

UCL-IPT-00-12

Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences, Département de Physique
Institut de Physique Théorique

Propagation et oscillations en théorie des champs

Dissertation présentée par Michael Beuthe
en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences
Promoteur : Professeur Jacques Weyers
Louvain-la-Neuve, le 4 septembre 2000

Abstract :

After a review of the problems associated with the conventional treatment of particle oscillations, an oscillation formula is derived within the framework of quantum field theory. The oscillating particle is represented by its propagator and the initial and final states by wave packets. It is obviously relativistic from the start and moreover applies both to stable (neutrinos) and unstable particles (K and B mesons, unstable neutrinos). CPLEAR and DAFNE experiments are studied as examples, with special attention directed to CP violation. The problems resulting from equal energies/momentum/velocities prescriptions are analyzed and solved. Oscillations of associated particles are found to be nonexistent. The relativistic generalization of the Wigner-Weisskopf equation is also derived.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon promoteur, M. Jacques Weyers, pour m'avoir accordé sa confiance pendant toutes ces années, ainsi que de m'avoir permis d'aborder des sujets variés dont cette dissertation n'est qu'un reflet.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance envers M. Jean Pestieau, qui m'a proposé plusieurs collaborations, dont l'une est à l'origine de ce travail ; cette thèse n'existerait pas sans lui. Je remercie également MM. Gabriel López Castro et Ricardo Gonzalez Felipe qui ont participé à ces collaborations. Non seulement ils m'ont beaucoup appris mais il a été un vrai plaisir de travailler avec eux.

Merci aussi aux lecteurs de cette thèse, qui ont accepté de faire partie du jury, MM. les professeurs Luis Alvarez-Gaumé, Jean-Pierre Antoine, Jean-Marie Frère et Jean-Marc Gérard. Je remercie ce dernier autant pour les nombreuses discussions sur la relativité générale que sur la phénoménologie des particules élémentaires.

Merci enfin à mon jury officieux mais impitoyable, Tilio Rivoldini et bien sûr Jeanne De Jaegher.

Table des matières

Introduction	1
1 Oscillations en mécanique quantique	9
1.1 Oscillations temporelles en mécanique quantique	9
1.1.1 Le mélange de particules	9
1.1.2 Oscillations de la probabilité de détection	14
1.2 Critique de la dérivation traditionnelle	20
2 Le propagateur complet	25
2.1 Propagation : le modèle simplifié	26
2.2 Deux formes de représentations spectrales	29
2.3 Particule stable : représentation spectrale	33
2.4 Particule stable : propagation spatiale	34
2.5 Particule instable : représentation spectrale	37
2.6 Particule instable : propagation spatiale	39
2.7 Exemple : propagateur complet du kaon	43
3 Mélanges de propagateurs	47
3.1 Propagateur de particules stables en mélange	50
3.2 Propagateur de particules instables en mélange	51
3.3 Exemple : le système $K^0\overline{K}^0$	55
3.4 Oscillations dans le modèle simplifié	58
4 Propagation : le modèle sophistiqué	63
4.1 Paquets d'onde	66
4.2 Amplitude	68
4.3 Analyse temporelle de l'amplitude	71

4.4	Analyse spatiale de l'amplitude	74
4.5	Appendice : intégration sur p^0 dans l'amplitude	78
5	Oscillations en théorie des champs	87
5.1	Propagation d'un mélange de particules	87
5.2	Amplitude pour un mélange	88
5.3	Analyse temporelle de l'amplitude de mélange	89
5.4	Analyse spatiale de l'amplitude de mélange	96
5.5	Analyse de la probabilité	99
5.5.1	Désintégration	99
5.5.2	Oscillation	100
5.5.3	Décohérence	100
5.5.4	Localisation des interactions	106
5.5.5	Oscillations sophistiquées et oscillations simplifiées	108
5.6	Oscillations de fermions	109
5.7	Conclusion	111
6	Applications	117
6.1	Prescription de calcul	117
6.2	L'expérience CPLEAR	119
6.2.1	Désintégrations semi-leptoniques	120
6.2.2	Désintégrations pioniques	123
6.2.3	Transposition au système $B^0\overline{B}^0$	126
6.3	Production de kaons corrélés à DAΦNE	128
6.4	La paramétrisation correcte de la violation CP	133
6.4.1	Phase étrange et paramètres observables	133
6.4.2	Détermination des paramètres	136
	Conclusion	142
	Bibliographie	147

Introduction

Bien que la théorie des champs serve principalement au calcul de processus physiques microscopiques, elle permet aussi l'étude de phénomènes macroscopiques. Par macroscopique j'entends une distance ou un temps tels que leur inverse est beaucoup plus grand en unités naturelles ($\hbar = 1, c = 1$) que l'énergie typique impliquée dans le processus. Le phénomène le plus fondamental de ce type est la propagation d'une particule entre deux points de l'espace-temps, séparés par une distance et/ou un temps macroscopiques.

En physique classique, la probabilité de détecter une particule stable est constante au cours du temps, par définition même de la stabilité, tandis que la probabilité de détecter une particule instable décroît au cours du temps comme une exponentielle : $\mathcal{P}(t) = e^{-t/\tau}$, où τ est le temps de vie moyen. Ce comportement découvert par Rutherford est dérivé en physique classique bien que la désintégration soit un phénomène quantique. En physique quantique, cette image fonctionnant merveilleusement bien du point de vue expérimental est modifiée sous deux aspects.

En premier lieu, la brique de base de la physique quantique n'est plus la probabilité de détection mais l'amplitude de probabilité, dont la norme au carré est en correspondance avec la probabilité classique de détection. Cette amplitude suit une évolution déterministe. La mécanique quantique nous dit que l'amplitude de détection d'une particule stable de masse m oscille dans le repère au repos de la particule comme une exponentielle : $\mathcal{A}(t) \sim \exp(-imt)$. La probabilité de détection d'une particule stable libre reste donc constante au cours du temps. La réalité de ce concept quantique se manifeste le plus clairement à travers l'interférence observable entre plusieurs amplitudes, dont des exemples vérifiés expérimentalement sont l'expérience à deux trous pour des électrons, l'effet Aharonov-Bohm et les oscilla-

tions dans le système $K^0\overline{K}^0$.

En deuxième lieu, les principes fondamentaux de la théorie quantique interdisent une forme exactement exponentielle pour la loi de désintégration. La raison en est que les produits de désintégration peuvent se recombiner pour reformer l'état initial [1]. On peut le voir en divisant l'intervalle de temps t en deux sous-intervalles t_1 et t_2 . L'amplitude de probabilité doit satisfaire à l'équation

$$\mathcal{A}(t_1 + t_2) = \mathcal{A}(t_1) \mathcal{A}(t_2) + \langle \Psi_{inst} | e^{-iHt_2} | \Psi_{des}(t_1) \rangle ,$$

où Ψ_{inst} symbolise l'état instable et $\Psi_{des}(t_1)$ représente l'état des produits de désintégration au temps t_1 . En ne gardant que le premier terme du membre de droite de cette équation, on obtient la formule classique de désintégration exponentielle. Le second terme, purement quantique, modifie ce comportement : les produits de désintégration peuvent retourner à l'état initial¹. Bien que l'existence théorique de ces corrections à la loi de Rutherford soit connue depuis longtemps, elle n'a pas pu être testée expérimentalement jusqu'à présent [7]. L'ordre de grandeur de ces corrections peut être estimé en mécanique quantique, mais il vaut mieux recourir tout de suite à la théorie des champs, puisqu'elle constitue le seul cadre théorique cohérent pour la description des particules instables. Dans ce formalisme, les contributions exponentielles sont en correspondance avec les pôles complexes du propagateur de la particule [6, 8], et l'amplitude de propagation macroscopique oscille dans le repère au repos de la particule comme une exponentielle : $\mathcal{A}(t) \sim \exp(-imt - \Gamma t/2)$. La partie imaginaire de l'exposant s'interprète comme le produit de la masse de la particule et du temps tandis que la partie réelle de l'exposant s'interprète comme le produit de l'inverse du temps de vie moyen par le temps. Les contributions non exponentielles proviennent de l'existence de seuils de production d'états à plusieurs particules ainsi que par des facteurs de seuil figurant dans les amplitudes de production et de détection de la particule se propageant [4, 5]. On peut vérifier dans ce cadre que ces corrections sont négligeables pour toute propagation macroscopique. Nous y reviendrons.

¹ D'autres démonstrations de l'existence de corrections non exponentielles existent, tant en mécanique quantique [1, 2, 3], qu'en théorie des champs [4, 5, 6].

Dans ce travail, nous allons nous intéresser principalement à *l'oscillation de particules*. Si les particules en question sont quasiment dégénérées en masse et mélangées par une interaction, des effets d'interférence apparaîtront sous la forme d'oscillations spatiales de la probabilité de détection des particules. Ces effets dépendent directement de la différence de masse entre les états se propageant. Cette différence doit être très petite pour qu'une oscillation spatiale macroscopique soit observable. Il faut donc vérifier que ce qui a pu être négligé à l'échelle de la masse dans l'analyse de la propagation d'une seule particule peut encore être négligé à l'échelle de la différence de masse entre des états quasiment dégénérés. Dans le cas du système $K^0\overline{K}^0$, la différence de masse causant l'oscillation est du même ordre que les corrections habituellement négligées en Γ/m : $\Delta m/m \approx \Gamma_s/m \approx 10^{-14}$! D'autres problèmes se posent à propos de l'interface classique/quantique. En effet, bien que les oscillations dans la probabilité de détection soient de nature purement quantique, leur observation n'est possible que si les particules sont bien localisées dans l'espace, comme des particules classiques. Nous développerons ces sujets ultérieurement.

Pourquoi les oscillations de particules suscitent-elles tant d'attention ? Deux motivations principales sous-tendent cet intérêt : d'une part, l'étude de la violation CP dans les systèmes oscillants $K^0\overline{K}^0$ et $B^0\overline{B}^0$, et d'autre part la mesure des masses des neutrinos au moyen de leurs oscillations.

Bien que la prédiction [9] et l'observation [10] des oscillations des kaons datent de plus de quarante ans, le phénomène voit son intérêt sans cesse renouvelé. La première raison est que le système des kaons neutres fut jusqu'à l'année passée le seul endroit où une violation CP se manifestait. L'observation [11] de cette violation dans les oscillations des kaons, dite *violation CP indirecte*, est maintenant doublée par l'observation [12] d'une violation CP dans leurs désintégrations, dite *violation CP directe*. Si la violation indirecte est vue comme une perturbation d'ordre ϵ d'un système $K^0\overline{K}^0$ respectant CP, les expériences montrent que $\epsilon \sim 10^{-3}$ et que la violation CP directe est de l'ordre de ϵ^2 . Il est donc important de disposer d'une description cohérente du système à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Ce n'est pourtant pas le cas du formalisme couramment utilisé dans la littérature, qui est l'approximation de Wigner-Weisskopf [13]. Dans cette approche, l'évolution temporelle des états instables obéit à une équation effective de type Schrödinger dont l'hamiltonien non

hermitien permet les désintégrations. Par conséquent, les matrices de diagonalisation de l'hamiltonien sont en général non unitaires, les états correspondants ne sont pas orthogonaux et leur normalisation ne peut se faire sans ambiguïté. Ce problème est souvent négligé, car, dans la limite où la symétrie CP est respectée, la matrice de diagonalisation est unitaire². Il en résulte que la non-orthogonalité des états propres de masse est de l'ordre de ϵ et que l'ambiguïté de normalisation est encore plus petite, de l'ordre de ϵ^2 . C'est pourquoi elle est généralement négligée pour la description de la violation CP indirecte. On a vu ci-dessus qu'il ne peut plus en être question dans l'étude de la violation CP directe qui est du même ordre de grandeur.

Une seconde raison pour s'intéresser aux oscillations de kaons est la transposition immédiate du formalisme approprié aux kaons à d'autres systèmes méson/anti-méson. Le plus prometteur est le $B^0\overline{B}^0$, dont les oscillations ne sont observées que depuis 1987 [15] tandis qu'une première mesure de la violation CP dans ce système a été effectuée récemment [16]. Bien que le formalisme de Wigner-Weisskopf n'ait pas été jusqu'à présent en contradiction avec les données expérimentales, il n'est pas certain que cette description possède le même degré de validité pour modéliser la violation CP du système $B^0\overline{B}^0$, où les corrections relativistes sont beaucoup plus importantes.

Une dernière raison d'étudier ces systèmes de méson/antiméson est l'étude expérimentale de corrélations quantiques macroscopiques (effet EPR) de deux kaons ou mésons B oscillant simultanément [17].

L'autre motivation principale de s'intéresser aux oscillations spatio-temporelles de la probabilité de détection concerne les neutrinos. Historiquement, les premières données expérimentales suggérant des neutrinos massifs proviennent de l'anomalie du flux des neutrinos solaires, qui est bien inférieur aux prédictions des modèles solaires les plus sophistiqués [18, 19, 20]. En 1968, Bruno Pontecorvo attribue le déficit

²Les symétries CPT et CP imposent toutes les deux l'égalité des éléments diagonaux mais la symétrie CP impose en plus l'égalité des éléments non diagonaux de l'hamiltonien [14]; ces contraintes permettent une diagonalisation d'une matrice non hermitienne par une matrice unitaire. En toute généralité, la condition nécessaire et suffisante pour diagonaliser une matrice par une transformation unitaire est que la matrice soit normale, c'est-à-dire qu'elle commute avec son hermitienne conjuguée.

en neutrinos électroniques à des oscillations entre neutrinos de différents nombres leptoniques [21]. Plus tard, des solutions recourant à des neutrinos instables sont aussi proposées [22]. Plus récemment, on assiste à un retour en force du concept de neutrinos massifs en raison de l'observation d'une anomalie angulaire dans le flux des neutrinos atmosphériques [23]. Les deux modèles les plus simples résolvent ce problème en attribuant une masse aux neutrinos. Le premier modèle explique l'anomalie par une oscillation de neutrinos [24] tandis que le deuxième recourt à un neutrino instable [25]. Une dernière raison pour soupçonner une masse aux neutrinos provient de l'expérience LSND [26]. Quelle que soit l'explication de ces différentes anomalies, il paraît difficile d'éviter le recours à des neutrinos massifs, ce qui n'est de toute façon interdit par aucun principe fondamental. Les anomalies citées impliquent des masses pour les neutrinos extrêmement faibles par rapport aux énergies typiques des processus concernés et donc des oscillations macroscopiques sur de très grandes distances. Dès lors, il s'avère crucial de disposer d'une description cohérente de la propagation de neutrinos massifs, puisque les effets d'oscillations résultent de la compensation presque totale d'énergies-impulsions des différents états oscillants, en raison de la petitesse des différences de masses par rapport à l'énergie de la particule. Notons enfin que la masse des neutrinos rend possible une violation CP dans le secteur leptonique. Etant donné que l'explication de l'anomalie des neutrinos atmosphériques par une désintégration reste toujours possible, il me paraît intéressant d'établir un formalisme où les deux phénomènes d'oscillation et de désintégration coexistent. Cet objectif nous ramène au système $K^0\overline{K}^0$, où la désintégration et l'oscillation vont de pair. Dans ce travail, les analyses des propagations des kaons et des neutrinos seront regroupées dans un seul formalisme dérivé à partir des principes de la théorie des champs.

Dans le premier chapitre, le concept d'oscillation est défini en mécanique quantique et le traitement traditionnel de ces oscillations est présenté. Les difficultés soulevées par cette approche sont passées en revue, avec pour conclusion que seul un calcul en théorie des champs peut clarifier ces problèmes. Dans le deuxième chapitre, un modèle simplifié de propagation d'une particule est établi. Il nous conduit à l'étude de la transformée de Fourier du propagateur, à l'obtention de la traditionnelle loi d'évolution en exponentielle ainsi que des corrections non exponentielles

négligeables pour des propagations macroscopiques. Le troisième chapitre est consacré à l'application de ce formalisme à la propagation de particules en mélange : après diagonalisation de leur propagateur, la probabilité de propagation et d'oscillation de ces particules est calculée dans le modèle simplifié du deuxième chapitre. On constate alors que ce modèle ne suffit pas à répondre à toutes les interrogations initiales, bien qu'il éclaire déjà une série de points délicats. Dans le chapitre suivant, un modèle de propagation plus réaliste est développé, toujours dans le cadre de la théorie des champs. Les états entrants et sortants y sont modélisés par des paquets d'ondes. Le calcul de la probabilité de détection d'une particule instable fournit la réponse attendue. Les corrections non exponentielles sont aussi recalculées et restent négligeables. Il ne reste plus qu'à appliquer ce modèle aux oscillations de particules, ce qui est l'objet du cinquième chapitre. Avant de dériver la probabilité d'oscillation, on vérifie que les corrections non exponentielles propres aux mélanges de particules sont négligeables. Une probabilité d'oscillation dépendant uniquement de la distance est ensuite obtenue et analysée terme par terme. Les différents facteurs y figurant représentent la décroissance exponentielle due à l'instabilité de la particule, l'oscillation due au mélange, la disparition de l'oscillation à grande distance due à la décohérence ainsi que les conditions d'observabilité des oscillations dues aux conditions de production et de détection. Le chapitre se termine par une comparaison de nos résultats avec les différentes approches existantes. Au sixième chapitre, on établit des prescriptions de calcul simplifiant l'application de nos formules à des cas concrets. Ensuite, certaines quantités observables des expériences CPLEAR et DAΦNE sont calculées dans notre modèle. Enfin, le travail se termine par une analyse phénoménologique rigoureuse de la violation CP dans le système méson/antiméson.

La nouveauté de ce travail réside en l'application de la théorie des champs à la description du mélange de particules instables, dans le but de traiter de façon unifiée les cas des mésons K et B et des neutrinos, avec l'espoir d'en tirer des leçons intéressantes pour chaque cas particulier. Comme nouveau résultat, nous obtenons une formule relativiste et directement applicable aux expériences, puisque ne dépendant que de la distance de propagation et de l'observation des états initiaux et finaux. Le recours à des concepts classiques extérieurs au formalisme est évité. Le

traitement de la particule oscillante comme état intermédiaire permet de montrer l'inanité des questions suivantes, infiniment ressassées dans de nombreux articles : quelle est l'énergie-impulsion de la particule oscillante ?, comment définir des états physiques non orthogonaux ?, comment définir un état propre de saveur ? (notre réponse à cette dernière question n'est pas originale). Plusieurs controverses concernant la longueur d'oscillation et l'oscillation éventuelle des particules associées à la production de la particule oscillante trouvent enfin une solution claire dans notre formalisme, qui fournit sans ambiguïté la généralisation relativiste de la formule de Wigner-Weisskopf pour un mélange de particules.

Les conditions d'observabilité des oscillations (nécessité d'une incertitude sur l'impulsion de la particule oscillante, existence d'une longueur de cohérence) sont étudiées pour la première fois dans le cas des particules instables. Comme sous-produit de notre analyse, nous avons obtenu une estimation, nouvelle en théorie des champs, des corrections non exponentielles à la propagation d'un mélange de particules. Comme nouvelles applications, nous avons traité rigoureusement la phénoménologie de la violation CP à partir de nos formules. Le cas d'une oscillation double ($\phi \rightarrow K\bar{K}$) est aussi étudié pour la première fois en théorie des champs.

Chapitre 1

Oscillations en mécanique quantique

1.1 Oscillations temporelles en mécanique quantique

L'étude de l'oscillation de la probabilité de détection pour un mélange de particules se fait habituellement dans le cadre de la mécanique quantique. Nous allons travailler avec des particules scalaires instables. Le spin des neutrinos est négligé dans ce traitement. On verra à la section 5.6 que le spin peut être négligé si les masses des particules mélangées sont petites par rapport à leurs impulsions. Avant de définir la notion d'oscillation, il faut discuter du mélange de particules, qui est une des conditions sine qua non d'apparition des oscillations.

1.1.1 Le mélange de particules

Le concept de mélange d'états relève des principes fondamentaux de la théorie quantique. Le principe de la mesure implique que la mesure d'une observable projette l'état quantique initial sur un vecteur propre de l'opérateur associé à cet observable. Il est donc nécessaire de choisir une base d'états physiques constituée de vecteurs propres de l'opérateur en question. Par conséquent, le choix de mesurer

une caractéristique particulière d'un état quantique détermine automatiquement le choix de la base des états physiques. Les différentes bases associées aux différents opérateurs sont reliées par des transformations linéaires ; un état développé dans une base donnée peut être vu comme un *mélange* des états propres de la base en question. Un exemple bien connu de mélange est donné par l'expérience de Stern-Gerlach : si l'état initial a son spin up selon l'axe x , la mesure de son spin selon l'axe y nous oblige à considérer cet état initial dans la base de l'opérateur mesurant le spin selon l'axe y , c'est-à-dire que l'état initial est décomposé en un mélange d'un état ayant son spin up selon y et d'un état ayant son spin down selon y . Un autre exemple est celui du système $K^0\overline{K}^0$ où l'on néglige la violation CP : un K^0 initial se désintégrant en états propres sous CP (deux ou trois pions), l'identification des produits de désintégration équivaut à une mesure de la CP-parité. Le K^0 initial doit donc être décomposé en un mélange d'états de CP-parité positive et d'états de CP-parité négative.

Le concept d'*oscillation* présuppose, d'une part, un mélange de particules de masses différentes : il doit être en principe possible de mesurer les caractéristiques des particules dans deux bases différentes, dont une est constituée d'états propres de masse. D'autre part, la présence d'une oscillation dans la probabilité de détection interdit qu'une mesure soit effectuée dans la base d'états propres de masse. Pourquoi cette base intervient-elle ? La raison en est qu'elle se distingue de toutes les autres bases par le fait qu'elle est la base d'états propres de l'opérateur d'évolution dans le temps $\hat{H}$. Elle intervient donc comme base intermédiaire dans tout processus où une évolution temporelle est présente, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer une mesure de la masse. Les différents états propres de masse évoluent différemment, mais tant qu'une mesure ne les distingue pas, le principe quantique de superposition linéaire dicte que l'amplitude totale du processus est la somme des amplitudes des processus indistinguables. Dans ces circonstances, une oscillation dans la probabilité de détection de la particule apparaîtra en raison de l'interférence entre les amplitudes partielles correspondant aux différents états propres de masse. En conclusion, la probabilité de détection d'une particule se propageant présentera des *oscillations* spatio-temporelles *si* l'état initial de la particule et son état final ne sont pas des états propres de masse *et* s'il est impossible de déterminer quel état propre de masse

a contribué comme état intermédiaire (ce qui implique que les différences de masse doivent être petites).

Précisons les deux bases pertinentes au phénomène d'oscillation. L'hamiltonien doit pouvoir être subdivisé en un hamiltonien de propagation H_{propag} décrivant la propagation libre des particules et un hamiltonien d'interaction H_{int} décrivant les interactions produisant ces particules et éventuellement leur détection. Ces deux parties de l'hamiltonien pourront être distinguées s'il existe un nombre quantique, appelé *saveur*, préservé par H_{int} mais violé par H_{propag} . La base appropriée à la production de particules est constituée de vecteurs propres simultanés de H_{int} et de l'opérateur associé au nombre quantique de saveur. Elle est appelée *base de saveur*. La base appropriée à la description de la propagation des particules est celle dans laquelle H_{propag} est diagonal. Elle est appelée *base de propagation* ou *base de masse*. Elle ne coïncide pas avec la base de saveur puisque l'opérateur de saveur ne commute pas avec H_{propag} .

Le cas le plus simple est celui des neutrinos pris comme particules stables, où l'hamiltonien H_{propag} contient la matrice de masse tandis que l'hamiltonien H_{int} contient les interactions faibles des neutrinos avec les bosons W et Z . La saveur est dans ce cas le nombre leptonique qui est électronique, muonique ou tauique et éventuellement stérile. Il est conservé par l'interaction faible, mais est violé par la matrice de masse qui mélange les neutrinos de saveur définie.

Un cas plus compliqué est celui des particules instables, où une partie des interactions est incorporée dans H_{propag} pour décrire la désintégration de la particule. Considérons par exemple les kaons neutres, qui peuvent être produits par les interactions fortes mais ne peuvent se désintégrer que par interaction faible. Dans une première étape, l'hamiltonien total¹ contenant toutes les interactions des kaons est exprimé comme la somme d'un hamiltonien H_F contenant les interactions fortes et d'un hamiltonien H_f contenant les interactions faibles. L'hamiltonien H_f peut être vu comme une perturbation de l'hamiltonien H_F . La base de saveur est définie comme l'ensemble des vecteurs propres de H_F . La saveur est ici le nombre quan-

¹Il s'agit en fait d'un hamiltonien effectif qui peut être construit dans le cadre de la théorie chirale perturbative. On définira plus précisément ce que l'on entend par interactions fortes et faibles dans ce contexte lorsque l'on abordera les mélanges en théorie des champs au chapitre 3.

tique d'étrangeté, préservé par les interactions fortes mais violé par les interactions faibles. Il vaut $S = +1$ pour le K^0 et $S = -1$ pour le $\overline{K}^0$. A l'ordre zéro de la perturbation de H_F par H_f , les kaons neutres ont la même masse, sont stables et n'interagissent pas entre eux. Dans une seconde étape, avec le but de décrire la propagation et la désintégration de ces particules, la méthode de Wigner-Weisskopf [13] est utilisée pour construire un hamiltonien effectif non hermitien H_{propag} restreint aux interactions entre les kaons neutres. L'hamiltonien H_{propag} contient d'une part la matrice de masse de ces particules dans la limite où H_f est négligé par rapport à H_F et d'autre part les interactions faibles de H_f qui permettent les transitions entre kaons neutres dans la base de saveur. La non hermiticité de H_{propag} exprime le fait que le système des kaons n'évolue pas en isolation en raison des désintégrations possibles des kaons vers les autres états propres de H_F . L'hamiltonien H_{int} contient les interactions fortes des kaons avec les autres états propres de H_F . La construction de H_{propag} et de H_{int} peut se décrire schématiquement comme

$$\begin{aligned} H_{total} &= H_F + H_f \\ &= H_{int} + H_{masse} + H_f \xrightarrow{WW} H_{total, effectif} = H_{int} + H_{propag} . \end{aligned}$$

La relation entre la base de propagation et la base de saveur peut s'écrire

$$|\nu_\alpha(0)\rangle = \sum_j V_{\alpha j} |\nu_j(0)\rangle . \quad (1.1)$$

où V est la matrice diagonalisant H_{propag} si cet hamiltonien a été écrit au départ dans la base de saveur. Les $|\nu_j(0)\rangle$ sont les états propres de propagation au temps $t = 0$, de masse et largeur définies, appartenant à la base de propagation tandis que les $|\nu_\alpha(0)\rangle$ sont les états propres appartenant à la base de saveur.

La forme de la matrice V dépend du type d'hamiltonien H_{propag} décrivant la propagation de la particule. Dans le premier cas, où les particules oscillantes sont stables et leur lagrangien est connu, la matrice V provient de la diagonalisation de la matrice de masse du lagrangien et est unitaire (une discussion plus élaborée de cette diagonalisation pour les fermions figure à la section 5.6). Dans le deuxième cas, où les particules oscillantes sont instables, nous avons vu ci-dessus que l'hamiltonien H_{propag} est nécessairement non hermitien pour engendrer une évolution non

unitaire, c'est-à-dire pour permettre la désintégration des particules. La matrice V diagonalisant cet hamiltonien n'est en général pas unitaire, bien qu'elle puisse l'être si certaines symétries imposent suffisamment de contraintes sur l'hamiltonien, de sorte que la matrice correspondante soit normale (c'est-à-dire qu'elle commute avec son hermitienne conjuguée).

Il existe encore une autre origine possible de la matrice V , qui consiste à tenir compte dans l'hamiltonien des interactions de la particule avec le milieu dans lequel elle se propage (effet MSW [27]). On obtient dans ce cas un hamiltonien effectif satisfaisant à une équation de type Schrödinger. Nous ne discuterons pas de ce mécanisme qui est tout à fait différent, puisque la particule oscillante ne se propage pas librement.

Pour calculer une amplitude, nous devons pouvoir calculer le produit scalaire de deux vecteurs de base. Qu'en est-il des relations d'orthogonalité dans ces deux bases ? Dans la base de saveur, les relations d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(0) \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.2)$$

puisque H_{int} est hermitien et qu'il préserve la saveur. Dans la base de propagation, H_{propag} n'est hermitien que si les particules sont stables. Le produit scalaire entre les éléments de cette base doit donc être défini en général à partir de la base de saveur :

$$\langle \nu_k(0) | \nu_j(0) \rangle = \sum_{\gamma} V_{j\gamma}^{-1} V_{\gamma k}^{-1\dagger}. \quad (1.3)$$

Ces produits scalaires deviennent orthogonaux si la matrice V est unitaire, ce qui est le cas pour des particules stables. Comme on l'a dit plus haut, la matrice V peut aussi être unitaire pour des particules instables si une symétrie impose suffisamment de contraintes sur H_{propag} . Dans le système $K^0\bar{K}^0$, la symétrie CP suffit pour que V soit unitaire. Comme la violation de cette symétrie est de l'ordre du millièrme, le membre de droite de l'équation (1.3) est aussi de l'ordre du millièrme pour les kaons neutres.

Notons cependant que les relations d'orthogonalité dans la base de saveur ne sont valables que si tous les états propres de masse sont énergétiquement permis [28]. Par exemple, supposons qu'il existe quatre neutrinos stables tels que $m_i = 0$

pour $i = 1, 2, 3$ et $m_4 > 1$ GeV. Pour des neutrinos d'énergie inférieure à 1 GeV, on aura

$$\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(0) \rangle = \delta_{\alpha\beta} - V_{\alpha 4} V_{\beta 4}^* .$$

Ce problème est une première indication des difficultés liées à la définition de la base de saveur. Par exemple, est-il possible d'associer une particule observable à chaque état de saveur ? Remettons à plus tard le cas des particules instables : elles ne correspondent en toute rigueur à aucun état de l'espace de Hilbert des états physiques mais apparaissent en théorie des champs comme des pôles de la matrice S . Par contre, à chaque particule stable est associée en mécanique quantique relativiste une représentation du groupe de Poincaré caractérisée par une masse et un spin définis. Dans ce cadre, les états de saveur ne correspondent pas à des particules, à moins d'être dégénérés. Si l'on examine le problème en théorie des champs, on remarque que les opérateurs de création et d'annihilation d'états propres de masse sont bien définis. Par contre, le changement de base (1.1) appliqué à ces opérateurs ne fournit pas des opérateurs de création et d'annihilation d'états de saveur satisfaisant aux relations de commutation canoniques [30]. On pourrait se demander quelle réalité attribuer aux états de saveur apparaissant dans l'équation (1.1). Il se fait que dans un processus où des oscillations sont présentes dans la propagation, les particules oscillantes sont uniquement identifiées à la production et à la détection dans une superposition d'états propres de masse formellement équivalente à un état de saveur. Dans ce sens-là, les états de saveur sont observés dans ce type d'expérience tandis que les états propres de masse ne le sont pas.

1.1.2 Oscillations de la probabilité de détection

Partant d'un état propre d'interaction de saveur α , l'amplitude de détecter au temps t un état de saveur β est donnée selon les règles de la mécanique quantique par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, t) &= \langle \nu_\beta(0) | \exp(-i H_{propag} t) | \nu_\alpha(0) \rangle \\ &= \langle \nu_\beta(0) | \sum_j V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) | \nu_j(0) \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle \nu_\beta(0) | \sum_{j,\gamma} V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) V_{j\gamma}^{-1} | \nu_\gamma(0) \rangle .$$

Les symboles E_j , m_j et Γ_j désignent les énergie, masse et largeur de l'état propre de masse $|\nu_j(t)\rangle$. L'amplitude peut être réécrite comme

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, t) = \sum_j V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) V_{j\beta}^{-1} . \quad (1.4)$$

On a utilisé la relation d'orthogonalité (1.2) dans la base de saveur, puisque la base de propagation (1.3) n'est en général pas orthogonale. Cette non orthogonalité implique que les états $|\nu_i(0)\rangle$ peuvent être normalisés de différentes façons. Cela n'a pas d'importance tant qu'ils n'apparaissent pas dans le résultat final du calcul de l'amplitude, comme on le voit clairement ci-dessus où la formule d'oscillation est calculée sans même poser la question de cette normalisation. Cependant, cette question réapparaît lorsque l'on tente d'écrire des amplitudes impliquant un état propre de masse comme état initial ou final. Par exemple, l'amplitude $\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi\pi) \equiv \langle \pi\pi | H_{total} | K_L \rangle$ dépend de la normalisation choisie pour l'état $|K_L\rangle$. On verra au chapitre 6 la manière correcte de définir de telles amplitudes en théorie des champs.

La formule (1.4) de l'amplitude d'oscillation est souvent écrite [31] en termes des $\langle \nu_k(0) | \nu_j(0) \rangle$:

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, t) = \sum_{j,k} V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) V_{k\beta}^\dagger \langle \nu_k(0) | \nu_j(0) \rangle , \quad (1.5)$$

mais cette expression est équivalente à la formule (1.4). En effet, le remplacement dans l'équation ci-dessus des $\langle \nu_k(0) | \nu_j(0) \rangle$ par leurs expressions (1.3) donne

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, t) &= \sum_{j,k,\gamma} V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) V_{k\beta}^\dagger V_{j\gamma}^{-1} V_{\gamma k}^{-1\dagger} \\ &= \sum_j V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) V_{j\beta}^{-1} , \end{aligned}$$

et l'on retrouve la formule (1.4). Ce n'est pas surprenant, puisqu'à travers l'équation (1.3), ce sont les relations (1.2) d'orthogonalité dans la base de saveur qui sont utilisées.

Le résultat est également identique à celui obtenu par l'utilisation de deux bases de saveur $|\nu_\alpha(0)\rangle_{in}$ et ${}_{out}\langle \nu_\alpha(0)|$, reliées par l'opérateur de renversement

dans le temps T [32, 33, 34]. Les *ket* appartiennent à la base *in* tandis que les *bra* appartiennent à la base *out*. On ne se sert pas des vecteurs hermitiens conjugués. De nouvelles bases $|\nu_j(0)\rangle_{in}$ et $\langle\nu_j(0)|_{out}$ d'états propres de masse sont définies telles qu'elles diagonalisent l'hamiltonien H_{propag} , c'est-à-dire que les nombres $\langle\nu_j(0)|_{out} H_{propag} |\nu_j(0)\rangle_{in}$ forment une matrice diagonale :

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(0)\rangle_{in} &= \sum_j V_{\alpha j} |\nu_j(0)\rangle_{in}, \\ \langle\nu_\alpha(0)|_{out} &= \sum_j \langle\nu_j(0)|_{out} V_{j\alpha}^{-1}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

mais les bases d'états propres de masse ne sont pas reliées par l'opérateur T . Les états propres de masse *in* et *out* sont orthogonaux :

$$\langle\nu_j(0)|_{out} |\nu_i(0)\rangle_{in} = \delta_{ij}.$$

La formule d'oscillation obtenue par cette méthode est identique à l'équation (1.4). De nouveau, ce n'est pas étonnant puisque les nouvelles bases *in* et *out* sont définies à partir de la base de saveur. Ce procédé peut sembler artificiel : quelle est la signification de cette nouvelle base ? Peut-on prendre le produit scalaire entre ces deux bases qui ne sont même pas duales sous l'opérateur T ? Pourquoi introduire une nouvelle base alors que les états propres de propagation ne sont jamais directement observés ?

Notons comme cas particulier que si H_{propag} est hermitien, alors V est unitaire et $\Gamma_j = 0$. L'amplitude s'écrit dans ce cas comme

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, t) = \sum_j V_{\alpha j} \exp(-i E_j t) V_{\beta j}^*.$$

Cette expression est couramment utilisée pour les mélanges de neutrinos stables.

Dans le cas général d'un hamiltonien H_{propag} non hermitien, la probabilité de détection est donnée par la norme au carré de l'amplitude d'oscillation (1.4) et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, t) &= \left| \sum_j V_{\alpha j} \exp(-i E_j t - \Gamma_j t/2) V_{j\beta}^{-1} \right|^2 \\ &= \sum_{j,k} V_{\alpha j} V_{j\beta}^{-1} V_{\alpha k}^* (V^{-1})_{k\beta}^* e^{-i\Delta E_{jk} t} e^{-\Gamma_{jk} t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\Gamma_{jk} \equiv (\Gamma_j + \Gamma_k)/2$ et $\Delta E_{jk} \equiv E_j - E_k$. On peut aussi la réécrire comme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, t) &= \sum_j e^{-\Gamma_j t} |V_{\alpha j}|^2 |V_{j\beta}^{-1}|^2 \\ &+ 2 \sum_{j < k} e^{-\Gamma_{jk} t} \operatorname{Re} \left(V_{\alpha j} V_{j\beta}^{-1} V_{\alpha k}^* (V^{-1})_{k\beta}^* \right) \cos(\Delta E_{jk} t) \\ &+ 2 \sum_{j < k} e^{-\Gamma_{jk} t} \operatorname{Im} \left(V_{\alpha j} V_{j\beta}^{-1} V_{\alpha k}^* (V^{-1})_{k\beta}^* \right) \sin(\Delta E_{jk} t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cette probabilité de détection est une somme de termes qui décroissent tous comme des exponentielles, soit en $e^{-\Gamma_j t}$, soit en $e^{-\Gamma_{jk} t}$. Certains de ces termes oscillent en $\cos(\Delta E_{jk} t)$ et d'autres en $\sin(\Delta E_{jk} t)$. C'est à ces comportements oscillatoires que l'on pense lorsque l'on parle d'oscillation de la probabilité de détection.

Quant à l'oscillation des antiparticules, le théorème CPT appliqué à l'amplitude (1.4) donne la relation

$$\mathcal{A}(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}, t) = \mathcal{A}(\beta \rightarrow \alpha, t),$$

avec la conséquence que $\mathcal{A}(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha}, t) = \mathcal{A}(\alpha \rightarrow \alpha, t)$. La violation CP dans les oscillations ne peut donc être mesurée que s'il y a changement de saveur ($\alpha \neq \beta$), puisqu'elle se manifeste par une différence entre $|\mathcal{A}(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}, t)|^2$ et $|\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, t)|^2$. Si la matrice de diagonalisation V est unitaire, seul le terme $\operatorname{Im}(V_{\alpha j} V_{j\beta}^{-1} V_{\alpha k}^* (V^{-1})_{k\beta}^*)$ (invariant de Jarlskog [35]) viole la symétrie CP dans l'expression de la probabilité (1.8). En effet, le passage de $\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, t)$ à $\mathcal{P}(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}, t)$, qui revient à échanger α et β , est équivalent à remplacer V par V^* si V est unitaire. Cette substitution change le signe de $\operatorname{Im}(V_{\alpha j} V_{j\beta}^{-1} V_{\alpha k}^* (V^{-1})_{k\beta}^*)$ mais laisse les autres termes de la probabilité invariants.

Les deux cas dans lesquels la formule (1.7) est utilisée, - mésons K et B , neutrinos -, nécessitent un traitement relativiste, que n'offre pas cette formule, puisque le facteur $\Delta E_{jk} t$ n'est pas un invariant sous les transformations de Lorentz. Cette non invariance résulte du fait que l'on a négligé la dépendance spatiale des états dans la dérivation de la probabilité de détection. Pourtant, la différence entre le lieu de production et de détection des particules introduit une phase supplémentaire dont il faut en principe tenir compte lorsque l'on étudie des phénomènes d'interférence. Voici les solutions couramment apportées à ce problème. Le calcul de la probabilité

(1.7) est en tout cas valable si la particule oscillante est considérée dans son repère au repos. On remplace alors la phase $-i E_j t$ par la phase correspondante dans le repère au repos, c'est-à-dire $-i m_j \tau$, où τ est le temps propre de la particule. Remarquons que si la particule a une tri-impulsion $\mathbf{p}_j$ bien définie, cette phase peut aussi s'écrire

$$-i m_j \tau = -i E_j t + i \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}. \quad (1.9)$$

Le membre de droite peut aussi être calculé en résolvant l'équation de Schrödinger pour une onde plane, c'est-à-dire en tenant compte de la dépendance spatiale dès le départ dans le calcul de l'amplitude (1.4). Traditionnellement, on utilise le membre de gauche de l'équation (1.9) pour les kaons et le membre de droite pour les neutrinos.

Dans le cas des mésons K et B , on passe dans le repère du laboratoire par la relation $t = \gamma \tau = E \tau / m$, où m est choisi arbitrairement comme $m = (m_j + m_k)/2$ et E est l'énergie de la particule. Si l'on note la phase du terme d'interférence par Φ , la probabilité de détection (1.7) contient des termes oscillant en

$$\begin{aligned} \exp(-i\Phi) &= \exp(-i(m_j - m_k) \tau) \\ &= \exp\left(-i(m_j - m_k) \frac{m}{E} t\right) \\ &= \exp\left(-i \frac{m_j^2 - m_k^2}{2E} t\right). \end{aligned}$$

et ces termes décroissent en

$$\exp(-\Gamma_{jk} \tau) = \exp\left(-\Gamma_{jk} \frac{m}{E} t\right).$$

Comme les expériences ne mesurent que la dépendance spatiale de la probabilité de détection, il faut passer à une expression ne dépendant que de la distance. On substitue donc dans ces expressions la formule de la trajectoire classique, $t = EL/P$, où P est l'impulsion de la particule. Définissant la *longueur d'oscillation* pour le mélange jk par

$$l_{jk}^{osc} \equiv \frac{4\pi P}{m_j^2 - m_k^2}, \quad (1.10)$$

la probabilité de détection (1.7) contient des termes oscillant en

$$\exp(-i\Phi) = \exp\left(-2\pi i \frac{L}{l_{jk}^{osc}}\right),$$

et ces termes décroissent en

$$\exp\left(-\Gamma_{jk} \frac{m}{P} L\right).$$

Les oscillations sont observables si $L/l_{jk}^{osc} \approx \mathcal{O}(1)$ et si $\mathcal{O}(l_{jk}^{osc}) \leq P/(m\Gamma_{jk})$, ou encore si $\mathcal{O}(m_j - m_k) \geq \mathcal{O}(\Gamma_{jk})$. Cette dernière condition signifie banalement qu'on ne verra pas d'oscillations si la particule se désintègre avant d'osciller notablement.

On peut déjà se rendre compte des problèmes liés à ce type d'extension relativiste. Si l'on avait défini un temps propre pour chaque état propre de masse, la phase Φ serait devenue

$$\Phi = m_j \tau_j - m_k \tau_k = (m_j^2 - m_k^2) t / E,$$

où l'on a pris la même énergie pour les états j et k , faute de mieux. La longueur d'oscillation correspondante est alors *deux fois* plus courte [37] ! Le problème réside dans la question de l'existence d'un repère au repos d'une particule qui n'a pas de masse bien définie. Il existe d'autres possibilités de se tromper en prenant des énergies différentes, ou des temps différents, ou des vitesses différentes, ou des impulsions différentes pour les états j et k . Les arguments utilisés pour justifier le bon choix [38, 39, 40] ne sont pas vraiment convaincants. Pour des processus du type $\phi(1020) \rightarrow K^0 \bar{K}^0$, où deux particules oscillent simultanément, les ambiguïtés se multiplient !

La situation ne s'améliore pas si l'on travaille avec le membre de droite de l'équation (1.9), ce qui est la procédure couramment suivie dans le cas des neutrinis. En effet, il faut se donner des prescriptions pour manipuler l'énergie-impulsion $(E_j, \mathbf{p}_j)$, le temps t et la distance $\mathbf{x}$. La solution couramment adoptée [41], tout à fait *ad hoc*, est de supposer l'égalité des tri-impulsions, $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_k \equiv \mathbf{p}$, de sorte que

$$E_j = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_j^2} \cong E + \frac{m_j^2 - m^2}{2E},$$

où $m \equiv (m_j + m_k)/2$, $E \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ et l'on a supposé que $|m_j - m_k| \ll E$. La probabilité (1.7) oscille alors en

$$\exp(-i\Delta E_{jk} t) \cong \exp\left(-i \frac{m_j^2 - m_k^2}{2E} t\right).$$

Le raisonnement se poursuit alors comme pour la particule instable, avec la même définition de la longueur d'oscillation. Une deuxième école [42, 43, 44] utilise des énergies et tri-impulsions différentes pour les différents états propres de masse, et les calcule par conservation de l'énergie-impulsion à la production. Le calcul de la phase Φ du terme d'interférence donne la même longueur d'oscillation que l'équation (1.10) si le temps t est remplacé par $t = EL/P$ quel que soit l'état propre de masse. Les ambiguïtés lors du passage d'une dépendance temporelle à une dépendance uniquement spatiale persistent dans ces deux traitements. On pourrait par exemple argumenter que les états propres de masse ont des vitesses différentes et arrivent donc au détecteur en des temps t_j et t_k légèrement différents. Si l'on pose l'égalité des tri-impulsions, la longueur d'oscillation est alors deux fois plus courte que l'expression (1.10). Enfin, une troisième possibilité [45] consiste à égaler les énergies et à calculer les tri-impulsions par la formule $\mathbf{p}_j^2 = E^2 - m_j^2$. Dans ce cas, on obtient directement une dépendance spatiale dans le terme d'oscillation, mais la prescription d'égalité des énergies paraît aussi *ad hoc* que la prescription d'égalité des tri-impulsions.

Il est pratique d'écrire la longueur d'oscillation pour les neutrinos sous la forme

$$l_{jk}^{osc} \cong 2.48 \text{ m} \frac{P (\text{MeV})}{\Delta m^2 (\text{eV}^2)},$$

qui permet d'évaluer facilement la différence de masse nécessaire pour une longueur d'oscillation donnée.

1.2 Critique de la dérivation traditionnelle de la formule d'oscillation

La dérivation expliquée à la section précédente de la probabilité de détection d'une particule en mélange est incorrecte pour toute une série de raisons. On peut émettre les objections suivantes :

1. L'interférence entre états de masses différentes est interdite en mécanique quantique non relativiste. En effet, l'invariance de l'équation de Schrödinger sous le groupe de Galilée fixe la loi de transformation d'un état : il est multiplié par un facteur de phase qui dépend de la masse de l'état, de la position et du

temps. Des états de masses différentes se transforment donc différemment et la phase relative d'une superposition d'états n'est pas conservée sous le groupe de Galilée. Une superposition cohérente de ces états est donc exclue (règle de superposition de Bargmann [46]). Pour la même raison, les particules instables ne peuvent être décrites en mécanique quantique non relativiste car il n'existe pas de transition entre états de masses différentes.

2. Il faut de toute façon tenir compte des corrections relativistes pour décrire les expériences. Habituellement, on part de la formule non relativiste dans le repère au repos de la particule et on effectue un boost pour passer dans le repère du laboratoire comme expliqué ci-dessus [36]. Cette procédure est ambiguë lorsque l'on examine l'interférence entre états de masses et/ou de largeurs différentes : existe-t-il un repère au repos de l'état oscillant, ou en faut-il deux, un pour chaque état propre de masse ? Cette ambiguïté a suscité des controverses sur la question des oscillations [37, 39]. Il vaut mieux utiliser un formalisme relativiste dès le départ, c'est-à-dire recourir à la théorie des champs, puis effectuer des approximations non relativistes si nécessaire.
3. Les états propres d'interaction (ou de saveur) sont mal définis. Il n'existe pas d'espace de Fock pour des états qui n'ont pas de masse bien définie, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'opérateurs de création et d'annihilation d'états de saveur satisfaisant aux relations de commutation canoniques [30]. Une tentative a été faite en théorie des champs non perturbative, à l'aide de transformations de Bogoliubov mais elle mène à de sérieux problèmes d'interprétation et brise la covariance sous les transformations de Lorentz [47].
4. Pour les particules instables, un problème supplémentaire apparaît puisque l'hamiltonien effectif n'est pas hermitien. Comme on l'a vu ci-dessus, les états propres de masse ne sont plus orthogonaux avec leurs hermitiens conjugués et des problèmes de normalisation se posent. Une solution possible (voir équation (1.6)) consiste à utiliser deux bases *in* et *out* à la place d'une seule base (et son hermitienne conjuguée) [32, 33, 34]. Néanmoins, cette méthode peut paraître artificielle. La question de la normalisation a de l'importance car dans le système $K^0\overline{K}^0$, l'incertitude sur la normalisation des états est du même ordre

que la violation CP directe [48].

5. Les particules instables n'apparaissent pas comme états asymptotiques : ceux-ci ne sont donc pas contenus dans l'espace de Hilbert des états physiques. En fait, elles ne peuvent être traitées de façon cohérente que comme états intermédiaires dans le cadre de la théorie quantique des champs [49].
6. Les états oscillants étudiés jusqu'à présent (mésons K et B , neutrinos) ne sont pas observés directement car ils sont électriquement neutres. Seuls les particules avec lesquelles ils interagissent (ou dans lesquelles ils se désintègrent) par interaction faible sont observés. Dans une approche réaliste, on ne devrait calculer que des amplitudes de transition entre états observables.
7. Les expériences étudient la propagation spatiale, et non temporelle. L'utilisation de la formule classique $L = v t$ dans un calcul éminemment quantique pour remplacer le temps par la distance laisse songeur. D'ailleurs, ne faudrait-il pas utiliser des vitesses v différentes pour les différents états propres de masse ? Ce problème est lié à la question mentionnée ci-dessus du passage à un formalisme relativiste. Cette ambiguïté mène à des différences *du simple au double* dans le calcul de la fréquence d'oscillation [38, 37, 40].
8. La dérivation traditionnelle implique une énergie-impulsion parfaitement définie, c'est-à-dire que les états sont des ondes planes. Par le principe d'incertitude, leur localisation spatio-temporelle est alors inconnue. Comment parler dans ce cas de propagation sur une distance définie ?
9. Il n'y a pas de raison de penser que les énergies ou les impulsions des états oscillants soient égales. Cette question est d'ailleurs ambiguë : peut-on parler de l'énergie ou de l'impulsion d'un état propre de masse lorsqu'il est superposé linéairement à un autre état propre de masse ? L'hypothèse qui consiste à évaluer les tri-impulsions des états propres de masse des neutrinos est donc injustifiée, comme d'ailleurs aussi l'hypothèse opposée qui consiste à évaluer leurs énergies. D'ailleurs, la conservation de l'énergie-impulsion à la production n'impose-t-elle pas l'égalité de l'énergie-impulsion des différents états propres de masse ? Ou alors, faut-il considérer que l'énergie-impulsion des autres particules émises à la production de la particule oscillante varie selon l'état propre de masse

émis ? Cette question n'est pas purement académique. Tout d'abord elle remet en question la formule d'oscillation. Ensuite, l'utilisation d'une conservation stricte de l'énergie-impulsion à la production mène à considérer les particules associées à la particule oscillante (par exemple le muon dans $\pi \rightarrow \mu\nu$) comme une superposition d'états d'énergies-impulsions différentes, avec le résultat qu'ils oscillent eux aussi [50, 51]. Nous verrons au chapitre 6 que ce n'est pas le cas.

10. Les critères d'observabilité des oscillations (à part $L \approx l_{jk}^{osc}$) n'apparaissent pas explicitement dans la formule d'oscillation (1.7). Par exemple, on s'attend à ce que les oscillations soient inobservables
 - si la longueur d'oscillation est de l'ordre de grandeur ou plus petite que l'incertitude sur la position de la source et/ou du détecteur.
 - si l'énergie et l'impulsion des états oscillants peuvent être mesurées avec une précision suffisante pour déterminer quel état propre de masse se propage.
 Pour que la superposition quantique soit possible, il faut donc simultanément une localisation suffisamment précise de la source et du détecteur et une incertitude suffisante sur l'énergie et/ou l'impulsion à l'émission et à la détection [52].

Toutes ces objections mènent à abandonner un traitement direct des états oscillants. Le processus d'oscillation va être considéré dans son ensemble : les états oscillants deviennent des états intermédiaires, non observés directement, se propageant entre une source et un détecteur. Ils sont représentés en théorie des champs par leur propagateur. La forme de celui-ci, consistante avec la relativité restreinte et la causalité, détermine l'évolution spatio-temporelle ainsi que la probabilité de désintégration si la particule est instable. Etant donné que la covariance sous les transformations de Lorentz est implicite dans cette approche, le recours à des repères particuliers et des boosts est rendu inutile. Cette méthode a été proposée pour la première fois par Jacob et Sachs [5] pour les particules scalaires instables et Giunti, Kim et Lee [53] pour les neutrinos.

Dans un premier temps, nous allons présenter un modèle simplifié suffisant à décrire la propagation d'une seule particule stable. Dans cet exemple, l'étude de la

dépendance spatiale de l'amplitude globale de propagation se réduit à l'analyse de la transformée de Fourier du propagateur par rapport à sa tri-impulsion. L'esprit de cette méthode est proche de Schwinger [4] qui étudie la dépendance temporelle de l'amplitude. On appliquera aussi ce modèle à la description de particules instables, bien qu'en toute rigueur il ne convienne pas à cette situation. On estimera les contributions non exponentielles à l'amplitude de propagation, et l'on calculera aussi une probabilité d'oscillation dépendant uniquement de la distance. Ses insuffisances vis-à-vis des particules instables mises à part, le modèle simplifié ne permet pas non plus de répondre à toutes les questions posées ci-dessus à propos de la dérivation traditionnelle des oscillations en mécanique quantique. Je pense d'une part au problème de l'égalité ou non des énergies-impulsions des états oscillants et d'autre part aux conditions d'observabilité de ce phénomène.

Dans un second temps, nous proposerons un modèle plus sophistiqué. Pour tenir compte des restrictions expérimentales sur les oscillations, les états entrants et sortants à la source et au détecteur seront représentés par des paquets d'ondes. On pourra ainsi dériver les conditions d'observabilité des oscillations. La propagation de particules instables pourra aussi être décrite de façon cohérente. Enfin, toutes les questions soulevées ci-dessus concernant les oscillations trouveront une réponse. Les formules théoriques seront appliquées dans une série de cas concrets concernant des expériences actuelles. Une paramétrisation cohérente de la violation CP sera aussi établie. Tout au long de ce travail, la symétrie CPT sera supposée exacte. Paramétriser une violation éventuelle de cette symétrie dans un modèle comme le nôtre basé sur la théorie des champs est incohérent puisque personne n'a réussi jusqu'à présent à construire une théorie des champs relativiste violant CPT. Autant paramétriser cette violation dans le cadre de la mécanique quantique, comme cela a déjà été fait de nombreuses fois (toutefois, la première paramétrisation, à ma connaissance, de la violation de CPT dans le système $K^0\overline{K}^0$ a été effectuée en théorie des champs! [32]).

Chapitre 2

Le propagateur complet

Il apparaît dans ce chapitre que le propagateur complet constitue l'élément clé de toute description d'un phénomène de propagation macroscopique en théorie des champs. Remarquons tout d'abord que l'amplitude de propagation d'une particule dépend en général des processus de production et de détection. Sous certaines conditions analysées dans le chapitre 4, il est possible de factoriser l'amplitude globale en trois parties : production, propagation et détection. La propagation d'une particule peut alors être étudiée à partir du seul propagateur, sans prendre en compte les états entrants et sortants. Dans ce cas, l'utilisation de la théorie quantique des champs n'est pas plus compliquée que celle de la mécanique quantique et fournit directement une formule d'oscillation spatiale, ce qui est déjà un plus par rapport à la formule (1.7) dérivée en mécanique quantique. Notons cependant que nos calculs ne s'appliqueront pas à la propagation de bosons de jauge chargés : le propagateur n'étant pas invariant de jauge, il ne peut être considéré indépendamment. Un tel processus ne peut être factorisé qu'en sous-processus invariants de jauge [54].

Après le passage en revue des hypothèses du modèle simplifié, nous étudierons la représentation spectrale du propagateur complet et les conséquences de celle-ci sur l'amplitude de propagation spatiale, tant pour une particule stable que pour une particule instable. En particulier, les corrections non exponentielles dues aux seuils de production de plusieurs particules réelles seront examinées. Le chapitre se termine par un exemple de calcul de propagateur complet.

2.1 Propagation : le modèle simplifié

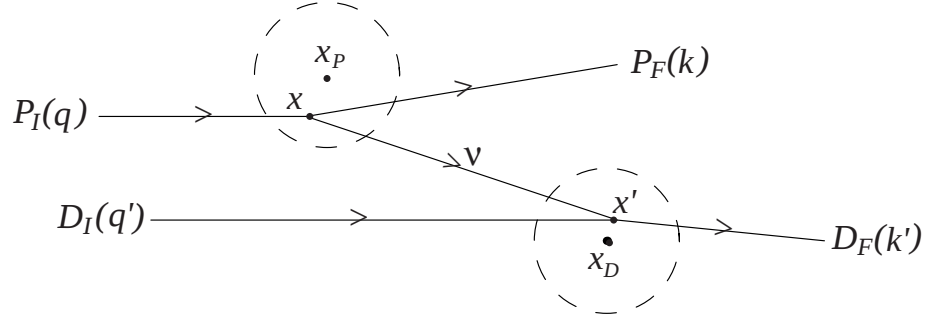
Dans cette section, nous présentons un modèle simplifié tel que l'amplitude de propagation se factorise et l'étude de la propagation se résume à celle du propagateur. Le processus de propagation d'une particule scalaire est symbolisé par

$$\begin{array}{ccc}
 P_I(q) & \xrightarrow{(t_P, \mathbf{x}_P)} & P_F(k) + \nu(p) \\
 & \searrow & \\
 & & \nu(p) + D_I(q') \xrightarrow{(t_D, \mathbf{x}_D)} D_F(k')
 \end{array}$$

P_I représente l'ensemble des particules arrivant dans la région de production centrée autour du point $(t_P, \mathbf{x}_P)$, d'énergie-impulsion totale q tandis que P_F représente l'ensemble des particules issues de la région de production et d'énergie-impulsion totale k , à l'exception de la particule intermédiaire ν dont on étudie la propagation¹. D_I , D_F et $(t_D, \mathbf{x}_D)$ ont des définitions similaires mais concernent le point de détection. Le point d'interaction à la production est noté par x et le point d'interaction à la détection est noté x' . On pose que l'état intermédiaire se propageant de x en x' a les nombres quantiques d'une particule, pas d'une antiparticule. Toutes les particules du processus sont supposées scalaires. Les conditions expérimentales (énergies-impulsions de $P_{I,F}$, $D_{I,F}$) sont choisies telles que le processus ci-dessus, où une particule quasi-réelle ν se propage macroscopiquement, est sélectionné parmi tous les processus possibles. En d'autres termes, les énergies-impulsions des états initiaux et finaux sont telles que l'élément de matrice S correspondant à ce processus est évalué près de la singularité du propagateur de la particule intermédiaire.

Ce processus pourrait aussi être symbolisé par le diagramme suivant, sur lequel les régions de production et de détection sont indiquées par des cercles en pointillé et les flèches indiquent la direction des impulsions :

¹Tout au long de ce travail, les vecteurs en 3 dimensions seront notés en gras tandis que les vecteurs en 4 dimensions seront notés normalement. Les produits scalaires s'écrivent respectivement $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ et $p \cdot q$. La métrique utilisée est $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.



Les hypothèses simplificatrices de ce modèle sont les suivantes :

- tous les états entrants et sortants sont stationnaires, c'est-à-dire que leurs énergies ont des valeurs déterminées.
- un état au point de production et un état au point de détection sont localisés spatialement à une précision infinie.
- les autres états ont des tri-impulsions déterminées à une précision infinie, c'est-à-dire qu'ils sont des ondes planes dans l'espace de configuration.

Pour fixer les idées, supposons que P_I et D_I soient chacun constitués d'un seul état stationnaire désigné respectivement dans l'espace de configuration par

$$\widetilde{\phi}_{P_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) e^{-iE_{P_I}t} \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}_{D_I}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_D) e^{-iE_{D_I}t'}.$$

On ne pourra parler de propagation macroscopique que si les interactions à la production et à la détection sont suffisamment localisées par rapport à la distance de propagation. C'est pourquoi on a posé l'hypothèse extrême que les fonctions d'onde des états P_I et D_I sont des distributions delta de sorte que les interactions de production et détection soient localisées spatialement à une précision infinie :

$$\widetilde{\phi}_{P_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \sim \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}_{D_I}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_D) \sim \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_D).$$

Bien sûr, le prix à payer est une incertitude complète sur la tri-impulsion de la particule intermédiaire. Quant aux états P_F et D_F , on suppose qu'ils ne contiennent chacun qu'une particule, qui est représentée par une onde plane :

$$\widetilde{\phi}_{P_F}(\mathbf{x}, t) \sim e^{-iE_{P_F}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}_{D_F}(\mathbf{x}, t') \sim e^{-iE_{D_F}t' + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}.$$

L'amplitude du processus s'écrit dans l'espace de configuration comme

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sim & M_P M_D \int d^4 x \int d^4 x' \widetilde{\phi_{P_I}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) e^{-iE_{P_I} t} \widetilde{\phi_{D_I}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_D) e^{-iE_{D_I} t'} \\ & \times e^{iE_{P_F} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{iE_{D_F} t' - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} G(p^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où M_P , M_D sont les couplages, supposés constants et $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ sont les impulsions totales des états P_F et D_F . Le propagateur est symbolisé par $G(p^2)$ ou par $G(p^0, \mathbf{p})$ selon les besoins. Cette formule est justifiée rigoureusement au chapitre 4, dans le cadre du modèle sophistiqué. L'intégration sur t et t' donne

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sim & M_P M_D \int d^3 x \int d^3 x' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \delta(E_{P_I} - E_{P_F} - p^0) \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + p^0) \\ & \times e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \widetilde{\phi_{P_I}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \widetilde{\phi_{D_I}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_D) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} G(p^2) \\ \sim & M_P M_D 2\pi \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + E_{P_I} - E_{P_F}) \int d^3 x \int d^3 x' \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \\ & \times e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \widetilde{\phi_{P_I}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \widetilde{\phi_{D_I}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_D) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} G(E, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

où $E \equiv E_{P_I} - E_{P_F} > 0$. L'intégration sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ donne, après insertion des fonctions d'onde delta

$$\mathcal{A} \sim M_P M_D 2\pi \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + E_{P_I} - E_{P_F}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}} G(E, \mathbf{p}) \quad (2.2)$$

où $\mathbf{L} \equiv \mathbf{x}_D - \mathbf{x}_P$.

On voit que dans ce modèle simplifié, l'amplitude de propagation est directement proportionnelle à la *transformée de Fourier du propagateur sur sa tri-impulsion* et aura donc une dépendance spatiale en $\mathbf{L}$. Notons que l'on étudie habituellement la transformée de Fourier du propagateur sur l'énergie [4, 6] ce qui donne une amplitude dépendant du temps. Outre le fait qu'aucun modèle n'est donné pour justifier ce choix, il est plus logique d'étudier la dépendance spatiale du propagateur puisqu'aucune expérience n'observe directement la dépendance temporelle.

Ce modèle-ci présente cependant plusieurs défauts :

- il ne s'applique pas à la désintégration des particules instables, pour lesquelles il ne peut être question d'état stationnaire lors de leur désintégration.

- l’approximation, soit d’états stationnaires, soit d’ondes planes, est trop forte car elle ne permet pas d’étudier l’influence des conditions de production et de détection. De plus, comme on le verra à la section 3.4, elle est trop imprécise pour que l’on puisse répondre par la suite à la question d’égalité ou non des énergies-impulsions des états oscillants.
- l’amplitude est indépendante de la direction de $\mathbf{L}$.

Ces défauts ne deviennent préoccupants que pour l’étude de phénomènes tels que les oscillations de particules, qui résultent de la compensation quasi totale de différentes phases. Nous y reviendrons dans le prochain chapitre et développerons un modèle plus complet par la suite. Une autre imperfection de ce modèle relève de la question de la possibilité d’une propagation libre. Dans une chambre à bulles, la trajectoire d’une particule chargée est signalée par des bulles résultant des interactions électromagnétiques de la particule avec le milieu de propagation [1]. Il faudrait en principe tenir compte de ces mesures successives dans le formalisme quantique. Ce problème ne sera pas examiné ici puisque l’on vise à décrire la propagation de particules neutres (kaons, neutrinos). La question de principe subsiste cependant, car ces particules interagissent encore faiblement avec le milieu de propagation. Le modèle MSW [27] est un exemple où ces interactions jouent un rôle déterminant.

Pour revenir au modèle simplifié, il convient maintenant d’étudier la forme générale du propagateur et sa transformée de Fourier.

2.2 Deux formes de représentations spectrales

Un champ relativiste décrit une excitation locale qui produit un spectre d’énergies ou de masses possédant une limite inférieure caractéristique du type de champ. Par exemple, la limite théorique pour n’importe quel boson ou lepton électriquement chargé est la masse de l’électron, tandis que pour les champs neutres de ces deux types, le spectre commence en principe en zéro. Pour les baryons, cette limite est la masse du proton. Ces limites sont fixées par les masses des particules stables restantes après que toutes les désintégrations possibles ont eu lieu.

La propagation de ces excitations est décrite par la fonction de Green à deux

points ordonnée dans le temps, qui pour un champ bosonique scalaire est définie par

$$G(x - y) = \langle 0 | T(\phi(x) \phi^*(y)) | 0 \rangle .$$

Elle est aussi appelée *propagateur complet*. En vertu des principes fondamentaux de la théorie relativiste des champs, cette fonction prend la forme suivante, appelée *représentation spectrale* ou de Källen-Lehmann [55] :

$$G(x - y) = \int_{M^2}^{\infty} ds \rho(s) \Delta_F(x - y, s)$$

où

$$\Delta_F(x - y, s) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon}$$

est le propagateur de Feynman du champ scalaire libre. La *fonction spectrale* $\rho(s)$ est définie par

$$\rho(s = p^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(p - p_n) |\langle 0 | \phi(0) | n \rangle|^2, \quad (2.3)$$

où la sommation sur les états $|n\rangle$ à n particules comprend aussi une intégration sur leurs tri-impulsions. Cette fonction peut être interprétée comme étant la densité d'états de masse s . M est la masse invariante de l'état à plusieurs particules le plus léger en interaction avec le champ. On a

$$\rho(s) = 0 \quad \text{pour} \quad s \leq M^2 .$$

La représentation spectrale du propagateur complet dans l'espace des impulsions s'obtient par transformée de Fourier et s'écrit

$$G(p^2) = \int_{M^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon}$$

(2.4)

où l'on reconnaît une sommation pondérée selon la masse sur le propagateur de la particule libre.

Le propagateur $G(p^2)$ peut être vu comme la valeur limite de la fonction $G(z)$ définie dans le plan complexe :

$$G(p^2) = \lim_{z \rightarrow p^2 + i\epsilon} G(z) = \lim_{z \rightarrow p^2 + i\epsilon} \int_{M^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{i}{z - s} .$$

La fonction $G(z)$ est analytique partout sauf sur une coupure le long de l'axe réel positif à partir de $z = M^2$.

Pour que les intégrales définies ci-dessus existent, il faut que la fonction $\rho(s)$ décroisse lorsque s tend vers l'infini. Par conséquent, le propagateur a un comportement asymptotique en $G(p^2) \sim i p^{-2}$ lorsque $p^2 \rightarrow \infty$. Cette propriété caractéristique d'un champ local peut être utilisée pour établir une représentation spectrale équivalente du propagateur [4], qui est particulièrement pratique pour étudier les particules instables et faire le lien avec l'approche perturbative des diagrammes de Feynman. Observons d'abord que $G(z)$ n'a pas de zéros complexes puisque

$$G(x + iy) = i \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{(x-s)\rho(s)}{(x-s)^2 + y^2} + y \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{(x-s)^2 + y^2} = 0$$

implique $y = 0$. La fonction $P(z) \equiv i G^{-1}(z) - z$ est donc régulière dans le plan complexe, à l'exception de la coupure sur l'axe réel positif déjà mentionnée. La fonction $z^{-1} P(z)$ tend vers zéro à l'infini dans le plan complexe et présente un pôle à l'origine. Elle peut s'écrire

$$z^{-1} P(z) = -\frac{M_0^2}{z} - \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{\sigma(s)}{z-s},$$

où $\sigma(s)$ est une fonction dont on va déterminer les propriétés. On peut encore écrire

$$i G^{-1}(z) = z - M_0^2 - z \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{\sigma(s)}{z-s}.$$

En comparant avec la formule précédente pour $G(z)$ (équation (2.4)), on a

$$i G(0) = M_0^{-2} = \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s} > 0.$$

De plus, on vérifie que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(x + i\epsilon) &= -\operatorname{Re} G(x - i\epsilon) = \pi \rho(x) \geq 0, \\ \operatorname{Im} G(x + i\epsilon) &= \operatorname{Im} G(x - i\epsilon), \end{aligned} \tag{2.5}$$

donc

$$\begin{aligned} G^{-1}(x + i\epsilon) - G^{-1}(x - i\epsilon) &\geq 0 \quad \text{pour } x > M^2, \\ G^{-1}(x + i\epsilon) - G^{-1}(x - i\epsilon) &= 0 \quad \text{pour } x \leq M^2, \end{aligned}$$

On vérifie aussi que

$$G^{-1}(x + i\epsilon) - G^{-1}(x - i\epsilon) = 2\pi x \sigma(x),$$

donc $\sigma(x) \geq 0$ avec $\sigma(x) = 0$ pour $x \leq M^2$. Ces deux conditions, $M_0^2 > 0$ et $\sigma(x) \geq 0$, garantissent que $G(z)$ n'a pas de pôle pour z réel négatif. En conclusion, la deuxième représentation spectrale du propagateur s'écrit

$$G(z) = \frac{i}{z - M_0^2 - \Pi(z)} \quad (2.6)$$

où

$$\Pi(z) \equiv z \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{\sigma(s)}{z - s}. \quad (2.7)$$

Remarquons que

$$\mathcal{I}m \Pi(p^2) = \lim_{z \rightarrow p^2 + i\epsilon} \mathcal{I}m \Pi(z) = -\pi p^2 \sigma(p^2) \leq 0. \quad (2.8)$$

Cette forme du propagateur se retrouve aussi à partir des diagrammes de Feynman. Soit la fonction $-i \Pi(p^2)$, appelée *énergie propre*, désignant la somme des diagrammes irréductibles à une particule (1PI),

$$\begin{aligned} -i \Pi(p^2) &= \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\ &= \text{---} \text{1PI} \text{---} \end{aligned}$$

Le propagateur complet est la somme de toutes les insertions possibles de l'énergie propre dans le propagateur :

$$G(p^2) = \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} \text{1PI} \text{---} + \dots$$

et peut s'exprimer comme une série géométrique en $-i \Pi(p^2)$:

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i}{p^2 - M_0^2} + \frac{i}{p^2 - M_0^2} (-i \Pi(p^2)) \frac{i}{p^2 - M_0^2} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - M_0^2 - \Pi(p^2)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On retrouve la deuxième forme de la représentation spectrale. La fonction $\Pi(p^2)$ étant en général divergente, cette série ne converge pas et il faut renormaliser la masse M_0 par une constante infinie qui absorbe la divergence de $\Pi(p^2)$. Cette procédure faite, la série converge pour un couplage faible et loin des pôles éventuels de $G(p^2)$. Soit M la masse renormalisée et $f(p^2)$ la partie restante de $\Pi(p^2)$ après renormalisation de la masse (son expression exacte dépend du point de renormalisation). Le propagateur complet devient

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - M^2 - f(p^2)} \quad (2.10)$$

La fonction $f(p^2)$ acquiert une partie imaginaire pour $p^2 > M_{seuil}^2$, qui est l'énergie-impulsion minimale pour créer des particules intermédiaires réelles (c'est-à-dire sur leur couche de masse). En prolongeant $G(p^2)$ dans le plan complexe en $G(z)$, on retrouve bien la coupure sur l'axe des réels, pour $p^2 > M_{seuil}^2$, présente dans la représentation spectrale.

Remarquons enfin que le pôle du propagateur complet en $p^2 = m^2$ apparaît dans la deuxième représentation spectrale comme un zéro du dénominateur, c'est-à-dire comme solution de

$$p^2 - M^2 - f(p^2) = 0.$$

On va voir immédiatement que ce pôle peut être interprété comme la *masse physique* de l'état à une particule créé par le champ. Cette masse physique m n'est pas nécessairement identique à la masse renormalisée M .

2.3 Particule stable : représentation spectrale

Supposons que le champ crée un état à une particule de masse m , ainsi que des états à plusieurs particules. La fonction spectrale (2.3) s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \rho(p^2) = & \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}} (2\pi)^3 \delta^{(4)}(p - q) |\langle 0 | \phi(0) | q \rangle|^2 \\ & + \sum_{n \geq 2} (2\pi)^3 \delta^{(4)}(p - p_n) |\langle 0 | \phi(0) | p_n \rangle|^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho(s) = Z \delta(s - m^2) + \rho_{multi}(s), \quad (2.11)$$

où $Z \equiv |\langle 0 | \phi(0) | q \rangle|^2$ est une constante dépendant uniquement de $q^2 = m^2$ par invariance de Lorentz. Elle peut s'interpréter comme la probabilité que le champ ϕ crée un état à une particule à partir du vide. La fonction $\rho_{multi}(s)$ est une fonction continue et représente la contribution des états à plusieurs particules. Ces états ne contribuent que si l'énergie disponible est supérieure au seuil de production de ces états sur leur couche de masse. Le seuil le plus bas est noté M_{seuil}^2 .

$$\rho_{multi}(s) = 0 \quad \text{pour} \quad s \leq M_{seuil}^2.$$

M_{seuil} doit être supérieur à m sinon la particule de masse m se désintégrerait dans les particules associées à M_{seuil} . Dans ce cas, cette particule n'apparaîtrait pas dans les états asymptotiques et la représentation spectrale ne serait plus valide. On verra plus tard comment modifier cette représentation pour y inclure la description des particules instables.

En y insérant l'expression de la fonction spectrale (2.11), le propagateur complet (2.4) devient

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{M_{seuil}^2}^{\infty} ds \frac{i \rho_{multi}(s)}{p^2 - s + i\epsilon} \\ &\equiv G_{1part}(p^2) + G_{multi}(p^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le pôle du propagateur complet s'interprète donc comme la masse physique de l'état à une particule créé par le champ. La constante Z est le résidu au pôle du propagateur complet.

2.4 Particule stable : propagation spatiale

Rappelons que le but est d'étudier l'amplitude de propagation (2.2), ce qui revient à analyser la dépendance spatiale du propagateur en calculant sa transformée de Fourier par rapport à la tri-impulsion. Celle-ci sera notée $G(p^0, \mathbf{L})$:

$$G(p^0, \mathbf{L}) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}} G(p^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}} \left(G_{1part}(p^2) + G_{multi}(p^2) \right).$$

A partir du propagateur (2.12) d'un champ créant une particule stable, on obtient

$$G_{1part}(p^0, \mathbf{L}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}} \frac{i Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty \frac{\mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} e^{i|\mathbf{p}|L \cos \theta} \frac{iZ}{p^{02} - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{Z}{4\pi^2 L} \int_0^\infty |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \frac{e^{i|\mathbf{p}|L} - e^{-i|\mathbf{p}|L}}{p^{02} - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{Z}{4\pi^2 L} \int_{-\infty}^\infty q dq \frac{e^{iqL}}{p^{02} - q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{-iZ}{4\pi L} e^{ip_m L}, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

où $L \equiv |\mathbf{L}|$ et $p_m \equiv \sqrt{p^{02} - m^2 + i\epsilon}$. La dernière étape a été calculée par intégrale de contour en fermant le contour par le haut.

Si $p^{02} - m^2 < 0$, $p_m = i\sqrt{m^2 - p^{02}}$ et l'amplitude décroît exponentiellement en fonction de la distance.

Si $p^{02} - m^2 > 0$, la décroissance est en L^{-1} qui est le facteur géométrique attendu, de sorte que la probabilité de détection sur un élément de sphère de rayon L décroisse en L^{-2} .

De même,

$$G_{multi}(p^0, \mathbf{L}) = \frac{-i}{4\pi L} \int_{M_{seuil}^2}^\infty ds \rho_{multi}(s) e^{ip_s L}, \tag{2.14}$$

où $p_s \equiv \sqrt{p^{02} - s + i\epsilon}$.

En rassemblant les deux termes (2.13) et (2.14), on obtient

$$G(p^0, \mathbf{L}) = \frac{-i}{4\pi L} \left(Z e^{ip_m L} + \int_{M_{seuil}^2}^\infty ds \rho_{multi}(s) e^{ip_s L} \right).$$

Par le lemme de Riemann, le deuxième terme tend vers zéro lorsque la distance L tend vers l'infini. En effet, on peut effectuer la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
G_{multi}(p^0, \mathbf{L}) &= -\frac{i}{4\pi L} \int_{M_{seuil}^2}^{p^{02}} ds \rho_{multi}(s) e^{ip_s L} - \frac{i}{4\pi L} \int_{p^{02}}^\infty ds \rho_{multi}(s) e^{-\sqrt{s-p^{02}}L} \\
&\equiv G_{multi,I}(p^0, \mathbf{L}) + G_{multi,II}(p^0, \mathbf{L}).
\end{aligned}$$

Notons que $G_{multi,I} = 0$ si $p^{02} \leq M_{seuil}^2$ puisque $\rho_{multi}(s) = 0$ pour $s \leq M_{seuil}^2$. Sous le changement de variable $s \rightarrow \omega \equiv p_s$, $G_{multi,I}$ devient

$$G_{multi,I}(p^0, \mathbf{L}) = -\frac{i}{4\pi L} \int_0^{p_{seuil}} d\omega f(\omega) e^{i\omega L},$$

où $f(\omega) \equiv 2\omega\rho_{multi}(p^{02} - \omega^2)$ et $p_{seuil} \equiv \sqrt{p^{02} - M_{seuil}^2}$. Une intégrale par parties donne

$$G_{multi,I}(p^0, \mathbf{L}) = \left(\frac{-i}{4\pi L}\right) \left(\frac{i}{L}\right) \int_0^{p_{seuil}} d\omega \frac{df(\omega)}{d\omega} e^{i\omega L},$$

où l'on a utilisé le fait que $f(p_{seuil}) = 2p_{seuil}\rho_{multi}(M_{seuil}^2) = 0$. De même, sous le changement de variable $s \rightarrow \alpha \equiv \sqrt{s - p^{02}}$, $G_{multi,II}$ devient

$$G_{multi,II}(p^0, \mathbf{L}) = -\frac{i}{4\pi L} \int_0^\infty d\alpha g(\alpha) e^{-\alpha L},$$

où $g(\alpha) \equiv 2\alpha\rho_{multi}(\alpha^2 + p^{02})$. Une intégrale par parties donne

$$G_{multi,II}(p^0, \mathbf{L}) = \left(\frac{-i}{4\pi L}\right) \left(\frac{1}{L}\right) \int_0^\infty d\alpha \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} e^{-\alpha L},$$

où l'on a utilisé le fait que $g(0) = 0$ et que $\rho_{multi}(s)$ ne diverge pas à l'infini. En répétant le processus J fois, on obtient

$$G_{multi}(p^0, \mathbf{L}) = \frac{-i}{4\pi L^{J+1}} \left(i^J \int_0^{p_{seuil}} d\omega \frac{d^J f(\omega)}{d\omega^J} e^{i\omega L} + \int_0^\infty d\alpha \frac{d^J g(\alpha)}{d\alpha^J} e^{-\alpha L} \right).$$

Ce procédé est répétable autant de fois que les fonctions $f(\omega)$ et $g(\alpha)$ (c'est-à-dire la fonction ρ_{multi}) sont dérivables. La décroissance en L est donc plus rapide que n'importe quelle puissance inverse de L si ces fonctions sont infiniment dérivables. Mais ρ_{multi} n'est pas infiniment dérivable aux seuils s_N , qui sont les points où les états à N particules commencent à contribuer. La valeur de J correspondant au seuil s_N se calcule en observant que près de ce seuil [6],

$$\rho_{multi}(s) \sim \left(\sqrt{s - s_N}\right)^{3N-5}.$$

En développant p_s autour de ce seuil, on calcule que la contribution à $G_{multi}(p^0, \mathbf{L})$ due au seuil s_N a un comportement asymptotique pour L grand en

$$G_{Npartic}(p^0, \mathbf{L}) \sim \frac{const.}{L} (\mu L)^{-\frac{3}{2}(N-1)} \exp(ip_{s_N} L), \quad (2.15)$$

où

$$p_{s_N} \equiv \sqrt{p^{02} - s_N + i\epsilon}.$$

Si $s_N > p^{02}$, la racine choisie a une partie imaginaire positive. La masse μ caractérisant l'échelle d'énergie a été introduite pour raison dimensionnelle. La contribution des seuils n'est importante qu'en deçà de $\mu L \approx 1$, ce qui pour $\mu \approx 500$ MeV

correspond à $L \approx 10^{-16}$ m. Ce terme est donc négligeable par rapport à $G_{1part}(p^0, \mathbf{L})$ lorsque l'on étudie la propagation sur des distances macroscopiques.

Retournant à la formule (2.2) de l'amplitude de propagation et y insérant l'expression (2.13), on conclut que la propagation d'une particule stable sur une distance macroscopique L est donnée par

$$\mathcal{A}(L) \sim M_P M_D 2\pi \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + E_{P_I} - E_{P_F}) \frac{-iZ}{4\pi L} e^{ip_m L}, \quad (2.16)$$

où $p_m \equiv \sqrt{E^2 - m^2}$ et $E \equiv E_{P_I} - E_{P_F} \geq m$.

2.5 Particule instable : représentation spectrale

On a vu plus haut que les pôles du propagateur $G(p^2)$ correspondent à des états stables à une particule. Il est indispensable pour la stabilité de la particule qu'ils soient inférieurs au seuil de contribution des états à plusieurs particules. Pourrait-on décrire les particules instables en violant cette condition ? Notons tout de suite que ce pôle ne peut être réel sinon la propagation spatiale serait du même type que celle de la particule stable, alors que l'on s'attend à une décroissance de l'amplitude de propagation, due à la désintégration possible de la particule. Supposons donc que le propagateur $G(z)$ ait un pôle complexe z_0 dont la partie réelle est supérieure à M_{seuil} . Pour des valeurs réelles de $z = p^2$, le propagateur ne présentera pas de pôle mais un pic en $p^2 = \mathcal{Re} z_0$ d'autant plus élevé que la partie imaginaire du pôle est petite. Il est tentant d'interpréter la partie réelle du pôle comme la masse de la particule instable tandis que la partie imaginaire devrait être reliée au temps de vie (puisque son annulation implique un temps de vie infini).

Il reste un problème : comme prouvé plus haut, la représentation spectrale du propagateur n'admet pas de pôles complexes ! Néanmoins, la coupure sur l'axe des réels permet un prolongement analytique de $G(z)$ à travers la coupure sur d'autres feuilles de Riemann [8]. Il suffit que le pôle se trouve sur une de ses feuilles de Riemann supplémentaires et la représentation spectrale n'est plus violée².

²Toutefois, la correspondance univoque entre les particules instables et les pôles complexes

Partons de la deuxième représentation spectrale (équation (2.6)) du propagateur qui s'écrit

$$G(z) = \frac{i}{z - M_0^2 - \Pi(z)}$$

et rappelons que (équation (2.8))

$$\mathcal{I}m \Pi(p^2) = \lim_{z \rightarrow p^2 + i\epsilon} \mathcal{I}m \Pi(z) = -\pi p^2 \sigma(p^2) \leq 0.$$

Si la particule n'est pas extrêmement instable, la partie imaginaire du pôle sera petite, c'est-à-dire que la partie imaginaire de la solution de $z - M_0^2 - \Pi(z)$ sera petite et donc négative en vertu de la propriété $\mathcal{I}m \Pi(p^2) \leq 0$. On va donc effectuer le prolongement de $G(z)$ à travers la coupure *vers le bas* ce qui facilite les choses puisque le propagateur est connu juste au-dessus de la coupure.

Le prolongement analytique de $G(z)$ est défini tel que la fonction analytiquement continuée $G_{II}(z)$ juste en dessous de l'axe réel soit égale à la fonction originale $G(z)$ juste au-dessus de l'axe réel. On prolonge donc de façon analogue $\Pi(z)$ en $\Pi_{II}(z)$ et $G_{II}(z)$ s'écrit

$$G_{II}(z) = \frac{i}{z - M_0^2 - \Pi_{II}(z)}.$$

Le pôle z_0 est solution de l'équation

$$z_0 - M_0^2 - \Pi_{II}(z_0) = 0.$$

Le propagateur complet renormalisé peut aussi être prolongé analytiquement et l'équation (2.10) devient

$$G_{II}(z) = \frac{i}{z - M^2 - f_{II}(z)}. \quad (2.17)$$

où M est la masse renormalisée et $f_{II}(z)$ le prolongement analytique de la fonction $f(p^2)$ qui est la partie restante de l'énergie propre après renormalisation de la masse (voir équation (2.10)).

de la matrice S (qui apparaissent ici dans le propagateur) n'est pas démontrée dans l'approche axiomatique de la matrice S . Il est possible [1] de construire un modèle où une résonance de type Breit-Wigner ne correspond à aucun pôle et vice versa. Par exemple, on pourrait appliquer ce modèle à la résonance scalaire $f_0(400 - 1200)$, si l'on ne veut pas l'insérer dans l'octet scalaire du groupe $SU(3)_f$.

On aimerait disposer d'une expression équivalente où le pôle complexe du propagateur apparaît explicitement au dénominateur. Dans ce but, l'énergie propre est développée autour du pôle z_0 :

$$\Pi_{II}(z) = \Pi_{II}(z_0) + (z - z_0) \Pi'_{II}(z_0) + h(z) (1 - \Pi'_{II}(z_0)) ,$$

avec $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) = 0$. Les primes indiquent les dérivées par rapport à z .

Le dénominateur du propagateur se réécrit

$$\begin{aligned} z - M_0^2 - \Pi_{II}(z) &= (1 - \Pi'_{II}(z_0)) (z - z_0 - h(z)) \\ &= Z^{-1} (z - m^2 + im\Gamma - h(z)) , \end{aligned}$$

où

$$Z^{-1} \equiv 1 - \Pi'_{II}(z_0) \quad \text{et} \quad z_0 \equiv m^2 - im\Gamma . \quad (2.18)$$

Avec ces définitions, le propagateur complet peut se réécrire près du pôle comme

$$G_{II}(z) = \frac{i Z}{z - m^2 + im\Gamma - h(z)} .$$

La constante Z , appelée *constante de renormalisation de la fonction d'onde*, est le résidu du propagateur complet au pôle. Bien que le résidu du propagateur de la particule stable ait pu être interprété comme la probabilité de créer un état à une particule, ce n'est pas le cas pour la particule instable puisque la constante Z est complexe.

2.6 Particule instable : propagation spatiale

Le modèle simplifié ne convient pas tout à fait à la description de la propagation d'une particule instable en raison de l'approximation d'état stationnaire. Il sera remédié à cet inconvénient dans le prochain chapitre. Cependant, cette inconsistance n'invalide pas les leçons que l'on peut tirer de l'analyse de l'amplitude (2.2) du modèle simplifié qui, rappelons-le, est proportionnelle à la transformée de Fourier du propagateur complet. Bien sûr, ce n'est que du point de vue du modèle plus sophistiqué que l'on pourra en juger.

L'étude de la propagation spatiale ressemble à celle de la particule stable. Avec l'objectif d'utiliser le théorème des résidus, on va réécrire le propagateur comme une somme d'une fonction singulière au pôle mais analytique ailleurs et une fonction régulière au pôle mais non analytique :

$$G_{II}(z) = G_{1part}(z) + G_{multi}(z)$$

où

$$\begin{aligned} G_{1part}(z) &\equiv \frac{iZ}{z - m^2 + im\Gamma} \\ G_{multi}(z) &\equiv \frac{iZ}{z - m^2 + im\Gamma - h(z)} - \frac{iZ}{z - m^2 + im\Gamma}. \end{aligned}$$

$G_{multi}(z)$ est une fonction régulière au pôle $z_0 = m^2 - im\Gamma$ mais non analytique à cause des seuils où les états à plusieurs particules commencent à contribuer : pour un seuil donné, il existe un J tel que la J ème dérivée de $G_{multi}(z)$ est discontinue.

La transformée de Fourier du propagateur par rapport à sa tri-impulsion est

$$G(p^0, \mathbf{L}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}} \left(\frac{iZ}{p^2 - m^2 + im\Gamma} + G_{multi}(p^2) \right).$$

En faisant les mêmes calculs que pour la particule stable (équations (2.13) et (2.15)), on obtient

$$G(p^0, \mathbf{L}) = \frac{-iZ}{4\pi L} e^{i\sqrt{p^{02} - m^2 + im\Gamma}L} + \sum_{N \geq 2} d_N \frac{e^{ip_{s_N}L}}{L} (\mu_N L)^{-\frac{3}{2}(N-1)}, \quad (2.19)$$

où les définitions de s_N , p_{s_N} et L sont les mêmes que pour la particule stable et les d_N sont des coefficients qui ne peuvent être calculés que dans un modèle particulier. μ_N correspond à μ pour l'état N .

On a utilisé l'hypothèse que la particule n'est pas extrêmement instable pour négliger les termes en Γ/m , sauf dans l'exponentielle où ils sont multipliés par L et contribuent notablement à grande distance. Sinon, il n'y a de toute façon pas de propagation macroscopique à observer car la particule se désintègre trop vite. Par contre, si la particule a un long temps de vie, le pôle se situe près de l'axe réel et $\Gamma/m \ll 1$.

Le premier terme peut être identifié comme l'amplitude de propagation de la particule instable : on a bien une décroissance exponentielle avec la distance. Sous

quelles conditions ce terme est-il dominant par rapport à la contribution des états à plusieurs particules ? Sans perte de généralité, posons $\mu_N = |p^0|$.

1. Pour $m^2 - p^{02} \gg m\Gamma$, ce terme a une décroissance exponentielle très rapide selon la distance en $\exp(-\sqrt{m^2 - p^{02}}L)$ et la propagation spatiale macroscopique de la particule instable est inobservable : G_{multi} domine G_{1part} .
2. Pour $|p^{02} - m^2| \approx \mathcal{O}(m\Gamma)$ ou plus petit, la décroissance de ce terme est exponentielle en $\exp(-\alpha\sqrt{m\Gamma}L)$, où α est un nombre d'ordre un. La décroissance est plus lente que dans le premier cas. Ce terme domine G_{multi} sur des distances intermédiaires (voir cas suivant) mais l'interprétation de Γ comme l'inverse du temps de vie est ici incorrecte. Ce domaine est cependant très petit dans la majorité des cas puisque $\Gamma/m \ll 1$.
3. Pour $p^{02} - m^2 \gg m\Gamma$, on peut développer l'argument de l'exponentielle en $m\Gamma/p_m$, où $p_m \equiv \sqrt{p^{02} - m^2}$. La décroissance selon la distance est une exponentielle plus modérée :

$$G_{1part}(p^0, \mathbf{L}) = \frac{-iZ}{4\pi L} \exp\left(ip_m L - \frac{m\Gamma}{2p_m} L\right).$$

Comme dans le cas d'une particule stable, ce terme sera dominé par G_{multi} pour des distances petites ($\mu L \leq 1$), mais il sera aussi dominé à grande distance en raison de sa décroissance exponentielle, alors que G_{multi} ne décroît qu'en puissance de L . Pour des distances intermédiaires, G_{1part} est dominant. Si l'on utilise la relation $L = vT$ valable pour une trajectoire classique, avec $v = p_m/|p^0|$, on retrouve la forme habituelle de la décroissance de l'amplitude de propagation en fonction du temps de propagation T , mais sous forme relativiste :

$$G_{1part}(p^0, \mathbf{L}) \sim \exp\left(-\frac{m\Gamma}{2p_m} L\right) \sim \exp\left(-\frac{m\Gamma}{2|p^0|} T\right) \sim \exp\left(-\frac{\Gamma\tau}{2}\right),$$

où τ est le temps propre de la particule. La largeur Γ s'interprète dans cas comme l'inverse du temps de vie [8].

La contribution de G_{multi} est-elle observable à grande distance ? Considérons la contribution du seuil de production de deux particules. G_{multi} commence à dominer

G_{1part} lorsque

$$C_1 \exp\left(-\frac{m\Gamma}{2p_m}L\right) \leq C_2 (|p^0|L)^{-\frac{3}{2}},$$

où C_1 et C_2 regroupent des constantes.

Prenant le logarithme de cette expression, les facteurs constants C_1 et C_2 auront une contribution négligeable pour L grand et l'on obtient la condition

$$\frac{m\Gamma L}{p_m} \geq 3 \ln(|p^0|L).$$

Pour des particules se désintégrant faiblement (ou *quasi-stables*), on peut se restreindre au domaine spatial

$$\frac{\Gamma}{|p^0|} \ll \Gamma L \ll \frac{m}{\Gamma}$$

car pour $\Gamma L \approx m/\Gamma \approx \mathcal{O}(10^{14})$ (kaons neutres), G_{1part} et G_{multi} seront tous les deux inobservables. La borne inférieure du domaine vient de la condition $\mu L \gg 1$. Dès lors

$$3 \ln(|p^0|L) = 3 \ln\left(\frac{|p^0|}{\Gamma}\Gamma L\right) \cong 3 \ln\left(\frac{|p^0|}{\Gamma}\right).$$

G_{multi} domine G_{1part} pour

$$\Gamma L \geq 3 \frac{p_m}{m} \ln(|p^0|/\Gamma).$$

Cette borne dépend de la valeur de p_m : moins la particule va vite, moins elle va loin ! Il est plus significatif de passer au temps de propagation par $L = vT$. La condition devient

$$\Gamma T \geq 3 \frac{|p^0|}{m} \ln(|p^0|/\Gamma) \geq 3 \ln(M/\Gamma).$$

Si $M/\Gamma \approx \mathcal{O}(10^{14})$, $\Gamma T > 97$, ce qui est inobservable.

La contribution des états à plusieurs particules est donc inobservable pour les particules quasi-stables. Le régime où la propagation de la particule est bien décrite par le propagateur G_{1part} est fixé par les conditions

$$\begin{aligned} \mu L &\geq 1, \\ \Gamma T &\leq 3 \ln(M/\Gamma). \end{aligned}$$

En conclusion, l'amplitude de propagation (2.2) d'une particule quasi-stable sur une distance macroscopique L est donnée en très bonne approximation par

$$\boxed{\mathcal{A} \sim M_P M_D 2\pi \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + E_{P_I} - E_{P_F}) \frac{-iZ}{4\pi L} \exp\left(ip_m L - \frac{m\Gamma}{2p_m} L\right)}, \quad (2.20)$$

où $p_m \equiv \sqrt{E^2 - m^2}$ et $E \equiv E_{P_I} - E_{P_F} \geq m$.

2.7 Exemple : propagateur complet du kaon

Il sera utile par la suite de disposer de formules explicites dans un cas concret. Considérons le kaon neutre, de masse M_0 , en interaction avec des pions chargés de masse m ($M_0 > 2m$). Le lagrangien d'interaction s'écrit

$$\mathcal{L} = -gK\pi\pi^*.$$

Le calcul à une boucle de l'énergie propre du kaon donne, pour s quelconque

$$-i\Pi(s) = -i\delta M^2 - \frac{ig^2}{4\pi^2} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{(1 - 4m_\pi^2/s)^{\frac{1}{2}} + 1}{(1 - 4m_\pi^2/s)^{\frac{1}{2}} - 1},$$

où δM^2 est une constante divergente qui vaut en régularisation dimensionnelle

$$\delta M^2 \equiv -\frac{2}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m_\pi^2}{\mu_R^2} - 2,$$

Dans cette expression, $\epsilon = 2 - d/2$, μ_R est le point de renormalisation et γ la constante d'Euler. δM^2 est incorporée dans la masse renormalisée :

$$M^2 \equiv M_0^2 + \delta M^2.$$

Le propagateur renormalisé (2.10) s'écrit

$$G(s) = \lim_{z \rightarrow s + i\epsilon} \frac{i}{z - M^2 - f(z)}$$

avec

$$f(z) = \frac{g^2}{4\pi^2} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{(1 - 4m_\pi^2/z)^{\frac{1}{2}} + 1}{(1 - 4m_\pi^2/z)^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

Pour z réel, la fonction $f(z)$ a une partie imaginaire non nulle si z est supérieur à $4m^2$ et on a une coupure sur l'axe réel pour $s \geq 4m_\pi^2$:

$$f(s \pm i\epsilon) = u(s) \mp i v(s),$$

avec

$$\begin{aligned} u(s) &= \frac{g^2}{4\pi^2} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{(1 - 4m_\pi^2/s)^{\frac{1}{2}} + 1}{(1 - 4m_\pi^2/s)^{\frac{1}{2}} - 1}, \\ v(s) &= \frac{g^2}{4\pi} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La condition (2.8) est satisfaite :

$$\mathcal{I}m \Pi(s) = -\frac{g^2}{4\pi} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \theta(s - 4m_\pi^2) \leq 0. \quad (2.21)$$

La fonction spectrale peut se calculer explicitement à partir de l'équation (2.5) :

$$\begin{aligned} \rho(s + i\epsilon) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{I}m (i G(s + i\epsilon)) \\ &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{I}m \frac{1}{s - M^2 - f(s + i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{v(s)}{(s - M^2 - u(s))^2 + v^2(s)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Selon l'équation (2.17), le prolongement analytique sur la deuxième feuille de Riemann est donné par

$$G_{II}(z) = \frac{i}{z - M^2 - u(z) + i v(z)}.$$

Le pôle z_0 est solution de

$$z_0 - M^2 - u(z_0) + i v(z_0) = 0.$$

Pour un couplage g petit, $u(z_0)$ et $v(z_0)$ sont petits par rapport à M^2 et $z_0 \cong M^2$.

Dans ce cas, l'expression du pôle au premier ordre en g^2 est donnée par

$$z_0 \cong M^2 + u(M^2) - i v(M^2) + \mathcal{O}(g^2) \equiv m_K^2 - i m_K \Gamma.$$

On a donc

$$\begin{aligned} m_K^2 &= M^2 + u(M^2) + \mathcal{O}(g^2), \\ m_K \Gamma &= v(M^2) + \mathcal{O}(g^2) = v(m_K^2) + \mathcal{O}(g^2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Gamma = \frac{g^2}{4\pi m_K^2} \left(m_K^2 - 4m_\pi^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

On pourrait aussi calculer la constante Z à l'aide de l'équation (2.18).

En ne tenant en compte que du seuil à deux pions, on peut écrire

$$\mathcal{I}m \Pi(s + i\epsilon) = -v(s) = -\frac{m_K^2 \Gamma}{\sqrt{s}} \left(\frac{s - 4m_\pi^2}{m_K^2 - 4m_\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \theta(s - 4m_\pi^2).$$

Remarquons que si l'on veut seulement connaître $\mathcal{I}m \Pi(s)$, il est plus facile de le calculer à l'aide des règles de Veltman-Cutkosky [49, 56]. Je trouve cependant intéressant de montrer comment tous les paramètres de la représentation spectrale peuvent être évalués dans un exemple concret.

Chapitre 3

Mélanges de propagateurs

Au chapitre 1, nous avons défini en mécanique quantique la notion de mélange de particules dans le cas des oscillations par l'impossibilité de faire coïncider la base d'états en interaction (états propres de saveur) et la base d'états propres de masse. Les définitions de mélange et d'oscillation en théorie des champs sont analogues, excepté le fait que ce ne sont plus les états physiques qui sont mélangés mais les champs. Cette distinction permettra d'éviter tous les ennuis liés à la définition de bases d'états propres de saveur et de propagation.

Le lagrangien total est subdivisé en un lagrangien L_{propag} , décrivant la propagation des particules, et un lagrangien L_{int} , décrivant les interactions produisant ces particules. Ces deux parties du lagrangien total peuvent être distinguées s'il existe une transformation dite *de saveur*, laissant L_{int} invariant mais modifiant L_{propag} , à laquelle on associe le nombre quantique de saveur. Il y a *mélange de particules*, si le propagateur construit à partir de L_{propag} et représentant la création d'une particule de saveur α au point x et l'annihilation d'une particule de saveur β au point x' est non diagonal, c'est-à-dire non nul pour $\alpha \neq \beta$. Le lagrangien L_{propag} contient toujours le terme cinétique et le terme de masse. Dans le cas de particules instables, on y incorpore aussi l'interaction provoquant la désintégration.

Le type de lagrangien utilisé dépend du système de particules étudié. La construction du propagateur la plus simple correspond toujours à des particules stables dont on connaît le lagrangien fondamental. Ce cas est illustré par le système composé des différents types de neutrinos. Le lagrangien L_{propag} contient la matrice de masse

(générée par les interactions de Yukawa) tandis que le lagrangien L_{int} contient les interactions faibles (groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$). Si l'on se place dans la base de saveur des champs, le propagateur du système des particules mélangées sera non diagonal. Comme on va le voir dans ce chapitre, il peut être relié au propagateur diagonal de la base de masse par une transformation unitaire.

Une construction plus compliquée du propagateur est nécessaire si les particules auxquelles on s'intéresse sont instables. Il se peut que l'on connaisse le lagrangien fondamental, comme cela pourrait se produire si les neutrinos s'avèrent instables et que l'on connaît les interactions à l'origine de la désintégration. Dans ce cas, il faut incorporer dans L_{propag} les interactions à l'origine de l'instabilité. Le propagateur libre est alors remplacé par le propagateur complet obtenu par sommation sur l'énergie propre comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Ce propagateur complet est non diagonal et doit être diagonalisé par une transformation qui cette fois n'est pas nécessairement unitaire, puisque la matrice de l'énergie propre du système n'est pas hermitienne quand les particules sont instables.

Une dernière complication surgit si le lagrangien du système n'est pas complètement connu, comme c'est le cas pour le système des kaons neutres ou des mésons B . Nous sommes en effet incapables de dériver le lagrangien de ces particules à partir du lagrangien fondamental de la QCD et des interactions faibles. Néanmoins, il est possible de construire un lagrangien effectif décrivant ces particules en employant comme contraintes les différentes symétries du lagrangien fondamental de la QCD et des interactions faibles ainsi que la façon dont elles sont éventuellement brisées. Le terme *lagrangien effectif* signifie que ce lagrangien ne contient que les particules observables à basse énergie que sont les mésons pseudoscalaires et éventuellement les mésons vectoriels. Le lagrangien effectif contient un nombre infini de termes qui sont classés en un développement perturbatif en l'énergie du processus. On parle de *théorie chirale perturbative*. Chaque terme de ce lagrangien représente une sommation sur un nombre infini de diagrammes de Feynman de la théorie fondamentale sous-jacente, chaque diagramme respectant la structure du terme en question. Les différentes interactions fondamentales sont donc mélangées dans chaque terme du lagrangien effectif. On définit la *partie forte* du lagrangien effectif comme l'ensemble des termes fournissant les contributions dominantes aux processus respectant les symétries de

la QCD. Le *terme de masse* est le terme non dérivatif quadratique en les champs. Il est généré au niveau fondamental à la fois par les interactions électrofaibles et les interactions de la QCD. Dans la même logique, la *partie faible* du lagrangien effectif est définie comme l'ensemble des termes générant les processus violant les symétries de la QCD et de l'électromagnétisme mais respectant les symétries des interactions faibles au niveau fondamental. La partie électromagnétique du lagrangien effectif est définie de façon analogue. Les paramètres de ce lagrangien effectif sont fixés par des résultats expérimentaux car leur prédiction théorique n'est pas très satisfaisante en raison de la difficulté à évaluer les éléments de matrice hadroniques ainsi que les corrections à longue distance [57]. Le traitement du système $B^0\overline{B}^0$ se fait à une autre échelle d'énergie où la théorie chirale perturbative n'est plus valable. Néanmoins, la partie à courte distance de la machinerie utilisée pour calculer les paramètres du système $K^0\overline{K}^0$ (opérateurs effectifs à quatre quarks et coefficients de Wilson) est immédiatement transposable aux $B^0\overline{B}^0$.

Dans le but de décrire les oscillations des kaons, le lagrangien effectif peut également être séparé en un lagrangien L_{int} contenant la partie forte du lagrangien effectif et un lagrangien L_{propag} contenant le terme cinétique, le terme de masse (contenant des masses dégénérées puisque le lagrangien décrit une particule et son antiparticule) ainsi que la partie faible du lagrangien effectif à l'origine de la désintégration des kaons. De nouveau, le propagateur complet est construit par sommation sur l'énergie propre. Une différence de masse apparaît alors entre les kaons se propageant et se manifeste par la non dégénérescence des parties réelles des pôles du propagateur complet du système des kaons. Cette différence de masse peut être attribuée aux interactions faibles (mécanisme GIM inclus!) avec le bon ordre de grandeur [58].

Tout d'abord, nous expliquerons comment diagonaliser le propagateur de particules stables si le lagrangien est connu. Ensuite nous montrerons comment calculer le propagateur complet pour des particules instables en mélange et comment le diagonaliser. Le système $K^0\overline{K}^0$ sera examiné comme exemple. Enfin, la probabilité d'oscillation sera calculée dans le cadre du modèle simplifié présenté au chapitre précédent et les déficiences du modèle seront identifiées.

3.1 Propagateur de particules stables en mélange

Dans cette section, nous expliquons comment diagonaliser le propagateur de particules scalaires stables si leur lagrangien est connu (le cas des fermions est discuté à la section 5.6). Le lagrangien L_{propag} contient uniquement le terme cinétique et le terme de masse. La matrice de masse est hermitienne et peut être diagonalisée par une transformation unitaire V sur les champs¹ :

$$\nu_\alpha = \sum_j V_{\alpha j}^\dagger \nu_j, \quad (3.1)$$

où les indices grecs désignent toujours la base de saveur et les indices latins la base de masse.

Le propagateur est défini par la fonction à deux points ordonnée dans le temps :

$$G_{\beta\alpha}(x' - x) \equiv \langle 0 | T(\nu_\beta(x') \nu_\alpha^*(x)) | 0 \rangle.$$

Comme la contraction de champs (théorème de Wick) ne s'applique que sur des champs représentant des particules de masses déterminées, il faut substituer dans la fonction à deux points la relation (3.1) :

$$G_{\beta\alpha}(x' - x) = \sum_{j,k} V_{\beta k}^\dagger V_{j\alpha} \langle 0 | T(\nu_k(x') \nu_j^*(x)) | 0 \rangle.$$

La contraction des champs donne

$$G_{\beta\alpha}(x' - x) = \sum_j V_{\beta j}^\dagger G_{D,jj}(x' - x) V_{j\alpha}, \quad (3.2)$$

où $G_{D,jj}(x' - x)$ est le propagateur (D pour diagonal) d'une particule scalaire libre de masse m_j :

$$G_{D,jj}(x' - x) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} \frac{i}{p^2 - m_j^2 + i\epsilon}. \quad (3.3)$$

¹Remarquons que si l'on définissait des états comme au chapitre 1 (équation (1.1)), la relation ci-dessus donnerait $|\nu_\alpha(0)\rangle = \sum_j V_{\alpha j}^\dagger |\nu_j(0)\rangle$, c'est-à-dire que la matrice V diagonalisant le terme de masse est la transposée de celle du chapitre 1.

3.2 Propagateur de particules instables en mélange

Le propagateur complet de particules mélangées est une matrice non diagonale. Il s'obtient à partir du propagateur en l'absence de mélange par sommation sur l'énergie propre comme dans le cas des particules non mélangées (équation (2.9)). Cette sommation s'effectue en passant par l'équation de Dyson [59], qui s'exprime sous forme diagrammatique par

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \text{---} \bullet \text{---} \\
 &= \text{---} + \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} + \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} + \dots \\
 &= \text{---} + \text{---} \textcircled{1PI} \bullet \text{---}
 \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$G^{ij} = G_F^{ij} + G_F^{ik} (-i \Pi^{kl}) G^{lj},$$

où G_F^{ij} est le propagateur de Feynman des particules libres (donc non mélangées) et $-i \Pi^{kl}$ est l'énergie propre du système des particules mélangées dans la base de saveur. En sous-entendant la notation matricielle, l'équation précédente s'écrit

$$G = G_F + G_F (-i \Pi) G$$

ce qui donne pour un propagateur inversible

$$i G^{-1} = i G_F^{-1} - \Pi.$$

Posons que le propagateur des particules libres est donné par la matrice

$$i G_F^{-1}(s) = s I - M_0^2,$$

où I est la matrice unité et M_0^2 la matrice de masse non renormalisée. Le propagateur complet devient

$$i G^{-1}(s) = s I - M_0^2 - \Pi(s).$$

Considérons le mélange de deux particules scalaires, par exemple le système $K^0 \bar{K}^0$. Après avoir effectué le prolongement analytique nécessaire dans la deuxième feuille de Riemann, les états propres de propagation peuvent être caractérisés par les pôles complexes du propagateur complet, ou encore par les zéros de l'inverse du propagateur. Nous allons diagonaliser ce propagateur pour étudier l'évolution spatio-temporelle des particules se propageant sur des distances et intervalles de temps macroscopiques. Séparons l'analyse en trois étapes.

1. La diagonalisation est toujours possible si les valeurs propres du propagateur complet sont distinctes deux à deux :

$$\begin{aligned}
 -i G(z) &= (z I - M_0^2 - \Pi(z))^{-1} \\
 &= (z I - M^2 - f(z))^{-1} \\
 &= W(z) \begin{pmatrix} (z - m_1^2 - f_1(z))^{-1} & 0 \\ 0 & (z - m_2^2 - f_2(z))^{-1} \end{pmatrix} W^{-1}(z).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour z fixé, $(z - m_j^2 - f_j(z))^{-1}$ sont les valeurs propres de $-i G(z)$. Chaque pôle z_j est la solution de l'équation $\det G^{-1}(z_j) = 0$. La matrice de diagonalisation $W(z)$ contient les vecteurs propres correspondants. Si le mélange entre les particules est faible, les parties réelles des pôles du propagateur seront approximativement égales aux masses avant calcul de l'énergie propre et seront positives. Dans l'analyse de la propagation spatiale, la dépendance en z des matrices $W(z)$ engendrera des contributions à l'amplitude en puissances inverses de la distance macroscopique de propagation L . Elles sont dues aux seuils de production d'états à plusieurs particules et s'ajoutent aux contributions de même type provenant des seuils des énergies propres diagonalisées $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

2. On aimerait que les matrices de diagonalisation soient indépendantes de z , pour pouvoir les sortir des intégrales lors du calcul d'une amplitude. On pose

$$-i G(z) \equiv U \begin{pmatrix} (z - z_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (z - z_2)^{-1} \end{pmatrix} V + Q(z).$$

Les résidus $Z_{1,2}$ aux pôles sont incorporés dans les matrices de diagonalisation.

U et V sont des matrices constantes à spécifier, $z_{1,2}$ sont les pôles du propagateur complet $G(z)$ tandis que $Q(z)$ est une matrice régulière aux pôles.

Cette expression doit satisfaire à deux conditions : $G^{-1}G = I$ et $GG^{-1} = I$, ou encore

$$\begin{aligned} i G^{-1}(z) \left(U \begin{pmatrix} (z - z_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (z - z_2)^{-1} \end{pmatrix} V + Q(z) \right) &= I, \\ \left(U \begin{pmatrix} (z - z_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (z - z_2)^{-1} \end{pmatrix} V + Q(z) \right) i G^{-1}(z) &= I, \end{aligned}$$

Pour que ces équations soient satisfaites au voisinage des pôles, il faut que les matrices U et V soient composées des vecteurs propres de $M_0^2 + \Pi(z)$ évalués en z_1 et z_2 .

Plus précisément, si

$$U \equiv (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) \quad \text{et} \quad V \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} (M^2 + f(z_{1,2})) \mathbf{u}_{1,2} &= z_{1,2} \mathbf{u}_{1,2} \\ \mathbf{v}_{1,2}^t (M^2 + f(z_{1,2})) &= z_{1,2} \mathbf{v}_{1,2}^t \end{aligned}$$

de sorte que l'on ait, près du pôle z_j ,

$$G^{-1}(z) U \sim z - z_j \quad \text{et} \quad V G^{-1}(z) \sim z - z_j,$$

sinon le membre de gauche des équations à satisfaire serait divergent et ne pourrait être égal à la matrice unité du membre de droite. Cette diagonalisation exacte est à l'origine des méthodes utilisant deux angles de mélange pour un mélange à deux particules [60].

3. Un cas particulièrement intéressant est celui de pôles quasiment dégénérés. Des phénomènes d'oscillation de la probabilité de détection d'états propres d'interaction se révèlent alors dans l'évolution spatio-temporelle. Par exemple, les pôles des particules $K^0 \bar{K}^0$ sont dégénérés si l'interaction faible est négligée.

À l'ordre g^2 en l'interaction faible, on peut approximer [32]

$$f(z) \approx f(m^2), \quad (3.5)$$

où m est la masse dégénérée (c'est-à-dire la masse si les interactions faibles sont absentes). On a alors

$$U = V^{-1} \quad \text{et} \quad Q(z) = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} -i G(z) &\cong V^{-1} \begin{pmatrix} (z - z_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (z - z_2)^{-1} \end{pmatrix} V \\ &\equiv -i V^{-1} G_D(z) V. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les résidus $Z_{1,2}$ sont incorporés à la matrice V . Cette approximation est analogue à celle qui consiste à prendre un hamiltonien effectif constant dans l'approche non relativiste de Wigner-Weisskopf [13] : l'énergie propre apparaissant dans le propagateur correspond à la matrice de masse effective de Wigner-Weisskopf si l'on approxime cette énergie propre par une constante.

En conclusion, les approximations ci-dessus mènent à analyser l'évolution d'un mélange de particules comme la superposition des évolutions des particules non mélangées. Notons que les matrices de diagonalisation $U^{-1} = V$ ne sont pas unitaires si le propagateur n'est pas hermitien, comme dans le cas du système $K^0 \bar{K}^0$ lorsque la violation CP est prise en compte.

Ce traitement peut être immédiatement étendu à des mélanges de particules vectorielles, en particulier le système $\rho^0 - \omega - \phi$ qui a une grande importance dans la description des interactions en-dessous de 1 GeV (modèle de dominance vectorielle). Comme il s'agit de particules vectorielles, le propagateur contient un facteur de la forme $g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m^2$, qui n'influence pas la diagonalisation puisque la contribution du terme $k_\mu k_\nu / m^2$ est toujours nulle en raison du couplage du ρ^0 à des courants conservés. Le mélange des propagateurs a été étudié dans [60]. Par contre, la composante longitudinale du propagateur doit être prise en compte dans le mélange photon-boson Z , qui est d'ailleurs compliqué par la question de l'invariance de jauge et de la brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [59].

3.3 Exemple : le système $K^0\overline{K}^0$

Quand il s'agit de mélange de particules, le cas d'école est le système $K^0\overline{K}^0$ car il présente à la fois toutes les complications possibles et toutes les vertus qui les rendent observables : différence de masse et oscillation, violation CP directe et indirecte, quasi-stabilité donc propagation macroscopique, même ordre de grandeur de la longueur d'oscillation et de la longueur de désintégration. L'analyse qui suit s'applique sans modification aux systèmes $D^0\overline{D}^0$ et $B^0\overline{B}^0$.

L'énergie propre du système $K^0\overline{K}^0$ ne peut être calculée que dans une théorie effective, dont un exemple est le lagrangien $\mathcal{L} = -gK\pi\pi^*$ qui apparaît dans le calcul de $K \rightarrow \pi\pi$ vu à la section 2.7. On se limite ici à paramétriser le propagateur. La symétrie CPT impose l'égalité des éléments diagonaux dans la base de saveur [32]. Une symétrie CP imposerait en plus l'égalité des éléments non diagonaux mais nous savons qu'elle est violée dans ce système. La petitesse de la violation ($\sim \mathcal{O}(10^{-3})$) impose néanmoins que les éléments non diagonaux soient presque égaux. L'inverse du propagateur complet pour des kaons neutres d'impulsion p est paramétrisé [48] par

$$iG^{-1}(p^2) = \begin{pmatrix} \langle K^0 | \hat{G}^{-1} | K^0 \rangle & \langle K^0 | \hat{G}^{-1} | \overline{K}^0 \rangle \\ \langle \overline{K}^0 | \hat{G}^{-1} | K^0 \rangle & \langle \overline{K}^0 | \hat{G}^{-1} | \overline{K}^0 \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d & a+b \\ a-b & d \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

avec les définitions

$$\begin{aligned} d &\equiv p^2 - m^2 - f_{00}(p^2) \\ a+b &\equiv -f_{0\bar{0}}(p^2) \\ a-b &\equiv -f_{\bar{0}0}(p^2) \end{aligned}$$

où m est la masse renormalisée et les $-if_{\alpha\beta}(p^2)$ sont les énergies propres complexes renormalisées du système des kaons neutres. $\hat{G}^{-1}$ est l'opérateur correspondant au propagateur. Notons que les termes non diagonaux dépendent de la convention de phase choisie pour les kaons. Nous y reviendrons au chapitre 6.

La base des vecteurs propres de l'opérateur CP est reliée à la base de saveur par

$$\begin{pmatrix} |K_1\rangle \\ |K_2\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ |\overline{K}^0\rangle \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

où $\text{CP}|K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle$. Le K_1 est donc pair sous CP tandis que K_2 est impair sous CP.

Dans cette base, l'inverse du propagateur s'écrit

$$i\tilde{G}^{-1}(p^2) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} iG^{-1}(p^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+a & -b \\ b & d-a \end{pmatrix}$$

On voit clairement dans cette base que la violation CP se traduit par le paramètre b .

Dans le but de diagonaliser ce propagateur, définissons un paramètre complexe $\hat{\epsilon}$ tel que

$$\frac{\hat{\epsilon}}{1+\hat{\epsilon}^2} \equiv \frac{b}{2a}. \quad (3.9)$$

L'inverse du propagateur est diagonalisé en

$$i\tilde{G}^{-1}(p^2) = \frac{1}{1-\hat{\epsilon}^2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d+a\frac{1-\hat{\epsilon}^2}{1+\hat{\epsilon}^2} & 0 \\ 0 & d-a\frac{1-\hat{\epsilon}^2}{1+\hat{\epsilon}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la base physique des kaons neutres consiste en deux états $K_{L,S}$ de masses $m_{L,S}$ et largeurs $\Gamma_{L,S}$ définies par

$$\begin{aligned} d_S &\equiv p^2 - m_S^2 + im_S\Gamma_S = d + a\frac{1-\hat{\epsilon}^2}{1+\hat{\epsilon}^2} \\ d_L &\equiv p^2 - m_L^2 + im_L\Gamma_S = d - a\frac{1-\hat{\epsilon}^2}{1+\hat{\epsilon}^2} \end{aligned}$$

où l'on a fait l'approximation expliquée dans la section précédente d'évaluer l'énergie propre à la masse dégénérée ($f(z) \approx f(m^2)$). Dans cette notation, le propagateur s'écrit

$$-i\tilde{G}(p^2) = \frac{1}{1-\hat{\epsilon}^2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_S^{-1} & 0 \\ 0 & d_L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices de diagonalisation V et V^{-1} de la base de saveur $K^0\overline{K}^0$ sont données par²

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\hat{\epsilon}^2)}} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ V^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\hat{\epsilon}^2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

²La normalisation de V est en fait arbitraire car les normalisations de V et V^{-1} se compensent, puisqu'elles apparaissent toujours par paire dans notre approche où seuls les états K^0 et $\overline{K}^0$ sont observables. Nous choisissons ici des normalisations égales.

Notons que si $\hat{\epsilon}$ est purement imaginaire, la matrice V est unitaire. Dans ce cas, il est possible de choisir une convention de phase étrange (voir section 6.4.2) dans laquelle $\hat{\epsilon} = 0$. Les états $K_{1,2}$ sont alors états propres de propagation. On verra aussi que dans ce cas il n'y a pas de violation CP dans les oscillations.

Le propagateur dans la base de saveur est donc diagonalisé en très bonne approximation par

$$-iG(p^2) \cong V^{-1} \begin{pmatrix} d_S^{-1} & 0 \\ 0 & d_L^{-1} \end{pmatrix} V.$$

Comme prévu, ces matrices sont non unitaires puisque le propagateur dans la base de saveur est non hermitien. Le lien avec le formalisme couramment utilisé dans la littérature se voit en définissant une *double* base physique orthogonale et normalisée (voir équation (1.6)), c'est-à-dire des états entrants $|ket\rangle$ et sortants $\langle bra|$ indépendants qui sont vecteurs propres à droite et à gauche du propagateur [32, 33, 34] :

$$\begin{pmatrix} |K_S\rangle \\ |K_L\rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\hat{\epsilon}^2}} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |K_1\rangle \\ |K_2\rangle \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} \langle K_S| \\ \langle K_L| \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\hat{\epsilon}^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle K_1| \\ \langle K_2| \end{pmatrix}$$

A moins que $\hat{\epsilon}$ ne soit purement imaginaire (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de violation CP), ces deux bases ne sont pas hermitiennes conjuguées l'une de l'autre. Si l'on tient à travailler uniquement avec la base de vecteurs propres à droite $|K_{S,L}\rangle$, la question de la normalisation est incontournable puisque les vecteurs de cette base ne sont pas orthogonaux à leurs hermitiens conjugués. On choisit couramment [31] de normaliser par $1/\sqrt{1+|\hat{\epsilon}|^2}$ au lieu de $1/\sqrt{1-\hat{\epsilon}^2}$ comme ici, de sorte que le produit scalaire de $|K_S\rangle$ avec son hermitien conjugué soit normalisé à 1 (on procède de même façon pour $|K_L\rangle$). Néanmoins, $|K_S\rangle$ n'est toujours pas orthogonal à l'hermitien conjugué de $|K_L\rangle$. Comme il a déjà été mentionné au chapitre 1, le choix de la normalisation influence la forme des expressions du genre $\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi\pi) \equiv \langle \pi\pi | T | K_L \rangle$, où T est la matrice de transition. On verra au chapitre 6 la manière correcte de définir de telles amplitudes en théorie des champs. L'ambiguïté de normalisation en $\hat{\epsilon}^2$ est beaucoup plus petite que la violation CP indirecte ($\sim \hat{\epsilon}$) et n'a donc pas posé de problème

pour l'interprétation des expériences, en tout cas jusqu'aux premières mesures de la violation CP directe ($\sim \epsilon' \sim \hat{\epsilon}^2$).

Les quantités $m_{S,L}$ et $\Gamma_{S,L}$ sont mesurées expérimentalement tandis que les paramètres a , b , m et $f(m^2)$ peuvent en principe être calculés théoriquement [57]. Les relations entre les deux ensembles de paramètres sont

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \frac{1 + \hat{\epsilon}^2}{1 - \hat{\epsilon}^2} \left(m_L^2 - m_S^2 - i(m_L \Gamma_L - m_S \Gamma_S) \right) , \\ m^2 - f(m^2) &= \frac{1}{2} \left(m_L^2 + m_S^2 - i(m_L \Gamma_L + m_S \Gamma_S) \right) , \\ b &= \frac{\hat{\epsilon}}{1 - \hat{\epsilon}^2} \left(m_L^2 - m_S^2 - i(m_L \Gamma_L - m_S \Gamma_S) \right) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4 Oscillations dans le modèle simplifié

La propagation de particules en mélange va être décrite par le processus de la section 2.1 légèrement modifié pour tenir compte de la saveur. Le processus de propagation d'une particule ν_α de saveur α produite à la source en une particule ν_β de saveur β identifiée dans le détecteur est symbolisé par :

$$\begin{array}{ccc} P_I(q) & \xrightarrow{(t_P, \mathbf{x}_P)} & P_F(k) + \nu_\alpha(p) \\ & \searrow & \\ & & \nu_\beta(p) + D_I(q') \xrightarrow{(t_D, \mathbf{x}_D)} D_F(k') \end{array}$$

On suppose que l'on peut identifier la saveur α de la particule intermédiaire ν produite dans la région de $(t_P, \mathbf{x}_P)$ au moyen de l'état sortant $P_F(k)$ et la saveur β du ν détecté dans la région de $(t_D, \mathbf{x}_D)$ au moyen de l'état sortant $D_F(k')$. S'il est impossible d'identifier la saveur sortante (ex : $K^0, \overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$), il suffit de sommer sur les différentes saveurs. On garde les hypothèses simplificatrices de représenter P_I et D_I par des états stationnaires infiniment bien localisés dans l'espace et P_F et D_F par des ondes planes.

Soit $G_{\beta\alpha}(x' - x)$ le propagateur complet symbolisant la propagation de particules de saveur α produites en x en particules de saveur β détectées en x' . Nous venons de voir (équations (3.2) et (3.6)) que le propagateur peut être diagonalisé en très

bonne approximation par des matrices V constantes³ :

$$G_{\beta\alpha}(p^2) = (V^{-1} G_D(p^2) V)_{\beta\alpha} = \sum_j V_{\beta j}^{-1} G_{D,jj} V_{j\alpha}.$$

L'amplitude du processus global est donnée par l'équation (2.1) de l'amplitude de propagation d'une particule isolée, où le propagateur $G(p^2)$ est remplacé par le propagateur $G_{\beta\alpha}(p^2)$. Elle peut donc s'écrire comme une superposition linéaire d'amplitudes de propagation d'états propres de masse :

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, T, \mathbf{L}) = \sum_j V_{\beta j}^{-1} \mathcal{A}_j V_{j\alpha},$$

où l'amplitude partielle $\mathcal{A}_j$ s'écrit, après intégration sur x et x' (voir équation (2.2)),

$$\mathcal{A}_j \sim M_P M_D 2\pi \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + E_{P_I} - E_{P_F}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}} G_{D,jj}(E, \mathbf{p})$$

où $\mathbf{L} \equiv \mathbf{x}_D - \mathbf{x}_P$ et $E \equiv E_{P_I} - E_{P_F} > 0$. Si l'on intègre sur la tri-impulsion, l'amplitude partielle devient (voir équation (2.20))

$$\mathcal{A}_j \sim M_P M_D 2\pi \delta(E_{D_I} - E_{D_F} + E_{P_I} - E_{P_F}) \frac{-iZ}{4\pi L} \exp\left(ip_{m_j} L - \frac{m_j \Gamma_j}{2p_{m_j}} L\right),$$

où $p_{m_j} \equiv \sqrt{E^2 - m_j^2}$.

Les oscillations entre les états propres de masse i et j surgiront des termes d'interférence $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j^*$ dans la probabilité donnée par la norme au carré de l'amplitude :

$$\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j^* \sim \exp\left(i(p_{m_i} - p_{m_j}) L - \frac{m_i \Gamma_i}{2p_{m_i}} L - \frac{m_j \Gamma_j}{2p_{m_j}} L\right).$$

Le facteur d'oscillation pour le mélange ij est donc un cosinus d'argument

$$(p_{m_i} - p_{m_j}) L \cong \frac{\Delta m_{ij}^2}{2p_m} L$$

où $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ et $p_m \equiv \sqrt{E^2 - m^2}$ avec m une masse de référence choisie par exemple comme $m \equiv (m_i + m_j)/2$. On a fait l'approximation $|m_i - m| \ll p_m$ puisque dans les cas où une oscillation macroscopique est observable, $|m_i - m_j| \ll p_m$.

³Rappelons une fois de plus que les matrices V utilisées ici sont les transposées des matrices V diagonalisant les kets dans le traitement de mécanique quantique (voir équation (1.1)).

Si l'on définit la *longueur d'oscillation* L_{ij}^{osc} pour le mélange ij par

$$L_{ij}^{osc} \equiv \frac{4\pi p_m}{\Delta m_{ij}^2},$$

on retrouve la formule d'oscillation standard (1.10).

Ce modèle répond à plusieurs des objections soulevées au chapitre 1 (section (1.1)), en considérant dans un cadre relativiste (objections 1 et 2) la particule comme un état intermédiaire non observé directement (objections 3,4,5 et 6) et en engendrant une dépendance spatiale (objections 7 et 8).

Tout n'est pas rose pour autant. Par exemple, il est tentant d'interpréter E et p_{m_i} comme l'énergie et l'impulsion de l'état propre de masse i . Cette interprétation implique curieusement que les différents états propres de masse de la particule oscillante ont la même énergie mais des tri-impulsions différentes alors que dans la dérivation en mécanique quantique on considère le plus souvent le cas inverse (énergies différentes mais tri-impulsions égales), sauf dans la prescription de Lipkin [38, 45]. L'origine de notre résultat est évidemment le choix de procéder à l'analyse spatiale du propagateur. L'analyse temporelle du propagateur [4] implique de prendre des énergies différentes et des tri-impulsions égales mais n'est pas justifiée par un modèle de théorie des champs.

Il ne faudrait pas en conclure pour autant que la question de l'égalité ou non de l'énergie-impulsion des états oscillants est réglée par notre modèle simplifié. L'approximation d'états stationnaires impose qu'il n'y ait qu'une seule valeur de l'énergie possible pour les états oscillants, tandis que l'hypothèse de localisation à une précision infinie de la source et du détecteur n'impose, par contre, aucune contrainte sur les valeurs des tri-impulsions des états oscillants, qui sont alors fixées par les pôles des propagateurs.

La solution de ce problème nécessite donc le recours à un modèle plus réaliste, qui abandonne les hypothèses de stationnarité et de localisation infiniment précises. Il sera du même coup possible d'étudier les conditions d'observabilité des oscillations, alors que le modèle simplifié n'en fournit aucune. Par exemple, les oscillations sont interdites si tous les états entrants et sortants sont des ondes planes, car il n'y a alors qu'une seule valeur possible pour l'énergie-impulsion des états oscillants.

L'analyse des situations intermédiaires devrait donc permettre d'étudier l'influence des conditions expérimentales.

Finalement, on voudrait décrire de façon cohérente la propagation d'une particule instable. De plus, comme mentionné ci-dessus, les corrections négligées en Γ/m sont du même ordre de grandeur que le rapport $\Delta m/m$ dans le système des kaons neutres. Il faudrait s'assurer qu'elles n'aient pas d'influence sur le facteur d'oscillation. Dans le prochain chapitre, un modèle plus sophistiqué de propagation d'une seule particule est développé dans le but de répondre à ces questions.

Chapitre 4

Propagation : le modèle sophistiqué

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle de propagation sophistiqué, tenant compte dans la mesure du possible des conditions de production et de détection. Abandonnant la simplification extrême de considérer les particules entrantes et sortantes soit comme des ondes planes soit comme des états stationnaires localisés à une précision infinie, on modélisera ces états de manière plus réaliste par des paquets d'ondes [5, 53]. La particule intermédiaire est représentée par son propagateur relativiste.

Ce chapitre est plutôt technique, débutant par quelques considérations sur les paquets d'ondes, suivies de la formulation de l'amplitude. Il continue par l'analyse temporelle de celle-ci, avec une étude détaillée des contributions non exponentielles à la propagation. On verra par exemple que les contributions des états à plusieurs particules vues au chapitre précédent sont souvent absentes pour les processus de propagation macroscopiques, car les seuils de production de ces états se trouvent souvent en dehors de la région d'intégration. Ces contributions sont remplacées par celles des seuils dus à la limitation dans l'espace des impulsions de la grandeur des paquets d'ondes entrants et sortants. Le chapitre se termine par l'analyse spatiale de l'amplitude et le calcul de la probabilité du processus, en ne conservant que la dépendance spatiale.

Les bases du calcul ont été jetées par Jacob et Sachs [5]. La notation a été

définie au chapitre 2. Le processus global de propagation était symbolisé par

$$\begin{array}{ccc}
 P_I(q) & \xrightarrow{(t_P, \mathbf{x}_P)} & P_F(k) + \nu(p) \\
 & \searrow & \\
 & & \nu(p) + D_I(q') \xrightarrow{(t_D, \mathbf{x}_D)} D_F(k')
 \end{array}$$

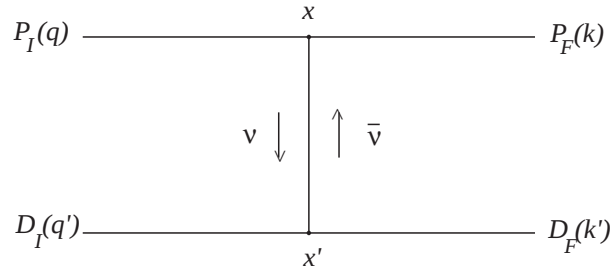
Rappelons la signification des notations. P_I représente l'ensemble des particules arrivant dans la région de production centrée autour du point $(t_P, \mathbf{x}_P)$, d'impulsion totale q tandis que P_F représente l'ensemble des particules issues de la région de production et d'impulsion totale k , à l'exception de la particule intermédiaire ν dont on étudie la propagation. D_I , D_F et $(t_D, \mathbf{x}_D)$ ont des définitions similaires mais concernent le point de détection. Le point d'interaction à la production est noté par x et le point d'interaction à la détection est noté x' . On pose que l'état intermédiaire se propageant de x en x' a les nombres quantiques d'une particule, pas d'une antiparticule. On ne tiendra pas compte des instabilités éventuelles des particules extérieures. Seule l'instabilité de la particule intermédiaire sera prise en compte¹. Si elle se désintègre dans le processus étudié, alors $D_I(q')$ est en réalité un état sortant. L'écriture d'une amplitude tenant compte de l'instabilité des particules entrantes et sortantes ne pose en elle-même aucun problème. Il suffit de considérer un processus plus global où toutes les particules instables sont vues comme intermédiaires. Les états initiaux et finaux sont stables. Les règles de Feynman permettent d'écrire facilement l'amplitude correspondant à un tel processus en cascade. Par contre, l'évaluation des intégrales est la plupart du temps un obstacle insurmontable. C'est pourquoi on se limite à considérer comme état intermédiaire la particule dont on veut étudier les propriétés.

Toutes les particules sont supposées sans spin. Pour localiser l'interaction de production en $(t_P, \mathbf{x}_P)$, les particules entrantes et sortantes au point x sont modélisées par des paquets d'ondes qui ne se recouvrent (dans l'espace de configuration) que dans la région de production centrée autour de $(t_P, \mathbf{x}_P)$. En vue d'étudier l'influence

¹Certaines tentatives ont été entreprises pour tenir compte de l'instabilité de la source dans les conditions de production, d'une part dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste [61, 62], et d'autre part en théorie des champs [63]

des facteurs de production, les paquets ont une certaine largeur dans l'espace de configuration. De plus, comme les expériences mesurent généralement aussi l'impulsion, on peut supposer qu'ils sont bien localisés aussi dans l'espace des impulsions autour de leurs impulsions moyennes. L'interaction de détection est localisée de même manière. Notons qu'il n'y aurait aucune difficulté à remplacer certains paquets d'ondes par des états liés, si la modélisation d'un processus particulier l'exige.

A ce processus correspond le diagramme de Feynman suivant



Ce diagramme représente toute une série de processus. Le nôtre se distingue par des conditions expérimentales telles que l'interaction en x précède toujours l'interaction en x' et telles qu'il y ait un transfert d'énergie (positive) de x en x' . Ces situations seront sélectionnées automatiquement par la forme choisie des paquets d'ondes, avec pour conséquence que seule la particule ν contribuera à la propagation, et non l'antiparticule $\bar{\nu}$.

On ne spécifiera pas ici la forme des interactions de production et de détection mais il n'y aurait aucun problème à le faire. Par exemple, si la particule intermédiaire est un neutrino, les méthodes de détection sont de trois types [20] :

$$\begin{aligned}\nu_l + X &\rightarrow l + Y, \\ \nu_l + X &\rightarrow \nu_l + Y, \\ \nu_l + l &\rightarrow \nu_l + l,\end{aligned}$$

où l symbolise un lepton et X et Y ne contiennent pas de leptons. Pour calculer l'amplitude du troisième processus [64], il faut sommer sur les deux diagrammes représentant l'interaction par courant neutre et par courant chargé. Dans les cas où des neutrinos sont produits dans le détecteur (deuxième et troisième processus), il faut sommer sur leurs différents états propres de masse possibles, puisque ce sont les

états physiques asymptotiques. Le neutrino final doit alors être réexprimé dans la base de masse : $\nu_l = \sum_j V_{lj}^\dagger \nu_j$, ce qui ajoute une matrice de mélange supplémentaire dans l'amplitude. Cette matrice n'a cependant rien à voir avec les oscillations de la particule intermédiaire.

4.1 Paquets d'onde

Un paquet d'ondes représentant un état donné $|\phi\rangle$ de masse m s'écrit dans l'espace des impulsions [65]

$$|\phi\rangle = \int [d\mathbf{k}] \phi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle,$$

où $\phi(\mathbf{k})$ est la fonction d'onde dans l'espace des impulsions et $|\mathbf{k}\rangle$ est un état à une particule d'impulsion $\mathbf{k}$ dans la théorie en interaction. On utilise la notation

$$[d\mathbf{k}] \equiv \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{k})}},$$

où $E(\mathbf{k}) \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. La normalisation des états libres est donnée par

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{p} \rangle = 2E(\mathbf{k}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}).$$

On a

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1 \quad \text{si} \quad \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\phi(\mathbf{k})|^2 = 1.$$

Dans l'espace de configuration, la fonction d'onde s'écrit

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}) e^{-iE(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

de sorte qu'elle satisfasse à l'équation de Klein-Gordon. La relation réciproque est donnée par

$$\phi(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) e^{iE(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Si le paquet d'ondes représente une particule dotée d'une impulsion approximativement connue, il a un seul maximum global, disons en $\mathbf{k} = \mathbf{K}$. Le maximum de $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t=0)$ se situera en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour autant que $\phi(\mathbf{k})$ ait une symétrie centrale autour de $\mathbf{K}$:

$$\phi(\mathbf{K} + \mathbf{k}') = \phi(\mathbf{K} - \mathbf{k}')$$

Nous ferons l'hypothèse que les paquets d'ondes ont une impulsion bien définie : leur maximum est bien localisé et $|\phi(\mathbf{k})|$ a approximativement une symétrie centrale. On va faire l'hypothèse supplémentaire que la phase de $\phi(\mathbf{k})$ a aussi une symétrie centrale, de sorte que le paquet soit centré en $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Sous ces conditions, le paquet d'ondes est noté $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{K})$.

Les paquets centrés en $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sont construits par translation. A l'aide de l'opérateur de translation $\exp(i\hat{P}\cdot x)$, où $x=(T, \mathbf{X})$, on construit des paquets d'ondes centrés en $\mathbf{X}$ au temps T . Si le paquet d'onde dans l'espace des impulsions est donné par

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{K}, \mathbf{X}, T) \equiv \phi(\mathbf{k}, \mathbf{K}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} + iE(\mathbf{k})T) , \quad (4.1)$$

alors le paquet d'ondes dans l'espace de configuration

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t, \mathbf{K}, \mathbf{X}, T) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{K}) \exp(i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{X}) - iE(\mathbf{k})(t-T)) ,$$

sera centré en $\mathbf{X}$ au temps T .

Sans perte de généralité, on va travailler avec une seule particule dans $P_I(q)$, dans $P_F(k)$, dans $D_I(q')$ et dans $D_F(k')$. L'extension à un nombre plus grand de particules est immédiate et ne fait que compliquer la notation. Les paquets d'ondes correspondant aux différentes particules sont construits de sorte que ceux concernant la production du ν sont centrés en $\mathbf{x}_P$ au temps t_P tandis que ceux concernant la détection du ν sont centrés en $\mathbf{x}_D$ au temps t_D . Ils sont notés

$$\begin{aligned} |P_I\rangle &= \int [d\mathbf{q}] \Phi_{P_I}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{x}_P, t_P) |P_I(\mathbf{q})\rangle \\ |P_F\rangle &= \int [d\mathbf{k}] \Phi_{P_F}(\mathbf{k}, \mathbf{K}, \mathbf{x}_P, t_P) |P_F(\mathbf{k})\rangle \\ |D_I\rangle &= \int [d\mathbf{q}'] \Phi_{D_I}(\mathbf{q}', \mathbf{Q}', \mathbf{x}_D, t_D) |D_I(\mathbf{q}')\rangle \\ |D_F\rangle &= \int [d\mathbf{k}'] \Phi_{D_F}(\mathbf{k}', \mathbf{K}', \mathbf{x}_D, t_D) |D_F(\mathbf{k}')\rangle . \end{aligned}$$

On retombe sur le modèle simplifié des chapitres précédents en imposant

1. la condition de stationnarité sur P_I et D_I , c'est-à-dire que les énergies E_{P_I} et E_{D_I} sont constantes.
2. la localisation infiniment précise de P_I et D_I , c'est-à-dire que $\phi_{P_I}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ et $\phi_{D_I}(\mathbf{q}', \mathbf{Q}')$ sont des fonctions constantes.

3. que les états P_F et D_F soient des ondes planes, c'est-à-dire que les $\phi_{P_F}(\mathbf{k}, \mathbf{K})$ et $\phi_{D_F}(\mathbf{k}', \mathbf{K}')$ sont des fonctions delta :

$$\phi_{P_F}(\mathbf{k}, \mathbf{K}) \sim \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{K}) \quad \text{et} \quad \phi_{D_F}(\mathbf{k}', \mathbf{K}') \sim \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{K}').$$

Les énergies de ces états sont fixées par la relation $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ si l'on impose qu'ils satisfassent à l'équation de Klein-Gordon.

4.2 Amplitude

La formule générale de l'amplitude est donnée par

$$\mathcal{A} = \langle P_F, D_F | T \left(\exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_I \right) \right) - 1 | P_I, D_I \rangle,$$

où $\mathcal{H}_I$ est le lagrangien d'interaction de la particule ν qui se propage et T l'opérateur qui ordonne dans le temps. Soit g la constante de couplage du champ ν avec les autres champs. Développant cette amplitude à l'ordre g^2 , et y insérant les expressions des paquets d'ondes, on obtient

$$\mathcal{A} = \int [d\mathbf{q}] \Phi_{P_I} \int [d\mathbf{k}] \Phi_{P_F}^* \int [d\mathbf{q}'] \Phi_{D_I} \int [d\mathbf{k}'] \Phi_{D_F}^* \mathcal{A}_{\text{ondes planes}}(q, k, k', q')$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{ondes planes}}(q, k, q', k') &\equiv \int d^4x M_P(q, k) e^{-i(q-k) \cdot x} \int d^4x' M_D(q', k') e^{-i(q'-k') \cdot x'} \\ &\quad \times G(x' - x) \end{aligned}$$

où $M_P(q, k)$ et $M_D(q', k')$ sont les amplitudes des processus de production et de détection ; la contraction des champs a donné le propagateur

$$G(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x' - x)} G(p^2). \quad (4.2)$$

où $G(p^2) = i(p^2 - M_0^2 + i\epsilon)^{-1}$ est le propagateur de la particule libre dans l'espace des impulsions. Les particules extérieures sont sur leur couche de masse :

$$q^0 = E_{P_I}(\mathbf{q}) = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_{P_I}^2},$$

et ainsi de suite.

On a supposé que la particule ($p^0 > 0$) se propage de x en x' et l'antiparticule ($p^0 < 0$) de x' en x . Si les interactions à la source et au détecteur sont telles que la particule se propage de x' en x et l'antiparticule de x en x' , la contraction des champs ν aurait donné le propagateur

$$\overline{G}(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x' - x)} G(p^2). \quad (4.3)$$

Le signe différent de l'exponentielle sélectionnerait le pôle de l'antiparticule lors de l'intégrale de contour ultérieure.

Si l'objectif est de décrire des particules instables, il est nécessaire que ce soit le propagateur *complet* qui apparaisse dans l'amplitude et non le propagateur de la particule libre. Il suffit pour cela de développer la formule générale de l'amplitude à tous les ordres et de garder tous les diagrammes représentant une insertion d'énergie dans le propagateur de la particule intermédiaire. La sommation de tous ces diagrammes est une série géométrique en l'énergie propre (voir équation (2.9)). Elle fournit la même formule que ci-dessus excepté le fait que $G(p^2)$ symbolise maintenant le propagateur complet (équation (2.6)) :

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon}.$$

On procède ensuite à un changement de variable :

$$x \rightarrow x + x_P \quad \text{et} \quad x' \rightarrow x' + x_D,$$

où $x_P = (t_P, \mathbf{x}_P)$ et $x_D = (t_D, \mathbf{x}_D)$, ainsi qu'à des intégrations sur les variables x et x' qui donnent des fonctions delta. On arrive à la formule suivante de l'amplitude

$$\boxed{\mathcal{A} = \int d^4 p \, \varphi(p) G(p^2) e^{-ip \cdot (x_D - x_P)}} \quad (4.4)$$

où la fonction-poids $\varphi(p)$ est une intégrale de recouvrement des paquets d'ondes entrants et sortants. Elle est définie par

$$\begin{aligned} \varphi(p) \equiv & \int [d\mathbf{q}] \phi_{P_I}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \int [d\mathbf{k}] \phi_{P_F}^*(\mathbf{k}, \mathbf{K}) \int [d\mathbf{q}'] \phi_{D_I}(\mathbf{q}', \mathbf{Q}') \int [d\mathbf{k}'] \phi_{D_F}^*(\mathbf{k}', \mathbf{K}') \\ & \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + k' - q - q') \delta^{(4)}(p - q + k) M_P(q, k) M_D(q', k'). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Insistons sur le fait que ce sont bien les paquets d'ondes ϕ indépendants de x_P et x_D qui figurent dans la fonction $\varphi(p)$. Les fonctions delta y figurant imposent la conservation de l'énergie et de l'impulsion à la production et à la détection de la particule intermédiaire ν . Notons aussi que cette fonction dépend de p (et donc de la direction de l'impulsion totale des états entrants et sortants) et non de p^2 . La conservation de l'énergie-impulsion introduit un lien entre p et les valeurs moyennes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{K}'$ des impulsions des états entrants et sortants de sorte que $\varphi(p)$ dépende à la fois de la grandeur et de la direction de p . L'exception est le modèle simplifié du chapitre 2 puisque la tri-impulsion des états stationnaires est tout à fait indéterminée. Dans ce cas, la fonction-poids vaut $\varphi(p) \sim \delta(p^0 - E)$ et est indépendante de $\mathbf{p}$.

La plupart des calculs en théorie des champs concernent des processus microscopiques où les états entrants et sortants peuvent être approximatés par des ondes planes. Dans ce cas, les fonctions ϕ_{P_I} , ϕ_{P_F} , ϕ_{D_I} et ϕ_{D_F} sont toutes des fonctions delta et la fonction-poids $\varphi(p)$ est égale à

$$\varphi(p) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K + K' - Q - Q') \delta^{(4)}(p - Q + K) M_P(Q, K) M_D(Q', K'),$$

où $Q \equiv (\sqrt{\mathbf{Q}^2 + m_{P_I}^2}, \mathbf{Q})$ et ainsi de suite. L'intégration dans l'amplitude (4.4) est alors immédiate et l'on obtient

$$\mathcal{A} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K + K' - Q - Q') G((Q - K)^2) e^{-i(Q-K) \cdot (x_D - x_P)}.$$

Ce type d'expression ne peut mener à des oscillations dans une superposition de plusieurs amplitudes puisque la phase de l'exponentielle ne dépend pas de la masse de l'état intermédiaire. Par contre, dans le cas d'une amplitude modélisant des processus macroscopiques, la fonction-poids $\varphi(p)$ n'est pas une fonction delta et l'intégration dans l'amplitude n'est plus aussi simple. L'intégration dans l'amplitude (4.4) ne peut alors se faire sans recourir à des méthodes d'approximation. D'ailleurs, la forme exacte des paquets d'ondes est inconnue. Remarquons enfin que l'amplitude (4.4) dépend à la fois de la distance et du temps macroscopiques de propagation. Il faudra intégrer sur le temps pour se débarrasser de la dépendance temporelle et obtenir ainsi une expression applicable aux expériences.

4.3 Analyse temporelle de l'amplitude

On va d'abord étudier la dépendance temporelle de l'amplitude en intégrant sur l'énergie p^0 . Soit l'intégrale

$$I(T) \equiv \int dp^0 \varphi(p) G(p^2) e^{-ip^0 T}.$$

Pour étudier la propagation macroscopique de la particule, il suffit d'examiner le comportement asymptotique $T \rightarrow \infty$ de cette intégrale. Cela ne peut cependant se faire sans une connaissance minimale de la fonction-poids $\varphi(p)$. On va supposer que le spectre d'énergie des particules entrantes et sortantes couvre un domaine limité. Par conséquent, les fonctions delta figurant dans l'expression de la fonction-poids limitent le domaine de p pour lequel la fonction-poids est non nulle :

$$\varphi(p) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 0 < E_1 < p^0 < E_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{p} \in \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}$ est un domaine à support compact. Ceci implique qu'il existe des bornes M_1 et M_2 pour lesquelles

$$\varphi(p) \neq 0 \quad \text{pour} \quad M_1^2 < p^2 < M_2^2.$$

On a posé des conditions expérimentales telles que $\varphi(p) \neq 0$ pour p^0 positif puisque la propagation macroscopique ($T > 0$) de x en x' signifie qu'il y a un transfert d'énergie positive de x en x' . Comme l'amplitude a été dérivée telle que la particule transfère une énergie p^0 de x en x' (et l'antiparticule une énergie de $-p^0$ de x' en x), il s'agit bien de poser des conditions expérimentales telles que $p^0 > 0$. On supposera que le domaine (E_1, E_2) n'inclut pas zéro.

Si $\varphi(p)$ était non nul pour $E_1 < p^0 < E_2 < 0$, l'intégrale de contour ultérieure donnerait zéro car la condition $T > 0$ de propagation macroscopique de x en x' impose de fermer le contour par le bas. Pour étudier la propagation macroscopique d'une antiparticule, il suffit de remplacer $G(x' - x)$ (équation 4.2) par $\overline{G}(x' - x)$ (équation 4.3) et de poser des conditions expérimentales telles que $\varphi(p) \neq 0$ pour $E_1 < p^0 < E_2 < 0$.

Comme pour l'étude de la contribution des seuils au propagateur complet, c'est le comportement de l'intégrand aux bornes du domaine qui déterminera le com-

portement asymptotique de l'intégrale. Il sera utile par la suite de faire la distinction entre les particules se désintégrant faiblement, appelées *quasi-stables* et celles se désintégrant fortement, appelées *résonances*. Soit z_0 le pôle du propagateur complet. En utilisant la méthode de Jacob et Sachs [5], on montre que, pour des particules stables et quasi-stables, $I(T)$ est donné en très bonne approximation pour T grand par

$$I(T) \approx Z \pi \left(z_0 + \mathbf{p}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_0, \mathbf{p}) \exp \left(-i \sqrt{z_0 + \mathbf{p}^2} T \right) \quad (4.6)$$

pour autant que les conditions expérimentales soient telles que

$$M_1^2 < \operatorname{Re} z_0 < M_2^2$$

sinon la propagation macroscopique serait inobservable. En effet, les conditions expérimentales ne seraient pas réunies pour qu'une particule intermédiaire se propage sur sa couche de masse, comme une particule réelle. La dérivation détaillée de cette formule figure dans l'appendice du chapitre. Notons qu'une intégrale de contour sur un contour de type demi-cercle ne converge pas pour la plupart des types de paquets d'ondes. Par exemple, une fonction-poids gaussienne diverge sur ce contour. Le contour proposé par Jacob et Sachs permet d'intégrer une classe beaucoup plus large de fonctions-poids ; entre autres, les gaussiennes y sont incluses. Ce point est négligé dans l'étude des oscillations de kaons par Sudarsky *et al* [66].

Si $\operatorname{Im} z_0 \ll \operatorname{Re} z_0$, le coefficient de variation de la phase de l'amplitude en fonction du temps est $\sqrt{\operatorname{Re} z_0 + \mathbf{p}^2}$. Interprétant cette expression comme l'énergie E de la particule, on peut écrire

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = \operatorname{Re} z_0. \quad (4.7)$$

Comme la masse de la particule au carré est égale à la partie réelle du pôle du propagateur complet, la particule est, dans ce sens-là, sur sa couche de masse. Quant à la partie imaginaire du pôle (dans le cas où elle est non nulle), elle fixe la rapidité de la décroissance exponentielle de l'amplitude et est proportionnelle à la largeur de la particule instable.

Les corrections à cette formule sont en puissances inverses de T . Elles sont de deux types :

1. Des corrections dues au spectre fini de l'énergie des particules entrantes et sortantes. Elles sont donc aussi liées à l'incertitude sur la localisation temporelle des interactions de production et détection. La grandeur de ces corrections est proportionnelle à $(\Delta MT)^{-n-1}$, où $\Delta M \equiv M_j - m$ et n est un nombre positif. Ces corrections sont importantes pour des temps très petits et sont en pratique inobservables dans la propagation des les particules stables et quasi-stables. Dans le cas des particules quasi-stables, elles dominent aussi l'exponentielle décroissante pour des temps très grands mais à ce moment les deux termes sont trop faibles pour être observables dans la propagation.
2. Des corrections dues à un seuil de production $z = b^2$ de plusieurs particules réelles, si celui-ci se trouve dans la région où le spectre de l'énergie de la particule intermédiaire est non nul. Ce sont les corrections que nous avons examiné qualitativement au chapitre 2 (équations (2.15) et (2.19)).
 - (a) Si la particule est stable, la grandeur de ces corrections est proportionnelle à $(mT)^{-3/2}g^2/Q^2$, où $Q \equiv m - b$ et g est la constante de couplage avec les particules produites au seuil. Ces corrections ne sont importantes que pour des temps très petits et sont en pratique inobservables dans la propagation.
 - (b) Si la particule est instable, la grandeur de ces corrections est proportionnelle à $(QT)^{-3/2}\Gamma/Q$ (où $Q \equiv m - b$). Pour des temps très petits, ces corrections modifient la décroissance exponentielle de l'amplitude. La formule habituelle de passage de la largeur au temps de vie est donc modifiée à petit temps si les deux conditions suivantes ne sont pas satisfaites :

$$(m - b)T \gg 1 \quad \text{et} \quad \Gamma/(m - b) \ll 1.$$

Ces conditions sont respectées pour les particules quasi-stables mais violées pour les résonances. A grand temps, ces corrections sont aussi dominantes mais si les particules sont quasi-stables, les deux termes sont alors trop faibles pour être observés dans la propagation.

On constate que ces deux types de correction sont importants à tout temps dans le cas des résonances. Ce problème ne nous concerne cependant pas ici puisque

les résonances ne se propagent pas macroscopiquement. Dans l'appendice, figure la dérivation du comportement non exponentiel à grand temps, qui est en puissance inverse de T . Par contre, bien que l'on ait délimité ici l'extension du régime exponentiel, le comportement non exponentiel à petit temps n'a pas été calculé. Certains calculs effectués en mécanique quantique montrent que, dans ce domaine temporel, la probabilité dépendrait quadratiquement du temps [67], mais cette prédiction n'a pas encore pu être testée.

4.4 Analyse spatiale de l'amplitude

Rappelons que l'amplitude de propagation (4.4) est donnée par

$$\mathcal{A} = \int d^3p I(T) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}},$$

où $\mathbf{L} \equiv \mathbf{x}_D - \mathbf{x}_P$, $T \equiv t_D - t_P$, et $I(T)$ est donné asymptotiquement par (4.6). Si l'on y substitue l'expression asymptotique de $I(T)$, l'amplitude devient

$$\mathcal{A}(T, \mathbf{L}) \approx \int d^3p \psi(z_0, \mathbf{p}) \exp\left(-i\sqrt{z_0 + \mathbf{p}^2} T + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}\right),$$

où $\psi(z_0, \mathbf{p}) \equiv Z \pi(z_0 + \mathbf{p}^2)^{-1/2} \varphi(z_0, \mathbf{p})$ est l'intégrale de recouvrement des paquets d'ondes entrants et sortants. Comme ceux-ci ont des énergies et impulsions bien définies, cette fonction aura un pic prononcé. Si l'on se souvient de la définition du pôle, $z_0 = m^2 - im\Gamma$, la condition $\Gamma/m \ll 1$ permet de réécrire l'amplitude sous la forme

$$\mathcal{A}(T, \mathbf{L}) \approx \int d^3p \psi(m^2, \mathbf{p}) \exp\left(-\frac{m\Gamma}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} T\right) \exp\left(-i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} T + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}\right) \quad (4.8)$$

Cette intégrale ne peut pas être calculée exactement et va donc être évaluée par approximation autour du point-selle, puisque la fonction $\psi(z_0, \mathbf{p})$ a par hypothèse un maximum prononcé.

Il est nécessaire de vérifier préalablement que si $\Gamma \neq 0$, l'exponentielle décroissante a une influence négligeable sur la position du maximum dans le domaine temporel observé en pratique. Dans le cas contraire, la position du maximum dépendrait

du temps T ! Restreignons-nous à une dimension et prenons pour modèle

$$\psi \sim \exp\left(-\frac{(p-P)^2}{4\sigma^2}\right).$$

L'intégrand est maximal est $p = P_{max}$, qui est la solution de

$$P_{max} - P = a P_{max} (P_{max}^2 + m^2)^{-3/2} \quad \text{où} \quad a \equiv \sigma^2 m \Gamma T.$$

Si $T = 0$, $P_{max} = P$.

Si $T > 0$, $P_{max} = (1 + \varepsilon) P$ avec $\varepsilon \cong a (P_{max}^2 + m^2)^{-3/2}$, qui est beaucoup plus petit que 1 tant que $\Gamma T \ll m^2/\sigma^2$, c'est-à-dire pour un grand nombre de temps de vie. On exige que la position du maximum ne soit pas modifiée par l'exponentielle décroissante à une précision de $\bar{\varepsilon}$. On aura $\varepsilon \geq \bar{\varepsilon}$ lorsque

$$\Gamma T \geq \frac{\bar{\varepsilon} (P_{max}^2 + m^2)^{3/2}}{\sigma^2 m}.$$

Pour un kaon K_S , on a par exemple $P \cong m$ dans l'expérience CPLEAR [68] et $\sigma \cong 3 \times 10^{-2}$ MeV (incertitude sur la masse). Dès lors, le niveau de précision voulu sera violé lorsque

$$\Gamma T \geq 7 \times 10^8 \bar{\varepsilon},$$

Par exemple, si l'on ne désire pas une précision supérieure à $\bar{\varepsilon} = 10^{-7}$ sur la localisation du maximum, sa position ne changera pas sur 70 vies moyennes. Ce chiffre est nettement plus grand que les 20 vies moyennes observées dans CPLEAR [68].

Notons par $\mathbf{P}$ la position du maximum de $|\psi(m^2, \mathbf{p})|$. L'hypothèse de symétrie centrale de la phase de ψ autour du maximum implique les dérivées premières de ψ sont nulles au maximum $\mathbf{P}$. Dans le domaine où elle est non nulle, la fonction ψ est approximée par une gaussienne :

$$\psi(m^2, \mathbf{p}) \approx \psi(m^2, \mathbf{P}) \exp(-(\mathbf{p} - \mathbf{P}) W (\mathbf{p} - \mathbf{P})). \quad (4.9)$$

W est une matrice complexe symétrique contenant les dérivées secondes de $\ln \psi$ évaluées en $\mathbf{P}$. Le produit matriciel est désormais implicite dans les expressions du type $\mathbf{p} W \mathbf{p}$. On développe aussi les autres termes de l'intégrand autour de $\mathbf{P}$:

$$\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \cong E + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{P}) + (\mathbf{p} - \mathbf{P}) R (\mathbf{p} - \mathbf{P}), \quad (4.10)$$

où $E \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{P}^2}$ et $\mathbf{v} \equiv \mathbf{P}/E$. La matrice R contenant les dérivées secondes est réelle et symétrique. On néglige la dépendance en $\mathbf{p}$ du terme en Γ puisque sa contribution à la localisation du maximum a pu être négligée. Il est donc à peu près constant dans le domaine où ψ est maximal.

Après l'insertion de ces développements, l'amplitude de propagation (4.8) se réécrit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T, \mathbf{L}) &\cong \psi(m^2, \mathbf{P}) \exp(-m\Gamma T/2E) \exp(-iET) \\ &\times \int d^3p \exp[-i\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{P}) T + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}] \exp(-(\mathbf{p} - \mathbf{P})(W + iRT)(\mathbf{p} - \mathbf{P})) \\ &\cong \psi(m^2, \mathbf{P}) \exp(-m\Gamma T/2E) \exp(-iET + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \\ &\times \int d^3p \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{v}T) - \mathbf{p}(W + iRT)\mathbf{p}] , \end{aligned}$$

où l'on a procédé à un changement de variable sur $\mathbf{p}$. L'intégration sur $\mathbf{p}$ se fait par la formule habituelle de l'intégrale gaussienne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T, \mathbf{L}) &\cong \pi^{3/2} \psi(m^2, \mathbf{P}) \exp(-m\Gamma T/2E) (\det(W + iRT))^{-1/2} \\ &\times \exp(-iET + i\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \exp\left(-\frac{1}{4}(\mathbf{L} - \mathbf{v}T)(W + iRT)^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{v}T)\right) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si l'on mesure à la fois la distance $\mathbf{L}$ et le temps T de propagation, cette expression peut être analysée comme suit :

1. La première exponentielle contient la décroissance temporelle de l'amplitude due à la désintégration possible de la particule.
2. La deuxième exponentielle contient les termes d'oscillation spatio-temporelle.
3. La troisième exponentielle impose la relation approximative $\mathbf{L} - \mathbf{v}T \leq \sigma_x$ sinon l'amplitude est quasiment nulle ; σ_x est la largeur de la fonction-poids $\tilde{\psi}(m^2, \mathbf{x})$ dans l'espace de configuration, c'est-à-dire qu'elle dépend de la précision avec laquelle on peut localiser la source et le détecteur.

On va s'intéresser à la valeur de l'amplitude dans la direction de $\mathbf{v}$ puisque c'est la seule direction dans laquelle elle est non négligeable. Le temps T n'étant pas mesuré dans les expériences, on calcule la probabilité intégrée sur un grand intervalle de temps dont l'étendue peut être prise de $-\infty$ à $+\infty$ sans grande erreur grâce à la

gaussienne en T . La probabilité intégrée sur le temps, dans la direction z ($\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{e}}_z$) fixée par $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_z = (P/E) \hat{\mathbf{e}}_z$, se calcule à partir de la formule

$$\mathcal{P}(L \hat{\mathbf{e}}_z) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dT |\mathcal{A}(T, L \hat{\mathbf{e}}_z)|^2.$$

En y insérant l'expression de l'amplitude, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(L \hat{\mathbf{e}}_z) &\sim \pi^3 |\psi(m^2, \mathbf{P})|^2 |\det(W + iRL/v)|^{-1} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dT \exp \left(-\frac{m\Gamma}{E} T - \frac{W^{zz} + W^{zz*}}{4|W^{zz} + iR^{zz}L/v|^2} (L - vT)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Les indices zz sont des indices matriciels. La dispersion a été négligée dans les termes en RT en y substituant $T = L/v$. On néglige aussi les termes en Γ^2 . Les facteurs de normalisation sont omis car ils ne jouent pas de rôle dans notre analyse. L'intégration sur T donne

$$\boxed{\mathcal{P}(L \hat{\mathbf{e}}_z) \sim \exp \left(-\frac{m\Gamma}{P} L \right)} \quad (4.13)$$

On reconnaît la formule de la probabilité de désintégration d'une particule en fonction de la distance, dans sa forme relativiste.

Remarquons que grâce aux fonctions delta figurant dans la fonction-poids $\varphi(p)$, l'énergie E et l'impulsion $\mathbf{P}$ sont égales à l'énergie totale et l'impulsion totale entrantes (et sortantes), à une incertitude σ_p près dépendant de la taille des paquets d'ondes dans l'espace de configuration. On a donc

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{P}}{E} \cong \frac{\mathbf{P}_{in}}{E_{in}} \cong \frac{\mathbf{P}_{out}}{E_{out}},$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{in} &\equiv \mathbf{Q} - \mathbf{K} \cong \mathbf{P}_{out} \equiv \mathbf{K}' - \mathbf{Q}' \\ E_{in} &\equiv E_{P_I}(\mathbf{Q}) - E_{P_F}(\mathbf{K}) \cong E_{out} \equiv E_{D_F}(\mathbf{K}') - E_{D_I}(\mathbf{Q}') \end{aligned}$$

La prochaine étape consiste à appliquer cette formule de l'amplitude et de la probabilité de propagation à un mélange de particules. Ce travail fait l'objet du prochain chapitre.

4.5 Appendice : intégration sur p^0 dans l'amplitude

L'objectif est de calculer la valeur asymptotique $T \rightarrow \infty$ de l'intégrale (4.6) :

$$I(T) \equiv \int dp^0 \varphi(p) G(p^2) e^{-ip^0 T}.$$

Le propagateur est donné par l'équation (2.6) ou (2.10). La fonction-poids $\varphi(p)$ n'est différente de zéro que sur un intervalle fini. Nous prendrons comme modèle

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= (p^2 - M_1^2)^n (p^2 - M_2^2)^n \Omega(p^2, \mathbf{p}) \quad \text{pour } 0 < M_1^2 < p^2 < M_2^2, \\ \varphi(p) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

p^0 est positif ainsi que le nombre n . La fonction Ω est analytique en p^2 . Le comportement symétrique de $\varphi(p)$ à ses deux bornes a été choisi pour simplifier le calcul mais n'est pas indispensable. L'exigence d'analyticité de Ω n'est pas trop contraignante car on peut toujours approximer une fonction régulière sur un intervalle fini par un polynôme (qui est analytique).

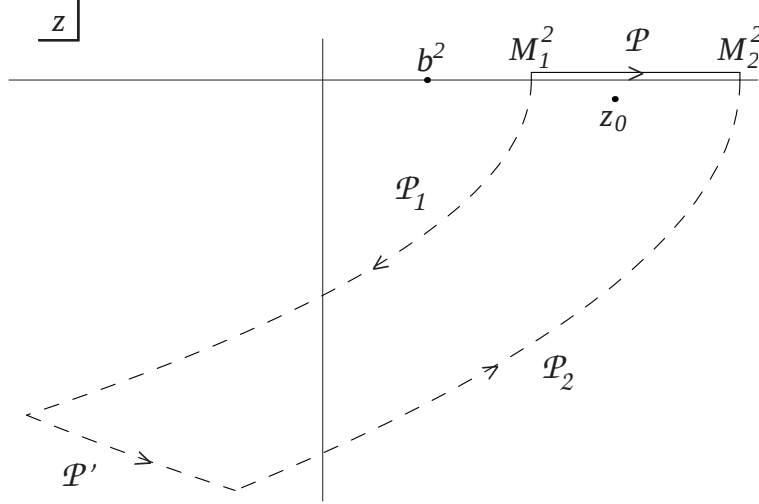
Sous le changement de variable $z = p^2 = p^{02} - \mathbf{p}^2$, l'intégrale $I(T)$ devient

$$I(T) = \frac{1}{2} \int_{M_1^2}^{M_2^2} dz (z + \mathbf{p}^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z, \mathbf{p}) G(z) e^{-i\sqrt{z + \mathbf{p}^2} T}.$$

Le propagateur $G(z)$ a des points de branchement aux seuils de contribution des états à plusieurs particules. Soit $z = b^2$ le premier point de branchement qui correspond au seuil de production de plusieurs particules réelles. La coupure sur l'axe réel commence donc en $z = b^2$. On fait l'hypothèse que les autres points de branchement sont supérieurs à M_2^2 . La continuation analytique de $G(z)$ sur la deuxième feuille de Riemann est notée comme au chapitre précédent $G_{II}(z)$ et a un pôle en $z = z_0 = m^2 - im\Gamma$. On va différencier les cas selon les positions du pôle et du seuil b , et suivant que la particule est ou non instable.

1. Particule instable : $b < M_1 < m < M_2$ et $\Gamma \neq 0$

On choisit le contour d'intégration défini par



L'expression analytique des contours $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est

$$\mathcal{P}_j : z = \left(-i\omega + \sqrt{M_j^2 + \mathbf{p}^2} \right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad (j = 1, 2),$$

où ω varie de zéro à ω_∞ sur $\mathcal{P}_1$ et de ω_∞ à zéro sur $\mathcal{P}_2$.

L'expression analytique du contour $\mathcal{P}'$ est

$$\mathcal{P}' : z = \left(-i\omega_\infty + \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} \right)^2 - \mathbf{p}^2,$$

où M varie de M_1 à M_2 . On prend la limite $\omega_\infty \rightarrow \infty$.

L'intégrale recherchée est égale à

$$I(T) = J + J_1 + J_2 + J'.$$

J est la contribution du pôle z_0 tandis que J_1 , J_2 et J' sont les contributions respectives de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}'$. Leurs expressions analytiques s'écrivent

(a) Contribution du pôle :

$$\begin{aligned} J &= Z \pi \left(z_0 + \mathbf{p}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_0, \mathbf{p}) \exp \left(-i\sqrt{z_0 + \mathbf{p}^2} T \right) \\ &= Z \pi \left(z_0 + \mathbf{p}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_0, \mathbf{p}) \exp \left(-i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} T - \frac{m\Gamma}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} T \right). \end{aligned}$$

On a défini $z_0 = m^2 - im\Gamma$ et fait l'hypothèse que $\Gamma/m \ll 1$. Comme on l'a déjà dit, cette relation est très bien vérifiée dans la majorité des cas. Par exemple, $\Gamma/m \approx \mathcal{O}(10^{-14})$ pour le K_S^0 . Posant $\Delta M \cong |m - M_{1,2}|$, l'ordre de grandeur de J est donné par $\mathcal{O}(J) \sim m^{2n-1} (\Delta M)^{2n} e^{-\Gamma T/2}$.

(b) Contribution des contours en faucille :

$$J_j = i(-1)^j \exp\left(-i\sqrt{M_j^2 + \mathbf{p}^2} T\right) \int_0^\infty d\omega \varphi(z(\omega), \mathbf{p}) G_{II}(z(\omega)) e^{-\omega T}.$$

Pour T grand, la contribution dominante à l'intégrale vient des valeurs de ω proches de zéro à cause de l'exponentielle décroissante. Comme l'intégrand tend vers zéro lorsque ω tend vers zéro ($\varphi(M_j^2) = 0$), le comportement asymptotique de l'intégrale dépend du type de convergence vers zéro de l'intégrand. On y substitue $y = \omega T$ et l'on effectue un développement en $1/T$:

$$J_j = -(1)^{n(2-j)+j} 2^n n! \left(M_2^2 - M_1^2\right)^n \left(M_j^2 + \mathbf{p}^2\right)^{n/2} \Omega(M_j^2, \mathbf{p}) G_{II}(M_j^2) \times (iT)^{-(n+1)} \exp\left(-i\sqrt{M_j^2 + \mathbf{p}^2} T\right).$$

Les corrections à cette formule sont en $(\Delta MT)^{-(n+2)}$, où $\Delta M \approx M_j - m$, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de l'incertitude sur la masse de la particule. On fait implicitement l'hypothèse que la fonction $\Omega(z, \mathbf{p})$ diverge moins vite que $\exp(-\omega T)$ sur les contours $\mathcal{P}_j$ quand ω tend vers l'infini, ce qui recouvre une large classe de fonctions. Par exemple, les gaussiennes conviennent, alors que leur intégrale diverge sur des contours de type demi-cercle à de rayon infini. L'ordre de grandeur de J_j est donné par $\mathcal{O}(J_j) \sim m^{2n-1} (\Delta M)^{n-1} T^{-(n+1)}$.

(c) Contribution du contour à l'infini :

$$J' = e^{-\omega_\infty T} \int_{M_1^2}^{M_2^2} dM \frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \varphi(z(M)) G_{II}(z(M)) \exp\left(-i\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} T\right).$$

Si Ω satisfait aux mêmes conditions à l'infini que ci-dessus, $J' \sim \exp(-\omega_\infty T)$ et tend vers zéro lorsque $\omega_\infty \rightarrow \infty$.

En conclusion, la contribution du pôle est une exponentielle décroissante en T tandis que les contributions dues aux bornes du spectre d'énergie sont en puissances inverses de T .

Pour des temps petits, on a $\mathcal{O}(J) \sim m^{2n-1} (\Delta M)^{2n}$ donc $\mathcal{O}(J_j/J) \sim (\Delta M T)^{-(n+1)}$. Comme les interférences entre J_j et J disparaissent par moyenne sur de petits

intervalles de temps, la contribution de J_j par rapport J à la probabilité sera plutôt donnée par $(J_j/J)^2 \sim (\Delta M T)^{-2(n+1)}$, qui est notable pour $\Delta M T \leq 1$. En deçà de cette borne, le calcul asymptotique de J_j n'est plus valable car on a négligé lors du calcul des termes en $(\Delta M T)^{-(n+2)}$.

Dans le cas d'une particule quasi-stable, par exemple le K_S^0 , la masse est mesurée à une précision de 10^{-2} MeV. On a donc $\Delta M \approx 10^{-2}$ MeV et les termes non exponentiels contribueront notablement pour $T \leq 10^{-19}$ s, ce qui est inobservable dans la propagation puisque le temps de vie du K_S^0 est de 0.89×10^{-10} s. Pour le B^0 , $\Delta M \approx 2$ MeV et les termes non exponentiels contribueront notablement pour $T \leq 10^{-22}$ s, ce qui est inobservable dans la propagation puisque le temps de vie du B^0 est de 1.29×10^{-13} s.

Dans le cas d'une résonance, par exemple le $\Delta(1232)$, $\Delta M \approx 2$ MeV et les termes non exponentiels contribueront notablement pour $T \leq 10^{-21}$ s, qui est grand par rapport à l'inverse de la largeur égale à 5×10^{-24} s. Quel que soit le domaine temporel, la propagation des résonances ne peut jamais modélisée par la seule contribution du pôle : il faut tenir compte des conditions de production et de détection. Cependant, les résonances ne se propagent pas macroscopiquement donc il n'est pas crucial de pouvoir calculer par exemple leur temps de vie en fonction de leur largeur.

Dans le cas de la particule quasi-stable, la contribution du pôle ne domine pas non plus à grand temps. Les termes non exponentiels prennent le dessus lorsque

$$\Gamma T > 2(n+1) \ln(\Delta M T) = 2(n+1) (\ln(\Gamma T) + \ln(\Delta M/\Gamma)) .$$

Pour le K_S^0 , soit $n = 1/2$ et $\Delta M/\Gamma \approx \mathcal{O}(10^{10})$, de sorte que $\Gamma T > 82$, ce qui est inobservable. Pour le B^0 , soit $n = 1/2$ et $\Delta M/\Gamma \approx \mathcal{O}(10^9)$, de sorte que $\Gamma T > 75$, ce qui est inobservable.

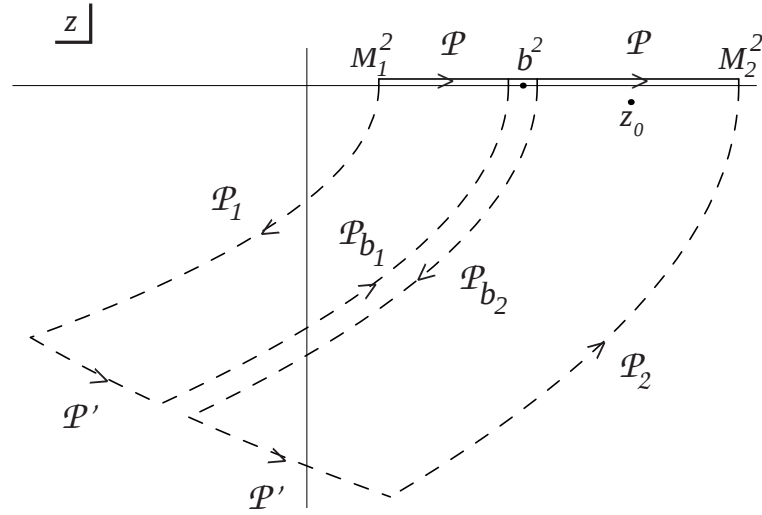
En fin de compte, $I(T)$ est donnée en très bonne approximation pour les particules quasi-stables par

$$I(T) \approx Z \pi \left(z_0 + \mathbf{p}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_0, \mathbf{p}) \exp \left(-i \sqrt{z_0 + \mathbf{p}^2} T \right) \quad (4.14)$$

2. Particule instable : $M_1 < b < m < M_2$ et $\Gamma \neq 0$

Dans ce cas-ci, le seuil de production de plusieurs particules réelles se trouve dans la domaine d'énergies permises. Il va générer des contributions en puissances inverses du temps, qui sont les corrections que nous avons examinées qualitativement au chapitre 2 (équations (2.15) et (2.19)).

On choisit le contour défini par



Les contributions des contours $\mathcal{P}_j$ sont les mêmes que dans le cas précédent, sauf que l'on substitue $G(z)$ à $G_{II}(z)$ sur $\mathcal{P}_1$ puisque ce trajet se trouve sur la première feuille de Riemann. La valeur asymptotique $T \rightarrow \infty$ de J_j ne changera pas.

La somme des contributions des trajets $\mathcal{P}_{b_j}$ serait nulle si ces trajets se trouvaient sur la même feuille de Riemann mais ce n'est pas le cas. Leur contribution totale J_b s'écrit

$$\begin{aligned} J_b &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}_b} dz (z + \mathbf{p}^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z, \mathbf{p}) (G_{II}(z) - G(z)) e^{-i\sqrt{z+\mathbf{p}^2}T} \\ &= -i e^{-i\sqrt{b^2+\mathbf{p}^2}T} \int_0^\infty d\omega \varphi(z(\omega), \mathbf{p}) (G_{II}(z) - G(z)) e^{-\omega T}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'expression analytique du contour $\mathcal{P}_b$ est donnée par

$$\mathcal{P}_b : z = \left(-i\omega + \sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2} \right)^2 - \mathbf{p}^2, \quad (4.16)$$

où ω varie de zéro à ω_∞ et l'on prend la limite $\omega_\infty \rightarrow \infty$. L'intégrale $I(T)$ est

la somme de toutes les contributions des contours :

$$I(T) = J + J_1 + J_2 + J_b + J'.$$

Le comportement asymptotique de J_b est étudié de même manière que celui des J_j . Pour T grand, la contribution dominante à l'intégrale vient des valeurs de ω proches de zéro à cause de l'exponentielle décroissante. Comme l'intégrand tend vers zéro lorsque ω tend vers zéro ($G_{II}(z) \rightarrow G(z)$), le comportement asymptotique de l'intégrale dépend du type de convergence vers zéro de l'intégrand. On substitue $y = \omega T$ et on développe l'intégrand en $1/T$. Si l'on se souvient que $G_{II}(z)$ est défini par prolongement analytique de $G(x + i\epsilon)$ en dessous de la coupure (équation (2.17)) et que sa discontinuité à travers la coupure est donnée par l'équation (2.5),

$$G(x + i\epsilon) - G(x - i\epsilon) = 2\pi \rho(x),$$

où $\rho(x)$ est la fonction spectrale, on a que

$$G_{II}(z) - G(z) = 2\pi \rho(z).$$

Pour fixer les idées, prenons le système $K\pi\pi$ dont nous avons explicitement calculé la fonction spectrale $\rho(z)$ (équation (2.22)). Le seuil à deux particules est en $z = b^2$, avec $b = 2m_\pi$.

$$\rho(z) = \frac{1}{\pi} \frac{v(z)}{(z - m^2 - u(z))^2 + v^2(z)},$$

où m est la masse du kaon et

$$v(z) = \frac{g^2}{4\pi} \sqrt{1 - b^2/z}.$$

L'évaluation de l'intégrale J_b donne

$$J_b = -i (-2i\pi)^{\frac{1}{2}} T^{-3/2} \frac{g^2}{4\pi b} \frac{(b^2 + \mathbf{p}^2)^{1/4}}{(b^2 - m^2 - u(b^2))^2} \varphi(b^2, \mathbf{p}) e^{-i\sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2} T}.$$

Les corrections à cette formule sont de l'ordre de $(QT)^{-5/2}$ où $Q \equiv m - b$ est l'énergie disponible lors de la désintégration de la particule. Puisque nous

avons calculé la largeur de $K \rightarrow 2\pi$ (équation (2.23)), on peut remplacer g^2 par son expression en fonction de Γ , m et Q . L'ordre de grandeur de J_b est donné par

$$\mathcal{O}(J_b) \sim (QT)^{-3/2} \frac{\Gamma}{Q} \frac{1}{m} \varphi(b^2, \mathbf{p}).$$

Pour des temps petits, l'ordre de grandeur de J est donné par $\mathcal{O}(J) \sim \varphi(m^2, \mathbf{p})$ et l'on obtient

$$\mathcal{O}\left(\frac{J_b}{J}\right) \sim (QT)^{-3/2} \frac{\Gamma}{Q}$$

qui est beaucoup plus petit que 1 si $QT \gg 1$ et $\Gamma/Q \ll 1$. C'est le cas pour les particules quasi-stables. Par exemple, $\Gamma/Q \approx 10^{-14}$ pour le K_S^0 . Par contre, ce n'est pas vrai pour les résonances. Par exemple, $\Gamma/Q \approx 0.8$ pour le $\Delta(1232)$. En deçà de la borne $QT \approx 1$, le calcul asymptotique de J_b n'est plus valable, puisque l'on a négligé des corrections en $(QT)^{-5/2}$.

Pour des grands temps, J_b prend le dessus pour

$$\Gamma T - 3 \ln(\Gamma T) > 5 \ln(Q/\Gamma).$$

qui se traduit par $\Gamma_S T > 165$ pour le K_S^0 , $\Gamma_L T > 202$ pour le K_L^0 et $\Gamma_{L,H} T > 157$ pour le $B_{L,H}^0$ (pour ce dernier, on a pris $Q \cong 1$ MeV). Après un aussi grand nombre de temps de vie, la probabilité de détection d'une particule est inobservable et ces corrections non exponentielles sont donc indétectables.

Pour les résonances, la contribution de J_b est comparable ou supérieure à celle du pôle pour tout domaine temporel.

Dans le cas des particules quasi-stables, l'intégrale $I(T)$ est donc donnée en très bonne approximation par la même expression qu'au premier cas (équation (4.14)) :

$$I(T) \approx Z \pi \left(M_j^2 + \mathbf{p}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_0, \mathbf{p}) \exp \left(-i \sqrt{z_0 + \mathbf{p}^2} T \right)$$

Quant aux résonances, elles ne se propagent pas macroscopiquement, leur largeur étant du même ordre de grandeur que les énergies typiques des processus.

3. Particule stable : $M_1 < m < M_2 < b$ et $\Gamma = 0$

Ce cas se traite similairement au premier cas sauf que le pôle est réel. On peut reprendre le résultat (4.14). Il n'y a pas de décroissance exponentielle de la contribution du pôle puisque celui-ci est réel. Les corrections à grand temps ne dominent jamais la contribution du pôle.

4. Particule stable : $M_1 < m < b < M_2$ et $\Gamma = 0$

Ce cas se traite similairement au deuxième cas sauf que le pôle est réel. On peut reprendre le résultat en posant $\Gamma = 0$. Le rapport J_b/J vaut $J_b/J \sim (mT)^{-3/2} g^2/Q^2$, où g est la constante de couplage avec les particules produites au seuil. La contribution de J_b est inobservable en pratique à petit temps et sous-dominante à grand temps.

5. $m < M_1$ ou $m > M_2$

Le pôle se trouve en dehors du contour d'intégration et ne contribuera pas. La propagation macroscopique de la particule sera inobservable. Les énergies-impulsions des états initiaux ou finaux ne permettent pas que la particule intermédiaire soit sur sa couche de masse et cela n'a pas de sens d'étudier sa propagation comme celle d'une particule quasi-réelle.

Chapitre 5

Oscillations en théorie des champs

5.1 Propagation d'un mélange de particules

Maintenant que la propagation d'une seule particule a été étudiée en détail, nous sommes prêts à attaquer le problème de la propagation d'un mélange de particules dans le cadre du modèle sophistiqué où les états entrants et sortants sont modélisés par des paquets d'ondes. Remarquons que l'état intermédiaire n'est pas un paquet d'ondes. Cette méthode n'appartient donc pas à la catégorie dite du *traitement des oscillations par paquet d'ondes*, qui consiste à considérer la particule oscillante comme un paquet d'ondes dans le cadre de la mécanique quantique [52, 73]. Notre méthode relève bien de la théorie des champs, où les ondes planes utilisées dans le calcul d'amplitudes de Feynman ne sont en fait que des approximations remplaçant les paquets d'ondes [65].

Après quelques rappels de notation, nous appliquerons la formule de propagation calculée au chapitre précédent à une superposition de propagations de différents états propres de masse. Les étapes de l'analyse seront identiques. Suite à l'établissement de la formule de l'amplitude, nous en effectuons une analyse temporelle, lors de laquelle nous vérifierons la non observabilité de nouvelles corrections non exponentielles dues au mélange. L'étude de la propagation du mélange continue par une analyse spatiale de l'amplitude et le calcul de la probabilité de détection intégrée sur le temps. La formule de probabilité obtenue sera analysée terme par

terme. Nous retrouverons les termes de désintégration et d'oscillation, quoique leur forme sera différente de celle obtenue dans le modèle simplifié. Par contre, les termes de *décohérence* et de *localisation des interactions* n'apparaissent pas dans le modèle précédent. Ils imposeront une série de conditions d'observabilité des oscillations. Pour terminer, nous passerons en revue les éclaircissements que ce modèle apporte aux différentes questions posées au chapitre 1 ainsi que les points communs et différences de notre approche avec les autres traitements existant dans la littérature.

Il est peut-être utile de rappeler les notations utilisées dans la section 3.4 pour décrire un processus de propagation avec mélange.

5.2 Amplitude pour un mélange

Le processus de propagation garde la même forme que celui du modèle simplifié de la section 3.4 :

$$\begin{array}{ccc}
 P_I(q) & \xrightarrow{(t_P, \mathbf{x}_P)} & P_F(k) + \nu_\alpha(p) \\
 & \searrow & \\
 & & \nu_\beta(p) + D_I(q') \xrightarrow{(t_D, \mathbf{x}_D)} D_F(k')
 \end{array}$$

La saveur α de la particule intermédiaire ν_α produite dans la région de $(t_P, \mathbf{x}_P)$ est identifiée par l'état sortant $P_F(k)$ tandis que la saveur β de la particule ν_β détectée dans la région de $(t_D, \mathbf{x}_D)$ est identifiée par l'état sortant $D_F(k')$. Si ce n'est pas possible (ex : $K^0, \overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$), on procède à une sommation sur les différentes saveurs.

Les notations ne changent pas : le propagateur complet $G_{\beta\alpha}(x' - x)$ symbolise la propagation de particules de saveur α produites en x en particules de saveur β détectées en x' . Ce propagateur est diagonalisé (équations (3.3) et (3.6)) en très bonne approximation par des matrices V constantes¹ :

$$G_{\beta\alpha}(p^2) = (V^{-1} G_D(p^2) V)_{\beta\alpha} = \sum_j V_{\beta j}^{-1} G_{D,jj}(p^2) V_{j\alpha},$$

¹Rappelons que la matrice V telle qu'elle est définie ici est la transposée de la matrice V diagonalisant les kets dans la dérivation en mécanique quantique présentée au chapitre 1.

où $G_{D,jj}(p^2) \equiv i(p^2 - z_j)^{-1}$. Le nombre complexe z_j est le pôle du propagateur complet associé à l'état j , de masse m_j et de largeur Γ_j , auxquelles il est relié par

$$z_j \equiv m_j^2 - im_j\Gamma_j.$$

La propagation macroscopique implique qu'il s'agit de particules quasi-stables, c'est-à-dire que $m_j \ll \Gamma_j$.

L'amplitude du processus global peut s'exprimer comme une superposition linéaire d'amplitudes $\mathcal{A}_j$ de propagation d'états propres de masse :

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, T, \mathbf{L}) = \sum_j V_{\beta j}^{-1} \mathcal{A}_j V_{j\alpha}, \quad (5.1)$$

où l'amplitude partielle $\mathcal{A}_j$ s'écrit comme l'amplitude de propagation d'une particule isolée (équation (4.4)) :

$$\mathcal{A}_j = \int d^4p \varphi(p) G_{D,jj}(p^2) e^{-ip \cdot (x_D - x_P)}. \quad (5.2)$$

La fonction-poids $\varphi(p)$ symbolise comme auparavant (équation(4.5)) l'intégrale de recouvrement des paquets d'ondes :

$$\begin{aligned} \varphi(p) \equiv & \int [d\mathbf{q}] \phi_{P_I}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \int [d\mathbf{k}] \phi_{P_F}^*(\mathbf{k}, \mathbf{K}) \int [d\mathbf{q}'] \phi_{D_I}(\mathbf{q}', \mathbf{Q}') \int [d\mathbf{k}'] \phi_{D_F}^*(\mathbf{k}', \mathbf{K}') \\ & \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + k' - q - q') \delta^{(4)}(p - q + k) M_P(q, k) M_D(q', k'). \end{aligned} \quad (5.3)$$

En ce qui concerne la signification des indices dans ce chapitre, les indices inférieurs i et j seront des indices de saveur tandis que les indices supérieurs seront des indices vectoriels ou matriciels (dans l'espace des impulsions ou dans l'espace de configuration). Notons aussi que le produit matriciel sera implicite dans les expressions du genre $\mathbf{LWL}$.

5.3 Analyse temporelle de l'amplitude de mélange

Suivant la procédure établie pour étudier la propagation d'une particule isolée, nous effectuerons l'analyse temporelle et spatiale de l'amplitude avant de calculer la probabilité correspondante.

Il est plus facile pour commencer de ne considérer que l'amplitude partielle $\mathcal{A}_j$ (équation (5.2)). L'analyse temporelle consiste à intégrer sur p^0 . On recourt à la même méthode d'intégration de contour qu'au chapitre précédent (voir l'équation (4.8)) et l'on obtient

$$\mathcal{A}_j = \int d^3p \, \psi(m_j^2, \mathbf{p}) \exp \left(-\frac{m_j \Gamma_j}{2\sqrt{m_j^2 + \mathbf{p}^2}} T \right) \exp \left(-i\sqrt{m_j^2 + \mathbf{p}^2} T + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{L} \right), \quad (5.4)$$

où $\psi(m_j^2, \mathbf{p}) \equiv Z \pi(z_j + \mathbf{p}^2)^{-1/2} \varphi(z_j, \mathbf{p})$.

A ce stade, on pourrait se demander ce que sont devenues les corrections non exponentielles à l'amplitude de propagation, qui ont été étudiées en détail au chapitre précédent dans le cas de la propagation d'une particule isolée. En premier lieu, nous avons été confrontés à des corrections dues aux conditions de production et de détection, dépendant de la forme des paquets d'ondes initiaux et finaux. Dans le cas du mélange de particules étudié dans ce chapitre, ces corrections peuvent se calculer pour chaque amplitude partielle selon la méthode expliquée au chapitre précédent et restent négligeables. En second lieu, nous avons rencontré des corrections dues aux seuils de production des états à plusieurs particules. Rappelons qu'elles se manifestent par des discontinuités (seuils) de la dérivée de l'énergie propre en fonction de p^2 . Or la méthode de diagonalisation par des matrices constantes approxime l'énergie propre par une constante (équation (3.5)). Par conséquent ces seuils et ces corrections disparaissent dans cette approximation.

Il serait néanmoins bon de tester l'influence des corrections dues aux seuils de production sur la propagation de particules mélangées, pour vérifier qu'elles ne perturbent pas les oscillations. Revenons donc un pas en arrière, à la diagonalisation exacte par des matrices dépendant de $z = p^2$. En particulier, considérons la diagonalisation exacte du propagateur complet du $K^0 \overline{K}^0$ (équation (3.4)).

$$-i G(z) = W(z) \begin{pmatrix} (z - m_1^2 - f_1(z))^{-1} & 0 \\ 0 & (z - m_2^2 - f_2(z))^{-1} \end{pmatrix} W^{-1}(z).$$

Nous allons négliger la violation CP et approximer les états de propagation K_S et K_L par les états propres sous CP, K_1 et K_2 . L'incidence sur le mélange des corrections dues à un seuil en $z = b^2$ peut être étudiée en effectuant, par exemple, l'analyse

temporelle de l'élément non diagonal $G_{0\bar{0}}(p^2)$. En effet, si nous définissons un $I_{\beta\alpha}(T)$ similaire au $I(T)$ apparaissant à la section 4.3 par

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, T, \mathbf{L}) \equiv \int d^3p I_{\beta\alpha}(T) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}},$$

on peut écrire

$$I_{0\bar{0}}(T) \equiv \int dp^0 \varphi(p) G_{0\bar{0}}(p^2) e^{-ip^0 T},$$

où $\varphi(p)$ est la fonction-poids définie en (5.3) et l'on a extrait de l'expression matricielle ci-dessus l'élément $0\bar{0}$ du propagateur :

$$G_{0\bar{0}}(p^2) = \frac{i W_{01}(p^2) W_{10}^{-1}(p^2)}{p^2 - m_1^2 - f_1(p^2)} + \frac{i W_{02}(p^2) W_{20}^{-1}(p^2)}{p^2 - m_2^2 - f_2(p^2)}. \quad (5.5)$$

On reprend la méthode du chapitre précédent, section 4.5. L'intégration s'effectue sur le même contour dans le plan complexe avec la différence que le contour contient maintenant deux pôles quasiment dégénérés. L'intégrale $I_{0\bar{0}}(T)$ se décompose en la contribution J des pôles $z_{1,2}$, la contribution $J_{1,2}$ des seuils de $\varphi(p)$, et la contribution J_b du seuil de production de plusieurs particules (on suppose qu'il n'y en a qu'un dans le domaine d'énergie permis par les conditions expérimentales) :

$$I_{0\bar{0}}(T) = J + J_1 + J_2 + J_b.$$

J est donné cette fois par les résidus de deux pôles :

$$\begin{aligned} J = & W_{01}(z_1) W_{10}^{-1}(z_1) \pi(z_1 + \mathbf{p}^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_1, \mathbf{p}) \exp\left(-i\sqrt{z_1 + \mathbf{p}^2} T\right) \\ & + W_{02}(z_2) W_{20}^{-1}(z_2) \pi(z_2 + \mathbf{p}^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z_2, \mathbf{p}) \exp\left(-i\sqrt{z_2 + \mathbf{p}^2} T\right). \end{aligned}$$

Comme la violation CP est négligée, les matrices de diagonalisation *évaluées aux pôles* sont données par la formule (3.8) de passage à la base propre de CP :

$$W(z_1) \cong W(z_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ces expressions ne sont pas valables loin des pôles. On en tiendra compte dans l'évaluation de J_b . Pour évaluer l'ordre de grandeur de J , on développe l'argument des exponentielles en utilisant la définition des pôles, $z_j \equiv m_j^2 - im_j \Gamma_j$:

$$-i\sqrt{z_j + \mathbf{p}^2} T \cong -iET - i\frac{m_j^2 - m^2}{2E} - \frac{m\Gamma_j T}{2E},$$

où m est la masse dégénérée et $E \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. L'ordre de grandeur de J est alors donné par

$$\mathcal{O}(J) \sim \frac{1}{m} \varphi(m^2, \mathbf{p}) e^{-\Gamma_2 T/2} \left| e^{-i\Delta m T - \Delta \Gamma T/2} - 1 \right|, \quad (5.6)$$

où $\Delta m \equiv m_1 - m_2$, $\Delta \Gamma \equiv \Gamma_1 - \Gamma_2$ et l'on a approximé $E \cong m$.

Les contributions J_1 et J_2 des seuils de $\varphi(p)$ peuvent se calculer séparément sur les deux termes de la somme (5.5) et ce calcul n'apporte rien de nouveau par rapport au chapitre précédent : ces corrections ne dominent l'exponentielle que pour des temps très grands, quand l'amplitude totale est devenue indétectable.

Examinons la contribution de J_b . On a vu que J_b dépend de la différence entre le propagateur complet et son prolongement analytique (équation (4.15)) :

$$J_b = -i e^{-i\sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2} T} \int_0^\infty d\omega \varphi(z(\omega), \mathbf{p}) \left(G_{0\bar{0}, II}(z) - G_{0\bar{0}}(z) \right) e^{-\omega T}.$$

L'expression $G_{II}(z) - G(z)$ peut être calculée dans la deuxième représentation spectrale (équation (2.6)) :

$$G_{0\bar{0}, II}(z) - G_{0\bar{0}}(z) = -i \left(\Pi_{0\bar{0}, II}(z) - \Pi_{0\bar{0}}(z) \right) G_{0\bar{0}}(z) G_{0\bar{0}, II}(z),$$

où $\Pi_{0\bar{0}}(z)$ est l'élément $0\bar{0}$ de la matrice d'énergie propre. Lors de l'évaluation asymptotique de J_b (T grand), seul le domaine proche de $\omega = 0$ (c'est-à-dire $z = b^2$) va contribuer notablement, en raison de l'exponentielle décroissante. Il suffit donc de connaître l'expression de l'intégrand près du seuil. Juste en dessous de l'axe réel ($z = x - i\epsilon$), la représentation spectrale de l'énergie propre (équation (2.7)) implique que

$$\begin{aligned} \Pi_{0\bar{0}, II}(z) - \Pi_{0\bar{0}}(z) &= \Pi_{0\bar{0}}(x + i\epsilon) - \Pi_{0\bar{0}}(x - i\epsilon) \\ &= 2i \mathcal{Im} \Pi_{0\bar{0}}(x + i\epsilon). \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\mathcal{Im} \Pi_{0\bar{0}}(x + i\epsilon)$. Comme la renormalisation de la masse ne concerne que la partie réelle de l'énergie propre, on a l'égalité

$$\mathcal{Im} \Pi_{0\bar{0}}(x + i\epsilon) = \mathcal{Im} f_{0\bar{0}}(x + i\epsilon).$$

Lors de la diagonalisation du propagateur du $K^0 \overline{K}^0$ à la section 3.3, la relation entre l'élément non diagonal de l'énergie propre évalué au pôle et les quantités mesurées

expérimentalement a été donnée dans l'équation (3.11) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}m f_{0\bar{0}}(x + i\epsilon) &\equiv -\mathcal{I}m a \\
 &= \frac{1}{2} (m_L \Gamma_L - m_S \Gamma_S) \\
 &\cong \frac{1}{2} m (\Gamma_L - \Gamma_S) \\
 &\cong -\frac{1}{2} m \Delta\Gamma,
 \end{aligned}$$

puisque suivant les notations de l'équation (3.11), $b = 0$, $\hat{\epsilon} = 0$, $K_1 = K_S$ et $K_2 = K_L$ en l'absence de violation CP (ce b -ci n'est pas la valeur du seuil mais un des paramètres du propagateur). Comme les canaux de désintégration principaux des K^0 et $\bar{K}^0$ sont identiques (désintégrations en deux pions), on modélise $\mathcal{I}m f_{0\bar{0}}(x + i\epsilon)$ par la même dépendance fonctionnelle que celle trouvée pour $\mathcal{I}m f_{00}(x + i\epsilon)$ (équation (2.21)), de sorte que la valeur au pôle soit celle indiquée ci-dessus et que la valeur au seuil soit nulle :

$$\mathcal{I}m f_{0\bar{0}}(x + i\epsilon) \equiv -\frac{1}{2} m \Delta\Gamma \sqrt{\frac{x - b^2}{m^2 - b^2}}.$$

Dès lors, on peut écrire près du seuil

$$G_{0\bar{0}, II}(z) - G_{0\bar{0}}(z) \cong -m \Delta\Gamma \sqrt{\frac{z - b^2}{m^2 - b^2}} G_{0\bar{0}}(z) G_{0\bar{0}, II}(z).$$

Substituons $y = \omega T$ dans l'équation de J_b et effectuons le développement en $1/T$ de l'intégrand, en utilisant la paramétrisation de z en fonction de ω donnée par l'équation (4.16) :

$$\begin{aligned}
 z &= -\omega^2 + b^2 - 2i\omega \sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2} \\
 &= b^2 - 2i\frac{y}{T} \sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right).
 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 J_b &\cong i T^{-3/2} e^{-i\sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2}T} \varphi(b^2, \mathbf{p}) m \Delta\Gamma \frac{(-2i)^{1/2} (b^2 + \mathbf{p}^2)^{1/4}}{\sqrt{m^2 - b^2}} \\
 &\quad \times G_{0\bar{0}}(b^2) G_{0\bar{0}, II}(b^2) \int_0^\infty dy \sqrt{y} e^{-y} \\
 &\cong -i(-i\pi/2)^{1/2} T^{-3/2} \frac{m^{3/2} \Delta\Gamma}{(m^2 - b^2)^{5/2}} \varphi(b^2, \mathbf{p}) e^{-i\sqrt{b^2 + \mathbf{p}^2}T},
 \end{aligned}$$

où l'on a approximé dans la deuxième ligne $b^2 + \mathbf{p}^2 \cong m^2$ et l'on a négligé l'énergie propre dans les propagateurs évalués en b^2 car elle est négligeable loin du pôle. On en conclut que l'ordre de grandeur de J_b est donné par

$$\mathcal{O}(J_b) \sim (QT)^{-3/2} \frac{\Delta\Gamma}{Q} \frac{1}{m} \varphi(b^2, \mathbf{p}), \quad (5.7)$$

où b est l'énergie du seuil et $Q \equiv m - b$ est l'énergie cinétique des produits de désintégration.

On peut maintenant comparer les ordres de grandeur de J (équation (5.6)) et de J_b (équation (5.7)).

Pour T petit

$\mathcal{O}(J_b) \sim \mathcal{O}(J)$ si

$$(QT)^{-3/2} \frac{\Delta\Gamma}{Q} \sim \left| \sin \frac{\Delta m T}{2} \right| \sim \frac{|\Delta m| T}{2},$$

ou encore si $T \sim Q^{-1}$, puisque l'expérience dans le cas du $K^0 \overline{K}^0$ [69] et la théorie dans le cas du $B^0 \overline{B}^0$ [70] donnent $\mathcal{O}(\Delta\Gamma) \leq \mathcal{O}(\Delta m)$. Comme Q varie de 220 MeV pour les kaons à 1 GeV pour les mésons B , les corrections non exponentielles ne dominent à petit temps que pour $T \leq 10^{-24}$ s. La propagation spatio-temporelle est inobservable à des temps aussi petits. Le calcul asymptotique de J_b n'est plus valable non plus en deçà de cette borne puisque l'intégrale J_b a été développée en $1/QT$. Les corrections non exponentielles dues aux seuils de production sont donc inobservables à petit temps dans la propagation spatio-temporelle des particules quasi-stables.

Pour T grand

Il faut traiter séparément les cas des kaons et des mésons B .

1. Kaons : $\Gamma_S \gg \Gamma_L$

$\mathcal{O}(J) \sim \mathcal{O}(J_b)$ si

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma_L T/2} &\sim (QT)^{-3/2} \frac{\Gamma_S}{Q} \\ &\sim (\Gamma_L T)^{-3/2} \frac{\Gamma_S \Gamma_L^{3/2}}{Q^{5/2}}, \end{aligned}$$

ou encore si

$$\Gamma_L T - 3 \ln(\Gamma_L T) \sim 2 \ln \left(\frac{Q^{5/2}}{\Gamma_S \Gamma_L^{3/2}} \right) \sim 174,$$

c'est-à-dire si $\Gamma_L T \sim 190$, ce qui est inobservable.

2. Mésons B : $\Gamma_L \approx \Gamma_H$

$\mathcal{O}(J) \sim \mathcal{O}(J_b)$ si

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma_H T/2} &\sim (QT)^{-3/2} \frac{\Delta\Gamma}{Q} \\ &\sim (\Gamma_H T)^{-3/2} \frac{\Delta\Gamma \Gamma_H^{3/2}}{Q^{5/2}}, \end{aligned}$$

où l'on a approximé le sinus de l'oscillation par sa valeur moyenne. Cette condition se réécrit

$$\begin{aligned} \Gamma_H T - 3 \ln(\Gamma_H T) &\sim 2 \ln \left(\frac{Q^{5/2}}{\Delta\Gamma \Gamma_H^{3/2}} \right) \\ &\sim 5 \ln \left(\frac{Q}{\Gamma_H} \right) - 2 \ln \alpha_q, \end{aligned}$$

où $\alpha_q \equiv \Delta\Gamma/\Gamma_H$ est estimé à $\alpha_d \cong 4 \times 10^{-3}$ pour le B_d^0 et à $\alpha_s \cong 10^{-1}$ pour le B_s^0 [70]. On calcule que

$$\begin{aligned} B_d^0 : \quad T - 3 \ln(\Gamma_H T) &\sim 153 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_H T \cong 168, \\ B_s^0 : \quad T - 3 \ln(\Gamma_H T) &\sim 147 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_H T \cong 162. \end{aligned}$$

Ces temps sont beaucoup trop grands pour que l'on puisse espérer une correction non exponentielle mesurable : la probabilité de détection aura décré à une valeur indétectable.

Nos estimations des corrections non exponentielles en théorie des champs sont identiques aux formules théoriques obtenues par Chiu et Sudarshan [71] (formule (4.50) de cet article ; leurs évaluations numériques sont par contre assez fantaisistes) et par Wang et Sanda [72] (formule (59) de cet article, mais leur formule (61) d'ordre de grandeur des corrections est incompréhensible et incorrecte du point de vue des unités). Ces auteurs calculent ces corrections dans le cadre de la mécanique quantique et proposent des extensions du formalisme de Wigner-Weisskopf.

En conclusion, les corrections non exponentielles ne sont pas plus visibles dans la propagation macroscopique d'un mélange de particules que dans la propagation d'une seule particule. Les seules contributions importantes pour la propagation macroscopique viennent des pôles des propagateurs. Par conséquent, la formule de l'amplitude partielle $\mathcal{A}_j$ (5.4) peut servir de base rigoureuse pour l'analyse spatiale de l'amplitude.

5.4 Analyse spatiale de l'amplitude de mélange

L'intégration sur $\mathbf{p}$ de l'amplitude partielle (5.4) demande une certaine prudence. En effet, nous sommes intéressés par les termes d'interférence $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j^*$ ($i \neq j$) qui apparaissent dans la probabilité car ces termes contiennent les oscillations dépendant de l'espace-temps et de la différence de masse $\Delta m_{ij} = |m_i - m_j|$. Il s'agit d'évaluer ces termes d'oscillation à une précision supérieure à $\Delta m_{ij}/P$. Rappelons que P est la position du maximum de $\psi(m_j^2, \mathbf{p})$. Cependant, les oscillations ne sont observables sur des distances macroscopiques que si $\Delta m_{ij}/P$ est extrêmement petit. Par exemple, $\Delta m_{ij}/P \approx \mathcal{O}(10^{-14})$ pour les kaons neutres, $\Delta m_{ij}/P \approx \mathcal{O}(10^{-8})$ pour les neutrinos dans l'expérience LSND et des valeurs encore plus petites apparaissent dans les oscillations des neutrinos atmosphériques et solaires.

L'évaluation directe de $\mathcal{A}_j$ par une approximation autour du point-selle ne fournira en principe pas la précision voulue dans les termes d'oscillation pour deux raisons :

1. Si les positions des maxima de $\psi(m_i^2, \mathbf{p})$ et $\psi(m_j^2, \mathbf{p})$ sont notées respectivement $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$, la différence $|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j|$ sera de l'ordre de grandeur de Δm_{ij} . Or la largeur du pic de la fonction ψ est beaucoup plus grande que Δm_{ij} . Peu importe que l'on utilise $\mathbf{P}_i$ ou $\mathbf{P}_j$ comme point-selle : la méthode d'intégration n'atteint pas une précision supérieure à $\Delta m_{ij}/P$.
2. Pour les particules instables, le terme en Γ modifie la position du maximum de $\Delta P \cong \varepsilon P$, où ε ne peut être inférieur à 10^{-8} (voir section 4.4), ce qui est beaucoup plus grand que $\Delta m_{ij}/P \approx \mathcal{O}(10^{-14})$ pour les kaons neutres.

Malgré ces obstacles, ce n'est pas la fin des haricots. Nous allons voir que les termes d'oscillation sont indépendants au premier ordre en Δm_{ij} de la position des points-selle $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$, de sorte que l'approximation autour du point-selle peut quand même être utilisée.

En suivant les mêmes étapes que pour la particule isolée (voir équation (4.11)), on intègre par approximation autour du point-selle et l'on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j &\cong \pi^{3/2} \psi(m_j^2, \mathbf{P}_j) \exp(-m_j \Gamma_j T / 2E_j) (\det(W_j + iR_j T))^{-1/2} \\ &\times \exp(-iE_j T + i\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{L}) \exp\left(-\frac{1}{4} (\mathbf{L} - \mathbf{v}_j T) (W_j + iR_j T)^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{v}_j T)\right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

où

$$E_j = \sqrt{m_j^2 + \mathbf{P}_j^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{P}_j}{E_j}.$$

La probabilité intégrée sur le temps se calcule à partir de la norme au carré de l'amplitude totale (5.1) et s'écrit

$$\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, \mathbf{L}) \sim \sum_{i,j} V_{i\alpha} V_{\beta i}^{-1} V_{j\alpha}^* V_{\beta j}^{-1*} \int dT \mathcal{A}_i(T, \mathbf{L}) \mathcal{A}_j^*(T, \mathbf{L}).$$

En raison des gaussiennes d'argument $(\mathbf{L} - \mathbf{v}_{i,j}T)^2$, la probabilité est très faible si les deux conditions suivantes ne sont pas satisfaites :

$$\mathbf{L} - \mathbf{v}_i T \cong 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{L} - \mathbf{v}_j T \cong 0.$$

Il est possible de satisfaire ces deux conditions à l'ordre $\epsilon = \Delta m_{ij}/|\mathbf{P}_j|$ puisque les positions des maxima $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$ sont identiques à ϵ près. On a aussi

$$\mathbf{v}_i \cong \mathbf{v}_j + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{et} \quad E_i \cong E_j + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Soit $\mathbf{P}$ la position du maximum de $\psi(m^2, \mathbf{p})$, pour une masse de référence m qui est égale à m_j à ϵ près. Appelons z la direction de $\mathbf{P}$. Pour les kaons, on peut, par exemple, prendre $m = (m_i + m_j)/2$ et $m = 0$ pour les neutrinos. La valeur exacte de m n'a pas d'importance. Nous allons étudier la probabilité dans cette direction z , c'est-à-dire que $\mathbf{L}$ sera approximativement parallèle aux $\mathbf{v}_{i,j}$.

On paramétrise la déviation des $\mathbf{P}_{i,j}$ par rapport à $\mathbf{P}$ par

$$\mathbf{P}_j \equiv P \left((1 + \epsilon_j^z) \hat{\mathbf{e}}_z + \epsilon_j^x \hat{\mathbf{e}}_x + \epsilon_j^y \hat{\mathbf{e}}_y \right)$$

où $\epsilon_j^{x,y,z} \cong \mathcal{O}(\epsilon)$. Les diverses quantités apparaissant dans l'amplitude peuvent être évaluées avec cette paramétrisation et s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{L} &= (1 + \epsilon_j^z) PL + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ E_j &= \sqrt{m_j^2 + \mathbf{P}_j^2} = E + \frac{\Delta m_j^2}{2E} + \epsilon_j^z v P + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \mathbf{v}_j &= v \left((1 + \delta_j^z) \hat{\mathbf{e}}_z + \epsilon_j^x \hat{\mathbf{e}}_x + \epsilon_j^y \hat{\mathbf{e}}_y \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta m_j^2 &\equiv m_j^2 - m^2 \\ E &\equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{P}^2} \\ \delta_j^z &\equiv -\frac{\Delta m_j^2}{2E^2} + (1 - v^2) \epsilon_j^z \end{aligned}$$

On va maintenant évaluer l'intégrale sur T dans la probabilité. La dépendance en T de la dispersion est négligée en remplaçant T par L/v dans les termes en RT .

Pour être tout à fait explicite, nous donnons d'abord l'expression de la probabilité intégrée sur T pour une direction quelconque $\mathbf{L}$, sans utiliser la paramétrisation définie ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, \mathbf{L}) &\sim \sum_{i,j} V_{i\alpha} V_{\beta i}^{-1} V_{j\alpha}^* V_{\beta j}^{-1*} \\
&\times \pi^3 \psi(m_i^2, \mathbf{P}_i) \psi^*(m_j^2, \mathbf{P}_j) \left(\det X_i + \det X_j^* \right)^{-1/2} 2\sqrt{\frac{\pi}{Y}} \\
&\times \exp \left(-\frac{\Gamma_{ij}}{Y} \left(\mathbf{v}_i X_i \mathbf{L} + \mathbf{v}_j X_j^* \mathbf{L} \right) \right) \\
&\times \exp \left(i(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \cdot \mathbf{L} - i \frac{E_i - E_j}{Y} \left(\mathbf{v}_i X_i \mathbf{L} + \mathbf{v}_j X_j^* \mathbf{L} \right) \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{1}{4} \mathbf{L} (X_i + X_j^*) \mathbf{L} + \frac{1}{4Y} \left(\mathbf{v}_i X_i \mathbf{L} + \mathbf{v}_j X_j^* \mathbf{L} \right)^2 \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{1}{Y} (E_i - E_j)^2 + 2i(E_i - E_j) \frac{\Gamma}{Y} \right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

où

$$X_j \equiv (W_j + iR_j |\mathbf{L}|/|\mathbf{v}_j|)^{-1} \tag{5.10}$$

$$Y \equiv \mathbf{v}_i X_i \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j X_j^* \mathbf{v}_j \tag{5.11}$$

$$\Gamma_{ij} \equiv \frac{m_i \Gamma_i}{2E_i} + \frac{m_j \Gamma_j}{2E_j} \tag{5.12}$$

Les termes en Γ^2 sont bien entendu négligés.

Nous donnons ensuite la probabilité dans la direction $\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{e}}_z$ où la probabilité est maximale, en utilisant la paramétrisation définie plus haut des déviations par rapport à cette direction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, L \hat{\mathbf{e}}_z) &\sim \sum_{i,j} V_{i\alpha} V_{\beta i}^{-1} V_{j\alpha}^* V_{\beta j}^{-1*} \\
&\times \pi^3 \psi(m_i^2, \mathbf{P}_i) \psi^*(m_j^2, \mathbf{P}_j) \left(\det X_i + \det X_j^* \right)^{-1/2} 2\frac{\sqrt{\pi}}{v} \left(X_i^{zz} + X_j^{zz*} \right)^{-1/2} \\
&\times \exp \left(-\frac{\Gamma_{ij} L}{v} \right) \exp \left(i L \left(p_i^z - p_j^z - \frac{E_i - E_j}{v} \right) \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{L^2}{4} \frac{X_i^{zz} X_j^{zz*} (v_i^z - v_j^z)^2}{X_i^{zz} (v_i^z)^2 + X_j^{zz*} (v_j^z)^2} \right) \exp \left(\frac{-(E_i - E_j)^2 + 2i\Gamma (E_i - E_j)}{(X_i^{zz} + X_j^{zz*}) v^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

On a effectué un développement en l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ dans les facteurs dépendant de la distance, en ne gardant que les termes en ϵL ou $\epsilon^2 L^2$ qui peuvent être non négligeables à grande distance.

5.5 Analyse de la probabilité

Dans cette section les différents facteurs apparaissant dans la probabilité d'interférence (5.13) sont analysés successivement. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, L \hat{\mathbf{e}}_z) &\sim \sum_{i,j} V_{i\alpha} V_{\beta i}^{-1} V_{j\alpha}^* V_{\beta j}^{-1*} \\ &\times \pi^3 \psi(m_i^2, \mathbf{P}_i) \psi^*(m_j^2, \mathbf{P}_j) \left(\det X_i + \det X_j^* \right)^{-1/2} 2 \frac{\sqrt{\pi}}{v} \left(X_i^{zz} + X_j^{zz*} \right)^{-1/2} \\ &\times \exp A \exp B \exp C \exp D \end{aligned} \quad (5.14)$$

Les exponentielles e^A , e^B , e^C et e^D correspondent dans l'ordre aux exponentielles de l'équation (5.13).

5.5.1 Désintégration

Si $\Gamma_i \neq 0$ et/ou $\Gamma_j \neq 0$, alors $\Gamma_{ij} \neq 0$ (équation (5.12)). Dans ce cas, la première exponentielle e^A exprime la décroissance de la probabilité de détection de la particule en raison de sa désintégration possible. Notre résultat est relativiste et s'écrit en fonction de $\Gamma_{i,j}$ comme

$$\exp A = \exp \left(- \left(\frac{m_i \Gamma_i}{2E_i} + \frac{m_j \Gamma_j}{2E_j} \right) \frac{L}{v} \right) \quad (5.15)$$

Comme il s'exprime directement en fonction de la distance, il n'y a pas d'ambiguïté de passage du temps à la distance. On peut le comparer au traitement non relativiste en mécanique quantique qui donnait $\exp(-(\Gamma_i + \Gamma_j)T/2)$ dans le repère au repos de la particule. L'extension relativiste de cette dernière formule ainsi que sa transformation en une expression dépendant de la distance peut se faire suivant plusieurs prescriptions aboutissant à des résultats différents.

5.5.2 Oscillation

La deuxième exponentielle e^B de l'équation (5.14) fait osciller la probabilité de détection de la particule en fonction de la distance. Au premier ordre en ϵ , l'argument de l'exponentielle vaut

$$\begin{aligned} B = iL \left(p_i^z - p_j^z - \frac{E_i - E_j}{v} \right) &\cong iL \left(P(\epsilon_i^z - \epsilon_j^z) - \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2Ev} + P(\epsilon_i^z - \epsilon_j^z) \right) \right) \\ &\cong -i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2P} \\ &\equiv -2i\pi \frac{L}{L_{ij}^{osc}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

où $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ et l'on a défini la *longueur d'oscillation* L_{ij}^{osc} pour le mélange ij par²

$$\boxed{L_{ij}^{osc} \equiv \frac{4\pi P}{\Delta m_{ij}^2}} \quad (5.17)$$

On voit que le facteur d'oscillation ne dépend pas au premier ordre en ϵ du choix de $\mathbf{P}_i$ ou $\mathbf{P}_j$ comme point-selle pour évaluer l'intégrale ! La raison en est que les états propres de masse sont sur leur couche de masse (comme on l'a vu à la section 4.3 lors de l'analyse temporelle de l'amplitude, équation (4.7)) puisqu'à grande distance seul le pôle contribue à la propagation. L'exponentielle e^B se réécrit donc comme

$$\boxed{\exp B = \exp \left(-2i\pi \frac{L}{L_{ij}^{osc}} \right)} \quad (5.18)$$

5.5.3 Décohérence

La troisième exponentielle e^C de l'équation (5.14) montre que l'interférence disparaît à grande distance. Ce phénomène est appelé *décohérence* [74, 53].

Calcul de la longueur de cohérence

Montrons d'abord comment apparaît cette troisième exponentielle. Partons de la formule de l'amplitude dans une direction quelconque (équation (5.9)) et con-

²Si Δm_{ij}^2 est négatif, on change le signe de la définition de L_{ij}^{osc} .

sidérons sa troisième exponentielle. Si l'on y introduit la paramétrisation autour de la direction d'amplitude maximale, l'argument de cette exponentielle devient

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{1}{4} \mathbf{L} (X_i + X_j^*) \mathbf{L} + \frac{1}{4Y} (\mathbf{v}_i X_i \mathbf{L} + \mathbf{v}_j X_j^* \mathbf{L})^2 \\
&= -\frac{L^2}{4} \frac{X_i^{zz} X_j^{zz*} (v_i^z - v_j^z)^2}{X_i^{zz} (v_i^z)^2 + X_j^{zz*} (v_j^z)^2} \\
&\quad - \frac{L^2}{4} \frac{\left((v_i^x)^2 X_i^{xx} + (v_i^y)^2 X_i^{yy} + (v_j^x)^2 X_j^{xx*} + (v_j^y)^2 X_j^{yy*} \right) (X_i^{zz} + X_j^{zz*})}{X_i^{zz} (v_i^z)^2 + X_j^{zz*} (v_j^z)^2} \\
&\quad - \frac{L^2}{2} \frac{(v_i^z - v_j^z) \left((v_i^x X_i^{xz} + v_i^y X_i^{yz}) X_j^{zz*} - (v_j^x X_j^{xz*} + v_j^y X_j^{yz*}) X_i^{zz} \right)}{X_i^{zz} (v_i^z)^2 + X_j^{zz*} (v_j^z)^2},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

où l'on a conservé les termes en ϵ d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon L)$ et $\mathcal{O}(\epsilon^2 L^2)$ car ils peuvent être non négligeables à grande distance.

Comme cas de figure, posons

$$\psi(m_j^2, \mathbf{P}_j) \sim \exp \left(-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{P}_j)^2}{4\sigma_p^2} \right).$$

Si l'on va rechercher les définitions de W_j , équation (4.9), et de R_j , équation (4.10), on voit que W_j est lié à l'incertitude sur la localisation des interactions tandis que R_j représente la dispersion en énergie :

$$\begin{aligned}
W_j^{ab} &= \frac{\delta^{ab}}{4\sigma_p^2} \equiv \delta^{ab} \sigma_x^2 \\
R_j^{ab} &= \frac{\delta^{ab}}{2E_j} - \frac{P_j^a P_j^b}{2E_j^3} \delta^{az} \delta^{bz} + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant la définition (5.10) de X_j :

$$\begin{aligned}
X_j^{xx} &\cong X_j^{yy} \cong \left(\sigma_x^2 + \frac{iL}{2E_j v} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
X_j^{zz} &\cong \left(\sigma_x^2 + \frac{iL m_j^2}{2E_j^3 v} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

En examinant les différents termes de l'argument de l'exponentielle (équation (5.19)), on remarque que le premier terme (c'est-à-dire la première ligne) de la somme

domine les deux autres, puisqu'on a toujours la relation $L/2Ev \gg \sigma_x^2$ si la distance L est macroscopique. L'argument (5.19) de l'exponentielle e^C se réécrit donc

$$C \cong -\frac{L^2}{4} \frac{(v_i^z - v_j^z)^2}{X_j^{zz*-1}(v_i^z)^2 + X_i^{zz-1}(v_j^z)^2}$$

Examinons séparément le numérateur et le dénominateur de cette fraction.

D'une part,

$$v_i^z - v_j^z = v \left(-\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E^2} + (1 - v^2)(\epsilon_i^z - \epsilon_j^z) \right) \equiv v\kappa \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E^2}$$

où κ est un nombre d'ordre $\mathcal{O}(1)$.

D'autre part,

$$X_j^{zz*-1}(v_i^z)^2 + X_i^{zz-1}(v_j^z)^2 = 2v^2\sigma_x^2 \left(1 + \frac{i\tilde{\eta}L\Delta m_{ij}^2}{2v\sigma_x^2 E^3} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

où $\tilde{\eta}$ est un nombre d'ordre $\mathcal{O}(1)$. L'argument de l'exponentielle e^C vaut alors

$$C \cong -\frac{L^2}{4} \frac{(v_i^z - v_j^z)^2}{X_j^{zz*-1}(v_i^z)^2 + X_i^{zz-1}(v_j^z)^2} \cong -\left(\frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^2 \left(1 + i\eta \frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^{-1}$$

où la *longueur de cohérence* L_{ij}^{coh} pour le mélange ij est définie par³

$$L_{ij}^{coh} \equiv \frac{4\sqrt{2}}{\kappa} \frac{E^2}{\Delta m_{ij}^2} \sigma_x \quad (5.20)$$

et où

$$\eta \equiv \frac{2\sqrt{2}\tilde{\eta}}{\kappa Ev\sigma_x}. \quad (5.21)$$

L'exponentielle e^C se réécrit

$$\exp C = \exp \left(-\left(\frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^2 \left(1 + i\eta \frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^{-1} \right) \quad (5.22)$$

³Comme pour la longueur d'oscillation, on change le signe de la définition de L_{ij}^{coh} si Δm_{ij}^2 est négatif.

Interprétation de la longueur de décohérence

Comment interpréter cette longueur de cohérence ? Montrons d'abord qu'elle est beaucoup plus grande que la longueur d'oscillation :

$$\frac{L_{ij}^{coh}}{L_{ij}^{osc}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa v}} \frac{E}{\sigma_p}.$$

Même dans le pire des cas, qui est celui d'une particule relativiste pour laquelle $\sqrt{2\pi\kappa v} \approx \mathcal{O}(1)$, la longueur d'oscillation reste beaucoup plus petite que la longueur de cohérence :

$$\frac{L_{ij}^{coh}}{L_{ij}^{osc}} \approx \frac{E}{\sigma_p} \gg 1.$$

L'interférence commence à disparaître après un nombre d'oscillations ($L_{ij}^{coh}/L_{ij}^{osc}$) égal à E/σ_p . On peut donner une justification intuitive de ce phénomène par l'image suivante [75]. L'état intermédiaire est représenté par la superposition de deux paquets d'ondes correspondant à deux états propres de masse. Si leur vitesse est relativiste, la dispersion dans la direction du mouvement est négligeable à cause de la contraction de Lorentz. En raison de leurs masses différentes, leurs vitesses de groupe diffèrent de

$$\Delta v \equiv v_i^z - v_j^z = v\kappa \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E^2}.$$

Après un temps T et une distance $L \approx vT$, les paquets d'ondes se sont déplacés l'un par rapport à l'autre de

$$\Delta L = \Delta v T \approx \kappa \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E^2} L.$$

Dans cette image, les oscillations sont les battements des deux paquets d'ondes lors de leur déplacement relatif de $\Delta L = \lambda$, où $\lambda = 2\pi/E$ est la longueur d'onde associée à l'état oscillant. La longueur d'oscillation s'obtient en imposant que le déplacement relatif des paquets d'ondes soit d'une longueur d'onde :

$$\Delta L = \lambda \Rightarrow L_{ij}^{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{ij}^2} \quad (\kappa = 1),$$

Pour des états relativistes, $E \cong P$ et l'on retrouve la longueur d'oscillation dérivée ci-dessus.

Si la taille du paquet est donnée par σ_x , le nombre maximal d'oscillations est le nombre de longueurs d'onde dans le paquet, $N_{max} = \sigma_x/\lambda = E/4\pi\sigma_p$. Si le nombre

d'oscillations est supérieur à N_{max} , les paquets ne se recouvrent plus et les oscillations disparaissent. La longueur de cohérence est donc donnée par

$$L_{ij}^{coh} = N_{max} L_{ij}^{osc} = \frac{E}{4\pi\sigma_p} L_{ij}^{osc}.$$

On retrouve la formule de la longueur de cohérence dérivée plus haut à une constante près.

Par contre, pour des vitesses non relativistes, la dispersion dans la direction du mouvement est importante et la décohérence est beaucoup plus lente.

Revenons à notre facteur de décohérence dérivé en théorie des champs et examinons les différentes situations possibles :

1. Pour les particules instables, la décohérence n'a souvent pas de signification car les particules se désintègrent sur une distance beaucoup plus courte. Par exemple, pour le système $K_S^0 - K_L^0$,

$$\frac{L^{coh}}{L^{des}} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa v} \frac{\Gamma}{m} \frac{E}{\sigma_p} \frac{E}{m_L - m_S} \cong 10^4,$$

où l'on a défini $L^{des} = v/\Gamma$.

2. Pour les particules stables relativistes, $v \gg \sigma_p/E$ donc $\eta \ll 1$ et la décohérence est en $\exp\left(-(L/L^{coh})^2\right)$.
3. Pour les particules non relativistes telles que $v \ll \sigma_p/E$, le coefficient $\eta \sim 1/v$ est très grand et il n'y a pas de décohérence. Le facteur de décohérence devient une oscillation spatiale de période beaucoup plus grande que la longueur d'oscillation. Nous avons expliqué dans l'image des paquets d'ondes que cette absence de décohérence est due à la dispersion des paquets d'ondes.

L'approche de la théorie des champs ne permet, cependant, que de fixer une borne inférieure pour la longueur de cohérence. En effet, elle dépend de la position des maxima $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$. Par exemple, on peut avoir $\kappa = 0$ donc $L^{coh} = \infty$ si $|\mathbf{P}_i| m_j = |\mathbf{P}_j| m_i$! D'autres longueurs de cohérence existent mais elles sont supérieures à celle examinée ici [61, 75, 62].

Notons que la décohérence fait disparaître l'oscillation à une certaine distance en supprimant le terme d'interférence, mais qu'elle ne supprime pas les transitions

d'un état de saveur vers un autre. La probabilité de détection est modifiée par une constante au delà de la longueur de cohérence et cette modification est observable. Par exemple, pour un mélange à deux saveurs, d'angle de mélange θ (la matrice de mélange V est ici tout simplement la matrice de rotation d'angle θ), la probabilité de survie de l'état α devient

$$\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \alpha, L) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta.$$

Exemples de décohérence

Donnons quatre exemples où la décohérence pourrait en principe jouer un rôle. Le facteur crucial est le rapport entre la longueur de décohérence et la longueur d'oscillation, $F \equiv L^{coh}/L^{osc}$, approximativement égal à E/σ_p pour des particules relativistes.

1. Dans l'expérience LSND [26], l'énergie des neutrinos tourne autour de 30 MeV, tandis que l'incertitude σ_p pourrait être estimée à 5 MeV [62]. Le facteur F vaut dans ce cas seulement quelques longueurs d'oscillation et pourrait donc jouer un rôle dans les expériences futures.
2. Pour la détection des neutrinos solaires, l'énergie des neutrinos tourne autour de 1 MeV et l'incertitude σ_p peut être estimée à 0.002 MeV [75]. Le facteur F vaut ici 500. On ne peut bien sûr faire varier à sa guise la distance Terre-Soleil donc l'oscillation n'est observable que sur la variation saisonnière de 3% de la distance [21]. Le modèle d'oscillations dans le vide fournit une longueur d'oscillation de 3×10^7 km donc la décohérence n'affecte pas les oscillations observables dans ce modèle. Par contre, dans le modèle MSW [27] la différence de masse entre les neutrinos est telle que la longueur d'oscillation dans le vide tourne autour de 250 km. Le nombre d'oscillations sur la distance Terre-Soleil est de 60 000, bien supérieur au facteur F . Cette décohérence n'est néanmoins pas vérifiable, car l'ignorance du lieu de production exact et la moyenne sur l'énergie du neutrino impliquent une moyenne de la probabilité sur un grand nombre de longueur d'oscillations. L'interférence est éliminée non seulement à cause de la décohérence mais aussi en raison de cette moyenne. Seule la décroissance de la probabilité est visible. Bien que cela ne constitue pas un

test de la présence de la décohérence, l'observation ou non d'une variation de la probabilité de détection correspondant à la variation annuelle de la distance Terre-Soleil éliminerait soit le modèle MSW soit le modèle des oscillations dans le vide. Notons cependant que la moyenne sur les énergies des neutrinos peut aussi rendre invisible l'influence de la variation de la distance Terre-Soleil dans le cas du modèle d'oscillations dans le vide [76, 77, 78, 75].

3. Si l'on néglige les contraintes des modèles cosmologiques sur la masse des neutrinos, la masse du neutrino tau n'est bornée que par 18.2 MeV [69]. Si la masse du troisième état propre de masse est de l'ordre de plusieurs MeV, tandis que celles des deux autres états sont de l'ordre de l'eV, les longueurs de cohérence L_{3j}^{coh} pour les mélanges du troisième état peuvent être inférieures à la longueur d'oscillation L_{12}^{osc} des deux autres états dans les expériences où l'énergie des neutrinos est de quelques MeV. Un tel mélange de neutrinos relativistes et non relativistes a été étudié par Ahluwalia et Goldman [79], qui identifient le troisième neutrino avec la particule de 33.9 MeV proposée pour expliquer une anomalie dans l'expérience KARMEN.
4. Pour terminer, l'émission de neutrinos par des supernovae offre une possibilité d'étudier soit des différences de masse encore plus faibles ($\Delta m^2 \sim 10^{-20} \text{ eV}^2$), soit d'observer l'effet de la décohérence par l'observation de vagues de neutrinos correspondant aux différents états propres de masse [80].

5.5.4 Localisation des interactions

La quatrième exponentielle e^D de la formule de la probabilité (5.14) exprime une condition sur σ_x ou une longueur de cohérence suivant les cas. En effet,

$$E_i - E_j \cong \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} + vP(\epsilon_i^z - \epsilon_j^z) \equiv \tilde{\kappa} \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E},$$

où $\tilde{\kappa}$ est un nombre d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Supposons que nous ayons affaire à des particules telles que le coefficient η défini dans le calcul de la longueur de cohérence (équation (5.21)) est beaucoup plus petit que 1, c'est-à-dire que $v \gg \sigma_p/E$. On peut montrer

dans ce cas que l'argument de la quatrième exponentielle devient⁴

$$D = -\frac{(E_i - E_j)^2}{(X_i^{zz} + X_j^{zz*})v^2} \cong -2\pi^2 \tilde{\kappa}^2 \left(\frac{1}{L_{ij}^{osc}} \right)^2 \left(\sigma_x^2 + \left(\frac{Lm^2}{2E^3 v \sigma_x} \right)^2 \right).$$

Il est malheureusement difficile de dire quel terme de la somme domine sans connaître l'ordre de grandeur des masses.

Si le terme en L est négligeable, on obtient

$$D \cong -2\pi^2 \tilde{\kappa}^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{ij}^{osc}} \right)^2. \quad (5.23)$$

Pour que l'amplitude soit non nulle, il faut donc que $\sigma_x \ll L_{ij}^{osc}$, c'est-à-dire que l'incertitude sur la localisation de la source et du détecteur doit être inférieure à la longueur d'oscillation pour que cette dernière soit observable.

Si le terme en L domine, on obtient

$$D \cong -\left(\frac{\tilde{\kappa} m^2}{\kappa P^2} \right)^2 \left(\frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^2. \quad (5.24)$$

Il s'agit d'un nouveau terme de décohérence qui peut accélérer la décohérence vue à la section précédente si les particules sont non relativistes (tout en respectant la condition $\eta \ll 1$).

Pour des particules non relativistes telles que $\eta \gg 1$, une analyse similaire peut être menée mais n'est pas concluante en raison du grand nombre de paramètres inconnus.

Le facteur D dépend aussi du choix des points-selle $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$. Par exemple, si $E_i = E_j$, l'exponentielle vaut 1. En tout état de cause, la contrainte $\sigma_x \ll L_{ij}^{osc}$ n'est jamais perdue car la condition $\Delta m_{ij}^2/E \ll \sigma_p$ est nécessaire lors de l'intégration de l'amplitude sur p^0 , sinon le pôle correspondant à une des particules i, j se trouverait hors du contour d'intégration. On peut donc toujours effectuer la substitution

$$\exp D \rightarrow \exp \left(-2\pi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{ij}^{osc}} \right)^2 \right)$$

(5.25)

⁴Le terme en Γ est omis car il ne donne pas d'information intéressante.

tout en gardant en mémoire les contributions possibles de e^D à la décohérence.

Cette condition résout aussi la question de savoir si une mesure suffisamment précise de l'énergie et de l'impulsion des états oscillants pourrait déterminer quel état propre de masse se propage. Une mesure à la précision de Δm_{ij}^2 viole la condition ci-dessus et l'oscillation ne sera plus observable.

Elle montre aussi pourquoi on ne pourrait observer l'oscillation de leptons chargés, mis à part le fait que leurs interactions électromagnétiques les rendent plus facilement identifiables et pourraient supprimer l'interférence. La différence entre leurs masses est trop importante et viole la condition ci-dessus. De plus, la longueur d'oscillation est si petite qu'elle serait de toute façon inobservable. Par exemple, la longueur d'oscillation du système muon-électron est d'environ 10^{-14} m pour une impulsion typique de 100 MeV.

Finalement, notons que si le neutrino mu ou tau est trop lourd, il ne pourra pas osciller avec les neutrinos légers [61]. Soit une source de neutrinos constituée par un noyau radioactif dans un réseau. L'incertitude sur la position du noyau est d'environ 10^{-10} m. L'oscillation de neutrinos sera donc inobservable si Δm_{ij}^2 est supérieur à $4 \times 10^9 \text{ eV}^2 (E_\nu/1\text{MeV})$. Si le neutrino le plus léger a une masse négligeable, la masse du neutrino le plus lourd ne peut dépasser $60 \text{ keV} \sqrt{E_\nu/1\text{MeV}}$.

5.5.5 Oscillations sophistiquées et oscillations simplifiées

Sous quelles conditions retrouve-t-on la formule d'oscillation (1.7) habituellement utilisée dans la littérature ? Par hypothèse, $\epsilon = \Delta m_{ij}/P$ est un paramètre très petit. On peut donc développer tous les facteurs précédant les exponentielles en ϵ et ne garder que les termes d'ordre zéro. Ces termes sont indépendants des masses m_i, m_j et peuvent donc sortir de la somme sur i, j . Si l'on insère dans la formule (5.14) de la probabilité les expressions des exponentielles e^A, e^B, e^C et e^D (équations (5.15), (5.18), (5.22) et (5.25)), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, L \hat{\mathbf{e}}_z) &\sim \sum_{i,j} V_{i\alpha} V_{\beta i}^{-1} V_{j\alpha}^* V_{\beta j}^{-1*} \exp \left(-\Gamma_{ij} \frac{L}{v} - 2i\pi \frac{L}{L_{ij}^{osc}} \right) \\ &\times \exp \left(-\left(\frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^2 \left(1 + i\eta \frac{L}{L_{ij}^{coh}} \right)^{-1} \right) \exp \left(-2\pi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{ij}^{osc}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Les définitions pour le mélange ij de la largeur Γ_{ij} , de la longueur d'oscillation L_{ij}^{osc} , et de la longueur de cohérence L_{ij}^{coh} sont données respectivement par les équations (5.12), (5.17) et (5.20).

Il s'ensuit que si les conditions d'observabilité des oscillations sont satisfaites⁵, c'est-à-dire $L \ll L^{coh}$ et $\Delta m_{ij} \ll \sigma_p$, seuls les facteurs de désintégration et d'oscillation ont une contribution fortement dépendante en i, j . La probabilité d'oscillation s'écrit alors

$$\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, L \hat{\mathbf{e}}_z) = \sum_{i,j} V_{i\alpha} V_{\beta i}^{-1} V_{j\alpha}^* V_{\beta j}^{-1*} \exp \left(-\Gamma_{ij} \frac{L}{v} - 2i\pi \frac{L}{L_{ij}^{osc}} \right) \quad (5.27)$$

Le signe d'égalité provient de la condition de conservation de la probabilité dans le cas d'une évolution unitaire, où $\Gamma_{ij} = 0$ et $V^{-1} = V^\dagger$:

$$\sum_{\beta} \mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, L \hat{\mathbf{e}}_z) = 1,$$

ce qui est bien le résultat attendu : la somme des probabilités de transition d'une particule stable dans les autres particules du mélange doit être égale à l'unité.

La longueur d'oscillation que nous avons dérivée (équation (5.17)) correspond donc à celle de la formule dérivée dans le traitement de mécanique quantique (équation (1.10)), mais il n'y a plus de tour de passe-passe ! Les réponses fournies par notre formule aux objections soulevées contre la dérivation traditionnelle sont passées en revue dans la conclusion.

5.6 Oscillations de fermions

Quelles sont les modifications à apporter pour les oscillations de fermions ? Les paquets d'ondes représentant les fermions contiendront des spineurs. Le propagateur de la particule intermédiaire est le propagateur fermionique. Le propagateur libre

⁵Si les particules sont instables, il faut évidemment aussi que $L_{ij}^{osc} \leq v/\Gamma_{ij}$, c'est-à-dire que les particules aient le temps d'osciller avant de se désintégrer. Cette condition est incluse dans l'équation (5.27)

d'un état propre de masse de type Dirac ou Majorana (si la transition ne viole pas le nombre leptonique total) s'écrit

$$G_F(x' - x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x' - x)}$$

et décrit la propagation d'un fermion de masse m de x en x' , ainsi que d'un anti-fermion de même masse de x' en x . Comme pour les particules scalaires, soit la particule, soit l'antiparticule a une contribution négligeable à l'amplitude de propagation lorsque la source et le détecteur sont séparés par une distance macroscopique.

Si l'on s'intéresse à des fermions stables dont le lagrangien est connu, par exemple des neutrinos, la matrice de masse peut être diagonalisée [41, 20] par une transformation unitaire sur les champs. Dans le cas de termes de masse de Dirac, qui mélangent les champs de chiralité gauche et droite, la transformation unitaire est différente pour les champs gauches et droits ($M_{diag} = U_L^\dagger M U_R$) mais seule la matrice de mélange U_L des champs gauches apparaît dans les amplitudes de transition. En effet, dans le modèle standard, les courants droits n'interagissent qu'en tant que courants neutres et le terme les contenant est invariant sous une transformation unitaire, contrairement au terme contenant les courants chargés. Si le lagrangien inclut des termes de masse de Majorana, on peut considérer les termes de masse de Dirac comme une superposition de termes de masse de Majorana et les regrouper avec les termes de masse de Majorana déjà présents. La matrice de masse correspondante est toujours symétrique et peut donc être diagonalisée par une transformation unitaire U en une matrice à entrées réelles positives ($M_{diag} = U^t M U$). La matrice de mélange U relie aussi bien les champs de saveur (appartenant à des doublets sous $SU(2)_L$) que les champs stériles (singulets sous $SU(2)_L$) aux champs de masse. Comme les champs stériles ne subissent pas d'interaction faible, seule la partie de la matrice U reliant les champs de saveur aux champs de masse interviendra dans les termes d'interaction. Cette sous-matrice de la matrice U apparaîtra aussi dans les courants neutres car elle n'est pas nécessairement unitaire [81].

Les amplitudes de propagation pour des neutrinos de Majorana ou de Dirac ne diffèrent que par des termes en m_ν/E [82] qui ne sont pas détectables dans les oscillations, pas plus d'ailleurs que les phases supplémentaires violant CP dans la matrice de mélange des neutrinos de Majorana, en raison d'une invariance bien

connue de la probabilité d'oscillation sous une reparamétrisation de la matrice de mélange [83].

Si l'on s'intéresse à des fermions instables, il faut d'abord calculer l'énergie propre puis obtenir le propagateur complet par sommation sur les diagrammes d'énergie propre, en passant par l'équation de Dyson (comme pour le propagateur matriciel d'un mélange de particules) :

$$G(p^2) = \frac{iZ}{\not{p} - m - f(\not{p}) + i\epsilon}$$

Le propagateur complet pour un mélange de particules se diagonalise similairement à celui des particules scalaires à l'aide de matrices V et V^{-1} . Si le mélange entre les particules est faible, les parties réelles des pôles du propagateur seront approximativement égales aux masses avant le calcul de l'énergie propre et seront positives.

L'évaluation de l'amplitude de propagation ne diffère pas notablement de celle d'un mélange de particules scalaires. Les termes contenant des matrices γ^μ , sandwichés entre les spineurs des états entrants et sortants, sont incorporés dans la fonction de recouvrement des paquets d'ondes.

Contrairement à ce que l'on dit souvent [53, 84], il n'est pas nécessaire de prendre la limite relativiste pour retrouver la formule d'oscillation classique. Il suffit que les différences entre les masses des états intermédiaires soient beaucoup plus petites que leurs impulsions. De plus, il n'est pas nécessaire non plus que l'interaction soit chirale, sauf si l'on tient à factoriser explicitement le processus [84] en une amplitude de production fois une amplitude de propagation fois une amplitude de détection (dans ce cas, il faut aussi prendre la limite relativiste).

5.7 Conclusion

L'étude des oscillations de particules en théorie quantique des champs a déjà été entreprise dans plusieurs articles, dans les cas spécifiques des kaons [32, 66, 48] et des neutrinos [53, 64, 63, 85, 86, 84, 87]. Ces articles diffèrent entre eux par les modèles idéalisés qu'ils proposent et par les approximations utilisées pour le calcul. Aucun modèle parfaitement fidèle et aucun calcul parfaitement exact ne sont possibles,

malgré les affirmations que l'on lit parfois ici et là. Certains auteurs prennent trop au sérieux les modèles simplifiés et les méthodes de calcul qu'ils ont choisis de sorte que leurs conclusions sont à prendre avec un grain de sel.

Notre analyse est la première à traiter de façon unifiée les cas stable/instable et relativiste/non relativiste. Cette approche conduit à une série de conclusions, parfois nouvelles, que nous énumérons ci-dessous.

1. Les corrections non exponentielles à l'amplitude de propagation ne sont pas plus apparentes pour des particules mélangées que pour des particules isolées. La démonstration n'en avait pas encore été faite, à ma connaissance, dans le cadre de la théorie des champs, bien que des études à ce sujet existent en mécanique quantique [71, 72].
2. Une deuxième conclusion, déjà connue par ailleurs [53, 61], est que le traitement du processus de propagation dans sa totalité permet de calculer directement une probabilité dépendant de la distance et non du temps de propagation. L'application de la formule aux expériences est ainsi possible sans passage ambigu du temps à l'espace par une formule de physique classique extérieure au formalisme. Cette ambiguïté a conduit à certaines conclusions fausses dans la littérature [37, 50, 51] concernant les oscillations de particules. Nous y reviendrons dans le prochain chapitre, lors de l'étude du processus $\phi(1020) \rightarrow K^0 \overline{K}^0$.
3. Un troisième résultat qui a d'abord été établi par des arguments intuitifs en mécanique quantique [74, 52, 61, 75], puis en théorie des champs [53] concerne les conditions d'observabilité des oscillations. D'une part, la longueur d'oscillation doit être supérieure à l'incertitude sur les positions de la source et du détecteur. D'autre part, les oscillations des particules stables ne peuvent être détectées au delà d'une certaine distance appelée longueur de cohérence. Une nouveauté de notre analyse est la prise en compte de la dispersion, qui supprime la décohérence pour des particules stables non relativistes. Malheureusement, les oscillations étudiées pour l'instant (kaons, B, neutrinos) ne relèvent pas de cette catégorie.
4. Notre étude a éclairci la question de l'égalité ou non des énergies et/ou impulsions des états oscillants. Cette question est en fait mal posée, car il y a

plusieurs façons d'identifier a posteriori les énergies-impulsions de ces états. Il serait tentant dans notre approche de les faire correspondre à $E_j = \sqrt{m_j^2 + \mathbf{P}_j^2}$ et $\mathbf{P}_j$, où $\mathbf{P}_j$ est la position du maximum de la fonction-poids lors de l'évaluation de l'intégrale (5.4). Ces énergies-impulsions sont égales ou différentes selon les valeurs de $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$. Notons que $E_i - E_j \sim P_i - P_j \sim \mathcal{O}(\Delta m_{ij})$. Cette différence étant très petite, il est délicat d'imposer une valeur bien précise à E_i , E_j , $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$ par des évaluations approximatives d'intégrales.

D'ailleurs, l'identification que nous venons de proposer n'est pas univoque. Modifions un peu la procédure de calcul en prenant la norme au carré de l'amplitude avant d'intégrer sur la tri-impulsion. On peut alors choisir d'effectuer d'abord la moyenne sur le temps T avant d'intégrer sur les tri-impulsions $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$. On obtiendra en très bonne approximation l'égalité

$$\sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}^2} \cong \sqrt{m_j^2 + \mathbf{p}'^2}.$$

La précision à laquelle est satisfaite l'égalité dépend de l'intervalle d'intégration de T mais cette précision est meilleure que Δm_{ij} pour des temps macroscopiques. Cette égalité imposera que l'intégration sur $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ devra se faire avec la contrainte $E_i = E_j$. De cette façon, on sera conduit à la conclusion que les énergies des états oscillants sont égales. Ce raisonnement s'applique à d'autres calculs que le nôtre, par exemple [53].

Il se fait qu'il n'est pas nécessaire de répondre à cette question d'égalité ou non des énergies-impulsions pour calculer sans ambiguïté le facteur d'oscillation, puisque celui-ci est indépendant au premier ordre en $\epsilon = \Delta m_{ij}/P_j$ des valeurs de E_i , E_j , $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_j$:

$$iL \left(p_i^z - p_j^z - \frac{E_i - E_j}{v} \right) = -2i\pi \frac{L}{L_{ij}^{osc}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Cette compensation entre énergie et impulsion se fait parce que les états propres de masse intermédiaires sont sur leur couche de masse (dans le sens de l'équation (4.7)). Ils ne peuvent en effet franchir une distance macroscopique que s'ils sont quasi-réels.

5. Pour le cas de particules intermédiaires stables (concrètement des neutrinos), des études assez complètes ont déjà été réalisées [53, 64]. Notre traitement

montre de plus que

- la limite relativiste n'est pas nécessaire, seule la condition $\Delta m_{ij}/P \ll 1$ compte.
- il faut tenir compte de la dispersion pour étudier la longueur de cohérence.
- l'égalité ou non des énergies et/ou impulsions associées aux particules intermédiaires est un artefact de calcul (voir point précédent).

6. Notre approche a abouti à un seul type de comportement asymptotique en L de l'amplitude, contrairement à l'article [87], qui dérive un régime intermédiaire pour l'amplitude, sous la condition $\sigma_x^2 P \gg L$ (qui est probablement impossible à satisfaire pour des distances macroscopiques). Dans ce régime, toute la dépendance angulaire de l'amplitude est contenue dans le facteur oscillant $\exp(i\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{L})$ avec la conséquence illogique que l'amplitude a le même ordre de grandeur dans toutes les directions, quelles que soient les impulsions entrantes. En comparaison, notre amplitude (équation (5.8)) contient, en plus du facteur oscillant, une gaussienne avec une dépendance angulaire en $\exp(-(\mathbf{L} - \mathbf{v}_j T)^2/4\sigma_x^2)$. Cette gaussienne rend notre amplitude négligeable dans toute direction différant notablement du vecteur $\mathbf{v}_j$ relié directement aux impulsions entrantes. L'absence de ce terme dans l'amplitude figurant dans [87] n'est pas étonnante car la méthode d'intégration utilisée dans cet article recourt à une méthode incorrecte d'intégration sur des angles complexes.
7. Pour le cas des particules instables, les analyses existantes sont incomplètes, ne tenant pas compte soit de la possibilité $P_i \neq P_j$ [32], soit de $E_i \neq E_j$ [66]. (les auteurs de ce dernier article se restreignent à une dimension spatiale et calculent d'ailleurs des intégrales de contour non convergentes). Ces articles n'étudient pas non plus les conditions d'observabilité des oscillations. Dans le cadre du traitement unifié stable/instable, nous avons discuté de la longueur de cohérence associée aux particules instables, tout en constatant qu'elle est en général bien supérieure à la distance typique de désintégration.
8. Quelques lacunes restent à combler. L'effet du temps de vie fini d'une source de neutrinos au repos a été considéré dans [61, 62], mais seulement en mécanique quantique. Une étude des oscillations de neutrinos résultant de la désintégration

tion d'un pion en mouvement a été tentée en théorie des champs [63] mais n'est pas convaincante. Bien qu'il soit aisé en théorie des champs d'écrire l'amplitude d'un processus complexe (par exemple en cascade), l'évaluation des intégrales constitue souvent une barrière infranchissable. Par exemple, la description d'une oscillation résultant d'une source instable au repos ou en mouvement implique une intégration sur deux propagateurs (celui de la source et celui de la particule oscillante) dont il est difficile de tirer des informations sans effectuer des simplifications abusives.

Il serait dommage de ne pas appliquer la formule d'oscillation que nous avons dérivée à quelques cas représentatifs. Cette formule devra être adaptée à chaque cas. Pour ce faire, quelques prescriptions de calcul seraient bienvenues pour éviter d'encombrantes manipulations de la formule de la probabilité. C'est le sujet du prochain chapitre.

Chapitre 6

Applications

6.1 Prescription de calcul et matrice de masse effective

La théorie des champs nous a donné les moyens de dériver la probabilité de détection d'une particule en mélange se propageant sur une distance macroscopique. Cette formule d'oscillation n'est cependant pas très commode à utiliser, même si l'on suppose que les conditions d'observabilité sont satisfaites. Par exemple, l'application de cette formule aux oscillations simultanées du K^0 et du $\overline{K}^0$ produits par la désintégration du méson $\phi(1020)$ nécessite un retour à l'amplitude pour y inclure le propagateur de la seconde particule oscillante. Sous certaines conditions à définir, les calculs ultérieurs ne sont pas compliqués mais la formule résultante pour la probabilité est extrêmement peu pratique à manipuler.

Le phénomène d'oscillation est pourtant déjà identifiable dans l'amplitude. La somme dans l'amplitude d'exponentielles oscillant selon des énergies-impulsions légèrement différentes est à l'origine des interférences oscillant selon les petites différences d'énergies-impulsions. Pourquoi devrions-nous calculer la probabilité ? Le problème gît en la dépendance de l'amplitude en le temps de propagation, dépendance qui ne disparaît qu'après intégration de la probabilité sur le temps. Il serait pratique de travailler sur une amplitude dépendant uniquement de la longueur L (mesurée dans la direction où la probabilité est maximale), comme celle dérivée

dans le modèle simplifié, à la section 3.4. Vérifions donc si les approximations appliquées à la formule de la probabilité ne sont pas transférables à la formule de l'amplitude.

Tout d'abord, si l'on suppose que les conditions d'observabilité de l'oscillation (décohérence et localisation des interactions) sont vérifiées, seuls les facteurs d'oscillation et de désintégration restent à l'intérieur de la somme sur les états propres dans l'amplitude, comme on l'a écrit dans l'équation (5.27).

Ensuite, la comparaison de la formule de l'amplitude partielle $\mathcal{A}_j$ de propagation d'un état j (équation (5.8)), avec la formule de la probabilité intégrée sur le temps, $\mathcal{P}(\alpha \rightarrow \beta, L\hat{\mathbf{e}}_z)$ (équation (5.13)), montre qu'en ce qui concerne les facteurs de désintégration et d'oscillation, l'intégration sur le temps revient à remplacer T par L/v dans l'amplitude $\mathcal{A}_j$. La substitution $T \rightarrow L/v$ change l'expression de l'amplitude partielle en

$$\mathcal{A}_j \sim \exp \left(-i \left(E_j - vP_j - i \frac{m_j \Gamma_j}{2E_j} \right) \frac{L}{v} \right),$$

où $E_j = \sqrt{m_j^2 + \mathbf{P}_j^2}$ et $\mathbf{P}_j$ est la valeur pour laquelle la fonction-poids $\varphi(m_j^2, \mathbf{p})$ est maximale. En développant comme au chapitre précédent E_j et $\mathbf{P}_j$ en $\Delta m_j^2 = m_j^2 - m^2$, où m est une masse de référence, on obtient

$$E_j - vP_j \cong E - vP + \frac{\Delta m_j^2}{2E} \cong \frac{m^2}{E} + \frac{\Delta m_j^2}{2E} \cong \frac{m^2 + m_j^2}{2E}.$$

On peut, de plus, approximer $m_j \Gamma_j / E_j$ par $m \Gamma_j / E$ car la relation $\Delta m / m \ll \Delta \Gamma / \Gamma$ est toujours vérifiée, puisque $\Gamma / m \ll \Delta \Gamma / \Delta m$.

Par conséquent, on peut établir la prescription suivante : *si les conditions d'observabilité des oscillations (décohérence et localisation des interactions) sont vérifiées, l'amplitude de propagation, dans la direction z où elle est maximale, prend la forme*

$$\mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, L\hat{\mathbf{e}}_z) \sim \sum_j V_{\beta j}^{-1} \exp \left(-i \left(\frac{m^2 + m_j^2}{2E} - i \frac{m \Gamma_j}{2E} \right) \frac{L}{v} \right) V_{j\alpha}$$

(6.1)

On retrouve facilement la longueur d'oscillation dans la différence de deux facteurs

oscillants :

$$\left(\frac{m^2 + m_i^2}{2E} - \frac{m^2 + m_j^2}{2E} \right) \frac{L}{v} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2P} = 2\pi \frac{L}{L_{ij}^{osc}}$$

Si l'on définit M comme une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont

$$M_{jj} = (m^2 + m_j^2)/2E - im\Gamma_j/2E,$$

on peut réécrire l'amplitude sous les formes matricielles équivalentes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, L\hat{e}_z) &\sim \left(V^{-1} \exp \{ -iM L/v \} V \right)_{\beta\alpha} \\ &\sim \left(\exp \{ -iV^{-1} M V L/v \} \right)_{\beta\alpha} \\ &\sim \left(\exp \{ -iM_{saveur} L/v \} \right)_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (6.2)$$

où l'on a défini la matrice $M_{saveur} \equiv V^{-1} M V$.

Comme $m^2 + m_j^2 \cong 2mm_j$, les éléments de M deviennent, pour des particules non relativistes,

$$M_{jj} \cong m_j - i\Gamma_j/2.$$

Ces éléments sont identiques à ceux trouvés lors de la diagonalisation de la matrice de masse effective dérivée par la méthode non relativiste de Wigner-Weisskopf [13]. Dans la limite non relativiste, la matrice M_{saveur} est la matrice de masse effective. Notre calcul prescrit que l'extension relativiste de cette formule se fait en remplaçant le temps T par le temps propre commun aux deux particules $\tau = mT/E$. Dans les sections suivantes, nous appliquerons la prescription de calcul (6.1) ou (6.2) aux expériences CPLEAR et DAΦNE qui ont été décrites pour la première fois en théorie des champs, mais de façon différente, dans [48].

6.2 L'expérience CPLEAR

Dans l'expérience CPLEAR [93, 94, 95, 96, 68], une particule K^0 ou $\bar{K}^0$ est produite au point x_P par l'annihilation par interaction forte de $p\bar{p}$, et se désintègre au point x_D par interaction faible. Les mécanismes de production du K^0 ou $\bar{K}^0$ sont $p\bar{p} \rightarrow K^0 K^- \pi^+$, $\bar{K}^0 K^+ \pi^-$. Le rapport de branchement total est de 0.4% et 10^6 antiprotons par seconde sont dirigés vers la cible d'hydrogène. Comme les interactions

fortes conservent l'étrangeté, les amplitudes suivantes sont nulles :

$$\mathcal{M}(p\bar{p} \rightarrow K^0 K^+ \pi^-) = \mathcal{M}(p\bar{p} \rightarrow \bar{K}^0 K^- \pi^+) = 0.$$

L'étrangeté des kaons neutres produits peut donc être connue en identifiant le kaon chargé associé. Après leur production, le K^0 ou $\bar{K}^0$ oscille entre ses deux composantes K_L et K_S avant de se désintégrer. Nous voudrions décrire l'évolution spatiale de l'amplitude de désintégration et ses phénomènes d'interférence. Notons que malgré que les kaons chargés et les pions contenus dans l'état final aient des temps de vie comparables au K_L , ils seront traités comme des états asymptotiques. L'invariance CPT donne aussi

$$\mathcal{M}(p\bar{p} \rightarrow K^0 K^- \pi^+) = \mathcal{M}^*(p\bar{p} \rightarrow \bar{K}^0 K^+ \pi^-) \equiv \mathcal{C}.$$

L'impulsion moyenne des kaons neutres est de 550 MeV, de sorte que la distance moyenne parcourue par un K_S pendant une vie moyenne est de 3 cm. Le détecteur permet d'étudier les désintégrations pendant 20 vies moyennes du K_S . Environ 3% des K_L se désintègrent dans cette région.

6.2.1 Désintégrations semi-leptoniques

Considérons d'abord des états finaux contenant un pion et des leptons. Il y a en principe quatre désintégrations semi-leptoniques pour les kaons :

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow e^+ \pi^- \nu, \\ \bar{K}^0 &\rightarrow e^- \pi^+ \bar{\nu}, \\ K^0 &\rightarrow e^- \pi^+ \bar{\nu}, \\ \bar{K}^0 &\rightarrow e^+ \pi^- \nu. \end{aligned}$$

Les deux premières sont caractérisées par $\Delta S = \Delta Q$ et sont permises dans le modèle standard tandis que les deux dernières sont caractérisées par $\Delta S = -\Delta Q$ et sont négligeables dans ce modèle car elles n'apparaissent qu'au second ordre dans l'interaction faible. Notons cependant que cette règle n'est testée expérimentalement qu'à 10^{-3} près [93]. La désintégration des kaons neutres n'étant pas immédiate,

les oscillations introduisent une composante de $\overline{K^0}$ dans le K^0 et vice versa et les désintégrations interdites se produisent. En comptant les électrons produits par les K^0 et les positrons produits par les $\overline{K^0}$ (*wrong-sign leptons*), on peut calculer l'asymétrie $A_T(L)$ définie par

$$A_T(L) \equiv \frac{|\mathcal{M}(\overline{K^0}(x=0) \rightarrow e^+\pi^-\nu(x=L))|^2 - |\mathcal{M}(K^0(x=0) \rightarrow e^-\pi^+\bar{\nu}(x=L))|^2}{|\mathcal{M}(\overline{K^0}(x=0) \rightarrow e^+\pi^-\nu(x=L))|^2 + |\mathcal{M}(K^0(x=0) \rightarrow e^-\pi^+\bar{\nu}(x=L))|^2}. \quad (6.3)$$

Les processus dont on calcule l'asymétrie sont reliés par la transformation CP. Par conséquent, une asymétrie A_T non nulle signifie une violation CP. Cette asymétrie est souvent interprétée [94, 34] comme paramétrisant la violation du renversement du temps T, ce qui revient au même dans notre formalisme où CPT est conservé. En effet, les violations de CP et de T ne peuvent être différenciées que si la violation de CPT est aussi possible. En mécanique quantique, on se permet de paramétriser simultanément les violations de CP, T et CPT. Procéder de même dans notre modèle mettrait en jeu sa cohérence, puisqu'il est basé sur la théorie des champs dont le théorème CPT est un pilier.

Enfin, notons que l'invariance CPT impose que

$$\mathcal{M}(K^0(x=L) \rightarrow e^+\pi^-\nu(x=L)) = \mathcal{M}^*(\overline{K^0}(x=L) \rightarrow e^-\pi^+\bar{\nu}(x=L)) \equiv \mathcal{D}.$$

Calculons d'abord l'amplitude $\mathcal{T}_{0\bar{0}}(L)$ du processus complet de la production d'un K^0 se désintégrant après propagation (et oscillation) sur une distance L en $e^-\pi^+\bar{\nu}$. La saveur α à la source est K^0 ($S = +1$). La saveur β du kaon juste avant sa désintégration est identifiée par le signe du lepton chargé produit ; dans ce cas-ci, on veut $\beta = \overline{K^0}$ ($S = -1$). Notre prescription de calcul (6.2) donne, dans la direction où l'amplitude est maximale,

$$\mathcal{T}_{0\bar{0}}(L) \sim (0 \quad \mathcal{D}^*) V^{-1} \exp\left\{-iM\frac{L}{v}\right\} V \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne à l'extrême droite sélectionne la saveur $\alpha = K^0$, tandis que le vecteur ligne à l'extrême gauche sélectionne la saveur $\beta = \overline{K^0}$. La matrice de masse effective M est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} mm_S/E - im\Gamma_S/2E & 0 \\ 0 & mm_L/E - im\Gamma_L/2E \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

où $m = (m_s + m_L)/2$ et E est l'énergie du système $e^- \pi^+ \bar{\nu}$ résultant de la désintégration du K^0 . Les matrices V et V^{-1} ont été calculées au chapitre 3 (équations (3.10)) et sont données par

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\hat{\epsilon}^2)}} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ V^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\hat{\epsilon}^2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.5)$$

L'amplitude devient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{0\bar{0}}(L) &\sim \frac{\mathcal{C} \mathcal{D}^*}{2(1-\hat{\epsilon}^2)} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \exp\left\{-iM\frac{L}{v}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Après injection de la matrice M , l'amplitude devient

$$\mathcal{T}_{0\bar{0}}(L) \sim \frac{\mathcal{C} \mathcal{D}^*}{2} \frac{1-\hat{\epsilon}}{1+\hat{\epsilon}} \left[\exp\left(\left(-im_s - \frac{\Gamma_s}{2}\right) \frac{m}{P} L\right) - \exp\left(\left(-im_L - \frac{\Gamma_L}{2}\right) \frac{m}{P} L\right) \right], \quad (6.6)$$

où P est l'impulsion totale du système $e^- \pi^+ \bar{\nu}$ résultant de la désintégration du K^0 .

Calculons maintenant l'amplitude $\mathcal{T}_{00}(L)$ du processus complet de la production d'un $\bar{K}^0$ se désintégrant après propagation (et oscillation) sur une distance L en $e^+ \pi^- \nu$. La saveur α à la source est $\bar{K}^0$ ($S = -1$). La saveur β du kaon juste avant sa désintégration est identifiée par le signe du lepton chargé produit ; dans ce cas-ci on veut $\beta = K^0$ ($S = +1$). Un calcul analogue donne

$$\mathcal{T}_{00}(L) \sim \frac{\mathcal{C}^* \mathcal{D}}{2} \frac{1+\hat{\epsilon}}{1-\hat{\epsilon}} \left[\exp\left(\left(-im_s - \frac{\Gamma_s}{2}\right) \frac{m}{P} L\right) - \exp\left(\left(-im_L - \frac{\Gamma_L}{2}\right) \frac{m}{P} L\right) \right]. \quad (6.7)$$

On peut enfin calculer l'asymétrie $A_T(L)$. L'insertion des expressions de $\mathcal{T}_{0\bar{0}}(L)$ (équation (6.6)) et $\mathcal{T}_{00}(L)$ (équation (6.7)) dans la définition de A_T (équation (6.3)), donne une asymétrie indépendante de la distance :

$$A_T = \frac{1 - |\sigma|^4}{1 + |\sigma|^4}. \quad (6.8)$$

où

$$\sigma \equiv \frac{1 - \hat{\epsilon}}{1 + \hat{\epsilon}}, \quad (6.9)$$

Il y a violation CP si le paramètre σ n'est pas une phase pure : $|\sigma| \neq 1$. La condition correspondante pour $\hat{\epsilon}$ s'obtient à l'aide de la relation

$$\mathcal{R}e \hat{\epsilon} = \frac{1 - |\sigma|^2}{1 + 2\mathcal{R}e\sigma + |\sigma|^2}.$$

L'asymétrie A_T est non nulle si le paramètre $\hat{\epsilon}$ n'est pas purement imaginaire : $\mathcal{R}e \hat{\epsilon} \neq 0$. On parle de violation CP *indirecte* pour souligner le fait qu'elle est uniquement due au mélange et qu'elle n'apparaît pas dans les amplitudes de production et de désintégration $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. L'expérience CPLEAR donne $A_T = (6.6 \pm 1.6) \times 10^{-3}$ [94].

6.2.2 Désintégrations pioniques

Considérons maintenant des états finaux qui sont des états propres sous CP, en particulier des états constitués de deux pions chargés. Ces états sont pairs sous CP. Calculons d'abord l'amplitude associée au processus complet de la production d'un K^0 se désintégrant ensuite en $\pi^+\pi^-$. La saveur α à la source est K^0 ($S = +1$). La saveur β à la détection n'est pas identifiée. On détecte des états finaux $\pi^+\pi^-$ qui peuvent être produits aussi bien par la désintégration de la saveur $\beta = K^0$ ($S = +1$) que de la saveur $\beta = \bar{K}^0$ ($S = -1$). On doit donc sommer sur la saveur finale β . En utilisant notre prescription de calcul (6.2), l'amplitude totale dépendant de la distance, dans la direction où elle est maximale, s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{+-}(L) &= \sum_{\beta} \mathcal{A}(\alpha \rightarrow \beta, L\hat{\mathbf{e}}_z) \\ &\sim \left(\mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) \quad \mathcal{M}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) \right) V^{-1} \exp \left\{ -iM \frac{L}{v} \right\} V \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'indice $+-$ de $\mathcal{T}_{+-}$ symbolise la charge des pions résultant de la désintégration du K^0 . Le vecteur colonne à l'extrême droite sélectionne la saveur $\alpha = K^0$. Les matrices V et V^{-1} figurent à la section précédente (équations 6.5), ainsi que la matrice M (équation (6.4)), où E représente maintenant l'énergie des deux pions de la désintégration du K^0 . Le lien entre la base des vecteurs propres de l'opérateur CP

et la base de saveur a été donné chapitre 3 (équation (3.8)) et s'écrit

$$\begin{pmatrix} |K_1\rangle \\ |K_2\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ |\overline{K}^0\rangle \end{pmatrix}$$

L'amplitude devient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{+-}(L) &\sim \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{2}(1 - \hat{\epsilon}^2)} \\ &\times \left(\mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-) \quad \mathcal{M}(K_2 \rightarrow \pi^+ \pi^-) \right) \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \exp \left\{ -iM \frac{L}{v} \right\} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elle peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{+-}(L) &\sim \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{2}(1 + \hat{\epsilon})} \mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-) \\ &\times \left[(1 + \chi_{+-} \hat{\epsilon}) \exp \left(\left(-im_s - \frac{\Gamma_s}{2} \right) \frac{m}{P} L \right) + (\hat{\epsilon} + \chi_{+-}) \exp \left(\left(-im_L - \frac{\Gamma_L}{2} \right) \frac{m}{P} L \right) \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

où P est la norme de l'impulsion totale des pions finaux et le paramètre

$$\chi_{+-} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_2 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$$

décrit la violation CP dans les désintégrations, puisque $CP(K_1) = CP(2\pi) = +1$ et $CP(K_2) = -1$. On parle de violation CP *directe*.

Considérons maintenant le processus analogue de production d'un $\overline{K}^0$ se désintégrant ensuite en $\pi^+ \pi^-$. En suivant la même méthode que dans le cas de la production d'un K^0 , on obtient l'expression suivante pour l'évolution spatiale du $\overline{K}^0$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{T}}_{+-}(L) &\sim \frac{\mathcal{C}^*}{\sqrt{2}(1 - \hat{\epsilon})} \mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-) \\ &\times \left[(1 + \chi_{+-} \hat{\epsilon}) \exp \left(\left(-im_s - \frac{\Gamma_s}{2} \right) \frac{m}{P} L \right) - (\hat{\epsilon} + \chi_{+-}) \exp \left(\left(-im_L - \frac{\Gamma_L}{2} \right) \frac{m}{P} L \right) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Notons que si nous étions intéressés par le mode de désintégration des kaons neutres en $\pi^0 \pi^0$, il suffirait de remplacer, dans les équations ci-dessus, $\mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ par $\mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^0 \pi^0)$ et χ_{+-} par χ_{00} , ce dernier paramètre étant défini par

$$\chi_{00} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_2 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\mathcal{M}(K_1 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}.$$

A partir des expressions de $\mathcal{T}_{+-}(L)$ et de $\overline{\mathcal{T}}_{+-}(L)$, on extrait les rapports mesurables entre l'amplitudes de désintégration du K_L violant CP et l'amplitude de désintégration du K_S conservant CP :

$$\eta_{+-} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = \frac{\hat{\epsilon} + \chi_{+-}}{1 + \chi_{+-}\hat{\epsilon}}, \quad (6.12)$$

ainsi que

$$\eta_{00} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)} = \frac{\hat{\epsilon} + \chi_{00}}{1 + \chi_{00}\hat{\epsilon}}. \quad (6.13)$$

Les paramètres η_{+-} et η_{00} sont couramment utilisés pour paramétriser la violation CP dans les désintégrations à deux pions du K_L (voir par exemple p. 107 de [69]). Les relations ci-dessus entre les quantités mesurables et les paramètres quantifiant la violation CP directe et indirecte ont été dérivées sans utiliser la symétrie d'isospin. En outre, il est possible de montrer explicitement que les paramètres η_{+-} et η_{00} sont indépendants de la convention de phase étrange choisie pour les kaons neutres, ce qui n'est pas le cas pour les paramètres $\hat{\epsilon}$ et $\chi_{+-,00}$ (voir plus loin).

L'asymétrie préférée des expérimentateurs est définie par

$$A_{+-}(L) \equiv \frac{|\overline{\mathcal{T}}_{+-}(L)|^2 - |\sigma|^{-2} |\mathcal{T}_{+-}(L)|^2}{|\overline{\mathcal{T}}_{+-}(L)|^2 + |\sigma|^{-2} |\mathcal{T}_{+-}(L)|^2},$$

où $\sigma \equiv (1 - \hat{\epsilon})/(1 + \hat{\epsilon})$ est le paramètre déjà rencontré lors de l'analyse des désintégrations semi-leptoniques. A partir des équations pour $\mathcal{T}_{+-}(L)$ et $\overline{\mathcal{T}}_{+-}(L)$, on calcule que

$$A_{+-}(L) = -2 |\eta_{+-}| \frac{e^{(\Gamma_S - \Gamma_L)mL/2P} \cos(m\Delta m L/P - \phi_{+-})}{1 + |\eta_{+-}|^2 e^{(\Gamma_S - \Gamma_L)mL/2P}}, \quad (6.14)$$

où $\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}}$ et $\Delta m \equiv m_L - m_S$.

Cette équation se réduit à l'expression d'évolution temporelle utilisée dans l'analyse de la collaboration CPLEAR [95], si nous choisissons le repère centre de masse des deux pions produits par la désintégration du K^0 ou $\overline{K}^0$ et que nous substituons le temps à l'espace par la relation $L = vT$. Les quantités σ , $|\eta_{+-}|$ et ϕ_{+-} s'obtiennent simultanément par un ajustement de la formule ci-dessus aux données expérimentales de CPLEAR. La quantité Δm provient d'autres mesures [69]. Les quantités $|\eta_{00}|$ et ϕ_{00} sont obtenues de façon analogue [96].

6.2.3 Transposition au système $B^0\overline{B}^0$

Tous ces calculs se transposent sans difficulté aux systèmes $D^0\overline{D}^0$ et $B^0\overline{B}^0$. Réglons tout de suite le compte du premier en notant que le modèle standard [97] prédit que mélange entre D^0 et $\overline{D}^0$ est extrêmement faible en raison du petit nombre de canaux communs de désintégration qui, en outre, sont fortement supprimés par de petits angles de mélange. Les D^0 et $\overline{D}^0$ se désintègreront donc avant d'osciller notablement. Il n'y a même pas lieu de mentionner la violation CP indirecte. La violation CP directe est aussi prédite d'un niveau négligeable.

Passons au $B^0\overline{B}^0$. En premier lieu, en ce qui concerne l'asymétrie semi-leptonique A_T dans ce système, les calculs théoriques [70] montrent qu'elle est proportionnelle à $m_c^2/m_t^2 = \mathcal{O}(10^{-4})$, ce qui est bien au delà de la précision expérimentale actuelle. On s'attend par contre à une violation CP importante dans les désintégrations (violation CP *directe*) [98], ce qui est confirmé par les premiers indices d'une mesure de la violation CP dans ce système [16]. Par conséquent, la violation CP dans les oscillations (violation CP *indirecte*) est en général négligée. C'est la situation inverse du système $K^0\overline{K}^0$.

En second lieu, en ce qui concerne les asymétries non leptoniques, A_{+-} et A_{00} , les formules pour les kaons ne leur sont pas appliquées telles quelles, bien qu'il n'y ait pas d'obstacle à le faire. Comme les états finaux sont de toutes sortes, les paramètres $\eta_{+-,00}$ et $\chi_{+-,00}$ sont notés η_f et χ_f . Lors de l'étude de l'asymétrie A_T , nous avons vu que la violation CP dans les oscillations est estimée théoriquement à $\mathcal{O}(10^{-4})$, tandis que la violation CP dans les désintégrations pourrait être très importante puisque les trois générations de quarks sont directement impliquées dans des processus comme $B_d \rightarrow J/\psi K_S$. Dès lors, la violation CP indirecte est habituellement négligée et l'on pose $|\sigma| = 1$ (voir équation (6.8)). Cette condition est facile à appliquer si l'on définit un paramètre μ_f associé à χ_f par le même type de relation qui existe entre $\hat{\epsilon}$ et σ :

$$\mu_f \equiv \frac{1 - \chi_f}{1 + \chi_f} = \frac{\mathcal{M}(\overline{B}^0 \rightarrow f)}{\mathcal{M}(B^0 \rightarrow f)}. \quad (6.15)$$

Le paramètre η_f devient

$$\eta_f = \frac{1 - \sigma\mu_f}{1 + \sigma\mu_f} \equiv \frac{1 - \xi_f}{1 + \xi_f}. \quad (6.16)$$

Le paramètre ξ_f est très intéressant car il peut s'exprimer en bonne approximation, dans certains cas ($B_d^0 \rightarrow J/\psi K_S$, $B_d^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $B_s^0 \rightarrow D_s^{*+} D_s^{*-}$, $B_s^0 \rightarrow J/\psi \phi$ etc.), uniquement en fonction des éléments de la matrice de mélange des quarks (matrice CKM). Sa mesure permettra de vérifier si le modèle standard suffit à paramétriser complètement la violation CP. Notons néanmoins que les asymétries CP dépendent directement des interactions dans l'état final (qui fournissent les phases conservant CP des amplitudes partielles, voir plus loin), dont les contributions à longue distance sont difficiles à évaluer. La prédiction de ces asymétries varie de façon significative selon le modèle choisi pour estimer ces interactions dans l'état final [99].

Comme pour l'expérience CPLEAR, on s'intéresse à une asymétrie pour des états finaux états propres de CP, définie par [100]

$$A_{CP}(B_d^0 \rightarrow f, L) \equiv \frac{\Gamma(B_d^0(L) \rightarrow f) - \Gamma(\overline{B}_d^0(L) \rightarrow f)}{\Gamma(B_d^0(L) \rightarrow f) + \Gamma(\overline{B}_d^0(L) \rightarrow f)}.$$

Les états propres de propagations ont des largeurs quasiment égales [70] et sont différenciés par leurs masses. Supposons que l'état pair sous CP soit plus léger (noté B_L pour *Light*) que l'état impair sous CP (noté B_H pour *Heavy*), comme dans le cas des kaons et définissons $\Delta m_d \equiv m_H - m_L$. Partant des expressions de $\mathcal{T}_{+-}(L)$ et $\overline{\mathcal{T}}_{+-}(L)$ (équations (6.10) et (6.11)) et y substituant B pour K et l'expression de ξ_f (équation (6.16)), on calcule l'asymétrie A_{CP} avec les approximations $|\sigma| = 1$ et $\Gamma_H = \Gamma_L$:

$$A_{CP}(B_d^0 \rightarrow f, L) = A_{CP}^{direct}(B_d^0 \rightarrow f) \cos(\Delta m_d \frac{mL}{P}) + A_{CP}^{induit}(B_d^0 \rightarrow f) \sin(\Delta m_d \frac{mL}{P}),$$

où la violation CP directe,

$$A_{CP}^{direct}(B_d^0 \rightarrow f) \equiv \frac{1 - |\xi_f|^2}{1 + |\xi_f|^2} = \frac{1 - |\mu_f|^2}{1 + |\mu_f|^2}, \quad (6.17)$$

a été séparée de la violation CP provenant de l'interférence entre le mélange et la désintégration du B :

$$A_{CP}^{induit}(B_d^0 \rightarrow f) \equiv -\frac{2 \Im \xi_f}{1 + |\xi_f|^2} = -\frac{2 \Im(\sigma \mu_f)}{1 + |\mu_f|^2}. \quad (6.18)$$

On voit ici l'importance de tenir compte du mélange pour la violation CP même s'il n'y a pas de violation CP indirecte, puisque A_{CP}^{induit} dépend de l'interférence entre σ et μ_f .

Examinons de plus près le cas de l'état final $f = J/\psi K_S$ dont l'asymétrie vient d'être mesurée. Une étude théorique des différentes contributions au processus (voir par exemple [70]) montre que le facteur $\xi_{J/\psi K_S}$ est en très bonne approximation égal à $\xi_{J/\psi K_S} = e^{-2i\beta}$, où β est un angle du triangle unitaire (pour la définition de ce triangle, voir la référence [69], p. 105). Ces angles sont indépendants des conventions de phase pour les quarks comme il se doit, puisque ξ_f est aussi indépendant de phase. Les asymétries directes (6.17) et induite (6.18) deviennent

$$A_{CP}^{direct}(B_d^0 \rightarrow J/\psi K_S) = 0 \quad \text{et} \quad A_{CP}^{induit}(B_d^0 \rightarrow J/\psi K_S) = -\sin 2\beta.$$

L'expérience [16] donne

$$A_{CP}^{induit}(B_d^0 \rightarrow J/\psi K_S) = -0.79_{-0.44}^{+0.41} (\text{STAT+SYST}),$$

et constitue le premier indice de l'existence d'une violation CP dans le système $B^0\overline{B}^0$, ainsi que la première étape de la vérification de l'unitarité de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

6.3 Production de kaons corrélés à DAΦNE

Cette section est consacrée aux oscillations d'une paire de kaons neutres produits par l'annihilation électron-positron dans le collisionneur DAΦNE à Frascati[88]. Les résultats obtenus dans notre formalisme sont immédiatement applicables à la description de la production de paires de mésons B dans la région de la résonance $\Upsilon(4s)$ [89, 90].

Les kaons neutres et chargés sont produits en quantité ($\sim 10^9$ paires de $K^0\overline{K}^0/\text{an}$) dans des collisions électron-positron à une énergie de centre de masse dans la région de la résonance $\phi(1020)$. Le méson ϕ produit se désintègre au point x en une paire $K^0\overline{K}^0$ avec un rapport de branchement de 34%. Les kaons partent en sens opposés avec une faible impulsion et ne parcourent que 6 mm pendant le temps de vie moyen du K_S . Cette technique permet de mesurer dans un même détecteur les désintégrations des K_S et des K_L ainsi que leurs corrélations : si un K_S est identifié par sa désintégration en deux pions, la particule associée est en principe un K_L .

Chaque kaon oscille entre ses composantes $K_L - K_S$ avant de se désintégrer en états finaux $f_1(k_1)$ et $f_2(k_2)$ aux points y_1 et y_2 :

$$\phi(q) \rightarrow K^0 \overline{K}^0 \rightarrow f_1(k_1) f_2(k_2),$$

où q , k_1 et k_2 sont les énergies-impulsions correspondantes.

Chaque état final pouvant être produit soit par K^0 , soit par $\overline{K}^0$, il faut sommer les deux amplitudes provenant de l'échange de K^0 et de $\overline{K}^0$ avant de prendre la norme au carré. Les nombres quantiques du ϕ , $J^{PC} = 1^{--}$, sont conservés par les interactions fortes provoquant la désintégration. La paire $K^0 \overline{K}^0$ se trouve donc dans un état antisymétrique sous P , ainsi que sous C . Le signe relatif des deux contributions à $\phi \rightarrow f_1 f_2$ est donc négatif [17].

Comme deux particules oscillent dans ce processus, notre formule d'oscillation n'est pas directement applicable. Considérons momentanément le même processus, mais pour des particules non mélangées et non antisymétrisées. L'amplitude du processus s'écrit selon la méthode du chapitre 4, section 4.2 :

$$\mathcal{A} = \int [d\mathbf{q}] \Phi_P \int [d\mathbf{k}_1] \Phi_{D_1}^* \int [d\mathbf{k}_2] \Phi_{D_2}^* \mathcal{A}_{ondes\ planes}(q, k_1, k_2),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ondes\ planes}(q, k_1, k_2) &\equiv \int d^4x e^{-iq \cdot x} \int d^4y_1 M_{D_1} e^{ik_1 \cdot y_1} \int d^4y_2 M_{D_2} e^{ik_2 \cdot y_2} \\ &\times \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1 \cdot (y_1 - x)} G_1(p_1^2) \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_2 \cdot (y_2 - x)} G_2(p_2^2) M_P \end{aligned}$$

où $G_i(p_i^2)$ symbolise le propagateur de la particule se désintégrant en $f_i(k_i)$ et les particules extérieures sont sur leur couche de masse. Les M_P et M_{D_i} sont les amplitudes des processus de production et de détection. Les paquets d'ondes Φ_P et Φ_{D_i} sont centrés dans l'espace des impulsions respectivement autour de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{K}_i$ tandis que leurs transformées de Fourier sont localisées dans l'espace de configuration respectivement autour de x_P et y_{D_i} où $x_P = (t_P, \mathbf{x}_P)$ et $y_{D_i} = (t_{D_i}, \mathbf{y}_{D_i})$ avec $i = 1, 2$. Dans la notation du chapitre 4 (voir équation (4.1)), ils s'écrivent

$$\begin{aligned} \Phi_P(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{x}_P, t_P) &= \phi_P(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) e^{iq \cdot x_P} \\ \Phi_{D_i}(\mathbf{k}_i, \mathbf{K}_i, \mathbf{y}_{D_i}, t_{D_i}) &= \phi_{D_i}(\mathbf{k}_i, \mathbf{K}_i) e^{ik_i \cdot y_{D_i}}. \end{aligned}$$

Après le changement de variables $x \rightarrow x + x_P$, $y_i \rightarrow y_i + y_{D_i}$ et les intégrations sur les variables x et y_i , l'amplitude devient

$$\mathcal{A} = \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \varphi(p_1, p_2) G_1(p_1^2) G_2(p_2^2) e^{-ip_1 \cdot (y_{D_1} - x_P) - ip_2 \cdot (y_{D_2} - x_P)},$$

où la fonction-poids $\varphi(p_1, p_2)$ est une intégrale de recouvrement des paquets d'ondes entrants et sortants. Elle est définie par

$$\begin{aligned} \varphi(p_1, p_2) &\equiv \int [d\mathbf{q}] \phi_P(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \int [d\mathbf{k}_1] \phi_{D_1}^*(\mathbf{k}_1, \mathbf{K}_1) \int [d\mathbf{k}_2] \phi_{D_2}^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{K}_2) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \delta^{(4)}(p_1 - k_1) \delta^{(4)}(p_2 - k_2) M_P M_{D_1} M_{D_2}. \end{aligned}$$

Les intégrations sur p_1^0 et p_2^0 se font par intégrale de contour, selon la méthode établie au chapitre 4, section 4.3. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \psi(z_1, z_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &\times \exp \left(-i\sqrt{z_1 + \mathbf{p}_1^2} T_1 + i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{L}_1 - i\sqrt{z_2 + \mathbf{p}_2^2} T_2 + i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{L}_2 \right) \end{aligned}$$

où $T_i \equiv t_{D_i} - t_P$, $\mathbf{L}_i \equiv \mathbf{y}_{D_i} - \mathbf{x}_P$ et les z_i sont les pôles des $G_i(p_i^2)$.

La norme de la fonction ψ est maximale pour $\mathbf{p}_i \cong \mathbf{K}_i$ et $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \cong \mathbf{Q}$ et les $\mathbf{L}_i$ alignés avec $\mathbf{K}_i$. L'évaluation des intégrales pose des difficultés à cause de la corrélation entre $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$, sauf si la contrainte $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \cong \mathbf{Q}$ est imposée avec moins de précision que les contraintes $\mathbf{p}_i \cong \mathbf{K}_i$. C'est justement le cas pour $\phi \rightarrow K^0 \overline{K}^0$ puisque la relation $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{Q}$ est exacte à $\Gamma_\phi = 4.4$ MeV près, tandis que les relations $\mathbf{p}_i = \mathbf{K}_i$ sont exactes à l'incertitude sur la masse des kaons près, bien inférieure à Γ_ϕ . On peut donc effectuer indépendamment les intégrales sur $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$. Le reste du calcul s'opère comme si les particules étaient indépendantes et notre prescription de calcul est applicable.

En fin de compte, si les directions de $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ sont fixées, l'amplitude anti-symétrisée de détection de f_1 à une distance L_1 et de f_2 à une distance L_2 est donnée pour le système mélangé $K^0 \overline{K}^0$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f_1 f_2}(L_1, L_2) &\sim \left(\begin{aligned} &\left[\left(\mathcal{M}(K^0 \rightarrow f_1) \quad \mathcal{M}(\overline{K}^0 \rightarrow f_1) \right) V^{-1} \exp \left\{ -iM_1 \frac{L_1}{v_1} \right\} V \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\times \left[\left(\mathcal{M}(K^0 \rightarrow f_2) \quad \mathcal{M}(\overline{K}^0 \rightarrow f_2) \right) V^{-1} \exp \left\{ -iM_2 \frac{L_2}{v_2} \right\} V \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$$- \left[\text{même expression avec } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \mathcal{M}(\phi \rightarrow K^0 \overline{K}^0)$$

La notation M_i signifie que la matrice de masse effective M est évaluée à l'énergie E_i de l'état final f_i . Les v_i sont définis comme d'habitude par la norme de $\mathbf{v}_i \equiv \mathbf{K}_i/E_i$. L'amplitude se réécrit en fonction de la base propre de CP comme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f_1 f_2}(L) &\sim \mathcal{M}(\phi \rightarrow K^0 \overline{K}^0) \frac{1}{2(1 - \hat{\epsilon}^2)} \\ &\times \left(\left[\begin{pmatrix} \mathcal{M}(K_1 \rightarrow f_1) & \mathcal{M}(K_2 \rightarrow f_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \exp \left\{ -iM_1 \frac{L_1}{v_1} \right\} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right. \\ &\times \left[\begin{pmatrix} \mathcal{M}(K_1 \rightarrow f_2) & \mathcal{M}(K_2 \rightarrow f_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \exp \left\{ -iM_2 \frac{L_2}{v_2} \right\} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &\left. - \left[\text{même expression avec } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right) \end{aligned}$$

Si l'on définit $\mathcal{M}_{ij} \equiv \mathcal{M}(K_i \rightarrow f_j)$, l'amplitude devient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f_1 f_2}(L) &\sim \mathcal{M}(\phi \rightarrow K^0 \overline{K}^0) \frac{1}{1 - \hat{\epsilon}^2} \\ &\times \left[-(\mathcal{M}_{11} + \hat{\epsilon} \mathcal{M}_{21})(\hat{\epsilon} \mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}_{22}) \exp \left(- \left(im_s + \frac{\Gamma_S}{2} \right) \frac{mL_1}{K_1} - \left(im_L + \frac{\Gamma_L}{2} \right) \frac{mL_2}{K_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\epsilon} \mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{21})(\mathcal{M}_{12} + \hat{\epsilon} \mathcal{M}_{22}) \exp \left(- \left(im_s + \frac{\Gamma_S}{2} \right) \frac{mL_2}{K_2} - \left(im_L + \frac{\Gamma_L}{2} \right) \frac{mL_1}{K_1} \right) \right] \end{aligned}$$

L'expression obtenue est relativiste : aucun boost n'est nécessaire pour passer du repère au repos d'une particule oscillante au repère du laboratoire. Observons que l'amplitude est nulle [17] si $f_1 = f_2$ et $K_1 = K_2$ et $L_1 = L_2$. Pour l'application des formules théoriques aux expériences, nous référons à la littérature [91].

Une remarque à propos de la fréquence d'oscillation semble de mise. Dans le repère centre de masse, $K_1 = K_2 \equiv K$ et le terme d'interférence oscille comme un cosinus de

$$\frac{m}{K} (m_L - m_s) (L_1 - L_2).$$

Si l'on réécrit ce terme comme $\omega(L_1 - L_2)$, la fréquence d'oscillation ω vaut $\omega = \frac{m\Delta m}{K}$. Le calcul de cette fréquence a suscité une controverse à la suite d'un article [37]

prétendant qu'elle était deux fois plus grande. Plusieurs articles [40, 39] ont été écrits pour réfuter cette affirmation mais leurs arguments reviennent à contester le choix de différents temps de détection et de temps propres pour les différents états propres de masse. Tout cela est assez obscur. Seule une dérivation en théorie des champs donne sans ambiguïté la formule d'oscillation. La valeur calculée est par ailleurs confirmée [40] par les expériences ARGUS et CLEO [89] dans le cas du processus analogue $\Upsilon \rightarrow B^0 \overline{B}^0$.

Un autre article controversé [50] soutient que dans un processus tel que

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0,$$

la particule Λ associée à la production de la particule oscillante K^0 oscillera aussi : elle serait une superposition de deux états d'énergie-impulsion différentes par conservation de l'énergie-impulsion à la production. Notre approche montre qu'il n'en est rien. Le processus peut être décrit complètement comme ci-dessus, avec un propagateur pour le kaon et un propagateur pour le Λ . Le propagateur du kaon est une superposition de deux propagateurs correspondant aux états propres de masse : à grande distance, deux pôles différents contribueront et l'amplitude sera la somme de deux amplitudes correspondant à deux états propres de masse différents sur leur couche de masse. Ce n'est pas le cas du Λ . On voit clairement dans cet exemple que la question ne peut être tranchée sans le formalisme de théorie des champs¹. Comme nous l'avons vu dans l'équation (5.16), les différences d'énergie et d'impulsion se compensent dans le facteur d'oscillation *sauf* la différence de masse entre les états propres. La même question s'est posée [51, 44, 85, 86, 92] pour le processus $\pi \rightarrow \mu \nu$. Le muon oscillerait-il ? Par le même raisonnement, on conclut que non.

¹Les réfutations recourant à la mécanique quantique [39] font de nouveau appel à la notion de différents temps propres.

6.4 La paramétrisation correcte de la violation CP

Le développement du formalisme théorique adapté à la description de l'expérience CPLEAR nous a montré que la violation CP peut être paramétrisée dans le système $K^0\overline{K}^0$ ou $B^0\overline{B}^0$ par des paramètres complexes $\hat{\epsilon}$ et χ_f . Cette simplicité cache certaines subtilités dans l'extraction des paramètres à partir des données. Tout d'abord, il faut mentionner que ces paramètres ne sont pas des observables physiques car ils dépendent de certaines conventions de phase. Ensuite, des approximations assez violentes sont souvent appliquées dans le système $K^0\overline{K}^0$, par exemple négliger les termes en $\hat{\epsilon}^2$, alors qu'ils sont du même ordre que les paramètres χ_f . Les ambiguïtés d'ordre $\mathcal{O}(\hat{\epsilon}^2)$ dues au problème de la normalisation des états $K_{S,L}$ sont aussi oubliées. La plupart des analyses ne tiennent pas compte de ces points délicats. Il est vrai que les expériences ne sont pas encore assez précises pour discriminer les démarches correctes des mauvaises mais il n'est plus l'heure de passer à côté de telles incohérences quand la violation CP directe est confirmée par deux expériences indépendantes [12]. Par ailleurs, les conventions de phase choisies pour le $K^0\overline{K}^0$ ne sont pas nécessairement pratiques pour le $B^0\overline{B}^0$; il est dès lors utile de garder la liberté de phase dans le formalisme. Etant donné que les définitions de nos paramètres ne souffrent pas de problème de normalisation, il est intéressant de montrer que l'analyse peut être continuée rigoureusement jusqu'au bout dans l'extraction, à partir des résultats expérimentaux, des paramètres violant CP. Nos résultats finaux ressemblent à ceux de la référence [101] mais celle-ci utilise des états intermédiaires de kaons et ne discute pas explicitement de la transformation de phase. Avant de déterminer les valeurs des paramètres, on étudiera la question de la convention de phase.

6.4.1 Phase étrange et paramètres observables

Une première manifestation de la dépendance de phase de $\hat{\epsilon}$ est apparue lors du calcul de l'asymétrie semi-leptonique A_T . Une asymétrie non nulle est une manifestation de la violation CP et implique que $\text{Re } \hat{\epsilon} \neq 0$. Par contre, si $\text{Re } \hat{\epsilon} = 0$ mais

$\mathcal{I}m \hat{\epsilon} \neq 0$, cette asymétrie s'annule et n'implique pas de violation CP. La partie imaginaire de $\hat{\epsilon}$ n'a donc aucune importance dans ce cas-ci. Cet arbitraire dans la valeur de $\mathcal{I}m \hat{\epsilon}$ est en fait la manifestation d'un phénomène plus général. La raison provient de la symétrie $U(1)$ associée à chaque saveur, et qui laisse le lagrangien total invariant, excepté le terme de masse (ou la matrice de mélange CKM après diagonalisation de la matrice de masse, ce qui revient au même). On s'intéresse ici à la transformation $\mathcal{S}$ de la phase étrange [103, 102], puisque les kaons possèdent une étrangeté non nulle. De nouveaux états peuvent être définis à l'aide de $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} |K_\alpha^0\rangle &= e^{-i\alpha\hat{S}} |K^0\rangle = e^{-i\alpha} |K^0\rangle, \\ |\overline{K}_\alpha^0\rangle &= e^{-i\alpha\hat{S}} |\overline{K}^0\rangle = e^{+i\alpha} |\overline{K}^0\rangle, \end{aligned}$$

où $\hat{S}$ est l'opérateur d'étrangeté. Cette redéfinition est possible parce que K^0 et $\overline{K}^0$ sont produits par les interactions fortes qui conservent l'étrangeté. Elle ne peut évidemment avoir d'effet observable : toute quantité observable doit être indépendante de cette phase. Dans le but de conserver la relation $|\overline{K}^0\rangle = CP |K^0\rangle$, la transformation CP est redéfinie dans la nouvelle base :

$$(CP)_\alpha \equiv e^{-i\alpha\hat{S}} CP e^{i\alpha\hat{S}},$$

de sorte que

$$|\overline{K}_\alpha^0\rangle = (CP)_\alpha |K_\alpha^0\rangle.$$

La base propre sous $(CP)_\alpha$ est définie² par :

$$|K_{1,2\alpha}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_\alpha^0\rangle \pm |\overline{K}_\alpha^0\rangle).$$

Comme la transformation ne laisse pas invariants les termes mélangeant des particules d'étrangetés différentes, les éléments non diagonaux du propagateur complet du système $K^0\overline{K}^0$ sont modifiés. Se rappelant la paramétrisation du propagateur (équation (3.7)),

$$iG^{-1}(p^2) = \begin{pmatrix} \langle K^0 | \hat{G}^{-1} | K^0 \rangle & \langle K^0 | \hat{G}^{-1} | \overline{K}^0 \rangle \\ \langle \overline{K}^0 | \hat{G}^{-1} | K^0 \rangle & \langle \overline{K}^0 | \hat{G}^{-1} | \overline{K}^0 \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d & a+b \\ a-b & d \end{pmatrix},$$

²Une autre possibilité consiste à ne pas redéfinir l'opérateur CP. On a alors $CP |K_\alpha^0\rangle = \eta_\alpha^{CP} |\overline{K}_\alpha^0\rangle$, où $\eta_\alpha^{CP} \equiv e^{-2i\alpha}$. Il faut définir différemment les états propres sous CP : $|K_{1,2\alpha}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_\alpha^0\rangle \pm CP |K_\alpha^0\rangle)$

on voit que les termes non diagonaux sont transformés sous $\mathcal{S}$ en

$$\begin{aligned} a_\alpha + b_\alpha &= (a + b) e^{2i\alpha}, \\ a_\alpha - b_\alpha &= (a - b) e^{-2i\alpha}. \end{aligned}$$

Quel est l'effet de $\mathcal{S}$ sur le paramètre $\hat{\epsilon}$? Ce paramètre a été défini (équation (3.9)) comme la solution de

$$\frac{\hat{\epsilon}}{1 + \hat{\epsilon}^2} \equiv \frac{b}{2a}.$$

Cette équation possède en fait deux solutions $\hat{\epsilon}_1$ et $\hat{\epsilon}_2$ inverses l'une de l'autre :

$$\hat{\epsilon}_{1,2} = \frac{a}{b} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right),$$

où le signe de la racine est choisi de sorte que sa partie réelle soit positive. Comme $\hat{\epsilon}_1 = 1/\hat{\epsilon}_2$, une des deux solutions a nécessairement une norme inférieure à 1. On choisit de travailler avec cette solution, dans l'esprit de représenter la petite violation CP observée par des paramètres théoriques petits. Nous choisissons donc la solution avec le signe $-$:

$$\hat{\epsilon} \equiv \frac{a}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right).$$

Lors du calcul de l'asymétrie A_T , un paramètre σ a été associé à $\hat{\epsilon}$ (équation (6.9)) par

$$\sigma \equiv \frac{1 - \hat{\epsilon}}{1 + \hat{\epsilon}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\epsilon} \equiv \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}.$$

Son expression en fonction de a et b s'écrit

$$\sigma = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}.$$

Notons que

$$\mathcal{R}e \sigma = \frac{1 - |\hat{\epsilon}|^2}{1 + 2\mathcal{R}e \hat{\epsilon} + |\hat{\epsilon}|^2} \geq 0$$

puisque $|\hat{\epsilon}| \leq 1$.

Sous la transformation $\mathcal{S}$, le paramètre σ devient

$$\sigma_\alpha = \frac{\sqrt{a_\alpha^2 - b_\alpha^2}}{a_\alpha + b_\alpha} = e^{-2i\alpha} \sigma,$$

Partant de l'équation liant $\hat{\epsilon}_\alpha$ et σ_α ,

$$\hat{\epsilon}_\alpha = \frac{1 - \sigma_\alpha}{1 + \sigma_\alpha},$$

on établit la loi de transformation de $\hat{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_\alpha &= \frac{\hat{\epsilon} + i \tan \alpha}{1 + i \hat{\epsilon} \tan \alpha} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re} \hat{\epsilon} + i [(1 - |\hat{\epsilon}|^2) \sin 2\alpha + 2 \operatorname{Im} \hat{\epsilon} \cos 2\alpha]}{1 + \cos 2\alpha - 2 \operatorname{Im} \hat{\epsilon} \sin 2\alpha + |\hat{\epsilon}|^2 (1 - \cos 2\alpha)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Remarquons d'abord que $\operatorname{Re} \hat{\epsilon}_\alpha \propto \operatorname{Re} \hat{\epsilon}$. La condition $\operatorname{Re} \hat{\epsilon} \neq 0$ est donc bien invariante sous $\mathcal{S}$ comme il se doit. Cependant, la transformation $\mathcal{S}$ ne peut être tout à fait arbitraire. En effet, le choix de la valeur $\alpha = \pm\pi/2$ résulte en la transformation $\hat{\epsilon}_\alpha = 1/\hat{\epsilon}$. On doit donc restreindre le domaine de α si l'on veut respecter la condition $|\hat{\epsilon}| \leq 1$. Comme les expressions ne dépendent que de 2α , il suffit de travailler sur l'intervalle $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. On calcule que $|\hat{\epsilon}_\alpha| \leq 1$ pour

$$\frac{1}{2} \left(\arctan \frac{1 - |\hat{\epsilon}|^2}{2 \operatorname{Im} \hat{\epsilon}} - \pi \right) \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \arctan \frac{1 - |\hat{\epsilon}|^2}{2 \operatorname{Im} \hat{\epsilon}},$$

où l'arctan est pris dans le premier ou deuxième quadrant.

6.4.2 Détermination des paramètres

Examinons maintenant la première donnée expérimentale dont nous disposons pour les kaons. La petitesse de l'asymétrie semi-leptonique, $A_T = (6.6 \pm 1.6) \times 10^{-3}$ [94], nous dit à travers l'équation (6.8) que $|\sigma| = 1 + \mathcal{O}(10^{-3})$. Comme

$$\operatorname{Re} \hat{\epsilon} = \frac{1 - |\sigma|^2}{1 + 2 \operatorname{Re} \sigma + |\sigma|^2},$$

avec $\operatorname{Re} \sigma \geq 0$, on conclut que $\operatorname{Re} \hat{\epsilon} \sim (10^{-3})$. La valeur de $\operatorname{Re} \hat{\epsilon}$ dépend bien sûr du choix de la phase étrange mais on peut déjà donner son ordre de grandeur qui sera correct tant que la condition $|\hat{\epsilon}| < 1$ est maintenue. Par contre, on ne peut rien dire sur $\operatorname{Im} \hat{\epsilon}$ sans faire un choix de phase étrange, puisque

$$\operatorname{Im} \hat{\epsilon} = \frac{-2 \operatorname{Im} \sigma}{1 + 2 \operatorname{Re} \sigma + |\sigma|^2}.$$

Peut-on choisir la phase étrange telle que $|\mathcal{I}m \hat{\epsilon}| \ll 1$? En utilisant l'équation (6.19), on obtient

$$\mathcal{I}m \hat{\epsilon}_\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \tan 2\alpha = -\frac{2\mathcal{I}m \hat{\epsilon}}{1 - |\hat{\epsilon}|^2}.$$

Si³ $\mathcal{I}m \hat{\epsilon} \geq 0$, $-\pi/4 \leq \alpha \leq 0$. Si $\mathcal{I}m \hat{\epsilon} \leq 0$, $0 \leq \alpha \leq \pi/4$. Par conséquent, il est toujours possible de choisir la phase étrange telle que $\mathcal{I}m \hat{\epsilon}_\alpha = 0$. Toute une série d'autres choix sont possibles avec $|\mathcal{I}m \hat{\epsilon}_\alpha| \ll 1$.

Poursuivons notre examen des données expérimentales. Dans les désintégrations des kaons neutres en pions, les observables liés à la violation CP ont été définis (équations (6.12) et (6.13)) par

$$\eta_f \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow f)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow f)} = \frac{\hat{\epsilon} + \chi_f}{1 + \chi_f \hat{\epsilon}},$$

où $\chi_f \equiv \mathcal{M}(K_2 \rightarrow f)/\mathcal{M}(K_1 \rightarrow f)$ et f est un état pair sous CP. Comme les observables doivent être invariants sous la transformation de phase $\mathcal{S}$, les quantités χ_f compensent la variation de $\hat{\epsilon}$ sous $\mathcal{S}$. On le vérifie le plus aisément à l'aide du paramètre μ_f associé à χ_f par l'équation (6.15). La transformation de μ_f sous $\mathcal{S}$ est tout simplement la transformation inverse de σ :

$$\mu_{f,\alpha} = e^{2i\alpha} \mu_f.$$

La quantité $\xi_f \equiv \sigma \mu_f$ est donc invariante sous $\mathcal{S}$ et dès lors η_f aussi (équation (6.16)). On a vérifié du même coup que le paramètre ξ_f , décrivant la violation CP dans le système $B^0 \bar{B}^0$, est invariant de phase, comme il se doit puisqu'il est mesurable. Pour un usage futur, je donne la transformation explicite de χ_f :

$$\chi_{f,\alpha} = \frac{\chi_f - i \tan \alpha}{1 - i \chi_f \tan \alpha}. \quad (6.20)$$

Les paramètres $\eta_f \equiv |\eta_f| e^{i\phi_f}$ ont été mesurés par CPLEAR [95, 96] :

$$\begin{aligned} |\eta_{+-}| &= (2.254 \pm 0.024_{STAT} \pm 0.026_{SYST}) \times 10^{-3}, \\ \phi_{+-} &= (43.63 \pm 0.54_{STAT} \pm 0.48_{SYST})^\circ, \\ |\eta_{00}| &= (2.47 \pm 0.31_{STAT} \pm 0.24_{SYST}) \times 10^{-3}, \\ \phi_{00} &= (42.0 \pm 5.6_{STAT} \pm 1.9_{SYST})^\circ. \end{aligned} \quad (6.21)$$

³On a choisi des valeurs de α appartenant au domaine tel que $|\hat{\epsilon}_\alpha| \leq 1$.

Dès lors, si la convention de phase est telle que $|\hat{\epsilon}| \sim \mathcal{O}(\text{Re } \hat{\epsilon}) \sim \mathcal{O}(10^{-3})$, les paramètres χ_f doivent être au plus du même ordre : $\chi_f \leq \mathcal{O}(10^{-3})$. La violation CP indirecte pour les kaons est donc au maximum du même ordre que la violation CP directe. Une différence entre η_{+-} et η_{00} établit l'existence d'une violation CP directe. C'est ce qu'ont fait les expériences NA31, E731, NA48 et KTeV [12] en mesurant

$$|\eta_{00}|^2/|\eta_{+-}|^2 = 1 - 6 \times (21.2 \pm 4.7) \times 10^{-4}, \quad (6.22)$$

où l'on a fait la moyenne des résultats [68].

Dans le cas où l'état $\tilde{f}$ est impair sous CP, on définit le paramètre

$$\eta_{\tilde{f}} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \tilde{f})}{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \tilde{f})} = \frac{\hat{\epsilon} + \chi_{\tilde{f}}}{1 + \chi_{\tilde{f}} \hat{\epsilon}},$$

où $\chi_{\tilde{f}} \equiv \mathcal{M}(K_1 \rightarrow \tilde{f})/\mathcal{M}(K_2 \rightarrow \tilde{f})$. Si la violation CP directe est petite par rapport à la violation CP indirecte, il existe une convention de phase telle que $\eta_{\tilde{f}} \cong \hat{\epsilon} \cong \eta_f$. On prédit par exemple $\eta_{000} = \eta_{00} + \mathcal{O}(10^{-6})$, où l'indice $_{000}$ symbolise l'état à trois pions neutres.

Pour aller plus loin et extraire les quantités $\hat{\epsilon}$, χ_{+-} et χ_{00} (dépendant de 6 nombres réels) de A_T , η_{+-} et η_{00} (dépendant de 5 nombres réels), il faut disposer d'une relation supplémentaire fournie par la symétrie d'isospin des pions.

Cette technique bien connue (voir par exemple [104]), permet de décomposer les amplitudes de transition des kaons en pions en amplitudes correspondant à des isospins définis :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_0} A_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\delta_2} A_2, \\ \mathcal{M}(\overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_0} A_0^* + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\delta_2} A_2^*, \\ \mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\delta_0} A_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_2} A_2, \\ \mathcal{M}(\overline{K}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\delta_0} A_0^* + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_2} A_2^*. \end{aligned}$$

L'état $\pi^+ \pi^-$ a été symétrisé et l'on a introduit un facteur $1/\sqrt{2}$ pour l'état final $\pi^0 \pi^0$ pour fournir le facteur $1/2$ dans la probabilité de détection de deux particules identiques. La brisure d'isospin est prise en compte dans la paramétrisation en

redéfinissant les paramètres A_I par combinaison linéaire. La décomposition garde la même forme bien que la symétrie d'isospin ne soit plus respectée. Soit $A_I \equiv |A_I| e^{i\zeta_I}$. Sous une transformation de phase $\mathcal{S}$, $A_{I\alpha} = e^{-i\alpha} A_I$ et il est par exemple possible de rendre A_0 réel (convention de Wu-Yang). La différence de phase $(\zeta_0 - \zeta_2)$ reste invariante. L'asymétrie A_{+-} définie par

$$A_{+-} \equiv \frac{|\mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2}{|\mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2 + |\mathcal{M}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2}$$

est donnée en terme des amplitudes d'isospin par

$$A_{+-} = \frac{-2\sqrt{2} \sin(\delta_0 - \delta_2) \sin(\zeta_0 - \zeta_2) |A_0| |A_2|}{2|A_0|^2 + |A_2|^2 + 2\sqrt{2} |A_0| |A_2| \cos(\delta_0 - \delta_2) \cos(\zeta_0 - \zeta_2)}. \quad (6.23)$$

Elle est non nulle s'il y a une violation CP directe. C'est le cas s'il y a au moins deux amplitudes partielles non nulles (A_0 et A_2) avec une phase relative $(\zeta_0 - \zeta_2)$ violant CP et une phase relative $(\delta_0 - \delta_2)$ conservant CP. L'asymétrie A_{00} correspondant aux pions neutres a une forme similaire.

Ces asymétries ne sont cependant pas observables telles quelles puisque les kaons se propagent et oscillent avant de se désintégrer, donnant lieu à une violation CP indirecte en plus de la violation CP directe. Comme on l'a vu ci-dessus, les quantités mesurées sont η_{+-} et η_{00} . On voudrait paramétriser indépendamment les violations CP directe et indirecte. Ce n'est pas possible avec la définition de η_f en fonction de $\hat{\epsilon}$ et χ_f puisqu'ils ne sont pas séparément invariants sous la transformation de phase $\mathcal{S}$: même en absence de violation CP directe, le paramètre χ_f ne sera nul que pour un choix particulier de phase. Pour déterminer l'expression de η_{+-} en l'absence de violation CP directe, calculons-le d'abord en fonction des amplitudes d'isospin :

$$\eta_{+-} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{Re} A_0 (\hat{\epsilon} + i\kappa_0) + e^{i\delta} \operatorname{Re} A_2 (\hat{\epsilon} + i\kappa_2)}{\sqrt{2} \operatorname{Re} A_0 (1 + i\hat{\epsilon} \kappa_0) + e^{i\delta} \operatorname{Re} A_2 (1 + i\hat{\epsilon} \kappa_2)},$$

où $\kappa_I \equiv \operatorname{Im} A_I / \operatorname{Re} A_I = \tan \zeta_I$ et $\delta \equiv \delta_2 - \delta_0$. La violation CP directe est par exemple absente si $A_2 = 0$. Dans ce cas,

$$\eta_{+-} = \frac{\hat{\epsilon} + i\kappa_0}{1 + i\hat{\epsilon} \kappa_0} \equiv \epsilon,$$

que l'on prend comme définition d'un nouveau paramètre, ϵ , invariant sous la transformation de phase $\mathcal{S}$. On peut vérifier explicitement que $i\kappa_0$ se transforme comme

χ_f (équation (6.20)) et joue donc le rôle de χ_f dans la compensation de la variation de $\hat{\epsilon}$ sous $\mathcal{S}$:

$$i\kappa_{0,\alpha} = \frac{i\kappa_0 - i \tan \alpha}{1 - i(i\kappa_0) \tan \alpha}.$$

D'une part, la condition $\mathcal{R}e \epsilon \neq 0$ signale une violation CP dans l'asymétrie A_{+-} car $\mathcal{R}e \epsilon \propto \mathcal{R}e \hat{\epsilon}$. Comme elle rend l'asymétrie A_T non nulle, on l'interprète comme une violation CP dans les oscillations. D'autre part, $\mathcal{I}m \epsilon \neq 0$ signale aussi une violation CP dans l'asymétrie $A_{+-}(L)$, qui résulte de l'interférence entre l'oscillation et la désintégration. On pourrait l'appeler *violation CP induite*, en analogie avec la violation CP induite définie dans le système $B^0\overline{B}^0$ (équation (6.18)). En utilisant la définition de ϵ , on peut maintenant écrire l'expression de η_{+-} en présence de violation CP directe, c'est-à-dire pour $A_2 \neq 0$:

$$\eta_{+-} = \epsilon + \frac{\epsilon'}{1 + \omega/\sqrt{2}}, \quad (6.24)$$

où ϵ garde sa définition et où ω et ϵ' sont définis par

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \frac{1 + i\hat{\epsilon}\kappa_2}{1 + i\hat{\epsilon}\kappa_0} \frac{\mathcal{R}e A_2}{\mathcal{R}e A_0} e^{i\delta}, \\ \epsilon' &\equiv \frac{i\omega(1 - \hat{\epsilon}^2)(\kappa_2 - \kappa_0)}{\sqrt{2}(1 + i\hat{\epsilon}\kappa_2)(1 + i\hat{\epsilon}\kappa_0)}. \end{aligned}$$

Les paramètres ϵ , ω et ϵ' sont invariants sous la transformation de phase $\mathcal{S}$.

On procède de même pour la désintégration des kaons en pions et l'on obtient

$$\eta_{00} = \epsilon - \frac{2\epsilon'}{1 - \sqrt{2}\omega}. \quad (6.25)$$

Ces équations sont *exactes*, contrairement à la plupart des expressions des η_f en fonction de ϵ et ϵ' trouvées dans la littérature, où ϵ et ϵ' ne sont même pas invariants de phase. Cette paramétrisation exacte nous évite de devoir négliger des termes en $\hat{\epsilon}^2$ qui sont du même ordre que ϵ' . Dans la littérature (par exemple dans [102]), les définitions de ω et ϵ' diffèrent des nôtres et ne sont pas invariantes de phase, avec pour conséquence que les expressions pour η_{+-} et η_{00} , bien qu'identiques à nos formules (6.24) et (6.25), ne peuvent être obtenues qu'après des approximations négligeant ϵ^2 par rapport à ϵ' .

Que deviennent les différents cas (voir l'équation (6.23)) pour lesquels l'asymétrie A_{+-} s'annulait ? Entraînent-ils l'annulation de ϵ' , le nouveau paramètre décrivant la violation CP directe ?

1. Si $\kappa_2 = \kappa_0$ (c'est-à-dire $\zeta_2 = \zeta_0$), alors $\epsilon' = 0$.
2. Si $A_2 = 0$, alors $\epsilon' = 0$.
3. Si $A_0 = 0$, la décomposition ci-dessus est mal définie. On a plutôt

$$\varrho = \frac{\hat{\epsilon} + i\kappa_2}{1 + i\hat{\epsilon}\kappa_2} \quad \text{et} \quad \eta_{+-} = \varrho - \frac{2\varrho'}{1 + \sqrt{2}\varpi},$$

où ϱ' et ϖ sont obtenus à partir de ϵ et ω en échangeant les indices 0 et 2 (donc $\varrho' = -\epsilon/\omega^2$ et $\varpi = \omega^{-1}$). Si $A_0 = 0$, le paramètre ϱ' est nul.

4. Si $\delta = 0$ et $\mathcal{R}\hat{\epsilon} = 0$, alors $\mathcal{R}\epsilon' = 0$ mais il est toujours possible que $\mathcal{I}\epsilon' \neq 0$. Le choix de la phase tel que $\hat{\epsilon} = 0$ ne change rien. On pourrait se demander comment il peut y avoir une violation CP alors qu'une des conditions de son apparition n'est pas satisfaite, c'est-à-dire l'existence d'une phase relative conservant CP entre les amplitudes partielles. Contrairement aux apparences, il n'en est rien ! En effet, les conditions $\delta = 0$ et $\hat{\epsilon} = 0$ impliquent que $\mathcal{R}\eta_{+-} \sim \mathcal{R}\epsilon' = 0$, ou encore $\phi_{+-} = \pm\pi/2$ (rappelons que $\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}}$). L'examen de l'asymétrie A_{+-} (équation (6.14)) montre que cette asymétrie serait nulle sous ces conditions, si ce n'était la présence de $\Delta m \neq 0$ dans l'argument du cosinus. La phase relative conservant CP est donc fournie par la différence de masse entre les états se propageant.

Observons aussi que même si l'asymétrie semi-leptonique A_T est nulle ($\mathcal{R}\hat{\epsilon} = 0$), le paramètre $\hat{\epsilon}$ joue toujours un rôle dans l'asymétrie A_{+-} à travers sa partie imaginaire $\mathcal{I}\hat{\epsilon}$. Non seulement $\mathcal{I}\hat{\epsilon}$ peut se combiner avec κ_0 pour donner $\mathcal{I}\epsilon \neq 0$ comme on l'a vu ci-dessus, mais il interfère aussi avec les paramètres A_I , ζ_I et δ à l'intérieur de ϵ' . En bref, le paramètre de mélange $\hat{\epsilon}$ intervient dans tous les types de violations CP. Les expressions des η_f se simplifient si l'on utilise l'information expérimentale (règle $\Delta I = 1/2$) que $|A_2|/|A_0| \cong 1/22$ [105]. Les termes en ω peuvent alors être négligés et les équations (6.24) et (6.25) prennent la forme

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &\cong \epsilon + \epsilon', \\ \eta_{00} &\cong \epsilon - 2\epsilon'. \end{aligned}$$

Les valeurs trouvées par CPLEAR (voir équations (6.21)) étant égales aux erreurs expérimentales près, on sait que ϵ' est beaucoup plus petit que ϵ . Les expériences dédiées à la mesure de la violation CP directe mesurent plutôt $\mathcal{Re}(\epsilon'/\epsilon)$:

$$|\eta_{00}|^2/|\eta_{+-}|^2 = 1 - 6\mathcal{Re}\frac{\epsilon'}{\epsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon'^2}{\epsilon^2}\right).$$

Cette équation est identique à celle trouvée dans la littérature (voir par exemple [68]), mais a été obtenue sans approximations douteuses. Nous avons en effet résolu, d'une part, le problème de la normalisation à l'ordre ϵ^2 des états oscillants et, d'autre part, nous avons défini les paramètres ω et ϵ' de sorte qu'il ne nous est pas nécessaire de recourir à des approximations incorrectes du type $\epsilon^2 \ll \epsilon'$. La compilation des résultats expérimentaux (voir équation (6.22)) fournit la valeur

$$\mathcal{Re}\frac{\epsilon'}{\epsilon} = (21.2 \pm 4.7) \times 10^{-4}.$$

Avec une convention de phase telle que $|\hat{\epsilon}| \ll 1$, les expressions de ϵ , ω et ϵ' prennent la forme approximative (et non invariante de phase) :

$$\begin{aligned}\epsilon &\cong \hat{\epsilon} + i\kappa_0, \\ \omega &\cong \frac{\mathcal{Re} A_2}{\mathcal{Re} A_0} e^{i\delta}, \\ \epsilon' &\cong \frac{i}{\sqrt{2}} \omega (\kappa_2 - \kappa_0),\end{aligned}$$

Dans ce cas, $\mathcal{Re} \epsilon \cong \mathcal{Re} \hat{\epsilon}$ et la mesure des η_f fournit la valeur de $\mathcal{Re} \hat{\epsilon}$. Dans la même convention de phase, l'asymétrie semi-leptonique A_T devient $A_T \cong 4\mathcal{Re} \hat{\epsilon}$. On peut donc comparer les résultats expérimentaux provenant de A_T et de A_{+-} et A_{00} . Ils coïncident aux erreurs expérimentales près. Dans la convention de phase de Kobayashi-Maskawa, $\mathcal{Im} A_2 = 0$ si la symétrie d'isospin est respectée. Le terme κ_2 dans l'expression de ϵ' paramétrise donc la violation de l'isospin dans cette convention [106].

Sous les mêmes conditions, les paramètres χ_f de violation CP directe se réécrivent :

$$\begin{aligned}\chi_{+-} &\cong \epsilon' + i\kappa_0, \\ \chi_{00} &\cong -2\epsilon' + i\kappa_0,\end{aligned}$$

Dans la convention de Wu-Yang (qui est une des nombreuses conventions telles que $|\hat{\epsilon}| \ll 1$), $\kappa_0 = 0$ donc $\chi_{+-} \cong \epsilon'$ et $\chi_{00} \cong -2\epsilon'$.

Conclusion

Les oscillations spatio-temporelles de la probabilité de détection dans la propagation de particules en superposition quantique ont une importance capitale aussi bien du point de vue fondamental, dans l'étude de la violation CP dans les systèmes de kaons neutres et de mésons B et dans la détermination du spectre de masse des neutrinos, que du point de vue phénoménologique dans l'élucidation des anomalies observées dans le flux des neutrinos atmosphériques et solaires. Ces phénomènes en essence identiques n'ont pas reçu jusqu'à présent de description théorique unifiée, couvrant à la fois le cas des particules stables et instables, ainsi que les domaines relativistes et non relativistes.

Dans le calcul traditionnel de la probabilité d'oscillation en mécanique quantique, les états oscillants sont considérés comme une superposition d'états propres de masse et sont supposés être dotés d'une énergie-impulsion bien définie. Ce traitement simpliste mène directement à un paradoxe, puisque la connaissance exacte de l'énergie-impulsion force l'état à se trouver dans un état propre de masse et supprime du même coup les oscillations. De plus, comment une oscillation de la probabilité de détection de l'état pourrait-elle être observable si la connaissance précise de son énergie-impulsion implique une incertitude infinie sur sa position ?

Il paraît logique de résoudre ce paradoxe en postulant l'existence d'une incertitude sur l'énergie-impulsion, c'est-à-dire en traitant l'état oscillant comme une superposition de paquets d'ondes. Cependant, des questions de principe subsistent, que le formalisme soit relativiste ou non : d'une part, l'interférence entre états est interdite en mécanique quantique non relativiste par la règle de superposition de Bargmann, d'autre part, il paraît impossible de construire un espace de Fock pour une particule qui n'est pas un état propre de masse. Une formule relativiste ne peut

être dérivée rigoureusement dans ces conditions. Par ailleurs, la taille et la forme du paquet d'ondes sont indéterminées, ce qui est insatisfaisant vu l'influence qu'elles ont sur l'observabilité des oscillations. L'effet des conditions de production et de détection n'est pas non plus pris en compte. Pour donner un exemple, une mesure précise de l'énergie-impulsion des états issus du lieu de détection de la particule oscillante, identifie l'état propre de masse se propageant et supprime les oscillations. Enfin, les particules oscillantes instables ne peuvent pas être décrites par un paquet d'ondes.

Il ne reste plus qu'à se tourner vers la théorie des champs, où les particules oscillantes sont décrites comme des états intermédiaires virtuels, non observés directement et se propageant entre une source et un détecteur. Dans le même esprit, la question de savoir comment un état quantique peut se signaler par une trajectoire bien définie dans un détecteur, a déjà été résolue par Mott [107] en 1929, en ne considérant comme observables que les états excités le long de la trajectoire par la particule se propageant dans le détecteur (ces états excités se manifestent par exemple par des bulles dans une chambre à bulles). Pris deux à deux, les états excités forment une suite de systèmes source-détecteur. Contrairement à Mott qui utilise la théorie des perturbations non relativiste de la mécanique quantique, nous représentons les états oscillants par un propagateur covariant sous les transformations de Lorentz et qui, sous sa forme complète, contient la description de l'instabilité des particules à travers la localisation de ses pôles complexes. Un système de particules en mélange est représenté par un propagateur matriciel non diagonal, qui rend possible la propagation d'une particule entre deux points avec changement de saveur. Ce formalisme permet d'éviter la définition d'états de saveur, c'est-à-dire d'états de masse indéfinie. La matrice mélangeant les états en mécanique quantique est remplacée par la matrice diagonalisant le propagateur. Les corrections non exponentielles à la propagation d'un mélange peuvent être facilement analysées dans ce contexte et sont négligeables.

Dans ce formalisme, les oscillations sont mesurées indirectement, comme dans les expériences, par la détection des particules issues de la source et du détecteur. Les notions de *source* et de *détecteur* sont en fait fictives, et symbolisent les processus de production et de détection de la particule oscillante. Les particules entrantes et

sortantes sont modélisées de manière réaliste par des paquets d'ondes. Par ce biais, en jouant sur la largeur des paquets d'ondes, il est possible d'étudier l'influence des conditions de production et de détection sur l'observabilité des oscillations, puisque celles-ci disparaissent dans le cas où les états asymptotiques sont des ondes planes.

Les problèmes résultant du traitement traditionnel des oscillations n'apparaissent plus dans notre calcul. Ils étaient en effet liés d'une part à l'attribution d'une série de propriétés (saveur, énergie-impulsion, etc.) à la particule oscillante, et d'autre part à l'introduction de concepts classiques (temps moyen de propagation, vitesse, etc.) par des hypothèses extérieures au formalisme. Notre méthode met du même coup un point final aux controverses sur la longueur d'oscillation ainsi que sur l'oscillation des particules associées à la production de l'état oscillant. La question de l'énergie-impulsion de la particule oscillante est résolue en démontrant en même temps l'influence des conditions expérimentales sur l'énergie-impulsion et l'indépendance du résultat final (en tout cas au premier ordre en la différence de masse) par rapport à elle. La formule d'oscillation obtenue contient différents facteurs que l'on peut identifier comme la décroissance exponentielle en fonction de la distance pour une particule instable, l'oscillation dépendant de la différence de masse et de la distance, la décohérence supprimant les oscillations à grande distance pour les particules relativistes et finalement l'influence des conditions expérimentales sur l'observabilité des oscillations. Les conditions sous lesquelles la formule obtenue coïncide avec la formule classique apparaissent donc explicitement dans notre résultat.

Les caractéristiques principales de la probabilité d'oscillation sont ensuite reprises dans une prescription de calcul s'appliquant directement à l'amplitude d'un processus. Les cas des expériences CPLEAR (oscillation d'une seule particule) et de DAΦNE sont examinés. Un traitement cohérent de la violation CP dans le système des kaons neutres s'ensuit, contrairement au traitement traditionnel où des problèmes de normalisation des états entachent la précision des prédictions théoriques.

Bien que nous ayons considéré un cas d'oscillation double (DAΦNE), les hypothèses que nous avons posées ne permettent pas une extension immédiate à d'autres situations. Il serait par exemple intéressant d'étudier les oscillations en cascade $B^0(\overline{B}^0) \rightarrow K^0(\overline{K}^0) \rightarrow \pi\pi, \mu\pi\nu$ qui pourront être étudiées au LHC [108, 109]. Une autre applica-

tion intéressante est l'étude de l'influence de l'instabilité de la source de la particule oscillante, qui peut en principe se faire en considérant aussi cette source comme un état intermédiaire non observé directement. Nos techniques d'intégration ne conviennent pas à cette analyse. Enfin, notre formule s'applique à la propagation de neutrinos instables, qu'ils soient relativistes ou non. Cette instabilité couplée à un mélange est un modèle explicatif des anomalies observées dans la mesure des neutrinos atmosphériques et solaires. Pour l'instant, une modification simple de la formule de mécanique quantique par une exponentielle décroissante suffit à paramétriser les mesures en raison du peu de données disponibles, mais l'astronomie au moyen des neutrinos ne fait que commencer !

Bibliographie

- [1] L. Fonda, G. C. Ghirardi et A. Rimini, *Decay theory of unstable quantum systems*, Rep. Prog. Phys. **41**, 587 (1978).
- [2] L. A. Khalfin, *Contribution to the decay theory of a quasi-stationary state*, Sov. Phys. JETP **6**, 1053 (1958) ; une liste des travaux pionniers concernant les corrections non exponentielles se trouve dans : R. G. Newton, *Scattering theory of waves and particles* (McGraw-Hill, New York, 1966), p. 608.
- [3] Voir par exemple : J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*, rev. ed. (Addison-Wesley, Reading, 1994), p. 481.
- [4] J. Schwinger, *Field theory of unstable particles*, Ann. Phys. **9**, 169 (1960).
- [5] R. Jacob et R. G. Sachs, *Mass and lifetime of unstable particles*, Phys. Rev. **121**, 350 (1961).
- [6] L. S. Brown, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992) p. 293 et p. 339.
- [7] P. T. Greenland, *Seeking non-exponential decay*, Nature **335**, 298 (1988).
- [8] R. E. Peierls, *Proc. of Glasgow Conference on Nuclear and Meson Physics* (Pergamon Press, 1954) p. 296.
- [9] M. Gell-Mann et A. Pais, *Behavior of neutral particles under charge conjugation*, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
- [10] K. Landé, E. T. Booth, J. Impeduglia, L. M. Lederman et W. Chinowsky, *Observation of long-lived neutral V articles*, Phys. Rev. **103**, 1901(L) (1956).
- [11] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch et R. Turlay, *Evidence for the 2π decay of the K_2^0 meson*, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
- [12] H. Burkhardt et al, NA31 Collaboration, *First evidence for direct CP violation*, Phys. Lett. **B206**, 169 (1988) ; G. D. Barr et al, NA31 Collaboration, *A new measurement of direct CP violation in the neutral kaon system*, Phys. Lett. **B317**, 233 (1993) ; L. K. Gibbons et al, E731 Collaboration, *Measurement of the CP-violation parameter $Re(\epsilon'/\epsilon)$* , Phys. Rev. Lett. **70**, 1203 (1993) ; V. Fanti et al, NA48 Collaboration, *A new measurement of direct CP violation in two pion decays of the neutral kaon*, Phys. Lett. **B465**, 335 (1999) ; KTeV Collaboration, *Observation of Direct CP Violation in $K_{S,L} \rightarrow \pi\pi$ Decays*, Phys. Rev. Lett. **83**, 22 (1999).

- [13] E. Wigner et V. F. Weisskopf, *Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie*, Z. Phys. **63**, 54 (1930) ; *ibid.*, *Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators*, Z. Phys. **65**, 18 (1930) ; pour une présentation moderne, voir par exemple la réf. [31], p. 509.
- [14] N. R. Lipshutz, *Invariance principles and the $K^0-\overline{K}^0$ propagator matrix*, Phys. Rev. **144**, 1300 (1966).
- [15] H. Albrecht *et al*, ARGUS Collaboration, *Observation of $B^0-\overline{B}^0$ mixing*, Phys. Lett. **B192**, 245 (1987) ; T. Affolder *et al*, CDF Collaboration, *Measurement of the $B^0\overline{B}^0$ oscillation frequency using l^-D^{*+} pairs and lepton flavor tags*, Phys. Rev. **D60**, 112004 (1999).
- [16] T. Affolder *et al*, CDF Collaboration, *A measurement of $\sin 2\beta$ from $B \rightarrow J/\psi K_S^0$ with the CDF detector*, Phys. Rev. **D61**, 072005 (2000).
- [17] T. B. Day, *Demonstration of quantum mechanics in the large*, Phys. Rev. **121**, 1204 (1961) ; H. Lipkin, *CP violation and coherent decays of kaon pairs*, Phys. Rev. **176**, 1715 (1968).
- [18] R. Davis, D. S. Harmer et K. C. Hoffman, *Search for neutrinos from the sun*, Phys. Rev. Lett. **20**, 1205 (1968).
- [19] J. N. Bahcall, *Neutrino astrophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [20] S. M. Bilenky, C. Giunti et W. Grimus, *Phenomenology of neutrino oscillations*, Prog. Part. Nucl. Phys. **43**, 1 (1999) et références incluses.
- [21] B. Pontecorvo, *Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge*, Sov. Phys. JETP **26**, 984 (1968) ; V. Gribov et B. Pontecorvo, *Neutrino astronomy and lepton charge*, Phys. Lett. **28B**, 493 (1969).
- [22] J. N. Bahcall, N. Cabibbo et A. Yahil, *Are neutrinos stable particles ?*, Phys. Rev. Lett. **28**, 316 (1972) ; J. N. Bahcall, S. T. Petcov, S. Toshev et J. W. F. Valle, *Tests of neutrino stability*, Phys. Lett. **B181**, 369 (1986).
- [23] Y. Fukuda *et al*, Super-Kamiokande Collaboration, *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998) ; K. S. Hirata *et al*, Kamiokande-II Collaboration, *Experimental study of the atmospheric neutrino flux*, Phys. Lett. **B205**, 416 (1988).
- [24] J. G. Learned, S. Pakvasa et T. J. Weiler, *Neutrino mass and mixing implied by underground deficit of low energy muon-neutrino events*, Phys. Lett. **B207**, 79 (1988) ; V. Barger et K. Whisnant, *The effects of neutrino oscillations with one mass scale on the atmospheric neutrino flux*, Phys. Lett. **B209**, 365 (1988) ; K. Hidaka, M. Honda et S. Midorikawa, *Neutrino oscillations and the anomalous atmospheric neutrino flux*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1537 (1988).
- [25] V. Barger, J. G. Learned, S. Pakvasa et T. J. Weiler, *Neutrino Decay as an Explanation of Atmospheric Neutrino Observations*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2640 (1999) ; V. Barger, J. G. Learned, P. Lipari, M. Lusignoli, S. Pakvasa et T. J. Weiler, *Neutrino Decay and Atmospheric Neutrinos*, Phys. Lett. **B462**, 109 (1999).

- [26] C. Athanassopoulos *et al*, LSND Collaboration, *Evidence for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ oscillations from the LSND experiment at LAMPF*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3082 (1996); C. Athanassopoulos *et al*, LSND Collaboration, *Results on $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ neutrino oscillations from the LSND experiment*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1774 (1998).
- [27] L. Wolfenstein, *Neutrino oscillations in matter*, Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978); S. P. Mikheyev *et al*, *Resonance enhancement of oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy*, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913 (1985); H. A. Bethe, *Possible explanation of the solar-neutrino puzzle*, Phys. Rev. Lett. **56**, 1305 (1986).
- [28] S. M. Bilenky *et al*, *See-saw type mixing and $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ oscillations*, Phys. Lett. **B300**, 137 (1993).
- [29] Z. Maki, M. Nakagawa *et al*, *Remarks on the unified model of elementary particles*, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [30] C. Giunti, C. W. Kim, U. W. Lee, *Remarks on the weak states of neutrinos*, Phys. Rev. **D45**, 2414 (1992).
- [31] O. Nachtmann, *Elementary particle physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1990) p. 443.
- [32] R. G. Sachs, *Interference phenomena of neutral K mesons*, Ann. Phys. **22**, 239 (1963).
- [33] C. P. Enz *et al*, *On the phenomenological description of CP violation for K-mesons and its consequences*, Helv. Phys. Acta **38**, 860 (1965).
- [34] L. Alvarez-Gaumé, C. Kounnas, S. Lola *et al*, *Violation of time-reversal invariance and CPLEAR measurements*, Phys. Lett. **B458**, 347 (1999).
- [35] C. Jarlskog, *Commutators of the quark mass matrices in the standard electroweak model and a measure of maximal CP violation*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985).
- [36] K. Gottfried *et al*, *Concepts of Particle Physics* (Clarendon Press, Oxford, 1984) vol. I p. 151.
- [37] Y. Srivastava, A. Widom *et al*, *Spatial correlations in two neutral kaon decays*, Z. Phys. **C66**, 601 (1995).
- [38] H. J. Lipkin, *Theories of non-experiments in coherent decays of neutral mesons*, Phys. Lett. **B348**, 604 (1995).
- [39] J. Lowe, B. Bassaleck, H. Burkhardt, A. Rusek, G. J. Stephenson Jr. *et al*, *No Λ oscillations*, Phys. Lett. **B384**, 288 (1996); H. Burkhardt, J. Lowe, G. J. Stephenson Jr. *et al*, *Oscillations of recoil particles against mixed states*, Phys. Rev. **D59**, 054018 (1999).
- [40] B. Kayser, *The frequency of neutral meson and neutrino oscillation*, SLAC-PUB-7123; B. Kayser, *CP violation, mixing, and quantum mechanics*, Proc. of 28th HEP Conf., Varsovie 1996, p. 1135 (hep-ph/9702327).
- [41] Voir par exemple : R. N. Mohapatra *et al*, *Massive neutrinos in physics and astrophysics*, (World Scientific, Singapore, 1991), p. 156.
- [42] R. G. Winter, *Neutrino oscillation kinematics*, Lett. Nuovo Cimento **30**, 101 (1981).
- [43] T. Goldman, *Source dependence of neutrino oscillations*, hep-ph/9604357.

- [44] A. D. Dolgov, A. Yu. Morozov, L. B. Okun et M. G. Schepkin, *Do muons oscillate ?*, Nucl. Phys. **B502**, 3 (1997).
- [45] H. J. Lipkin, *Quantum mechanics of neutrino oscillations - Hand waving for pedestrians*, hep-ph/9901399.
- [46] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, Ann. Math. **59**, 1 (1954) ; A. Galindo et P. Pascual, *Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1990, p. 292 ; F. A. Kaempffer, *Concepts in quantum mechanics* (Academic Press, 1965), p. 341 ; cette dernière référence est aussi intéressante pour sa présentation des théories de Yang-Mills et de la gravitation comme théorie de jauge.
- [47] M. Blasone, P. A. Henning et G. Vitiello, *The exact formula for neutrino oscillations*, Phys. Lett. **B451**, 140 (1999) ; M. Blasone et G. Vitiello, *Remarks on the neutrino oscillation formula*, Phys. Rev. **D60**, 111302 (1999).
- [48] M. Beuthe, G. López Castro et J. Pestieau, *Field theory approach to $K^0 - \overline{K}^0$ and $B^0 - \overline{B}^0$ systems*, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 3587 (1998).
- [49] M. Veltman, *Unitarity and causality in a renormalizable field theory with unstable particles*, Physica **29**, 186 (1963) ; *ibid.*, *Diagrammatica* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [50] Y. Srivastava, A. Widom et E. Sassaroli, *Λ oscillations*, Phys. Lett. **B344**, 436 (1995).
- [51] Y. Srivastava, A. Widom et E. Sassaroli, *Charged lepton oscillations*, hep-ph/9509261 ; *ibid.*, *Charged leptons and neutrino oscillations*, Eur. Phys. J. **C2**, 769 (1998) ; Y. Srivastava et A. Widom, *Of course muons can oscillate*, hep-ph/9707268.
- [52] B. Kayser, *On the quantum mechanics of neutrino oscillation*, Phys. Rev. **D24**, 110 (1981).
- [53] C. Giunti, C. W. Kim, J. A. Lee et U. W. Lee, *Treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigenstates*, Phys. Rev. **D48**, 4310 (1993) ; C. Giunti, C. W. Kim et U. W. Lee, *When do neutrinos cease to oscillate ?*, Phys. Lett. **B421**, 237 (1998).
- [54] R. G. Stuart, *Gauge invariance, analyticity and physical observables at the Z^0 resonance*, Phys. Lett. **B262**, 113 (1991) ; U. Baur et D. Zeppenfeld, *Finite width effects and gauge invariance in radiative W production and decay*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1002 (1995) ; J. Papavassiliou et A. Pilaftsis, *Gauge-independent approach to resonant transition amplitudes*, Phys. Rev. **D53**, 2128 (1996) ; M. Beuthe, R. Gonzalez Felipe, G. López Castro et J. Pestieau, *Behaviour of the absorptive part of the $W^\pm$ electromagnetic vertex*, Nucl. Phys. **B498**, 55 (1997) et références incluses.
- [55] G. Källén, *On the definitions of the renormalization constants*, Helv. Phys. Acta **25**, 417 (1957) ; H. Lehmann, *On the properties of propagation functions and renormalization constants of quantized fields*, Nuovo Cimento **11**, 342 (1954) ; pour une présentation moderne, voir par exemple [6], p. 282.
- [56] R. E. Cutkosky, *Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes*, J. Math. Phys. **1**, 429 (1960) ; voir aussi [65], p. 235.

- [57] G. Buchalla, A. J. Buras et M. E. Lautenbacher, *Weak decays beyond leading logarithms*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1125 (1996).
- [58] L. Okun, *Leptons and quarks* (North-Holland, Amsterdam, 1982), p. 85.
- [59] L. Baulieu et R. Coquereaux, *Photon-Z mixing in the Weinberg-Salam model*, Ann. Phys. **140**, 163 (1982).
- [60] S. Coleman et H. J. Schnitzer, *Mixing of elementary particles*, Phys. Rev. **134**, B863 (1964) ; H. B. O'Connell, *Recent developments in rho-omega mixing*, Aust. J. Phys. **50**, 255 (1997), hep-ph/9604375.
- [61] J. Rich, *Quantum mechanics of neutrino oscillations*, Phys. Rev. **D48**, 4318 (1993).
- [62] W. Grimus, P. Stockinger et S. Mohanty, *The field-theoretical approach to coherence in neutrino oscillations*, Phys. Rev. **D59**, 013011 (1999).
- [63] J. E. Campagne, *Neutrino oscillations from a pion decay in flight*, Phys. Lett. **B400**, 135 (1997).
- [64] W. Grimus et P. Stockinger, *Real oscillations of virtual neutrinos*, Phys. Rev. **D54**, 3414 (1996).
- [65] M. E. Peskin et D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Reading, 1995) p. 102.
- [66] D. Sudarsky, E. Fischbach, C. Talmadge, S. H. Aronson et H.-Y. Cheng, *Effects of external fields on the neutral kaon system*, Ann. Phys. **207**, 103 (1991).
- [67] A. Peres, *Nonexponential decay law*, Ann. Phys. **129**, 33 (1980).
- [68] J. R. Fry, *CP violation and the standard model*, Rep. Prog. Phys. **63**, 117 (2000).
- [69] C. Caso et al, Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C3**, 1 (1998) ; la nouvelle édition vient de paraître : D. E. Groom et al, Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C15**, 1 (2000) ; on peut aussi consulter le site [http ://pdg.lbl.gov/](http://pdg.lbl.gov/)
- [70] R. Fleischer, *CP Violation and the role of electroweak penguins in nonleptonic B decays*, Int. J. Mod. Phys. **A12**, 2459 (1997), et références incluses.
- [71] C. B. Chiu et E. C. G. Sudarshan, *Decay and evolution of the neutral kaon*, Phys. Rev. **D42**, 3712 (1990).
- [72] Q. Wang et A. I. Sanda, *Neutral kaon system reinvestigated*, Phys. Rev. **D55**, 3131 (1997).
- [73] C. Giunti, C. W. Kim et U. W. Lee, *When do neutrinos really oscillate ? Quantum mechanics of neutrino oscillations*, Phys. Rev. **D44**, 3635 (1991) ; C. W. Kim et A. Pevsner, *Neutrinos in physics and astrophysics* (Harwood Academic Publishers, Chur, 1993), chap. 9 ; C. Giunti et C. W. Kim, *Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach*, Phys. Rev. **D58**, 017301 (1998).
- [74] S. Nussinov, *Solar neutrinos and neutrino mixing*, Phys. Rev. **63B**, 201 (1976) ; S. M. Bilenky et B. Pontecorvo, *Lepton mixing and neutrino oscillation*, Phys. Rep. **41C**, 225 (1978).

- [75] K. Kiers, S. Nussinov et N. Weiss, *Coherence effects in neutrino oscillations*, Phys. Rev. **D53**, 537 (1996).
- [76] J. N. Bahcall et S. C. Frautschi, *Lepton non-conservation and solar neutrinos*, Phys. Lett. **29B**, 623 (1969).
- [77] S. L. Glashow et L. M. Krauss, *"Just so" neutrino oscillations*, Phys. Lett. **B190**, 199 (1987).
- [78] L. Krauss et F. Wilczek, *Solar-neutrino oscillations*, Phys. Rev. Lett. **55**, 122 (1985).
- [79] D. V. Ahluwalia et T. Goldman, *Interplay of non-relativistic and relativistic effects in neutrinos oscillations*, Phys. Rev. **D56**, 1698 (1997).
- [80] P. Reinartz et L. Stodolsky, *Neutrino masses and mixings in supernova bursts*, Z. Phys. **C27**, 507 (1985).
- [81] J. Schechter et J. W. F. Valle, *Neutrinos masses in $SU(2) \times U(1)$ theories*, Phys. Rev. **D22**, 2227 (1980).
- [82] B. Kayser, F. Gibrat-Debu et F. Perrier, *The physics of massive neutrinos* (World Scientific, Singapore, 1989), p. 59.
- [83] I. Yu. Kobzarev, B. V. Martem'yanov, L. B. Okun' et M. G. Shchepkin, *Phenomenology of neutrino oscillations*, Sov. J. Nucl. Phys. **32**, 823 (1980) ; S. M. Bilenky, J. Hošek et S. T. Petcov, *On the oscillations of neutrinos with Dirac and Majorana masses*, Phys. Lett. **94B**, 495 (1980).
- [84] C. Y. Cardall, *Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory*, Phys. Rev. **D61**, 073006 (2000) ; C. Y. Cardall et D. J. H. Chung, *The MSW effect in quantum field theory*, Phys. Rev. **D60**, 073012 (1999).
- [85] Yu. V. Shtanov, *Space-time description of neutrino flavour oscillations*, Phys. Rev. **D57**, 4418 (1998).
- [86] K. Kiers et N. Weiss, *Neutrino oscillations in a model with a source and detector*, Phys. Rev. **D57**, 3091 (1998).
- [87] A. Ioannisian et A. Pilaftsis, *Neutrino oscillations in space within a solvable model*, Phys. Rev. **D59**, 053003 (1999).
- [88] *The DAΦNE Physics Handbook* Vol. I, eds. L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver (INFN-LNF Publications, 1992) ; P. H. Eberhard, in : *The Second DAΦNE Physics Handbook*, Vol. I, p. 99, eds. L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver (INFN-LNF Publications, 1995).
- [89] H. Albrecht et al, Collaboration ARGUS, *A study of $\overline{B}^0 \rightarrow D^{*+} l^- \bar{\nu}$ and $B^0 \overline{B}^0$ mixing using partial D^{*+} reconstruction*, Phys. Lett. **B324**, 249 (1994) ; J. Bartelt et al, Collaboration CLEO, *Two measurements of $B^0 \overline{B}^0$ mixing*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1680 (1993) ; H. Schröder, *$B\bar{B}$ mixing*, in : *B decays*, Rev. 2nd ed., ed. S. Stone (World Scientific, Singapore, 1994) p. 449.
- [90] *KEK-B 1995 B factory Design Report KEK ; BABAR 1995 Technical Design Report SLAC-R-95-0457*.

- [91] I. Dunietz, J. Hauser et J. Rosner, *Proposed experiment addressing CP and CPT violation in the $K^0-\bar{K}^0$ system*, Phys. Rev. **D35**, 2166 (1987) ; C. D. Buchanan, R. Cousins, D. Dib, R. D. Peccei et J. Quackenbush, *Testing CP and CPT violation in the neutral kaon system at a ϕ factory*, Phys. Rev. **D45**, 4088 (1992) ; M. Hayakawa et A. I. Sanda, *Searching for T, CP, CPT, and $\Delta S = \Delta Q$ rule violations in the neutral K system : A guide*, Phys. Rev. **D48**, 1150 (1993).
- [92] M. Zralek, *From kaons to neutrinos : quantum mechanics of particle oscillations*, Acta Phys. Polon. **B29**, 3925 (1998).
- [93] A. Angelopoulos et al, CPLEAR Collaboration, *Measurement of the K_L-K_S mass difference using semileptonic decays of tagged neutral kaons*, Phys. Lett. **B444**, 38 (1998).
- [94] A. Angelopoulos et al, CPLEAR Collaboration, *First direct observation of time-reversal non-invariance in the neutral-kaon system*, Phys. Lett. **B444**, 43 (1998).
- [95] R. Adler et al, CPLEAR Collaboration, *First determination of CP violation parameters from $K^0-\bar{K}^0$ decay asymmetry*, Phys. Lett. **B286**, 180 (1992) ; A. Apostolakis et al, CPLEAR Collaboration, *A determination of the CP violation parameter η_{+-} from the decay of strangeness-tagged neutral kaons*, Phys. Lett. **B458**, 545 (1999).
- [96] R. Adler et al, CPLEAR Collaboration, *First observation of a particle-antiparticle asymmetry in the decay of neutral kaons into $\pi^0\pi^0$* , Z. Phys. **C70**, 211 (1996) ; A. Angelopoulos et al, CPLEAR Collaboration, *Measurement of the CP-violation parameter η_{00} using tagged $\bar{K}^0$ and K^0* , Phys. Lett. **B420**, 191 (1998).
- [97] A. Datta et D. Kumbhakar, *$D^0-\bar{D}^0$ mixing : a possible test of physics beyond the standard model*, Z. Phys. **C27**, 515 (1985).
- [98] A. B. Carter et A. I. Sanda, *CP nonconservation in cascade decays of B mesons*, Phys. Rev. Lett. **45**, 952 (1980) ; I. I. Bigi et A. I. Sanda, *Notes on the observability of CP violations in B decays*, Nucl. Phys. **B193**, 85 (1981) ; *ibid.*, *CP violation in heavy flavor decays : predictions and search strategies*, **B281**, 41 (1987) ; voir aussi la référence [70].
- [99] D. Delépine, J.-M. Gérard, J. Pestieau et J. Weyers, *Final state interaction phases in $(B \rightarrow K\pi)$ decay amplitudes*, Phys. Lett. **B429**, 106 (1998).
- [100] Y. Nir et H. R. Quinn, *Theory of CP violation in B decays*, in : *B decays*, Rev. 2nd ed., ed. S. Stone (World Scientific, Singapore, 1994) p. 520 ; une synthèse figure dans la référence [69], p. 555 à 562.
- [101] L.-L. Chau, *Quark mixing in weak interactions*, Phys. Rep. **95**, 1 (1983).
- [102] W. Grimus, *CP violating phenomena and theoretical results*, Fortschr. Phys. **36**, 201 (1988) et références incluses.
- [103] L. Wolfenstein, *Models of CP violation*, in : *Theory and phenomenology in particle physics*, ed. A. Zichichi (Academic Press, New York, 1969), Part A, p. 218.
- [104] J.-M. Gérard, *CP- and T- violations in the standard model* in : *Cargèse, 1992 : Quantitative particle physics*, p. 149.

- [105] R. E. Marshak, Riazuddin et C. P. Ryan, *Theory of weak interactions in particle physics*, (Wiley-Interscience, New York, 1969), p. 546.
- [106] A. J. Buras et J. M. Gérard, *Isospin breaking contributions to ϵ'/ϵ* , Phys. Lett. **B192**, 156 (1987).
- [107] N. F. Mott, *The wave mechanics of α -ray tracks*, Proc. R. Soc. London, **A126**, 79 (1929), reprinted in *Quantum theory and measurement*, ed. J. A. Wheeler et W. H. Zurek (Princeton University Press, Princeton, 1983); L. I. Schiff, *Quantum mechanics*, 3rd ed. (McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1968), p. 335.
- [108] Ya. I. Azimov, *K^0 decays as analyzers of B^0 decays : How to measure the sign of Δm_B* , Phys. Rev. **D42**, 3705 (1990); *ibid.*, *Phenomenology of neutral D-meson decays and double flavor oscillations*, Eur. Phys. J. **A4**, 21 (1999).
- [109] B. Kayser et L. Stodolsky, *Cascade mixing, a new kind of particle mixing phenomenon*, hep-ph/9610522; B. Kayser, *Cascade mixing and the CP-violating angle beta*, hep-ph/9709382.