4 Conforme vimos na Seção 4.3, o potencial condutor de $K := \overline{B_R(0)}$ é dado por

$$u_K(x) = \begin{cases} \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} & \text{se } |x| \geq R, \\ 1 & \text{se } |x| < R. \end{cases} \quad (4.33)$$

Logo,

$$\text{Cap } K = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}} \left[(n-2) \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-1}} \right]^2 dx = (n-2) \sigma_n R^{n-2}.$$

⁽²¹⁾N. Wiener, [74].

⁽²²⁾Vid E. H. Lieb e M. Loss, [51], pp.253–261, para outras definições equivalentes de capacidade.

■

Dados $0 < \lambda < 1$ e $x_0 \in \partial\Omega$, seja A_k a região exterior a Ω compreendida entre $\partial B_{\lambda^k}(x_0)$ e $\partial B_{\lambda^{k+1}}(x_0)$, i.e.,

$$A_k := \overline{B_{\lambda^k}(x_0)} \setminus (\Omega \cup B_{\lambda^{k+1}}(x_0)).$$

Com essa notação, temos⁽²³⁾:

TEOREMA 4.20 (CRITÉRIO DE WIENER) $x_0 \in \partial\Omega$ é um ponto regular se, e somente se, a série

$$\frac{\gamma_1}{\lambda} + \frac{\gamma_2}{\lambda^2} + \frac{\gamma_3}{\lambda^3} + \frac{\gamma_4}{\lambda^4} + \cdots \quad \text{diverge}, \quad (4.34)$$

onde $\gamma_k := \text{Cap } A_k$.

EXEMPLO 4.5 Pelo exemplo de Lebesgue, sabemos que a cúspide formada pela rotação da curva $y = e^{-1/x}$, $x \geq 0$, em torno do eixo x não é um ponto regular. Contudo, como observou Bouligand, caso tal cúspide seja dada pela rotação de $y = x^m$, $x \geq 0$, onde $m \geq 1$, então pelo Critério de Wiener é possível demonstrar que a origem é um ponto regular⁽²⁴⁾. ■

Entre 1920 e 1940, a Teoria do Potencial vivenciaria uma mudança de orientação, aproximando-se da Teoria da Integral de Lebesgue e, a partir da década de 1950, da Teoria das Distribuições de L. Schwartz⁽²⁵⁾. A referência [5] apresenta um panorama bastante interessante do desenvolvimento da Teoria do Potencial no século 20.

Já por volta de 1920, atingia-se então um grau bastante satisfatório de resolução do problema de Dirichlet. O Princípio de Dirichlet também voltaria a correr pelos belos campos da Matemática: ele não havia morrido como proclamara Neumann, mas iria permanecer adormecido, aguardando apenas que fosse resgatado das trevas.

⁽²³⁾Cf. O. D. Kellogg, op cit, pp.330–334.

⁽²⁴⁾Cf. O. D. Kellogg, op cit, p.334.

⁽²⁵⁾L. Schwartz, [66].

4.6 Exercícios

EXERCÍCIO 4.1 Demonstre o Lema 4.8.

Sugestão: Cf. G. B. Folland, [25], pp.128–129.

EXERCÍCIO 4.2 Mostre que a função em (4.12) é contínua. Conclua que o operador L dado por (4.11) é compacto.

EXERCÍCIO 4.3 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um aberto limitado.

1. Mostre que se u e v são dois potenciais condutores de Ω , então $u = v$.
2. Prove que o potencial condutor de Ω é uma função super-harmônica.

EXERCÍCIO 4.4 Vimos na Seção 4.3 que não existem potenciais condutores em dimensão $n = 2$. Uma maneira de contornar esse inconveniente é a seguinte:

Dado um aberto $\omega \subset\subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, definimos o potencial condutor de ω com respeito a $B_1(0)$ como sendo uma função contínua u em $\overline{B_1(0)}$ tal que

- u é harmônica em $B_1(0) \setminus \overline{\omega}$;
- $u \equiv 1$ sobre $\overline{\omega}$;
- $u \equiv 0$ sobre $\partial B_1(0)$.

Mostre que se ω satisfaz a condição da esfera interior, então o potencial condutor de ω com respeito a $B_1(0)$ existe e é único.

EXERCÍCIO 4.5

1. Demonstre o Princípio da Singularidade Removível em dimensão $n = 2$.

2. Demonstre a seguinte variante do Princípio da Singularidade Removível para $n \geq 2$:

Seja w uma função harmônica e limitada em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que w seja contínua em $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e $w = 0$ em $\partial\Omega \setminus \{x_0\}$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$. Então, $w \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

EXERCÍCIO 4.6 Demonstre o Teorema 4.14.

EXERCÍCIO 4.7 Uma função $w : \overline{\Omega} \rightarrow (-\infty, \infty]$ é dita semicontínua inferiormente (s.c.i.) se o conjunto $\{x \in \overline{\Omega} : w(x) \leq a\}$ é fechado para todo $a \in \mathbb{R}$. Seja $(w_i)_{i \in I}$ uma família de funções contínuas em $\overline{\Omega}$; mostre que $W(x) := \sup_{i \in I} w_i(x), \forall x \in \overline{\Omega}$, é s.c.i.

EXERCÍCIO 4.8 Mostre que a função $\bar{\varphi}$ dada por (4.30) é super-harmônica em Ω .

Capítulo 5

A ressurreição do Princípio de Dirichlet

As críticas de Weierstrass sobre a falta de rigor que envolvia o Princípio de Dirichlet até 1870 colocaram-no como objeto de interesse apenas histórico. Assim, a impossibilidade de se encontrar um tratamento mais rigoroso para essa formulação variacional nos quase 30 anos que se seguiram parecia determinar o fim de um poderoso recurso que fora aplicado de forma belíssima a outras áreas da Matemática.

Durante uma conferência em Zurique em 1897, David Hilbert (1862-1943) anuncia o retorno do Princípio de Dirichlet. O método de Hilbert — que na verdade já havia sido proposto por H. Weber⁽¹⁾ em 1869 e de forma menos explícita por Cesare Arzelà⁽²⁾ (1847-1912) na década de 1890 — baseava-se na utilização de seqüências minimizantes para encontrar a solução do problema variacional⁽³⁾.

Hilbert ressaltaria que essa nova técnica, além de sua simplicidade,

⁽¹⁾H. Weber, [71]

⁽²⁾C. Arzelà, *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna* (1896/97). Apud N. Kryloff, [44], p.154.

⁽³⁾D. Hilbert, [37].

dade e transparência, tem a vantagem de envolver apenas a propriedade de minimização, sem recorrer à natureza do problema. No entanto, a demonstração de Weber era incompleta, Arzelà havia anunciado uma prova *estilo* EDO que jamais seria publicada, e o argumento apresentado por Hilbert era bastante impreciso e de difícil implementação, como ficaria evidenciado num artigo subsequente em 1901, onde aparece a primeira demonstração convincente do Princípio de Dirichlet⁽⁴⁾.

Diversas tentativas de simplificar a demonstração de Hilbert apareceriam logo em seguida, sem muito sucesso⁽⁵⁾. Mas as bases estavam lançadas: assim nascia a Teoria Variacional Moderna...

5.1 Métodos diretos do Cálculo das Variações

Dado um funcional I que se deseja estudar, a idéia de Hilbert era considerar uma seqüência $(u_k)_{k \geq 1}$, denominada seqüência minimizante, tal que $I(u_k) \rightarrow \inf I$ e, a partir dela, procurar construir uma nova seqüência que fosse convergente e que seu limite correspondesse ao mínimo do funcional I .

Essa tarefa não era fácil; além disso, a seqüência minimizante de partida não é necessariamente convergente, como podemos verificar no exemplo abaixo:

EXEMPLO 5.1 Considere o problema de minimizar a integral de Dirichlet sobre $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$,

$$\mathcal{I}(u) = \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx,$$

sujeita à condição de contorno $u = 0$ sobre $\partial B_1(0)$.

Tomemos $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp } \eta \subset B_1(0)$ e $\eta(0) = 1$. Definindo

⁽⁴⁾D. Hilbert, [38].

⁽⁵⁾Cf. B. Levi, [49]; G. Fubini, [30]; H. L. Lebesgue, [46]. No artigo citado acima, Beppo Levi escreveria: “Ma le difficoltà del procedimento sono ancora tutt’altro che comuni [...]”.

$u_k(x) := \eta(kx)$, teremos

$$\mathcal{I}(u_k) = \int_{B_{1/k}(0)} k^2 |\nabla \eta(kx)|^2 dx = \frac{1}{k^{n-2}} \int_{B_1(0)} |\nabla \eta|^2 dy.$$

Dessa forma, $\mathcal{I}(u_k) \rightarrow 0$, mas $(u_k)_{k \geq 1}$ não converge para a solução clássica, pois $u_k(0) = 1$, muito embora $u_k(x) \rightarrow 0$, se $x \neq 0$ (Vid Exercício 5.1). ■

Para ilustrar o método de Hilbert, apresentaremos uma demonstração proposta por Richard Courant⁽⁶⁾ (1888-1972). Ficará muito claro ao final desta seção que os espaços de funções usados classicamente para estudar tais problemas, e.g., $C^1(\Omega)$, não são o ambiente ideal para trabalhar com seqüência minimizantes, pois não são completos com relação a normas intrínsecas a esse tipo de problema.

Vamos então considerar o seguinte problema de minimização

$$m_0 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ e } u = f \text{ sobre } \partial\Omega \right\}, \quad (5.1)$$

onde $f \in C(\partial\Omega)$.

TEOREMA 5.1 (HILBERT) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado suave e $f \in C(\partial\Omega)$. Se $m_0 < \infty$, então o problema de minimização (5.1) admite uma (única) solução.*

Demonstração. Seja $(u_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência minimizante. A demonstração será dividida em 5 etapas:

1ª etapa.

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2} = 0. \quad (5.2)$$

2ª etapa. Seja $\rho \in C_0^\infty(B_1)$, $\rho \geq 0$, uma função radial com $\int_{B_1} \rho dx = 1$.

1. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $U_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\rho_\varepsilon * u_k \rightarrow U_\varepsilon \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega}) \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

⁽⁶⁾Cf. R. Courant, [10], pp.143–150.

3ª etapa. Existe $U_0 \in C^1(\Omega)$ tal que

$$U_\varepsilon(x) = U_0(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ com } d(x, \partial\Omega) > \varepsilon; \quad (5.4)$$

em outras palavras, $U_\varepsilon(x)$ independe de ε se $d(x, \partial\Omega) > \varepsilon$.

4ª etapa. $U_0 \in C(\overline{\Omega})$ e $U_0 = f$ sobre $\partial\Omega$.

5ª etapa. U_0 é solução de (5.1).

Vamos começar demonstrando o seguinte

LEMA 5.2 *Seja $(u_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência minimizante de (5.1). Então, para toda família de funções $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ em $C^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ tal que $\|\nabla \varphi_k\|_{L^2} \leq M, \forall k \geq 1$, temos*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx = 0.$$

Demonstração. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $u_k + t\varphi_k$ é uma função admissível; portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_k + t \nabla \varphi_k|^2 \, dx &= \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 \, dx + \\ &+ 2t \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 \, dx \geq m_0 \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a forma quadrática

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right) + 2t \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 \, dx$$

é não-negativa, de onde segue que seu discriminante é menor que ou igual a zero. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 \, dx \right) \left(\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right) \\ &\leq M^2 \left(\int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right). \end{aligned}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx = m_0$, o resultado segue da última desigualdade. ■

Demonstração da 1ª etapa. Observe que

$$\|\nabla(u_i - u_j)\|_{L^2} \leq \|\nabla u_i\|_{L^2} + \|\nabla u_j\|_{L^2} \leq C \quad \forall i, j \geq 1.$$

Por outro lado,

$$\|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla(u_i - u_j) dx - \int_{\Omega} \nabla u_j \cdot \nabla(u_i - u_j) dx.$$

Aplicando o lema precedente a cada parcela da diferença acima, obtemos (5.2). ■

A desigualdade de Poincaré⁽⁷⁾ é um ingrediente fundamental na demonstração das próximas etapas:

PROPOSIÇÃO 5.3 (DESIGUALDADE DE POINCARÉ) *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall v \in C^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}). \quad (5.5)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{Q} = [-L, L] \times [-L, L]$ um quadrado de aresta $2L$ contendo Ω e vamos estender v e suas derivadas a $\mathcal{Q}$ como sendo zero no complementar de Ω .

Fixado $x \in \Omega$, temos

$$v(x) = \int_{\ell_x} \frac{\partial v}{\partial x_1} ds,$$

onde ℓ_x é o segmento de reta paralelo ao eixo x_1 , percorrido na direção positiva do eixo x_1 , ligando x até o primeiro ponto em que intercepta $\partial\Omega$. Segue da desigualdade de Schwarz que

$$\begin{aligned} v^2(x) &\leq 2L \int_{\ell_x} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 ds \\ &\leq 2L \int_{-L}^L \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \leq 2L \int_{-L}^L |\nabla v|^2 dx_1. \end{aligned}$$

⁽⁷⁾H. Poincaré, [59], pp.70–76.

Nesse caso, podemos integrar ambos os membros da desigualdade acima na variável x_2 , obtendo

$$\int_{-L}^L v^2(x) dx_2 \leq 2L \int_Q |\nabla v|^2 dx = 2L \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Integrando uma última vez ambos os membros na variável x_1 , entre $-L$ e L , teremos a desigualdade desejada, com $C = 2L$. ■

Demonstração da 2ª etapa. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |(\rho_\varepsilon * u_i)(x) - (\rho_\varepsilon * u_j)(x)| &= \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) [u_i(y) - u_j(y)] dy \\ &\leq \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) [u_i(y) - u_j(y)]^2 dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} |(\rho_\varepsilon * u_i)(x) - (\rho_\varepsilon * u_j)(x)| &\leq C_\varepsilon \|u_i - u_j\|_{L^2} \\ &\leq C_\varepsilon \|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\nabla(\rho_\varepsilon * u_i)(x) - \nabla(\rho_\varepsilon * u_j)(x)| &\leq \\ &\leq \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) [\nabla u_i(y) - \nabla u_j(y)]^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq C_\varepsilon \|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Combinando (5.2) e (5.6)–(5.7), concluímos que $(\rho_\varepsilon * u_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em $C^1(\bar{\Omega})$. Logo, existe $U_\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$\rho_\varepsilon * u_k \rightarrow U_\varepsilon \quad \text{em } C^1(\bar{\Omega}) \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

■

Demonstração da 3ª etapa. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que se $d(x_0, \partial\Omega) > \varepsilon$, então

$$U_{\varepsilon_1}(x_0) = U_{\varepsilon_2}(x_0) \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Seja

$$v(x) := [(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) * \vartheta](x_0 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde ϑ é a solução fundamental do problema de Dirichlet, i.e.,

$$\vartheta(y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|y|}.$$

Afirmamos que $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Como v é uma função de classe C^∞ , é suficiente mostrarmos que

$$v(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \text{ tal que } |x - x_0| > \varepsilon.$$

Com efeito, para um tal ponto x a função $y \mapsto \vartheta(x_0 - x - y)$ é harmônica sobre $B_{\varepsilon_i}(0)$. Logo, utilizando uma variante da fórmula da média (Vid Exercício 5.2), temos

$$\begin{aligned} (\rho_{\varepsilon_i} * \vartheta)(x_0 - x) &= \int_{B_{\varepsilon_i}(0)} \rho_{\varepsilon_i}(y) \vartheta(x_0 - x - y) dy \\ &= \vartheta(x_0 - x) \quad \text{se } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em outras palavras, $v(x) = 0$. Assim, concluímos que v tem suporte compacto em Ω .

Por outro lado, pelo Lema 5.2,

$$-\int_{\Omega} u_k \Delta v dx = \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Como $-\Delta \vartheta = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (Vid Equação (1.5)), temos

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= -\left[\Delta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) * \vartheta\right](x_0 - x) \\ &= \rho_{\varepsilon_1}(x_0 - x) - \rho_{\varepsilon_2}(x_0 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$-\int_{\Omega} u_k \Delta v dx = (\rho_{\varepsilon_1} * u_k)(x_0) - (\rho_{\varepsilon_2} * u_k)(x_0). \quad (5.11)$$

Combinando (5.10) e (5.11), obtemos (5.8). Em vista de (5.8), a função

$$U_0(x) := U_\varepsilon(x) \quad \text{onde } x \in \Omega \text{ e } d(x, \partial\Omega) > \varepsilon,$$

está bem definida e pertence a $C^1(\Omega)$. ■

Antes de apresentarmos a demonstração da 4ª etapa, precisaremos da seguinte versão local da desigualdade de Poincaré:

LEMA 5.4 *Dados $\bar{x} \in \partial\Omega$ e $\delta > 0$, seja $\Lambda_\delta(\bar{x}) := B_\delta(\bar{x}) \cap \Omega$. Logo, se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno, então*

$$\|v\|_{L^2(\Lambda_\delta(\bar{x}))} \leq C\delta \|\nabla v\|_{L^2(\Lambda_\delta(\bar{x}))} \quad \forall v \in C^1(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega}). \quad (5.12)$$

Demonstração. Fazendo uma mudança de variáveis, podemos supor que $\Lambda_\delta(\bar{x})$ é um semidisco de raio δ . Nesse caso, a demonstração do lema é semelhante à da desigualdade de Poincaré (5.5) e será deixada para o leitor (Vid Exercício 5.3). ■

Notemos também que $\int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} |\nabla u_k|^2 dx \rightarrow 0$ uniformemente em $k \geq 1$ e em $\bar{x} \in \partial\Omega$, quando $\delta \rightarrow 0$. Mais precisamente,

LEMA 5.5 *Seja $(u_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência minimizante de (5.1). Dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|A| < \delta \quad \text{implica} \quad \int_A |\nabla u_k|^2 dx < \eta \quad \forall k \geq 1,$$

para todo boreliano $A \subset \Omega$.

Demonstração. Seja $k_0 \geq 1$ tal que

$$\|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} < \eta^{1/2} \quad \text{se } i, j \geq k_0.$$

Tomemos ainda $\delta > 0$ pequeno de maneira que

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(A)} < \eta^{1/2} \quad \text{se } k = 1, \dots, k_0 \text{ e } |A| < \delta.$$

Assim, se $k > k_0$ e $|A| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|\nabla u_k\|_{L^2(A)} &\leq \|\nabla u_k - \nabla u_{k_0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{k_0}\|_{L^2(A)} \\ &< \eta^{1/2} + \eta^{1/2} = 2\eta^{1/2}, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Demonstração da 4ª etapa. Devemos verificar que a função U_0 definida na etapa precedente satisfaz as condições de contorno desejadas, ou seja, U_0 se estende continuamente a $\partial\Omega$, onde coincide com f . Fixemos $\bar{x} \in \partial\Omega$ e $\eta > 0$. Seja $\bar{f} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$\bar{f} = f \text{ sobre } \partial\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |\nabla \bar{f}|^2 dx < \infty.$$

Em vista do Lema 5.5 acima e da desigualdade triangular, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\Lambda_{\delta}(\bar{x})} |\nabla(u_k - \bar{f})|^2 dx < \eta \quad \forall k \geq 1. \quad (5.13)$$

Dado $x \in \Lambda_{\delta/2}(\bar{x})$, seja $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega)$; em particular,

$$0 < 4\varepsilon < \delta. \quad (5.14)$$

Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(x, x_0) = 2\varepsilon$; em particular, $B_{\varepsilon}(x) \subset \Lambda_{4\varepsilon}(x_0)$. Como $u_k - \bar{f} = 0$ sobre $\partial\Omega$, teremos

$$\begin{aligned} |(\rho_{\varepsilon} * u_k)(x) - (\rho_{\varepsilon} * \bar{f})(x)|^2 &= \left| \int_{B_{\varepsilon}(x)} \rho_{\varepsilon}(x-y) (u_k - \bar{f})(y) dy \right|^2 \\ &\quad (\text{por Cauchy-Schwarz}) \leq \int_{B_{\varepsilon}(x)} \rho_{\varepsilon}(x-y) (u_k - \bar{f})^2(y) dy \\ &\leq \frac{\|\rho\|_{L^{\infty}}}{\varepsilon^2} \int_{\Lambda_{4\varepsilon}(x_0)} (u_k - \bar{f})^2(y) dy \\ &\quad (\text{por (5.12)}) \leq \frac{\|\rho\|_{L^{\infty}}}{\varepsilon^2} C \varepsilon^2 \int_{\Lambda_{4\varepsilon}(x_0)} |\nabla(u_k - \bar{f})|^2 dx \\ &\quad (\text{por (5.14)}) \leq C \int_{\Lambda_{\delta}(\bar{x})} |\nabla(u_k - \bar{f})|^2 dx \\ &\quad (\text{por (5.13)}) \leq C\eta. \end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, segue de (5.3)–(5.4) que

$$|U_0(x) - (\rho_{\varepsilon} * \bar{f})(x)|^2 \leq C\eta \quad \forall x \in \Lambda_{\delta/2}(\bar{x}),$$

onde $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega)$. Conseqüentemente, da continuidade uniforme de $\bar{f}$ em $\bar{\Omega}$ concluímos que

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} |U_0(x) - f(\bar{x})|^2 \leq C\eta,$$

e, sendo $\eta > 0$ arbitrário, segue que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} U_0(x) = f(\bar{x})$. Em outras palavras, $U_0 \in C(\bar{\Omega})$ e $U_0 = f$ sobre $\partial\Omega$. ■

Demonstração da 5ª etapa. Em virtude das duas etapas precedentes, U_0 é uma função admissível. Vamos mostrar que $\int_{\Omega} |\nabla U_0|^2 dx \leq m_0$. De fato, sejam $\omega \subset\subset \Omega$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\varepsilon < d(\partial\Omega, \omega)$. Observe que (Vid Exercício 5.4)

$$\int_{\omega} |\nabla(\rho_{\varepsilon} * u_k)|^2 dx = \int_{\omega} |\rho_{\varepsilon} * \nabla u_k|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx. \quad (5.15)$$

Em vista de (5.3)–(5.4), fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos

$$\int_{\omega} |\nabla U_0|^2 dx = \int_{\omega} |\nabla U_{\varepsilon}|^2 dx \leq m_0.$$

Como $\omega \subset \Omega$ é arbitrário, concluímos que

$$\int_{\Omega} |\nabla U_0|^2 dx \leq m_0.$$

Sendo U_0 uma função admissível, a igualdade se verifica; em outras palavras, U_0 é solução do problema de minimização (5.1). Como o funcional é estritamente convexo, U_0 é o único ponto de mínimo (Vid Exercício 5.5). Isso conclui a demonstração do Teorema 5.1. ■

O fato de termos

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_i - \nabla u_j|^2 dx = 0,$$

para toda seqüência minimizante $(u_k)_{k \geq 1}$ já indicava que o espaço de funções $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ utilizado classicamente não tinha uma boa geometria para tratar de tais problemas variacionais.

5.2 Formulação fraca do Princípio de Dirichlet

As décadas de 1930 e 1940 assistiram ao surgimento e à consolidação da teoria dos espaços de Sobolev tanto por Kurt Otto Friedrichs (1901-1982) como por Sergei L'vovich Sobolev (1908-1989), num processo de verdadeira releitura do que se entenderia por uma solução de uma equação diferencial. Tais trabalhos culminariam com a publicação dos dois volumes da obra *Théorie des Distributions* de Laurent Schwartz (1915-2002) em 1950. Tudo isso, por sua vez, se sustentava no advento da Análise Funcional a partir da década de 1920.

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seja

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \text{existe } w_i \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \\ \text{para todo } i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

As funções w_i , se existirem, estão unicamente determinadas q.t.p. (Vid Exercício 5.6); tais funções w_i são chamadas de derivadas fracas da função v , e serão denotadas por $\frac{\partial v}{\partial x_i}$. Observe, por exemplo, que se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $u \in H^1(\Omega)$ (e as derivadas fracas coincidem com a definição clássica), mas a recíproca é falsa (Vid Exercício 5.9).

O espaço $H^1(\Omega)$, munido da norma

$$\|v\|_{H^1} := \|v\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2},$$

é um espaço de Banach (Vid Exercício 5.8). O seguinte resultado tem um papel central no estudo de propriedades dos elementos de $H^1(\Omega)$ ⁽⁸⁾:

TEOREMA 5.6 (MEYERS-SERRIN) $C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ é um subconjunto denso de $H^1(\Omega)$.

⁽⁸⁾N. G. Meyers e J. Serrin, [52].

O subespaço de $H^1(\Omega)$ definido por

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1}$$

é particularmente importante em aplicações. Por exemplo, utilizando um argumento de densidade, a desigualdade de Poincaré (5.5) se estende aos elementos de $H_0^1(\Omega)$ (Vid Exercício 5.10):

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.16)$$

Também é possível associar aos elementos de $H^1(\Omega)$ um conceito de traço (ou de valor na fronteira):

TEOREMA 5.7 (TEOREMA DO TRAÇO) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado suave. Então, existe um (único) operador linear contínuo $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ tal que*

$$\text{Tr}(v) = v|_{\partial\Omega} \quad \forall v \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

O operador $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ não é sobrejetivo; de fato, é possível construir exemplos de funções em $L^2(\partial\Omega)$ (e mesmo contínuas!) que não são o traço de nenhum elemento de $H^1(\Omega)$ (Vid Exercício 5.19). De maneira a caracterizar a imagem de Tr , vamos introduzir o seguinte espaço:

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \left\{ f \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} dx dy < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^{1/2}} := \|f\|_{L^2} + \left(\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} dx dy \right)^{1/2}.$$

O interesse em se estudar o espaço $H^{1/2}(\partial\Omega)$ fica claro por conta do seguinte⁽⁹⁾

TEOREMA 5.8 *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e suave. Logo,*

⁽⁹⁾Cf. R. A. Adams, [1].

- (i) $\text{Tr} (H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$;
- (ii) $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ é um operador linear contínuo;
- (iii) $\ker \text{Tr} = H_0^1(\Omega)$.

Agora temos todos os ingredientes necessários para estabelecer a formulação fraca do problema de Dirichlet:

DEFINIÇÃO *Seja $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Diremos que v é uma solução fraca do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.17)$$

se $v \in H^1(\Omega)$, $\text{Tr}(v) = f$ e

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (5.18)$$

Na Seção 5.4, mostraremos que toda solução fraca é solução clássica do problema de Dirichlet quando $f \in C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$; em outras palavras, v pertence a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e satisfaz (5.17) no sentido usual.

Vamos considerar primeiro a questão de unicidade das soluções fracas:

PROPOSIÇÃO 5.9 (UNICIDADE) *Dada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet (5.17) possui no máximo uma solução fraca.*

Demonstração. Sejam v_1, v_2 duas soluções fracas de (5.17). Por densidade, essas soluções satisfazem

$$\int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla w \, dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

Vamos aplicar tais identidades com $w = v_1 - v_2$. Por subtração, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \, dx = 0.$$

Em outras palavras, $\nabla(v_1 - v_2) = 0$ a.e. Logo, $v_1 - v_2$ é constante em cada componente conexa de Ω (Vid Exercício 5.11). Como $v_1 - v_2 \in H_0^1(\Omega)$, concluímos que $v_1 - v_2 = 0$ em Ω . ■

A existência de soluções fracas será obtida com o auxílio do Princípio de Dirichlet:

TEOREMA 5.10 (EXISTÊNCIA) *Dada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então o problema de minimização*

$$m_1 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx : v \in H^1(\Omega) \text{ e } \text{Tr}(v) = f \right\} \quad (5.19)$$

admite uma única solução v_0 . Além disso, v_0 satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (5.20)$$

Demonstração. Como $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então em virtude do teorema precedente a classe de funções admissíveis é não-vazia; em outras palavras, $m_1 < \infty$. Seja (v_k) uma seqüência minimizante. Procedendo como na 1ª etapa da demonstração do Teorema 5.1, temos

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\nabla v_i - \nabla v_j\|_{L^2} = 0.$$

Como $\text{Tr}(v_i - v_j) = 0$, então $v_i - v_j \in H_0^1(\Omega)$. Segue da desigualdade de Poincaré (5.5) que

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|v_i - v_j\|_{L^2} = 0.$$

Logo, $(v_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em $H^1(\Omega)$ e portanto existe v_0 tal que

$$v_k \rightarrow v_0 \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

Conseqüentemente,

$$\text{Tr}(v_0) = f \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx = m_1.$$

A unicidade de v_0 e (5.20) são de fácil verificação (Vid Exercício 5.14). ■

Em virtude do Teorema 5.10, a cada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ podemos associar uma única função $v_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $\text{Tr}(v_0) = f$ satisfazendo (5.20):

PROPOSIÇÃO 5.11 (CONTINUIDADE) *O operador*

$$S_1 : f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \longmapsto v_0 \in H^1(\Omega)$$

é linear e contínuo.

A demonstração dessa proposição repousa no seguinte resultado clássico da Análise Funcional⁽¹⁰⁾:

TEOREMA 5.12 (TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA) *Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ dois espaços de Banach e $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ um operador linear contínuo e sobrejetivo. Logo, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(0) \subset T(B_1(0)). \quad (5.21)$$

Em outras palavras, sob as hipóteses do teorema, $A \subset \mathbb{E}$ aberto implica $T(A) \subset \mathbb{F}$ aberto (Vid Exercício 5.15).

Demonstração da Proposição 5.11. A linearidade de S_1 é evidente. Pelo Teorema 5.8, o operador $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ satisfaz as hipóteses do Teorema da Aplicação Aberta. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} < \delta \implies \begin{array}{l} \text{existe } v \in H^1(\Omega) \text{ com} \\ \|v\|_{H^1(\Omega)} < 1 \text{ e } \text{Tr}(v) = f. \end{array} \quad (5.22)$$

Dada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ com $\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} < \delta$, seja v uma função dada por (5.22). Pelo Princípio de Dirichlet,

$$\|S_1(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

⁽¹⁰⁾Cf. H. Brezis, [7].

Logo, a propriedade (5.22) também é satisfeita por $S_1(f)$. Assim,

$$\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} < \delta \implies \|S_1(f)\|_{H^1(\Omega)} < 1.$$

Conseqüentemente,

$$\|S_1(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

ou seja, S_1 é contínuo. ■

5.3 O método da projeção ortogonal de Weyl

A formulação moderna do Princípio de Dirichlet tem como estratégia decompor o problema em duas partes:

1. Demonstrar a existência de soluções fracas;
2. Estabelecer a regularidade das soluções fracas.

A primeira etapa foi abordada na seção precedente. Nessa seção, um de nossos objetivos será responder a seguinte

QUESTÃO Se $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

será que $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$?

Em 1940, Hermann Weyl (1885-1955) deu uma resposta afirmativa a essa questão⁽¹¹⁾. Trata-se de um dos primeiros resultados de regularidade no contexto do Cálculo das Variações:

LEMA 5.13 (WEYL) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $v \in L^1(\Omega)$. Se*

$$\int_{\Omega} v \Delta \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{5.23}$$

então $v \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta v = 0$ em Ω .

⁽¹¹⁾H. Weyl, [73].

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\rho \in C_0^\infty(B_1)$, tal que $\rho \geq 0$ e $\int_{B_1} \rho \, dx = 1$. Dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $d(\text{supp } \varphi, \partial\Omega) > \varepsilon$, podemos utilizar $\check{\rho}_\varepsilon * \varphi$ como função-teste em (5.23). Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(\rho_\varepsilon * v) \varphi \, dx &= \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon * v) \Delta \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} v (\check{\rho}_\varepsilon * \Delta \varphi) \, dx = \int_{\Omega} v \Delta(\check{\rho}_\varepsilon * \varphi) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta(\rho_\varepsilon * v) = 0 \quad \text{em } \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\},$$

ou seja, $\rho_\varepsilon * v$ é harmônica em Ω_ε . Observe ainda que $\rho_\varepsilon * v \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$. Utilizando o Corolário 1.7.1, concluímos que $v \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta v = 0$ em Ω . ■

Vamos apresentar também uma demonstração alternativa de existência de soluções fracas do problema de Dirichlet em dimensão 3 sem utilizar o Princípio de Dirichlet. Mais precisamente,

TEOREMA 5.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado suave. Dada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ harmônica tal que $\text{Tr}(u_0) = f$.*

Nosso objetivo inicial será estabelecer generalizações das relações $\text{div } F = 0$ e $\text{rot } F = 0$ para campos vetoriais $F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Para tanto, vamos supor por enquanto que $F \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Dados $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, temos as seguintes identidades vetoriais:

$$\begin{aligned} \text{div}(F \times \Phi) &= \langle \text{rot } F, \Phi \rangle - \langle F, \text{rot } \Phi \rangle, \\ \text{div}(\varphi F) &= \langle \nabla \varphi, F \rangle + \varphi \text{div } F. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Divergente,

$$\int_{\Omega} \langle \text{rot } F, \Phi \rangle \, dx = \int_{\Omega} \langle F, \text{rot } \Phi \rangle \, dx \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad (5.24)$$

$$\int_{\Omega} \varphi \text{div } F \, dx = - \int_{\Omega} \langle F, \nabla \varphi \rangle \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (5.25)$$

As identidades (5.24) e (5.25) nos sugerem as seguintes

DEFINIÇÕES *Seja $F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Diremos que F é irrotacional, o que denotaremos por $\text{rot } F = 0$, se*

$$\int_{\Omega} \langle F, \text{rot } \Phi \rangle dx = 0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (5.26)$$

Por outro lado, F será solenoidal, denotado por $\text{div } F = 0$, se

$$\int_{\Omega} \langle F, \nabla \varphi \rangle dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (5.27)$$

Sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \{F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) : \text{rot } F = 0\}, \\ \mathcal{S} &:= \{F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) : \text{div } F = 0\}, \\ \mathcal{H} &:= \{F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) : F = \nabla v, \text{ onde } v \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, formados pelos campos vetoriais irrotacionais e solenoidais, respectivamente, são subespaços vetoriais fechados de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. O subespaço $\mathcal{H}$ admite a seguinte caracterização

$$\mathcal{H} = \overline{\{\nabla \varphi : \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}}^{L^2}, \quad (5.28)$$

onde o fecho é tomado com respeito à norma L^2 (Vid Exercício 5.17).

O Teorema 5.14 será deduzido do seguinte

TEOREMA 5.15 (WEYL)

- (i) $\mathcal{R} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$;
- (ii) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subset C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Em particular, se $F \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, então $\text{rot } F = 0$ e $\text{div } F = 0$ no sentido clássico.

Demonstração. Como $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ é um espaço de Hilbert, temos a decomposição em subespaços vetoriais ortogonais

$$L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp.$$

Por outro lado, segue de (5.27) e (5.28) que os elementos de $\mathcal{H}^\perp$ são exatamente os campos solenoidais, ou seja, $\mathcal{H}^\perp = \mathcal{S}$. Portanto,

$$L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}. \quad (5.29)$$

Dado $F \in \mathcal{H}$, seja $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $F = \nabla v$. Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle F, \text{rot } \Phi \rangle dx &= \int_{\Omega} \langle \nabla v, \text{rot } \Phi \rangle dx = - \int_{\Omega} \langle v, \text{div rot } \Phi \rangle dx = 0 \\ \forall \Phi &\in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

então

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{R}.$$

Assim, pela decomposição de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ em subespaços ortogonais dada por (5.29), temos

$$\mathcal{R} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}). \quad (5.30)$$

Vamos demonstrar agora que (ii) se verifica. Seja $F \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$. Observe que, para todo $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, temos a identidade

$$\Delta \Phi = \nabla(\text{div } \Phi) - \text{rot rot } \Phi. \quad (5.31)$$

Aplicando as equações (5.26) e (5.27) com $\text{rot } \Phi$ e $\text{div } \Phi$ como funções-teste, respectivamente, obtemos, após subtração entre as expressões resultantes:

$$\int_{\Omega} \langle F, \Delta \Phi \rangle dx = 0 \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (5.32)$$

Utilizando o Lema de Weyl a cada componente de F , concluímos que $F \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ e $\Delta F = 0$. Em particular, $\text{rot } F = 0$ e $\text{div } F = 0$ no sentido clássico. ■

Demonstração do Teorema 5.14. Seja $\bar{f} \in H^1(\Omega)$ tal que $\text{Tr}(\bar{f}) = f$. Como $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$, temos $\nabla \bar{f} \in \mathcal{R}$. Pelo Teorema 5.15, existem $h \in H_0^1(\Omega)$ e $U \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ tais que $\nabla \bar{f} = \nabla h + U$. Seja $u_0 = \bar{f} - h$. Logo,

$$\Delta u_0 = \text{div } \nabla u_0 = \text{div } U = 0 \quad \text{e} \quad \text{Tr}(u_0) = \text{Tr}(\bar{f}) = f.$$

Isso conclui a demonstração. ■

5.4 Soluções fracas *versus* soluções clássicas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado suave. Nesse trabalho, vimos essencialmente duas noções de solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.33)$$

a saber:

1. FORMULAÇÃO CLÁSSICA: Dada $f \in C(\partial\Omega)$, existe uma única função $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfazendo (5.33) no sentido clássico. Além disso, a aplicação linear

$$S_0 : f \in C(\partial\Omega) \longmapsto u_0 \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{é contínua.}$$

2. FORMULAÇÃO FRACA: Dada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe uma única função $v_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $\text{Tr}(v_0) = f$ e

$$\int_{\Omega} \nabla v_0 \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Além disso, a aplicação linear

$$S_1 : f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \longmapsto v_0 \in H^1(\Omega) \quad \text{é contínua.}$$

Isso significa que o problema de Dirichlet é *bem posto* em ambas as formulações, ou seja, nos dois casos a solução existe, é única e

depende continuamente das condições de fronteira. Vamos mostrar que as duas soluções u_0 e v_0 coincidem quando se considera (5.33) com condição de contorno f em $C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$:

TEOREMA 5.16 $S_0 = S_1$ sobre $C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1ª etapa. $S_0 = S_1$ sobre $C^\infty(\partial\Omega)$.

Sejam $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ e $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a solução clássica associada a f . Pela Teoria de Regularidade Elíptica⁽¹²⁾, sabemos que $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$; em particular, $u_0 \in H^1(\Omega)$. Logo, $u_0 = v_0$, em outras palavras, $S_0(f) = S_1(f)$.

2ª etapa. Fim da demonstração.

Observe que $C^\infty(\partial\Omega)$ é denso em $C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$ com respeito à topologia induzida pela norma (Vid Exercício 5.18)

$$\|u\|_{C \cap H^{1/2}} := \|u\|_{C(\partial\Omega)} + \|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Como $S_0 = S_1$ sobre $C^\infty(\partial\Omega)$, deduzimos que $S_0 = S_1$ sobre $C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$. ■

Para concluir, vamos mostrar que os problemas de minimização (5.1) e (5.19) são equivalentes:

COROLÁRIO 5.16.1 *Seja $f \in C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$. Logo,*

$$m_0 = m_1 < \infty$$

e as soluções dos problemas de minimização (5.1) e (5.19) coincidem.

Demonstração. Claramente $m_0 \geq m_1$. Além disso, pelo Teorema 5.8, a classe de funções admissíveis de (5.19) é não-vazia, ou seja, $m_1 < \infty$. Vamos denotar por v_0 a solução de (5.19). Pelo teorema acima e pelo Lema de Weyl, temos $v_0 \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; em particular,

⁽¹²⁾Cf. D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [33], p.87 et seq.

v_0 também é uma função admissível do problema de minimização (5.1). Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx \geq m_0 \geq m_1 = \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx,$$

de onde segue o resultado. ■

5.5 Exercícios

EXERCÍCIO 5.1 Seja $n \geq 3$. Dados pontos $a_1, a_2, a_3, \dots \in B_1(0)$, mostre que existe uma seqüência $(u_k)_{k \geq 1}$ em $C_0^\infty(B_1(0))$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 = 0 \quad \text{mas} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(a_j) = 1 \quad \forall j \geq 1.$$

EXERCÍCIO 5.2

1. Demonstre a seguinte variante da fórmula da média:

Seja u harmônica em ω . Se $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma função radial tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$ e $\text{supp } \rho \subset B_\varepsilon(0)$, então

$$(\rho * u)(x) = u(x) \quad \forall x \in \omega \text{ com } d(x, \partial\omega) > \varepsilon.$$

2. Deduza (5.9).

EXERCÍCIO 5.3 Demonstre o Lema 5.4.

EXERCÍCIO 5.4 Verifique (5.15).

EXERCÍCIO 5.5 Mostre que a solução do problema (5.1) é única.

EXERCÍCIO 5.6

1. Demonstre o Teorema Fundamental do Cálculo das Variações:
Se $v \in L^1(\Omega)$ satisfaz

$$\int_{\Omega} v \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $v = 0$ q.t.p.

2. Conclua que se $u \in H^1(\Omega)$, então as derivadas fracas de u estão bem definidas q.t.p.

EXERCÍCIO 5.7 Seja $(v_k)_{k \geq 1}$ uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que

$$v_k \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \rightarrow w_i \text{ em } L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Mostre que $v \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial v}{\partial x_i} = w_i$ para todo i .

EXERCÍCIO 5.8 Mostre que $H^1(\Omega)$ e $H^{1/2}(\partial\Omega)$ são espaços de Banach.

EXERCÍCIO 5.9 Seja $\Omega := B_{1/4}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

1. Defina

$$v(x) := \log \log \frac{1}{|x|} \quad \forall x \in \Omega.$$

Mostre que $v \in H^1(\Omega)$; em particular, isso implica $H^1(\Omega) \not\subset C(\Omega)$.

2. Dada uma sequência $(a_j)_{j \geq 1}$ densa em Ω , defina

$$V(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} v(x - a_j) \quad \forall x \in \Omega.$$

Mostre que $V \in H^1(\Omega)$; no entanto, V não é limitada em nenhum subconjunto aberto de Ω .

EXERCÍCIO 5.10 Verifique (5.16).

EXERCÍCIO 5.11 Mostre que se $v \in H^1(\Omega)$ e $\nabla v = 0$ q.t.p., então v é constante em cada componente conexa de Ω . Em particular, se $v \in H^1(\Omega)$ e $\nabla v = 0$ q.t.p., então $v = 0$ q.t.p.

EXERCÍCIO 5.12 Seja $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tal que Φ' é uniformemente limitada em $\mathbb{R}$. Demonstre a regra da cadeia para funções H^1 :

Se $v \in H^1(\Omega)$, então $\Phi(v) \in H^1(\Omega)$ e

$$\nabla \Phi(v) = \Phi'(v) \nabla v \quad \text{q.t.p.}$$

Sugestão: Utilize o Teorema 5.6.

EXERCÍCIO 5.13

1. Dado $v \in H^1(\Omega)$, mostre que

$$\nabla v = 0 \quad \text{q.t.p. no conjunto } \{x \in \Omega : v(x) = 0\}.$$

Sugestão: Seja $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\Phi(t) = t$ se $|t| \leq 1$. Mostre que $\Phi(kv) \rightarrow 0$ em $H^1(\Omega)$ quando $k \rightarrow \infty$. Em seguida, utilize o Exercício 5.12.

2. Conclua que se $u \in H^1(\Omega)$ e $u(x) \in \mathbb{Z}$ q.t.p., então u é constante.

EXERCÍCIO 5.14 Verifique que a solução do problema de minimização (5.19) satisfaz (5.20).

EXERCÍCIO 5.15 Mostre que se $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é um operador linear satisfazendo (5.21), então $A \subset \mathbb{E}$ aberto implica $T(A) \subset \mathbb{F}$ aberto.

EXERCÍCIO 5.16 Mostre que $v \in C(\Omega)$ é sub-harmônica se, e somente se,

$$\int_{\Omega} v \Delta \varphi \, dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

EXERCÍCIO 5.17

1. Mostre que $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{H}$ são subespaços vetoriais fechados de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$.
2. Demonstre (5.28).

EXERCÍCIO 5.18 Mostre que $C^\infty(\partial\Omega)$ é denso em $C(\partial\Omega) \cap H^{1/2}(\partial\Omega)$ com respeito à norma

$$\|f\|_{C \cap H^{1/2}} = \|f\|_{C(\partial\Omega)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

EXERCÍCIO 5.19 Utilizando o Corolário 5.16.1, mostre que se $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfaz as condições de contorno dos exemplos de Prym ou de Hadamard, então

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = +\infty.$$

Conclua que tais condições de bordo não podem ser o traço de nenhum elemento de $H^1(\Omega)$. Em particular, isso mostra que $C(\partial\Omega) \not\subset H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, Robert A. *Sobolev spaces*. s.ed. New York : Academic Press, 1975. (Pure and Applied Mathematics, 65)
- [2] AHLFORS, Lars V. *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. 3ª ed. New York : McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [3] BANACH, Stefan. “Sur les fonctionnelles linéaires II,” *Studia Math.* **1** (1929), 223–239.
- [4] BIRKHOFF, George D. (Ed.). *A Source Book in Classical Analysis*. s.ed. Cambridge, MA : Harvard University Press, 1973.
- [5] BRELOT, Marcel. “Historical Introduction”. In : Brelot, Marcel (Ed.). *Potential Theory* (C.I.M.E., 1º ciclo, 1969), Roma : Cremonese, 1970, pp.1–21.
- [6] BRESSOUD, David. *A Radical Approach to Real Analysis*. 1ª ed. [S.l.] : The Mathematical Association of America, 1994. (Classroom Resource Materials Series, 2)
- [7] BREZIS, Haïm. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. 2ª ed. Paris : Dunod, 1999.
- [8] BREZIS, Haïm e BROWDER, Felix E. “Partial differential equations in the 20th century”, *Adv. Math.* **135** (1998), 76–144.

- [9] CHURCHILL, Ruel V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, 1ª ed. São Paulo : McGraw-Hill, 1975.
- [10] COURANT, Richard. *Calculus of Variations*. s.ed. New York : Courant Institute of Mathematical Sciences, 1945–1946. (Revisto e ampliado por J. Moser em 1962)
- [11] COURANT, Richard e HILBERT, David. *Methods of Mathematical Physics*. s.ed. New York : John Wiley & Sons, 1962.
- [12] DACOROGNA, Bernard. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1989. (Applied Mathematical Sciences, 78)
- [13] ———. *Introduction au Calcul des Variations*. 1ª ed. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1992.
- [14] DIBENEDETTO, Emmanuele. *Partial Differential Equations*. 1ª ed. Boston : Birkhäuser, 1995.
- [15] DIDEROT, Denis e D’ALEMBERT, Jean le Rond (Ed.). *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une société de gens de lettres*. 1ª ed. Paris : Briasson, David, Le Breton, e Durand, 1751. (New York : Pergamon Press, 1969)
- [16] DIEUDONNÉ, Jean A. *History of Functional Analysis*. 1ª ed. Amsterdam : North-Holland, 1981. (Notas de Matemática, 77; North-Holland Mathematics Studies, 49)
- [17] DIRICHLET, P. G. Lejeune. “Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données”. *J. Reine Angew. Math.* 4 (1829), 157–169. In : G. Lejeune *Dirichlet’s Werke*. 2ª ed. New York : Chelsea Publishing Company, 1969, pp.117–132.
- [18] DIRICHLET, P. G. Lejeune. “Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen”. In : P. G. L. Dirichlet, op cit, pp.133–160.

- [19] EPSTEIN, Bernard. *Partial Differential Equations*. 1ª ed. New York : McGraw-Hill, 1962.
- [20] EVANS, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. 1ª ed. Providence, RI : American Mathematical Society, 1998. (Graduate Studies in Mathematics, 19)
- [21] DE FIGUEIREDO, Djairo G. *Teoria Clássica do Potencial*. 1ª ed. Brasília : Ed. Universidade de Brasília, 1963.
- [22] ———. “O Problema de Dirichlet”. *Atas do 10º Colóquio Brasileiro de Matemática de 1975* (Poços de Caldas - MG), Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1978), pp.21–78.
- [23] ———. “O Princípio de Dirichlet”. *Matemática Universitária* 1 (1985), 63–84.
- [24] ———. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 2ª ed. Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987.
- [25] FOLLAND, Gerald B. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2ª ed. Princeton : Princeton University Press, 1995.
- [26] ———. *Real analysis : Modern techniques and their applications*. 2ª ed. New York : John Wiley & Sons, 1999. (Pure and Applied Mathematics)
- [27] FORSYTH, Andrew R. *Theory of Functions of a Complex Variable*. 3ª ed. New York : Dover Publications, 1965. (Republicação da 3ª ed., editada por Cambridge University Press em 1918)
- [28] FOURIER, Jean Baptiste J. *Théorie Analytique de la Chaleur*. 1ª ed. Paris : Firmin Didot, Père et Fils, 1822. In : DARBOUX, Gaston (Ed.). *CŒuvres de Fourier*. Paris : Gauthier-Villars et Fils, 1888.
- [29] FREDHOLM, Erik I. “Sur une classe d’équations fonctionnelles”. *Acta Math.* 27 (1903), 365–390.

- [30] FUBINI, Guido. “Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari”. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **23** (1907), 58–84.
- [31] GARABEDIAN, Paul R. *Partial Differential Equations*. 1ª ed. New York : John Wiley & Sons, 1964.
- [32] GIGLIOLI, Antonio. *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. 10º Colóquio Brasileiro de Matemática (Poços de Caldas - MG), Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1975.
- [33] GILBARG, David e TRUDINGER, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1998. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 224)
- [34] GOURSAT, Édouard. *Cours d'Analyse Mathématique*. 5ª ed. Paris : Gauthiers-Villars, 1942.
- [35] HACKBUSCH, Wolfgang. *Elliptic Differential Equations : Theory and Numerical Treatment*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1992. Tradução de : Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen, mit Genehmigung des Verlages.
- [36] HADAMARD, Jacques. “Sur le Principe de Dirichlet”. *Bull. Soc. Math. France* **24** (1906), 135–138. In : *Œuvres de Jacques Hadamard*. s.ed. Paris : Centre National de la Recherche Scientifique, 1968, pp.1245–1248.
- [37] HILBERT, David. “Über das Dirichlet'sche Princip”. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* **8** (1900), 184–188.
- [38] ———. “Über das Dirichletsche Prinzip”. *Math. Ann.* **59** (1904), 161–186.
- [39] JOST, Jürgen. *Postmodern Analysis*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1998.

- [40] KELLOGG, Oliver D. *Foundations of Potential Theory*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1967. (Reimpressão da 1ª ed. de 1929)
- [41] KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. 1ª ed. New York : Oxford University Press, 1972.
- [42] ———. *Mathematics : The Loss of Certainty*. 1ª ed. New York : Oxford University Press, 1972.
- [43] KNOPP, Konrad. *Theory and Application of Infinite Series*. 2ª ed. New York : Dover, 1990. (Republicação da 2ª ed. em inglês, editada por Blackie & Sons em 1951)
- [44] KRYLOFF, Nicolas. “Sur différents procédés d’intégration approchée en physique mathématique”. *Ann. Fac. Sc. Toulouse 3^e sér.* **17** (1925), 153–186.
- [45] LAX, Peter D. “On the existence of Green’s function”. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 526–531.
- [46] LEBESGUE, Léon H. “Sur le problème de Dirichlet”. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **24** (1907), 371–402.
- [47] ———. “Sur le problème de Dirichlet”. *C. R. Acad. Sci. Paris* **154** (1912), 335–337.
- [48] ———. “Sur des cas d’impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire”. *Bull. Soc. Math. France* **41** (1913), 17.
- [49] LEVI, Beppo. “Sul Principio di Dirichlet”. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22** (1906), 293–359.
- [50] LIAPOUNOFF, Aleksandr. “Sur quelques questions qui se rattachent au problème de Dirichlet”. *J. Math. Pures Appl.* (5) **4** (1898), 241–311.
- [51] LIEB, Elliot H. e LOSS, Michael. *Analysis*. 1ª ed. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1997. (Graduate Studies in Mathematics, 14)

- [52] MEYERS, Norman G. e SERRIN, James. “ $H = W$ ”. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **51** (1964), 1055–1056.
- [53] MIRANDA, Carlo. “Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche”. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* **3** (1947), 55–59.
- [54] NEVANLINNA, Rolf. *Analytic Functions*. s.ed. Berlin : Springer-Verlag, 1970. (Traduzido da 2ª ed. em alemão)
- [55] PERRON, Oskar. “Eine neun Behandlung der Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ ”. *Math. Z.* **18** (1923), 42–54.
- [56] PICARD, Charles E. *Traité d’Analyse*. 4ª ed. Paris : Gauthier-Villars, 1942.
- [57] POINCARÉ, Henri. “Sur le Problème de la Distribution Électrique”. *C. R. Acad. Sc. Paris* **104** (1887), 44–46. In : *Œuvres de Henri Poincaré*. s.ed. Paris : Gauthier-Villars, 1950–1956, v.9, pp.15–17.
- [58] ———. “Sur les Équations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique”. *Amer. J. Math.* **12** (1890), 211–294. In : H. Poincaré, op cit, v.9 , pp.28–111.
- [59] ———. “Sur les équations de la physique mathématique”. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **8** (1894), 57–155.
- [60] ———. *Science et méthode*. 1ª ed. Paris : Flammarion, 1908. (Disponível no endereço eletrônico : www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/Scienceetmethode.pdf)
- [61] ———. *O valor da Sciencia*. s.ed. Rio de Janeiro : Livraria Garnier, 1924. Tradução de : *La Valeur de la Science*.
- [62] POISSON, Siméon D. “Sur la manière d’exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques, et sur l’usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes”, *J. École Poly.* **11** (1820), 417–489.

- [63] PRYM, Friedrich E. "Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ". *J. Reine Angew. Math.* **73** (1871), 340–364.
- [64] ROBERT, Paul. *Le Grand Robert de la Langue Française : Dictionnaire Alfabétique et Analogique de la Langue Française*. 2^a ed. Paris : Le Robert, 1985.
- [65] ROBIN, Gustave. "Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts". *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1886), S.3–S.58.
- [66] SCHWARTZ, Laurent. *Théorie des distributions*. Tomes I et II. 1^a ed. Paris : Hermann, 1950–51. (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, 9–10)
- [67] SOBOLEV, Sergei L. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. s.ed. Oxford : Pergamon Press, 1964. (Traduzido da 3^a edição russa por E. R. Dawson)
- [68] TAYLOR, Angus E. *Introduction to Functional Analysis*. 1^a ed. New York : John Wiley & Sons, 1958.
- [69] THOMPSON, William. "Extrait d'une lettre de M. William Thompson à M. Liouville". *J. Math. Pures Appl.* (1) **10** (1845), 364–367.
- [70] TRÈVES, François. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. 1^a ed. New York : Academic Press, 1967. (Pure and Applied Mathematics, 25)
- [71] WEBER, H. "Note zu Riemanns Beweis des Dirichletschen Princip". *J. Reine Angew. Math.* **71** (1870), 29–39.
- [72] WEIERSTRASS, Karl T. W. "Über das Sogenannte Dirichlet'sche Princip.". *Königl. Akademie der Wissenschaften* **14** (1870). In : *Mathematische Werke*. s.ed. Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, New York : Johnson Reprint Corporation, 1967.

- [73] WEYL, Hermann. "The method of orthogonal projection in potential theory". *Duke Math. J.* **7** (1940), 411–444.
- [74] WIENER, Norbert. "The Dirichlet problem". *J. Math. Phys.* **3** (1924), 127–147.
- [75] YOSIDA, Kôsaku. *Functional Analysis*. 5^a ed. Berlin : Springer-Verlag, 1978.
- [76] ZAREMBA, Stanislaw. "Sur le Principe de Dirichlet". *Acta Math.* **34** (1911), 293–316.
- [77] ZIEMER, William P. *Weakly Differentiable Functions : Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. 1^a ed. New York : Springer-Verlag, 1989.

Notação

n : dimensão do espaço

ω_n : volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$

σ_n : área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$; $\sigma_n = n\omega_n$

$B_R(x)$: bola de centro x e raio R

ν : vetor normal exterior

$|A|$: medida de Lebesgue de A

q.t.p. : exceto num conjunto de medida (de Lebesgue) nula

s.c.i. : semicontínua inferiormente

ϑ : solução fundamental da equação de Laplace (Vid Equação (1.4))

$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ (exceto Seção 2.1.3)

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\check{\rho}(x) = \rho(-x)$$

$$(\rho * u)(x) = \int_{\Omega} \rho(x - y)u(y) dy, \text{ onde } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}, \text{ onde } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right), \text{ onde } F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$C_0(\overline{\Omega}) = \{ \zeta \in C(\overline{\Omega}) : \zeta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi \text{ tem suporte compacto em } \Omega \}$$

$$\|\zeta\|_{C(K)} = \sup_{x \in K} |\zeta(x)|$$

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) : \text{espaço das distribuições em } \Omega$$

Índice Remissivo

- Abel, H. N., 31, 36, 40
- Alternativa de Fredholm, 87, 92
- Arzelà, C., 117
- Barreira, 108
 - local, 109
- Bernoulli, D., 2
- Bôcher, M., 15
- Bouligand, G., 106, 108, 113
- Campo
 - irrotacional, 134
 - solenoidal, 134
- Capacidade, 112
- Cauchy, A. L., 31, 37
- Coefficientes de Fourier, 28–29, 38
- Condição da esfera
 - exterior, 51, 101, 110
 - interior, 51, 94
- Coulomb, C. A., 4
- Courant, R., 119
- Crítério de Wiener, 113
- d’Alembert, J. R., 35
- de Moivre, A., 37n
- Dedekind, J. W. R., 61
- Derivada fraca, 127
- Desigualdade
 - de Cauchy-Schwarz, 122
 - de Harnack, 47
 - de Poincaré, 121
- Dirichlet, P. G. L., 31, 38, 63
- Energia potencial, 2
- Equação
 - de Laplace, 1
 - de Poisson, 7
- Espaços de Sobolev, 127–129
- Euler, L., 2, 32n, 35, 37
- Exemplo
 - de Hadamard, 74–77, 141
 - de Lebesgue, 103
 - de Prym, 71, 141
 - de Weierstrass, 68
 - de Zaremba, 102
- Fórmula
 - da média, 14, 138
 - de Poisson, 46, 75
- Fórmula de Stirling, 37n
- Formulação

- clássica, 136
- fraca, 136
- Fourier, J. B. J., 4, 25
- Fredholm, E. I., 87
- Friedrichs, K. O., 127
- Função
 - de Green, 44–45, 51, 96
 - Hölder-contínua, 9
 - harmônica, 5, 132
 - seccionalmente contínua, 38
 - seccionalmente monótona, 39
 - semicontínua inferiormente, 107, 115
 - sub-harmônica, 20, 106, 140
 - super-harmônica, 21, 95
- Gauss, K. F., 1, 63
- Green, G., 1
- $H^1(\Omega)$, 127
- $H^{1/2}(\partial\Omega)$, 128
- Hadamard, J. S., 74
- Harnack, A., 17
- Helmholtz, H., 2
- Hilbert, D., 117
- Hölder, L. O., 9
- Identidades de Green, 42
- Koebe, P., 15
- Lagrange, J. L., 2, 30
- Laplace, P. S., 3
- Lax, P. D., 51
- Lebesgue, H. L., 103, 108
- Lei
 - da Gravitação Universal, 3, 35
 - de Continuidade, 2
- Leibniz, G. W., 35n
- Lema
 - de Abel, 40
 - de Rouché, 67
 - de Weyl, 132
- Levantamento harmônico, 20, 107
- Levi, B., 118n
- Liapounoff, A., 45
- Método
 - da equação integral, 86
 - de Fourier, 25
 - de Perron, 106
 - de Schwarz, 79
 - de varredura, 92
- Métodos
 - alternantes, 93
 - diretos, 118
- Meyers, N. G., 127
- Neumann, K. G., 80, 87
- Newton, I., 3, 35n
- Operador compacto, 88
- Ostrogradski, M. V., 42
- Perron, O., 106
- Picard, E., 96
- Poincaré, H., ix, 51, 65, 92–100
- Poisson, S. D., 3, 13, 37

- Ponto regular, 109–111
- Potencial
 - condutor, 93–94, 112
 - de camada dupla, 43, 88
 - de velocidades, 2
 - eletrostático, 14, 41
 - gravitacional, 7, 103
 - newtoniano, 7–8
- Princípio
 - da Singularidade Removível, 96, 115
 - de Dirichlet, 61, 117
 - de Superposição, 27
 - do máximo, 18–19, 44, 83, 95
 - forte, 19, 108
 - fraco, 18
- Problema
 - bem posto, 136
 - de Dirichlet, 6
- Prym, F. E., 70
- Rebaixamento harmônico, 21, 95
- Reflexão com respeito à esfera, 47, 100
- Relações de ortogonalidade, 28, 37, 57
- Riemann, G. F. B., 61, 65
- Robin, G., 87
- Série
 - de Fourier, 27–41
 - divergente, 34–36
- Schwarz, H. A., 79–81
- Seqüência
 - eqüicontínua, 88
 - minimizante, 118, 130
- Serrin, J., 127
- Sobolev, S. L., 127
- Solução
 - clássica, 6
 - fraca, 129
 - fundamental, 6, 44, 123
 - generalizada, 108
- Stirling, J., 37n
- Temperatura de equilíbrio, 4, 26
- Teorema
 - da Aplicação Conforme, 66
 - da Aplicação Aberta, 131
 - da Convergência Dominada, 16
 - de Aproximação de Weierstrass, 101
 - de Ascoli-Arzelà, 88
 - de Dirichlet, 38
 - de Gauss, 14
 - de Hahn-Banach, 52
 - de Liouville, 58, 86
 - de Tietze, 101
 - do Divergente, 5, 41, 58
 - do Traço, 128
 - Fundamental do Cálculo das Variações, 139
- Teoria
 - das Distribuições, 127

de Regularidade Elíptica,
137

Transformação

conforme, 66, 80, 86

de Kelvin, 97

Weierstrass, K. T. W., 61, 68–
70

Weyl, H., 132

Wiener, N., 106, 112–113

Zaremba, S., 102