



Schéma lifting quinconce pour la compression d'images

Annabelle Gouze

► To cite this version:

Annabelle Gouze. Schéma lifting quinconce pour la compression d'images. Interface homme-machine [cs.HC]. Université de Nice Sophia Antipolis, 2002. Français. NNT : . tel-00460154

HAL Id: tel-00460154

<https://theses.hal.science/tel-00460154v1>

Submitted on 26 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

École Doctorale STIC

Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Automatique, traitement du signal et des images

par

Annabelle GOUZE

**SCHÉMA LIFTING QUINCONCE
POUR LA COMPRESSION D'IMAGES**

soutenue publiquement le 12/12/02 devant la commission d'Examen composée de :

M. Jean-Marc CHASSERY	Directeur de Recherche au LIS de Grenoble	Rapporteur
M. Benoît MACQ	Professeur à l'Université Catholique de Louvain la Neuve	Rapporteur
M. Pierre SIOHAN	Directeur de Recherche à l'IRISA de Rennes	Rapporteur
M. Bernard ROUGÉ	Ingénieur au CNES de Toulouse	Membre
M. Michel BARLAUD	Professeur à l'Université de Nice-Sophia Antipolis	Directeur de thèse
M. Marc ANTONINI	Chargé de Recherche CNRS	Co-directeur de thèse

Remerciements

Cette thèse parachève trois années de travail au Laboratoire Informatique Systèmes et Signaux de Sophia Antipolis (I3S CNRS - Université de Nice Sophia Antipolis), au sein du projet CreATIVE. Avant toutes choses, je me dois d'adresser mes remerciements à tous les membres du laboratoire et des équipes d'enseignements qui ont contribué à créer une atmosphère de travail des plus agréables.

Je remercie M. Pierre Bernhard de m'avoir accueillie dans son laboratoire.

J'adresse tout d'abord mes remerciements au Professeur Michel Barlaud pour m'avoir accueillie au sein de son équipe et pour avoir dirigé mes travaux.

Je remercie également M. Marc Antonini pour son encadrement, ses conseils et sa lecture.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury,

merci à Benoît Macq pour l'intérêt qu'il porte à mes recherches, pour son aide et ses bons conseils et bien entendu pour m'avoir accueillie pour quelques séjours au laboratoire TELE,

merci à Pierre Siohan pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse et pour sa lecture attentive ainsi que ses conseils,

merci à Jean Marc Chassery pour avoir accepté d'être mon rapporteur et pour sa lecture attentive,

merci à Monsieur Bernard Rougé pour avoir inspiré mon étude sur le quinconce grâce à l'initiative de la fameuse double barrette CCD.

Je tiens également à remercier tous les membres du projets CreATIVE pour ces moments de joie et de bonne humeur que nous avons partagé. Je remercie Christophe pour sa patience, son aide et ses bons conseils, Olivier, tous ceux qui ont partagés mon bureau : Stéphanie, pour avoir su m'encourager, Manuella et la petite Patricia, Xavier, Joël, et les autres Lionel pour sa serviabilité et ses mémorables histoires sur Carcès qui animèrent les pauses café, Valéry, Stéphane, Éric, les deux Fred, Muriel, Vivien, Pascal, Diane, Pierre et tous les autres. J'associe à ces remerciements Micheline, Cécile, Corinne, Viviane, Zorha, Guy, Patrick, Lionel, Christian.

Je tiens également à remercier ma famille et mes amis, en particulier le groupe d'Assise, Alex, Aude, mes parents, Caro, Christophe, Anne Gaëlle, Guillaume, Emilie, Paul, Céline, Solène, Damien et Noémie.

Table des matières

Notations	ix
Introduction générale	1
I État de l’art	5
1 Introduction aux méthodes de compression et aux transformées	7
1.1 Introduction aux méthodes de compression	7
1.1.1 Aperçu des différentes transformées	8
1.1.2 Aperçu des différentes méthodes de compression	11
1.1.3 Méthodes avec perte d’information	13
1.1.4 Définitions de critères utilisés en compression	14
1.2 Théorie des ondelettes et analyse multirésolution	16
1.2.1 Généralités	16
1.2.2 Analyse Multirésolution	18
1.2.3 Transformée en ondelettes unidimensionnelle rapide	21
1.2.4 Transformée en ondelettes bidimensionnelle séparable	25
1.2.5 Transformée en ondelettes quinconce	27
1.2.6 Nouvelles classes d’ondelettes	29
1.3 Introduction au schéma lifting et aux ondelettes de seconde génération . . .	29
1.3.1 Théorie du schéma lifting	30
1.3.2 Propriétés du schéma lifting	32
1.3.3 Correspondance entre schéma lifting et transformée en ondelettes première génération	34
1.3.4 Lifting sur les entiers	36
1.3.5 Ondelettes de seconde génération	37
1.3.6 Conclusion	39
II Schéma lifting sur grille quinconce et généralisation	41
2 Schéma lifting bidimensionnel non-séparable : formulation et « factori- sation »	45

2.1	Formulation du schéma lifting quinconce	45
2.1.1	Schéma lifting quinconce	45
2.1.2	Transformée en ondelettes quinconce par schéma lifting	46
2.1.3	Calcul du banc de filtres associés	48
2.1.4	Calcul des ondelettes et fonctions d'échelle	49
2.1.5	Conclusion	50
2.2	« Factorisation » de filtres bidimensionnels non-séparables en schéma lifting	51
2.2.1	Problématique	51
2.2.2	Extension quinconce : définition et contraintes	51
2.2.3	Réalisation du schéma lifting quinconce	54
2.2.4	Propriétés	58
2.2.5	Exemples de filtres	61
2.3	Problème de la normalisation des filtres et rectifications des pondérations	65
2.4	Avantages et inconvénients	67
2.4.1	Transformée inverse	68
2.4.2	Schéma lifting version entière	68
2.5	Gain en complexité	70
2.5.1	Calcul du nombre d'opérations pour un filtre diamant quinconce (cas des filtres échantillonnés sur une grille quinconce)	70
2.5.2	Calcul du nombre d'opérations arithmétiques requises pour un schéma lifting à M pas (primaux et duaux)	71
2.5.3	Calcul du nombre d'opérations requises pour la transformée en ondelettes par banc de filtres	72
2.5.4	Mise en évidence du gain en coût filtrage entre un schéma lifting quinconce et une transformée en ondelettes quinconce	73
2.5.5	Calcul du gain pour les filtres (9,7) quinconce :	76
2.6	Conclusion	77
3	Optimisation de filtres lifting	79
3.1	Définition de la méthode utilisant l'optimisation de Wiener	80
3.1.1	Optimisation de l'opérateur de prédiction	80
3.1.2	Optimisation de l'opérateur de mise à jour	81
3.2	Propriétés et contraintes sur les opérateurs lifting	82
3.2.1	Cadre de l'étude et propriétés	82
3.2.2	Contraintes	83
3.3	Méthode d'optimisation sous contraintes basée sur les filtres de Wiener	85
3.3.1	Processus aléatoires	85
3.3.2	Définition de l'opérateur de prédiction P	86
3.3.3	Définition de l'opérateur U de mise à jour	89
3.4	Cas de l'optimisation de filtres quinconce.	93
3.4.1	Recherche du filtre de prédiction P	93
3.4.2	Recherche du filtre de mise à jour U	95
3.5	Robustesse de l'algorithme	97
3.6	Vérification du minimum	98

3.7	Nouveau critère d'optimisation du pas de mise à jour	98
3.7.1	Problématique	98
3.7.2	Définition du nouvel opérateur de mise à jour	100
3.7.3	Robustesse de l'algorithme et minimum global	103
3.8	Conclusion	104

III Évaluation du schéma lifting quinconce au sein d'une chaîne de compression 105

4	Implémentation et complexité du schéma lifting quinconce	109
4.1	Schéma lifting quinconce au « fil de l'eau »	110
4.1.1	Définition du délai	111
4.1.2	Taille de l'espace mémoire temporaire nécessaire pour un schéma lifting quinconce au « fil de l'eau »	120
4.1.3	Transformée en ondelettes quinconce au « fil de l'eau »	129
4.1.4	Exemples pour des filtres connus	130
4.1.5	Gain de mémoire entre le schéma lifting et la transformée en ondelettes rapide	131
4.2	Complexité du filtrage	132
4.2.1	Coût calcul	132
4.3	Conclusion	135
5	Évaluation du lifting en terme de qualité	137
5.1	Présentation des codeurs exploités	137
5.1.1	JPEG2000 (Joint Picture Expert Group 2000)	137
5.1.2	EBWIC	138
5.2	Évaluation de la distorsion de reconstruction (associée aux algorithmes d'allocations débit)	139
5.3	Application du schéma lifting quinconce au codage non-conservatif	142
5.3.1	Introduction	142
5.3.2	Cadre de l'étude des images haute résolution	142
5.4	Évaluation des méthodes d'optimisation	147
5.4.1	Définition du nombre de résolutions pour lesquelles le schéma lifting est optimisé	147
5.4.2	Progressivité en résolution	150
5.4.3	Optimisation appliquée à la compression haut et bas débits	152
5.5	Évaluation qualitative des critères d'optimisation (bruit de quantification pris en compte)	154
5.6	Application aux schémas de compression sans perte d'information	155
5.6.1	Images de la base JPEG2000	155
5.6.2	Imagerie satellitaire	156
5.7	Conclusion	157

Conclusion et perspectives 173

Glossaire et listes des abréviations	177
IV Annexes	181
A Compléments sur les grilles d'échantillonnages quinconce	183
A.1 Grille quinconce	183
A.2 Détails pour l'implémentation	185
A.3 Filtrage par schéma lifting quinconce	186
A.4 Gestion des problèmes aux limites du support	188
B Complément sur le schéma lifting quinconce et preuves	191
B.1 Preuve de la proposition 13	191

Notations

Les ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels
 $\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs
 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$: Sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres rationnels), s'identifiant à $\{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z}\}$
 $\{n, \dots, N\}$: Ensemble des points $k \in \mathbb{N}$ (ou $\in \mathbb{Z}$) vérifiant $n \leq k \leq N$
 $\mathbb{R}$: Ensemble des réels
 $\mathbb{R}^*$: Ensemble des réels hormis l'élément nul ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Les espaces de fonctions monodimensionnelles

- $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions mesurables à valeur dans $\mathbb{C}$ et de carré sommable (fonctions d'énergie finie)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

- $\ell^2(\mathbb{Z})$: L'ensemble des suites de carré sommable ou l'ensemble des signaux discret d'énergie finie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f[n]|^2 < +\infty$$

Les espaces de fonctions bidimensionnelles

- $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$: L'ensemble des fonctions à deux variables, mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de carrés sommables (fonctions d'énergie finie)

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|^2 dx dy < +\infty$$

- $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$: L'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}^2$, à valeur dans $\mathbb{C}$ et de carrés sommables ou l'ensemble des signaux discrets d'énergie finie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n_1, n_2]|^2 < +\infty$$

Transformées

$Id(.)$: Fonction identité

$f(z)$: Transformée en z du filtre linéaire $f[n]$, avec

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n}$$

$\hat{f}(w)$: Transformée de Fourier 1D (1.1.1.2)

$\hat{f}[n]$ ou $\hat{f}_n$: Transformée de Fourier 1D discrète (1.1.1.2)

$\delta[x]$: Fonction de Dirac qui prend la valeur 1 en $x = 0$ et 0 ailleurs

Transformée 2D

$f(z_1, z_2)$: Transformée en z du filtre linéaire $f[m, n]$, avec

$$f(z) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} f[m, n] z^{-m} z^{-n}$$

$\hat{f}(w_1, w_2)$: Transformée de Fourier 2D (1.1.1.2)

$\hat{f}[m, n]$ ou $\hat{f}_{m, n}$: Transformée de Fourier 2D discrète (1.1.1.2)

$\delta[x, y]$: Fonction de Dirac en dimension 2. $\delta[x, y] = \delta[x] \delta[y]$

Opérateurs

$\lfloor x \rfloor$: Pour $x \in \mathbb{R}$, le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x$ (arrondi à l'entier inférieur)

$\lceil x \rceil$: Pour $x \in \mathbb{R}$, le plus petit entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geq x$ (arrondi à l'entier supérieur)

z^* : Complexe conjugué, défini pour $z \in \mathbb{C}$

$f \star g(t)$: Convolution de f et g : $f \star g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) dx$

$f \star g[n]$: Convolution discrète de f et g : $f \star g[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n] g[k - n]$

$A \oplus B$: Somme directe des espaces vectoriels A et B

$A \otimes B$: Produit tensoriel des espaces vectoriels A et B

Probabilités

$E\{X\}$: Espérance mathématique de la variable aléatoire X

η_x : Valeur moyenne de la variable aléatoire X

σ_x^2 : Variance de la variable aléatoire X

$H(X)$: Entropie de X

$\Gamma(X_1, X_2)$: Covariance des variables aléatoires X_1 et X_2

Introduction générale

« L'homme ne pense jamais sans image ». Cette citation d'Aristote laisse entrevoir l'image comme un objet de prédilection pour appréhender le monde et ses réalités. L'avènement de la numérisation des images et le développement des nouvelles technologies engendrent une circulation de l'information de plus en plus dense. Face à l'accroissement massif de la quantité de données échangées, les réseaux de transmission arrivent à saturation. En outre, un problème de stockage se pose, malgré l'expansion des capacités des disques durs et autres disques de stockage (DVD, CD-ROM). Dans ce contexte, la compression apparaît comme l'outil essentiel à la continuité du progrès. Les techniques de compression se doivent d'être constamment améliorées. Les limites des méthodes existantes sont sans cesse repoussées et le challenge consiste à en imposer de nouvelles. Diverses méthodes de compression ont été élaborées et normalisées par la communauté scientifique, cependant aucune ne présente un caractère universel. La sélection de techniques de codage dépend du contexte applicatif. Ce contexte peut être défini par le type d'images traitées (images fixes ou images vidéos), leur dynamique, la complexité du codeur, la qualité ou le débit ciblé. Autant de facteurs ne peuvent simultanément être pris en compte pour définir un codeur optimal. Dans le cadre de l'imagerie médicale, la qualité doit être privilégiée au détriment du débit. Les images destinées à circuler sur Internet doivent privilégier un débit faible, tout en conservant une qualité acceptable. Les images destinées au grand public tolèrent un certain nombre de pertes d'information, compte tenu du style d'image et des capacités de perception de l'oeil humain.

L'expansion de l'Internet nécessite que l'information puisse être lue par des réseaux hétérogènes. Le développement de standards de compression permet de définir, dans chaque contexte, des techniques de codage et de décodage connues des différents systèmes. Les normes tentent de se développer, en définissant un compromis entre quelques méthodes, suivant la qualité, le débit cible et la complexité désirés. La transformée en ondelettes est très appréciée dans ce contexte. Elle est exploitée par la norme JPEG2000. Ses bonnes qualités de décorrélation et sa particularité multiéchelle en font le puissant allié d'une compression efficace. Son aspect multiéchelle permet un codage et un décodage progressifs des données. Le schéma lifting permet d'optimiser la complexité du filtrage et d'offrir un meilleur rendement pour le codage des images « au fil de l'eau » par une réduction significative de la mémoire tampon et du coût de calcul. La transformée est naturellement étendue en dimension deux par le produit tensoriel des espaces d'approximations du signal. L'application de la transformée à l'image se traduit par la simple application de la transformée en dimension un sur les lignes puis les colonnes de l'image.

La transformée bidimensionnelle non-séparable développée pour agir sur une grille d'échantillonnage quinconce a du mal à trouver sa place au sein de toutes ces méthodes. Sa complexité d'implémentation en fait un facteur discriminant pour des codeurs requérant un minimum d'opérations. Une autre difficulté est de définir des bancs de filtres non-séparables efficaces et permettant une bonne décorrélation. Ces deux difficultés sont la cause d'un faible engouement pour les techniques de compression basées sur des transformées non-séparables. Paradoxalement, des techniques, qui représentent les images sur un échantillonnage quinconce, voient le jour. Par exemple, le système d'acquisition SPOT 5 (du CNES) utilise deux barrettes de capteurs CCD, qui définissent les images sur une grille d'échantillonnage quinconce. Certaines cartes vidéo récentes (GeForce3, GeForce4) définissent une image quinconce de résolution $\sqrt{2}$ fois supérieure à la résolution affichée, afin d'obtenir la meilleure définition possible. Le traitement de ce type d'image motive un regain d'intérêt pour la transformée non-séparable, lors du développement d'une chaîne de compression. L'intérêt est de définir des filtres moins coûteux ayant de bonnes caractéristiques.

Objectifs

Les travaux présentés ont pour objet le développement du schéma lifting quinconce et son évaluation, dans le cadre de la compression d'images. L'étude est réalisée en considération de nouvelles technologies représentant les données sur un échantillonnage quinconce.

La définition d'opérateurs 2D, échantillonnés en quinconce, est un vaste sujet auquel peu de personnes se sont attelées. La factorisation d'un banc de filtres, générant une transformée en ondelettes, en schéma lifting quinconce, reste un sujet ouvert. Nous proposons une solution dans le cadre de filtres bidimensionnels non-séparables présentant une symétrie octogonale et dont la transformée en z retourne un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. Nous proposons une implémentation au fil de l'eau du schéma lifting quinconce. Les coûts de l'implémentation et le gain en mémoire et en complexité par rapport au filtrage par banc de filtres sont évalués de manière théorique. Un troisième objectif consiste à définir un schéma lifting à partir d'une étude des statistiques de l'image. Les opérateurs lifting seront adaptés aux propriétés statistiques des images à coder. Le but est de définir un schéma, optimisant les performances, en adéquation avec les codeurs mettant en jeu une méthode d'allocation de débit. Ces méthodes ont pour objectif de fournir un algorithme de compression approprié et efficace pour des images directement échantillonnées en quinconce.

Plan

1. La première partie de cette thèse présente un bref descriptif de la chaîne de codage et des méthodes de compression. Elle bâtit un état de l'art sur la transformée en ondelettes et plus particulièrement sur le schéma lifting défini par Sweldens. Elle développe les outils et les notions nécessaires afin d'appréhender le contenu de nos travaux.
2. La seconde partie aborde l'aspect théorique de notre contribution au schéma lifting quinconce.

Au chapitre 2, nous avons redéfini les formules théoriques du schéma lifting dans

le cadre plus restreint de l'échantillonnage quinconce. Nous proposons une méthode permettant de définir une factorisation de la matrice polyphase bidimensionnelle pour des bancs de filtres bidimensionnels non-séparables et dont la transformée en z retourne un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. Ces filtres sont à phase nulle et à symétrie octogonale. La méthode proposée nous ramène à définir les calculs dans le cas 1D grâce à l'application de la transformée de McClellan.

Au chapitre 3, nous proposons une méthode pour concevoir des opérateurs lifting quinconce, basée sur les données observées. Les opérateurs sont définis en fonction des propriétés statistiques des signaux.

3. La troisième partie propose une évaluation du schéma lifting quinconce.

Le chapitre 4 se consacre à la définition d'une implémentation optimisée pour économiser en mémoire temporaire de calcul. Nous proposons une adaptation de la transformée en ondelettes au « fil de l'eau » au cadre du schéma lifting quinconce. Une évaluation du gain en mémoire et du gain en CPU est alors réalisée.

Le chapitre 5 donne une évaluation qualitative des méthodes développées. Nous présentons deux cadres d'étude. L'un porte sur des images naturelles échantillonnées sur une grille carrée, l'autre sur des images satellites définies sur une grille d'échantillonnage quinconce. Nous verrons dans quel cas la transformée en ondelettes quinconce offre un intérêt réel. Et nous étudierons les performances des filtres optimisés.

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Introduction aux méthodes de compression et aux transformées

Le domaine de la compression est en constante évolution face aux besoins croissants des nouvelles technologies de transmission de données. La recherche de méthodes novatrices, justifiant d'un échange de données plus fréquent et plus important, n'exclut pas les techniques les plus élémentaires. Au contraire, elles représentent une ressource des plus essentielles sur lesquelles se basent les nouveaux concepts. Avant d'aborder l'ensemble du contenu des travaux entrepris sur la compression, il est nécessaire d'appréhender, dans ce premier chapitre, quelques notions concernant la théorie de Shannon et les méthodes de compression.

1.1 Introduction aux méthodes de compression

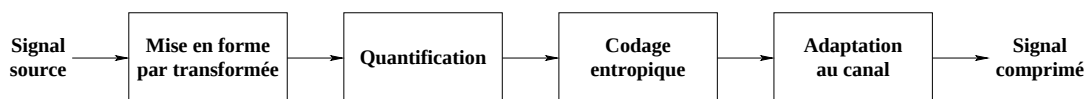


FIG. 1.1 – Schéma de compression

L'usage de signaux numériques devient de plus en plus courant avec le développement du multimédia et des applications interactives. La somme des données manipulées ou échangées est en perpétuelle progression. En outre, les signaux numériques sont codés sur un nombre imposant de bits. La compression, née du développement des techniques de numérisation et du multimédia, consiste à coder l'ensemble de ces données sur un nombre réduit de bits. La compression peut s'effectuer à l'aide de techniques ne concédant aucune perte d'information ou reposant sur l'estimation que certains détails, fort peu perceptibles par l'utilisateur, peuvent délibérément être omis. Ainsi, se différencient deux grandes catégories de techniques dites « sans perte » ou « avec perte » d'information. Le schéma de codage d'un signal est en général constitué d'une mise en forme du signal, afin de l'adapter à la compression ; d'une étape de quantification ; d'une étape de codage entropique et finalement d'une adaptation

au canal (voir FIG. 1.1). L'étape de mise en forme se justifie par le fait que certains signaux, tels que les images, sont pour la plupart très fortement corrélés. Afin de comprimer efficacement les images, il est impératif de prendre en compte ce phénomène. L'information redondante est éliminée alors que l'information la plus essentielle à l'obtention d'une image finale de bonne qualité est préservée. Aussi un schéma de compression classique se décline généralement en deux étapes : une étape de décorrélation, réalisée soit par une méthode prédictive soit par une transformée, suivie d'une étape de codage avec ou sans perte.

1.1.1 Aperçu des différentes transformées

Le codage par transformée a pour but de modéliser le signal à partir de fonctions mathématiques. Au lieu de coder directement un signal source, il s'avère souvent plus avantageux de restructurer les données de manière à les rendre plus « adaptées » aux différents types de codeurs. La nature du signal transformé tend à améliorer les performances du codage. Il en résulte une meilleure compression. En effet, des théorèmes, portant sur la théorie du codage, mettent en évidence l'efficacité optimale des diverses méthodes de compression, pour des signaux bien particuliers. Ainsi, certains codeurs s'adaptent mieux aux signaux dont les intensités lumineuses ont une loi de distribution de probabilité gaussienne ou laplacienne[82, 80]. Le codage par plages de zéros s'adapte aux signaux contenant de larges plages de zéros tels que les documents textes. Un point fondamental marque le lien entre toutes les méthodes adoptant un codage par transformée. Il repose sur le constat qu'en traitement d'image, la plupart des signaux numériques présentent d'importantes corrélations. Le rôle essentiel des transformées est de décorréler une source de données, tandis que celui du codeur est d'éliminer l'information redondante. Il est très important de souligner qu'une transformée, en elle-même, ne réalise pas de compression ; seul le codeur appliqué en sortie de la transformée comprime l'image. La transformée permet seulement de générer un signal favorisant une compression plus efficace. Aussi, les diverses transformées employées ordonnent l'information, en séparant dans certains cas l'information basse fréquence de l'information haute fréquence, les corrélations proches des corrélations lointaines, les variations rapides des variations lentes. Les transformées effectuant la décorrélation en fréquence sont les plus utilisées en compression d'images et de séquences vidéo. D'une part l'information haute fréquence est moins dense que l'information basse fréquence, le signal qui en résulte permet de coder l'image sur un nombre réduit de bits. D'autre part, l'œil est plus sensible aux basses fréquences, et les techniques de codage avec perte visent à générer des pertes plus importantes dans les parties haute fréquence. En conclusion, une bonne transformée est une transformée inversible (indispensable pour le décodage d'image haute-définition), qui décorrèle l'information de manière efficace et qui concentre l'énergie du signal sur un minimum de coefficients. Les principales techniques sont la transformée de Fourier, la transformée de Hadamard, la DCT, la transformée de Karhunen-Loève et la transformée en ondelettes présentée dans la section 1.2. Plusieurs techniques s'appliquent sur des blocs d'images comme la DCT et la transformée de Karhunen-Loève. Cette dernière est la plus efficace pour un modèle stationnaire au sens large et une compression linéaire, mais elle est aussi la plus coûteuse. La DCT s'avère efficace, mais présente des « effets de blocs », lorsqu'elle est utilisée avec des codeurs bas débit. Pour éviter les effets de blocs, Malvar [71] a défini la transformée orthogonale à recouvrement (LOT). Elle découpe un

signal en composantes orthogonales dont les supports se recouvrent. La suite du chapitre présente une description succincte de l'ensemble des transformées énoncées. Cet état de l'art contribue à justifier notre choix pour la transformée en ondelettes par schéma lifting, dans le cadre de la compression d'images.

1.1.1.1 Transformée de Karhunen-Loève (KLT)

Pour un signal stationnaire au sens large et une compression linéaire, la transformée de Karhunen-Loève est une transformée optimale du point de vue de la décorrélation et de la concentration de l'énergie sur un nombre limité d'échantillons. Sa nature la rend dépendante de la source d'information. En effet, pour un signal donné $x = \{x(n), 1 \leq n \leq N\}$ de taille N , définissons R_x la matrice d'autocorrélation de x , $R_x = E \{xx^{*T}\}$, et Φ la matrice carrée de taille $N \times N$ qui diagonalise R_x :

$$\Phi^{*T} R_x \Phi = \Lambda$$

Λ est la matrice diagonale définie par les valeurs propres de R_x , notées $\lambda_k (\forall k \in \{1, \dots, N\})$. La transformée de Karhunen-Loève correspond à la matrice Φ^{*T} . Son application à x retourne un signal y défini par :

$$y = \Phi^{*T} x$$

Ainsi, la matrice de covariance de y est donnée par :

$$R_y = E \{yy^{*T}\} = \Phi^{*T} E \{xx^{*T}\} \Phi = \Phi^{*T} R_x \Phi = \Lambda \quad (1.1)$$

Les propriétés sur l'optimalité de la transformée résultent de l'équation (1.1). Les coefficients $y(n)$ ($1 \leq n \leq N$) de la transformée de Karhunen-Loève sont non-corrélés et ont une moyenne nulle.

$$\begin{cases} E \{y(n)\} = 0 \\ E \{y(n)y^*(m)\} = \lambda_n \delta(n - m) \end{cases}$$

Malgré ses performances, la transformée de Karhunen-Loève se voit souvent préférer la DCT à cause de la lourdeur de sa mise en œuvre. L'intérêt majeur de la KLT réside dans l'application aux signaux stationnaires au sens large et corrélés. La DCT est une approximation de la KLT pour des signaux présentant des corrélations du type exponentiel.

1.1.1.2 Transformée de Fourier

Le principe de la transformée de Fourier (TF) est de décrire une source d'information comme la somme d'autres signaux. La TF analyse le contenu de la source en révélant le spectre des fréquences. Afin de séparer les informations de fréquences différentes, la TF s'applique dans le domaine temporel (spatial en 2D) et se projette dans le domaine fréquentiel. La transformée de Fourier discrète unitaire d'un signal 1D, noté x , s'exprime de la façon suivante :

$$\hat{x}(w) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnw \frac{2\pi}{N}}$$

n et w définissent les indices temporel et fréquentiel d'un signal contenant N échantillons. La transformée 2D unitaire, quant à elle, s'exprime sous la forme :

$$\widehat{x}(w_1, w_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(k, l) e^{-j(kw_1 + lw_2) \frac{2\pi}{N}}$$

Conformément aux propriétés définies dans [51], la transformée de Fourier s'adapte aux signaux linéaires et stationnaires. La TF n'est pas satisfaisante pour une utilisation en compression d'images. Une simple quantification dans le domaine fréquentiel marque visiblement les discontinuités. Ce phénomène est principalement observé dans les hautes fréquences (phénomène de Gibbs). En conséquence, l'image reconstruite subit des dommages irréversibles. Les erreurs dans les hautes fréquences se traduisent, dans le domaine spatial, par de fortes détériorations au niveau des contours des objets. Ces dégradations s'identifient à un phénomène de « ringing ».

1.1.1.3 DCT

La transformée en cosinus discrète (DCT) est très populaire [1], et s'intègre parmi des standards comme JPEG [122], MPEG1-2, H261, H263, H264. Elle s'apparente à la transformée de Fourier. La différence majeure concerne simplement sa restriction aux nombres réels. La transformée 2D d'une image $s(y, x)$ (ou d'un sous-bloc) de taille $n \times n$ s'exprime ainsi :

$$S(u, v) = \frac{C(u)}{2} \frac{C(v)}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} s(j, i) \cos\left(\frac{(2i+1)u\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)v\pi}{2n}\right)$$

avec $C(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $C(u) = 1$ pour $u \neq 0$.

La transformée inverse s'exprime, quant à elle, sous la forme suivante :

$$s(i, j) = \sum_{u=0}^{n-1} \frac{C(u)}{2} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{C(v)}{2} S(u, v) \cos\left(\frac{(2i+1)u\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)v\pi}{2n}\right)$$

La popularité de la DCT est liée à l'existence d'algorithmes de transformation rapide (FFT). Elle s'applique sur les différents blocs d'une image plutôt que sur l'intégralité de l'image. La DCT a pour effet de réduire les corrélations présentes dans le signal. La méthode est efficace et permet d'obtenir, en lui associant les codeurs adéquats, un bon compromis débit distorsion. Cependant, son usage génère des déformations inter-blocs, aussi appelées « effets de blocs », qui peuvent entraîner une gêne visuelle importante pour la compression bas-débit. La norme JPEG utilise la DCT sur des blocs d'images 8×8 . Il existe deux types de composantes dans le bloc ; la composante DC, $S(0, 0)$, procure la moyenne des luminances du bloc (ou chrominances pour les images couleurs) et les 63 composantes restantes retournent les amplitudes des fréquences spatiales horizontales et verticales. Les dernières composantes du bloc représentent les fréquences les plus élevées.

1.1.2 Aperçu des différentes méthodes de compression

1.1.2.1 Méthodes sans perte

Les méthodes de compression sans perte d'information assurent la restitution intégrale d'une source suite au décodage. Le signal est reconstruit sans que celui-ci n'ait subi la moindre altération. La compression sans perte trouve un intérêt particulier en imagerie, par exemple, dans les domaines liés aux applications militaires ou médicales. Ces techniques ont la capacité de comprimer les données en exploitant uniquement les redondances. Elles sont dites réversibles, c'est à dire que le décodeur restitue parfaitement le signal d'origine à partir des données comprimées. Certaines de ces techniques sont, par ailleurs, appliquées dans le cadre de la compression non-conservative (avec perte d'information). Dans ce dernier cas, elles sont précédées d'une étape de quantification qui génère des pertes plus ou moins importantes.

1.1.2.2 Codage entropique

Le concept du codage entropique se fonde sur la théorie de l'information instituée par Shannon [100]. La stratégie consiste à exploiter l'analogie entre la probabilité d'un événement et la quantité associée d'information à transmettre. La définition de ces deux derniers points suppose la connaissance d'une source d'événements, $X = \{x_i\}$, composée de N symboles et d'une probabilité de distribution P . Chaque événement $x_i \in X$ possède une probabilité p_i et la quantité d'information associée est définie par : $I_i = -\log_2 p_i$. Shannon a défini l'entropie comme une grandeur déterminant la quantité d'information source à transmettre. Elle s'exprime en bits par échantillon (pixel dans le cas des images) :

$$H = - \sum_{i=0}^{N-1} p_i \log_2 p_i$$

Le codage entropique permet d'encoder différents symboles (luminances ou chrominances des pixels de l'image, valeurs en sortie du quantificateur [11], ...) en leur attribuant un mot binaire. La longueur de ce mot dépend de la fréquence d'apparition du symbole en question. La réalisation d'un code attribuant aux symboles les plus fréquents, les mots les plus courts, a pour conséquence de réduire le débit de l'image.

En considérant un ensemble de N valeurs (luminances ou chrominances) avec la probabilité de distribution P , le codeur assigne un code binaire à chaque symbole x_i de l'ensemble. Ce code est composé de l_i bits provenant de l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. La longueur moyenne du mot codé est définie par :

$$L = \sum_{i=0}^N p_i l_i$$

Le théorème fondamental du codage, énoncé par Shannon [100], établit que l'entropie est la longueur minimale nécessaire à l'encodage des données.

$$L \geq H$$

Un codeur efficace tend à définir un code de longueur moyenne la plus faible possible. Aussi, il doit minimiser le débit d'information de la source, L exprimé en bits par symbole, et faire tendre L vers l'entropie. La seule manière de diminuer le débit en deçà de l'entropie est de générer des dégradations dans le signal.

Parmi les méthodes d'encodage de mots de longueur variable fixés, le codage de Huffman est la technique la plus efficace. Le codage arithmétique est une méthode plus performante, mais il nécessite une connaissance a priori de l'intégralité des données.

1.1.2.3 Codage de Huffman

Le codage de Huffman [47] est une méthode de codage entropique plébiscitée parmi les standards de compression d'images fixes et de séquences vidéo. Le principe consiste à encoder les différents symboles par des mots binaires de longueurs variables. La longueur dépend de la probabilité d'apparition du symbole. Il met en œuvre un code préfixe, i.e. un mot du code ne doit pas être le préfixe d'un autre mot, qui assure l'unicité et par suite la réversibilité du code. Le principe du codage repose sur le fait que les différents symboles sont encodés par des mots de longueur différente suivant la probabilité d'apparition du symbole en question. L'algorithme opère essentiellement en trois étapes.

1. Les différents symboles x_i sont arrangés dans un ordre décroissant de probabilité p_i . Les différentes probabilités p_i constituent les feuilles d'un arbre binaire.
2. Le processus suivant est réitéré tant que la racine n'est pas atteinte.
 - a. Les deux nœuds de plus faibles probabilités sont sélectionnés. Ils sont reliés afin de former un nouveau nœud dont la valeur est la somme des probabilités des deux nœuds fils.
 - b. Les valeurs binaires 0 et 1 sont attribuées aux arêtes reliant le nœud père à ses deux fils.

Le même procédé est appliqué sur le nouvel ensemble de probabilité et ceci jusqu'à ce que la racine de l'arbre soit atteinte.

1.1.2.4 Codage Arithmétique

Le codage arithmétique [95] se singularise par sa capacité à coder chaque symbole sur un nombre non-entier de bits. En réalité, il n'assigne pas un mot de code à chaque symbole mais à un ensemble de symboles en lui associant un point du segment $[0, 1[$ (cf. [125]). Le principe repose sur le découpage de l'intervalle $[0, 1[$. Chaque symbole x_i se voit attribuer une partition de l'intervalle, dont la taille est égale à sa probabilité d'occurrence p_i . L'ordre de rangement des intervalles sera mémorisé, car il est nécessaire pour le décodage. La méthode associant l'ensemble des symboles aux points du segment $[0, 1[$ consiste à travailler sur un intervalle de type $[lim_inf, lim_sup[$ ($\subset [0, 1[$) représentant les limites inférieure et supérieure du code, définies par le sous-ensemble de symboles déjà observés. De façon plus explicite, l'algorithme de codage se construit ainsi :

1. Initialiser les limites inférieure et supérieure à 0 et 1.
2. Tant qu'il reste un symbole ($\in [lim_inf \text{ du symbole}, lim_sup \text{ du symbole}]$) à coder faire :

- a. $largeur = lim_sup - lim_inf$
- b. $lim_inf = lim_inf + largeur * (lim_inf \text{ du symbole})$
- c. $lim_sup = lim_sup + largeur * (lim_sup \text{ du symbole})$

3. Le code est alors considéré comme la limite inférieure située sur le segment $[0, 1[$.

Le codage arithmétique, autorisant à chaque caractère d'être codé sur un nombre non-entier de bits, est généralement plus performant que le codeur de Huffman. Il tend vers la limite inférieure théorique. Cependant, il est plus gourmand en ressources et nécessite de connaître l'intégralité du signal avant de pouvoir procéder au codage.

1.1.2.5 Codage par plages de zéros (Run Length)

La méthode de codage par plages de zéros est une méthode permettant de compresser efficacement l'image, si celle-ci contient un nombre important de zéros, ou plus précisément de plages de zéros. Le principe de codage est assez simple. Le codeur prend en entrée un ensemble de données, compte le nombre de zéros entre deux symboles non nuls et code l'entier représentant la longueur de la plage de zéros. Cette méthode est très utile et s'avère efficace lorsqu'une source présente de larges et de nombreuses plages de zéros.

1.1.3 Méthodes avec perte d'information

Les méthodes de compression sans perte sont souvent utilisées dans des domaines très spécifiques, pour lesquels aucune dégradation ne doit altérer l'image. L'utilisation des méthodes conservatives est limitée, étant donné qu'elles ne permettent d'atteindre qu'un faible taux de compression. Les méthodes avec perte d'information, dites « non-conservatives », ont la faculté d'accroître considérablement le taux de compression et de diminuer le débit du signal en deçà de la limite de Shannon. Un tel débit n'est possible que pour un codage non réversible générant des dégradations dans l'image. Le but de chacune de ces méthodes est d'éliminer non seulement la redondance, mais aussi de générer les pertes au niveau de l'information non pertinente et du bruit. De telles techniques de codage sont nécessaires pour des applications requérant des taux de compression élevés. Elles sont définies de manière à mettre en œuvre une compression efficace, tout en « contrôlant la dégradation ». Ainsi, les méthodes de codage non-conservatives cherchent à définir le meilleur compromis débit-distorsion.

1.1.3.1 Quantification scalaire

Le principe de la quantification est d'envoyer une variable continue sur une variable discrète, qui prend ses valeurs sur un ensemble fini de points. La quantification intervient dans le processus de numérisation des images. Dans notre schéma de compression, elle est précédée par une transformation afin de réaliser un meilleur codage après quantification. La fonction de quantification se définit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathbb{R} &\rightarrow \{r_0, r_1, \dots, r_n\} \\ x &\mapsto r_i \end{aligned}$$

D'une manière plus précise, la fonction de quantification $\mathcal{Q}$ est une fonction en escaliers et la règle la définissant varie suivant le cas de figure. Par exemple, le quantificateur scalaire uniforme se définit comme suit :

$$\mathcal{Q}(x) = \left\lfloor \frac{x + 0.5}{q} \right\rfloor$$

où q désigne le pas de quantification. Sa valeur est constante pour la quantification scalaire uniforme. L'erreur maximale de quantification est donnée par $\frac{q}{2}$.

La quantification avec *deadzone* est réalisée quand le quantificateur met à zéro toutes les valeurs d'une plage de données (la *deadzone*). Généralement la plage se situe autour de zéro. La quantification avec *offset* signale que la quantification est effectuée sur un intervalle centré sur une valeur non nulle.

La quantification ne peut être associée qu'aux méthodes de compression avec perte. Le processus qu'elle définit est irréversible : pour une valeur de sortie donnée, la valeur d'entrée ne peut être déterminée de façon unique. Aussi, la quantification introduit une distorsion entre l'image restaurée et l'image originale.

1.1.3.2 Codage par transformée fractale

Le codage par fractales ne suit pas le même schéma de compression (FIG. 1.1). Il utilise une transformée fractale qui est irréversible. Il garde en sortie les coefficients de la transformée choisie et non plus l'image résultante. En effet, l'image est découpée en N blocs de destination de taille r_n ($n \in \{0, \dots, N-1\}$) qui forment une partition de l'image. Jacquin [48, 49] propose un codage automatique, avec un découpage régulier de l'image en blocs de taille 8×8 . Chaque bloc est mis en correspondance avec un bloc transformé $w_n(s_{m(n)})$, défini à partir d'un bloc source $s_{m(n)}$ appartenant à une librairie de M blocs. La mise en correspondance est réalisée par une minimisation de l'erreur entre le bloc destination et le bloc transformé. Jacquin définit w_n comme la composition de deux transformées. Une première qui déforme le support du bloc source et une deuxième qui agit sur la luminance des pixels. Le codage comprime le signal, puisqu'au lieu de garder en mémoire l'image, le codeur enregistre l'indice du bloc source ainsi que les coefficients des transformées composant w_n pour chacun des N blocs. Le codage est irréversible. Le décodage permet de restaurer les N blocs transformés, $w_n(s_{m(n)})$, qui donnent une approximation de l'image originale. La transformée fractales peut être combinée avec d'autres transformées telles que la transformée en ondelettes ou la DCT, et d'autres méthodes de codage. Par exemple, les coefficients de la transformée peuvent être quantifiés [30].

1.1.4 Définitions de critères utilisés en compression

1.1.4.1 Taux de compression

Le taux de compression caractérise un facteur incontournable dans le domaine spécifique de la compression. Il donne une mesure de la réduction de la quantité d'information à transmettre. Pour le spécifier, il faut auparavant définir le terme de débit.

Le débit binaire R_I d'une source d'information I se définit comme étant le nombre de bits nécessaire pour coder un symbole (luminance du pixel). Il s'exprime en bits/pixel.

$$R_I = \frac{\text{nombre de bits nécessaires pour coder l'image}}{\text{taille de l'image}} \quad (1.2)$$

Le taux de compression se définit comme étant le rapport entre le débit binaire de l'image source et celui de l'image comprimée, noté R_C . Soit :

$$TC = \frac{R_I}{R_C} \quad (1.3)$$

Le débit des images sources codées sur les entiers est en général de 8 bits/pixel. Ce débit permet de représenter 256 symboles différents.

1.1.4.2 Énoncé des différents critères de qualité et de choix

Les techniques de compression avec perte éliminent une partie de l'information jugée non pertinente. Leur utilisation génère des dégradations irréversibles au niveau des images restituées et altère ainsi la qualité de ces images. Il est alors primordial de disposer d'un moyen de contrôle sur cette qualité et de limiter les dégradations subies par l'image. La pertinence des méthodes de compression ne dépend pas seulement du taux de compression obtenu, mais aussi de la perte de qualité entre l'image originale et l'image restituée. Il existe deux types de critères permettant d'évaluer la qualité : les critères subjectifs et les critères objectifs. Le premier critère subjectif est tout bonnement le critère visuel. L'œil est un outil essentiel pour apprécier la qualité d'une image. Il va permettre à l'utilisateur d'identifier le contenu des images, la netteté de celles-ci et la qualité des contours. Il est donc capital que les méthodes de compression prennent en compte le système optique humain. L'évaluation de la qualité visuelle n'est pas évidente [72]. Nous pouvons classer l'image dans des catégories allant du résultat excellent à un résultat insatisfaisant et mettre à disposition une série d'images servant à calibrer cet échelonnage. La comparaison de l'image restituée avec ces images permet de la classer dans l'une de ces catégories. Cependant, cette évaluation ne peut être que subjective puisqu'il n'existe aucune mesure correcte pouvant traduire fidèlement la perception de l'œil. Sans pour autant négliger ce critère, il est préférable d'introduire des critères plus objectifs. La mesure la plus couramment utilisée par la communauté internationale est la mesure du « rapport signal à bruit » (RSB ou SNR-Signal to Noise Ratio). Il existe différentes variantes à cette mesure. Le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), évaluant le *rapport signal à bruit en pic*, se mesure en décibel (dB) et se définit par la formule (1.4) :

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{(D-1)^2}{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{i,j} - y_{i,j})^2} \right) \quad (1.4)$$

où M et N représentent les nombres de lignes et de colonnes de l'image, $\{x_{ij} \mid (i,j) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}\}$ représente l'image originale et $\{y_{ij} \mid (i,j) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}\}$ l'image reconstruite après traitement. D représente le nombre de valeurs possibles que peut prendre l'échantillon. Pour une image de dynamique 8 bits (nombre de bits

utilisés pour coder un pixel) D est égal à 256. Une autre variante est la mesure du SNR en énergie. Elle est donnée par (1.5) :

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{i,j} - y_{i,j})^2} \right) \quad (1.5)$$

Le terme au dénominateur, i.e.

$$EQM = \|y - x\|^2 = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{i,j} - y_{i,j})^2$$

représente l'erreur quadratique moyenne de reconstruction qui s'identifie aussi à la distorsion du signal. Ce critère n'est pas équivalent aux critères humains, dans le sens où l'œil perçoit mieux les dégradations sur les zones homogènes ou à faible variance de l'intensité lumineuse, tandis que le critère SNR ne tient pas compte des zones dans lesquelles la dégradation se situe. La dégradation de l'image se mesure en terme de normes ℓ^1 et ℓ^2 de l'erreur. Ces normes sont notées E_1 et E_2 , elles sont définies par :

$$E_1 = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |x_{i,j} - y_{i,j}|$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{i,j} - y_{i,j})^2}$$

Ces différentes mesures permettent d'estimer la perte moyenne subie dans l'ensemble de l'image. Bien qu'elles ne mettent pas en évidence le type de dégradations et ne caractérisent pas avec exactitude la gêne visuelle occasionnée, elles sont un bon moyen pour définir une mesure de l'ensemble des dégradations. Leur adoption par la communauté internationale en font des facteurs comparatifs entre les méthodes développées par les différents laboratoires.

1.2 Théorie des ondelettes et analyse multirésolution

La transformée en ondelettes bénéficie de plusieurs avantages sur les transformées présentées précédemment. La transformée présente de bonnes propriétés de décorrélation spatio-fréquentielle [25, 26], de régularité [94, 93] qui font d'elle un outil particulièrement adapté à la compression [52, 29, 9, 46]. Cette section a pour but de rappeler les notions les plus élémentaires sur la théorie des ondelettes, notions indispensables à la bonne compréhension de ce mémoire [25, 27]. Tous les théorèmes, propositions et définitions énoncés dans l'état de l'art proviennent d'articles référencés et de [68, 69].

1.2.1 Généralités

Les ondelettes ont été introduites par Grossman et Morlet [45] et se définissent comme une famille de fonctions $\psi_{a,b}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ ($\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ en dimension n). Elles sont générées par

dilatations et par translations d'une fonction de base d'énergie finie ($\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$) : l'ondelette mère ψ .

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \neq 0$$

Les coefficients a et b désignent respectivement le facteur d'échelle pour la dilatation de ψ , et le coefficient de translation. La transformée en ondelettes de $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ au temps b et à l'échelle a est définie par le produit scalaire de f et de l'ondelette $\psi_{a,b}$:

$$Wf(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (1.6)$$

PROPOSITION 1 (Mallat) Si l'ondelette mère ψ vérifie la condition d'admissibilité

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{w} dw < +\infty, \quad (1.7)$$

alors toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ vérifie :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} Wf(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db \quad (1.8)$$

En outre, si ψ vérifie la condition d'admissibilité (1.7), la transformée en ondelettes (1.6) est réversible et la transformée inverse est donnée par la relation (1.8). La condition d'admissibilité (1.7) contraint ψ à vérifier $\widehat{\psi}(0) = 0$. Dans l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, cette contrainte équivaut à dire que l'ondelette mère est une fonction de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (1.9)$$

La propriété (1.9) implique que l'ondelette mère ψ oscille. L'oscillation de ψ et l'adjonction d'une propriété de décroissance (liée à la régularité de l'ondelette) ont donné leurs noms aux ondelettes («petites ondes») [26].

Dans l'équation (1.8), la fonction f est décrite comme une somme continue de transformées en ondelettes convoluées par les fonctions de base $\{\psi_{a,b}\}_{(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}}$, néanmoins il est possible de représenter f par une somme discrète. En conséquence, le facteur d'échelle a et le coefficient de translation b sont définis sur un ensemble discret de valeurs. La discrétisation de a et b est réalisée en posant $a = a_0^m$ et $b = nb_0 a_0^m$ avec m et $n \in \mathbb{Z}$ et $a_0 > 1$ et $b_0 > 0$ fixés. Les bases d'ondelettes sont alors définies par les fonctions $\psi_{m,n}$:

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}x - nb_0)$$

Par suite, la transformée en ondelettes et la transformée inverse sont déterminées par les équations (1.10) et (1.11) :

$$Wf(m, n) = \langle f, \psi_{m,n} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{m,n}^*(x) dx \quad (1.10)$$

$$f(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} Wf(m,n) \psi_{m,n}^* \quad (1.11)$$

La transformée en ondelettes retourne un ensemble discret de coefficients $Wf(m,n)$ (1.10). Yves Meyer [78] a mis en évidence une *transformée en ondelettes dyadiques* en posant $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$. Le terme dyadique se réfère au facteur d'échelle qui dilate l'ondelette d'un facteur 2 ou puissance de 2. Pour des fonctions particulières ψ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, la famille d'ondelettes

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n) \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.12)$$

constitue une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Toute la théorie exposée par la suite, concernant l'analyse multirésolution associée aux ondelettes et aux transformées en ondelettes rapides, se base sur les ondelettes dyadiques de Meyer.

La transformée en ondelettes trouve un intérêt particulier dans le fait qu'elle permet de détecter les singularités d'un signal. Mallat a démontré que si une ondelette a n moments nuls, alors la transformée peut s'interpréter comme un opérateur différentiel d'ordre n . Une ondelette à n moments nuls est orthogonale à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. En outre, elle permet de mesurer la régularité du signal f . Le nombre de moments nuls d'une ondelette est donné par la définition (2).

DÉFINITION 2 *Une ondelette a n moments nuls si et seulement si elle vérifie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^k dx = 0 \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

En traitement d'image, cette propriété est utilisée pour détecter les zones d'irrégularités comme les contours et autres zones de discontinuités. Elle s'adapte au domaine de la compression, puisque les zones régulières seront mises à zéro par la transformée en ondelettes. Seules les zones présentant un certain degré de singularité seront représentées par des coefficients non nuls. Aussi, les ondelettes sont utilisées pour la détection de forme ou la représentation de contours [15].

1.2.2 Analyse Multirésolution

Le concept d'analyse multirésolution a été introduit par Mallat [65, 67, 66]. Le principe est de définir l'approximation d'un signal f à diverses résolutions. Mallat s'inspire de la pyramide multirésolution de Burt et Adelson [12] qui traite une image à diverses résolutions.

La représentation partielle $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ d'un signal f de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ révèle les singularités du signal f selon la résolution 2^{-j} et le nombre de moments nuls de l'ondelette mère. Cette représentation peut être considérée comme la différence entre deux approximations successives de f aux résolutions 2^{-j+1} et 2^{-j} . L'analyse multirésolution permet d'obtenir les approximations d'un signal à diverses résolutions par projection orthogonale sur une famille d'espaces emboîtés $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

DÉFINITION 3 (MALLAT) *Une suite $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous espaces fermés $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ est une approximation multirésolution si elle vérifie les six propriétés suivantes :*

1. $\mathbf{V}_j$ est invariant par translation de longueur $2^j k$:

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in \mathbf{V}_j \quad (1.13)$$

2. Propriété de causalité : les espaces $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ définissent une suite d'espaces emboîtés. Aussi, une approximation à la résolution 2^{-j} peut définir entièrement une approximation à la résolution 2^{-j-1} :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \mathbf{V}_{j+1} \subset \mathbf{V}_j \quad (1.14)$$

3. Les détails entre $\mathbf{V}_{j+1}$ et $\mathbf{V}_j$ sont accrus d'un facteur 2.

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathbf{V}_{j+1} \quad (1.15)$$

4. L'intersection des espaces emboîtés ne contient que l'élément nul. En outre, quand la résolution tend vers 0, tous les détails du signal f sont perdus.

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{V}_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_j = \{0\} \quad (1.16)$$

5. L'union des espaces emboîtés $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. En d'autres termes, l'adhérence¹ de cette union s'identifie à l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, quand la résolution est infinie, l'approximation du signal s'identifie au signal lui-même.

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \mathbf{V}_j = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_j} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \quad (1.17)$$

6. Il existe θ tel que $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz de $\mathbf{V}_0$.

Les espaces $\mathbf{V}_j$ s'interprètent comme des espaces d'approximation. La projection orthogonale de f sur $\mathbf{V}_j$, notée $Proj_{\mathbf{V}_j} f$, décrit une approximation de f à la résolution 2^{-j} . Le calcul d'une projection orthogonale sur $\mathbf{V}_j$ nécessite d'introduire une base orthonormée de $\mathbf{V}_j$. Dans ce but, la base de fonctions $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbf{V}_j$ est construite par translations et par dilatations d'une fonction mère, la fonction d'échelle ϕ (la relation avec les ondelettes est explicitée par la suite).

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) \quad \forall \{j, n\} \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.18)$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$, les fonctions d'échelle $\{\phi_{j,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de l'espace $\mathbf{V}_j$ et l'approximation de f à la résolution 2^{-j} correspond à la projection de f sur la base $\{\phi_{j,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$Proj_{\mathbf{V}_j}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}$$

¹L'adhérence d'un espace désigne le plus petit fermé contenant cet espace.

La propriété de causalité des espaces multirésolutions (1.14) entraîne la relation d'inclusion $\phi \in \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_{-1}$, et par suite l'existence d'une séquence $(h_n) \in l^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2x - n) \quad (1.19)$$

avec

$$h_n = \left\langle 2^{-1/2} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t - n) \right\rangle \quad (1.20)$$

La condition d'orthogonalité sur la base $\{\phi_{0,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se traduit pour la séquence (h_n) par la condition :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2n} = \delta_{n,0} \quad (1.21)$$

En définissant la transformée de Fourier de (h_n) par $\hat{h}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-inw}$, Mallat et Meyer [78] ont introduit le théorème 4.

THÉORÈME 4 (MALLAT, MEYER) *Soit $\phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ une fonction d'échelle intégrable, alors la série de Fourier de $h_n = \langle 2^{-1/2} \phi(\frac{t}{2}), \phi(t - n) \rangle$ vérifie :*

$$|\hat{h}(0)| = \sqrt{2} \quad (1.22)$$

$$|\hat{h}(w)|^2 + |\hat{h}(w + \pi)|^2 = 2 \quad (1.23)$$

Inversement, si $\hat{h}(w)$ est une fonction périodique et continûment dérivable dans un voisinage de $w = 0$. Si, de plus, cette fonction vérifie (1.22) et (1.23), et si $\inf_{w \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(w)| > 0$, alors

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{h}(2^{-k}w)}{\sqrt{2}} \quad (1.24)$$

est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Mallat associe le concept d'analyse multirésolution et la théorie des ondelettes en considérant les ondelettes comme des fonctions contenant les détails nécessaires pour passer d'une résolution grossière à une résolution plus fine. Rappelons que les approximations de f aux résolutions 2^{-j} et 2^{-j+1} sont données par les projections orthogonales de f sur $\mathbf{V}_j$ et sur $\mathbf{V}_{j-1}$, avec la propriété de causalité sur les espaces d'approximation $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{V}_{j-1}$. Le complément orthogonal de $\mathbf{V}_j$ dans $\mathbf{V}_{j-1}$ est défini par l'espace vectoriel $\mathbf{W}_j$.

$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \overset{\perp}{\bigoplus} \mathbf{W}_j$$

Les ondelettes $(\psi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ appartiennent à l'espace $\mathbf{W}_j$. Sous certaines conditions, elles constituent une base orthonormée de $\mathbf{W}_j$. La projection orthogonale de f sur $\mathbf{V}_{j-1}$ peut s'écrire comme la somme des projections orthogonales de f sur $\mathbf{V}_j$ et de f sur $\mathbf{W}_j$. Si

$(\psi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\mathbf{W}_j$, la projection orthogonale de f sur $\mathbf{V}_{j-1}$ est identifiée par la relation suivante :

$$Proj_{\mathbf{V}_{j-1}}(f) = Proj_{\mathbf{V}_j}(f) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} Wf(j, n) \quad (1.25)$$

L'ondelette associée à cette analyse multirésolution est déterminée par l'existence d'une séquence $(g_n) \in l^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2x - n) \quad (1.26)$$

Les conditions d'orthogonalité sur h (cf. équation (1.21)) et sur les espaces $\mathbf{V}_j$ et $\mathbf{W}_j$ permettent de mettre en évidence la relation entre les deux séquences (h_n) et (g_n) [27].

$$g_n = (-1)^n h_{-n+1} \quad (1.27)$$

1.2.3 Transformée en ondelettes unidimensionnelle rapide

Les ondelettes sont des fonctions de bases qui représentent un signal donné sur plusieurs niveaux de résolution de détails. La transformée en ondelettes rapide combine les concepts d'analyse multirésolution et des ondelettes. La transformée désigne l'application qui, à partir d'une approximation du signal f à la résolution 2^{-j+1} , $Proj_{\mathbf{V}_{j-1}}(f)$, retourne l'approximation à la résolution inférieure $Proj_{\mathbf{V}_j}(f)$ (opération rendue possible grâce à la propriété de causalité) et $Proj_{\mathbf{W}_j}(f)$, la projection de f sur la base d'ondelettes². La transformée en ondelettes rapide est mise en œuvre à l'aide d'un banc de filtres, qui est composé d'un filtre passe-bas pour l'approximation basse résolution et d'un filtre passe-haut retournant les coefficients d'ondelettes³. Le filtrage est suivi d'un sous-échantillonnage de facteur 2. La transformée en ondelettes peut s'étendre sur plusieurs niveaux de résolution en itérant l'application de la transformée aux approximations successives. Ainsi, elle permet d'obtenir une approximation à la résolution 2^{-k} , en partant d'un signal de résolution 2^{-j} , avec $j < k$. La transformée en ondelettes est appliquée $(k - j)$ fois aux projections successives de f , $Proj_{\mathbf{V}_l}(f)$ avec $j \leq l < k$. Il en résulte une approximation à la résolution 2^{-k} et des ensembles de coefficients d'ondelettes aux diverses échelles.

$$Proj_{\mathbf{V}_j}(f) = Proj_{\mathbf{V}_k}(f) + Proj_{\mathbf{W}_k}(f) + Proj_{\mathbf{W}_{k-1}}(f) + \dots + Proj_{\mathbf{W}_{j+1}}(f)$$

Les coefficients d'ondelettes sont à la fois nécessaires et suffisants pour reconstruire le signal de départ à partir de l'approximation basse résolution.

² $Proj_{\mathbf{W}_j}(f)$ est exprimée dans l'équation (1.25) par la somme des transformées en ondelettes $\sum_{n \in \mathbb{Z}} Wf(j, n)$.

³Un filtre passe-bas conserve les basses fréquences du signal tandis qu'un filtre passe-haut conserve les hautes fréquences.

1.2.3.1 Banc de filtres orthogonaux

L'analyse multirésolution orthogonale est associée à un banc de filtres orthogonaux (h, g) correspondant aux séquences :

$$h_n = \langle 2^{-1/2} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \rangle \quad \text{et} \quad g_n = (-1)^n h_{-n+1} = \langle 2^{-1/2} \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \rangle$$

Les séquences (h_n) et (g_n) vérifient les relations énoncées au paragraphe 1.2.2. Un banc de filtre est orthogonal si il vérifie le théorème 4 et l'équation (1.27). En outre, les deux conditions sur la somme des coefficients :

$$\sum_n h_n = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sum_n g_n = 0$$

doivent être vérifiées afin de démontrer la convergence du produit (1.24). Ces formules sont obtenues à partir de (1.22) et de (1.27). Les filtres vérifiant les conditions (1.23) et (1.27) sont des filtres miroirs conjugués.

1.2.3.2 Transformée en ondelettes rapide

Mallat [69] a mis au point une transformée en ondelettes pyramidale à l'aide d'un banc de filtres numériques. La transformée multirésolution est dite « dyadique » à cause du facteur d'échelle 2 entre deux niveaux de résolution consécutifs. Pour représenter le signal f de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ sur plusieurs niveaux de résolution, nous supposons que $s_j[n]$ représente la projection de f sur l'espace $\mathbf{V}_j$ et $d_j[n]$ représente la projection de f sur l'espace complémentaire de $\mathbf{V}_j$:

$$s_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad \text{et} \quad d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$$

La transformée en ondelettes rapide, appliquée à un signal de résolution 2^{-j+1} , retourne deux signaux de résolution 2^{-j} , l'un décrivant une approximation du signal 2 fois plus grossière et l'autre les coefficients d'ondelettes :

$$\begin{aligned} s_j[n] &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h_{p-2n} s_{j-1}[p] = s_{j-1} \star h[-2n] \\ d_j[n] &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{p-2n} s_{j-1}[p] = s_{j-1} \star g[-2n] \end{aligned}$$

Les applications successives de la transformée permettent de déterminer l'approximation d'un signal à résolution 2^{-K_f} à partir d'une approximation de résolution 2^{-K_i} , avec $K_i < K_f$. La transformée en ondelettes, appliquée $(K_f - K_i)$ fois sur les approximations successives⁴ s_j , $K_i \leq j < K_f$, à commencer par le signal original s_{K_i} , retourne le signal s_{K_f} et les différentes images de détails d_j , $K_i < j \leq K_f$. La transformée inverse est, quant à elle, définie par la relation (1.28).

$$s_{j-1}[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h_{n-2p} s_j[p] + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n-2p} d_j[p] \quad (1.28)$$

⁴Le signal original est identifié par s_K de résolution 2^{-K} .

Notons que les filtres h et g sont utilisés à la fois pour la décomposition en ondelettes et la reconstruction. La reconstruction exacte est assurée pour un banc de filtres obtenu à partir d'une analyse multirésolution orthogonale. Une condition suffisante pour générer une analyse multirésolution orthogonale est que le filtre h vérifie le théorème 4. La construction d'un filtre g tel que le couple (h, g) définit un banc de filtres orthogonaux, impose la condition (1.27) sur g . La base d'ondelettes orthonormées associée est alors définie à l'aide des équations (1.26) et (1.12). Rappelons qu'une transformée en ondelettes rapide réalise la convolution d'un signal s_0 avec un filtre passe-bas h et un filtre passe-haut g , un changement de résolution est réalisé au cours du filtrage. Les deux signaux de sortie sont ensuite sous-échantillonnés par un facteur 2. Pour descendre davantage en résolution, le filtrage est appliqué à nouveau sur les sorties successives s_j jusqu'à atteindre la résolution souhaitée.

1.2.3.3 Banc de filtres à reconstruction parfaite

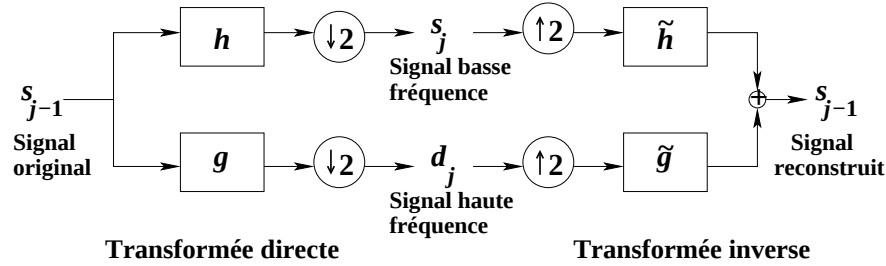


FIG. 1.2 – Transformée en ondelettes

Des années durant, un des axes majeurs de la recherche en traitement du signal abordait le problème de la création de bancs de filtres réalisant une décomposition multirésolution et une reconstruction parfaite. Les filtres à reconstruction parfaite n'engendrent pas forcément une analyse multirésolution. Croisier, Esteban et Galand [23] ont mis au point une classe de filtres vérifiant les conditions de non-repliement spectral : les filtres Miroir en Quadrature (Quadrature Mirror Filters - QMF). Albert Cohen [21] a démontré que sous certaines conditions cette famille de filtres engendrait une analyse multirésolution. Le problème soulevé par l'utilisation de QMF est la forte restriction au niveau de la réalisation des filtres. Le seul filtre QMF à réponse impulsionnelle finie est le filtre de Haar. Par suite, Smith et Barnwell [107] ont développé les Filtres Conjugués en Quadrature, permettant de définir des filtres à réponse impulsionnelle finie et à reconstruction parfaite. Les Filtres Conjugués en Quadrature permettent de construire des bases d'ondelettes orthogonales. Ils sont définis par l'équation suivante (en imposant l'égalité entre les filtres d'analyse et de synthèse h et $\tilde{h}$) :

$$|\hat{h}(w)|^2 + |\hat{h}(w + \pi)|^2 = 2$$

Plus tard, Vetterli a spécifié les conditions nécessaires et suffisantes pour mettre au point un banc de filtres à reconstruction parfaite [118, 119]. Les filtres d'analyse (h, g) et de synthèse $(\tilde{h}, \tilde{g})$ diffèrent, sauf cas particulier.

THÉORÈME 5 (VETTERLI) : *Le banc de filtres $(h, g, \tilde{h}, \tilde{g})$ est dit à reconstruction parfaite si et seulement si :*

$$\begin{aligned}\widehat{h}(w)\widehat{h}^*(w) + \widehat{g}(w)\widehat{g}^*(w) &= 2 \\ \widehat{h}(w)\widehat{h}^*(w + \pi) + \widehat{g}(w)\widehat{g}^*(w + \pi) &= 0\end{aligned}$$

THÉORÈME 6 : *Le banc de filtres $(h, g, \tilde{h}, \tilde{g})$ à reconstruction parfaite vérifie :*

$$\widehat{h}(w)\widehat{h}^*(w) + \widehat{h}(w + \pi)\widehat{h}^*(w + \pi) = 2$$

Si les filtres composant le banc sont à réponse impulsionnelle finie, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\widehat{g}(w) = ae^{-i(2l+1)w}\widehat{h}^*(w) \quad \text{et} \quad \widehat{\tilde{g}}(w) = a^{-1}e^{-i(2l+1)w}\widehat{h}^*(w + \pi)$$

En général, les filtres sont choisis pour $a = 1$ et $l = 0$.

1.2.3.4 Analyse multirésolution non-orthogonale

La transformée en ondelettes orthogonales utilise les mêmes filtres pour l'analyse et la synthèse (la transformée directe et la reconstruction). L'étendue des filtres vérifiant les propriétés d'orthogonalité est relativement restreinte. Les filtres symétriques (et plus généralement les filtres à phase linéaire), très utilisés en traitement d'image pour limiter la distorsion visuelle, ne peuvent être simultanément orthogonaux à réponse impulsionnelle finie et à reconstruction exacte (sauf dans le cas particulier des filtres de Haar) ; les deux contraintes d'orthogonalité sont incompatibles avec la symétrie. Dans ce contexte, sont introduites les bases d'ondelettes biorthogonales. Elles sont construites à partir de deux bases duales $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ et $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$, obtenues par dilatations et par translations des ondelettes mères ψ et $\tilde{\psi}$ [22]. L'analyse multirésolution biorthogonale est définie à l'aide de deux hiérarchies d'espaces d'approximation $\mathbf{V}_j$ et $\tilde{\mathbf{V}}_j$. Les fonctions d'échelle associées $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\phi}_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent les deux bases non-orthogonales des espaces d'approximation $\mathbf{V}_j$ et $\tilde{\mathbf{V}}_j$ ($\forall j \in \mathbb{Z}$). Les bases d'ondelettes biorthogonales $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent les bases des espaces complémentaires de $\mathbf{V}_j$ et de $\tilde{\mathbf{V}}_j$ dans $\mathbf{V}_{j-1}$ et $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$, soient les espaces $\mathbf{W}_j$ et $\tilde{\mathbf{W}}_j$.

$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{V}}_{j-1} = \tilde{\mathbf{V}}_j \oplus \tilde{\mathbf{W}}_j$$

Les espaces $\mathbf{V}_j$ et $\tilde{\mathbf{V}}_j$ ne sont pas orthogonaux à leur complément, mais au complément de l'espace dual.

$$\mathbf{V}_j \perp \tilde{\mathbf{W}}_j \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{V}}_j \perp \mathbf{W}_j$$

Les conditions de biorthogonalité se traduisent sur les fonctions de base par :

$$\langle \psi_{m,n}, \tilde{\psi}_{m',n'} \rangle = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}$$

La projection de f sur l'espace $\widetilde{\mathbf{W}}_j$ s'écrit alors :

$$f = \sum_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \widetilde{\psi}_{j,n} = \sum_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \widetilde{\psi}_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

1.2.3.5 Banc de filtres biorthogonaux et transformée en ondelettes biorthogonales rapide

Le banc de filtres à reconstruction parfaite, défini par Vetterli, réalise une transformée en ondelettes biorthogonales rapide. Pour un signal original $s_0[n]$, la transformée en ondelettes rapide fournit les coefficients d'ondelettes successifs et le signal à la résolution choisie. La transformée en ondelettes biorthogonales rapide est définie par :

$$s_j[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h_{p-2n} s_{j-1}[p]$$

$$d_j[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{p-2n} s_{j-1}[p]$$

La transformée inverse est définie par :

$$s_{j-1}[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \widetilde{h}_{n-2p} s_j[p] + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}_{n-2p} d_j[p]$$

1.2.4 Transformée en ondelettes bidimensionnelle séparable

1.2.4.1 Analyse multirésolution et ondelettes bidimensionnelles

La méthode classique pour construire une base d'ondelettes et une base de fonctions d'échelle à plusieurs dimensions est de prendre le produit tensoriel des espaces d'approximation générés par des fonctions d'échelle 1D. Ce procédé décrit le cas dit « séparable ». L'approximation d'un signal $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ à la résolution 2^{-j} est déterminée par la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel $\mathbf{V}_j^{2D}$. L'espace $\mathbf{V}_j^{2D}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ se décompose en produit tensoriel de deux espaces identiques de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{V}_j^{2D} = \mathbf{V}_j^{1D} \otimes \mathbf{V}_j^{1D}$$

La fonction d'échelle bidimensionnelle est obtenue par le produit des deux fonctions d'échelle monodimensionnelles ϕ constituant $\mathbf{V}_j^{1D}$:

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

Une base orthonormée de l'espace d'approximation $\mathbf{V}_j^{2D}$ est définie en prenant une base orthonormée de $\mathbf{V}_j^{1D}$. Ainsi la base $\{\Phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ constitue une base orthonormée de $\mathbf{V}_j^{2D}$, si $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\mathbf{V}_j^{1D}$ et

$$\Phi_{j,n}(x_1, x_2) = \phi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) = 2^{-j} \phi(2^{-j}x_1 - n_1) \phi(2^{-j}x_2 - n_2)$$

La définition des bases d'ondelettes 2D est un peu plus complexe. En considérant la fonction d'échelle ϕ et l'ondelette correspondante, ψ , engendrant une base d'ondelettes orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, trois ondelettes sont définies :

$$\Psi^{(1)}(x_1, x_2) = \phi(x_1)\psi(x_2), \quad \Psi^{(2)}(x_1, x_2) = \psi(x_1)\phi(x_2) \quad \text{et} \quad \Psi^{(3)}(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2) \quad (1.29)$$

Nous posons pour $1 \leq k \leq 3$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\Psi_{j,n}^{(k)}(x_1, x_2) = 2^{-j} \Psi^{(k)}(2^{-j}x_1 - n_1, 2^{-j}x_2 - n_2)$$

La famille d'ondelettes $\{\Psi_{j,n}^{(1)}, \Psi_{j,n}^{(2)}, \Psi_{j,n}^{(3)}\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ constitue une base orthonormée de $\mathbf{W}_j^{2D}$, et la famille $\{\Psi_{j,n}^{(1)}, \Psi_{j,n}^{(2)}, \Psi_{j,n}^{(3)}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^3}$ constitue une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Cette méthode définit le cas des ondelettes 2D dites « séparables », car les fonctions d'échelle et les ondelettes s'expriment en fonction des bases 1D. La définition de bases d'ondelettes biorthogonales séparables est réalisée de la même manière qu'en 1D. Si (ϕ, ψ) et $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ sont deux paires duales de fonctions d'échelle et d'ondelettes, engendrant des bases d'ondelettes biorthogonales, alors $\{\tilde{\Psi}_{j,n}^{(1)}, \tilde{\Psi}_{j,n}^{(2)}, \tilde{\Psi}_{j,n}^{(3)}\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ défini par (1.29) et $\{\tilde{\Psi}_{j,n}^{(1)}, \tilde{\Psi}_{j,n}^{(2)}, \tilde{\Psi}_{j,n}^{(3)}\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ défini en remplaçant toute fonction par sa fonction duale dans (1.29), sont des bases de Riesz biorthogonales de $\mathbf{W}_j^2$.

1.2.4.2 Transformée rapide en ondelettes bidimensionnelles séparables

La transformée en ondelettes rapide appliquée à s_{j-1} , une approximation du signal f à la résolution 2^{-j+1} , retourne quatre signaux de résolution 2^{-j} . Le premier, s_j , représente l'approximation du signal à une résolution inférieure et les trois autres représentent les coefficients d'ondelettes obtenus à partir des trois ondelettes définies par (1.29).

$$s_j[n] = \langle f, \phi_{j,n}^2 \rangle \quad \text{et} \quad d_j^{(k)}[n] = \langle f, \psi_{j,n}^{(k)} \rangle \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 \text{ et } n \in \mathbb{Z}^2$$

La transformée en ondelettes appliquée au signal s_{j-1} donne, pour $n = (n_x, n_y)$,

$$\begin{aligned} s_j[n] &= \sum_{k=(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} h_{2n_x - k_x} h_{2n_y - k_y} s_{j-1}[k] \\ d_j^{(1)}[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_{2n_x - k_x} g_{2n_y - k_y} s_{j-1}[k] \\ d_j^{(2)}[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g_{2n_x - k_x} h_{2n_y - k_y} s_{j-1}[k] \\ d_j^{(3)}[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g_{2n_x - k_x} g_{2n_y - k_y} s_{j-1}[k] \end{aligned}$$

La transformée en ondelettes rapide permet de traiter les informations séparément, par l'application des filtres 1D, h et g , le long des deux axes principaux (les lignes, puis les

colonnes). La transformée inverse s'obtient par :

$$\begin{aligned} s_{j-1}[n] = & \sum_{k=(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}_{2n_x-k_x} \tilde{h}_{2n_y-k_y} s_j[k] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}_{2n_x-k_x} \tilde{g}_{2n_y-k_y} d_j^{(1)}[k] \\ & + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}_{2n_x-k_x} \tilde{h}_{2n_y-k_y} d_j^{(2)}[k] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}_{2n_x-k_x} \tilde{g}_{2n_y-k_y} d_j^{(3)}[k] \end{aligned}$$

1.2.5 Transformée en ondelettes quinconce

1.2.5.1 Analyse multirésolution avec un facteur $\sqrt{2}$

Feauveau [37] a élaboré le concept d'analyse multirésolution quinconce afin de mettre au point des transformées bidimensionnelles non-séparables et non-orientées. Ses recherches font suite aux travaux de Vetterli [118] concernant la caractérisation de bancs de filtres à plusieurs dimensions. Vetterli a généralisé la définition des filtres miroirs en quadrature de dimension un (FMQ) au cas multidimensionnel. La différence de résolution entre deux bases successives est égale à un facteur $\sqrt{2}$ [38]. L'analyse multirésolution n'est plus définie par un produit tensoriel d'espaces d'approximation 1D, mais elle est engendrée par les bases de fonctions d'échelle :

$$\Phi_{j,n}(x, y) = 2^{-j} \Phi(L^{-2j}(x, y) - n) \quad n = (n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \quad (1.30)$$

où L est une transformée linéaire vérifiant $L(x, y) = (x + y, x - y)$ et $L \circ L = 2Id$. Les fonctions d'échelle sont définies en ajoutant une résolution intermédiaire. Dans le cas 2D, les fonctions d'échelle sont définies, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, par $\Phi_{j,n}(x, y) = 2^{-j} \Phi(2^{-j}(x, y) - n) = 2^{-j} \Phi(L^{-2j}(x, y) - n)$. En ajoutant les résolutions intermédiaires $2^{-j/2}$, nous obtenons la base (1.30). Les espaces d'approximation $\mathbf{V}_j$, pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, engendrés par les fonctions d'échelle $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ sont définis de la même façon que dans le cas 1D. La propriété de causalité se traduit par :

$$\mathbf{V}_{j+\frac{1}{2}} \subset \mathbf{V}_j \quad \forall j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

Meyer a démontré qu'une seule ondelette suffit au lieu de trois [77]. La base d'ondelettes associée à l'analyse multirésolution est définie par :

$$\Psi_{j,n}(x, y) = 2^{-j} \Psi(L^{-2j}(x, y) - n) \quad n = (n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

1.2.5.2 Construction en bancs de filtres

La construction de bancs de filtres bidimensionnels non-séparables a fait l'objet de plusieurs travaux. Les bancs de filtres multidimensionnels non-séparables ont été introduits par Vetterli [118]. Ce dernier développe les caractéristiques théoriques des bancs de filtres QMF. Par la suite d'autres travaux ont émergé. Ansari et Guillemot ont cherché à définir une classe de filtres QMF [4]. Siohan propose une construction de filtres demi-bandes non-séparables [105, 106]. Ces bancs sont définis directement en dimension deux, à partir des

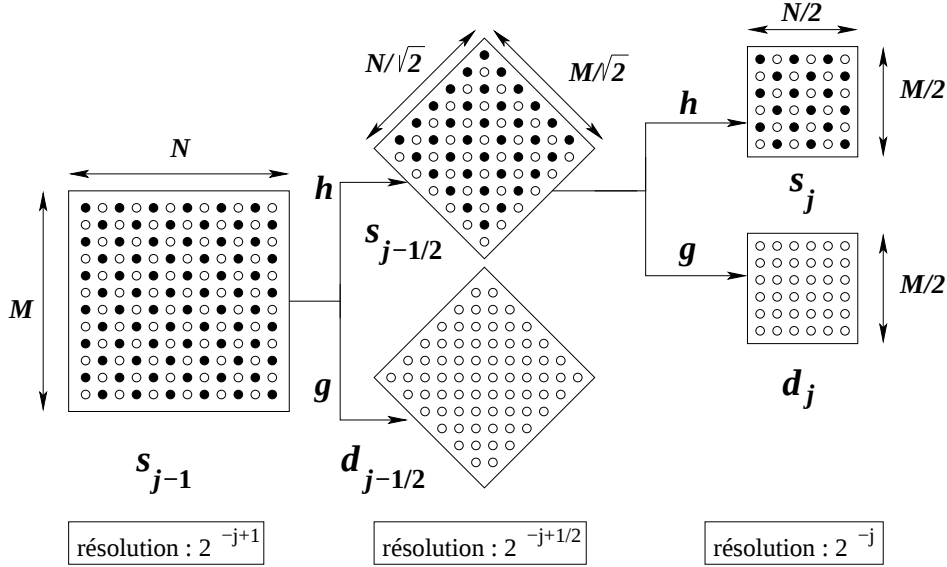


FIG. 1.3 – Transformée en ondelettes quinconce

caractéristiques demi-bandes. Contrairement à Kim et Ansari [54] qui définissent un banc de filtres demi-bandes en dimension un et l'étendent par une transformée rotationnelle ou une transformée de McClellan. Kovačević et Vetterli ont caractérisé la construction et les propriétés de bancs de filtres obtenus par une transformée de McClellan ou par une transformée en cascade [56, 57, 120].

1.2.5.3 Transformée en ondelettes quinconce rapide

La transformée en ondelettes quinconce est associée à une analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$. L'ensemble d'échantillons s_j représente l'approximation d'un signal f de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ à la résolution 2^{-j} . s_j appartient à l'espace d'approximation $\mathbf{V}_j$. La propriété de causalité des espaces d'approximation entraîne l'existence d'un banc de filtres, permettant de calculer une approximation s_j dans l'espace $\mathbf{V}_j$, à partir d'une approximation $s_{j-\frac{1}{2}}$ dans l'espace $\mathbf{V}_{j-\frac{1}{2}}$, ainsi que les détails d_j permettant de restituer l'approximation $s_{j-\frac{1}{2}}$. Les filtres en question sont définis par (h, g) , un banc de filtres biorthogonaux 2D.

$$s_j[n_x, n_y] = \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} h[-k_x, -k_y] s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] - (k_x, k_y)]$$

$$d_j[n_x, n_y] = \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} g[-k_x, -k_y] s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] + (1, 0) - (k_x, k_y)]$$

La reconstruction est mise en œuvre par les filtres duaux $(\tilde{h}, \tilde{g})$.

$$\begin{aligned} s_{j-\frac{1}{2}}[n_x, n_y] &= \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[(n_x, n_y) - L[k_x, k_y]] s_j[k_x, k_y] \\ &+ \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}[(n_x, n_y) - L[k_x, k_y] - (1, 0)] d_j[k_x, k_y] \end{aligned}$$

1.2.6 Nouvelles classes d'ondelettes

1.2.6.1 Pyramide orientable

Dans le cadre de la transformée en ondelettes, Simoncelli et Adelson ont mis au point une décomposition pyramidale orientable [102]. Elle s'aligne sur le concept des filtres orientables de Freeman et Adelson [39], pour lequel un filtre orientable est synthétisé à partir d'une combinaison linéaire d'un ensemble fixé de filtres de base. Les filtres orientables sont symétriques. Simoncelli propose de généraliser et d'améliorer la caractérisation des bancs de filtres en construisant des filtres orientables pondérés qui peuvent être antisymétriques.

1.2.6.2 Bandelettes

Le Pennec et Mallat ont défini une nouvelle famille de bases orthonormées [87]. Elles définissent une construction qui permet de capturer la régularité le long des contours et la régularité le long des zones. Les bandelettes apportent une représentation multicouche contenant une couche de contours avec la nouvelle famille de bases, les bandelettes, et un résidu de régularité homogène représenté en ondelettes.

1.2.6.3 Multiondelettes et multiondelettes équilibrées

Les multiondelettes généralisent les ondelettes. Elles sont construites à partir d'une famille finie de fonctions d'échelle. Lebrun [62] propose une version applicable aux scalaires. Les bancs de multifiltres lui permettent de construire des filtres orthogonaux à phase linéaire.

1.3 Introduction au schéma lifting et aux ondelettes de seconde génération

Le schéma lifting, relevant de la catégorie des transformées, a vu le jour en 1994 à l'initiative de Wim Sweldens [113]. Il se présente comme un outil très efficace pour la construction et l'implémentation de transformées en ondelettes. Avec le schéma lifting apparaît les ondelettes dites de « seconde génération », dont la philosophie est de construire des ondelettes se conformant à un certain nombre de propriétés désirées. Un des avantages du lifting est la possibilité de mettre au point des transformées en ondelettes sans passer par le domaine de Fourier, par un processus simple, rapide et efficace. Un autre avantage réside dans la facilité à mettre en œuvre la transformée inverse. Il suffit simplement d'inverser les

opérations d'analyse et dans ce cas le calcul des filtres duaux n'est plus nécessaire (pour effectuer la transformée inverse). L'idée de construire des ondelettes sans passer par le domaine de Fourier ne fût pas entièrement lancée par le lifting de Sweldens. Ses travaux trouvent leur inspiration d'une part dans le travail de Donoho [36] et d'autre part dans celui de Lounsbery [63] concernant la transformée sur les maillages. Le lifting est aussi lié aux constructions de bancs de filtres de Vetterli et Herley [121]. Daubeschies et Sweldens ont démontré qu'un banc de filtres biorthogonaux 1D pouvait être implémenté par un schéma lifting [28]. Dans ce chapitre, nous allons décrire le schéma lifting, les étapes essentielles, les avantages, les inconvénients et les intérêts qui en découlent.

1.3.1 Théorie du schéma lifting

Comme pour la transformée en ondelettes classique, le principe du lifting est d'exploiter les corrélations présentes dans le signal pour aboutir à un ensemble d'informations plus compact et ainsi diminuer l'entropie du signal. L'avantage du schéma lifting réside dans la possibilité de mettre au point des transformées en ondelettes sans passer par le domaine de Fourier. Le processus est simple, rapide et réversible [112]. Afin d'expliciter le schéma dans sa forme la plus basique, donnons-nous un signal original, noté x , auquel nous souhaitons appliquer une transformée en ondelettes par schéma lifting et ainsi obtenir un signal plus grossier s et un signal de détail d .

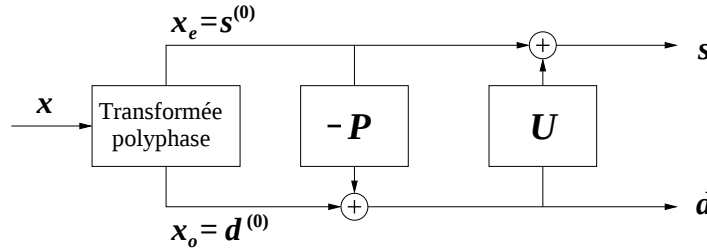


FIG. 1.4 – Schéma lifting canonique

Trois étapes essentielles constituent la forme canonique du schéma [111] :

1. **Transformée polyphase** : La transformée polyphase en deux bandes est une opération triviale. Son mécanisme est simple. Elle prend un signal en entrée, qu'elle sépare en deux composantes polyphases, les composantes paire et impaire. Plus exactement, l'application de la transformée polyphase au signal original x va simplement partitionner x en deux sous-ensembles disjoints x_e (l'ensemble des échantillons appartenant à x d'indice pair) et x_o (l'ensemble des échantillons appartenant à x d'indice impair).

$$\text{Transformée polyphase : } x \rightarrow (x_e, x_o)$$

2. **Opération de prédiction** : La plupart des signaux en imagerie présente une structure de corrélation locale à la fois dans les domaines spatial et fréquentiel. En d'autres termes, les échantillons ou les fréquences d'un même voisinage seront fortement corrélés tandis que les échantillons ou les fréquences n'appartenant pas au même voisinage

ne présenteront qu'un faible taux de corrélation. Si le signal x présente une telle structure, alors les deux sous-signaux x_e et x_o seront fortement corrélés. Il en résulte la possibilité de prédire x_o à partir de x_e avec une précision raisonnable. Un opérateur P est alors appliqué au sous-ensemble x_e afin de prédire le sous-ensemble x_o . La différence d , entre x_o et sa prédiction, constitue le détail de l'image, autrement dit les coefficients d'ondelettes.

$$d = x_o - P(x_e)$$

La transformée en ondelettes permet d'exploiter de façon similaire ce type de corrélations. L'étape de prédiction revient à appliquer un filtre passe-haut au signal x , et un sous-échantillonnage. En effet, si P est un bon prédicteur, l'entropie de d sera plus faible que celle de x_o . L'opération qui consiste à calculer la prédiction et mettre en mémoire le détail constitue *un pas lifting dual*. Ainsi la deuxième étape du schéma lifting nous ramène à :

$$\text{Pas lifting dual : } (x_e, x_o) \rightarrow (x_e, d)$$

3. **Opération de « mise à jour »** : A ce stade des opérations, nous disposons de deux ensembles x_e et d . L'ensemble d , obtenu par un procédé assimilable à un filtrage passe-haut plus un sous-échantillonnage, reproduit les hautes fréquences du signal original. L'ensemble x_e , quant à lui, peut être vu comme une représentation du signal à un niveau de résolution plus grossier. Il forme alors les basses fréquences du signal original. Cependant, la représentation est maladroite et biaisée. x_e est obtenu par un simple sous-échantillonnage ; ce phénomène se traduit dans le domaine des fréquences par un signal s'étalant sur toute la bande fréquentielle du signal source. Cette configuration représente le pire des cas. Les conditions de Shannon ne sont pas respectées, ce qui occasionne un phénomène de repliement spectral. D'un autre point de vue, il est préférable de conserver certaines propriétés du signal original, comme par exemple, la valeur moyenne des luminances des échantillons. Face aux problèmes énoncés, une troisième étape est nécessaire afin d'acquérir une représentation plus adéquate du signal basse fréquence. La dernière opération que nous pouvons appliquer est une opération de mise à jour. Pour définir l'opérateur de mise à jour U , l'idée est d'établir une représentation fiable en cherchant à conserver certaines propriétés globales du signal original.

$$s = x_e + U(d)$$

Cette étape est appelée *un pas lifting* :

$$\text{Pas lifting : } (x_e, d) \rightarrow (s, d)$$

Il est possible d'associer plusieurs pas de prédiction et de mise à jour comme le montre la figure FIG. 1.5. Pour simplifier les équations et se conformer aux résultats de la factorisation d'un banc de filtres en schéma lifting (section 1.3.3), nous définirons les opérateurs successifs de mise à jour par $-U^{(l)}$ et non plus U . Le schéma peut soit débiter par un pas lifting, soit par un pas lifting duale. Par convention, nous posons les équations avec pour premier pas lifting une mise à jour. Le schéma à $2L$ pas, appliqué au signal x de taille N , est donné par l'algorithme suivant :

- Transformée polyphase $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} s_i^{(0)} &= x_{2i} \\ d_i^{(0)} &= x_{2i+1} \end{aligned}$$

- Pour l allant de 1 à L faire :

$$\begin{aligned} s^{(l)} &= s^{(l-1)} - U^{(l)} \star d^{(l-1)} \\ d^{(l)} &= d^{(l-1)} - P^{(l)} \star s^{(l)} \end{aligned} \quad (1.31)$$

- Dernier pas :

$$\begin{aligned} s &= s^{(L)} / K \\ d &= K d^{(L)} \end{aligned}$$

K est un facteur que nous expliciterons ultérieurement, L représente le nombre de pas lifting et N la taille du signal original.

REMARQUE 7 Pour un schéma débutant par une prédiction, l'opérateur $U^{(1)}$ est égal à l'identité.

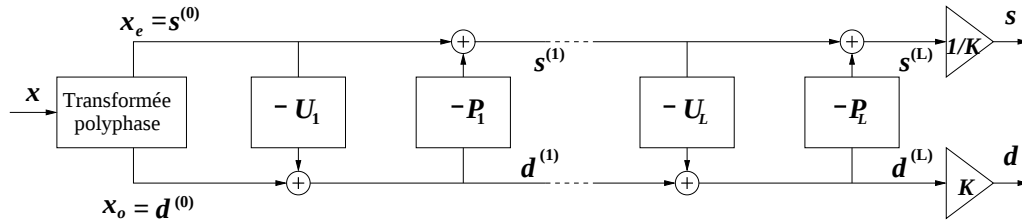


FIG. 1.5 – Schéma lifting à plusieurs étages

1.3.2 Propriétés du schéma lifting

1.3.2.1 Propriétés

Calcul « sur place » : Le lifting permet d'exécuter les calculs « sur place ». En d'autres termes, le signal de sortie est codé sur le même emplacement mémoire que le signal d'entrée. Cette méthode permet de faire une économie importante au niveau de la mémoire.

Efficacité : Dans la plupart des cas le nombre d'opérations est réduit par rapport à un filtrage indépendant des deux sous-bandes. En effet, le lifting calcule simultanément les bandes basse et haute fréquences, et les sous-expressions sont réduites du fait qu'elles soient réutilisées.

Réversible : La réalisation du schéma lifting inverse est triviale. Il s'obtient en inversant l'ordre des opérations et en les « défaisant ».

Généralité : La transformée est mise en œuvre sans la moindre référence au domaine de Fourier. L'extension du schéma à d'autres cadres d'applications en est extrêmement facilitée.

1.3.2.2 Détail

Certaines des propriétés énoncées précédemment sont détaillées dans ce paragraphe.

a. Efficacité

La transformée en ondelettes 1D peut s'implémenter sous la forme d'un schéma lifting. Julien Reichel a mis en évidence, dans le cas d'une transformée en ondelettes 1D, le gain en nombre d'opérations entre une implémentation usuelle par filtrages passe-bas et passe-haut et une implémentation par schéma lifting [91].

Prenons le schéma lifting à $M = 2L$ pas, défini par l'algorithme (1.31). Chaque opérateur lifting ($P^{(l)}$ ou $U^{(l)}$, $l \in \{1, \dots, L\}$) correspond à un filtre de taille t_k , avec $k \in \{1, \dots, M\}$ le numéro du pas lifting. Le nombre d'opérations arithmétiques pour un schéma lifting est donné par :

- le nombre total de multiplications et de divisions :

$$C_m = 2 + \sum_{k=1}^M t_k$$

Dans le cas où le filtre est symétrique (soit dans la plupart des cas) :

$$C_m = 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M t_k$$

- le nombre total d'additions et de soustractions :

$$C_a = \sum_{k=1}^M (t_k - 1 + 1)$$

Le nombre d'opérations requises par le banc de filtres (h, g) exécutant la transformée en ondelettes correspondante est donné par :

$$\begin{aligned} C_m &= 4 \sum_{k=1}^M t_k - 2t_1 - 2t_M - 4M + 8 \\ C_a &= 4 \sum_{k=1}^M t_k - 2t_1 - 2t_M - 4M + 6 \end{aligned}$$

Le gain arithmétique est donné par le rapport entre le nombre d'opérations arithmétiques requises par un filtrage par banc de filtres et le nombre d'opérations requises par le schéma lifting.

$$\begin{aligned} G_m &= \frac{C_m(h, g)}{C_m(SL)} = 4 - 2 \frac{2M + t_1 + t_M}{\sum_{k=1}^M t_k + 2} \\ G_a &= \frac{C_a(h, g)}{C_a(SL)} = 4 - 2 \frac{2M + t_1 + t_M - 3}{\sum_{k=1}^M t_k} \end{aligned}$$

Reichel montre ainsi que le gain peut atteindre un facteur 4.

b. Réversibilité

Pour un schéma lifting à $2L$ pas, donné par (1.31), le schéma lifting inverse s'obtient par une simple inversion des opérations. Le schéma lifting inverse à (1.31), s'implémente sous la forme suivante :

–

$$\begin{aligned} s^{(L)} &= K s \\ d^{(L)} &= d/K \end{aligned}$$

– Pour l allant de L à 1 faire :

$$\begin{aligned} d^{(l-1)} &= d^{(l)} + P^{(l)} \star s^{(l)} \\ s^{(l-1)} &= s^{(l)} + U^{(l)} \star d^{(l-1)} \end{aligned} \quad (1.32)$$

– Transformée polyphase inverse $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} x_{2i} &= s_i^{(0)} \\ x_{2i+1} &= d_i^{(0)} \end{aligned}$$

1.3.3 Correspondance entre schéma lifting et transformée en ondelettes première génération

Daubechies et Sweldens ont établi la correspondance entre la transformée en ondelettes et le schéma lifting. En partant d'un banc de filtres biorthogonaux 1D, ils démontrent comment obtenir un schéma lifting réalisant un filtrage identique. Avant de détailler leur approche, rappelons le schéma général d'une transformée en ondelettes représenté par la figure (FIG. 1.2). Donnons nous deux filtres h (passe-bas) et g (passe-haut) pour l'analyse. Ces filtres sont supposés être à réponse impulsionnelle finie. Les filtres de reconstruction sont donnés par les filtres duaux $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ (voir chapitre 1.2). Les conditions de *reconstruction parfaite* et de *suppression d'aliasing* sont données par :

$$\begin{cases} h(z) \tilde{h}(z^{-1}) + g(z) \tilde{g}(z^{-1}) = 2 \\ h(z) \tilde{h}(-z^{-1}) + g(z) \tilde{g}(-z^{-1}) = 0 \end{cases}$$

La première étape est l'application de la transformée polyphase 2 bandes aux deux filtres de synthèse $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$. La représentation polyphase de $\tilde{h}$ est donnée par :

$$\tilde{h}(z) = \tilde{h}_e(z^2) + z^{-1} \tilde{h}_o(z^2)$$

avec $\tilde{h}_e(z) = \sum_k \tilde{h}_{2k} z^{-k}$ et $\tilde{h}_o(z) = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} z^{-k}$. De même pour $\tilde{g}$, on a :

$$\tilde{g}(z) = \tilde{g}_e(z^2) + z^{-1} \tilde{g}_o(z^2)$$

avec $\tilde{g}_e(z) = \sum_k \tilde{g}_{2k} z^{-k}$ et $\tilde{g}_o(z) = \sum_k \tilde{g}_{2k+1} z^{-k}$. Les représentations polyphases de $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$

nous permettent d'écrire la matrice polyphase $\tilde{P}$ sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{P}}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{g}_e(z) \\ \tilde{h}_o(z) & \tilde{g}_o(z) \end{bmatrix}$$

La représentation polyphase de la transformée en ondelettes est obtenue par un sous-échantillonnage en éléments d'indice pair et impair, puis par l'application de la matrice polyphase. Pour la reconstruction, nous appliquons la matrice polyphase $\tilde{P}$ puis, nous réunissons les éléments d'indice pair et impair. La propriété de reconstruction parfaite devient alors :

$$\mathbf{P}(z)\tilde{\mathbf{P}}^T(z^{-1}) = I$$

Soit

$$\begin{aligned} h_e(z) &= \tilde{g}_o(z^{-1}) & h_o(z) &= -\tilde{g}_e(z^{-1}) \\ g_e(z) &= -\tilde{h}_o(z^{-1}) & g_o(z) &= \tilde{h}_e(z^{-1}) \end{aligned}$$

La factorisation de la matrice polyphase $\tilde{\mathbf{P}}^T$ conduit à une implémentation en schéma lifting des filtres h et g [28] et permet d'obtenir les opérateurs de prédiction $P^{(l)}$ et de mise à jour $U^{(l)}$ correspondants ($\forall l \in \{1, \dots, L\}$). Cette décomposition n'est pas unique. Elle n'est unique que si les filtres traités appartiennent à un espace euclidien. Or, les transformées en z des filtres polyphases sont des polynômes de Laurent et n'appartiennent pas à un espace euclidien. La matrice polyphase se factorise par l'application sur $\tilde{h}_e$ et $\tilde{h}_o$ d'un algorithme « d'Euclide » étendu aux polynômes de Laurent.

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) \\ \tilde{h}_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{M-1} \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Les polynômes q_i , pour tout $i \in \{1, \dots, M-1\}$, sont les quotients successifs de la division, $(M-1)$ le nombre de divisions obtenues, $L-1 = \lceil \frac{M-1}{2} \rceil$ et K est le dernier reste non nul⁵. En se basant sur la décomposition de h , Daubechies définit un filtre complémentaire g^0 (la définition exacte et les détails se trouvent dans [28]) vérifiant :

$$\tilde{\mathbf{P}}^0(z) = \prod_{i=1}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

D'après Daubechies, il existe un filtre s vérifiant :

$$\tilde{\mathbf{P}}(z) = \tilde{\mathbf{P}}^0(z) \times \begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

L'identification des termes de l'égalité (1.34) permet de trouver la fonction s , qui correspond à un pas lifting supplémentaire. Dans cette configuration, les matrices triangulaires supérieures désignent les pas lifting (opérateurs de mise à jour) et les matrices triangulaires inférieures les pas lifting duaux (opérateurs de prédiction). Posons :

$$\begin{aligned} u^{(i)}(z) &= q_{2i-1}(z) & p^{(i)}(z) &= q_{2i}(z) & \forall i \in \{1, \dots, L-1\} \\ u^{(L)}(z) &= K^2 s(z) & p^{(L)}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

⁵Remarque : si M est impair, il est possible de mettre en oeuvre, du point de vue théorique, un pas lifting supplémentaire en posant $q_{M+1} = 0$ et l'équation (1.33) est alors vérifiée.

Le schéma lifting inverse se déduit des équations (1.35) et est déterminé par :

$$\tilde{\mathbf{P}}(z) = \prod_{i=1}^L \begin{pmatrix} 1 & u^{(i)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^{(i)}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

Le schéma lifting est donné par la transposée de la matrice duale de $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\mathbf{P}^T(z^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \times \prod_{i=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^{(L-i)}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u^{(L-i)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application de cette décomposition au vecteur $\begin{pmatrix} s_k^{(0)} & d_k^{(0)} \end{pmatrix}^T$ donne les différentes équations du schéma lifting et nous permet de retrouver l'algorithme (1.31) :

– Pour l allant de 1 à L faire :

$$\begin{aligned} s^{(l)} &= s^{(l-1)} - U^{(l)} \star d^{(l-1)} \\ d^{(l)} &= d^{(l-1)} - P^{(l)} \star s^{(l)} \end{aligned}$$

– Dernier pas :

$$\begin{aligned} s &= s^{(L)} / K \\ d &= K d^{(L)} \end{aligned}$$

1.3.4 Lifting sur les entiers

Un des avantages du lifting est qu'il existe une version entière du schéma [13]. La version entière utilise un opérateur d'arrondi qui permet de projeter une variable réelle sur un ensemble d'échantillons définis dans le domaine des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Le schéma lifting sur les entiers est défini, pour l allant de 1 à L , par l'ensemble des équations (1.36) :

$$\begin{cases} s^{(l)} = s^{(l-1)} - \left\lfloor U^l \star d^{(l-1)} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ d^{(l)} = d^{(l-1)} - \left\lfloor P^l \star s^{(l)} + \frac{1}{2} \right\rfloor \end{cases} \quad (1.36)$$

L représente le nombre de pas lifting. Un des grands intérêts qu'offre cette version entière est que le schéma reste réversible. Par conséquent, le schéma lifting sur les entiers est une transformée à reconstruction parfaite, qui traite des entiers et retourne des entiers. La mise en œuvre de la transformée inverse se calque sur le processus établi dans le cas réel. Ce type de transformée offre un intérêt notable au sein d'une chaîne de compression sans perte. Toutefois, le filtrage sur les entiers n'est pas identique au filtrage sur les réels. Le filtrage mis en œuvre par le lifting sur les entiers est non linéaire, même si les filtres P et U le sont.

Le lifting n'est pas la seule transformée permettant de mettre au point une transformation inversible définie sur les entiers. Jung propose une méthode basée, elle aussi, sur l'utilisation d'opérateurs d'arrondis [53].

1.3.5 Ondelettes de seconde génération

Le schéma lifting permet de créer et d'aborder les ondelettes dites de seconde génération [113]. Le schéma lifting, tel que nous l'avons décrit jusqu'à présent, reste dans le cadre des ondelettes de première génération. Par extension, le lifting peut s'appliquer aux intervalles, gérer les problèmes de bord, et générer une transformée en ondelettes adaptée aux échantillonnages irréguliers [114, 99]. Dans ce cas, les fonctions d'échelle et les ondelettes ne sont plus des translations et dilations d'une fonction d'échelle mère et d'une ondelette mère. De ce point de vue, nous entrons dans le cadre des ondelettes de seconde génération.

Le lifting [113] permet la construction de bases d'ondelettes et des bancs de filtres associés, adaptés aux signaux définis sur un domaine quelconque X ($X \subset \mathbb{R}^n$). Pour cela, Sweldens définit une analyse multirésolution associée aux ondelettes de seconde génération, analogue à celle de Mallat.

DÉFINITION 8 (SWELDENS) *L'ensemble $M = \{\mathbf{V}_j \subset \mathbf{L}^2(X) \mid j \in \mathcal{J} \subset \mathbb{Z}\}$ définit une analyse multirésolution de $\mathbf{L}^2(X)$ si :*

1. $\mathbf{V}_{j+1} \subset \mathbf{V}_j$
2. $\overline{\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathbf{V}_j} = \mathbf{L}^2(X)$
3. $\forall j \in \mathcal{J}, \mathcal{K}_j$ admet une base de Riesz donnée par les fonctions d'échelle $\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathcal{K}_j\}$.
 $\mathcal{K}_j$ représente un ensemble d'indices vérifiant $\mathcal{K}_{j+1} \subset \mathcal{K}_j$.

L'ensemble $\mathcal{J}$ définit l'ensemble des indices fixant la résolution, tandis que l'ensemble $\mathcal{K}_j$ représente l'ensemble des indices des échantillons de l'approximation d'un signal dont la résolution est déterminée par j . La définition de l'analyse multirésolution et plus particulièrement la propriété de causalité impliquent que pour chaque fonction d'échelle $\phi_{j,k}$, il existe un filtre $\{h_{j,k,l} \mid l \in \mathcal{K}_{j-1}\}$ vérifiant

$$\phi_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j-1}} h_{j,k,l} \varphi_{j-1,l}$$

DÉFINITION 9 (SWELDENS) *L'ensemble de fonctions $\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathcal{M}_j\}$ définit une base de fonctions d'ondelettes, avec $\mathcal{M}_j = \mathcal{K}_{j-1} \setminus \mathcal{K}_j$, si il vérifie :*

1. L'espace $\mathbf{W}_j$, défini par la base de fonctions $\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathcal{M}_j\}$, est le complément de $\mathbf{V}_j$ dans $\mathbf{V}_{j-1}$.
2. Si $\mathcal{J} = \mathbb{Z}$, l'ensemble $\left\{ \frac{\psi_{j,k}}{\|\psi_{j,k}\|} \mid j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j \right\}$ définit une base de Riesz de $\mathbf{L}^2(X)$.
3. Si $\mathcal{J} = \mathbb{N}$, l'ensemble $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\psi_{j,k}}{\|\psi_{j,k}\|} \mid j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j \right\} \cup \left\{ \frac{\phi_{n,k}}{\|\phi_{n,k}\|} \mid n \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j \right\}$ définit une base de Riesz de $\mathbf{L}^2(X)$.

Les théorèmes (10) et (11), énoncés par Vetterli [121] puis par Sweldens [113] dans le cadre du lifting, justifient la construction en lifting et permettent d'assurer la biorthogonalité du banc de filtres associés.

THÉORÈME 10 (SWELDENS) Soient un ensemble de filtres biorthogonaux $\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$ et un filtre à support compact U , les filtres $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$ définis tels que :

$$\begin{aligned} h_{j,k,l} &= h_{j,k,l}^0 - \sum_m u_{j,k,m} g_{j,m,l}^0 \\ \tilde{g}_{j,m,l} &= \tilde{g}_{j,m,l}^0 - \sum_k u_{j,k,m} \tilde{h}_{j,k,l}^0 \end{aligned}$$

constituent un ensemble de filtres biorthogonaux.

THÉORÈME 11 (SWELDENS) Soient un ensemble de filtres biorthogonaux $\{h^0, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}^0\}$ et un filtre à support compact P , les filtres $\{h^0, \tilde{h}, g, \tilde{g}^0\}$ définis tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{j,k,l} &= \tilde{h}_{j,k,l}^0 - \sum_m p_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l}^0 \\ g_{j,m,l} &= g_{j,m,l}^0 - \sum_k p_{j,k,m} h_{j,k,l}^0 \end{aligned}$$

constituent un ensemble de filtres biorthogonaux.

Les bases d'ondelettes et les fonctions d'échelle sont réactualisées à chaque pas lifting. L'évolution des fonctions est explicitée par l'ensemble des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi^{(2l)}(t) &= \phi^{(2l-1)}(t) \\ \tilde{\phi}^{(2l)}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{(l-1)}[k] \tilde{\phi}^{(2l)}(2t - k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} U^{(l)}[k] \tilde{\psi}^{(2l)}(t - k) \\ \tilde{\psi}^{(2l)}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^{(l-1)}[k] \tilde{\phi}^{(2l)}(2t - k) \\ \psi^{(2l)}(t) &= \psi^{(2l-1)}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} U^{(l)}[k] \phi^{(2l-1)}(2t - k) \end{aligned}$$

avec $l \in \{1, \dots, L\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3.5.1 Pas lifting dual (mis en œuvre par un opérateur de prédiction)

De manière analogue, les pas lifting duaux réactualisent les bases d'ondelettes et de fonctions d'échelle. La mise à jour se fait par l'intermédiaire des quatre équations qui suivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{(2l+1)}(t) &= \tilde{\phi}^{(2l)}(t) \\ \phi^{(2l+1)}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h^{(l)}[k] \phi^{(2l+1)}(2t - k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} P^{(l)}[k] \psi^{(2l+1)}(t - k) \\ \psi^{(2l+1)}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^{(l-1)}[k] \phi^{(2l+1)}(2t - k) \\ \tilde{\psi}^{(2l+1)}(t) &= \tilde{\psi}^{(2l)}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} P^{(l)}[k] \tilde{\phi}^{(2l)}(2t - k) \end{aligned}$$

1.3.6 Conclusion

Le schéma lifting permet d'implémenter la transformée en ondelettes de manière plus efficace, en réduisant le nombre d'opérations arithmétiques [92]. Les mêmes opérateurs servent à mettre en oeuvre les transformées directe et inverse. Le schéma lifting permet une construction de filtres sans passer par le domaine de Fourier. Sweldens et Schröder [114] définissent les opérateurs pour un schéma lifting de base à partir des fonctions d'interpolations de Deslauriers et Dubuc [34, 35] ou des B-splines. L'idée de construire des ondelettes en fonction des propriétés désirées existait déjà. Aldroubi et Unser [2] introduisent des spécificités afin de contrôler la régularité et les propriétés d'interpolations des ondelettes. Dans le cadre des transformées adaptatives, Piella met au point un schéma lifting adaptatif à reconstruction exacte [88].

Le schéma lifting constitue une nouvelle base pour un ensemble de travaux portant sur le filtrage non linéaire. Claypoole introduit une technique de filtrage adaptatif qui permet de choisir l'opérateur de prédiction en fonction des propriétés locales de l'image [20]. Amornou [3] utilise le principe du lifting dans un cadre différent. Elle définit une segmentation hiérarchique des objets. Le premier pas lifting est remplacé par une segmentation de l'image retournant la valeur moyenne de chaque zone image, et le deuxième pas est remplacé par la matrice identité. Il en résulte une image segmentée bruitée et une image de texture.

Le schéma lifting est un outil, permettant de travailler sur divers types d'échantillonnages, réguliers ou non, et en dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$. Nos travaux concernent la définition de schémas lifting adaptés aux signaux bidimensionnels échantillonnés sur grille quinconce.

Deuxième partie

Schéma lifting sur grille quinconce et généralisation

Introduction

La transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable se base à la fois sur le concept d'analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$, introduit par Feauveau [37], et sur la définition des bancs de filtres bidimensionnels non-séparables, énoncée par Vetterli [118]. L'analyse multirésolution génère des espaces emboîtés, avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$ entre deux espaces consécutifs. Elle est deux fois plus fine que dans le cas séparable. En outre, elle n'utilise qu'une seule ondelette au lieu de trois, et permet de décomposer une image en deux canaux au lieu de quatre pour le cas séparable. Les filtres utilisés sont non-séparables, de forme diamant, et sont moins anisotropes que les filtres séparables. Le support fréquentiel idéal est aussi de forme diamant [120]. En conséquence, les filtres quinconce décorrèlent l'information, principalement sur les axes diagonaux.

Au niveau pratique, le traitement des images par une transformée quinconce offre plusieurs intérêts. La fonction de transfert de modulation de certains instruments optiques a un support fréquentiel proche du support quinconce. Les images acquises à partir de tels instruments doivent faire l'objet d'un traitement adéquat pour exploiter au mieux leurs caractéristiques fréquentielles. Une transformée pyramidale quinconce est manifestement plus appropriée pour traiter ce type d'images qu'une transformée séparable. L'utilisation de la transformée non-séparable présente deux problèmes majeurs. La construction de filtres avec de bonnes propriétés de reconstruction parfaite, de biorthogonalité et de régularité n'est pas évidente. Plusieurs études ont été faites concernant la définition de bancs de filtres bidimensionnels non-séparables. La construction de Siohan se base sur la définition de filtres demi-bandes en dimension deux [105]. Celle de Moreau de Saint Martin [32] utilise les bases de Gröbner [24]. Les constructions d'Ansari, Guillemot, Kim [4, 54], Antonini, Barlaud [7, 8, 10], Kovačević et Vetterli [56, 57] utilisent des transformées d'extension 1D-2D, telles que la transformée rotationnelle ou la transformée de McClellan. Les transformées non-séparables ont pour inconvénient d'être coûteuses en opérations. Une implémentation séparable permet de réduire la complexité du filtrage. D'autant plus, qu'une solution efficace pour réduire la complexité existe dans le cas de filtres 1D. La factorisation de la matrice polyphase en schéma lifting définit une implémentation lifting des bancs de filtres en dimension un [111]. Reichel [92] a mis en évidence le gain dans le cas de filtres 1D. La définition d'un filtrage non-séparable moins coûteux passe par l'élaboration d'une implémentation en schéma lifting quinconce. Kovačević et Sweldens ont défini des opérateurs lifting quinconce par interpolation à l'aide de l'algorithme de Neville [55]. Uytterhoeven et Bultheel [117] s'inspirent de la technique *Red-Black* de Gauss-Seidel et définissent une version lifting quinconce du filtre (2,2) par une subdivision de l'échantillonnage et un moyen-

nage des coefficients. Ansari, Kim et Devovic [5] définissent un triplet de filtres demi-bande de dimension un, et les disposent dans une structure pouvant être assimilée à un schéma lifting à trois pas. Ils définissent un filtrage bidimensionnel par l'application d'une transformée rotationnelle à chaque filtre demi-bande. Bien que la réalisation d'Ansari soit assez proche de la nôtre, aucune de ces méthodes ne propose l'implémentation de bancs de filtres bidimensionnels non-séparables en schémas lifting.

Nous proposons, au chapitre 2, une méthode permettant de « factoriser » une certaine classe de filtres non-séparables en schéma lifting, afin de bénéficier des avantages qu'offre le lifting, notamment celui d'une implémentation moins onéreuse. Grâce au lifting, le coût du filtrage n'est plus un facteur discriminant dans le choix de l'analyse multirésolution 2D. Nous donnerons une version entière du schéma lifting quinconce et nous mettrons en évidence le gain entre l'implémentation lifting quinconce et le filtrage par transformée en ondelettes.

La question de la synthèse de filtres non-séparables plus performants est traitée au chapitre 3. Nous définissons une méthode de construction d'opérateurs lifting quinconce adaptés aux données, et associés à une chaîne de codage. Moulin et Mihçak [79] définissent une méthode de conception de filtres 1D adaptés aux données. Les filtres doivent minimiser l'énergie du signal basse fréquence. La conception d'opérateurs lifting quinconce repose sur la définition d'un opérateur de prédiction minimisant la variance de la sous-bande haute fréquence. L'opérateur de mise à jour est défini par la minimisation de l'erreur de reconstruction due à des dégradations générées dans l'image haute fréquence.

Chapitre 2

Schéma lifting bidimensionnel non-séparable : formulation et « factorisation »

Ce chapitre pose comme fondement le développement d'équations concernant le schéma lifting quinconce, ainsi que le développement d'une implémentation lifting associée à une certaine classe de filtres bidimensionnels non-séparables. La première étape est basée sur la théorie générale formulée par Sweldens, restreinte au cadre de la transformée quinconce. La formulation du lifting quinconce correspond à celle définie pour les ondelettes de seconde génération de Sweldens [113]. La restriction au cadre d'une transformée quinconce est basée sur le concept de l'analyse multirésolution énoncé par Feauveau.

Dans un deuxième temps, nous développons une méthode permettant de construire un schéma lifting quinconce associé à un banc de filtres bidimensionnels non-séparables. La méthode proposée est restreinte à une certaine catégorie de filtres, que nous expliciterons par la suite. Nous estimons ensuite le gain en nombre d'opérations pour une implémentation lifting par rapport à une implémentation par bancs de filtres [43].

2.1 Formulation du schéma lifting quinconce

2.1.1 Schéma lifting quinconce

2.1.1.1 Transformée quinconce

Les ondelettes bidimensionnelles « quinconce » sont associées à une analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$. Une famille d'espaces emboîtés $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$, inclus dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$, définit l'analyse multirésolution en question. Ainsi, un signal f appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ peut être reproduit à diverses résolutions par projection orthogonale sur la famille des espaces $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$. L'approximation de f à la résolution 2^{-j} est définie par s_j , avec $s_j \in \mathbf{V}_j$ et $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. La propriété de causalité des espaces d'approximation induit que s_j ($\in \mathbf{V}_j$) peut exclusivement être déterminée à partir de $s_{j-\frac{1}{2}}$ ($\in \mathbf{V}_{j-\frac{1}{2}}$). Elle permet de

définir la transformée rapide en ondelettes bidimensionnelles qui s'applique à l'image $s_{j-\frac{1}{2}}$ et retourne l'approximation s_j ainsi que les coefficients d'ondelettes d_j (d_j appartenant à $\mathbf{W}_j$, le complément de $\mathbf{V}_j$ dans $\mathbf{V}_{j-\frac{1}{2}}$). La transformée est définie à partir d'un banc de filtres biorthogonaux et bidimensionnels (h, g) qui assurent la reconstruction parfaite.

$$s_j[n_x, n_y] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h[-k] s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] - k]$$

$$d_j[n_x, n_y] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g[-k] s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] + (1, 0) - k]$$

Les filtres duaux $(\tilde{h}, \tilde{g})$ permettent, quant à eux, d'affiner la résolution de l'approximation et assurent la reconstruction du signal $s_{j-\frac{1}{2}}$ à partir des sous-ensembles s_j et d_j .

L'association des travaux de Feauveau [37] sur le quinconce et des travaux de Sweldens [113] sur le lifting nous a permis d'écrire les relations caractérisant le schéma lifting quinconce.

2.1.2 Transformée en ondelettes quinconce par schéma lifting

Le schéma lifting se compose d'une transformée en ondelettes basique, telle que la transformée polyphase, et d'une succession de pas lifting et de pas lifting duaux, spécifiés à l'aide d'opérateurs de mise à jour et de prédiction (cf. section 1.3.1). Le rôle de la transformée triviale est d'opérer un changement de résolution et un sous-échantillonnage par un facteur 2. Les filtrages passe-bas et passe-haut sont réalisés par les applications successives des différents opérateurs lifting quinconce. Ces différentes phases de filtrages sont explicitées dans les paragraphes suivants.

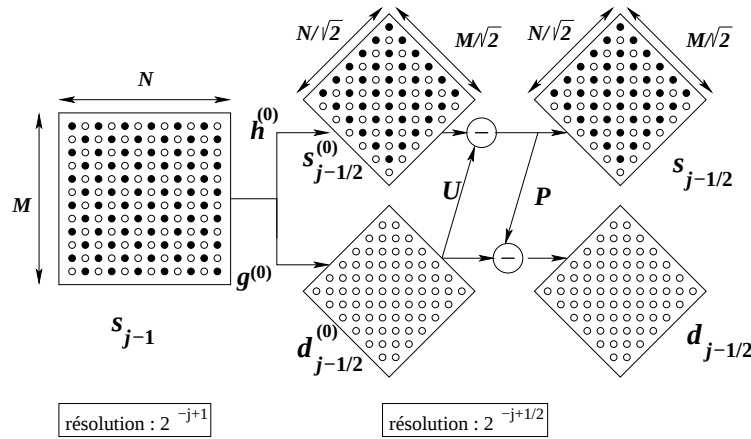


FIG. 2.1 – Schéma lifting quinconce (et échantillonnage)

1. La première phase du schéma lifting consiste à mettre en œuvre une transformée triviale par l'application d'un banc de filtres $(h^{(0)}, g^{(0)})$. La transformée est du type

transformée de Haar ou transformée paresseuse. Son application conduit à l'ensemble d'équations (2.1) :

$$\begin{aligned} s_j^{(0)}[n_x, n_y] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h^{(0)}[-k] s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] - k] \\ d_j^{(0)}[n_x, n_y] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g^{(0)}[-k] s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] + (1, 0) - k] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Généralement la décomposition polyphase est adoptée, lors de cette première étape, en raison de sa simplicité. Elle partitionne le signal bidimensionnel en deux canaux distincts, regroupant d'un côté les échantillons de somme d'indices paire et d'un autre côté les échantillons de somme d'indices impaire. Dans ce cas particulier, les filtres $(h^{(0)}, g^{(0)})$ s'identifient à la pulsation de Dirac.

$$\begin{aligned} h^{(0)}[n_x, n_y] &= \tilde{h}^{(0)}[n_x, n_y] = \delta[n_x, n_y] \\ g^{(0)}[n_x, n_y] &= \tilde{g}^{(0)}[n_x, n_y] = \delta[n_x, n_y] \end{aligned}$$

Les deux sous-bandes, $s_j^{(0)}$ et $d_j^{(0)}$, retournées par la transformée polyphase sont spécifiées par les équations (2.2) et l'annexe A :

$$\begin{aligned} s_j^{(0)}[n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y]] \\ d_j^{(0)}[n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] + (1, 0)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. La deuxième phase consiste à définir les M pas lifting intervenants suite au filtrage basique. Les pas lifting sont générés à l'aide d'opérateurs bidimensionnels de prédiction et de mise à jour. Ainsi, pour l allant de 1 à L ($L = \lceil \frac{M}{2} \rceil$), les pas lifting sont décrits par les équations (2.3) :

$$\begin{aligned} s_j^{(l)}[n_x, n_y] &= s_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k=(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} U^{(l)}[k] d_j^{(l-1)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \\ d_j^{(l)}[n_x, n_y] &= d_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} P^{(l)}[k] s_j^{(l)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le schéma lifting est finalisé par :

$$\begin{aligned} s_j &= \frac{1}{K} s_j^{(L)} \\ d_j &= K d_j^{(L)} \end{aligned}$$

Notons que les opérateurs lifting s'appliquent aux images sous-échantillonnées. Contrairement à la transformée en ondelettes classique, un pas lifting n'inclut pas de changement d'échelle. Le schéma lifting implémente une transformée en ondelettes rapide et simple dans la première phase, pour justement réaliser le changement de résolution et le sous-échantillonnage (cf. Annexe A).

Les implémentations du filtrage quinconce par convolution directe et par schéma lifting sont détaillées dans l'annexe (A). L'implémentation lifting requiert simplement la mise en œuvre des équations (2.1) ou (2.2), et (2.3). La mise en forme des filtres et le procédé de sous-échantillonnage quinconce sont eux aussi explicités.

2.1.3 Calcul du banc de filtres associés

Dans le cas d'opérateurs lifting linéaires et à support compact, le schéma lifting est associé à une analyse multirésolution de première génération. L'ensemble des filtres biorthogonaux $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$, liés à l'analyse multirésolution, définissent la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable, qui peut être implémentée en lifting. Les bancs de filtres peuvent être calculés directement à partir des ensembles d'opérateurs lifting et de filtres triviaux $\{h^0, g^0, \tilde{h}^0, \tilde{g}^0\}$. Ce calcul fait référence à l'analyse multirésolution bidimensionnelle de Feauveau [38], avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$, et à l'algorithme du schéma lifting de Sweldens [113]. Les bancs de filtres sont initialisés par les filtres triviaux pour être ensuite mis à jour par les différents opérateurs lifting. Ces deux étapes sont détaillées de la manière suivante :

1. Lors de la première phase, les filtres sont initialisés par l'ensemble $\{h^0, g^0, \tilde{h}^0, \tilde{g}^0\}$. Dans le cas d'une transformée polyphase, ces filtres sont définis en (2.4), avec $n = [n_x, n_y] \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned} h^{(0)}[n_x, n_y] &= \tilde{h}^{(0)}[n_x, n_y] = \delta[n_x, n_y] = \delta_{n,0} \\ g^{(0)}[n_x, n_y] &= \tilde{g}^{(0)}[n_x, n_y] = \delta[n_x, n_y] = \delta_{n,0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

REMARQUE 12 *En dimension un, la transformée polyphase 2-bandes est mise en œuvre à l'aide des filtres h et g détaillés par les équations (2.5),*

$$\begin{aligned} h[n] &= \tilde{h}[n] = \delta[n] = \delta_n \\ g[n] &= \tilde{g}[n] = \delta[n-1] = \delta_{n-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Le filtre monodimensionnel g est excentré alors que le filtre quinconce ne l'est pas. En réalité, les équations en dimension un et en dimension deux sont conçues et posées de manières différentes. En dimension un, le décalage apparaît au niveau du filtre g , tandis qu'en dimension deux le décalage n'est pris en compte qu'au niveau de l'étape de filtrage. Ainsi, le filtre passe-haut est centré et s'applique aux échantillons obtenus suite à un décalage d'indice de $(1, 0)$. Ce décalage est représenté de manière explicite dans l'équation (2.1).

2. Suite à l'initialisation, les filtres $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$ sont actualisés à chaque pas lifting. La mise à jour est simple et rapide. Pour un schéma composé de L pas lifting primaires et L pas lifting duaux, les filtres sont redéfinis en posant, pour l allant de 1 à L :

– pour un pas lifting

$$\begin{aligned} h^{(l)}[n_x, n_y] &= h^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g^{(l-1)}[(n_x, n_y) - L(k) - (1, 0)] U^{(l)}[-k] \\ \tilde{g}^{(l)}[n_x, n_y] &= \tilde{g}^{(l-1)}[n_x, n_y] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}^{(l-1)}[(n_x, n_y) + (1, 0) - L(k)] U^{(l)}[k] \end{aligned} \quad (2.6)$$

– pour un pas lifting dual

$$\begin{aligned} g^{(l)}[n_x, n_y] &= g^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h^{(l)}[(n_x, n_y) + (1, 0) - L(k)] P^{(l)}[-k] \\ \tilde{h}^{(l)}[n_x, n_y] &= \tilde{h}^{(l-1)}[n_x, n_y] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}^{(l)}[(n_x, n_y) - L(k) - (1, 0)] P^{(l)}[k] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le dernier pas lifting met en évidence les filtres $h, \tilde{h}, g$ et $\tilde{g}$.

$$\begin{aligned} h_j &= \frac{1}{K} h_j^{(L)} \\ \tilde{g}_j &= \frac{1}{K} \tilde{g}_j^{(L)} \\ \tilde{h}_j &= K \tilde{h}_j^{(L)} \\ g_j &= K g_j^{(L)} \end{aligned}$$

Les théorèmes (10) et (11) sont applicables au cas bidimensionnel. Ils confirment que si $(h^{(0)}, g^{(0)})$ et $(\tilde{h}^{(0)}, \tilde{g}^{(0)})$ sont biorthogonaux alors les bancs de filtres (h, g) et $(\tilde{h}, \tilde{g})$ le sont aussi. Les filtres liés à l'analyse multirésolution sont maintenant définis. Les fonctions d'échelle et les ondelettes associées s'obtiennent par un processus analogue.

2.1.4 Calcul des ondelettes et fonctions d'échelle

Les ondelettes et fonctions d'échelle associées au schéma lifting peuvent être obtenues de manière itérative, sans nécessiter de calcul dans le domaine de Fourier.

2.1.4.1 Implémentation d'une transformée basique et d'un sous-échantillonnage de facteur 2

La première étape consiste à déterminer les bases d'ondelettes et de fonctions d'échelle associées à la transformée basique. Les ondelettes et les ondelettes duales sont identifiées par $(\psi^{(0)}, \tilde{\psi}^{(0)})$. Les fonctions d'échelle et les fonctions d'échelle duales sont, quant à elles, définies par $(\phi^{(0)}, \tilde{\phi}^{(0)})$. Dans le cas d'une décomposition polyphase, la base de fonctions associées $(\psi^{(0)}, \tilde{\psi}^{(0)}, \phi^{(0)}, \tilde{\phi}^{(0)})$ n'existe pas dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$. En réalité, la décomposition polyphase ne correspond pas à une transformée en ondelettes, puisqu'elle ne vérifie pas le théorème 4. Cependant, les ondelettes et les fonctions d'échelle sont définies de manière formelle par des pulsations de Dirac et vérifient ainsi les équations (2.8).

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(x, y) &= \delta(x, y) & \tilde{\psi}^{(0)}(x, y) &= \delta(x, y) \\ \phi^{(0)}(x, y) &= \delta(x, y) & \tilde{\phi}^{(0)}(x, y) &= \delta(x, y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1.4.2 Pas lifting (opération de mise à jour)

Les bases d'ondelettes et les fonctions d'échelle sont actualisées à chaque pas lifting. L'évolution des fonctions est explicitée par l'ensemble des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi^{(2l)}(x, y) &= \phi^{(2l-1)}(x, y) \\ \tilde{\phi}^{(2l)}(x, y) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h^{(l-1)}[k] \tilde{\phi}^{(2l)}(L(x, y) - k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} U^{[l]k} \tilde{\psi}^{(2l)}((x, y) - k) \\ \tilde{\psi}^{(2l)}(x, y) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g^{(l-1)}[k] \tilde{\phi}^{(2l)}(L(x, y) - k) \end{aligned}$$

$$\psi^{(2l)}(x, y) = \psi^{(2l-1)}(x, y) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} U^{(l)}[k] \phi^{(2l-1)}(L(x, y) - k)$$

avec $l \in \{1, \dots, L\}$, $k = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$, et pour k et $n \in \mathbb{Z}^2$, $k - n = (k_x - n_x, k_y - n_y)$.

2.1.4.3 Pas lifting dual (opération de prédiction)

Par analogie au cas d'une mise à jour, les pas lifting duaux redéfinissent les bases d'ondelettes et les fonctions d'échelle associées. L'actualisation des fonctions est réalisée par l'intermédiaire des quatre équations qui suivent :

$$\tilde{\phi}^{(2l+1)}(x, y) = \tilde{\phi}^{(2l)}(x, y)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2l+1)}(x, y) = & \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h^{(l)}[k_x, k_y] \phi^{(2l+1)}(L(x, y) - (k_x, k_y)) \\ & - \sum_{k \in \mathbb{Z}} P^{(l)}[k_x, k_y] \psi^{(2l+1)}((x, y) - (k_x, k_y)) \end{aligned}$$

$$\psi^{(2l+1)}(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g^{(l-1)}[k_x, k_y] \phi^{(2l+1)}(L(x, y) - (k_x, k_y))$$

$$\tilde{\psi}^{(2l+1)}(x, y) = \tilde{\psi}^{(2l)}(x, y) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} P^{(l)}[k_x, k_y] \tilde{\phi}^{(2l)}(L(x, y) - (k_x, k_y))$$

2.1.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons précisé les équations relatives au schéma lifting quinconce. Ce schéma met en œuvre une transformée multiéchelle bidimensionnelle non-séparable avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$. Les relations exposées fixent les outils nécessaires pour implémenter correctement un schéma lifting quinconce. Elles permettent de définir les équations du banc de filtres associé, ainsi que celles des ondelettes et fonctions d'échelle. Le schéma lifting permet de réduire la complexité du filtrage par un processus qui lui permet de calculer les deux sous-bandes de manière dépendante, en utilisant à chaque pas, les résultats des calculs précédents (le gain est mis en évidence en 2.5). Pour des raisons de simplicité et de coût, il est souhaitable de bénéficier d'une implémentation de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable en schéma lifting. La construction d'un banc de filtres non-séparables à partir du lifting est relativement simple. Elle est détaillée au paragraphe 2.1.3. La difficulté consiste à réaliser l'opération inverse. Le problème de la construction d'un schéma lifting quinconce à partir d'un banc de filtres donnés fait l'objet de la section 2.2. Nous verrons que la factorisation d'un banc de filtres bidimensionnels en schéma lifting quinconce n'est pas automatique, et nous développerons une méthode permettant de trouver une implémentation sous forme lifting de la transformée en ondelettes quinconce, pour une certaine catégorie de filtres.

2.2 « Factorisation » de filtres bidimensionnels non-séparables en schéma lifting

2.2.1 Problématique

Cette section traite du problème de la construction d'un schéma lifting, à partir de bancs de filtres bidimensionnels non-séparables. Daubechies [28] a développé une méthode de factorisation gérant le problème pour des filtres de dimension un. Intuitivement, l'idée serait de généraliser la méthode de Daubechies pour des filtres à variables multiples (voir partie 1.3.3) ; et ensuite d'appliquer la factorisation, dans le cas bidimensionnel, à un banc de filtres quinconce, afin d'en obtenir une implémentation lifting. Si la formulation du problème est triviale, la réalisation est loin d'être aussi aisée. Suite à l'application de la transformée en z , les filtres d'ondelettes 2D, $h(z_1, z_2)$ et $g(z_1, z_2)$, s'expriment comme des polynômes de Laurent à deux variables. La factorisation de la matrice polyphase met en œuvre la division des deux composantes polyphases de h , soient $h_e(z_1, z_2)$ et $h_o(z_1, z_2)$. Une absence de théorèmes fondamentaux traitant des polynômes à variables multiples proscrire la division. Malgré la conjecture de Serres et le théorème de Quillen-Suslin [109, 110] qui énoncent l'existence de la factorisation d'une matrice de déterminant un en matrices élémentaires, il n'y a pas de méthode automatique qui permet de définir la factorisation en matrices triangulaires [85, 84, 86]. En conséquence, la méthode de Daubechies n'est pas généralisable. Pour contourner ce problème nous ne traitons pas directement les filtres 2D, mais les filtres 1D qui en sont l'origine [43]. Une restriction s'impose alors, les filtres 2D considérés doivent obligatoirement être construits à partir d'une transformée envoyant des filtres 1D sur des filtres 2D. La factorisation des filtres 1D génère des opérateurs lifting de dimension un, à partir desquels les opérateurs du schéma lifting quinconce sont créés. Cette section propose une méthode de construction du schéma lifting quinconce utilisant la transformée de McClellan, en établit les limites et définit les conditions d'applications. Par ailleurs, nous montrons que tout couple de filtres 2D $\left(h[n_x, n_y], \tilde{h}[n_x, n_y]\right)_{(n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2}$, biorthogonaux et dont la transformée en z retourne un polynôme de $\mathbb{R}[z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}]$, peut être « factorisé » indirectement en schéma lifting via notre méthode. En outre, la méthode peut être généralisée, sous certaines conditions, pour des filtres multidimensionnels à phase nulle définis dans $\ell^2(\mathbb{R}^n)$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2.2.2 Extension quinconce : définition et contraintes

2.2.2.1 Principe

La construction du schéma lifting quinconce ne se fonde pas sur la simple factorisation d'une matrice polyphase, définie par un banc de filtres bidimensionnels. La méthode proposée détermine un banc de filtres 1D à partir du banc de filtres 2D, assure la décomposition des filtres 1D en schéma lifting, puis applique la transformée à chaque opérateurs lifting 1D. S'ensuit l'obtention des opérateurs du schéma lifting quinconce. Ce bref descriptif introduit l'idée directrice, qui nous permet, dès à présent, de définir les conditions initiales, nécessaires au développement de la méthode. Le cheminement proposé consiste à :

- définir la transformée d’extension des filtres 1D au 2D, son domaine d’application et les propriétés des objets qu’elle traite,
- définir l’ensemble des filtres bidimensionnels vérifiant les conditions d’admissibilité de la méthode,
- vérifier l’applicabilité de la transformée aux opérateurs lifting,
- et détailler pas à pas la construction du schéma lifting quinconce.

2.2.2.2 Définition de la transformée d’extension 1D - 2D et contraintes

La transformée d’extension des filtres 1D aux filtres 2D ne peut être déterminée de manière arbitraire. Les filtres lifting quinconce doivent respecter certaines propriétés, et pouvoir mettre en œuvre une transformée en ondelettes bidimensionnelle. En conséquence, la transformée doit assurer la transcription d’un minimum de propriétés du filtre 1D au filtre 2D. Par exemple, l’image d’un filtre passe-bas de dimension un doit être un filtre passe-bas de dimension deux. McClellan [74] a mis au point une application qui a pour principe de conserver les propriétés de biorthogonalité et de reconstruction parfaite [120]. Elle préserve la compacité du support, les zéros à la fréquence d’aliasing (condition nécessaire pour la régularité mais pas suffisante en dimension strictement supérieure à un). La dernière propriété permet de conserver les conditions dites de « normalisation » en assurant l’égalité entre les sommes des coefficients des filtres 1D et 2D, ainsi que les qualités passe-bas ou passe-haut des filtres. Toutes ces propriétés sont importantes pour la construction de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable. La transformée de McClellan (2.9) opère un changement de variables du 1D vers le 2D dans le domaine de Fourier.

$$\cos w \rightarrow \frac{1}{2} (\cos w_x + \cos w_y) \quad (2.9)$$

Son domaine d’application est restreint aux filtres à phase nulle (symétrique en zéro) dont l’image dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ est aussi à phase nulle. Il en résulte des filtres 2D symétriques et de forme diamant. La condition d’orthogonalité étant incompatible avec la condition de phase nulle, la transformée ne permet pas de définir des filtres bidimensionnels orthogonaux. Un point faible concerne la régularité, qui est difficile à définir en dimension deux. McClellan n’assure pas la conservation du degré de régularité [31].

Les propriétés de reconstruction parfaite et de biorthogonalité, relatives au schéma lifting 1D, sont conservées suite à l’application de la transformée de McClellan sur chaque opérateur. En imposant la biorthogonalité du schéma 1D, l’assertion précédente se justifie en deux étapes :

- La transformée basique 1D est biorthogonale et à reconstruction parfaite. La transformée de McClellan assure le report de ces deux propriétés sur la transformée basique définie en dimension deux. Dans le cas d’un schéma lifting obtenu par factorisation de la matrice polyphase, la transformée basique s’identifie à la décomposition polyphase 2-bandes. L’application de la transformée de McClellan retourne tout simplement la décomposition polyphase bidimensionnelle.
- Les opérateurs lifting quinconce sont à support compact, puisque leurs antécédents le sont. En conséquence, l’adjonction de pas lifting et de pas lifting duaux au schéma de base conserve les propriétés de biorthogonalité et de reconstruction parfaite.

Ainsi, l'application de la transformée de McClellan sur les différents opérateurs lifting quinquonce conduit à un schéma lifting quinquonce biorthogonal et à reconstruction parfaite. La partie 2.2.4 soumet un résultat important concernant le filtrage global réalisé par le schéma lifting. Dans 2.2.4, nous montrons que notre construction du schéma lifting quinquonce peut s'identifier à une des « factorisations » en lifting du banc de filtres original défini en dimension deux.

2.2.2.3 Domaine de définition des filtres bidimensionnels non-séparables (passe-bas)

La transformée et son domaine d'application étant spécifiés, nous allons maintenant nous intéresser à son domaine image. La construction d'un schéma lifting associé à un banc de filtres bidimensionnels non-séparables nous amène à travailler avec des filtres 1D. Les données initiales sont des filtres bidimensionnels et doivent être transformées en filtres 1D. Le changement de variable, opéré par la transformée de McClellan, peut être inversé. La transformée inverse s'applique aux filtres 2D et génère des filtres 1D. La transformée de McClellan se réécrit sous la forme :

$$(z + z^{-1}) \rightarrow \frac{1}{2} (z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}) \quad (2.10)$$

La transformée de McClellan inverse est définie par :

$$(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}) \rightarrow 2 (z + z^{-1})$$

Les filtres doivent répondre à certaines contraintes et appartenir au domaine de définition de la transformée inverse. Définissons par f , un filtre bidimensionnel non-séparable :

$$f(z_x, z_y) = \sum_{m=-a}^a \sum_{n=-a}^a f_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$$

f appartient au domaine de définition de la transformée de McClellan inverse, si et seulement si f est un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$.

2.2.2.4 Validation de l'applicabilité de la transformée de McClellan dans le cadre du lifting

La transformée de McClellan doit être appliquée aux différents opérateurs lifting 1D. Son domaine de définition se restreint aux filtres à phase nulle. Les opérateurs lifting 1D, obtenus par factorisation d'une matrice polyphase, ne le sont pas. Aussi, la transformée de McClellan ne peut être appliquée directement aux opérateurs $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$ ($1 \leq l \leq L$, $2L$ étant le nombre de pas lifting). La proposition 13, démontrée en annexe B.1, nous permet de contourner ce nouveau problème et de générer des filtres vérifiant la condition de phase nulle.

PROPOSITION 13 Soient h et $\tilde{h}$ des filtres passe-bas à phase nulle et définis dans $\ell^2(\mathbb{R})$, alors il existe une factorisation de la matrice

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ol}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) & -h_o(z^{-1}) \\ \tilde{h}_o(z) & h_e(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

en schéma lifting, les opérateurs lifting $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$ ($1 \leq l \leq L$, $2L$ étant le nombre de pas lifting) vérifiant

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ol}(z) = \prod_{l=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & u^{(L-l)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^{(L-l)}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix},$$

telle que les $2L$ polynômes de Laurent $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$ ($\forall l \in \{1, \dots, L\}$) soient à phase nulle.

Les opérateurs $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$, $\forall l \in \{1, \dots, L\}$, sont à phase nulle et appartiennent au domaine de définition de la transformée.

2.2.3 Réalisation du schéma lifting quinconce

2.2.3.1 Proposition d'un algorithme

La résolution du problème, lié à la restriction du domaine de définition de la transformée de McClellan, rend possible l'extension du schéma lifting au cas bidimensionnel non-séparable. La procédure d'extension peut débuter de deux manières : soit en partant d'un banc de filtres 2D à phase nulle, à symétrie octogonale et dont la transformée en z retourne un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$, soit directement à partir d'un banc de filtres 1D biorthogonal $(h, g, \tilde{h}, \tilde{g})$ où h et $\tilde{h}$ sont des filtres symétriques en zéro. Suite à l'initialisation des données, le schéma lifting quinconce est défini en cinq étapes :

1. *Application de la transformée de McClellan inverse aux filtres passe-haut bidimensionnels H et $\tilde{H}$ non-séparables* : Les filtres doivent être biorthogonaux et leur transformée en z appartenir à $\mathbb{R}[z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}]$. Les filtres vérifiant cette condition sont à phase nulle et symétriques par rapport aux quatre axes principaux définis dans le plan 2D. La transformée de McClellan inverse retourne les filtres passe-bas h et $\tilde{h}$ de dimension un et à phase nulle. Les filtres passe-haut g et $\tilde{g}$ sont obtenus par les conditions imposées par la propriétés de biorthogonalité $g(z) = z^{-1}\tilde{h}(-z^{-1})$ et $\tilde{g}(z) = z^{-1}h(-z^{-1})$.
2. *Décomposition du banc de filtres 1D biorthogonaux $(h, g, \tilde{h}, \tilde{g})$ en schéma lifting pour les filtres à phase nulle h et $\tilde{h}$* : La première étape consiste à décomposer le banc de filtres 1D en schéma lifting suivant le procédé établi par Daubechies 1.3.3. La décomposition en lifting n'est pas unique, néanmoins nous retenons la factorisation qui affecte au schéma les opérateurs lifting $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$ solutions de la proposition 13.
3. *Sur-échantillonnages des opérateurs* : Les différents opérateurs lifting $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$ sont sur-échantillonnés et décalés d'une valeur 1, pour les pas de prédiction, et 0, pour

les pas de mise à jour. Le sur-échantillonnage des opérateurs lifting se traduit par le remplacement des polynômes $p^{(l)}(z)$ et $u^{(l)}(z)$ par les polynômes $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$. A l'aide de la proposition 13, nous pouvons affirmer que ces filtres sont à phase nulle. Les opérateurs lifting, définis par factorisation, endurent un changement d'échelle et un sur-échantillonnage de facteur 2. Un décalage d'indices de valeur 1 est appliqué aux opérateurs de prédiction et un décalage de -1 aux opérateurs de mise à jour. Suite à ces opérations les opérateurs $-p^{(l)}(z)$ et $-u^{(l)}(z)$ deviennent $-z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $-zu^{(l)}(z^2)$.

4. *Application de la transformée de McClellan aux opérateurs $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$* : L'application de la transformée de McClellan sur $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$ retourne des polynômes de Laurent bidimensionnels correspondant à des opérateurs lifting. Ces opérateurs constituent les opérateurs d'un schéma lifting quinconce, sur-échantillonnés et décalés de ± 1 .
5. *Sous-échantillonnage d'un facteur 2 des opérateurs bidimensionnels* : Les opérateurs lifting 2D, obtenus lors de l'étape précédente, ne correspondent pas réellement aux opérateurs lifting quinconce désirés. Le sur-échantillonnage mis en œuvre au point 2 subsiste. Pour remédier à ce problème, nous procédons à un sous-échantillonnage sur les opérateurs 2D et nous obtenons les opérateurs lifting quinconce.

Cette méthode à cinq passes définit des opérateurs lifting quinconce. Le schéma lifting, qui en résulte, vérifie les conditions de biorthogonalité et de reconstruction parfaite (cf. 2.2.2.2). Le schéma lifting quinconce correspond à l'implémentation sous forme lifting du banc de filtres biorthogonaux défini par $H, \tilde{H}, G$ et $\tilde{G}$. Le paragraphe 2.2.4 se consacre à en établir la preuve. Les différentes phases de construction du schéma lifting sont expliquées de manière plus détaillée dans les paragraphes qui suivent.

REMARQUE 14 *Les étapes 1 et 2 ne sont pas toujours nécessaires. Tout schéma lifting de dimension un, défini par des opérateurs $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$, $\forall l \in \{1, \dots, L\}$, vérifiant la condition $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$ à phase nulle, peut être étendu en dimension deux. Le schéma lifting quinconce est construit en exécutant seulement les trois dernières phases. Dans la mesure où la contrainte sur la phase est vérifiée, les opérateurs définis directement dans le cadre du lifting et non à partir d'une transformée en ondelettes connue peuvent être étendus au quinconce.*

2.2.3.2 Algorithme de factorisation en schéma lifting

La factorisation d'un banc de filtres en schéma lifting n'est pas unique. L'algorithme exploité se base sur les travaux de Marshall [73] et de Daubechies [28]. Il s'applique aux filtres à phase linéaire et à réponse impulsionnelle finie, et retourne une solution unique. Le principe est de sur-échantillonner les composantes polyphases des filtres de reconstruction $\tilde{h}_e, \tilde{h}_o, \tilde{g}_e$ et $\tilde{g}_o$. Le filtre $\tilde{h}$ étant à phase nulle, les composantes $\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ le sont aussi. Chacune s'exprime comme un polynôme en $z + z^{-1}$.

$$\tilde{h}_e(z^2) = A(z + z^{-1})$$

et

$$z^{-1}\tilde{h}_o(z^2) = B(z + z^{-1})$$

Le changement de variable $X = z + z^{-1}$, définit les polynômes $A(X)$ et $B(X)$ dans l'anneau euclidien $\mathbb{R}[X]$. La division euclidienne, s'appliquant aux polynômes A et B , s'énonce :

$$\exists ! (Q, R) \in \mathbb{R}[X] \mid A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

avec $\deg_x(B) > \deg_x(R)$.

L'algorithme d'Euclide applique la division euclidienne de manière itérative. Elle définit les quotients et restes successifs des divisions euclidiennes de $a_i(x)$ par $b_i(x)$:

$$a_i(x) = b_i(x)q_{i+1}(x) + r_{i+1}(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

avec $a_i(X) = b_{i-1}(X)$ et $b_i(X) = r_i(X)$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ (r_N dernier reste non nul de la division), et avec pour conditions initiales $a_0(X) = A(X)$ et $b_0(X) = B(X)$. L'équation (B.9) entraîne :

$$h_0(x) = h_1(x) \cdot xQ(x^2) + R(x^2)$$

avec $\deg(B(x^2)) > \deg(R(x^2))$ et $\deg(B(x^2)) - \deg(R(x^2)) \equiv 0 \pmod{2}$. Les quotients successifs de la divisions s'identifient aux opérateurs $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$ (voir preuve de la proposition 13 dans Annexe B). La phase des opérateurs $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$ est nulle. Les opérateurs lifting $p^{(l)}$ et $u^{(l)} \forall l \in \{1, \dots, L\}$ s'obtiennent par un décalage et un sous-échantillonnage (inutile dans notre cas).

L'étape suivante devrait consister justement à sur-échantillonner $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$ et appliquer un décalage de ± 1 afin d'obtenir les opérateurs $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$. L'opération est en réalité inutile, puisque ces opérateurs sont directement définis par les quotients successifs des divisions retournés par l'algorithme d'Euclide.

2.2.3.3 Détail de l'application de la transformée de McClellan

La transformée de McClellan est définie dans le domaine de Fourier ou de la transformée en z . La transformée en z discrète de l'ensemble $\{f_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ engendre une fonction f , définie par l'équation (2.11) :

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \sum_{k=-a}^a f_k \cdot z^{-k} \\ &= f_0 + \sum_{k=1}^a 2f_k (z^k + z^{-k}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le filtre f est symétrique en zéro, ce qui implique que $f_k = f_{-k}$. Comme $z^n + z^{-n}$ est un polynôme en $z + z^{-1}$ (corollaire 27), il existe un polynôme Q défini tel que :

$$f(z) = Q(z + z^{-1}) \tag{2.12}$$

La transformée de McClellan (2.10) permet d'obtenir un filtre bidimensionnel. L'application de McClellan à (2.12) conduit au filtre $F(z_x, z_y)$:

$$F(z_x, z_y) = Q \left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2} \right) \quad (2.13)$$

Le filtre $F[m, n]$ est défini par sa transformée en z :

$$F(z_x, z_y) = \sum_{m=-a}^a \sum_{n=-a}^a F[m, n] z_x^{-m} z_y^{-n} \quad (2.14)$$

Les coefficients du filtre $F[m, n]$ sont obtenus en identifiant les équations (2.13) et (2.14).

L'application de ce procédé au schéma lifting nous conduit à poser, $\forall l \in \{1, \dots, L\}$, $f(z) = zu^{(l)}(z^2)$, et ensuite $f(z) = z^{-1}p^{(l)}(z^2)$. Les filtres lifting obtenus, $P_{2D}^{(l)}[m, n]$ et $U_{2D}^{(l)}[m, n]$, correspondent aux opérateurs lifting quinconce sur-échantillonnés. Afin d'obtenir une implémentation correcte du schéma lifting, il convient de procéder à un sous-échantillonnage.

2.2.3.4 Détails du sous-échantillonnage

Le sur-échantillonnage et le décalage sur les opérateurs lifting 1D définissent les filtres $z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $zu^{(l)}(z^2)$. Les coefficients d'indice impair sont nuls. Aussi le polynôme Q est défini par une somme de monômes de degré impair (cf Annexe B). En développant (2.13), il est trivial de montrer, en utilisant par exemple la formule du binôme de Pascal, que le filtre $F(z_x, z_y)$ est une somme de monômes de degré impair. $F(z_x, z_y)$ vérifie

$$F(z_x, z_y) = \sum_{m=-a}^a \sum_{n=-a}^a F[m, n] z_x^{-m} z_y^{-n}$$

avec

$$F[m, n] = 0 \quad \forall (m, n) \text{ vérifiant } (m+n) \equiv 1(2)$$

Ce résultat est la conséquence du sous-échantillonnage et du décalage des opérateurs 1D. Nous devons en tenir compte dans la définition des opérateurs 2D, et leur appliquer un décalage et une décomposition polyphase. Aussi, nous posons pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} p^{(l)}[m, n] &= P_{2D}^{(l)}[L(m, n) + (1, 0)] \\ u^{(l)}[m, n] &= U_{2D}^{(l)}[L(m, n) - (1, 0)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2.3.5 Schéma lifting quinconce

Le schéma lifting quinconce est défini par :

– la décomposition polyphase :

$$\begin{aligned} s_j^{(0)}[n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y]] \\ d_j^{(0)}[n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] + (1, 0)] \end{aligned}$$

– les différents pas lifting nouvellement obtenus ($\forall l \in \{1, 2, \dots, 2L - 1\}$) :

$$\begin{aligned} s_j^{(l)}[n_x, n_y] &= s_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k_x=-a}^a \sum_{k_y=-a}^a u^{(l)}[k_x, k_y] d_j^{(l-1)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \\ d_j^{(l)}[n_x, n_y] &= d_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k_x=-a}^a \sum_{k_y=-a}^a p^{(l)}[k_x, k_y] s_j^{(l)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \end{aligned}$$

– et $\forall i \in \{1, \dots, N_1/2\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, N_2/2\}$:

$$\begin{aligned} s_j[n_x, n_y] &= s_j^{(L)}[n_x, n_y] / K \\ d_j[n_x, n_y] &= d_j^{(L)}[n_x, n_y] K \end{aligned}$$

REMARQUE 15 La symétrie des opérateurs lifting 1D, $-z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $-zu^{(l)}(z^2)$, entraîne la symétrie des opérateurs bidimensionnels, $P_{2D}^{(l)}[m, n]$ et $U_{2D}^{(l)}[m, n]$. En conséquence, les opérateurs lifting quinconce, $p^{(l)}[m, n]$ et $u^{(l)}[m, n]$, vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} p^{(l)}[m, n] &= p^{(l)}[m, -n - 1] = p^{(l)}[-m - 1, n] = p^{(l)}[-m - 1, -n - 1] = p^{(l)}[n, m] \\ &= p^{(l)}[-n - 1, m] = p^{(l)}[n, -m - 1] = p^{(l)}[-n - 1, -m - 1] \end{aligned} \quad (2.16)$$

et

$$\begin{aligned} u^{(l)}[m, n] &= u^{(l)}[m, -n + 1] = u^{(l)}[-m + 1, n] = u^{(l)}[-m + 1, -n + 1] = u^{(l)}[n, m] \\ &= u^{(l)}[-n + 1, m] = u^{(l)}[n, -m + 1] = u^{(l)}[-n + 1, -m + 1] \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2.4 Propriétés

2.2.4.1 Propriétés du schéma lifting quinconce élaboré à partir de la transformée de McClellan

Le théorème de factorisation [28] de la matrice polyphase 1D, définie à partir d'un banc de filtres biorthogonaux, stipule que la matrice de déterminant un peut être factorisée en matrices triangulaires supérieures et inférieures. Nous proposons une extension du théorème de Daubechies au cas bidimensionnel en imposant quelques restrictions.

THÉORÈME 16 Pour tout banc de filtres biorthogonaux à réponse impulsionnelle finie et appartenant à $\mathbb{R}[z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}]$, engendrant une transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable et si la matrice polyphase appartient à $SL(2, \mathbb{R}[z_x, z_x^{-1}, z_y, z_y^{-1}])^1$, il est possible de définir une factorisation de la matrice polyphase 2D en matrices triangulaires supérieures et inférieures de la forme :

$$\mathbf{P}_{ol}(z_x, z_y) = \prod_{i=1}^M \left[\begin{pmatrix} 1 & u_{2i}(z_x, z_y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{2i+1}(z_x, z_y) & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

¹Ensemble des matrices 2×2 inversibles, de déterminant 1

Preuve

Définissons par $(H, \tilde{H})$ des filtres 2D biorthogonaux à réponse impulsionnelle finie et appartenant à $\mathbb{R}[z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}]$. Ces filtres sont symétriques par rapport aux axes $m = 0$, $n = 0$, $m = -n$ et $m = n$ et *a fortiori* à phase nulle. Les filtres répondant à ces conditions sont des polynômes en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. Il est donc possible de leur appliquer la transformée de McClellan inverse :

$$(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}) \rightarrow 2(z + z^{-1})$$

Il en résulte un banc de filtres 1D à phase nulle $(h, \tilde{h})$.

a. Décomposition polyphase de h et $\tilde{h}$

Les filtres 1D, h et $\tilde{h}$, se décomposent sous la forme :

$$h(z) = h_e(z^2) + z^{-1}h_o(z^2) \quad (2.18)$$

et

$$\tilde{h}(z) = \tilde{h}_e(z^2) + z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$$

Définissons h^s , h_e^s et h_o^s les transformées en z vérifiant $h^s(z + z^{-1}) = h(z)$, $h_e^s(z + z^{-1}) = \tilde{h}_e(z^2)$ et $h_o^s(z + z^{-1}) = z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$. L'équation (2.18) se récrit

$$h^s(z + z^{-1}) = h_e^s(z + z^{-1}) + h_o^s(z + z^{-1}) \quad (2.19)$$

La transformée de McClellan peut être appliquée à chaque terme de (2.19) et par linéarité, nous avons :

$$\begin{aligned} H(z_x, z_y) &= h^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right) \\ &= h_e^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right) + h_o^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right) \end{aligned}$$

A l'aide de la formule du binôme de Pascal, il est trivial de montrer que la transformée de McClellan envoie une somme de monômes 1D de degré pair sur une somme de monômes 2D de somme de degré pair, et inversement elle envoie une somme de monômes 1D de degré impair sur une somme de monômes 2D de somme de degré impair. Aussi, $h_e^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right)$ est une somme de monômes de somme de degré pair et $h_o^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right)$ est une somme de monômes de somme de degré impair. Nous en déduisons que l'application d'un changement d'échelle sur $h_e^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right)$ et $h_o^s\left(\frac{z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}}{2}\right)$ détermine les deux composantes polyphases de $H(z_x, z_y)$. Le même raisonnement est appliqué à $\tilde{h}$, en définissant de la même façon les fonctions $\tilde{h}^s$, $\tilde{h}_e^s$ et $\tilde{h}_o^s$.

b. Factorisation de la matrice polyphase 1D

D'après la proposition 13, il existe une factorisation de la matrice polyphase

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ol}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) & -h_o(z^{-1}) \\ \tilde{h}_o(z) & h_e(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

en schéma lifting avec $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$, les opérateurs lifting, $1 \leq l \leq L$ ($2L$ étant le nombre de pas lifting), vérifiant

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ol}(z) = \prod_{l=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & u^{(L-l)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^{(L-l)}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

pour laquelle la transformée de McClellan est applicable à $-z^{-1}p^{(l)}(z^2)$ et $-zu^{(l)}(z^2)$. De plus, la décomposition polyphase de h s'écrit : $h(z) = h_e(z^2) + z^{-1}h_o(z^2)$. Étant donné que le polynôme h est symétrique en zéro, il en est de même pour $h_e(z^2)$ et $z^{-1}h_o(z^2)$. De l'égalité (2.20) et de la proposition 13, nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z^2) & -zh_o(z^{-2}) \\ z^{-1}\tilde{h}_o(z^2) & h_e(z^{-2}) \end{pmatrix} = \prod_{l=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & zu^{(L-l)}(z^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z^{-1}p^{(L-l)}(z^2) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

L'application de la transformée de McClellan effectue un simple changement de variable de chaque côté de l'égalité. L'opération de changement de variable est effectuée de manière identique pour chaque terme de l'égalité. Ainsi, l'égalité est encore vérifiée suite à l'application de la transformée. Nous pouvons remarquer que d'un côté de l'égalité, nous avons les quatre composantes des filtres d'ondelettes bidimensionnelles et de l'autre une représentation en pas lifting bidimensionnels. La transformée de chaque polynôme de (2.21) correspond soit à une somme de monômes de somme de degré pair, soit à une somme de monômes de somme de degré impair. Les différents pas lifting sont de somme de degré impair.

Il ne reste plus qu'à appliquer un décalage sur les polynômes de sommes de degré impair, à appliquer le changement de résolution L^{-1} à chacun des polynômes et à sous-échantillonner par un facteur 2. Les quatre termes de la matrice de droite correspondent aux composantes polyphases de H et $\tilde{H}$, mises en évidence dans la première partie de la preuve. La partie gauche de l'égalité correspond à la décomposition en pas lifting, défini par le sous-échantillonnage suivant :

$$\begin{aligned} p^{(l)}[m, n] &= P_{2D}^{(l)}[L(m, n) + (1, 0)] \\ u^{(l)}[m, n] &= U_{2D}^{(l)}[L(m, n) - (1, 0)] \end{aligned} \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2$$

Il en résulte une décomposition en pas lifting de la matrice polyphase bidimensionnelle.

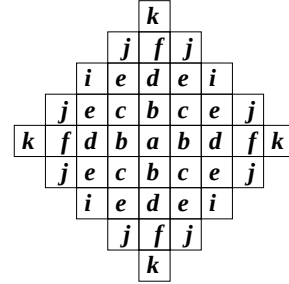
□

2.2.5 Exemples de filtres

2.2.5.1 Cas des filtres (9,7) bidimensionnels non-séparables

Les filtres (9,7) bidimensionnels non-séparables [6] ont été définis à partir des filtres de Daubechies et d'Antonini [7] et par l'application de la transformée de McClellan sur ces mêmes filtres. Les coefficients des filtres (9,7) bidimensionnels non-séparables sont donnés dans le tableau (TAB. 2.1).

	h	g
a	0,9727801929	0,82917503
b	0,1976449772	0,2332482214
c	-0,07422643165	-0,02034470883
d	-0,01955581719	0,01017235441
e	-0,008943549379	0,02420208116
f	0,0141856709	0,008067360386
i	-0,002981183126	-
j	0,009457113935	-
k	0,002364278484	-



TAB. 2.1 – Coefficients des filtres (9,7) bidimensionnels

Les coefficients des filtres (9,7) en dimension un figurent dans le tableau (TAB. 2.2).

	$h[n]$	$\tilde{h}[n]$
$n = 0$	0,852698653	0,788484872
$n = \pm 1$	0,377402688	0,4180924406
$n = \pm 2$	-0,1106240275	-0,04068975261
$n = \pm 3$	-0,02384929751	-0,06453905012
$n = \pm 4$	0,03782879857	-

TAB. 2.2 – Coefficients des filtres (9,7)

c. Décomposition des filtres (9,7) monodimensionnels en lifting

La décomposition des filtres (9,7) en lifting, donnée par Daubechies, vérifie les conditions de la proposition 13.

$$\mathbf{P}_{ol}(z^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(1+z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(1+z) & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = -1.586134352$, $\beta = -0.05298011854$, $\gamma = 0.8829110762$, $\zeta = 0.4435068522$ et $\frac{1}{K} = 1.149604398$. L'étape de sur-échantillonnage conduit à :

$$\begin{pmatrix} h_e(z^{-2}) & zh_o(z^{-2}) \\ z^{-1}g_e(z^{-2}) & g_o(z^{-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta(z+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(z+z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & \beta(z+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(z+z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Posons, $H_e(z+z^{-1}) = h_e(z^{-2})$, $H_o(z+z^{-1}) = zh_o(z^{-2})$, $G_e(z+z^{-1}) = z^{-1}g_e(z^{-2})$ et $G_o(z+z^{-1}) = g_o(z^{-2})$. On applique McClellan sur chacun des monômes de l'équation (2.22), il en résulte l'égalité :

$$\begin{pmatrix} H_e\left(\frac{z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y}{2}\right) & H_o\left(\frac{z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y}{2}\right) \\ G_e\left(\frac{z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y}{2}\right) & G_o\left(\frac{z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{\zeta}{2}(z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{2}(z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y) & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{2}(z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{2}(z_x^{-1}+z_y^{-1}+z_x+z_y) & 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des opérateurs « lifting » bidimensionnels mis en évidence par cette formule est donné par :

$$P_{2D}^{(1)}[m, n] = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \text{ si } (m, n) \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad U_{2D}^{(1)}[m, n] = \begin{cases} \frac{\beta}{2} \text{ si } (m, n) \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ P_{2D}^{(2)}[m, n] = \begin{cases} \frac{\gamma}{2} \text{ si } (m, n) \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad U_{2D}^{(2)}[m, n] = \begin{cases} \frac{\zeta}{2} \text{ si } (m, n) \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'ensemble E est un sous-ensemble discret de $\mathbb{Z}^2$, regroupant quatre couples de points, $E = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)\}$. L'application des formules (2.15) conduit aux opérateurs lifting quinquonce.

$$P^{(1)}[m, n] = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} \text{ si } (m, n) \in E_1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad U^{(1)}[m, n] = \begin{cases} -\frac{\beta}{2} \text{ si } (m, n) \in E_2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ P^{(2)}[m, n] = \begin{cases} -\frac{\gamma}{2} \text{ si } (m, n) \in E_1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad U^{(2)}[m, n] = \begin{cases} -\frac{\zeta}{2} \text{ si } (m, n) \in E_2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les ensembles E_1 et E_2 définissent deux ensembles de $\mathbb{Z}^2$, construits à partir de l'ensemble E et de l'opérateur de changement d'échelle $L(m, n)$. Les deux ensembles s'écrivent $E_1 = \{(-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0)\}$ et $E_2 = \{0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. L'application de l'opération $L(m, n) - (1, 0)$ sur les points de E_1 et, respectivement, l'application de $L(m, n) + (1, 0)$ sur les points de E_2 permettent de retrouver l'ensemble E . La version

lifting quinconce de la transformée par banc de filtres (9,7) bidimensionnels est donnée par le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
 s_j^{(0)}[m, n] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L(m, n)] \\
 d_j^{(0)}[m, n] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L(m, n) + (1, 0)] \\
 d_j^{(1)}[m, n] &= d_j^{(0)}[m, n] + \frac{\alpha}{2} \left(s_j^{(0)}[m, n] + s_j^{(0)}[m, n+1] + s_j^{(0)}[m+1, n] + s_j^{(0)}[m+1, n+1] \right) \\
 s_j^{(1)}[m, n] &= s_j^{(0)}[m, n] + \frac{\beta}{2} \left(d_j^{(1)}[m, n] + d_j^{(1)}[m, n-1] + d_j^{(1)}[m-1, n] + d_{i,j+1}^{(1)}[m-1, n-1] \right) \\
 d_j^{(2)}[m, n] &= d_j^{(1)}[m, n] + \frac{\gamma}{2} \left(s_j^{(1)}[m, n] + s_j^{(1)}[m, n+1] + s_j^{(1)}[m+1, n] + s_j^{(1)}[m+1, n+1] \right) \\
 s_j^{(2)}[m, n] &= s_j^{(1)}[m, n] + \frac{\zeta}{2} \left(d_j^{(2)}[m, n] + d_j^{(2)}[m, n-1] + d_j^{(2)}[m-1, n] + d_{i,j+1}^{(2)}[m-1, n-1] \right) \\
 s_j[m, n] &= \frac{s_j^{(2)}[m, n]}{K} \\
 d_j[m, n] &= K d_j^{(2)}[m, n]
 \end{aligned}$$

d. Calcul du banc de filtres associé

A partir de la décomposition des filtres (9, 7) quinconce en schéma lifting, nous pouvons vérifier qu'il est possible de retrouver les bancs de filtres bidimensionnels non-séparables associés. Posons

$$\Delta_C[m, n] = \delta[m - C, n] + \delta[m, n - C] + \delta[m, n + C] + \delta[m + C, n]$$

et

$$\Delta_{A,B}[m, n] = \delta[m - A, n - B] + \delta[m - A, n + B] + \delta[m + A, n - B] + \delta[m + A, n + B]$$

– Transformée polyphase

$$\begin{aligned}
 h_{(9,7)}^{(0)}[m, n] &= \delta[m, n] = \delta_m \delta_n \\
 g_{(9,7)}^{(0)}[m, n] &= \delta[m, n]
 \end{aligned}$$

– *premier pas (pas lifting dual)* : Suite au premier pas lifting, les filtres globaux $\tilde{h}$ et g sont actualisés :

$$g^{(1)}[m, n] = \delta[m, n] + \frac{\alpha}{2} \Delta_{1,0}[m, n]$$

– *deuxième pas (pas lifting)* :

$$h^{(1)}[m, n] = (1 + \alpha\beta) \delta[m, n] + \frac{\beta}{2} \Delta_1[m, n] + \frac{\alpha\beta}{2} \Delta_{1,1}[m, n] + \frac{\alpha\beta}{4} \Delta_2[m, n]$$

– *troisième pas (second pas lifting)* :

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}[m, n] &= (1 + \beta\gamma) \delta[m, n] + \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{9\alpha\beta\gamma}{8} \right) \Delta_1[m, n] + \frac{\beta\gamma}{2} \Delta_{1,1}[m, n] \\
 &\quad + \frac{\beta\gamma}{4} \Delta_2[m, n] + \frac{3\alpha\beta\gamma}{8} (\Delta_{2,1}[m, n] + \Delta_{1,2}[m, n]) + \frac{\alpha\beta\gamma}{8} \Delta_3[m, n]
 \end{aligned}$$

– Quatrième pas (second pas lifting dual) :

$$\begin{aligned}
 h^{(2)}[m, n] = & \left(1 + \alpha\beta + \alpha\zeta + \gamma\zeta + \frac{9\alpha\beta\gamma\zeta}{4}\right) \delta[m, n] + \left(\frac{\beta + \zeta}{2} + \frac{9}{8}\beta\gamma\zeta\right) \Delta_1[m, n] \\
 & + \frac{\alpha\beta + \alpha\zeta + \gamma\zeta + 3\alpha\beta\gamma\zeta}{2} \Delta_{1,1}[m, n] + \left(\frac{\alpha\beta + \alpha\zeta + \gamma\zeta}{4} + \alpha\beta\gamma\zeta\right) \Delta_2[m, n] \\
 & + \frac{3\beta\gamma\zeta}{8} (\Delta_{2,1}[m, n] + \Delta_{1,2}[m, n]) + \frac{\beta\gamma\zeta}{8} \Delta_3[m, n] + \frac{3\alpha\beta\gamma\zeta}{8} \Delta_{2,2}[m, n] \\
 & + \frac{\alpha\beta\gamma\zeta}{4} (\Delta_{3,1}[m, n] + \Delta_{1,3}[m, n]) + \frac{\alpha\beta\gamma\zeta}{16} \Delta_4[m, n]
 \end{aligned}$$

– Banc de filtres correspondant au filtrage par schéma lifting :

$$h[n_x, n_y] = \frac{1}{K} h^{(2)}[n_x, n_y]$$

$$g[n_x, n_y] = K g^{(2)}[n_x, n_y]$$

e. Vérification des coefficients des filtres (9,7) bidimensionnels non-séparables

Les coefficients du filtre passe-bas h en dimension 2 sont donnés dans la suite :

$$a = \frac{1}{K} \left(1 + \alpha\beta + \alpha\zeta + \gamma\zeta + \frac{9\alpha\beta\gamma\zeta}{4}\right) = 0,9727801929$$

$$b = \frac{1}{K} \left(\frac{\beta + \zeta}{2} + \frac{9}{8}\beta\gamma\zeta\right) = 0,1976449772$$

$$c = \frac{\alpha\beta + \alpha\zeta + \gamma\zeta + 3\alpha\beta\gamma\zeta}{2K} = -0,07422643165$$

$$d = \frac{1}{K} \left(\frac{\alpha\beta + \alpha\zeta + \gamma\zeta}{4} + \alpha\beta\gamma\zeta\right) = -0,01955581719$$

$$e = \frac{3\beta\gamma\zeta}{8K} = -0,008943549379$$

$$f = \frac{\beta\gamma\zeta}{8K} = 0,0141856709$$

$$i = \frac{3\alpha\beta\gamma\zeta}{8K} = -0,002981183126$$

$$j = \frac{\alpha\beta\gamma\zeta}{4K} = 0,009457113935$$

$$k = \frac{\alpha\beta\gamma\zeta}{16K} = 0,002364278484$$

De même, les coefficients du filtre passe-haut, g , sont donnés par les équations suivantes :

$$a = K(1 + \beta\gamma) = 0,82917503$$

$$\begin{aligned}
b &= K \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{9}{8} \alpha \beta \gamma \right) = 0,2332482214 \\
c &= \frac{K \beta \gamma}{2} = -0,02034470883 \\
d &= \frac{1}{4} K \beta \gamma = 0,01017235441 \\
e &= \frac{3K \alpha \beta \gamma}{8} = 0,02420208116 \\
f &= \frac{K \alpha \beta \gamma}{8} = 0,008067360386
\end{aligned}$$

Comme il était prévisible, les coefficients des filtres h et g correspondent aux coefficients des filtres (9, 7) bidimensionnels que nous connaissons bien et à partir desquels le schéma lifting quinconce a été développé.

2.2.5.2 Exemple de différents filtres lifting quinconce

Sweldens et Schröder [114] ont développé des opérateurs lifting directement à partir des méthodes d'interpolation de Deslauriers et Dubuc [35]. Leur construction ne se base pas sur la factorisation de bancs de filtres biorthogonaux. Cependant, les opérateurs de prédiction et de mise à jour vérifient que $p^{(l)}[2n+1]$ et $u^{(l)}[2n-1]$ soient des opérateurs symétriques en zéro. En conséquence, ils peuvent être étendus en schéma lifting quinconce de la même façon que tout autre opérateur.

filtres lifting	SL-1D (2,2)	SL-1D (4,2)	SL-1D (6,2)
$p^{(1)}$ d b a a b d	$a = 1/2$	$a = 9/2^4$	$a = 75/2^7$
		$b = -1/2^4$	$b = -25/2^8$
			$c = 3/2^8$
			$d = 3/2^{13}$
$u^{(1)}$	$a = -1/4$	$a = -1/4$	$a = -1/4$

TAB. 2.3 – Opérateurs lifting 1D construits à partir des méthodes d'interpolation de Deslauriers et Dubuc.

2.3 Problème de la normalisation des filtres et rectifications des pondérations

Le banc de filtres d'ondelettes vérifie la condition dite de « normalisation » :

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n} h_{m,n} &= \sqrt{2} & \sum_{m,n} \tilde{h}_{m,n} &= \sqrt{2} \\
\sum_{m,n} g_{m,n} &= 0 & \sum_{m,n} \tilde{g}_{m,n} &= 0
\end{aligned}$$

<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>

filtres lifting	SL (2,2)	SL (4,2)	SL (6,2)
$p^{(1)}$	$a = 1/4$	$a = 39/2^7$	$a = 625/2^{11}$
		$b = -3/2^7$	$b = -165/2^{12}$
		$c = -1/2^7$	$c = -85/2^{13}$
			$d = 15/2^{12}$
$u^{(1)}$	$a = -1/8$	$a = -1/8$	$e = 15/2^{13}$
			$f = 3/2^{13}$
			$a = -1/8$

TAB. 2.4 – Opérateurs d'interpolation lifting quinconce

Cependant, les filtres associés à une analyse multirésolution sont en pratique normalisés à 1, afin de conserver la même dynamique dans les représentations du signal à diverses résolutions. Ainsi, le filtrage est exécuté en appliquant le banc de filtres $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h, \frac{1}{\sqrt{2}}g\right)$ pour l'analyse et le banc de filtres $\left(\sqrt{2}\tilde{h}, \sqrt{2}\tilde{g}\right)$ pour la synthèse (afin de respecter les conditions de reconstruction parfaite). La condition de « normalisation » devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n} h_{m,n} &= 1 & \sqrt{2} \sum_{m,n} \tilde{h}_{m,n} &= 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n} g_{m,n} &= 0 & \sqrt{2} \sum_{m,n} \tilde{g}_{m,n} &= 0 \end{aligned}$$

Le schéma lifting associé au banc de filtres normalisés est obtenu par l'adjonction d'une dernière étape au schéma initialement défini :

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{\sqrt{2}}s \\ d &= \frac{1}{\sqrt{2}}d \end{aligned}$$

Cette nouvelle étape est retranscrite à la synthèse sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2}s \\ d &= \sqrt{2}d \end{aligned}$$

Il se peut que le filtre d'analyse h ne soit normalisé ni à 1 ni à $\sqrt{2}$, mais à la valeur α et le filtre $\tilde{h}$ à la valeur β . Soit :

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} h_{m,n} &= \alpha & \sum_{m,n} \tilde{h}_{m,n} &= \beta \\ \sum_{m,n} g_{m,n} &= 0 & \sum_{m,n} \tilde{g}_{m,n} &= 0 \end{aligned}$$

Afin de respecter les conditions fixées pour le filtrage, avec des filtres d'analyse normalisés à 1 et des filtres de synthèse normalisés à 2, nous utiliserons le banc de filtres $\left(\frac{1}{\alpha}h, \frac{1}{\beta}g\right)$

pour l'analyse et $\left(\frac{2}{\beta}\tilde{h}, \frac{2}{\alpha}\tilde{g}\right)$ pour la synthèse. Si la propriété de reconstruction parfaite et la condition de biorthogonalité sont vérifiées alors $\alpha\beta = 2$. Le banc de synthèse est alors donné par $\left(\alpha\tilde{h}, \beta\tilde{g}\right)$. Cette normalisation des bancs de filtres se traduit dans la version lifting par l'adjonction d'une dernière étape de normalisation :

$$s = \frac{1}{\alpha}s$$

$$d = \frac{1}{\beta}d$$

Le schéma de reconstruction doit " défaire " cette étape :

$$s = \alpha s$$

$$d = \beta d$$

En effet, la propriété de reconstruction parfaite ne peut être vérifiée que si $\alpha\beta = 2$.

2.4 Avantages et inconvénients

Les avantages intrinsèques au schéma lifting quinconce sont mis en exergue par analogie au lifting 1D. Premièrement, l'implémentation en schéma lifting permet de réduire la consommation de mémoire lors de l'exécution. La réduction est rendue possible par une actualisation des coefficients sur le même emplacement mémoire. La nouvelle valeur d'un échantillon est enregistrée sur l'emplacement mémoire de l'ancienne. Deuxièmement, la transformée est à reconstruction parfaite et son inverse se déduit très facilement du schéma lifting. Comme pour n'importe quelle représentation lifting, elle est définie par une simple inversion des opérations. La faculté du lifting à « défaire » la chaîne d'opérations permet d'assurer la reconstruction parfaite. La réalisation d'une version entière du schéma lifting est toujours possible dans le cadre d'une transformée en ondelettes quinconce. Le dernier avantage est la réduction du nombre d'opérations arithmétiques requises par le lifting, en comparaison à une transformée en ondelettes quinconce. Le gain est mis en évidence dans la suite du chapitre. Le schéma lifting quinconce offre une implémentation plus avantageuse de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable. Nous avons défini une méthode qui permet de générer une décomposition en schéma lifting pour des filtres biorthogonaux, bidimensionnels, non-séparables et dont la transformée en z est un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. Ces filtres sont à phase nulle et à symétrie octogonale.

Le schéma lifting supporte malgré tout quelques inconvénients. L'implémentation des filtres d'ondelettes en schéma lifting est limitée aux filtres à phase linéaire obtenus par la transformée de McClellan. Bien que le lifting nécessite une mémoire moins importante qu'une transformée en ondelettes classique par banc de filtres, la mise à jour pas à pas de chaque pixel entraîne une augmentation du nombre d'accès mémoire. Aussi, il est parfois nécessaire d'allouer une zone de mémoire temporaire supplémentaire pour le filtrage, afin de limiter le grand nombre d'accès à la mémoire contenant l'ensemble des données.

2.4.1 Transformée inverse

Le schéma lifting quinconce s'inverse tout aussi aisément qu'en 1D. Sa réalisation ne requiert qu'un simple renversement des opérations. L'implémentation du schéma lifting quinconce inverse nécessite trois étapes :

- l'initialisation des sous-images :

$$\begin{aligned} d_j^{(L)} &= \frac{1}{K} d_j \\ s_j^{(L)} &= K s_j \end{aligned}$$

- l'application des opérateurs de prédiction et de mise à jour, pour l allant de L à 1 :

$$\begin{aligned} d_j^{(l-1)}[n_x, n_y] &= d_j^{(l)}[n_x, n_y] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} P^{(l)}[k] s_j^{(l)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \\ s_j^{(l-1)}[n_x, n_y] &= s_j^{(l)}[n_x, n_y] + \sum_{k=(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} U^{(l)}[k] d_j^{(l-1)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \end{aligned}$$

- l'application de la transformée polyphase ou transformée basique mise en œuvre par les filtres $(\tilde{h}^{(0)}, \tilde{g}^{(0)})$:

$$\begin{aligned} s_{j-\frac{1}{2}}[n_x, n_y] &= \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}^{(0)}[(n_x, n_y) - L[k_x, k_y]] s_j^{(0)}[k_x, k_y] \\ &\quad + \sum_{(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}^{(0)}[(n_x, n_y) - L[k_x, k_y] - (1, 0)] d_j^{(0)}[k_x, k_y] \end{aligned}$$

Le processus de retournement des opérations assure la reconstruction parfaite.

2.4.2 Schéma lifting version entière

Le schéma lifting quinconce présente des qualités analogues au schéma 1D [13], qui le rendent flexible à la construction d'une version entière et réversible. La conception d'un schéma lifting quinconce, traitant des signaux à valeurs entières et retournant des ensembles d'entiers, se fait par la juxtaposition d'un opérateur d'arrondis pour chaque opérateur lifting. L'opérateur d'arrondis retourne, pour une valeur donnée, l'entier le plus proche. Par conséquent, l'opérateur d'arrondis

$$\left\lfloor \cdot + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (2.23)$$

est convolué avec les opérateurs lifting pour former des nouveaux filtres :

$$\left\lfloor U(\cdot) + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \left\lfloor P(\cdot) + \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (2.24)$$

Les opérateurs (2.24) définissent un filtrage non-linéaire, et n'ont pas les mêmes propriétés que leur version appliquée aux nombres réels. La transformée en ondelettes basique exécutée en amont des différents pas lifting ne peut être quelconque. Elle doit s'appliquer sur

des entiers et renvoyer des entiers. En conséquence, nous nous cantonnerons à la transformée polyphase. Le schéma lifting quinquonce version entière se décline en $2L + 1$ étapes constituées :

- de la transformée polyphase

$$\begin{aligned} s_j^{(0)} [n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}} [L [n_x, n_y]] \\ d_j^{(0)} [n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}} [L [n_x, n_y] + (1, 0)] \end{aligned}$$

- et des $2L$ pas , définis pour l allant de 1 à L :

$$\begin{aligned} s_j^{(l)} [n_x, n_y] &= s_j^{(l-1)} [n_x, n_y] - \left\lfloor \sum_{k=(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} U^{(l)} [k] d_j^{(l-1)} [n_x - k_x, n_y - k_y] + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ d_j^{(l)} [n_x, n_y] &= d_j^{(l-1)} [n_x, n_y] - \left\lfloor \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} P^{(l)} [k] s_j^{(l)} [n_x - k_x, n_y - k_y] + \frac{1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

REMARQUE 17 *Pour des raisons de simplicité, il est préférable que le facteur K , intervenant dans les équations (2.25), soit proche de la valeur 1.*

$$s_j [n_x, n_y] = \frac{1}{K} s_j^{(L)} [n_x, n_y] \quad (2.25)$$

$$d_j [n_x, n_y] = K d_j^{(L)} [n_x, n_y],$$

Pour K différent de 1, l'application de l'opérateur d'arrondis aux équations (2.25) rendrait la transformée irréversible. Les quatre pas lifting

$$\begin{aligned} s_j^{(L+1)} [n_x, n_y] &= s_j^{(L)} [n_x, n_y] + (K^2 - K) d_j^{(L)} [n_x, n_y] \\ d_j^{(L+1)} [n_x, n_y] &= d_j^{(L)} [n_x, n_y] + \frac{1}{K} s_j^{(L+1)} [n_x, n_y] \\ s_j^{(L+2)} [n_x, n_y] &= s_j^{(L+1)} [n_x, n_y] + (K - 1) d_j^{(L+1)} [n_x, n_y] \\ d_j^{(L+2)} [n_x, n_y] &= d_j^{(L+1)} [n_x, n_y] - s_j^{(L+2)} [n_x, n_y] \end{aligned} \quad (2.26)$$

exercent un filtrage identique à (2.25). La définition d'une version **entière réversible** admet quatre nouveaux pas lifting, qui viennent remplacer (2.25) :

$$\begin{aligned} s_j^{(L+1)} [n_x, n_y] &= s_j^{(L)} [n_x, n_y] + \left\lfloor (K^2 - K) d_j^{(L)} [n_x, n_y] + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ d_j^{(L+1)} [n_x, n_y] &= d_j^{(L)} [n_x, n_y] + \left\lfloor \frac{1}{K} s_j^{(L+1)} [n_x, n_y] + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ s_j^{(L+2)} [n_x, n_y] &= s_j^{(L+1)} [n_x, n_y] + \left\lfloor (K - 1) d_j^{(L+1)} [n_x, n_y] + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ d_j^{(L+2)} [n_x, n_y] &= d_j^{(L+1)} [n_x, n_y] - s_j^{(L+2)} [n_x, n_y] \end{aligned}$$

Ce procédé a déjà été appliqué par Calderbank en dimension un [13]. L'inconvénient majeur de cette mise en forme est que la propriété de symétrie des filtres n'est plus valable pour la version entière, quand K est différent de 1.

2.5 Gain en complexité

Le schéma lifting quinconce bénéficie d'un atout important. Il permet d'implémenter une transformée en ondelettes avec une réduction significative du nombre d'opérations arithmétiques. Le schéma lifting est construit à partir de filtres bidimensionnels. Aussi, nous pouvons comparer les coûts des calculs pour les deux types d'implémentation. Nous avons mis en évidence le gain en complexité, en comparant le nombre d'opérations par pixel requis pour des implémentations par banc de filtres et par schéma lifting. L'évaluation du gain révèle un des intérêts majeurs de l'implémentation lifting. Reichel [92] a développé le calcul du gain pour des filtres de dimension un.

REMARQUE 18 *Tous nos calculs sont effectués en considérant que le schéma lifting admet la décomposition polyphase pour transformée initiale (transformée basique mise en œuvre par les filtres $h^{(0)}$ et $g^{(0)}$).*

2.5.1 Calcul du nombre d'opérations pour un filtre diamant quinconce (cas des filtres échantillonnés sur une grille quinconce)

Les filtres diamant quinconce désignent des filtres diamant échantillonnés sur une grille quinconce ou bien des filtres diamant tournés de 45 degrés et s'appliquant, dès lors, à une grille carré (voir Fig. 2.2).

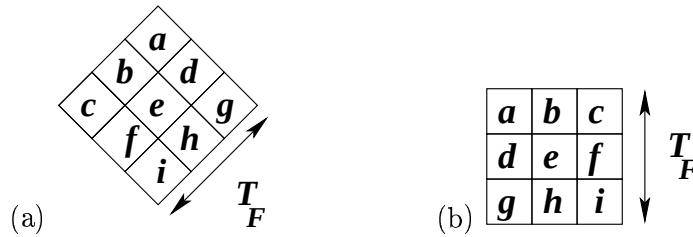


FIG. 2.2 – (a) Filtre diamant échantillonné sur une grille quinconce pour $T_F = 3$ et (b) filtre transformé par une symétrie axiale et une rotation de 45 degrés

Les opérateurs lifting ou les composantes polyphases h_e , h_o , g_e et g_o des filtres d'ondelettes h et g entrent dans cette catégorie de filtres. Considérons un filtre bidimensionnel F de taille $T_F \times T_F$ et dont la forme est caractérisée par les figures (FIG. 2.2.a) ou (Fig. 2.2.b). Nous calculons le nombre d'opérations arithmétiques effectuées lors de son application. Le nombre d'opérations arithmétiques dépend du nombre de coefficients du filtre. Le nombre de coefficients contenu dans le filtre F de taille $T_F \times T_F$, avec $T_F \in \mathbb{N}$, est défini par :

$$N_F = T_F^2$$

Pour un filtre quelconque le nombre d'additions (et de soustractions), noté C_F^+ , et le nombre

de multiplications (et de divisions), noté C_F^* , sont définis par²³ :

$$C_F^+ = \frac{N_F - 1}{2} \quad C_F^* = \frac{N_F}{2}$$

Chaque pas lifting s'applique à une image deux fois plus petite que l'image originale, aussi le nombre d'additions par pixel est obtenu en divisant le nombre d'opérations par un facteur 2. Aussi, le filtrage F effectue C_F^+ additions et C_F^* multiplications par pixel. C_F^+ et C_F^* sont définies par les équations (2.27).

$$C_F^+ = \frac{T_F^2 - 1}{2} \quad C_F^* = \frac{T_F^2}{2} \quad (2.27)$$

Le nombre total d'opérations arithmétiques par pixel s'identifie à C_F^T :

$$C_F^T = \frac{2T_F^2 - 1}{2}$$

2.5.2 Calcul du nombre d'opérations arithmétiques requises pour un schéma lifting à M pas (primaux et duaux)

Les opérateurs lifting sont des filtres quinconce et sont généralement de longueur paire. Pour un filtre de taille $T \times T$, nous définissons par le terme de « longueur » la valeur T . La longueur du $k^{\text{ième}}$ opérateur lifting se note T_k . Le nombre d'opérations arithmétiques est déterminé en sommant le nombre d'opérations requises pour chacun des pas lifting. Le nombre d'additions est donné par C_{SL}^+ :

$$C_{SL}^+ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \{C_k^+ + 1\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \{T_k^2 - 1 + 1\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M T_k^2$$

Le nombre de multiplications est donné de la même manière par C_{SL}^* :

$$C_{SL}^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M T_k^2$$

Si le coefficient K du schéma lifting est différent de l'unité, deux multiplications supplémentaires (une par sous bande) doivent être prises en compte :

$$C_{SL}^* = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M T_k^2 \right) + 1$$

Le nombre de multiplications par pixel est reformulé ainsi :

$$C_{SL}^* = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M T_k^2 \right) + (1 - \delta_{K-1})$$

²Une soustraction par une valeur n est considérée comme une addition par une valeur $-n$. Une division par un coefficient a est considérée comme la multiplication par le coefficient a^{-1}

³Dans le cas d'opérateurs symétriques, le gain en nombre d'additions reste inchangé, par contre le nombre de multiplications ne va plus dépendre du nombre de coefficients du filtre, mais du nombre de valeurs différentes que prennent les coefficients du filtre.

2.5.3 Calcul du nombre d'opérations requises pour la transformée en ondelettes par banc de filtres

Les composantes polyphases des filtres d'ondelettes correspondant au schéma lifting sont obtenues par le développement du terme de droite de l'égalité (2.28).

$$\begin{pmatrix} h_e(z_1^{-1}, z_2^{-1}) & h_o(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ g_e(z_1^{-1}, z_2^{-1}) & g_o(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \times \prod_{i=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^{(L-i)}(z_1, z_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u^{(L-i)}(z_1, z_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

La convolution d'un filtre de taille $T_a \times T_a$ avec un filtre de taille $T_b \times T_b$ produit un filtre de taille $T \times T$, avec $T = T_a + T_b - 1$. En conséquence, les longueurs des quatre composantes polyphases sont mises en évidence par l'ensemble des équations (2.29).

$$\begin{aligned} T_{h_e} &= \left(\sum_{k=2}^{M-1} T_k \right) - (M-3) & T_{h_o} &= \left(\sum_{k=1}^{M-1} T_k \right) - (M-2) \\ T_{g_e} &= \left(\sum_{k=2}^M T_k \right) - (M-2) & T_{g_o} &= \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Le nombre de coefficients composant chacun des filtres polyphases est défini par la taille du filtre considéré. Le nombre de coefficients est défini pour chaque composante par les équations (2.30).

$$\begin{aligned} N_{h_e} &= T_{h_e}^2 & N_{h_o} &= T_{h_o}^2 \\ N_{g_e} &= T_{g_e}^2 & N_{g_o} &= T_{g_o}^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Des formules (2.30), se déduisent les calculs des nombres de coefficients en fonction de la longueur des différents opérateurs lifting.

$$\begin{aligned} N_{h_e} &= \left\{ \left(\sum_{k=2}^{M-1} T_k \right) - (M-3) \right\}^2 & N_{h_o} &= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{M-1} T_k \right) - (M-2) \right\}^2 \\ N_{g_e} &= \left\{ \left(\sum_{k=2}^M T_k \right) - (M-2) \right\}^2 & N_{g_o} &= \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\}^2 \end{aligned}$$

Le nombre total des coefficients composant les filtres h et g est alors défini par :

$$N_h = T_{h_e}^2 + T_{h_o}^2 \quad N_g = T_{g_e}^2 + T_{g_o}^2$$

Le calcul détaillé de N_h et de N_g conduit aux deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} N_h &= 2 \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\}^2 + (T_M - 1)^2 + (T_1 + T_M - 2)^2 \\ &\quad - 2(T_1 + 2T_M - 3) \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\} \end{aligned}$$

et

$$N_g = 2 \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\}^2 - 2(T_1 - 1) \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\} + (T_1 - 1)^2$$

De toutes ces opérations, nous déduisons le nombre d'opérations pour un filtrage par banc de filtres quinconce, en calculant en premier lieu le nombre d'additions C_{TO}^+ :

$$C_{TO}^+ = \frac{N_h + N_g - 2}{2}$$

Le détail de C_{TO}^+ aboutit à l'équation (2.31).

$$\begin{aligned} C_{TO}^+ = & \frac{1}{2} \left\{ 4 \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\}^2 - 4(T_1 + T_M - 2) \left\{ \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - (M-1) \right\} \right. \\ & \left. + 2 \left\{ (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 + (T_1 - 1)(T_M - 1) \right\} - 2 \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Soit

$$\begin{aligned} C_{TO}^+ = & \frac{1}{2} \left\{ \left[2 \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - 2(M-1) - (T_1 + T_M - 2) \right]^2 \right. \\ & \left. + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 - 2 \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

De la même manière, nous calculons le nombre de multiplications C_{TO}^* :

$$C_{TO}^* = \frac{N_h + N_g}{2}$$

Soit

$$\begin{aligned} C_{TO}^* = & \frac{1}{2} \left\{ \left[2 \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - 2(M-1) - (T_1 + T_M - 2) \right]^2 \right. \\ & \left. + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.5.4 Mise en évidence du gain en coût filtrage entre un schéma lifting quinconce et une transformée en ondelettes quinconce

Le gain sur le nombre d'opérations arithmétiques, obtenu par l'application d'un schéma lifting, est donné par le rapport entre le nombre d'opérations requises pour la transformée en ondelettes implémentée par banc de filtres et le nombre d'opérations requises par sa forme lifting. Les gains sur le nombre d'additions et celui sur le nombre de multiplications sont donnés par G_+ et G_* .

$$G_+ = \frac{C_{TO}^+}{C_{SL}^+} \quad G_* = \frac{C_{TO}^*}{C_{SL}^*}$$

Calculons le gain sur le nombre d'additions de manière plus détaillée.

$$G_+ = \frac{1}{\sum_{k=1}^M T_k^2} \left\{ \left[2 \left(\sum_{k=1}^M T_k \right) - 2(M-1) - (T_1 + T_M - 2) \right]^2 + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 - 2 \right\}$$

Le gain se récrit

$$G_+ = \frac{1}{\sum_{k=1}^M T_k^2} \left\{ \left[\sum_{k=1}^M T_k + \left(\sum_{k=2}^{M-1} T_k - 2(M-2) \right) \right]^2 + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 - 2 \right\}$$

Pour les filtres de longueur paire, nous avons

$$T_k \geq 2 \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$$

La somme des longueurs des opérateurs lifting peut à son tour être minorée :

$$\sum_{k=1}^M T_k \geq 2M \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$$

Le gain en nombre d'additions est alors minoré par

$$G_+ \geq \frac{\left[\sum_{k=1}^M T_k \right]^2}{\sum_{k=1}^M T_k^2}$$

REMARQUE 19 Dans le cas particulier de pas de longueur deux $T_k = 2$, $\forall k \in \{1, \dots, M\}$, le gain est égal à

$$G_+ = M$$

Dans le cas où $T_k = 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$ le gain est défini par

$$G_+ = \frac{2}{M}$$

Dans le cas particulier où la longueur d'un opérateur lifting est égale à un, il s'agit forcément du dernier pas. Sinon, le schéma lifting est mal construit et peut être simplifié, et le nombre d'opérateurs peut être réduit.

La valeur du gain croît avec le nombre de pas lifting. Elle augmente aussi avec la longueur des différents opérateurs. Ainsi, l'intérêt d'une implémentation en schéma lifting croît avec la longueur des filtres de la TOR équivalente.

Le gain sur le nombre de multiplications est détaillé de la même façon :

$$G_* = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^M T_k^2\right) + 2(1 - \delta_{K-1})} \left\{ \left[\sum_{k=1}^M T_k + \left(\sum_{k=2}^{M-1} T_k - 2(M-2) \right) \right]^2 + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 \right\}$$

Pour les filtres de longueur paire,

$$T_k \geq 2 \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$$

Le gain en nombre de multiplications est alors minoré par

$$G_* \geq \frac{\left[\sum_{k=1}^M T_k \right]^2 + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2}{\sum_{k=1}^M T_k^2 + 2(1 - \delta_{K-1})}$$

REMARQUE 20 Pour $T_k = 2 \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$:

$$G_* = \frac{2M^2 + 1}{2M + (1 - \delta_{K-1})}$$

Le gain total en nombre d'opérations arithmétiques est donné par :

$$G_T = \frac{C_{TO}^+ + C_{TO}^*}{C_{SL}^+ + C_{SL}^*}$$

Soit

$$G_T = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^M T_k^2\right) + (1 - \delta_{K-1})} \left\{ \left[\sum_{k=1}^M T_k + \left(\sum_{k=2}^{M-1} T_k - 2(M-2) \right) \right]^2 + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 - 1 \right\}$$

Le gain total en nombre d'opérations arithmétiques est minoré par

$$G_T \geq \frac{\left[\sum_{k=1}^M T_k \right]^2 + (T_1 - 1)^2 + (T_M - 1)^2 - 1}{\sum_{k=1}^M T_k^2 + (1 - \delta_{K-1})}$$

Dans le cas de pas lifting de longueur deux, soit $T_k = 2 \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$, nous avons :

$$G_T = \frac{4M^2 + 1}{4M + (1 - \delta_{K-1})}$$

Le gain a une valeur très proche de M dans ce cas particulier. Dans le cas général, il croît au fur et à mesure que M et T_k augmentent. Ainsi, plus les filtres de TOR sont longs plus l'intérêt d'implémenter la transformée en ondelettes par schéma lifting grandit. Le schéma lifting offre une implémentation de la transformée en ondelettes bien plus performante sur le plan de la complexité qu'une implémentation classique par banc de filtres.

2.5.5 Calcul du gain pour les filtres (9,7) quinconce :

Les filtres (9,7) bidimensionnels non-séparables sont à symétrie octogonale. L'implémentation de la transformée en ondelettes quinconce prend en compte les symétries. La conséquence directe est une réduction de la complexité du filtrage. Pour une transformée par banc de filtres, le nombre d'opérations arithmétiques est donné par le nombre d'additions :

$$C_{TO}^+ = C_h^+ + C_g^+ = \frac{40 + 24}{2} = 32$$

et le nombre de multiplications :

$$C_{TO}^* = C_h^* + C_g^* = \frac{9 + 6}{2} = 7,5$$

Nous en déduisons le nombre total d'opérations arithmétiques :

$$C_{TO}^T = C_{TO}^+ + C_{TO}^* = 39,5$$

Le schéma lifting quinconce associé aux filtres (9,7) est défini par des opérateurs à symétrie octogonale. En conséquence, le schéma comporte :

$$C_{SL}^+ = \frac{16}{2} = 8$$

additions et :

$$C_{SL}^* = 3$$

multiplications. Le nombre d'opérations arithmétiques est donc identifié par :

$$C_{SL}^T = C_{SL}^+ + C_{SL}^* = 11$$

Le gain en coût calcul, pour une implémentation lifting des filtres (9,7) quinconce, est défini par :

$$G^T = \frac{C_{TO}^T}{C_{SL}^T} = 3,59$$

Nous pouvons différencier le gain en nombre d'additions :

$$G_+ = \frac{C_{TO}^+}{C_{SL}^+} = 4$$

et le gain en nombre de multiplications :

$$G_* = \frac{C_{TO}^*}{C_{SL}^*} = 2,5$$

Le gain en additions atteint un facteur 4. Le résultat était prévisible, puisque nous nous situons dans le cas où les pas lifting sont de longueur 2. La prise en compte des symétries lors de l'implémentation de la transformée permet de réduire le nombre de multiplications dans les deux versions. Cependant le rapport entre les deux est lui aussi réduit. Ce qui explique que nous n'obtenons pas un gain aussi important que prévu.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les équations relatives au schéma lifting quinconce. Le schéma est associé à une analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$. Nous avons ensuite développé une méthode permettant d'obtenir une « factorisation » de la matrice polyphase en dimension deux pour des filtres biorthogonaux dont la transformée en z est un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1}]$. En conséquence, nous définissons une règle permettant d'obtenir la forme lifting quinconce associée à chacun de ces banc de filtres. Nous avons ensuite exposé les points clés du schéma lifting quinconce, par un bref descriptif des avantages intrinsèques au lifting. Ces avantages se conforment au cas du lifting en dimension un, c'est pourquoi nous ne nous sommes pas attardés sur ce point pourtant capital. La transformée en ondelettes quinconce implémentée par un banc de filtres classique est en règle générale non-séparable. L'emploi d'une telle transformée comporte un inconvénient majeur face à celui d'une transformée bidimensionnelle séparable. En effet, la transformée non-séparable requiert un nombre d'opérations bien plus important. Aussi, la complexité d'un filtrage par transformée en ondelettes quinconce soulève un réel problème. L'implémentation en schéma lifting apporte une solution par une réduction significative de la complexité du filtrage. Notons cependant que les filtres séparables puissent bénéficier d'une réduction similaire par l'application d'une implémentation lifting 1D dans chaque direction. Nous avons mis en évidence le gain relatif au nombre d'opérations requises par les deux implémentations (lifting et classique) de la transformée en ondelettes. Le gain est d'autant plus important que le filtre à implémenter est long et donc coûteux. Les propriétés du schéma lifting dépendent entièrement des propriétés du banc de filtres associés. La construction de filtres performants constitue une des grandes difficultés relatives au filtres à plusieurs dimensions non-séparables. Dans le chapitre suivant, nous proposons une méthode de construction d'opérateurs lifting quinconce adaptés aux propriétés statistiques des données auxquelles ils s'appliquent.

Chapitre 3

Optimisation de filtres lifting

Ce chapitre a pour objet le développement d'une nouvelle méthode de synthèse d'opérateurs lifting. Ces derniers sont construits sans se référer à des filtres 1D ou 2D préexistants, et sans même passer par le domaine fréquentiel. Un des intérêts majeurs du lifting de Sweldens réside justement dans la possibilité de créer des filtres, sans avoir recours aux méthodes classiques, nécessitant de travailler dans le domaine de Fourier [113]. Dans leurs travaux [114], Sweldens et Schröder synthétisent les opérateurs lifting 1D par l'incorporation de pas lifting et de pas lifting duaux à un schéma de base. Ce dernier est défini par une transformée en ondelettes basique. Chaque pas est déterminé en fonction des propriétés que l'on souhaite affecter aux ondelettes. Par exemple, un pas lifting peut être défini en vue d'augmenter le nombre de moments nuls de l'ondelette, ou de préserver la moyenne de l'approximation du signal [114]. A cet effet, Sweldens et Schröder exploitent deux ensembles de méthodes : l'un se basant sur les B-splines, l'autre se basant à la fois sur les fonctions d'interpolations de Deslauriers et Dubuc [34, 35], et sur la fonction d'interpolation moyenne de Donoho [36]. Kovačević [55] définit un schéma lifting multidimensionnel en se basant sur le même principe d'interpolation. Le schéma contient deux pas : l'opérateur de prédiction appartient à la classe des filtres de Neville et l'opérateur de mise à jour est défini à partir du prédicteur (adjoint divisé par 2).

Notre méthode, contrairement aux travaux cités précédemment, ne cherche pas à déterminer des filtres en fonction des propriétés à attribuer aux ondelettes [44]. Notre objectif est de construire des filtres adaptés aux données sources, afin de structurer au mieux le signal à transmettre au codeur, qui est assigné à une chaîne de compression. En effet, la plupart des codeurs tiennent compte des propriétés statistiques des images. En conséquence, leur efficacité dépend du type de signaux à coder. L'étape transformée est capitale, puisqu'elle permet une restructuration des données au sein de la chaîne de compression, de façon à maximiser les performances du codeur et obtenir ainsi de plus hauts taux de compression pour une qualité donnée. Notre étude s'articule en deux parties. Dans un premier temps, la méthode vise à générer une sous-bande haute fréquence dont les caractéristiques statistiques s'adaptent au codage non-conservatif. Les pas lifting caractérisant les hautes fréquences sont définis par les opérateurs de prédiction. Un critère est proposé afin d'optimiser le prédicteur, et garantir ainsi un signal haute fréquence ayant de bonnes propriétés, en vue d'améliorer les performances du codeur exploité. Dans un second temps,

la simulation de pertes dans l'image de coefficients d'ondelettes conduit à la définition d'un nouveau critère optimisant le pas de mise à jour. Ce pas lifting a pour rôle d'affiner l'approximation basse résolution de l'image originale en y ajoutant l'information nécessaire. Pour un schéma de compression non-conservatif, la mise à jour peut être définie de façon à minimiser la distorsion entre l'image originale et l'image reconstruite, suite à la simulation de pertes dans les hautes fréquences. Les deux critères, que nous allons développer selon les principes énoncés, reposent sur la méthode du filtrage de Wiener. Il s'agit d'une méthode plus connue dans le domaine de la restauration d'image, du seuillage [16], et plus récemment de la conception de filtres para-unitaires [33, 76].

3.1 Définition de la méthode utilisant l'optimisation de Wiener

Dans une chaîne de compression d'images, le filtrage modélise les données et les restructure de façon à définir un signal plus adapté à la compression. Les propriétés du signal transformé doivent se conformer au mieux aux hypothèses sous-jacentes aux méthodes de codage, pour assurer des performances optimales en terme de qualité et de débit. Le principe de synthèse d'opérateurs quinconce repose sur l'exploitation de méthodes plus couramment employées dans le domaine de la restauration d'images. La conception des opérateurs s'appuie en effet sur l'étude des propriétés statistiques du signal auquel le lifting doit être appliqué. Elle s'inspire d'une méthode empruntée aux techniques de débruitage d'images : le filtrage de Wiener. Cette méthode permet la mise en œuvre d'un algorithme relativement peu coûteux et efficace. L'algorithme développé par la suite peut être exploité de deux façons différentes. Tout d'abord, l'optimisation de filtres peut être adaptée à chaque image traitée. Dans ce cas, l'étape d'optimisation est simplement incluse dans la procédure de filtrage. Les filtres sont transmis systématiquement au décodeur, afin de pouvoir procéder à la transformée inverse. Le débit du signal codé est donc augmenté, mais de façon négligeable. L'obligation de transmettre les filtres au décodeur n'a pas d'influence sur l'efficacité de la méthode. Une deuxième façon d'exploiter cette méthode est de regrouper par catégorie, les images ayant des propriétés statistiques similaires. L'optimisation de filtres adjoint une transformée par catégorie. Ainsi, le codeur peut disposer d'un ensemble de filtres optimisés au préalable, et déterminer le schéma lifting par sélection dès la réception de l'image à compresser. Dans ce cas de figure, les filtres sont construits de façon à être plus adaptés à certaines classes d'images ayant les mêmes propriétés statistiques. L'algorithme d'optimisation, que nous proposons, est basé sur un schéma lifting à deux pas. Un tel schéma est suffisant pour disposer d'un large panel de filtres. La première étape consiste à optimiser le prédicteur et la seconde, le pas de mise à jour. Cet ordonnancement permet d'obtenir un banc de filtres équivalent, pour lequel le filtre passe-bas est plus long que le filtre passe-haut.

3.1.1 Optimisation de l'opérateur de prédiction

L'opérateur de prédiction P permet d'acquérir une représentation des détails du signal source. Ces détails correspondent aux coefficients d'ondelettes. Un bon prédicteur génère

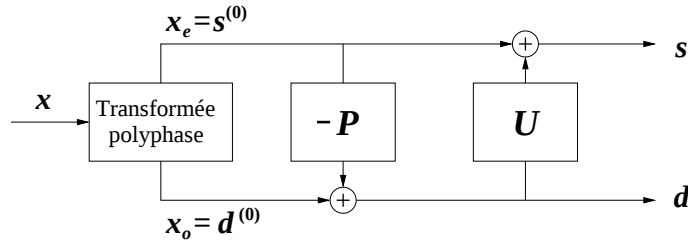


FIG. 3.1 – Schéma lifting quinconce à deux pas

un signal de coefficients avec de « bonnes propriétés » en vue de la compression. En effet, les performances des codeurs sont variables en fonction des propriétés du signal d'entrée. Selon la théorie de Shannon, un signal de faible variance peut être codé plus efficacement qu'un signal de forte variance. Ce principe vaut tant pour la compression sans perte d'information que pour la compression avec perte. Certaines méthodes de codage utilisent un principe d'allocation de débit. L'allocation définit les pas de quantification optimaux pour un débit donné, appelé débit cible. Les allocations de débit basées modèles caractérisent le signal haute fréquence par un modèle de densité de probabilité gaussienne ou autre [82, 90, 108, 70]. Elles définissent les pas de quantification minimisant la distorsion. La distorsion est dépendante de la variance du signal. La quantification offre souvent de meilleurs résultats pour des signaux de faible variance, en réduisant plus rapidement le débit tout en conservant une bonne qualité image. Le codeur intervenant après une transformée en ondelettes, le gain au niveau du codage se fait surtout dans les sous-bandes haute fréquence, où l'énergie est déjà concentrée sur quelques valeurs. Aussi, un critère fiable et adéquat pour l'application d'un codeur, est de minimiser la variance du signal de coefficients :

$$J = \sigma_d^2 \quad (3.1)$$

L'optimisation du critère J spécifie un prédicteur minimisant la variance du signal de coefficients d'ondelettes.

3.1.2 Optimisation de l'opérateur de mise à jour

Suite à la construction de l'opérateur de prédiction, les coefficients d'ondelettes peuvent désormais être déterminés à partir d'un signal source donné. Un opérateur U de mise à jour est appliqué sur ces coefficients, afin d'approximer le signal à plus petite échelle. Un opérateur efficace retourne un signal basse fréquence offrant une représentation fidèle du signal source à une résolution inférieure. L'image des coefficients est destinée à subir des dégradations plus ou moins fortes, lorsque la transformée en ondelettes est associée à un codeur générant des pertes d'information. Il est donc primordial de pouvoir assurer une reconstruction du signal la plus fiable possible à partir de la seule image basse fréquence. La synthèse du filtre U détermine l'erreur de reconstruction minimale, en fixant le signal haute

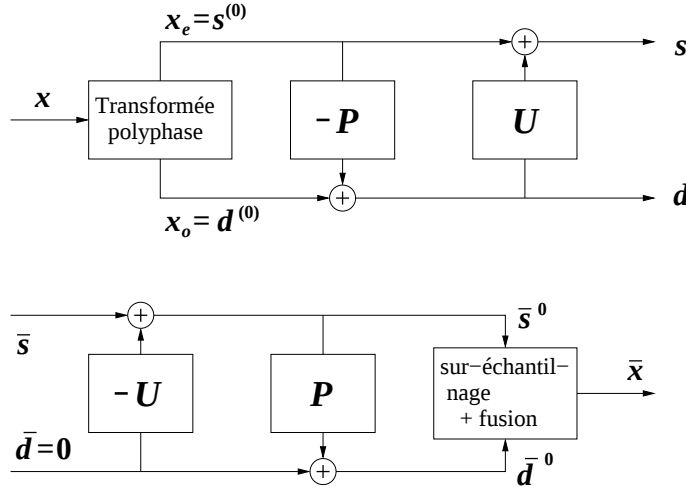


FIG. 3.2 – Schéma lifting et schéma lifting inverse

fréquence d à zéro. Le critère est défini comme l'erreur quadratique de reconstruction :

$$J = E \left\{ (\bar{x} - x)^2 \right\}$$

Le signal x représente les données sources et $\bar{x}$ le signal restauré. La minimisation du critère définit un opérateur de mise à jour, Cet opérateur doit minimiser la distorsion entre le signal source et le signal restauré après à la perte de l'image haute fréquence. Ce principe vise aussi à offrir une meilleure *scalabilité* en résolution et en qualité lors de la reconstruction du signal.

3.2 Propriétés et contraintes sur les opérateurs lifting

3.2.1 Cadre de l'étude et propriétés

L'intérêt de ce chapitre est essentiellement de définir des opérateurs lifting quiconce adaptés aux données. Le procédé d'optimisation est développé dans le cadre plus général des échantillonnages réguliers. L'algorithme soumet une solution à titre d'exemple dans le cas d'échantillonnages quiconce. L'ensemble des filtres va être défini sur le domaine D . Il représente l'ensemble des indices de P et des indices de U . Par exemple, le domaine D est inclus dans $\mathbb{Z}$ dans le cas de signaux 1D, et dans $\mathbb{Z}^2$ dans le cas de signaux bidimensionnels.

Les théorèmes 10 et 11 de Vetterli et de Sweldens se généralisent en dimension M [121, 113] (en dimension 2 dans le cas du quiconce). Ils certifient que les bancs de filtres d'analyse et de synthèse correspondant au schéma lifting sont biorthogonaux à deux conditions. Le schéma lifting est composé d'une transformée basique biorthogonale et les opérateurs P et U sont à support compact. Les opérateurs lifting, que nous proposons, sont à réponse impulsionnelle finie. Leur longueur est fixée à l'avance. Ils sont biorthogonaux et à reconstruction parfaite.

3.2.2 Contraintes

3.2.2.1 « Normalisation des filtres »

Les opérateurs lifting doivent respecter certaines propriétés, outre la biorthogonalité et la propriété de reconstruction parfaite. Nous proposons d'ajouter trois contraintes à nos critères. La première contrainte introduite permet d'annuler la moyenne des coefficients d'ondelettes. La deuxième contrainte consiste à imposer la conservation de la moyenne dans les sous-bandes basse fréquence. Cette contrainte est indispensable, lors de l'implémentation, pour éviter tout risque de dépassement de capacité (explosion des coefficients) après l'application du schéma lifting sur les approximations successives de l'image originale. Ces deux contraintes vont de pair avec la dernière contrainte sur le banc de filtres correspondant. Cette dernière contrainte impose que les filtres d'ondelettes correspondants $\tilde{h}$, $\tilde{g}$, h et g vérifient, pour l'analyse :

$$\sum_{n \in D} h_n = 1 \quad (A1) \quad \sum_{n \in D} g_n = 0 \quad (A2)$$

et pour la synthèse :

$$\sum_{n \in D} \tilde{h}_n = 2 \quad (S1) \quad \sum_{n \in D} \tilde{g}_n = 0 \quad (S2)$$

Les opérations de changement d'échelle sur D sont définies par les applications α_1 et α_2 . Pour $D \subseteq \mathbb{Z}$,

$$\alpha_1(k) = 2k \quad \alpha_2(k) = 2k + 1 \quad \forall k \in D \subseteq \mathbb{Z}$$

Pour $D \subseteq \mathbb{Z}^2$,

$$\alpha_1(k) = L(k) - (1, 0) \quad \alpha_2(k) = L(k) + (1, 0) \quad \forall k \in D \subseteq \mathbb{Z}^2$$

Pour un schéma lifting à deux pas, les filtres d'analyse sont définis à partir des opérateurs de prédiction et de mise à jour :

$$\begin{aligned} h[n] = & \bar{\delta}[n] - \sum_{k \in D} \bar{\delta}[n - \alpha_2(k)] u[-k] \\ & + \sum_{k_1 \in D} \sum_{k_2 \in D} \bar{\delta}[n - \alpha_1(k_1) - \alpha_2(k_2)] p[-k_1] u[-k_2] \end{aligned} \quad (3.2)$$

et

$$g[n] = \bar{\delta}[n] - \sum_{k \in D} \bar{\delta}[n - \alpha_1(k)] p[-k]$$

avec $\bar{\delta}[n] = \delta[n_1] \delta[n_2] \cdots \delta[n_M]$, pour $D \subset \mathbb{Z}^M$. De même, les filtres de synthèse sont définis par :

$$\tilde{h}[n] = \bar{\delta}[n] + \sum_{k \in D} \bar{\delta}[n - \alpha_2(k)] p[k] \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{g}[n] = & \bar{\delta}[n] + \sum_{k \in D} \bar{\delta}[n - \alpha_2(k)] u[k] \\ & + \sum_{k_1 \in D} \sum_{k_2 \in D} \bar{\delta}[n - \alpha_1(k_2) - \alpha_2(k_1)] p[k_1] u[k_2] \end{aligned} \quad (3.4)$$

En sommant terme à terme (3.3) sur D et en combinant le tout avec la contrainte (S1), nous obtenons une nouvelle condition sur la somme des coefficients de l'opérateur P :

$$\sum_{n \in D} \tilde{h}[n] = 2 = 1 + \sum_{n \in D} p[n]$$

En réalisant la même opération sur (3.4), tout en respectant (S2), nous obtenons une condition sur la somme des coefficients de l'opérateur U :

$$\sum_{n \in D} \tilde{g}[n] = 0 = 1 - \sum_{n \in D} u[n] \left(1 + \sum_{k \in D} p[k] \right)$$

Les contraintes à imposer aux opérateurs de prédiction et de mise à jour sont déduites des calculs précédents. Soit :

$$\sum_{n \in D} p[n] = 1 \quad (3.5)$$

et

$$\sum_{n \in D} u[n] = \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

REMARQUE 21 *Les opérateurs d'un schéma lifting à deux pas, vérifiant les relations (3.5) et (3.6), vérifient aussi les conditions sur les bancs de filtres correspondants quel que soit l'échantillonnage (du moment qu'il est régulier). En effet, les filtres sont trouvés de la même façon à partir des opérateurs lifting pour tout échantillonnage régulier, seuls les indices changent.*

3.2.2.2 Phase nulle

La possibilité d'ajouter des contraintes à nos critères, nous permet d'imposer la condition de phase nulle sur les filtres passe-bas, h et $\tilde{h}$, associés. Par extension, la condition implique la linéarité de la phase des filtres passe-haut g et $\tilde{g}$. Cette condition est très importante en compression d'images, elle permet d'éviter de fortes distorsions visuelles. Un filtre à phase non linéaire va générer une forte détérioration au niveau des contours. Les opérateurs P et U doivent être symétriques de sorte que les filtres d'ondelettes correspondants $\tilde{h}$, $\tilde{g}$, h et g le soient aussi.

Dans le cas où $D \subseteq \mathbb{Z}$, alors

$$h[n] = h[-n] \quad \text{et} \quad \tilde{h}[n] = \tilde{h}[-n] \quad \forall n \in D.$$

Des équations (3.2) et (3.3), nous déduisons :

$$p[n-1] = p[-n] \quad \text{et} \quad u[n] = u[-n+1] \quad \forall n \in D,$$

Dans le cas où $D \subseteq \mathbb{Z}^2$, nous imposons la symétrie octogonale centrée en zéro.

$$\begin{aligned} h[n_x, n_y] &= h[-n_x, n_y] = h[n_x, -n_y] = h[-n_x, -n_y] = h[n_y, n_x] \\ &= h[-n_y, n_x] = h[n_y, -n_x] = h[-n_y, -n_x] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{h}[n_x, n_y] &= \tilde{h}[-n_x, n_y] = \tilde{h}[n_x, -n_y] = \tilde{h}[-n_x, -n_y] = \tilde{h}[n_y, n_x] \\ &= \tilde{h}[-n_y, n_x] = \tilde{h}[n_y, -n_x] = \tilde{h}[-n_y, -n_x]\end{aligned}$$

Des équations (3.2) et (3.3), nous déduisons

$$\begin{aligned}p^{(l)}[n_x, n_y] &= p^{(l)}[n_x, -n_y - 1] = p^{(l)}[-n_x - 1, n_y] = p^{(l)}[-n_x - 1, -n_y - 1] = p^{(l)}[n_y, n_x] \\ &= p^{(l)}[-n_y - 1, n_x] = p^{(l)}[n_y, -n_x - 1] = p^{(l)}[-n_y - 1, -n_x - 1]\end{aligned}\quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned}u^{(l)}[n_x, n_y] &= u^{(l)}[n_x, -n_y + 1] = u^{(l)}[-n_x + 1, n_y] = u^{(l)}[-n_x + 1, -n_y + 1] = u^{(l)}[n_y, n_x] \\ &= u^{(l)}[-n_y + 1, n_x] = u^{(l)}[n_y, -n_x + 1] = u^{(l)}[-n_y + 1, -n_x + 1]\end{aligned}\quad (3.8)$$

Cette contrainte se traduit par une réduction sensible du degré de liberté sur notre critère. Ainsi, pour un opérateur de taille $t \times t$, le nombre de coefficients à définir n'est plus de l'ordre de t^2 mais de l'ordre de $\frac{1}{8}t(t+2)$.

3.3 Méthode d'optimisation sous contraintes basée sur les filtres de Wiener

L'apport de nouvelles contraintes aux opérateurs lifting modifie les critères d'optimisation précédemment énoncés. Nous allons définir ces nouveaux critères et les optimiser pour aboutir à un schéma de synthèse d'opérateurs lifting. Auparavant, nous rappelons quelques notions de statistiques intervenant dans nos opérations.

3.3.1 Processus aléatoires

L'étude des propriétés statistiques de l'image se base sur l'hypothèse que chaque pixel de l'image est considéré comme une variable aléatoire. Une image devient alors un échantillon pris parmi un ensemble d'images. L'image peut être considérée comme l'ensemble ordonné de toutes ces variables aléatoires et donc comme un processus aléatoire dont l'espérance, la variance et la covariance sont définies par :

$$E(x[n]) = \mu_x(n)$$

$$\sigma(x[n]) = E_x \left[(x[n] - \mu(n))^2 \right]$$

et

$$\Gamma(x[n']) = E_x \left[(x[n] - \mu(n)) (x[n'] - \mu(n')) \right]$$

Dans le cas d'un processus stationnaire, ces valeurs sont indépendantes de n :

$$E(x[n]) = \mu_x$$

$$\sigma_x = E \left[(x[n] - \mu_x)^2 \right] = E \left[(x[n])^2 \right] - \mu_x$$

et

$$\Gamma_x(n - n') = E \left[(x[n] - \mu_x) (x[n'] - \mu_x) \right]$$

En pratique, ces mesures sont données pour un signal x de taille T_D et d'indices appartenant à un domaine D' . La moyenne de l'échantillon $x[n]$ sur l'ensemble des signaux peut être remplacée par la moyenne des échantillons du signal considéré.

$$E(x) = \mu_x = \frac{1}{T_D} \sum_{n \in D'} x[n]$$

$$\sigma_x = \frac{1}{T_D} \sum_{n \in D'} (x[n] - \mu_x)^2$$

et

$$\Gamma_x(n') = \frac{1}{T_D} \sum_{n \in D'} (x[n] - \mu) (x[n + n'] - \mu)$$

3.3.2 Définition de l'opérateur de prédiction P

3.3.2.1 Définition du critère sous contraintes

L'affectation des nouvelles contraintes nous conduit à redéfinir le critère. Le pas de prédiction est déterminé par la minimisation de la variance du signal haute fréquence sous la contrainte $\sum_{n \in D} p[n] = 1$. Soient $\mathbf{p}_T$ un vecteur regroupant de manière ordonnée tous les coefficients du filtre P , $\mathcal{I}_P$ l'ensemble des indices des coefficients de l'opérateur P et λ le poids de la contrainte, le critère s'exprime de la manière suivante :

$$J(\mathbf{p}_T, \lambda) = \sigma_d^2 + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_P} p_k \right) \quad (3.9)$$

La variance σ_d^2 est fonction du signal d , déterminé au premier pas lifting. Les filtres P et U sont supposés symétriques. En conséquence, nous définissons la variable $S_{n,k}^0$, qui regroupe tous les pixels de l'image $s^{(0)}$ auxquels s'appliquent un même coefficient p_k (en raison des symétries) lorsque P est centré en n (n désignant un point du support du signal $s^{(0)}$). Cette formulation permet à la fois de simplifier les notations et de développer la méthode dans le cas général *des échantillonnages multidimensionnels non-séparables réguliers*. La technique d'optimisation va essentiellement être appliquée dans le cas d'un échantillonnage quinconce afin de réaliser un schéma lifting quinconce. Aussi, nous détaillerons les résultats pour ce cas précis.

Définissons par $\mathcal{I}_{P_{sym}}$ l'ensemble des indices des coefficients de P restreints aux coefficients non-identiques par symétrie. Le premier pas lifting

$$d_n = d_n^{(0)} - \sum_{k \in \mathcal{I}_P} p_k s_{n-k}^0$$

se généralise alors par :

$$d_n = d_n^{(0)} - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k S_{n,k}^0$$

Soit $\mathbf{p}$, le vecteur regroupant tous les coefficients de P non-identiques par symétrie. Nous avons $\mathbf{p} = \{p_k \mid k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}\}$. Le critère (3.9) s'exprime alors comme suit :

$$J(\mathbf{p}, \lambda) = \sigma_d^2 + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k N_{S^0}(k) \right) \quad (3.10)$$

$N_{S^0}(k)$ représente le nombre de coefficients de P égaux à la valeur de p_k par symétrie (p_k inclus). La valeur minimale du critère annule les dérivées partielles (3.11) et (3.12). Le minimum vérifie pour k appartenant à $\mathcal{I}_{P_{sym}}$:

$$\frac{\partial J(\mathbf{p}, \lambda)}{\partial p_k} = 0 \quad \forall k \in \mathcal{I}_{P_{sym}} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{p}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.12)$$

3.3.2.2 Développement du critère

Avant de dériver le critère (3.10) par rapport aux $(t_{\mathbf{p}} + 1)$ variables ($t_{\mathbf{p}}$ représente la taille du vecteur $\mathbf{p}$), il est nécessaire de développer ce dernier :

$$J(\mathbf{p}, \lambda) = E \left[(d_n - \mu_d)^2 \right] + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right)$$

L'espérance mathématique vérifie : $E \left\{ (X - \mu_X)^2 \right\} = E \left\{ X^2 \right\} - \mu_X^2$. Elle permet de reformuler le critère de la manière suivante :

$$J(\mathbf{p}, \lambda) = E \left[(d_n)^2 \right] - \mu_d^2 + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right)$$

Le développement du critère donne :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}, \lambda) = & E \left[\left(d_n^{(0)} \right)^2 \right] - 2E \left[\sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k d_n^{(0)} S_{n,k}^0 \right] + E \left[\sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k p_{k'} S_{n,k}^0 S_{n,k'}^0 \right] \\ & - \left[E \left(d_n^{(0)} \right) - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k E \left(S_{n,k}^0 \right) \right]^2 + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right) \end{aligned}$$

Le signal considéré est supposé *stationnaire* au sens large, i.e. $\mu_X = \mu_{d^{(0)}} = \mu_{s^{(0)}}$. Suite à cette hypothèse, J peut être défini par :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}, \lambda) = & \sigma_{d^{(0)}}^2 - 2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k E \left[d_n^{(0)} S_{n,k}^0 \right] + \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k p_{k'} E \left[S_{n,k}^0 S_{n,k'}^0 \right] \\ & + 2\mu_X^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k p_{k'} E \left[S_{n,k}^0 \right] E \left[S_{n,k'}^0 \right] \\ & + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right) \end{aligned}$$

L'hypothèse de stationnarité au sens large nous permet de définir la moyenne du signal par $E \{ S_{n,k}^0 \} = \mu_{S^0} = N_{S^0}(k) \mu_{s^{(0)}} = N_{S^0}(k) \mu_X$, où $N_{S^0}(k)$ représente le nombre de coefficients contenus dans $S_{n,k}^0$. Le critère devient :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}, \lambda) = & \sigma_{d^{(0)}}^2 - 2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k \left[E \left(d_n^{(0)} S_{n,k}^0 \right) - \mu_X^2 N_{S^0}(k) \right] \\ & + \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k p_{k'} \left[E \left(S_{n,k}^0 S_{n,k'}^0 \right) - N_{S^0}(k) N_{S^0}(k') \mu_X^2 \right] \\ & + \lambda \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3.2.3 Minimisation du critère

1. La dérivée du critère (3.13) par rapport à la variable λ nous conduit à l'équation (3.14) :

$$\frac{\partial J(\mathbf{p}, \lambda)}{\partial \lambda} = \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right) \quad (3.14)$$

L'identification des équations (3.12) et (3.14) nous ramène à l'égalité suivante :

$$\left(1 - \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k \right) = 0$$

Nous en déduisons la condition sur la somme des coefficients de l'opérateur P :

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k = 1 \quad (3.15)$$

2. L'équation (3.11) se résout, pour tout l appartenant à $\mathcal{I}_{P_{sym}}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{p}, \lambda)}{\partial p_l} = & -2 \left[E \left(d_n^{(0)} S_{n,l}^0 \right) - \mu_X^2 N_{S^0}(l) \right] - \lambda N_{S^0}(l) \\ & + 2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k \left[E \left(S_{n,l}^0 S_{n,k}^0 \right) - N_{S^0}(l) N_{S^0}(k) \mu_X^2 \right] \end{aligned}$$

Les coefficients de l'opérateur P optimum annulent les dérivées partielles $\frac{\partial J}{\partial p_l}$, $\forall l \in \mathcal{I}_{P_{sym}}$. Aussi, $\frac{\partial J}{\partial p_l} = 0$ ($\forall l \in \mathcal{I}_{P_{sym}}$) implique :

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} p_k [E(S_{n,l}^0 S_{n,k}^0) - N_{S^0}(l) N_{S^0}(k) \mu_X^2] - \frac{\lambda}{2} N_{S^0}(l) = E(d_n^{(0)} S_{n,l}^0) - \mu_X^2 N_{S^0}(l) \quad (3.16)$$

En posant, $A_{k,l} = E(S_{n,l}^0 S_{n,k}^0) - N_{S^0}(l) N_{S^0}(k) \mu_X^2$, $B_l = E(d_n^{(0)} S_{n,l}^0) - \mu_X^2 N_{S^0}(l)$, et $C_l = -\frac{1}{2} N_{S^0}(l)$, les équations (3.15) et (3.16) se récrivent sous forme d'un système linéaire à $(t_{\mathbf{p}} + 1)$ variables :

$$\begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(k) p_k = 1 \\ \sum_{k \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} A_{k,l} p_k + C_l \lambda = B_l \quad \forall l \in \mathcal{I}_{P_{sym}} \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système linéaire (3.17) se récrit sous forme de système matriciel :

$$\begin{bmatrix} A_{k_0,l_0} & A_{k_1,l_0} & \cdots & A_{k,l_0} & \cdots & A_{k_M,l_0} & C_{l_0} \\ A_{k_0,l_1} & A_{k_1,l_1} & \cdots & A_{k,l_1} & \cdots & A_{k_M,l_1} & C_{l_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k_0,l} & A_{k_1,l} & \cdots & A_{k,l} & \cdots & A_{k_M,l} & C_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k_0,l_M} & A_{k_1,l_M} & \cdots & A_{k,l_M} & \cdots & A_{k_M,l_M} & C_{l_M} \\ N_{S^0}(k_0) & N_{S^0}(k_1) & \cdots & N_{S^0}(k) & \cdots & N_{S^0}(k_M) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{k_0} \\ p_{k_1} \\ \vdots \\ p_k \\ \vdots \\ p_{k_M} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{l_0} \\ B_{l_1} \\ \vdots \\ B_l \\ \vdots \\ B_{l_M} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La solution du système (3.18), de la forme $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, est obtenue à partir de l'inversion d'une matrice carrée et donnée par :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

L'inversion de la matrice carrée $\mathbf{A}$ est réalisée par des algorithmes classiques. Le vecteur $\mathbf{X} = \{p_{k_0}, p_{k_1}, \dots, p_{k_M}, \lambda\}$ solution du système s'identifie à :

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{p}_{opt}, \lambda\}$$

$\mathbf{p}_{opt}$ correspond au vecteur $\mathbf{p}$ optimal et regroupe les coefficients du filtre P recherché.

3.3.3 Définition de l'opérateur U de mise à jour

L'opérateur de mise à jour agit sur la composante basse fréquence de l'image. Une bonne approximation basse résolution doit permettre la reconstruction d'une image de résolution supérieure la plus fiable possible, et ce malgré la perte du signal haute fréquence. La définition du critère suggère d'annuler les coefficients haute fréquence en posant $\bar{d} = 0$.

Définissons par $x, s^{(0)}, d^{(0)}, s$ et d les différents signaux intervenant lors de la transformation directe, et $\bar{x}, \bar{s}^{(0)}, \bar{d}^{(0)}, \bar{s}$ et $\bar{d}$ les signaux intervenant lors de la transformation inverse (voir FIG. 3.3). Lors de l'étape de reconstruction, la transformée inverse prend en entrée l'image basse fréquence à un niveau de résolution inférieur et une image nulle de coefficients d'ondelettes (voir Fig. 3.3). Le critère définissant l'opérateur de mise à jour U doit minimiser l'erreur quadratique entre l'image originale et l'image ainsi reconstruite. De plus, U doit vérifier les contraintes de symétrie et (3.6). Le critère est défini comme l'erreur quadratique moyenne de reconstruction sous contraintes :

$$J(\mathbf{u}, \lambda) = E[(\bar{x} - x)^2] + \lambda \left(\frac{1}{2} - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U \text{ sym}}} u_k \right) \quad (3.19)$$

où $\mathbf{u}$ représente le vecteur regroupant tous les coefficients de l'opérateur U non-identiques par symétrie et $\mathcal{I}_{U \text{ sym}}$ l'ensemble des indices des coefficients de U , restreints aux coefficients non-identiques par symétrie. Pour minimiser U , il faut prendre en compte toutes les symétries imposées à U , ce qui réduit le degré de liberté et permet de respecter l'hypothèse de stationnarité. Les valeurs optimales des coefficients de U vérifient :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I}_{U \text{ sym}} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.21)$$

En posant $J_1(\mathbf{u}, \lambda) = E[(\bar{s}_n^{(0)} - s_n^{(0)})^2]$ et $J_2(\mathbf{u}, \lambda) = E[(\bar{d}_n^{(0)} - d_n^{(0)})^2]$, le critère (3.19) s'identifie à :

$$J(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} [J_1(\mathbf{u}, \lambda) + J_2(\mathbf{u}, \lambda)] + \lambda \left(\frac{1}{2} - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U \text{ sym}}} u_k \right) \quad (3.22)$$

et les conditions (3.20) et (3.21) se récrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_l} \left[J_1(\mathbf{u}, \lambda) + J_2(\mathbf{u}, \lambda) + \lambda \left(1 - 2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{U \text{ sym}}} u_k \right) \right] &= 0 \quad \forall l \in \mathcal{I}_{U \text{ sym}} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[J_1(\mathbf{u}, \lambda) + J_2(\mathbf{u}, \lambda) + \lambda \left(1 - 2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{U \text{ sym}}} u_k \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Les ensembles $\bar{s}^0$ et $\bar{d}^0$, définis par schéma lifting inverse, sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{s}^0 &= \bar{s} - U_1 \star \bar{d} = \bar{s} = s \\ \bar{d}^0 &= P_1 \star \bar{s}^0 \end{aligned}$$

3.3.3.1 Calcul de J_1

Par définition, nous avons :

$$J_1(\mathbf{u}, \lambda) = E \left[\left(\bar{s}_n^{(0)} - s_n^{(0)} \right)^2 \right]$$

Le signal $s_n^{(0)}$ peut être retrouvé à partir du filtre U . L'équation du pas de mise à jour inverse est donnée par :

$$s_n^{(0)} = s_n - \sum_{k \in \mathcal{I}_U} u_k d_{n-k}$$

où $\mathcal{I}_U$ représente l'ensemble des indices des coefficients de l'opérateur U . Afin de minimiser U , nous devons prendre en compte toutes les symétries imposées à U . Posons $D_{n,k}^1$ la somme des coefficients du signal d auxquels le facteur u_k ($k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}$) est appliqué, lors du calcul du coefficient $s_n^{(0)}$. Nous avons alors :

$$s_n^{(0)} = s_n - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k D_{n,k}^1$$

Le critère J_1 devient :

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{u}, \lambda) &= E \left[\left(\bar{s}_n^{(0)} - s_n + \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k D_{n,k}^1 \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k D_{n,k}^1 \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k u_{k'} E [D_{n,k}^1 D_{n,k'}^1] \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.3.2 Calcul de J_2

Par définition, nous avons :

$$J_2(\mathbf{u}, \lambda) = E \left[\left(\bar{d}_n^{(0)} - d_n^{(0)} \right)^2 \right]$$

soit, en développant :

$$\begin{aligned} J_2(\mathbf{u}, \lambda) &= E \left[\left(\sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m \left(s_{n-m}^{(0)} + \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k D_{n-m,k}^1 \right) - d_n^{(0)} \right)^2 \right] \\ J_2(\mathbf{u}, \lambda) &= E \left[(d_n)^2 \right] - 2 \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E [d_n D_{n-m,k}^1] \\ &\quad + \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k u_{k'} \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E [D_{n-m,k}^1 D_{n-m',k'}^1] \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.3.3.3 Calcul de J

A partir de (3.22), (3.23) et (3.24), le critère s'exprime ainsi :

$$J(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k u_{k'} \left[E[D_{n,k}^1 D_{n,k'}^1] + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E[D_{n-m,k}^1 D_{n-m',k'}^1] \right] \\ - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E[d_n D_{n-m,k}^1] + \lambda \left(\frac{1}{2} - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} N_{D^1}(k) u_k \right) + \frac{\sigma_d^2 + \mu_d^2}{2}$$

3.3.3.4 Minimisation du critère

Le filtre U , minimisant l'erreur quadratique moyenne de reconstruction, est défini par la résolution du système :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I}_{U_{sym}} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.26)$$

La dérivée du critère par rapport à λ et l'équation (3.26) retournent :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} - \sum_{l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} N_{D^1}(l) u_l = 0$$

La résolution de cette équation conduit à :

$$\sum_{l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} N_{D^1}(l) u_l = \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

Les dérivées partielles du critère par rapport aux différents coefficients du vecteur $\mathbf{u}$ sont définies, pour tout l appartenant à $\mathcal{I}_{U_{sym}}$, par :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_l} = \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k \left[E(D_{n,k}^1 D_{n,l}^1) + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E(D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1) \right] \\ - \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E(d_n D_{n-m,l}^1) - N_{D^1}(l) \lambda$$

L'annulation de ces dérivées nous donne l'égalité suivante :

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k \left[E(D_{n,k}^1 D_{n,l}^1) + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E(D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1) \right] - N_{D^1}(l) \lambda \\ = \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E(d_n D_{n-m,l}^1) \quad (3.28)$$

Les équations (3.27) et (3.28) s'écrivent sous la forme d'un système linéaire. En posant $A_{k,l} = E[D_{n,k}^1 D_{n,l}^1] + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E[D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1]$, $B_l = \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E[d_n D_{n-m,l}^1]$ et $C_l = -N_{D^1}(l)$, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \sum_{l \in \mathcal{I}_{U^{sym}}} N_{D^1}(l) u_l = \frac{1}{2} \\ \sum_{k \in \mathcal{I}_{U^{sym}}} A_{k,l} u_k + C_l \lambda = B_l \quad \forall l \in \mathcal{I}_{P^{sym}} \end{cases} \quad (3.29)$$

Le système linéaire (3.29) se récrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{k_0,l_0} & A_{k_1,l_0} & \cdots & A_{k,l_0} & \cdots & A_{k_M,l_0} & C_{l_0} \\ A_{k_0,l_1} & A_{k_1,l_1} & \cdots & A_{k,l_1} & \cdots & A_{k_M,l_1} & C_{l_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k_0,l} & A_{k_1,l} & \cdots & A_{k,l} & \cdots & A_{k_M,l} & C_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{k_0,l_M} & A_{k_1,l_M} & \cdots & A_{k,l_M} & \cdots & A_{k_M,l_M} & C_{l_M} \\ N_{D^1}(k_0) & N_{D^1}(k_1) & \cdots & N_{D^1}(k) & \cdots & N_{D^1}(k_M) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{k_0} \\ u_{k_1} \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k_M} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{l_0} \\ B_{l_1} \\ \vdots \\ B_l \\ \vdots \\ B_{l_M} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Si la matrice carrée $\mathbf{A}$ est inversible (section 3.5), le système matriciel de la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

admet pour unique solution :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Le vecteur $\mathbf{X}$ s'identifie à $\mathbf{X} = \{u_{k_0}, u_{k_1}, \dots, u_{k_M}, \lambda\} = \{\mathbf{u}_{opt}, \lambda\}$. Le procédé de résolution de ce système est le même que pour l'opérateur P (3.18). La solution $\mathbf{u}_{opt}$ correspond au vecteur $\mathbf{u}$ optimal et contient les différents coefficients (non-identiques par symétrie) du filtre U .

3.4 Cas de l'optimisation de filtres quinconce.

3.4.1 Recherche du filtre de prédiction P

Le but de cette partie est d'adapter le critère général permettant d'optimiser les filtres lifting aux images échantillonnées sur une grille quinconce. Afin de trouver l'opérateur P minimisant le critère, considérons le premier pas lifting quinconce :

$$d[n_1, n_2] = d^{(0)}[n_1, n_2] - \sum_{k_1=-a}^{a-1} \sum_{k_2=-a}^{a-1} p[k_1, k_2] s^{(0)}[n_1 - k_1, n_2 - k_2]$$

où la valeur a est définie telle que l'opérateur P soit de taille $2a \times 2a$. Comme les filtres P et U sont supposés symétriques, il est permis de récrire le premier pas de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d[n_1, n_2] = & d^{(0)}[n_1, n_2] - \sum_{k_1=0}^{a-1} \sum_{k_2=0}^{k_1} p[k_1, k_2] \left\{ s^{(0)}[n_1 - k_1, n_2 - k_2] \right. \\ & + s^{(0)}[n_1 + k_1 + 1, n_2 - k_2] + s^{(0)}[n_1 - k_1, n_2 + k_2 + 1] + s^{(0)}[n_1 + k_1 + 1, n_2 + k_2 + 1] \\ & + (1 - \delta_{k_1-k_2}) \left(s^{(0)}[n_1 - k_2, n_2 - k_1] + s^{(0)}[n_1 + k_2 + 1, n_2 - k_1] \right. \\ & \left. \left. + s^{(0)}[n_1 - k_2, n_2 + k_1 + 1] + s^{(0)}[n_1 + k_2 + 1, n_2 + k_1 + 1] \right) \right\} \end{aligned}$$

En se servant des calculs précédents, nous constatons que, pour $n = (n_1, n_2)$ et $k = (k_1, k_2)$ avec n et k appartenant à $\mathbb{Z}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} S_{n,k}^0 = & \left[s^{(0)}[n_1 - k_1, n_2 - k_2] + s^{(0)}[n_1 + k_1 + 1, n_2 - k_2] \right. \\ & + s^{(0)}[n_1 - k_1, n_2 + k_2 + 1] + s^{(0)}[n_1 + k_1 + 1, n_2 + k_2 + 1] \\ & + (1 - \delta_{k_1-k_2}) \left(s^{(0)}[n_1 - k_2, n_2 - k_1] + s^{(0)}[n_1 + k_2 + 1, n_2 - k_1] \right. \\ & \left. \left. + s^{(0)}[n_1 - k_2, n_2 + k_1 + 1] + s^{(0)}[n_1 + k_2 + 1, n_2 + k_1 + 1] \right) \right] \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $N_{S^0}(k)$ représente le nombre de coefficients auxquels p_k est appliqué (avec $k = (k_1, k_2)$), d'où $N_{S^0}(k) = 4(2 - \delta_{k_1-k_2})$.

3.4.1.1 Minimisation du critère

Pour minimiser le critère, il est nécessaire d'imposer la valeur nulle aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial J(\mathbf{p}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{p}, \lambda)}{\partial p[m_1, m_2]} = 0 \quad \forall (m_1, m_2) \in \mathcal{I}_{P_{sym}} \quad (3.31)$$

Comme nous l'avons vu, l'équation (3.30) a pour solution :

$$\sum_{m \in \mathcal{I}_{P_{sym}}} N_{S^0}(m) p_m = 1$$

$N_{S^0(m)}$ représente le nombre de coefficients auxquels le facteur p_m (avec $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$) est appliqué. Nous en déduisons que $N_{S^0(m)} = 4(2 - \delta_{m_1-m_2})$. La solution de (3.30) devient :

$$\sum_{m_1=0}^{a-1} \sum_{m_2=0}^{m_1} (2 - \delta_{m_1-m_2}) p[m_1, m_2] = \frac{1}{4}$$

La solution de l'équation (3.31) est donnée par :

$$\sum_{m \in \mathcal{I}_{Psym}} A_{m,l} p_m + C_l \lambda = B_l \quad \forall l \in \mathcal{I}_{Psym}$$

avec $A_{m,l} = E \{ S_{n,l}^0 S_{n,m}^0 \} - N_{S^0}(l) N_{S^0}(m) \mu_X^2$, $B_l = E \{ S_{n,l}^0 d_n^{(0)} \} - \mu_X^2 N_{S^0}(m)$, et $C_l = -\frac{1}{2} N_{S^0}(l)$. L'hypothèse de stationnarité implique que les valeurs $A_{m,l}$, B_l et C_l sont indépendantes de l'indice n du support de l'image considérée.

Dans le cas d'un échantillonnage bidimensionnel sur grille quinconce, pour $l = (l_1, l_2)$, $m = (m_1, m_2)$ et $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$:

$$A_{m,l} = E \{ S_{n,l}^0 S_{n,m}^0 \} - 16 (2 - \delta_{l_1-l_2}) (2 - \delta_{m_1-m_2}) \mu_X^2$$

Rappelons que la fonction de covariance Γ vérifie :

$$\Gamma_X(k) = E \{ (x(n)x(n+k)) \} - \mu_X^2$$

Nous en déduisons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} A_{m,l} = & 4 \{ \Gamma_{s(0)}(l_1 - m_1, l_2 - m_2) + \Gamma_{s(0)}(l_1 + m_1 + 1, l_2 - m_2) \\ & + \Gamma_{s(0)}(l_1 - m_1, l_2 + m_2 + 1) + \Gamma_{s(0)}(l_1 + m_1 + 1, l_2 + m_2 + 1) \} \\ & + 4 (1 - \delta_{l_1-l_2}) (1 - \delta_{m_1-m_2}) \{ \Gamma_{s(0)}(l_2 - m_2, l_1 - m_1) + \Gamma_{s(0)}(l_2 + m_2 + 1, l_1 - m_1) \\ & + \Gamma_{s(0)}(l_2 - m_2, l_1 + m_1 + 1) + \Gamma_{s(0)}(l_2 + m_2 + 1, l_1 + m_1 + 1) \} \\ & + 4 (1 - \delta_{m_1-m_2}) \{ \Gamma_{s(0)}(l_1 - m_2, l_2 - m_1) + \Gamma_{s(0)}(l_1 + m_2 + 1, l_2 - m_1) \\ & + \Gamma_{s(0)}(l_1 - m_2, l_2 + m_1 + 1) + \Gamma_{s(0)}(l_1 + m_2 + 1, l_2 + m_1 + 1) \} \\ & + 4 (1 - \delta_{l_1-l_2}) \{ \Gamma_{s(0)}(l_2 - m_1, l_1 - m_2) + \Gamma_{s(0)}(l_2 + m_1 + 1, l_1 - m_2) \\ & + \Gamma_{s(0)}(l_2 - m_1, l_1 + m_2 + 1) + \Gamma_{s(0)}(l_2 + m_1 + 1, l_1 + m_2 + 1) \} \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$B_l = 4\Gamma_X \left(\sqrt{2}l_1 + \frac{1}{2}, \sqrt{2}l_2 + \frac{1}{2} \right) + 4(1 - \delta_{l_1-l_2}) \Gamma_X \left(\sqrt{2}l_2 + \frac{1}{2}, \sqrt{2}l_1 + \frac{1}{2} \right)$$

et

$$C_l = -2 (2 - \delta_{l_1-l_2})$$

L'opérateur de prédiction étant connu, nous procédons à l'optimisation de l'opérateur de mise à jour.

3.4.2 Recherche du filtre de mise à jour U

Nous rappelons que dans le cas général, le filtre U est obtenu par la résolution du système linéaire suivant :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u[m_1, m_2]} = 0 \quad \forall (m_1, m_2) \in \mathcal{I}_{Usym} \tag{3.33}$$

La résolution de l'équation (3.32) conduit à l'égalité (3.34) :

$$\sum_{l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} N_{D^1}(l) u_l = \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

et la résolution de (3.33), pour $A_{k,l} = E[D_{n,k}^1 D_{n,l}^1] + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E[D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1]$,

$B_l = \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E[d_n D_{n-m,l}^1]$ et $C_l = -N_{D^1}(l)$, conduit à l'égalité (3.35) :

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} A_{k,l} u_k + C_l \lambda = B_l \quad \forall l \in \mathcal{I}_{U_{sym}} \quad (3.35)$$

Dans le cas d'un échantillonnage quinconce, le deuxième pas lifting s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} s[n_1, n_2] = s^{(0)}[n_1, n_2] - \sum_{k_1=1}^b \sum_{k_2=1}^{k_1} u[k_1, k_2] & [(d[n_1 - k_1, n_2 - k_2] + d[n_1 + k_1 - 1, n_2 - k_2] \\ & + d[n_1 - k_1, n_2 + k_2 - 1] + d[n_1 + k_1 - 1, n_2 + k_2 - 1]) \\ & + (1 - \delta_{k_1-k_2}) (d[n_1 - k_2, n_2 - k_1] + d[n_1 + k_2 - 1, n_2 - k_1] \\ & + d[n_1 - k_2, n_2 + k_1 - 1] + d[n_1 + k_2 - 1, n_2 + k_1 - 1])] \end{aligned}$$

En se servant des calculs précédents, nous constatons que :

$$\begin{aligned} D_{n,k}^1 = & [(d[n_1 - k_1, n_2 - k_2] + d[n_1 + k_1 - 1, n_2 - k_2] + d[n_1 - k_1, n_2 + k_2 - 1] \\ & + d[n_1 + k_1 - 1, n_2 + k_2 - 1]) + (1 - \delta_{k_1-k_2}) (d[n_1 - k_2, n_2 - k_1] \\ & + d[n_1 + k_2 - 1, n_2 - k_1] + d[n_1 - k_2, n_2 + k_1 - 1] + d[n_1 + k_2 - 1, n_2 + k_1 - 1])] \end{aligned}$$

$N_{D^1}(k)$ représentant le nombre de coefficients auxquels u_k est appliqué (avec $k = (k_1, k_2)$), nous en déduisons que $N_{D^1}(k) = 4(2 - \delta_{k_1-k_2})$. En conséquence, les équations (3.32) et (3.34) donnent :

$$\sum_{l_1=1}^b \sum_{l_2=1}^{l_1} (2 - \delta_{l_1-l_2}) u_{l_1, l_2} = \frac{1}{8}$$

Pour résoudre l'équation (3.35), nous posons :

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta, \alpha', \beta', x, y) = & \Gamma_d(\alpha + x, \beta + y) + \Gamma_d(\alpha' + x, \beta + y) \\ & + \Gamma_d(\alpha + x, \beta' + y) + \Gamma_d(\alpha' + x, \beta' + y) + \Gamma_d(\alpha - x, \beta + y) \\ & + \Gamma_d(\alpha' - x, \beta + y) + \Gamma_d(\alpha - x, \beta' + y) + \Gamma_d(\alpha' - x, \beta' + y) \\ & + \Gamma_d(\alpha + x, \beta - y) + \Gamma_d(\alpha' + x, \beta - y) + \Gamma_d(\alpha + x, \beta' - y) \\ & + \Gamma_d(\alpha' + x, \beta' - y) + \Gamma_d(\alpha - x, \beta - y) + \Gamma_d(\alpha' - x, \beta - y) \\ & + \Gamma_d(\alpha - x, \beta' - y) + \Gamma_d(\alpha' - x, \beta' - y) \end{aligned}$$

Après évaluation, l'espérance $E \left[D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1 \right]$ s'identifie à :

$$\begin{aligned} E \left[D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1 \right] = & G(l_1 - k_1, l_2 - k_2, l_1 + k_1 - 1, l_2 + k_2 - 1, m_1 - m'_1, m_2 - m'_2) \\ & + (1 - \delta_{m_1 - m_2}) \left(1 - \delta_{m'_1 - m'_2} \right) G(l_2 - k_2, l_1 - k_1, l_2 + k_2 - 1, l_1 + k_1 - 1, m_1 - m'_1, \\ & m_2 - m'_2) + (1 - \delta_{m_1 - m_2}) G(l_2 - k_1, l_1 - k_2, l_2 + k_1 - 1, l_1 + k_2 - 1, m_1 - m'_1, m_2 - m'_2) \\ & + \left(1 - \delta_{m'_1 - m'_2} \right) G(l_1 - k_2, l_2 - k_1, l_1 + k_2 - 1, l_2 + k_1 - 1, m_1 - m'_1, m_2 - m'_2) \end{aligned}$$

Les trois facteurs intervenant dans l'équation (3.35) donnent pour $k = (k_1, k_2)$, $l = (l_1, l_2)$ et $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} A_{k,l} = & 4 \{ \Gamma_d(l_1 - k_1, l_2 - k_2) + \Gamma_d(l_1 + k_1 - 1, l_2 - k_2) \\ & + \Gamma_d(l_1 - k_1, l_2 + k_2 - 1) + \Gamma_d(l_1 + k_1 - 1, l_2 + k_2 - 1) \} \\ & + 4(1 - \delta_{l_1 - l_2}) (1 - \delta_{k_1 - k_2}) \{ \Gamma_d(l_2 - k_2, l_1 - k_1) + \Gamma_d(l_2 + k_2 - 1, l_1 - k_1) \\ & + \Gamma_d(l_2 - k_2, l_1 + k_1 - 1) + \Gamma_d(l_2 + k_2 - 1, l_1 + k_1 - 1) \} \\ & + 4(1 - \delta_{k_1 - k_2}) \{ \Gamma_d(l_1 - k_2, l_2 - k_1) + \Gamma_d(l_1 + k_2 - 1, l_2 - k_1) \\ & + \Gamma_d(l_1 - k_2, l_2 + k_1 - 1) + \Gamma_d(l_1 + k_2 - 1, l_2 + k_1 - 1) \} \\ & + 4(1 - \delta_{l_1 - l_2}) \{ \Gamma_d(l_2 - k_1, l_1 - k_2) + \Gamma_d(l_2 + k_1 - 1, l_1 - k_2) \\ & + \Gamma_d(l_2 - k_1, l_1 + k_2 - 1) + \Gamma_d(l_2 + k_1 - 1, l_1 + k_2 - 1) \} \\ & + \sum_{m \in I_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E \{ D_{n-m,k}^1 D_{n-m',l}^1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_l = & \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m \{ [\Gamma_d(l_1 + m_1, l_2 + m_2) + \Gamma_d(l_1 - m_1 - 1, l_2 + m_2) \\ & + \Gamma_d(l_1 + m_1, l_2 - m_2 - 1) + \Gamma_d(l_1 - m_1 - 1, l_2 - m_2 - 1)] \\ & + (1 - \delta_{m_1 - m_2}) [\Gamma_d(l_2 + m_1, l_1 + m_2) + \Gamma_d(l_2 - m_1 - 1, l_1 + m_2) \\ & + \Gamma_d(l_2 + m_1, l_1 - m_2 - 1) + \Gamma_d(l_2 - m_1 - 1, l_1 - m_2 - 1)] \} \end{aligned}$$

et

$$C_l = -4(2 - \delta_{l_1 - l_2})$$

Les coefficients de la matrice $\mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{B}$ dépendent uniquement des fonctions de covariance entre les échantillons du signal d .

3.5 Robustesse de l'algorithme

La méthode d'optimisation présentée suppose que la matrice carrée $\mathbf{A}$ soit inversible. En d'autres termes, la matrice $\mathbf{A}$ de taille $N \times N$ doit être de rang N . La taille de la matrice dépend du nombre N_c de coefficients différents de l'opérateur à optimiser. Ce nombre est

égal à $N - 1$. Par exemple, dans le cas 1D pour un opérateur lifting de taille t , le nombre de coefficients qui diffèrent (en prenant en compte les symétries) est :

$$N_C = \frac{t}{2}$$

Dans le cas 2D, pour un opérateur lifting de taille $t \times t$, avec t pair,

$$N_C = \frac{t(t+2)}{8}$$

Afin d'assurer que la matrice $\mathbf{A}$ soit inversible, l'algorithme inclut une fonctionnalité qui calcule le rang de la matrice. Si le rang n de $\mathbf{A}$ est égal à N , alors la matrice est inversible et nous pouvons procéder à l'optimisation de l'opérateur considéré. Sinon, $\mathbf{A}$ n'est pas inversible. La taille imposée $t \times t$ est alors réduite jusqu'à ce que $n = N = N_c - 1$, c'est à dire jusqu'à ce que la nouvelle matrice $\mathbf{A}$ soit inversible. Dans le pire des cas, les filtres optimisés sont de taille 2×2 et la contrainte sur la somme des coefficients réduit le degré de liberté à zéro. Le schéma obtenu correspond au lifting (2,2) défini au chapitre précédent.

Les termes de la matrice $\mathbf{A}$ dépendent de la mesure de la covariance entre les échantillons de données. La réduction du degré de liberté et de la taille des opérateurs permet donc d'être plus adapté aux données.

3.6 Vérification du minimum

Les valeurs de P et de U obtenues par la méthode proposée sont celles qui annulent les dérivées partielles d'ordre un des deux critères énoncés. Or, la valeur annulant la dérivée d'une fonction n'est pas forcément la valeur pour laquelle la fonction atteint son minimum. Elle désigne un point stationnaire. Pour prouver que cette valeur atteint son minimum, il nous faut aller plus avant dans la démonstration, et montrer que le déterminant de la matrice Hessienne est positif. Il est difficile d'établir de manière générale que les valeurs de $\mathbf{p}_{opt}$ et $\mathbf{u}_{opt}$ correspondent à des minimum globaux. Cependant, il est peut être vérifié une fois les données initiales connues.

3.7 Nouveau critère d'optimisation du pas de mise à jour

3.7.1 Problématique

La définition des opérateurs lifting se fonde sur deux idées principales : l'information haute fréquence doit avoir une variance minimale, et le signal basse fréquence doit conserver le maximum d'information. La deuxième assertion sert à définir un filtre permettant la reconstruction la plus proche possible de l'image originale, quelles que soient les pertes générées dans les hautes fréquences. Le critère défini pour l'optimisation de l'opérateur de « mise à jour » conjecture la perte intégrale de la sous-bande haute fréquence, et s'identifie ainsi à l'espérance mathématique de l'erreur quadratique de reconstruction. La construction d'opérateurs lifting suivant cette hypothèse favorise l'adaptation du filtrage aux applications *scalables*. En outre, le critère impose une optimisation de la qualité minimale, puisqu'elle suppose le pire cas de dégradations de l'image. La qualité sera toujours

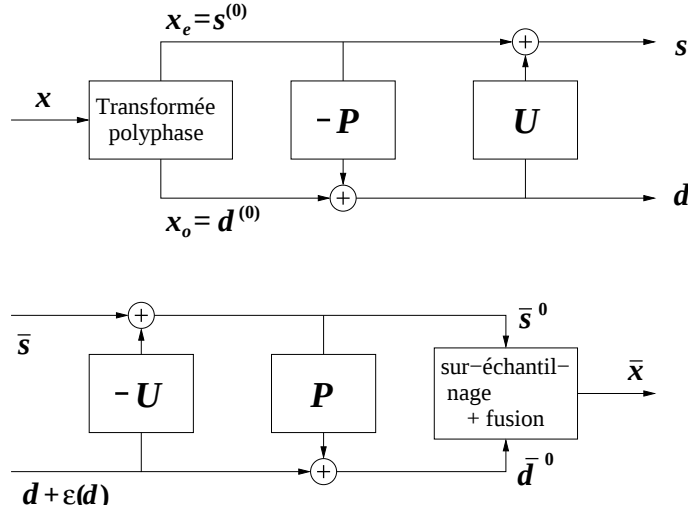


FIG. 3.3 – Schéma lifting et schéma lifting inverse

supérieure à cette qualité minimale, quelle que soit la distorsion générée dans les hautes fréquences lors du codage. Cependant, la méthode d'optimisation, que nous avons proposé jusqu'ici, ne vise pas à générer l'opérateur lifting maximisant la qualité, quel que soit le degré de dégradations dans les hautes fréquences suite au codage, mais seulement pour une perte intégrale de la composante haute fréquence. Les méthodes d'allocations de débit employées par les codeurs permettent de définir un pas de quantification et de fournir une image de qualité maximale pour un débit donné. Ces considérations suggèrent une amélioration du critère définissant l'opérateur de mise à jour. Au lieu d'annuler l'ensemble des coefficients d'ondelettes, il est possible d'intégrer l'optimisation de filtres dans le processus de codage. L'image de coefficients d'ondelettes $\bar{d}$ donnée en entrée du schéma lifting inverse n'est plus nulle, mais correspond à l'image d moins une erreur due à la quantification, soit :

$$\bar{d} = d - \varepsilon(d) \quad (3.36)$$

L'erreur de quantification est déterminée par :

$$\varepsilon(d) = d - Q^* \circ Q(d)$$

L'application Q correspond à une quantification (voir section 1.1.3.1) et Q^* à l'application de reconstruction. Pour un pas de quantification q , nous avons $Q^*(a) = q.a$. Ainsi, l'optimisation du pas de mise à jour va dépendre du pas de quantification fixé par l'algorithme d'allocation de débit.

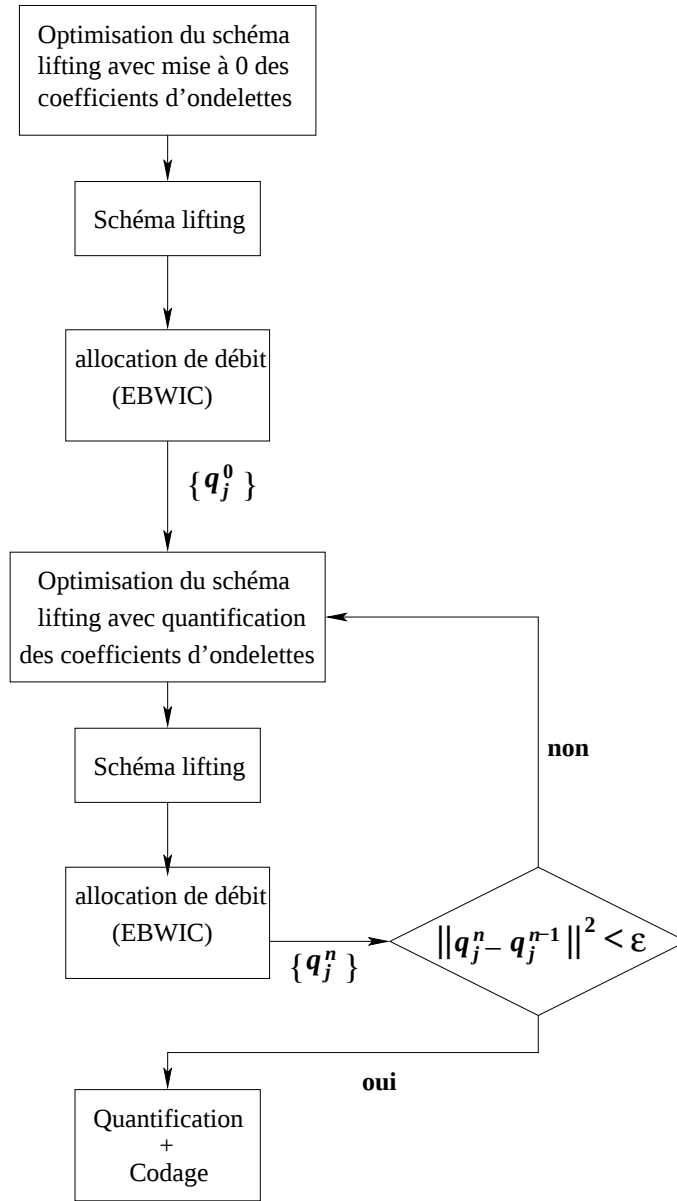


FIG. 3.4 – Algorithme d'optimisation avec prise en compte du pas de quantification dans les sous-bandes haute fréquence.

3.7.2 Définition du nouvel opérateur de mise à jour

3.7.2.1 Définition du critère

Comme dans le cas précédent, le critère est identifié par l'espérance de l'erreur quadratique de reconstruction, sous les contraintes définies en 3.2.2.

$$J(\mathbf{u}, \lambda) = E \{ (\bar{x} - x)^2 \} + \lambda \left(\frac{1}{2} - \sum_{k \in \mathcal{I}_U} u_k \right) \quad (3.37)$$

Les valeurs optimales des coefficients de U vérifient ($\forall k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}$) :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I}_{U_{sym}} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.39)$$

Le processus d'optimisation reste identique à celui mis en œuvre en 3.3.3. Le critère (3.37) est séparé en deux composantes J_1 et J_2 . En posant $J_1(\mathbf{u}, \lambda) = E \left[\left(\bar{s}_n^{(0)} - s_n^{(0)} \right)^2 \right]$ et $J_2(\mathbf{u}, \lambda) = E \left[\left(\bar{d}_n^{(0)} - d_n^{(0)} \right)^2 \right]$, le critère s'identifie à :

$$J(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} [J_1(\mathbf{u}, \lambda) + J_2(\mathbf{u}, \lambda)] + \lambda \left(\frac{1}{2} - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k \right) \quad (3.40)$$

La définition abstraite du critère et la procédure de résolution ne sont pas modifiées, par contre la valeur de l'erreur n'est plus la même. Elle varie en fonction du pas de quantification imposé par l'algorithme d'allocation de débit associé. Les ensembles $\bar{s}^0$ et $\bar{d}^0$ obtenus par schéma lifting inverse sont dorénavant définis en considérant $\bar{s} = s$ et l'erreur de quantification définie en (3.36) :

$$\begin{aligned} \bar{s}^0 &= \bar{s} - U \star \bar{d} = s^{(0)} - U \star (\varepsilon(d)) \\ \bar{d}^{(0)} &= \bar{d} + P_1 \star \bar{s}^{(0)} \\ &= \bar{d} + P \star \left(s^{(0)} + U \star \varepsilon(d) \right) \end{aligned}$$

3.7.2.2 Calcul de J_1

La première étape consiste à déterminer J_1 . Par définition, nous avons :

$$J_1(\mathbf{u}, \lambda) = E \left[\left(\sum_{l \in \mathcal{I}_U} u_l \varepsilon_{n-l}(d) \right)^2 \right]$$

Afin de minimiser U , nous devons tenir compte des symétries imposées à U . Posons $D_{n,k}^1$ la somme de tous les points de d auxquels le coefficient u_k ($k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}$) est appliqué lors de l'évaluation de s_n . L'équation du deuxième pas lifting intervient dans le calcul de J_1 . Elle est donnée par :

$$s_n = s_n^{(0)} + \sum_{k \in \mathcal{I}_U} u_k d_{n-k}$$

Soit, en considérant le filtre U de longueur paire et symétrique,

$$s_n = s_n^{(0)} + \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k D_{n,k}^1$$

Définissons par $\varepsilon_{n,k}(D)$ l'ensemble des coefficients de l'image d'erreur auxquels le facteur u_k est appliqué. D'où

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{u}, \lambda) &= E \left[\left(\sum_{k \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} u_k \varepsilon_{n,k}(D) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} u_k u_{k'} E [\varepsilon_{n,k}(D) \varepsilon_{n,k'}(D)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.7.2.3 Calcul de J_2

Par définition, nous avons :

$$J_2 = E \left[\left(\bar{d}_n^{(0)} - d_n^{(0)} \right)^2 \right]$$

Soit, en développant :

$$J_2 = E \left[\left(\sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{k \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} p_m u_k \varepsilon_{n-m,k}(D) - \varepsilon_n(d) \right)^2 \right] \quad (3.42)$$

3.7.2.4 Calcul de J

A partir de (3.40), (3.41) et (3.42), le critère se développe ainsi :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}, \lambda) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} u_k u_{k'} \left\{ E [\varepsilon_{n,k}(D) \varepsilon_{n,k'}(D)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E [\varepsilon_{n-m,k}(D) \varepsilon_{n-m',k'}(D)] \right\} \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} u_k \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E [\varepsilon_n(d) \varepsilon_{n-m,k}(D)] \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{2} - \sum_{k \in \mathcal{I}_{U\text{sym}}} N_{D^1}(k) u_k \right) + \frac{\sigma_{\varepsilon(d)}^2 + \mu_{\varepsilon(d)}^2}{2} \end{aligned}$$

3.7.2.5 Minimisation du critère

L'opérateur U , minimisant l'erreur quadratique moyenne de reconstruction, est obtenu par la résolution du système :

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_l} = 0 \quad \forall l \in \mathcal{I}_{U\text{sym}} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.44)$$

La résolution de l'équation (3.44) aboutit à :

$$\sum_{l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} N_{D^1}(l) u_l = \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

Afin de minimiser la moyenne de l'erreur quadratique de reconstruction, les dérivées partielles $\frac{\partial J(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_l}$ doivent être nulles. En conséquence, les coefficients de l'opérateur U doivent vérifier (3.43), $\forall l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} u_k \left\{ E[\varepsilon_{n,k}(D) \varepsilon_{n,l}(D)] + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E[\varepsilon_{n-m,k}(D) \varepsilon_{n-m',k'}(D)] \right\} \\ = \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E[\varepsilon_n(d) \varepsilon_{n-m,k}(D)] + N_{D^1}(l) \lambda \end{aligned} \quad (3.46)$$

Les équations (3.45) et (3.46), $\forall l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}$, s'écrivent sous la forme d'un système linéaire. Nous posons $A_{k,l} = E[\varepsilon_{n,k}(D) \varepsilon_{n,l}(D)] + \sum_{m \in \mathcal{I}_P} \sum_{m' \in \mathcal{I}_P} p_m p_{m'} E[\varepsilon_{n-m,k}(D) \varepsilon_{n-m',l}(D)]$,

$B_l = \sum_{m \in \mathcal{I}_P} p_m E[\varepsilon_n(d) \varepsilon_{n-m,l}(D)]$ et $C_l = -N_{D^1}(l)$. Le système est donné par :

$$\begin{cases} \sum_{l \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} N_{D^1}(l) u_l = \frac{1}{2} \\ \sum_{k \in \mathcal{I}_{U_{sym}}} A_{k,l} u_k + C_l \lambda = B_l \quad \forall l \in \mathcal{I}_{P_{sym}} \end{cases} \quad (3.47)$$

Résoudre les équations (3.47) revient à résoudre une nouvelle fois un système linéaire de la forme $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$. Si la matrice carrée $\mathbf{A}$ est inversible (section 3.5), le système admet pour solution

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

Le vecteur $\mathbf{X}$ s'identifie à $\mathbf{X} = \{\mathbf{u}_{opt}, \lambda\}$. La solution $\mathbf{u}_{opt}$ correspond au vecteur $\mathbf{u}$ optimal et contient les différents coefficients (non-identiques par symétrie) du filtre U .

Le nouveau critère détermine de manière plus précise l'erreur quadratique de reconstruction, dans le cas où le schéma lifting est associé à une quantification. Par contre, l'association du schéma lifting avec un codeur incluant une allocation de débit rend l'algorithme d'optimisation itératif et donc plus coûteux. Le chapitre 5 porte sur l'évaluation des différentes techniques. L'étude se termine par une sélection entre les critères selon leurs précisions et le coût des algorithmes mis en œuvre.

3.7.3 Robustesse de l'algorithme et minimum global

Le problème de l'inversion de la matrice $\mathbf{A}$ se résout de la même manière que dans les cas précédents. Le calcul du rang de la matrice va nous permettre de vérifier si $\mathbf{A}$ est inversible. Si la matrice est de taille $N \times N$ et de rang strictement inférieur à N , la taille de l'opérateur de mise à jour est réduite par rapport à la taille imposée par l'utilisateur, jusqu'à ce que N soit égale au rang de la matrice. Le minimum est vérifié, de la même manière, une fois les conditions initiales connues.

3.8 Conclusion

En résumé, nous proposons de définir un filtrage par schéma lifting en fonction des propriétés statistiques du signal. La construction des opérateurs a pour principe d'optimiser les performances de la chaîne de codage, et d'offrir une décorrélation optimale. La méthode proposée se base sur un schéma à deux pas lifting et peut être exploitée pour tout type d'échantillonnages réguliers. Le processus d'optimisation définit, en premier lieu, un opérateur de prédiction. Le choix de l'opérateur est très important et joue un rôle essentiel pour définir une bonne compression. L'opérateur de prédiction détermine la sous-bande haute fréquence qui contient peu d'information. Le pas de prédiction retourne un signal dont l'énergie est concentrée sur un petit nombre de coefficients. Le codage permet de gagner en débit principalement dans ce type de sous-bandes. La densité de probabilité du signal peut être approximée par une gaussienne généralisée. Le codage est plus performant sur un signal de faible variance. Le critère retenu pour définir le pas de prédiction consiste à minimiser la variance de la sous-bande haute fréquence. Le pas de mise à jour détermine le signal basse résolution. Ce signal n'est que faiblement comprimé, contrairement à la sous-bande haute fréquence. Il contient l'information essentielle à une bonne reconstruction du signal. L'opérateur de mise à jour est défini de façon à minimiser l'erreur de reconstruction suite à des dégradations dans l'image haute fréquence. La définition du critère présente deux cas. La première méthode cherche à définir l'image basse fréquence et l'opérateur de mise à jour les plus fiables possibles. L'opérateur est donc défini en imposant une reconstruction optimale à partir de la seule image basse fréquence. Le signal haute fréquence est supposé perdu. Cette construction permet de s'adapter au cadre des applications qui admettent une progressivité en résolution. Le deuxième cas est plus adapté aux algorithmes d'allocation de débit et prend en compte l'erreur de quantification. L'optimisation de filtres est exploitée dans le cadre du schéma lifting quinconce. Les détails de l'application et les performances sont donnés ultérieurement, au chapitre 5, au travers d'une évaluation qualitative de la méthode.

Troisième partie

Évaluation du schéma lifting quinconce au sein d'une chaîne de compression

Introduction

La partie précédente fixait un double objectif. Le premier consistait à définir une implémentation lifting pour des filtres bidimensionnels non-séparables. Le deuxième consistait à construire des filtres lifting adaptés à l'image, afin d'optimiser les performances des codeurs associés pour une meilleure compression. La justification effective de ces travaux passe par l'étude du schéma lifting quinconce. Nous montrons comment exploiter efficacement le schéma lifting, ainsi que les nouveaux filtres bidimensionnels développés par la méthode d'optimisation proposée. Dans cette partie, le schéma lifting quinconce est appliqué aux domaines de la compression sans perte et avec perte d'information. Les filtres lifting développés sont analysés et comparés entre eux, suivant plusieurs critères d'évaluation de performances. L'étude se base sur l'évaluation de la complexité, des techniques d'implémentation des filtres et du compromis qualité-débit. Le chapitre 4 traite de la mise en œuvre d'un schéma lifting quinconce au « fil de l'eau » et détermine à la fois les besoins en espace mémoire et les délais requis pour la méthode proposée. La complexité du filtrage est évaluée en comparant pour un même filtre, le coût de l'implémentation par transformée en ondelettes rapide et par schéma lifting. Le calcul théorique du gain en nombre d'opérations par pixel est détaillé au chapitre 2. L'étude de la qualité image, traitée au chapitre 5, donne pour chaque filtre un descriptif et un comparatif de la qualité SNR à débit fixé. Les critères de qualité utilisés sont présentés au chapitre 1. La qualité psychovisuelle est évaluée par l'étude subjective de certains détails des images et par la notification d'effets psychovisuels indésirables (effets de blocs, effets de bords, aliasing,...). Le schéma lifting quinconce suscite un intérêt particulier et grandissant dans le cadre de l'imagerie satellitaire. Une partie de notre étude a été réalisée en collaboration avec le Centre National d'Étude Spatiale (le CNES). Le filtrage quinconce non-séparable correspond à l'application d'un filtre diamant « non-orienté » en adéquation avec le type d'images acquises par satellite, puisqu'elles ne présentent aucune direction réellement prédominante. En outre, l'implémentation lifting réduit la complexité du filtrage, et permet aux filtres quinconces d'être plus compétitifs pour des structures nécessitant des algorithmes à la fois efficaces et simplifiés au maximum.

Chapitre 4

Implémentation et complexité du schéma lifting quinconce

L'ensemble des recherches, portant sur la compression des images numériques, vise à définir des méthodes simples et efficaces. Les contraintes de faible complexité et de qualité sont difficiles à réaliser simultanément. L'étude comparative sur les différentes techniques de codage intervient au niveau de la complexité, la mémoire temporaire nécessaire à l'exécution, la rapidité d'implémentation, le débit et la qualité des images restaurées. Le compromis entre les méthodes varie suivant les exigences de chacun, la définition d'un compromis universel n'étant que pure utopie. Ainsi, les applications liées à l'imagerie médicale ou militaire s'attachent aux techniques de compression sans perte, qui ne tolèrent que de faibles taux de compression. Le traitement des images satellite se base sur les techniques de compression haut et très haut débits [58, 64]. Les images destinées à circuler sur internet sont traitées à l'aide de techniques moyen et bas débits. Le but est de limiter la taille des données circulant sur les réseaux afin d'éviter la saturation et d'accroître la rapidité de transmission. Les techniques sélectionnées doivent être de faible complexité et permettre un décodage progressif (méthodes dites *scalables*) afin d'être adaptées à un ensemble de systèmes hétérogènes.

La transformée en ondelettes, faisant partie des transformées multiéchelles, est particulièrement adaptée au décodage progressif en résolution des images. Elle présente de bonnes propriétés de décorrélation spatio-fréquentielle. Ces caractéristiques en font un puissant allié pour la compression de données numériques. Elles constituent le fondement de certaines techniques de codage, telles que EZW [101] ou SPIHT [98, 97], qui exploitent les corrélations résiduelles. La transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable génère une analyse multirésolution de facteur de résolution $\sqrt{2}$. Ainsi, l'analyse est deux fois plus fine que dans le cas séparable. Elle permet une meilleure progressivité au codage et au décodage. Elle est non-séparable et peut être « non-orientée ». Elle a le désavantage d'être plus coûteuse en opérations élémentaires qu'une transformée séparable. Sa complexité de mise en œuvre peut constituer un facteur discriminant lors de la sélection d'une transformée au sein d'une chaîne de codage. Le schéma lifting permet une implémentation plus efficace. Les différences de coût des opérations entre le schéma lifting quinconce et la transformée en ondelettes sont mis en évidence dans la section 4.2. Auparavant, nous proposons une

technique pour implémenter le schéma lifting quinconce au « fil de l'eau ». L'intérêt est de minimiser la quantité de mémoire temporaire nécessaire au filtrage.

4.1 Schéma lifting quinconce au « fil de l'eau »

La transformée en ondelettes suscite, depuis plus d'une dizaine d'années, un intérêt grandissant pour la compression des images numériques. Elle permet de modéliser le signal et exerce un filtrage plus performant en qualité que la DCT [1]. En outre, pour un taux de compression fixé et des filtres « correctement choisis », la transformée en ondelettes s'adapte mieux au système visuel humain. La DCT, évoquée en première partie 1.1.1, est une méthode de transformée simple et rapide. Elle est utilisée dans les chaînes de compression telles que JPEG [123, 122], qui a pour objectif de comprimer les images à bas débit sans utiliser trop de mémoire auxiliaire. JPEG doit pouvoir s'adapter à internet en facilitant la rapidité de transmission (bas débit) et en permettant à un grand nombre d'utilisateurs, avec des systèmes hétérogènes, de s'en servir aisément (espace mémoire pour le codage et le décodage). La DCT est utilisée aussi sur le satellite SPOT5 pour des raisons de simplicité et d'économie en mémoire temporaire [59]. La compression est réalisée à bord du satellite. Pour des raisons de techniques et d'investissement au niveau recherche et financier dans un matériel de pointe spécialement conçu pour résister au milieu spatial (effet du vide, rayonnements nocifs qui parcourent l'espace), le nombre de composants doit être réduit au maximum. Contrairement à la transformée en ondelettes qui s'applique à la totalité de l'image, la DCT effectue un codage en blocs et requiert moins de mémoire tampon. L'idée d'implémenter une transformée en ondelettes par blocs n'est pas envisageable pour disposer d'une bonne qualité image. Elle crée des artefacts visuels particulièrement gênants au niveau des bords de chaque bloc, la qualité image est plutôt médiocre et tous les avantages de la transformée sur la DCT sont perdus. Une autre alternative est d'implémenter la transformée en ondelettes au « fil de l'eau ». Ce type d'implémentation permet d'économiser de la mémoire temporaire et réduit le délai de codage et de décodage. La transformée en ondelettes, jusqu'alors impraticable sans découpage en blocs, revient à l'étude, grâce au « fil de l'eau », pour des applications réalisées à bord d'un satellite [14]. Le schéma lifting quinconce peut intégrer une chaîne de codage au « fil de l'eau », et optimiser le gain en espace mémoire. Le principe du « fil de l'eau » est d'effectuer le traitement d'une image au cours de son acquisition. Chaque ligne image acquise est stockée dans une mémoire tampon de filtrage, le programme attend de recevoir assez d'informations afin de procéder au filtrage de la première rangée de points, libère les zones mémoire contenant les informations qui ne sont plus nécessaires et entame le calcul de la deuxième rangée de points et ainsi de suite. Les points calculés sont stockés dans une mémoire tampon de synchronisation en attendant d'être pris en compte par le codeur. La technique définissant des mémoires tampons de filtrages et de synchronisation est exploitée par Parisot dans le cas d'un filtrage 3D par banc de filtres séparables [82].

4.1.1 Définition du délai

La définition de l'espace mémoire tampon nécessaire à l'exécution du schéma lifting quinconce impose une étape préalable. Cette dernière consiste à évaluer le délai nécessaire pour le filtrage des coefficients contenus dans la première rangée de chacune des sous-bandes s et d . Le calcul du délai se fait par étapes. Il est d'abord évalué pour une décomposition par schéma lifting, puis généralisé à N décompositions. Les lignes de l'image originale sont acquises au « fil de l'eau ». Le délai est identifié par le nombre de lignes de données devant être lues, avant de pouvoir déterminer la première ligne de chacune des sous-bandes s et d . Tous les calculs sont effectués sous le couvert de deux hypothèses. Premièrement, la taille des opérateurs lifting est décroissante. Deuxièmement, la première passe du schéma lifting est mise en œuvre par la décomposition polyphase. Rappelons que le schéma lifting quinconce est défini pour une image originale $s_{j-\frac{1}{2}}$ de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$, avec $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, par :

1. La transformée polyphase

$$\begin{aligned} s_j^{(0)}[n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y]] \\ d_j^{(0)}[n_x, n_y] &= s_{j-\frac{1}{2}}[L[n_x, n_y] + (1, 0)] \end{aligned}$$

2. Pour l allant de 1 à L

$$\begin{aligned} s_j^{(l)}[n_x, n_y] &= s_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k=(k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2} U^{(l)}[k] d_j^{(l-1)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \\ d_j^{(l)}[n_x, n_y] &= d_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} P^{(l)}[k] s_j^{(l)}[n_x - k_x, n_y - k_y] \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} s_j[n_x, n_y] &= \frac{1}{K} s_j^{(L)}[n_x, n_y] \\ d_j[n_x, n_y] &= K d_j^{(L)}[n_x, n_y], \end{aligned}$$

$s_j^{(l)}$ et $d_j^{(l)}$ représentent les sous-bandes intermédiaires et M le nombre total de pas lifting et de pas lifting duaux, $L = \lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor$.

4.1.1.1 Délai pour une décomposition en schéma lifting

Le délai est calculé pour une décomposition en schéma lifting. Plusieurs cas se présentent :

- l'image source est définie sur une grille d'échantillonnage quinconce. En d'autres termes sa résolution est égale à $2^{-j+\frac{1}{2}}$, avec $j \in \mathbb{Z}$,
- le premier pas lifting est représenté par un opérateur de prédiction,
- le premier pas lifting correspond à une mise à jour,
- l'image source est définie sur une grille d'échantillonnage carré. Sa résolution est égale à 2^{-j} avec $j \in \mathbb{Z}$.

Nous allons définir le délai de manière itérative pour les cinq cas.

A. Délai pour un schéma lifting envoyant une approximation de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$ à la résolution 2^{-j} ($j \in \mathbb{Z}$) :

L'image source $s_{j-\frac{1}{2}}$ (avec $j \in \mathbb{Z}$) est de taille $\frac{C_L}{\sqrt{2}} \times \frac{C_C}{\sqrt{2}}$ et de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$. Son support est compact et correspond, en théorie, à un réseau régulier de points disposés en quinconce. Le support observe une rotation de 45 degrés, conformément à l'analyse multirésolution, introduite par Feauveau [37], avec un facteur de résolution L . Au niveau de l'implémentation physique, l'image est spécifiée sur une grille d'échantillonnage « quinconce projetée » (pour plus de précisions voir l'annexe A.2 (FIG. A.4)). L'incidence de la restructuration du support sur la décomposition polyphase conduit à un sous-échantillonnage exclusif sur les colonnes. Plus précisément, chaque ligne acquise est redéfinie soit comme une rangée de coefficients de $s_j^{(0)}$, soit comme une rangée de coefficients de $d_j^{(0)}$. Les lignes de $s_j^{(0)}$ et $d_j^{(0)}$ sont actualisées par étapes successives jusqu'à l'obtention des rangées de s_j et d_j . Le délai est déterminé par le nombre de lignes de données, devant être lues, pour procéder au calcul de la première rangée de coefficients de s_j . Considérons un schéma lifting à M pas, définissons par t_k la longueur du $k^{\text{ième}}$ opérateur¹. Le délai nécessaire au filtrage de la première ligne de coefficients de s_j dépend du délai nécessaire à l'exécution de chaque pas lifting. Le principe du lifting est de calculer conjointement les signaux basse et haute fréquences. En conséquence, les premières lignes de s_j et d_j seront calculées simultanément. La décomposition polyphase est complètement transparente, puisqu'elle n'effectue aucune opération. Chaque rangée acquise est considérée soit comme une rangée d'échantillons de $s_j^{(0)}$, soit de $d_j^{(0)}$. Le délai d'obtention de la première ligne de chacune des sous-images est égal à deux. L'évaluation du délai présente deux cas de figure. Dans le premier cas, le schéma débute par une opération de prédiction. Dans le second, il commence par une opération de mise à jour.

a. Le premier pas lifting est une prédiction :

Le délai est évalué pas à pas. Il est d'abord défini pour un pas lifting, puis pour deux, et ensuite pour les M pas lifting.

1. Le premier pas lifting est une prédiction mise en œuvre par un opérateur $p^{(1)}$ de longueur t_1 . Les points à actualiser se situent sur les rangées d'indice impair de $s_{j-\frac{1}{2}}$ (correspondant à des lignes de $d_j^{(0)}$). Les « prédictions » successives vont permettre d'engendrer un signal haute fréquence. La première génère un signal intermédiaire $d_j^{(1)}$. Les points du filtre $p^{(1)}$ ne s'appliquent qu'aux rangées d'indice pair de $s_{j-\frac{1}{2}}$ (correspondant aux rangées de $s_j^{(0)}$). L'indexation des lignes d'une image de C_L lignes, commence à partir de 0 et va jusqu'à $C_L - 1$. Comme le montre la figure (FIG. 4.1 a.), la première rangée de points de $d_j^{(1)}$ est calculée suite à l'acquisition des $(t_1 + 1)$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$. Les $(t_1 - 1)$ rangées manquantes sont déterminées par un processus de symétrisation (voir Annexe A.4). Le calcul de n rangées de signal

¹La longueur d'un filtre est définie par le nombre maximum de coefficients non-nuls se situant sur les lignes du filtre. Ainsi, pour un filtre de taille $T \times T$, la longueur est définie par T .

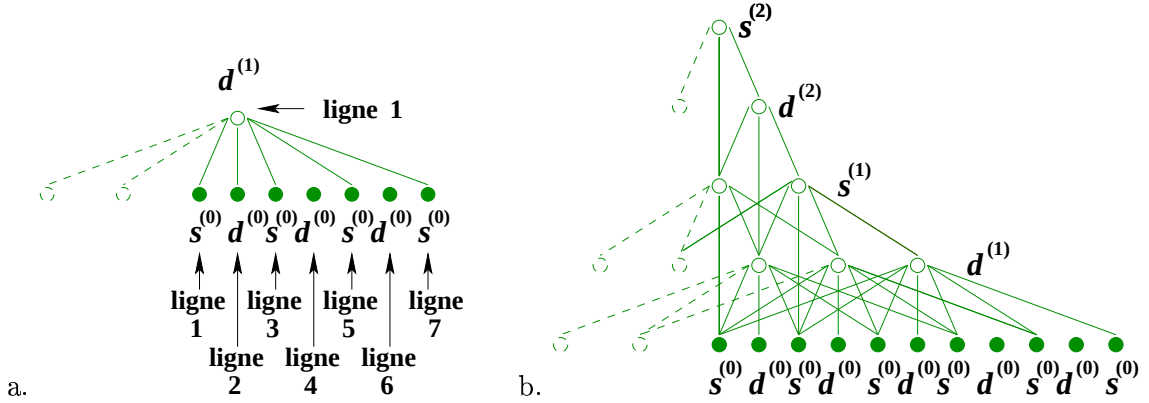


FIG. 4.1 – Graphe de dépendance entre les lignes de coefficients pour une image source de résolution : $2^{-n+\frac{1}{2}}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Le délai est mis en évidence pour un schéma lifting à quatre pas, définis par une prédiction ($t_1 = 6$), une mise à jour ($t_2 = 4$), une deuxième prédiction ($t_3 = 2$), un deuxième mise à jour ($t_4 = 2$). Chaque point correspond à une ligne de l'image échantillonnée quinconce. Le délai correspond au nombre de lignes à acquérir (représentées par un rond plein de couleur verte). Les points en pointillés correspondent aux rangées déterminées par symétrie. Le graphe de dépendance (a.) met en évidence le délai pour le premier pas lifting. Le calcul de la première ligne de $d^{(1)}$ requiert un délai d'acquisition de 7 lignes. Le graphe (b.) met en évidence un délai de 11 lignes pour les quatre pas lifting.

basse fréquence ne peut être effectif que suite à l'acquisition des $[t_1 + 1 + 2(n - 1)]$ premières rangées d'échantillons de $s_{j-\frac{1}{2}}$.

2. Le deuxième pas lifting est un pas de mise à jour, déterminé par l'opérateur $u_j^{(1)}$ de longueur t_2 . L'évaluation de la première rangée de $s_j^{(1)}$ nécessite le calcul préalable des $\frac{t_2}{2}$ premières rangées de $d_j^{(1)}$, soit l'acquisition de $(t_1 + t_2 - 1)$ rangées de données $s_{j-\frac{1}{2}}$. L'évaluation de n rangées nécessite le calcul préalable des $[\frac{t_2}{2} + 2(n - 1)]$ premières rangées de $d_j^{(1)}$, soit l'acquisition des $[t_1 + t_2 - 1 + 2(n - 1)]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$.
3. Le troisième pas lifting est défini par l'opérateur $p^{(2)}$ de longueur t_3 . L'évaluation de la première rangée de $d_j^{(2)}$ requiert le calcul préalable des $\frac{t_3}{2} + 1$ premières rangées de $s_j^{(1)}$, soit l'acquisition des $(t_1 + t_2 + t_3 - 1)$ premières rangées de l'image source $s_{j-\frac{1}{2}}$. L'évaluation de n rangées requiert le calcul préalable de $[\frac{t_3}{2} + 1 + 2(n - 1)]$ rangées de $s_j^{(1)}$, soit l'acquisition des $[t_1 + t_2 + t_3 - 1 + 2(n - 1)]$ premières rangées de données $s_{j-\frac{1}{2}}$.
4. Le $(2l - 1)^{\text{ième}}$ pas lifting correspond à une prédiction définie par un filtre de longueur t_{2l-1} . L'évaluation de la première rangée de $d_j^{(l)}$ nécessite le calcul préalable des $\frac{t_l}{2} + 1$ premières lignes de $s_j^{(l-1)}$, soit l'acquisition des $[\sum_{k=1}^{2l-1} t_k - l]$ premières rangées de

- $s_{j-\frac{1}{2}}$. L'évaluation de n rangées requiert le calcul préalable des $\frac{t_l}{2} + 1 + 2(n-1)$ premières rangées de $s_j^{(l-1)}$, soit l'acquisition des $\left[\sum_{k=1}^{2l-1} t_k - l + 2(n-1)\right]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$.
5. Le $2l^{\text{ième}}$ pas lifting correspond à une prédiction définie par un filtre de longueur t_{2l} . L'évaluation de la première rangée de $s_j^{(l)}$ requiert un calcul préalable des $\frac{t_{2l}}{2}$ premières rangées de $d_j^{(l)}$, soit l'acquisition des $\left[\sum_{k=1}^{2l} t_k - l + 1\right]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$. L'évaluation de n rangées requiert un calcul préalable de $\left[\frac{t_{2l}}{2} + 2(n-1)\right]$ rangées de $d_j^{(l)}$, soit l'acquisition des $\left[\sum_{k=1}^{2l} t_k - l + 1 + 2(n-1)\right]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$.
 6. Le délai pour obtenir les images s_j et d_j est égal au délai de calcul de la première ligne de $s_j^{(L)}$ et de $d_j^{(L)}$. Aucun délai supplémentaire n'est requis, puisque les opérations consistent à multiplier les coefficients de la première ligne de $s_j^{(l)}$ par K et ceux de $d_j^{(l)}$ par $\frac{1}{K}$.

En résumé, un schéma lifting quinconce, à M pas, nécessite un délai $\Delta_{j-\frac{1}{2},1}(1)$ pour le calcul de chaque première rangée des sous-bandes s et d .

$$\Delta_{j-\frac{1}{2}}(1) = \Delta_{j-\frac{1}{2},1}(1) = \sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \quad (4.1)$$

Pour un délai, noté $\Delta_{j,n}(N)$, l'indice j appartient à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et symbolise la résolution de l'image source qui est égale à 2^{-j} . L'indice N détermine le nombre de décompositions successives réalisées et n désigne le nombre de rangées à définir dans les sous-bandes de plus faible résolution. Le délai pour calculer n rangées dans chacune des sous-images s et d est identifié par $\Delta_{j-\frac{1}{2},n}(1)$

$$\Delta_{j-\frac{1}{2},n}(1) = \sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + 2(n-1)$$

b. Le premier pas lifting est une mise à jour :

Pour un schéma lifting à M pas et dont la première opération est une mise à jour, le calcul diffère légèrement.

1. Le premier pas lifting est un pas de mise à jour défini par l'opérateur $u^{(1)}$ de longueur t_1 . Les points à actualiser se situent sur les rangées d'indice pair de $s_{j-\frac{1}{2}}$ (correspondant aux lignes de $s_j^{(0)}$). Les mises à jour successives vont engendrer un signal basse fréquence. La première génère un signal intermédiaire $s_j^{(1)}$. Les points du filtre ne s'appliquent qu'aux rangées d'indice impair de $s_{j-\frac{1}{2}}$ (correspondant aux rangées de $d_j^{(0)}$). La première ligne de $s_j^{(1)}$ peut être déterminée suite à l'acquisition de t_1 rangées de l'image source $s_{j-\frac{1}{2}}$. Les $(t_1 - 1)$ autres rangées sont déterminées par un processus

de symétrisation (voir Annexe A.4). Le délai nécessaire pour calculer les n premières rangées de $s_j^{(1)}$ est défini par $[t_1 + 2(n - 1)]$.

2. Le deuxième pas lifting est un pas de prédiction défini par l'opérateur $p^{(1)}$ de longueur t_2 . Le filtrage de la première rangée de $d_j^{(1)}$ nécessite un calcul préalable des $(\frac{t_2}{2} + 1)$ premières rangées de $s_j^{(1)}$, soit l'acquisition des $(t_1 + t_2)$ premières rangées de données source $s_{j-\frac{1}{2}}$. La définition de n rangées de $d_j^{(1)}$ nécessite le calcul préalable des $[\frac{t_2}{2} + 1 + 2(n - 1)]$ premières rangées de $s_j^{(1)}$, soit l'acquisition des $[t_1 + t_2 + 2(n - 1)]$ premières rangées de l'image originale $s_{j-\frac{1}{2}}$.
3. Le troisième pas lifting est déterminé par l'opérateur $u^{(2)}$ de longueur t_3 . La définition de la première rangée de $s_j^{(2)}$ nécessite le calcul préalable des $\frac{t_3}{2}$ premières rangées de $d_j^{(1)}$, soit l'acquisition des $(t_1 + t_2 + t_3 - 2)$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$. L'évaluation de n rangées requiert le calcul préalable des $[\frac{t_3}{2} + 2(n - 1)]$ premières rangées de $s^{(2)}$, soit l'acquisition des $[t_1 + t_2 + t_3 - 2 + 2(n - 1)]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$.
4. Le $2l^{\text{ième}}$ pas lifting correspond à une mise à jour réalisée par un opérateur de longueur t_{2l} . L'évaluation de la première rangée de $s_j^{(l+1)}$ nécessite le calcul préalable des $\frac{t_{2l}}{2}$ premières rangées de $d_j^{(l)}$, soit l'acquisition des $[\sum_{k=1}^{2l} t_k - l]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$. L'évaluation de n rangées nécessite l'acquisition des $[\sum_{k=1}^{2l} t_k - l + 2(n - 1)]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$.
5. Le $2l + 1^{\text{ième}}$ pas lifting correspond à une mise à jour effectuée par un filtre de longueur t_{2l+1} . L'évaluation de la première rangée de $d_j^{(l+1)}$ nécessite un calcul préalable des $\frac{t_{2l+1}}{2}$ premières rangées de $s_j^{(l+1)}$, soit l'acquisition des $[\sum_{k=1}^{2l+1} t_k - l + 2]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$. Le calcul de n rangées nécessite, quant à lui, l'acquisition des $[\sum_{k=1}^{2l+1} t_k - l + 2 + 2(n - 1)]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$.
6. Le délai nécessaire à l'évaluation de la première ligne de chacune des sous-bandes s_j et d_j est identique au délai de calcul de la première ligne de $s_j^{(L)}$ et de celle de $d_j^{(L)}$.

Le délai $\Delta_{j-\frac{1}{2},1}^U(1)$ nécessaire au calcul de la première rangée de chacune des sous-images s_j et d_j est déterminé par :

$$\Delta_{j-\frac{1}{2},1}^U(1) = \sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor \quad (4.2)$$

Les n premières rangées de chacune des sous-images s_j et d_j sont calculées suite à l'acquisition de

$$\Delta_{j-\frac{1}{2},n}^U(1) = \sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor + 2(n - 1)$$

rangées de données source.

B. Délai pour un schéma lifting envoyant une approximation de résolution 2^{-j} à la résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$ ($j \in \mathbb{Z}$) :

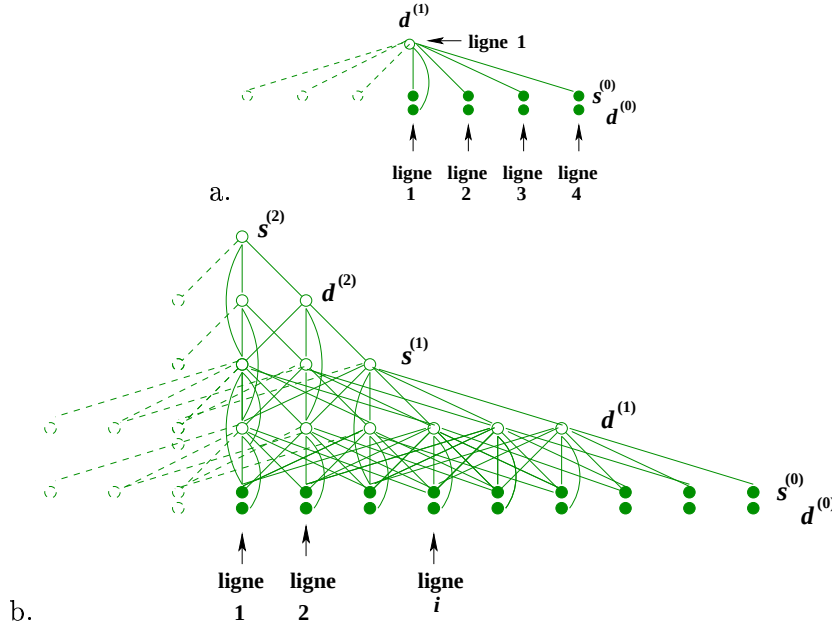


FIG. 4.2 – Délai pour une source de résolution 2^{-j} ($j \in \mathbb{Z}$) mis en évidence par un graphe de dépendance entre les rangées de coefficients. Le délai est déterminé pour un schéma lifting à quatre pas, contenant une prédiction (avec $t_1 = 4$), une mise à jour ($t_2 = 4$), une deuxième prédiction ($t_3 = 2$), un deuxième mise à jour ($t_4 = 2$). Chaque point correspond à une ligne des images $s_{j+\frac{1}{2}}^{(l)}$ ou $d_{j+\frac{1}{2}}^{(l)}$ ($1 \leq l \leq 4$). Une ligne de l'image source s_j est partitionnée en une ligne de l'image $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ et une ligne de l'image $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$. Les liaisons entre les points indiquent les lignes auxquelles doivent s'appliquer les opérateurs, pour le calcul des lignes au sommet. Le délai correspond au nombre de lignes à acquérir (représentées par un rond plein de couleur verte). Les points en pointillés correspondent aux rangées déterminées par symétrie. Le graphe de dépendance (a.) met en évidence un délai d'acquisition de 4 lignes pour le premier pas lifting. Le graphe (b.) met en évidence le délai pour les quatre pas lifting (délai égal à 9).

Une image de résolution 2^{-j} , ou $j \in \mathbb{Z}$, est échantillonnée sur une grille carrée. La décomposition polyphase met en œuvre un sous-échantillonnage regroupant d'un côté les échantillons de somme d'indice pair et d'un autre les échantillons de somme d'indice impair. L'image source n'a pas besoin d'être représentée sur une grille quinconce projetée, contrairement aux sous-bandes $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ et $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ de résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$. La particularité de cet échantillonnage est qu'une ligne de l'image source s_j ne correspond pas à une ligne entière de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ ou de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$, mais elle est partitionnée en deux lignes, une allant dans $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ et l'autre dans $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$. En conséquence, pour une image de résolution rationnelle, le délai est

identique quel que soit l'opérateur qui vient en premier, seule la longueur et le nombre des opérateurs comptent. Le calcul du délai est détaillé, pour M pas lifting, en considérant que le premier pas est défini par une opération de prédiction.

1. Le premier pas lifting est défini par l'opérateur $p^{(1)}$ de longueur t_1 . La première rangée de points de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$ est calculée suite à l'acquisition des t_1 premières rangées de l'image source s_j (rappelons que les $t_1 - 1$ rangées manquantes sont définies par symétrie). Le délai nécessaire à la définition de n rangées de signal basse fréquence $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$ est défini par $[t_1 + (n - 1)]$.
2. Le deuxième pas lifting est défini par l'opérateur $u^{(1)}$ de longueur t_2 . L'évaluation de la première rangée de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$ nécessite le calcul préalable des t_2 premières rangées de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$, soit l'acquisition des $(t_1 + t_2 - 1)$ premières rangées de coefficients de s_j . L'évaluation de n rangées nécessite le calcul préalable des $(t_1 + n - 1)$ premières rangées de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$, soit l'acquisition des $[t_1 + t_2 - 1 + (n - 1)]$ premières rangées de s_j .
3. Le troisième pas lifting est défini par l'opérateur $p^{(2)}$ de longueur t_3 . L'évaluation de la première rangée de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}$ nécessite le calcul préalable des t_3 premières rangées de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$, soit l'acquisition des $(t_1 + t_2 + t_3 - 2)$ premières rangées de coefficients de s_j . L'évaluation de n rangées nécessite le calcul préalable des $(t_3 + n - 1)$ premières rangées de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$, soit l'acquisition des $(t_1 + t_2 + t_3 + n - 3)$ premières rangées de s_j .
4. Une fois de plus, le délai nécessaire à l'évaluation de la première ligne de chacune des sous-images $s_{j+\frac{1}{2}}$ et $d_{j+\frac{1}{2}}$ est identique au délai de calcul de la première ligne de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(L)}$ et de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(L)}$.

Le délai requis par le calcul de la première rangée de chacune des sous-images $s_{j+\frac{1}{2}}$ et $d_{j+\frac{1}{2}}$ est déterminé par $\Delta_{j,1}(1)$, pour $j \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta_j(1) = \Delta_{j,1}(1) = \sum_{k=1}^M (t_k - 1) + 1$$

Le délai $\Delta_{j,1}$ représente le nombre des lignes de l'image originale s_j devant être enregistrées avant de pouvoir réaliser le calcul des premiers coefficients des images de sortie.

Le délai nécessaire à l'obtention des n premières rangées des sous-images $s_{j+\frac{1}{2}}$ ou de $d_{j+\frac{1}{2}}$ est identifié par $\Delta_{j,n}(1)$.

$$\Delta_{j,n}(1) = \sum_{k=1}^M (t_k - 1) + n$$

4.1.1.2 Définition du délai pour N décompositions successives en lifting

Pour N décompositions en schéma lifting, le délai est défini par le nombre de lignes de l'image s_j nécessaires au calcul de la première ligne de $s_{j+\frac{N}{2}}$ et de la première ligne de

$d_{j+\frac{N}{2}}$.

Le rapport entre les longueurs des filtres (h, g) associés au schéma lifting dépend à la fois du premier pas et du nombre de pas lifting. Pour disposer d'un banc de filtres associé où le filtre passe bas est plus long que le passe-haut, le schéma lifting doit débuter par une prédiction et contenir un nombre pair de pas, ou débuter par une mise à jour et contenir un nombre impair de pas. Cette remarque n'est valable que dans la mesure où les longueurs des pas lifting t_k sont décroissantes. La plupart des schémas connus sont composés d'un nombre pair de pas lifting et débutent par une prédiction. En conséquence, les calculs sont restreints au cas où le schéma lifting débute par une opération de prédiction. L'autre cas se déduit simplement en remplaçant dans les calculs, le délai $\Delta_{j-\frac{1}{2}}(1)$ défini en (4.1) par $\Delta_{j-\frac{1}{2}}^U(1)$ (4.2). La définition du délai comporte toutefois deux cas. L'image source peut être acquise sur une grille quinconce ou sur une grille carrée. Les deux cas sont traités dans la suite.

A. Image originale échantillonnée sur une grille quinconce et de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$ (cas des images SPOT5)

1. La première décomposition détermine les coefficients de s_j , l'approximation de $s_{j-\frac{1}{2}}$, à la résolution 2^{-j} . L'acquisition des $\left(\sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1\right)$ premières lignes de données source $s_{j-\frac{1}{2}}$ permet d'évaluer la première rangée de coefficients de s_j . L'acquisition des $\left[\sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 2(n-1)\right]$ premières lignes de s_j permet d'évaluer les n premières rangées de coefficients de s_j .
2. La deuxième décomposition définit l'approximation $s_{j+\frac{1}{2}}$ de résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$. Le calcul de la première rangée de $s_{j+\frac{1}{2}}$ nécessite l'évaluation préalable des $\left[\sum_{k=1}^M (t_k - 1)\right]$ premières lignes de s_j . Plus généralement, le calcul des n premières rangées de s_j nécessite l'évaluation préalable des $\left[\sum_{k=1}^M (t_k - 1) + n\right]$ premières lignes de s_j . Le calcul n'est effectif qu'après réception des $\left[3 \sum_{k=1}^M t_k - 2M - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 2(n-1)\right]$ premières rangées de $s_{j-\frac{1}{2}}$. Le calcul des n premières rangées requiert l'acquisition des $\left[3 \sum_{k=1}^M t_k - 2M - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 2(n-1)\right]$ premières lignes.

Pour N décompositions successives, le délai $\Delta_{j+\frac{1}{2}, N}$ est défini par le nombre de rangées de l'image source $2^{-j+\frac{1}{2}}$, nécessaire au calcul de la première ligne de la sous-bande basse fréquence et la première ligne de la sous-bande haute fréquence à la résolution $2^{-j-\frac{N-1}{2}}$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}(N) = \sum_{n=1}^N 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\sum_{k=1}^M t_k \right) - 2 \left(2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} - 1 \right) M - 2 \left(2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} - 1 \right) \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$$

En posant $N = 2L + \delta$ et $\alpha = 1 - \delta$, le délai devient :

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}(N) = \left(2^{\lfloor \frac{N+3}{2} \rfloor} - 3 + \alpha 2^{\lfloor N/2 \rfloor} \right) \sum_{k=1}^M t_k - 2M \left(2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} - 1 \right) - 2 \left(2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} - 1 \right) \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$$

Dans le cas où N est pair, le délai devient :

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}(2L) = 3 \left[2^L - 1 \right] \left(\sum_{k=1}^M t_k \right) - 2 \left(2^L - 1 \right) M - 2 \left(2^L - 1 \right) \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$$

B. Image originale de résolution 2^{-j} ($j \in \mathbb{Z}$)

Des calculs analogues sont maintenant effectués dans le cas où l'image originale est échantillonnée sur une grille carrée et de résolution 2^{-j} .

1. La première décomposition détermine les coefficients de $s_{j+\frac{1}{2}}$, correspondant à l'approximation de s_j à la résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$. L'acquisition des $\left(\sum_{k=1}^M t_k - M + 1 \right)$ premières lignes de données source s_j permet d'évaluer la première rangée de coefficients de $s_{j+\frac{1}{2}}$. L'acquisition des $\left(\sum_{k=1}^M t_k - M + n \right)$ premières lignes de s_j permet d'évaluer les n premières rangées de coefficients de s_j .
2. Le deuxième niveau de décomposition définit l'approximation s_{j+1} de résolution 2^{-j-1} . Le calcul de la première rangée de s_{j+1} nécessite l'évaluation préalable des $\left(\sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \right)$ premières lignes de $s_{j+\frac{1}{2}}$, définies lors de la première étape. Plus généralement, le calcul des n premières rangées de s_{j+1} nécessite l'évaluation préalable des $\left[\sum_{k=1}^M t_k - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 2(n-1) \right]$ premières lignes de $s_{j+\frac{1}{2}}$. L'opération ne peut aboutir qu'après réception des $\left[2 \sum_{k=1}^M t_k - M - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \right]$ premières rangées de s_j . En considérant que les deux premières lignes sont calculées conjointement (soit s_{j+1} et d_{j+1}), le calcul des n premières rangées nécessite la connaissance des $\left[2 \sum_{k=1}^M t_k - M - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 2(n-1) \right]$ premières lignes des s_j .
3. La troisième décomposition détermine les coefficients de $s_{j+\frac{3}{2}}$, l'approximation de s_j à la résolution $2^{-j-\frac{3}{2}}$. Les $\left(\sum_{k=1}^M t_k - M + n \right)$ premières lignes de s_{j+1} sont nécessaires à l'évaluation des n premières rangées de $s_{j+\frac{3}{2}}$. Elles sont donc calculées suite à l'acquisition des $\left[4 \sum_{k=1}^M t_k - 3M - 2 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 2(n-1) \right]$ premières lignes de s_j .
4. Les n premières rangées de coefficients de s_{j+2} à la résolution 2^{-j-2} sont calculées suite à l'acquisition des $\left[6 \sum_{k=1}^l t_k - 3M - 6 \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 + 4(n-1) \right]$ premières lignes de s_j .

Pour N transformées successives, le délai est défini par $\Delta_j(N)$ et vérifie :

$$\Delta_j(N) = \sum_{n=0}^{N-1} 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\sum_{k=1}^M t_k \right) - \left(2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} - 1 \right) M - 2 \left(2^{\lfloor N/2 \rfloor} - 1 \right) \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$$

En posant $N = 2L + \delta$, le délai devient :

$$\Delta_j(N) = \left(2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} - 2 + \delta 2^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \right) \sum_{k=1}^M t_k - \left(2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} - 1 \right) M - 2 \left(2^{\lfloor N/2 \rfloor} - 1 \right) \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$$

Dans le cas où N est pair, le calcul du délai se simplifie par :

$$\Delta_j(2L) = 2(2^L - 1) \left(\sum_{k=1}^M t_k \right) - (2^L - 1)M - 2(2^L - 1) \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$$

4.1.2 Taille de l'espace mémoire temporaire nécessaire pour un schéma lifting quinconce au « fil de l'eau »

Le principe du codage au « fil de l'eau » est de permettre un traitement des données plus optimal. Dans le cadre d'images scannées ou acquises au cours du temps (images satellite), le codage des images est accéléré par l'utilisation de techniques dites au « fil de l'eau » et donne lieu à une économie de mémoire importante. Sweldens propose un calcul sur place des coefficients ayant pour avantage de réaliser un filtrage ne nécessitant aucune mémoire supplémentaire. L'inconvénient est qu'il nécessite la connaissance de l'image entière, puisqu'à chaque pas lifting l'image est traitée dans son intégralité. Le filtrage sur place des coefficients s'adapte mal au cas des images scannées et s'avère finalement bien plus coûteux en ressources qu'une transformée au fil de l'eau pour laquelle l'image n'est pas entièrement stockée. Par exemple, un satellite dispose d'un système d'acquisition affecté de capteurs qui définissent les images ligne par ligne. Les lignes sont traitées au fil de l'eau et envoyées à la terre sans attendre la réception des dernières lignes de l'image. En général, le satellite ne stocke jamais une image entière en mémoire.

Dans le cadre d'applications plus courantes, le traitement sur place des images nécessite un grand nombre d'accès mémoire. Pour une décomposition en schéma lifting, le nombre d'accès à la mémoire réservée au stockage du signal est défini par

$$\sum_{k=1}^M (t_k^2 + 2)$$

Le nombre d'accès mémoire pour un pas lifting est défini par la taille du filtre plus deux accès, un pour lire le coefficient à actualiser, l'autre pour écrire le coefficient actualisé. Les accès sont longs et coûteux en ressources, aussi doivent ils être réduits au strict minimum. Un traitement au fil de l'eau réduit le nombre d'accès à la mémoire réservée au stockage du signal. Chaque coefficient n'est lu et écrit qu'une seule fois. Les calculs étant réalisés dans une mémoire tampon de petite taille en comparaison à la taille de l'image, les accès mémoire se font dans la zone mémoire tampon. Suivant le système informatique, les accès à la mémoire tampon de filtrage coûtent moins chers que les accès à la mémoire du signal. Les coefficients intervenant plusieurs fois peuvent être gérés par le cache ou par des registres. En résumé, l'implémentation du schéma lifting au « fil de l'eau » réduit le nombre d'accès mémoire en fonction du système informatique employé, et réduit de manière considérable l'espace mémoire et le temps nécessaire au traitement de données scannées.

L'exécution du schéma lifting quinconce au « fil de l'eau » utilise des zones de mémoires tampon pour deux motifs distincts. Une partie de la mémoire temporaire est allouée au filtrage des différentes lignes de l'image, tandis que l'autre partie sert à synchroniser les étapes de transformation et de codage. La synchronisation est un processus gérant le stockage des données transformées jusqu'à l'envoi au codeur. Elle assure la cohérence spatiale,

afin de permettre au codeur de traiter les données, de chaque sous-bande, correspondant à la même zone image.

4.1.2.1 Mémoire temporaire de filtrage

a. Cas d'une image source de résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$ où $j \in \mathbb{Z}$

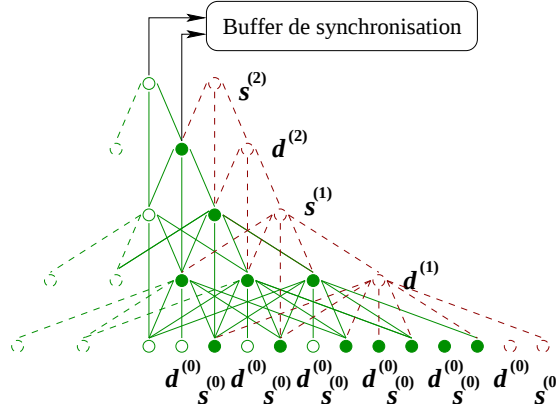


FIG. 4.3 – Graphe de dépendance entre les lignes des données et des sous-bandes intermédiaires pour un schéma lifting à quatre pas avec $t_1 = 6$, $t_2 = 4$, $t_3 = 2$ et $t_4 = 2$. Les ronds pleins représentent les coefficients conservés en mémoire temporaire de filtrage. 12 lignes de coefficients nécessaires aux prochains calculs (représentées par des ronds pleins et verts) sont mémorisées.

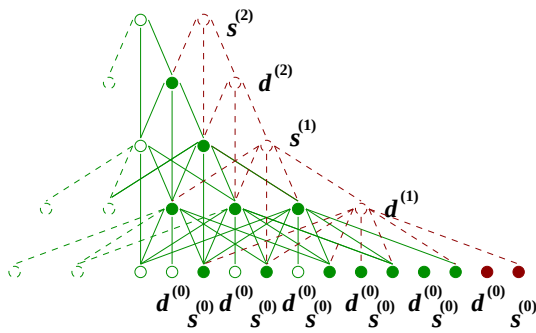


FIG. 4.4 – Lecture de deux rangées de données : représentées par des ronds pleins et rouges. La mémoire temporaire de filtrage doit pouvoir stocker 14 lignes de données.

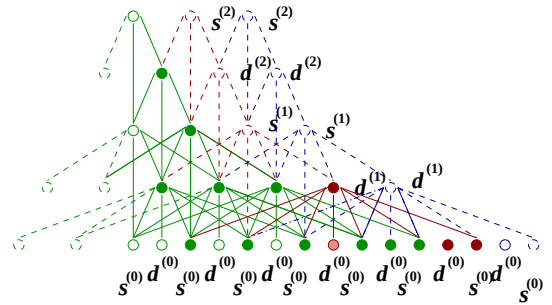


FIG. 4.5 – Calcul d'une rangée de coefficients $d^{(1)}$ (représentée par un rond plein rouge) et mémorisation à l'emplacement mémoire de la rangée $d^{(0)}$ représentée par un rond rouge clair.

1. Le filtrage d'une ligne de $d_j^{(1)}$ par un opérateur de taille t_1 , nécessite $r_1 = \frac{3}{2}t_1$ rangées de mémoires tampons, comprenant t_1 lignes de $s_j^{(0)}$, et $\frac{t_1}{2}$ lignes de $d_j^{(0)}$. Le filtrage est représenté par les figures FIG. 4.3 et FIG. 4.4. L'évaluation de $d_j^{(1)}[n]$, la $n^{\text{ième}}$ ligne

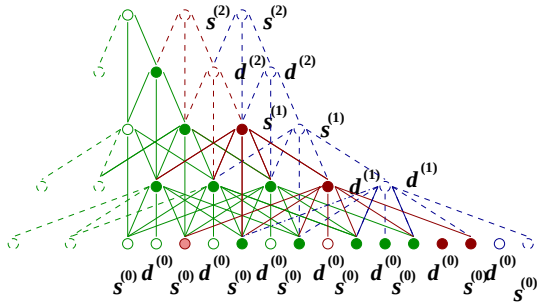


FIG. 4.6 – Calcul d'une rangée de coefficients $s^{(1)}$ (représentée par un rond plein rouge) et mémorisation à l'emplacement mémoire de la rangée $s^{(0)}$ représentée par un rond rouge clair.

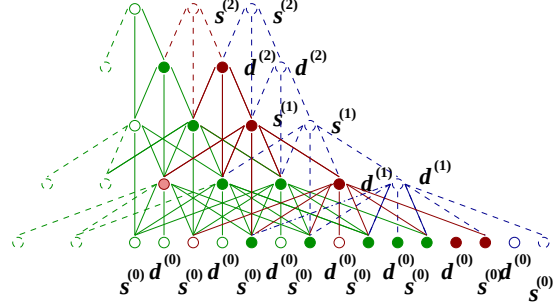


FIG. 4.7 – Calcul d'une rangée de coefficients $d^{(2)}$ (représentée par un rond plein rouge) et mémorisation à l'emplacement mémoire de la rangée $d^{(1)}$ représentée par un rond rouge clair.

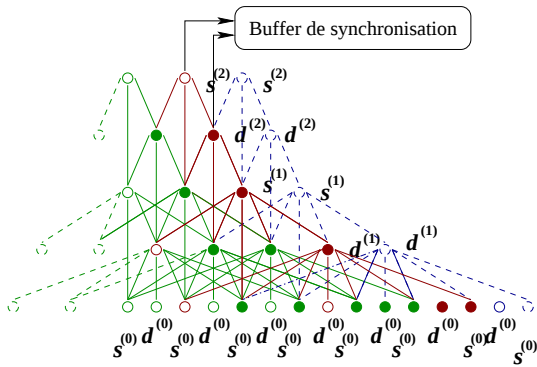


FIG. 4.8 – Calcul d'une rangée de coefficients $s^{(2)}[n]$ (représentée par un rond plein rouge). Envoi des lignes $s^{(2)}[n]$ et $d^{(2)}[n]$ dans la mémoire tampon de *synchronisation*.

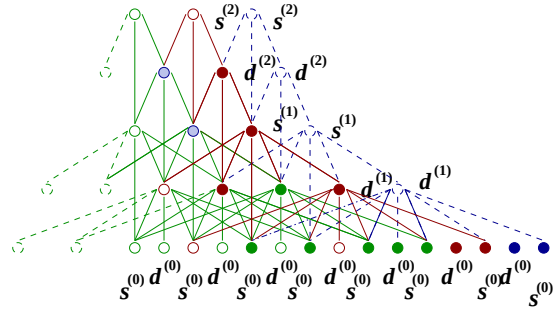


FIG. 4.9 – Lecture et mémorisation de deux rangées de données (représentées par un rond plein bleu). La mémorisation a lieu à l'emplacement mémoire des rangées de $s^{(1)}$ et $d^{(2)}$ représentées par un rond grisé bleu.

de $d^{(1)}$, ne dépend que de $d_j^{(0)}[n]$ et des t_1 rangées de $s_j^{(0)}$. Les lignes $d_j^{(1)}[i]$ pour $i < n$ ont déjà été traitées. Dès lors, les valeurs de $d_j^{(0)}[i]$ n'ont plus besoin d'être stockées et la zone mémoire qui leur était réservée a déjà été libérée et redistribuée. Les rangées $d_j^{(1)}[i]$ pour $i > n$ sont stockées en mémoire dès leur réception en attendant d'être traitées. L'enregistrement de la ligne $d^{(1)}[n]$ ne nécessite pas de zone de mémoire supplémentaire car le calcul se fait sur place. Autrement dit, $d_j^{(1)}[n]$ prend la place mémoire de $d_j^{(0)}[n]$ devenue inutile. Les lignes $s^{(0)}[i]$, avec $n - \frac{t_1}{2} + 1 \leq i \leq n + \frac{t_1}{2} - 1$, enregistrées dans la mémoire temporaire doivent encore servir pour le calcul de $d^{(1)}[n + 1]$. Par contre, la ligne $s_j^{(0)}[n - \frac{t_1}{2}]$ n'intervient pas ultérieurement dans les calculs des $d_j^{(1)}[i]$ pour $i > n$. Si l'opérateur lifting suivant est de longueur t_2 égale à

$t_1, s_j^{(0)} [n - \frac{t_1}{2} + 1]$ est nécessaire au calcul de $s_j^{(1)} [n - \frac{t_1}{2} + 1]$, sinon elle n'intervient plus dans les calculs. Dans les deux cas, son emplacement va être réservé pour stocker la ligne de coefficients $s_j^{(1)}$. Cette étape est représentée par la figure (FIG. 4.5).

2. Le filtrage d'une ligne de $s_j^{(1)}$ nécessite $(t_2 - 1)$ zones mémoires supplémentaires (cf. FIG. 4.6). Considérons $s_j^{(1)}[n]$ la $n^{\text{ième}}$ ligne² de $s_j^{(1)}$. Les coefficients de $s^{(1)}[n]$ sont calculés à partir de $s_j^{(0)}[n]$ et du filtrage de t_2 lignes de $d_j^{(1)}$, allant de la ligne $(n - \frac{t_2}{2})$ à la ligne $(n + \frac{t_2}{2} - 1)$. Les lignes $d_j^{(1)} [n - \frac{t_2}{2}]$ jusqu'à $d_j^{(1)} [n + \frac{t_2}{2} - 2]$ ont servi au calcul des $s_j^{(1)}[n - 1]$. Elles sont donc déjà stockées sur un espace mémoire réservé pour $(t_2 - 1)$ rangées. La rangée $d_j^{(1)} [n + \frac{t_2}{2} - 1]$, n'intervenant pas dans les calculs précédents, nous devons allouer l'espace mémoire nécessaire à son calcul qui est égal à $r_1 = \frac{3}{2}t_1$ rangées. Comme $t_2 \leq t_1$, la ligne $s_j^{(0)}[n + \frac{t_2 - t_1}{2}]$ est stockée parmi les $\frac{3}{2}t_1$ rangées nécessaires au codage de $d_j^{(1)} [n + \frac{t_2}{2} - 1]$. La rangée de coefficients $s^{(1)}[n]$ est enregistrée à l'emplacement mémoire de $s_j^{(0)} [n + \frac{t_2 - t_1}{2}]$. Après deux pas lifting la mémoire tampon doit pouvoir allouer une zone pour $r_2 = \frac{3}{2}t_1 + t_2 - 1$ rangées d'échantillons. L'emplacement alloué pour $d_j^{(1)} [n - \frac{t_2}{2}]$ est redistribué à la prochaine passe. La rangée $d_j^{(1)} [n - \frac{t_2}{2}]$ n'interviendra plus dans le calculs de $s^{(1)}[i]$ pour $i > n$. Si $t_3 = t_2$, alors elle intervient dans le calcul $d_j^{(2)} [n - \frac{t_2}{2}]$, sinon la zone mémoire où elle est enregistrée peut être libérée.
3. Le $2l^{\text{ième}}$ pas lifting est défini par une opération de prédiction et nécessite $t_{2l} - 1$ rangées de mémoires supplémentaires (cf. FIG. 4.7). La rangée $d_j^{(l)}[n]$ est obtenue suite au filtrage de t_{2l} rangées de la sous-bande $s_j^{(l-1)}$. Les $t_{2l} - 1$ premières rangées ont été calculées lors des étapes antérieures et sont stockées en mémoire. La rangée $s_j^{(l-1)} [n + \frac{t_{2l}}{2}]$ doit être évaluée. Son évaluation nécessite $(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^{2l-1} t_k - l + 2)$ rangées d'emplacements mémoire. Comme $t_{2l} \leq t_{2l-1}$, aucun espace supplémentaire n'est requis pour stocker la rangée $d_j^{(l)}[n]$, puisque $d_j^{(l-1)} [n + \frac{t_{2l} - t_{2l-1}}{2}]$ est comptabilisée parmi les rangées nécessaires au calcul de $s_j^{(l-1)} [n + \frac{t_{2l}}{2}]$. La nouvelle rangée calculée est enregistrée sur l'emplacement mémoire de $d_j^{(l-1)} [n + \frac{t_{2l} - t_{2l-1}}{2}]$. Le filtrage des $2l$ premiers pas lifting nécessite le stockage en mémoire temporaire de $(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^{2l} t_k - l + 1)$ rangées de coefficients. L'ensemble des coefficients de la rangée $s_j^{(l-1)} [n - \frac{t_{2l}}{2} + 1]$ n'intervient plus dans le filtrage des $d_j^{(l)}[i]$ pour $i > n$, la place mémoire qui lui est attribué peut être utilisé pour stocker une nouvelle ligne de données.

Pour un schéma lifting quinconce à M pas, la mémoire temporaire de filtrage à réserver est égale à :

$$\Lambda_{j-\frac{1}{2}}^F(1) = \left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M + 1 \right) . C_C \quad (4.3)$$

²La valeur n représente un indice et ne correspond pas a priori à celui de la première étape

C_C représente le nombre de colonnes de l'image originale, il correspond au nombre de coefficients contenus dans chaque ligne de l'image.

REMARQUE 22 Parmi les

$$\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M + 1$$

rangées d'échantillons à mémoriser, deux peuvent être libérées afin de pouvoir acquérir les deux prochaines lignes d'échantillons de l'image originale nécessaires pour calculer la prochaine rangée de s et la prochaine rangée de d (cf 4.9). Il s'agit de la dernière rangée calculée (au sommet de la pyramide FIG. 4.8) qui est envoyée à la mémoire temporaire de synchronisation, et qui ne sert pas pour le filtrage. L'autre rangée correspond à la rangée de l'avant-dernière sous-bande calculée indexée par $(n - \frac{t_M}{2})$.

b. Cas d'une image source de résolution 2^{-j} où $j \in \mathbb{Z}$

En ce qui concerne le cas d'une image source échantillonnée sur une grille carrée et de résolution 2^{-j} ($j \in \mathbb{Z}$), la taille de la mémoire tampon diffère quelque peu.

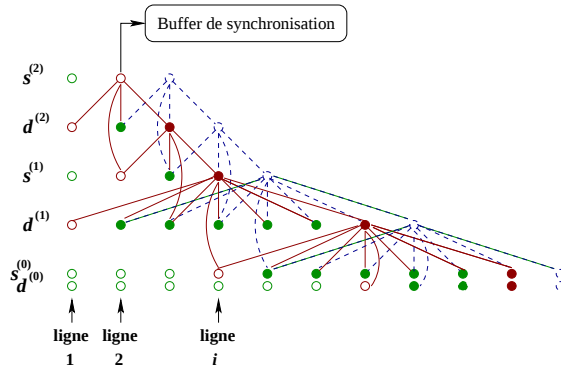


FIG. 4.10 – Graphe de dépendance entre les lignes image pour un schéma lifting à quatre pas avec $t_1 = 4$, $t_2 = 4$, $t_3 = 2$ et $t_4 = 2$. Les lignes de coefficients (représentées par des ronds pleins) sont conservées en mémoire pour les calculs ultérieurs.

Le calcul est détaillé pour un schéma lifting débutant par un pas de prédiction (le résultat sera strictement identique pour un pas de mise à jour).

1. Le filtrage d'une ligne $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n]$ nécessite $r_1 = \frac{3}{2}t_1 - \frac{1}{2}$ rangées de s_j de mémoire tampon, comprenant $2t_1 - 1$ lignes de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$, et t_1 lignes de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$. Les $(t_1 - 1)$ rangées de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ manquantes, indexées de $(n - t_1 + 1)$ à $(n - 1)$, ayant déjà servi au calcul des $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$, ne sont pas stockées en mémoire (cf. FIG. 4.4 et FIG. 4.5). Pour un échantillonnage défini sur les grilles carrées et « quinconce projetées », les lignes à la résolution 2^{-j} sont deux fois plus petites que les lignes à la résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$. Aussi l'emplacement mémoire pour $2t_1 - 1$ lignes de $s_j^{(0)}$, et t_1 lignes de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$ correspond

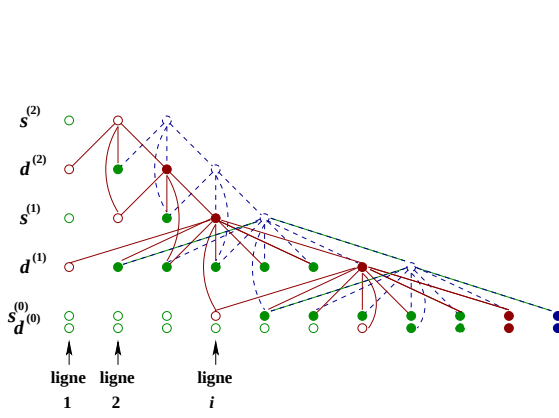
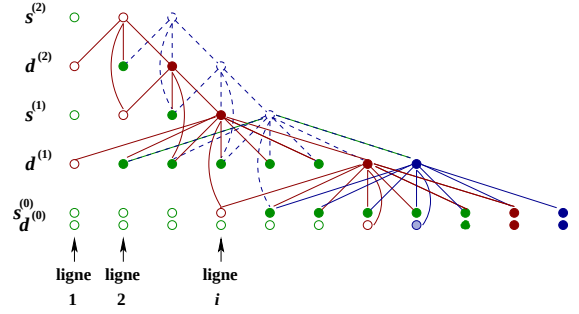
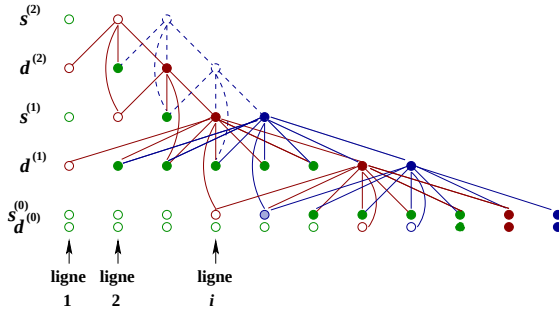
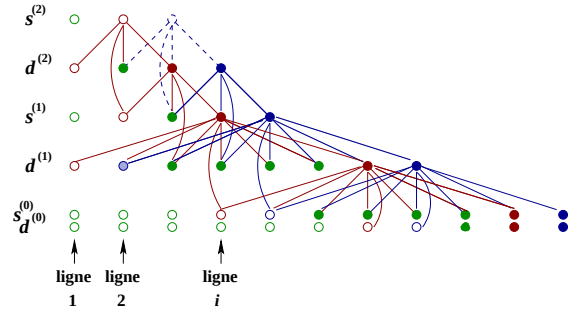


FIG. 4.11 – Lecture de deux rangées de données, représentées par des ronds pleins bleus

FIG. 4.12 – Calcul d'une rangée de coefficients $d^{(1)}$ (représentée par un rond plein bleu) et mémorisation à l'emplacement mémoire de la rangée $d^{(0)}$ représentée par un rond bleu clairFIG. 4.13 – Calcul d'une rangée de coefficients $s^{(1)}$ (représentée par un rond plein bleu) et mémorisation à l'emplacement mémoire de la rangée $s^{(0)}$ représentée par un rond bleu clair.FIG. 4.14 – Calcul d'une rangée de coefficients $d^{(2)}$ (représentée par un rond plein bleu) et mémorisation à l'emplacement mémoire de la rangée $d^{(1)}$ représentée par un rond bleu clair.

à une zone mémoire de taille $(\frac{3}{2}t_1 - \frac{1}{2})C_c$ (où C_c est la taille d'une ligne image de s_j). L'enregistrement de la ligne $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n]$ ne nécessite pas de zone de mémoire supplémentaire car le calcul se fait sur place, elle prend la place mémoire de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n]$ devenue inutile. Les $(2t_1 - 2)$ lignes $s^{(0)}[i]$, avec $n - t_1 + 2 \leq i \leq n + t_1 - 1$, enregistrées dans la mémoire temporaire doivent encore servir pour le calcul de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n + 1]$. La ligne $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n - t_1 + 1]$ n'interviendra pas dans les prochains calculs des rangées $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[i]$ ($i > n$). En réalité, deux cas se présentent, soit $t_2 = t_1$ alors $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n - t_1 + 1]$ est nécessaire au calcul de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n - t_1 + 1]$, soit elle n'intervient plus dans les calculs. Dans les deux cas, l'emplacement mémoire de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n - t_1 + 1]$ doit être utilisé pour

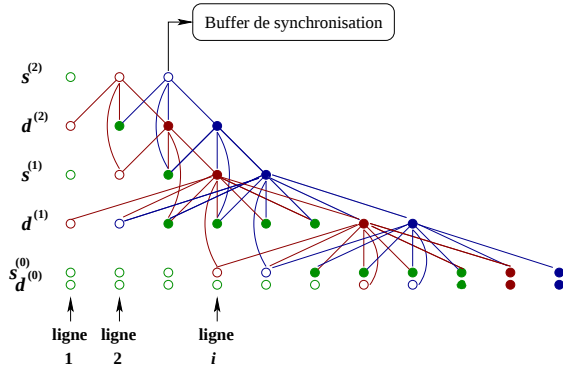


FIG. 4.15 – Calcul d'une rangée de coefficients $s^{(2)}[n]$ (représentée par un rond plein bleu). Envoi des lignes $s^{(2)}[n]$ et $d^{(2)}[n]$ dans la mémoire tampon de *synchronisation*.

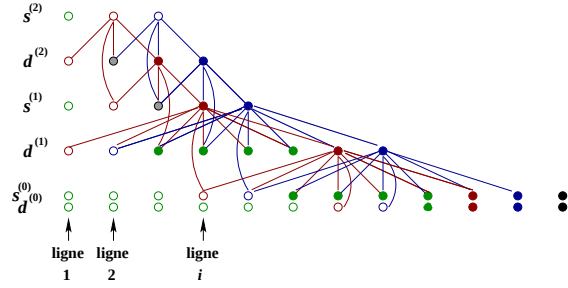


FIG. 4.16 – Lecture et mémorisation de deux rangées de données (représentées par un rond plein bleu). La mémorisation a lieu à l'emplacement mémoire des rangées de $s^{(1)}$ et $d^{(2)}$ représentées par un rond grisé bleu.

le stockage de la prochaine rangée de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$.

2. Le filtrage d'une ligne de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$ nécessite $(t_2 - 1) C_C$ zones mémoire supplémentaires (FIG. 4.6). Considérons $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n]$ la $n^{\text{ième}}$ ligne de $s^{(1)}$. Les coefficients de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n]$ sont calculés à partir de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n]$ et du filtrage de t_2 lignes de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}$, allant de la ligne $(n - t_2 + 1)$ à la ligne $(n + t_2 - 2)$. Les $2(t_2 - 1)$ lignes $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n - t_2 + 1]$ jusqu'à $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n + t_2 - 2]$ ont servi au calcul de $s_j^{(1)}[n - 1]$. Elles sont donc déjà stockées sur un espace mémoire de taille $(t_2 - 1) C_C$.

La rangée $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n + t_2 - 1]$ n'intervenant pas dans les calculs précédents, nous devons allouer l'espace mémoire nécessaire à son calcul qui est de taille $(\frac{3}{2}t_1 - \frac{1}{2}) C_C$. La rangée de coefficients $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n]$ est enregistrée à l'emplacement mémoire de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n - t_1 + t_2]$ (comme $t_2 \leq t_1$, cette rangée est incluse dans les $2(\frac{3}{2}t_1 - \frac{1}{2})$ rangées mémorisées pour le codage de $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n + t_2 - 1]$).

Après deux pas lifting la mémoire tampon est de taille $r_2 = (\frac{3}{2}t_1 + t_2 - \frac{3}{2}) C_C$. L'emplacement alloué pour $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n - t_2 + 1]$ est redistribué en prochaine passe. La rangée $d_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[n - t_2 + 1]$ n'intervient plus dans les prochains calculs de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}[i]$ pour $i > n$, elle intervient seulement dans le calcul $d_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}[n - \frac{t_2}{2}]$ si $t_3 = t_2$.

3. Le $2l^{\text{ième}}$ pas lifting est défini par une opération de prédiction et nécessite $(t_{2l} - 1) C_C$ zones de mémoire supplémentaire (FIG. 4.7). La rangée $d_{j+\frac{1}{2}}^{(l)}[n]$ est obtenue suite au filtrage de $(2t_{2l} - 1)$ rangées de la sous-bande $s_{j+\frac{1}{2}}^{(l-1)}$. Les $(2t_{2l} - 2)$ premières rangées ont été calculées lors des étapes antérieures et sont stockées en mémoire.

La rangée $s_{j+\frac{1}{2}}^{(l-1)}[n+t_{2l}-1]$ doit être évaluée. Son évaluation requiert un espace de taille $\left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^{2l-1} t_k - 2l + \frac{3}{2}\right) C_C$. Comme $t_{2l} \leq t_{2l-1}$, aucun espace supplémentaire n'est requis pour stocker la rangée $d_{j+\frac{1}{2}}^{(l-1)}[n]$ puisque $d_{j+\frac{1}{2}}^{(l-1)}[n]$ est comptabilisée parmi les rangées nécessaires au calcul de $s_{j+\frac{1}{2}}^{(l-1)}[n+t_{2l}-1]$. La nouvelle rangée calculée est enregistrée à la place mémoire $d_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}[n+t_{2l}-t_{2l-1}]$. La mémoire temporaire nécessaire au filtrage des $2l$ premiers pas lifting est de taille $r_{2l} = \left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^{2l} t_k - l + \frac{1}{2}\right) C_C$. Les coefficients de la rangée $s_{j+\frac{1}{2}}^{(l-1)}[n-t_{2l}+1]$ n'interviennent plus dans le filtrage des $d_{j+\frac{1}{2}}^{(l)}[i]$ pour $i > n$.

Pour un schéma lifting quinconce à M pas, la mémoire temporaire de filtrage à réserver au filtrage est égale à :

$$\Lambda_j^F(1) = \left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M + \frac{1}{2}\right) \cdot C_C \quad (4.4)$$

C_C représente le nombre de colonnes de l'image originale (pour les approximations multirésolution échantillonnées sur une grille quinconce, nous considérons la grille quinconce projetée de l'annexe A.2).

REMARQUE 23 Parmi les $\Lambda_j^F(1)$ zones de mémoire, deux demi-rangées peuvent être libérées afin de pouvoir acquérir la prochaine ligne d'échantillons de l'image originale nécessaires pour calculer la prochaine rangée de s et la prochaine rangée de d (cf. FIG. 4.15). Il s'agit de la dernière demi-rangée calculée (au sommet de la pyramide FIG. 4.14) qui est envoyée à la mémoire temporaire de synchronisation, et qui ne sert pas pour le filtrage. L'autre demi-rangée correspond à la rangée de l'avant-dernière sous-bande calculée indexée par $(n - t_M + 1)$.

REMARQUE 24 Le résultat reste vrai quel que soit l'ordre des opérateurs lifting.

c. Mémoire de filtrage pour N décompositions en schéma lifting

Dans le cas d'un schéma lifting appliqué sur N niveaux de décompositions, l'équation (4.4) et la remarque 24 nous permettent de définir le nombre d'emplacements mémoire nécessaire au stockage des données durant leur filtrage :

- pour une image originale de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$ ($j \in \mathbb{Z}$) :

$$\Lambda_{j-\frac{1}{2}}^F(N) = \left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M\right) \cdot N \cdot C_C + \frac{1}{2} \left\lceil \frac{3N}{2} \right\rceil C_C$$

- pour une image originale de résolution 2^{-j} ($j \in \mathbb{Z}$) :

$$\Lambda_j^F(N) = \left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M\right) \cdot N \cdot C_C + \frac{1}{2} \left\lceil \frac{3N}{2} \right\rceil C_C$$

4.1.2.2 Mémoire temporaire de synchronisation

La mémoire temporaire de synchronisation assure la cohérence spatiale entre les sous-bandes successives définies par la transformée. Le graphe FIG. 4.17 présente les lignes « cohérentes » de coefficients pour une décomposition par schéma lifting sur six niveaux de résolutions. Le traitement de la cohérence spatiale regroupe les lignes de coefficients définissant la même zone de données à des résolutions différentes. L'information envoyée au codeur va être agencée de manière à regrouper toutes les lignes cohérentes de chaque sous-bande. La taille de la mémoire de synchronisation dépend du délai nécessaire à la définition de chacune de ces lignes. Les données vont être stockées dans cette mémoire avant de pouvoir être envoyées au codeur.

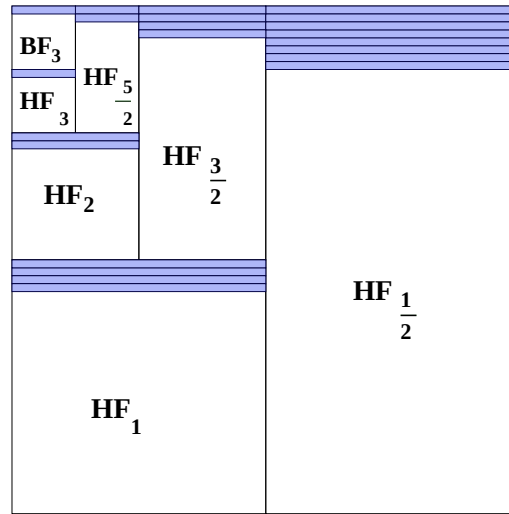


FIG. 4.17 – Graphe représentant la cohérence spatiale entre les lignes des différentes sous-bandes d'une transformée en ondelettes quinconce

a. Image originale échantillonnée sur une grille quinconce (cas des images SPOT5) et de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$

Définissons par $s_{j-\frac{1}{2}}$ l'image originale. Les différentes rangées des sous-bandes haute fréquence et la sous-bande basse fréquence, obtenues pour N décompositions, sont stockées dans la mémoire de synchronisation. Afin d'assurer la cohérence spatiale, la mémoire de synchronisation doit pouvoir stocker une ligne de $s_{j+\frac{N-1}{2}}$, une de $d_{j+\frac{N-1}{2}}$, deux de $d_{j+\frac{N-2}{2}}$, 2^n lignes de $d_{j+\frac{N-n}{2}}$ et ainsi de suite jusqu'à 2^{N-1} rangées de d_j . Une fois que toutes ces lignes sont enregistrées dans la mémoire tampon de synchronisation, elles sont envoyées au codeur. La mémoire qui leur était réservée peut être libérée. La synchronisation nécessite un espace plus large que l'espace réservé pour les lignes « cohérentes » entre elles. Elle doit pouvoir contenir toutes les rangées de chaque sous-bande calculées pendant le « délai » de synchronisation. La taille de la mémoire temporaire de synchronisation est au plus égale à la somme des délais pour le calcul d'une rangée de $s_{j+\frac{N-1}{2}}$ et d'une rangée de $d_{j+\frac{N-1}{2}}$ dans

chaque sous-bande :

$$\Lambda_{j-\frac{1}{2}}^S(N) = \left(\Delta_j(N-1) + \Delta_{j+\frac{1}{2}}(N-2) + \dots + \Delta_{j+\frac{N-n-1}{2}}(n) + \dots + \Delta_{j+\frac{N-2}{2}}(1) + 2 \right) C_C$$

Soit

$$\Lambda_{j-\frac{1}{2}}^S(N) = \left(2 + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta_{j+\frac{N-n-1}{2}}(n) \right) C_C$$

b. Image originale échantillonnée sur une grille carrée et de résolution 2^{-j} ($j \in \mathbb{Z}$)

Afin d'assurer la cohérence spatiale, la mémoire de synchronisation stocke les résultats de tous les calculs dans chaque sous-bande, jusqu'à l'obtention pour N décompositions, d'une ligne de $s_{J+\frac{N}{2}}$, une de $d_{j+\frac{N}{2}}$, deux de $d_{j+\frac{N-1}{2}}$, 2^n lignes de $d_{j+\frac{N-n}{2}}$ et ainsi de suite jusqu'à 2^{N-1} rangées de $d_{J+\frac{1}{2}}$.

La mémoire temporaire de synchronisation est définie par la somme des délais pour le calcul d'une rangée de $s_{J+\frac{N}{2}}$ et d'une rangée de $d_{j+\frac{N}{2}}$, dans chaque sous-bande :

$$\Lambda_j^S(N) = \left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}(N-1) + \Delta_{j+1}(N-2) + \dots + \Delta_{j+\frac{N-n}{2}}(n) + \dots + \Delta_{j+\frac{N-1}{2}}(1) + 2 \right) C_C$$

Soit

$$\Lambda_j^S(N) = \left(2 + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta_{j+\frac{N-n}{2}}(n) \right) C_C$$

4.1.2.3 Mémoire temporaire totale

La taille de la mémoire tampon requise par un schéma lifting quinconce au fil de l'eau est définie par la somme de la mémoire requise pour le filtrage et de la mémoire requise pour la synchronisation. Pour un schéma lifting appliqué à une image originale de résolution 2^{-j} ($j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$)

$$\Lambda_j(N) = \Lambda_j^F(N) + \Lambda_j^S(N)$$

4.1.3 Transformée en ondelettes quinconce au « fil de l'eau »

4.1.3.1 Mémoire temporaire de filtrage

La transformée en ondelettes rapide retourne deux sous-bandes basse et haute fréquence. Elle est mise en œuvre par un banc de filtres (h, g) à deux canaux. Les filtres h et g sont de longueur T_h et T_g . Pour obtenir une ligne de coefficients dans chaque sous-bande, nous devons appliquer le filtre h sur un ensemble de coefficients répartis sur T_h lignes, et le filtre g sur un ensemble de coefficients répartis sur T_g lignes. En conséquence, la mémoire tampon de filtrage doit stocker T lignes de données, avec

$$T = \begin{cases} T_h & \text{si } T_h \geq T_g \\ T_g & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application de N transformées successives nécessite la réservation de

$$\Lambda_{TO}^F(N) = T.N.C_C$$

zones mémoires.

4.1.3.2 Mémoire temporaire totale

L'espace mémoire global devant être alloué est défini par la somme de la mémoire temporaire de filtrage et de la mémoire de synchronisation. La mémoire de synchronisation est identique au cas du schéma lifting. Les deux implémentations réalisent un filtrage global identique, ainsi les délais de filtrage sont les mêmes.

La mémoire tampon requise pour l'application d'une transformée en ondelettes rapide est déterminée par :

$$\Lambda_j^{TO}(N) = \Lambda_{TO}^F(N) + \Lambda_j^S(N)$$

2^{-j} représente la résolution de l'image originale, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

4.1.4 Exemples pour des filtres connus

Les tailles des mémoires de filtrage, de synchronisation et des mémoires globales sont déterminées et comparées pour un ensemble de filtres bidimensionnels. L'ensemble des filtres testés est défini au chapitre 2. Le filtre (9,7) est plus performant lorsqu'il est implémenté en lifting. La taille des espaces mémoire de synchronisation ne dépend pas du type d'implémentation. En contre-partie, une implémentation en schéma lifting permet de réduire de manière significative la taille de la mémoire tampon à allouer lors de la phase de filtrage. Chrysafis et Ortega [19, 18] ont défini la mémoire nécessaire à l'étape de filtrage pour une implémentation lifting séparable au fil de l'eau. Pour un niveau de décomposition, nous arrivons à des tailles identiques lorsque l'image source est de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$ avec $j \in \mathbb{Z}$. Ces résultats signifient que le schéma lifting quinconce est aussi bien adapté à un codage au fil de l'eau qu'une transformée séparable. Néanmoins, l'introduction d'une résolution intermédiaire en quinconce, augmente le nombre de décompositions d'un facteur deux, aussi la transformée quinconce au « fil de l'eau » nécessite un espace mémoire plus important.

N	SL (2,2)	SL (4,2)	SL (6,2)	SL (9,7)	TOR (9,7)
1	$3,5C_C$	$6,5C_C$	$9,5C_C$	$5,5C_C$	$8,5C_C$
2	$7,5C_C$	$13,5C_C$	$19,5C_C$	$11,5C_C$	$18C_C$
4	$15C_C$	$27C_C$	$39C_C$	$23C_C$	$35C_C$
6	$22,5C_C$	$40,5C_C$	$58,5C_C$	$34,5C_C$	$52,5C_C$

TAB. 4.1 – Mémoire requise pour le *filtrage* par transformée en ondelettes rapide (TOR) et par schéma lifting (SL).

Xu, Li, Xiong et Zhang [126] proposent une méthode très efficace pour implémenter les filtres (9,7) de dimension un au « fil de l'eau ». Ils appliquent leur méthode pour le codage

N	SL (2,2)	SL (4,2)	SL (6,2)	SL (9,7)	TOR (9,7)
1	$2C_C$	$2C_C$	$2C_C$	$2C_C$	$2C_C$
2	$5C_C$	$7C_C$	$9C_C$	$7C_C$	$7C_C$
3	$21C_C$	$37C_C$	$53C_C$	$37C_C$	$37C_C$
4	$61C_C$	$115C_C$	$169C_C$	$115C_C$	$115C_C$

TAB. 4.2 – *Mémoire* requise pour le *synchronisation* suite à un filtrage au fil de l'eau par transformée en ondelettes rapide (TOR) et par schéma lifting (SL) (pour une image originale définie sur une grille d'échantillonnage carrée).

N	SL (2,2)	SL (4,2)	SL (6,2)	SL (9,7)	TOR (9,7)
1	$5,5C_C$	$8,5C_C$	$11,5C_C$	$7,5C_C$	$10,5C_C$
2	$12,5C_C$	$20,5C_C$	$28,5C_C$	$18,5C_C$	$25C_C$
4	$36C_C$	$64C_C$	$92C_C$	$60C_C$	$72C_C$
6	$83,5C_C$	$155,5C_C$	$227,5C_C$	$159,5C_C$	$167,5C_C$

TAB. 4.3 – *Mémoire* requise pour le *filtrage et la synchronisation* au fil de l'eau par transformée en ondelettes rapide (TOR) et par schéma lifting (SL) (pour une image originale définie sur une grille d'échantillonnage carrée).

de séquences vidéos, et définissent une transformée temporelle au « fil de l'eau ». Ils arrivent à économiser une trame de données, ce qui se résume dans le cadre d'une application à l'image à une rangée de données. Cependant, pour économiser de la mémoire, ils renoncent à exploiter la symétrie des filtres pour réduire le nombre d'opérations. En conséquence, leur méthode est 1,5 fois plus coûteuse en nombre d'opérations et en accès mémoire.

4.1.5 Gain de mémoire entre le schéma lifting et la transformée en ondelettes rapide

4.1.5.1 Gain de mémoire de filtrage

Pour les implémentations du schéma lifting et de la transformée en ondelettes au « fil de l'eau », le gain est déterminé par le rapport entre la taille de la mémoire tampon requise pour une TOR et pour son implémentation en lifting. La taille du filtre correspondant est défini par

$$T_F = 2 \sum_{i=1}^M t_i - 2M + 1$$

Le gain équivaut à

$$G_f = \frac{T_F \cdot N \cdot C_C}{\left(\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M + 1\right) \cdot N \cdot C_C}$$

soit

$$G_f = \frac{2 \sum_{i=1}^M t_i - 2M + 1}{\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M + 1}$$

$$G_f = 2 - \frac{t_1 + 1}{\frac{t_1}{2} + \sum_{k=1}^M t_k - M + 1}$$

	SL(2,2)	SL (4,2)	SL (6,2)	SL (9,7)
N=1	1,43	1,385	1,37	1,64
N=2	1,33	1,33	1,33	1,57

TAB. 4.4 – *Gain en mémoire temporaire de filtrage* pour une implémentation par transformée en ondelettes rapide par rapport à une implémentation en schéma lifting

4.2 Complexité du filtrage

4.2.1 Coût calcul

La théorie du schéma lifting stipule que l'implémentation d'une transformée en ondelettes 1D par schéma lifting est moins coûteuse qu'une implémentation par banc de filtres. Le gain théorique que nous avons mis en évidence en 2.5 accrédite ces propos. La méthode avancée à la section 2.2 associe à une certaine catégorie de filtres bidimensionnels non-séparables une implémentation en schéma lifting quinconce. Une des caractéristiques du lifting est de réduire la complexité du filtrage. De plus, le lifting utilise beaucoup moins de mémoire auxiliaire qu'une transformée en ondelettes usuelle du fait qu'il effectue des calculs sur place. Le calcul du gain en nombre d'opérations requises par une implémentation lifting des filtres (9,7) bidimensionnels est développé dans la section 2.2. Une implémentation par banc de filtres effectue 3,75 fois plus d'opérations que l'implémentation lifting. L'intérêt d'une telle réduction n'est pas minime. La transformée en ondelettes rapide par banc de filtres bidimensionnels séparables est souvent préférée au filtrage par banc de filtres bidimensionnels non-séparables. Deux raisons majeures en sont la cause. La première raison se déduit du fait que la transformée en ondelettes non-séparable est plus complexe à mettre en œuvre et son exploitation requiert un nombre d'opérations plus important. La deuxième concerne les applications au codage d'image. Les images numériques reproduisant des scènes de la vie courante, sont très corrélées à la fois dans les domaines spatial et fréquentiel. La transformée en ondelettes permettant de décorrélérer l'information spatiale et fréquentielle est un bon atout. Elle va permettre de transmettre au codeur un signal décorrélé et concentrer l'énergie sur un petit nombre de coefficients. Les corrélations spatiales d'une grande partie des signaux numériques sont dirigées principalement sur les axes vertical et horizontal. La particularité de la transformée en ondelettes séparable est justement de privilégier ces axes. Elle est plus adaptée à l'image qu'une transformée isotrope ou sans être isotrope une simple transformée quinconce. L'intérêt majeur d'une implémentation

lifting quinconce est de faire tomber la première barrière. En effet, la transformée en ondelettes (9, 7) séparables est mise en œuvre par l'application des filtres (9, 7) en dimension un sur les lignes puis sur les colonnes. Son application requiert $C_{(9,7)}^+$ additions et $C_{(9,7)}^*$ multiplications, soit un total de $C_{(9,7)}^T$ par pixel.

$$C_{(9,7)}^+ = \frac{2 * C_{(9,7)1D}^+ + C_{(9,7)1D}^+ + C_{(9,7)1D}^+ + 0}{\text{Nombre total de sous-bandes}} = C_{(9,7)1D}^+ = (8 + 6)$$

$$C_{(9,7)}^* = \frac{2 * C_{(9,7)1D}^* + C_{(9,7)1D}^* + C_{(9,7)1D}^* + 0}{\text{Nombre total de sous-bandes}} = C_{(9,7)1D}^* = (4 + 5)$$

Soit

$$C_{(9,7)}^+ = 14 \quad C_{(9,7)}^* = 9$$

$$C_{(9,7)}^T = 23$$

$C_{(9,7)1D}^+$ et $C_{(9,7)1D}^*$ représentent les nombres d'additions et de multiplications requis pour le filtrage d'un point à l'aide du (9,7) en dimension un (sans tenir compte du sous-échantillonnage). $C_{(9,7)}^+$ et $C_{(9,7)}^*$ représentent, quant à eux, les nombres d'additions et de multiplications par pixel pour le filtrage d'une image par banc de filtres séparables. La division par le nombre de sous-bandes dans le calcul est due à l'implémentation qui prend en compte le sous-échantillonnage. En effet, lors du filtrage la moitié des points de chaque sous-bandes va être jeté, il est donc inutile de calculer les valeurs qui doivent être jetées immédiatement après. Ainsi, le sous-échantillonnage est effectué lors du filtrage et les filtres h et g ne sont appliqués que sur la moitié des pixels de l'image. La comparaison du nombre d'opérations requises pour une transformée séparable et non-séparable ne peut se faire que pour une transformée aboutissant à un même changement d'échelle. Le facteur de résolution entre une image et son approximation basse résolution obtenue suite à l'application d'une transformée en ondelettes non-séparable est de 2. Le facteur de résolution de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable est de $\sqrt{2}$ dans le cadre étudié. L'obtention d'une image et de son approximation à résolution deux fois plus petite résulte de l'application d'une transformée en ondelettes bidimensionnelle sur deux niveaux de résolution. Ainsi, le nombre d'opérations par pixel pour une transformée sur deux niveaux de résolution $\sqrt{2}$ (équivalent à une transformée avec un facteur de résolution 2) est de

$$C_{LS(9,7)}^T(j=2) = C_{LS(9,7)}^T + \frac{C_{LS(9,7)}^T}{2} = 16,5 \text{ op. / pixel}$$

pour le filtre (9, 7) lifting quinconce, et de

$$C_{2D(9,7)}^T(j=2) = C_{(9,7)}^T + \frac{C_{(9,7)}^T}{2} = 59,25 \text{ op. / pixel}$$

pour la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable. Le nombre d'opérations mises en œuvre par la transformée bidimensionnelle non séparable est comme annoncé, bien plus onéreuse que la transformée 2D séparable. Et, c'est une des raisons, qui fait que cette dernière est souvent privilégiée. L'implémentation en schéma lifting de la transformée

non-séparable la rend plus compétitive à ce niveau. De plus elle requiert moins d'opérations par pixel que la transformée séparable. Le lifting fait donc tomber une des barrières qui le rendait peu attractif du point de vue codage. Bien sûr, le codage par transformée séparable peut également bénéficier d'une implémentation sous forme lifting, grâce à l'application du schéma sur chaque ligne de l'image puis sur chaque colonne des deux sous-images obtenues, mais la différence reste minime, essentiellement dans le cas de filtres symétriques.

Filtres 2D	TOR séparable	SL séparable	TOR non-séparable	SL non-séparable
(9,7)	23	14	59,25	16,5
(2,2)	11	6	33	7,5
(4,2)	17	11	41,25	18
(6,2)	23	12	79,5	35,25

TAB. 4.5 – Nombre d'opérations arithmétiques requises pour l'implémentation d'une transformée rapide en ondelettes bidimensionnelles avec différents bancs de filtres et leur forme équivalente en lifting.

4.2.1.1 Discussion en vue d'une implémentation matérielle

L'implémentation *hardware* des opérateurs lifting et plus généralement des filtres d'ondelettes pose un nouveau type de problème. La question n'a pas fait l'objet d'une étude, mais elle est d'un grand intérêt pour la sélection de filtres. Les aspects matériel et logistique doivent être étudiés avec précautions surtout en ce qui concerne les codeurs embarqués à bord d'un satellite qui utilisent un minimum de composants et sont simples et efficaces. La complexité du filtrage ne se base pas seulement sur le nombre d'opérations par pixel. Elle varie en fonction de la dynamique, et du type de coefficients codés. Les opérations élémentaires sur les entiers n'ont pas le même coût que sur les flottants. En effet, le rapport entre le nombre de cycles³ requis pour une opération en point flottant et une opération en point fixe peut monter, pour certains processeurs, jusqu'à un facteur 100. Les opérations en point fixe se font en considérant les nombres comme des entiers. Pour coder des nombres réels comme des entiers, il est indispensable de prédéterminer les nombres de points avant et après la virgule. Ce qui réduit le nombre de possibilités de codage et requiert une mémoire assez importante pour éviter de faire des approximations trop importantes, amenant des résultats bien loin de la théorie. La troncature des filtres (9,7) engendre un filtre légèrement différent, qui n'est plus optimal, ainsi les résultats seront toujours moins bons pour une implémentation *hardware*. Pour la transformée en ondelettes par banc de filtres classique la reconstruction n'est plus exacte. Les filtres des transformées avant et inverse sont tous tronqués et ne vérifient plus le théorème de la reconstruction parfaite de Vetterli [118, 119] (théorème 5). Ce phénomène disparaît pour une transformée par lifting, car ce sont les mêmes opérateurs tronqués qui sont appliqués en analyse et en synthèse. Ainsi les opérateurs lifting tronqués assurent toujours la reconstruction exacte. L'erreur proviendra de la troncature des coefficients des images résultantes. Les opérateurs lifting

³La complexité n'est plus évaluée en terme d'opérations arithmétiques, mais en terme de cycles machine.

tronqués feront aussi chuter les performances car eux aussi ne correspondent plus à une transformée en ondelettes par filtrage (9,7). Mertès a étudié les conséquences que pouvaient engendrer une troncature des filtres sur leurs propriétés et leurs performances [75]. Siohan et Benslimane ont défini des filtres numériques bidimensionnels de précision finie [104]. Pinchon [89] a construit des filtres à deux sous-bandes en précision finie sur des structures factorisées en treillis. Siohan a déterminé l'ensemble des erreurs liées à des coefficients des filtres numériques tronqués [103], et notamment mesuré la dégradation au niveau de la réponse fréquentielle.

Les coefficients des filtres $(2, 2)$, $(4, 2)$ et $(6, 2)$ sont des nombres rationnels avec un entier quelconque au numérateur et une puissance de deux au dénominateur. Une multiplication avec un des coefficients met en œuvre une multiplication avec un entier (numérateur) et un décalage de n bits dans les registres du processeur, où n est la puissance de deux du numérateur. Le décalage est exécuté dans le même cycle que la multiplication, et n'entraîne aucun surcoût. Les filtres ne seront pas tronqués et conserveront toutes leur propriétés. Aussi, les filtres du type $(2, 2)$, $(4, 2)$ et $(6, 2)$ sont à préférer au filtres à coefficients réels. Ils sont moins coûteux et n'ont pas besoin d'être tronqués.

4.3 Conclusion

Le schéma lifting quinconce garantit une implémentation plus efficace de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable. Nous proposons une implémentation du schéma lifting quinconce au « fil de l'eau ». Elle permet une économie de mémoire de filtrage assez importante. La transformée en ondelettes séparable implémentée au « fil de l'eau » procure de biens meilleurs résultats. La transformée non-séparable est deux fois plus fine en résolution. L'introduction de résolutions intermédiaires décuple le nombre de décompositions et entraîne une augmentation de la taille de la mémoire tampon nécessaire au filtrage. En outre, l'implémentation de la transformée en ondelettes non-séparable par schéma lifting réduit le nombre d'opérations arithmétiques requises pour le filtrage. Nous avons mis en évidence le gain, entre une implémentation lifting et une implémentation par bancs de filtres. L'implémentation lifting est définie par la méthode de « factorisation » énoncée au chapitre 2.2. Le nombre d'opérations arithmétiques est réduit de manière significative par une implémentation en lifting. La complexité du filtrage était jusqu'alors un facteur discriminant, face à la simplicité d'implémentation de la transformée en ondelettes séparable. L'implémentation par schéma lifting révèle des coûts calcul permettant à la transformée non-séparable de venir concurrencer la transformée séparable. Les avantages qu'offre une implémentation de la transformée en ondelettes quinconce par schéma lifting sont très importants au niveau de l'implémentation.

Chapitre 5

Évaluation du lifting en terme de qualité

La valorisation des méthodes de compression dépend de la justification théorique, de la simplicité de l'implémentation et de la qualité des résultats. En terme de filtrage, le schéma lifting quinconce garantit une implémentation plus efficace de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable. Les derniers résultats confirment les gains au niveau de la complexité. En outre, la taille de l'espace mémoire nécessaire à l'exécution d'un filtrage au fil de l'eau peut être réduit par une implémentation de la transformée en lifting. Ces différents points induisent une revalorisation de la transformée en ondelettes non-séparable. La différence de complexité entre transformées séparables et non-séparables subsiste, toutefois nous avons démontré que le rapport entre les performances de chacune est fortement réduit par une implémentation en schéma lifting. Une étude qualitative des filtres exploités en lifting quinconce et de ceux définis par les méthodes d'optimisation permettrait de fixer l'intérêt du schéma lifting quinconce et de définir le type d'applications où il doit être employé. La suite de ce chapitre présente une évaluation du schéma lifting quinconce dans le cadre de la compression d'image satellite haute résolution, et dans un cadre plus ordinaire.

5.1 Présentation des codeurs exploités

Cette introduction a pour but de présenter les codeurs exploités dans nos applications. Les filtres lifting quinconce sont associés au codeur EBWIC (versions alpha et bêta) développé par Parisot [81, 83]. Les filtres seront comparés entre eux et appliqués à un même codeur. Afin d'évaluer les performances du codeur et des filtres, nous fournirons à titre comparatif les résultats obtenus par JPEG2000 dans certaines de nos applications.

5.1.1 JPEG2000 (Joint Picture Expert Group 2000)

Dans la norme JPEG2000 [124, 123, 17], seul l'algorithme de décodage est normalisé, le codage est donné à titre d'information. La norme JPEG2000 s'adapte au décodage progressif des images, au codage-décodage sans pertes et doit permettre un traitement « au

fil de l'eau » de l'information. Une chaîne de codage type, compatible avec JPEG2000, est composée :

- d'une transformée en ondelettes (mise en œuvre soit par les filtres (9,7) de Daubechies pour la compression avec pertes, soit par les filtres (5,3) de LeGall¹ pour la compression sans pertes [40]),
- d'une quantification scalaire uniforme (dans le cas d'un codage sans perte, le pas de quantification est égal à un et la quantification est exécutée après une transformée en ondelettes définie dans $\mathbb{Z}$)
- et d'un codage. Le codeur le plus utilisé par JPEG2000 est le codeur EBCOT (Embedded Block Coding with Optimized Truncation) développé par Taubman [115].

Pour préciser l'action du codeur, EBCOT regroupe les coefficients en blocs rectangulaires, appelés *codeblocs*. Les coefficients de chaque *codebloc* sont rangés en plans de bits (en allant du bit de poids le plus fort vers le bit de poids le plus faible). Chaque plan de bits est codé en trois passes successives, une passe de propagation significative, une d'affinage et une de nettoyage. Les trois passes de codage correspondent à des paliers progressifs de qualité dans chaque codebloc. Elles visent à générer un algorithme progressif, le train binaire pouvant être tronqué à la fin de chaque passe. Les séquences obtenues suite à chacune des passes vont être traitées par un codeur arithmétique adaptatif avec contexte. Le codeur utilise les informations contextuelles (délivrées par les trois passes) pour générer un train binaire, découpé en différentes couches affinant la qualité pour une meilleure *scalabilité*. Les données compressées sont ensuite organisées en paquets de taille paramétrable. La création des couches et des paquets se fait à l'aide d'un algorithme d'allocation de débit qui permet de récupérer l'information utile dans tous les paquets. L'ordre dans lequel sont disposés les paquets dans le train binaire définit le type de progression désiré soit par résolution (*scalabilité* en résolution), soit par couches (*scalabilité* en qualité).

5.1.2 EBWIC

Le codeur EBWIC, développé par Parisot [81, 83], se base sur les méthodes d'allocation de débit. Le codage débute suite à l'application d'une transformée en ondelettes sur les données sources. Le principe de l'allocation est de définir les pas de quantification optimaux pour chaque sous-bande image de manière à optimiser le compromis débit-distorsion. La méthode développée dans EBWIC est basée modèle. L'algorithme d'allocation modélise la densité de probabilité du signal de coefficients d'ondelettes par une loi de distribution de manière à permettre un développement analytique. Chaque sous-bande haute fréquence est considérée comme une source de densité de probabilité gaussienne généralisée f_X .

$$f_X(x) = ae^{-|bx|^\alpha}$$

avec $a = \frac{b\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}$ et $b = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}}$, où σ désigne l'écart-type de la source, et α le paramètre de forme de la gaussienne généralisée f_X . L'algorithme d'allocation évalue la variance et le paramètre de forme, pour ensuite rechercher de manière théorique les quantificateurs

¹Le banc de filtres (5,3) de LeGall est identique aux opérateurs lifting (2,2) obtenu par les méthodes d'interpolation. Le (5,3) est identifié par la longueur des filtres passe-bas et passe-haut correspondants et le (2,2) est identifié par la longueur des pas lifting.

scalaires optimaux. Suite à l'allocation, la quantification scalaire uniforme est appliquée avec les pas optimaux qui lui sont transmis. Le codeur utilisé par la suite est composé du codeur par plages de zéros (*run length*) et du codeur de Huffman (définis au chapitre 1.1.2).

Dans sa version bêta, le codeur EBWIC, implémente un quantificateur scalaire uniforme avec *deadzone*. Les codeurs *run length* et de Huffman sont remplacés par EBCOT.

5.2 Évaluation de la distorsion de reconstruction (associée aux algorithmes d'allocations débit)

Les méthodes usuelles d'allocation de débit (comme celle présentée dans EBWIC) minimisent l'erreur quadratique de reconstruction (où la distorsion), afin de déterminer les pas de quantification optimaux et obtenir le meilleur rapport débit-distorsion. La plupart de ces algorithmes apparaissent dans la chaîne de compression, suite à l'application de la transformée en ondelettes. Ils définissent la distorsion globale comme la somme des distorsions dans chacune des sous-bandes (5.1), pondérées par le rapport entre la taille de la sous-bande considérée et la taille du signal original. Cette évaluation de la distorsion suppose que la transformée respecte la propriété de conservation de l'énergie. Cette hypothèse se vérifie dans le cas de filtres orthogonaux, mais non pour les filtres biorthogonaux.

$$D(x, \bar{x}) = \frac{1}{2J} D(s_{J/2}, \bar{s}_{J/2}) + \sum_{j=1}^J \frac{1}{2j} D(d_{j/2}, \bar{d}_{j/2}) \quad (5.1)$$

La distorsion dépend de l'opération de reconstruction et donc du banc de filtres $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ réalisant la transformée en ondelettes inverse. Nous allons donner une formulation de cette distorsion pour une transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable. Les filtres considérés sont supposés biorthogonaux. Usevitch [116] donne une estimation de la distorsion dans le cas des transformées unidimensionnelle et bidimensionnelle séparable.

Dans le cas de la transformée en ondelettes bidimensionnelle non séparable, la distorsion est d'abord définie pour une seule décomposition en ondelettes, puis pour L décompositions successives. Une transformée en ondelettes appliquée sur un seul niveau de décomposition génère deux sous-bandes : une basse fréquence et une haute fréquence. L'estimation de l'erreur dans chacune des sous-bandes dépend du pas de quantification attribué par l'algorithme d'allocation de débit. Définissons par ε_s et ε_d les images d'erreurs introduites par la quantification dans chacune des sous-bandes. L'erreur globale ε est déterminée par l'application de la transformée en ondelettes inverse aux images d'erreur ε_s et ε_d . Ainsi, $\forall n = (n_x, n_y) \in S_0$ ($S_0 = [1, \dots, M] \times [1, \dots, N]$ correspond au support de l'image à une résolution 2^{-K} , et $S_{\frac{l}{2}}$ le support de l'image à la résolution $2^{-K-\frac{l}{2}}$, $l \in \mathbb{Z}$), M et N représentent les nombres de lignes et de colonnes de l'image source :

$$\begin{aligned} \varepsilon[n_x, n_y] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[(n_x, n_y) - L(k)] \varepsilon_s[k] \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}[(n_x, n_y) - L(k) - (1, 0)] \varepsilon_d[k] \end{aligned}$$

L'erreur quadratique moyenne (MSE) est définie par :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{MN} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} E(\varepsilon^2[n])$$

Le développement du MSE entraîne :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{MN} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} E \left[\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[n - L(k)] \varepsilon_s[k] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}[n - L(k) - (1, 0)] \varepsilon_d[k] \right)^2 \right]$$

Soit,

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 = & \frac{1}{MN} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} E \left[\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[n - L(k)] \varepsilon_s[k] \right)^2 \right] \\ & + \frac{2}{MN} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} E \left[\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[n - L(k)] \varepsilon_s[k] \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}[n - L(k) - (1, 0)] \varepsilon_d[k] \right) \right] \\ & + \frac{1}{MN} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} E \left[\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}[n - L(k) - (1, 0)] \varepsilon_d[k] \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 = & \frac{1}{MN} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[n - L(k)] \tilde{h}[n - L(l)] E\{\varepsilon_s[k] \varepsilon_s[l]\} \right) \\ & + \frac{2}{MN} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}[n - L(k)] \tilde{g}[n - L(l) - (1, 0)] E\{\varepsilon_s[k] \varepsilon_d[l]\} \right) \\ & + \frac{1}{MN} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}[n - L(k) - (1, 0)] \tilde{g}^{(0)}[n - L(l) - (1, 0)] E\{\varepsilon_d[k] \varepsilon_d[l]\} \right) \end{aligned}$$

L'évaluation de cette fonction est assez complexe. Afin de simplifier les calculs, nous faisons deux hypothèses sur les images d'erreur ε_s et ε_d .

1. Les images ε_s et ε_d sont mutuellement décorrélées, ainsi $E[\varepsilon_s \varepsilon_d] = 0$.
2. Les images ε_s et ε_d correspondent à un bruit blanc, et vérifient :

$$\begin{cases} E\{\varepsilon_s[k] \varepsilon_s[l]\} = \sigma_{\varepsilon_s}^2 & \forall k \in S_{\frac{1}{2}} \\ E\{\varepsilon_s[k] \varepsilon_s[l]\} = 0 & \forall k \neq l, k \text{ et } l \in S_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} E \{ \varepsilon_d[k] \varepsilon_d[l] \} = \sigma_{\varepsilon_d}^2 & \forall k \in D_{\frac{1}{2}} \\ E \{ \varepsilon_d[k] \varepsilon_d[l] \} = 0 & \forall k \neq l, k \text{ et } l \in D_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

La définition de l'erreur quadratique moyenne se simplifie par :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{h}^2[n] \sigma_{\varepsilon_s}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tilde{g}^2[n] \sigma_{\varepsilon_d}^2$$

Les supports $S_{\frac{1}{2}}$ et $D_{\frac{1}{2}}$ de ε_s et ε_d sont deux fois plus petits que le support de ε de taille MN , le rapport entre la taille de la sous-bande considérée et la taille de l'image originale pondère la variance de la sous-bande. Ce rapport est égal à $\frac{1}{2}$. Soit

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\|\tilde{h}\|^2}{2} \sigma_{\varepsilon_s}^2 + \frac{\|\tilde{g}\|^2}{2} \sigma_{\varepsilon_d}^2$$

La distorsion correspondant à la MSE, évaluée pour un niveau de décomposition, est définie par la somme pondérée des distorsions dans les sous-bandes.

$$D(x, \bar{x}) = \frac{\|\tilde{h}\|^2}{2} D\left(s_{K+\frac{1}{2}}, \bar{s}_{K+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\|\tilde{g}\|^2}{2} D\left(d_{K+\frac{1}{2}}, \bar{d}_{K+\frac{1}{2}}\right)$$

La distorsion, évaluée pour L décompositions en ondelettes, est déterminée par la somme pondérée des distorsions dans les sous-bandes :

$$D(x, \bar{x}) = \frac{\|\tilde{h}\|^{2L}}{2^L} D\left(s_{K+\frac{L}{2}}, \bar{s}_{K+\frac{L}{2}}\right) + \sum_{l=1}^L \frac{\|\tilde{h}\|^{2(l-1)} \|\tilde{g}\|^2}{2^l} D\left(d_{K+\frac{l}{2}}, \bar{d}_{K+\frac{l}{2}}\right) \quad (5.2)$$

Les facteurs 2^l , pour $l \in \{1, \dots, L\}$, sont définis par le rapport entre la taille du support de la sous-bande considérée et la taille du support de l'image source.

Dans le cadre du schéma lifting quinquonce, $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ peuvent être définis rapidement à l'aide des formules (2.5), (2.6), et (2.7). La distorsion est obtenue de la même façon, en appliquant l'équation (5.2).

REMARQUE 25 *L'erreur de quantification ne correspond pas réellement à un bruit blanc. L'hypothèse est cependant très utilisée et permet de fournir pour chaque banc de filtres biorthogonaux existants des pondérations optimales pour l'évaluation de la distorsion globale en fonction des distorsions dans les sous-bandes. Ces pondérations sont optimales pour les filtres $(\tilde{h}, \tilde{g})$, dans le cas où elles doivent être indépendantes du signal. Pour une estimation plus précise, il faudrait définir des pondérations non seulement en fonction des filtres mais du signal. Le résultat rendrait trop complexe l'évaluation et l'optimisation du critère d'allocation de débit, et l'algorithme deviendrait peu flexible. L'erreur commise sur les pondérations est négligeable. Gersho et Gray [41] définissent les limitations liées aux hypothèses. Parmi les limitations, nous incluons notre méthode de synthèse d'opérateurs*

lifting (version 2), présentée en 3.7, où justement la définition du rapport entre les coefficients des filtres repose sur l'évaluation des corrélations entre les échantillons d'un même signal.

5.3 Application du schéma lifting quinconce au codage non-conservatif

5.3.1 Introduction

Les performances du schéma lifting quinconce et des divers filtres développés dans la section 2.2.5 sont maintenant exposées. Les performances au niveau implémentation ont déjà fait l'objet d'une étude. Les différents filtres lifting vont être confrontés et évalués en terme de qualité. Les critères objectifs (PSNR, MSE, ..) et subjectifs (qualité visuelle), donnant une mesure de la qualité, vont venir appuyer le principe du schéma lifting quinconce tout en donnant les limites du filtrage. L'étude présentée s'est faite dans le cadre de la compression allant des hauts aux bas débits. Nous développerons deux types d'applications.

- Compression moyen et bas débits : les performances des différents filtrages en lifting sont évaluées pour différents types d'images. Nous limiterons notre étude à quelques images types.
 - L'image GOLDHILL représente un modèle d'image bruitée avec peu de zones de contours. Une image de type GOLDHILL est souvent destinée à la compression bas débit.
 - L'image CAFÉ2 est une image très peu bruitée contenant beaucoup de zones de discontinuités. Elle est de bonne qualité au niveau de la définition.
 Toutes les images étudiées sont initialement représentées sur des grilles d'échantillonnage carré.
- Compression à haut et très haut débits : L'évaluation des performances du schéma lifting quinconce a initialement fait l'objet d'une étude en collaboration avec le Centre National d'Étude Spatiale (CNES). Les images testées sont des images satellites. Elles ont la particularité d'être codées sur 10 bits et d'être acquises directement sur une grille d'échantillonnage quinconce. Le cadre de cette étude est détaillé au paragraphe 5.3.2.

5.3.2 Cadre de l'étude des images haute résolution

Dans le cadre de l'imagerie satellitaire, émergent des systèmes d'acquisition basés sur les grilles d'échantillonnage quinconce. Le satellite d'observation de la terre, SPOT5 (CNES), lancé le 4 mai dernier, retourne des images échantillonnées sur une grille quinconce. Le système d'acquisition des images se compose de deux barrettes de capteurs CCD. Les deux barrettes sont disposées de manière parallèle dans la direction perpendiculaire au déplacement du satellite. Le décalage spatial entre les deux barrettes est de 0.5 pixel sur l'axe parallèle aux barrettes, et de $n + 0.5$ pixels ($n \in \mathbb{N}$) sur l'axe perpendiculaire, soit dans la direction parallèle au déplacement du satellite. La valeur n doit être la plus petite possible afin de minimiser les erreurs dues à l'instabilité du satellite, mais elle ne peut pas

être inférieure à 3 pour des raisons purement technologiques. Ce système d'acquisition n'est pas seulement utilisé sur des satellites. La compagnie allemande LH Systems exploite la technologie de la double barrettes SPOT5 pour une utilisation aéroportée [50]. L'apparition de la double barrettes est liée à la Fonction de Transfert de Modulation (FTM) du système optique des satellites, équipés d'instruments CCD. La FTM correspond à un filtre passe-bas. Son support fréquentiel peut être approximé par le support fréquentiel de la grille de sous échantillonnage quinconce [60, 96]. Le système de double barrettes CCD fournit

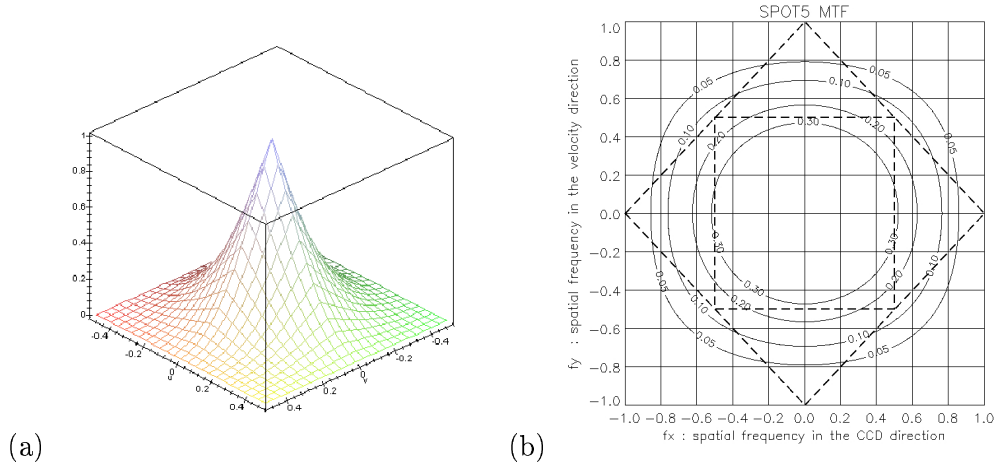


FIG. 5.1 – Figures du CNES (a) représente la fonction de transfert de modulation FTM et (b) les courbes de niveaux de la FTM. Le carré représente l'échantillonnage dyadique séparable, il est inscrit dans le support de l'échantillonnage quinconce (carré ayant subi une rotation de 45 degré). La FTM est négligeable à l'extérieur du support quinconce, mais elle prend des valeurs non négligeables entre le support quinconce et le carré. Le support quinconce est celui qui approxime le mieux celui de la FTM.

une grille d'échantillonnage plus dense avec un support fréquentiel optimal pour ce schéma d'acquisition [61]. Chaque barrette de capteurs CCD génère une image échantillonnée sur une grille carrée. Malheureusement, SPOT5 utilise une méthode de compression embarquée basée sur une DCT, qui pour des raisons de simplicité, traite les deux images séparément. L'inconvénient d'un tel procédé émane du fait que la dépendance pixelique entre les deux images n'est pas considérée. La méthode optimale pour réduire les redondances entre les deux images est de traiter l'image quinconce formée par l'ensemble des deux barrettes à l'aide d'un codeur adapté à ce type d'échantillonnage.

Dans ce cadre et afin de succéder à SPOT5, des études ont été menées sur le développement d'un compresseur embarqué adapté aux images échantillonnées sur grille quinconce. De plus, l'utilisation de la transformée en ondelettes à la place de la DCT conduit à une amélioration significative de la qualité des images. En conséquence, les études portant sur la compression de données spatiales se dirigent vers les ondelettes et plus particulièrement, vers le schéma lifting. En effet, le schéma lifting est plus adapté à la compression d'images à bord du satellite, puisque les méthodes de codage se développent sur des contraintes de faible complexité. En outre, le lifting offre la possibilité de traiter des coefficients entiers pour la compression sans perte [42].

5.3.2.1 Implémentation au fil de l'eau

La compression à bord du satellite est très coûteuse en énergie. Les algorithmes de compression doivent être les plus simples et les plus rapides possibles. Les lignes images définies par le système d'acquisition sont traitées dès réception et retransmises à la terre. Les images ne sont pas enregistrées intégralement dans la mémoire placée à bord du satellite. L'image est traitée au cours de son acquisition. Les performances des différents filtres sont présentées au chapitre 4.1. Le système d'acquisition est composé de deux barrettes CCD, décalées de 0.5 pixel sur l'axe parallèle aux barrettes, et de $n + 0.5$ pixels ($n \in \mathbb{N}$) sur l'axe perpendiculaire. Le compresseur doit attendre d'acquérir $2n$ lignes images avant de pouvoir traiter des rangées d'informations successives. Les n premières lignes de la première barrette sont directement effacées, puisque la deuxième barrette ne pourra acquérir les lignes de 0.5 à $n - 0.5$. Les n premières lignes acquises par la deuxième barrette doivent être stockées en mémoire en attendant d'être traitées. La taille de la mémoire tampon de filtrage est augmentée de n rangées et la taille de la mémoire tampon de synchronisation reste inchangée.

5.3.2.2 Comparaison en terme de qualité

Dans le domaine de l'imagerie satellitaire, deux facteurs, outre le facteur qualité, s'avèrent décisifs dans la sélection de techniques de codage. Ces facteurs sont la complexité du codeur et la taille de l'espace mémoire nécessaire au codage. L'utilisation de filtres lifting apporte des améliorations notables dans les deux cas. Ces filtres sont, en effet, plus simples. La réduction du nombre d'opérations provient du fait que chaque pas lifting exploite les calculs effectués en amont. Le nombre d'opérations redondantes est alors réduit. En outre, le lifting est particulièrement adapté pour le traitement des informations au « fil de l'eau ».

Le schéma lifting quinconce permet une implémentation plus efficace de la transformée en ondelettes pour une certaine catégorie de filtres bidimensionnels non-séparables. Sur le plan de la qualité image, les deux formes d'implémentations offrent les mêmes performances, puisqu'elles opèrent un filtrage global identique. Nous allons néanmoins comparer les performances des différents filtres obtenus par la méthode d'extension développée au chapitre 2.2. Dans le cadre de notre application à l'imagerie satellitaire, les images sont codées par l'application des différentes transformées quinconce, suivie du codage par EBWIC comprenant une allocation de débit, une quantification scalaire et un codage de Huffman.

Les différents filtres comparés correspondent aux versions lifting quinconce des filtres (9,7), (4,2) et (6,2). Tous sont obtenus par la méthode, développée au chapitre 2.2, utilisant la transformée de McClellan. Les filtres (9,7) séparables demeurent parmi les filtres les plus performants. Ils présentent de bonnes propriétés, puisqu'ils sont à phase linéaire, le coefficient d'orthogonalité est proche de un et ainsi la norme des filtres est proche de 1. Les filtres (9,7) bidimensionnels présentent des propriétés similaires. La norme des filtres diffère légèrement mais reste assez proche de la valeur 1 [32]. Le banc de filtres (9,7) non-séparables est cependant moins performant que le banc de filtres (9,7) séparables pour des applications aux images naturelles. Ces images présentent de fortes corrélations spatiales et fréquentielles le long des axes verticaux et horizontaux, et les filtres séparables trai-

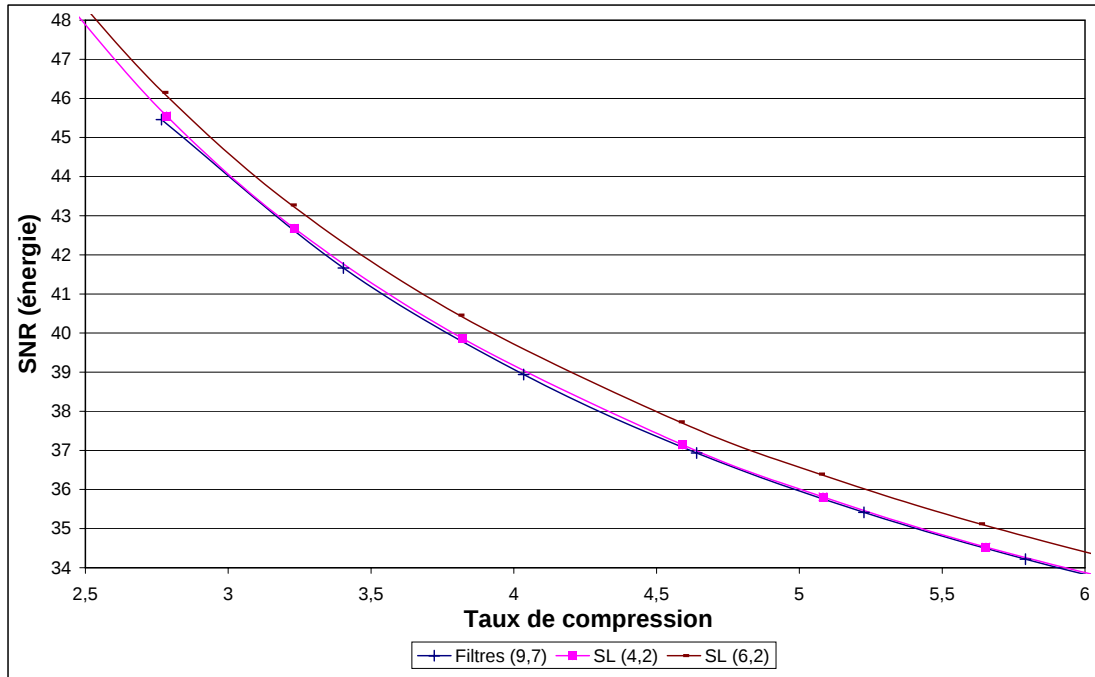


FIG. 5.2 – SNR en énergie en fonction du taux de compression pour l'image satellite MARSEILLE, la comparaison porte sur les différents opérateurs lifting quinconce obtenus à partir de la transformée de McClellan.

tant majoritairement de telles corrélations sont *a fortiori* plus adaptés à leur traitement. Les images satellite admettent des corrélations qui, en principe, ne présentent pas de direction privilégiée. Elles se prêtent davantage au développement de méthodes basées sur des transformations non-séparables. Différents opérateurs de schémas lifting quinconce sont appliqués à un ensemble d'images satellite directement acquises sur des grilles d'échantillonnage quinconce. La qualité des images restaurées, après les étapes de codage et décodage, est mesurée pour chaque image selon un critère objectif. Les résultats sont donnés, pour les images de MARSEILLE et de NICE, par les courbes définissant le SNR en énergie en fonction du taux de compression (FIG. 5.2) et (FIG. 5.3). Le lifting (4,2) a des performances identiques aux (9,7) non-séparables au niveau du rapport SNR en énergie sur le taux de compression, cependant il offre bien plus d'intérêts que les filtres (9,7). Son implémentation logicielle est légèrement plus gourmande en opérations et en mémoire auxiliaire, néanmoins il possède des atouts très importants pour une implémentation matérielle. Les coefficients des opérateurs (4,2) correspondent à des nombres entiers, divisés par des puissances de 2. Au niveau matériel, la multiplication par un coefficient du filtre se traduit par une multiplication par un entier et un décalage de n dans la représentation binaire (n étant la puissance de 2 divisant le coefficient). A contrario, les filtres (9,7) sont composés de coefficients définis en précision infinie. Pour une implémentation matérielle performante en terme de complexité, les coefficients sont tronqués, réduisant ainsi les performances du

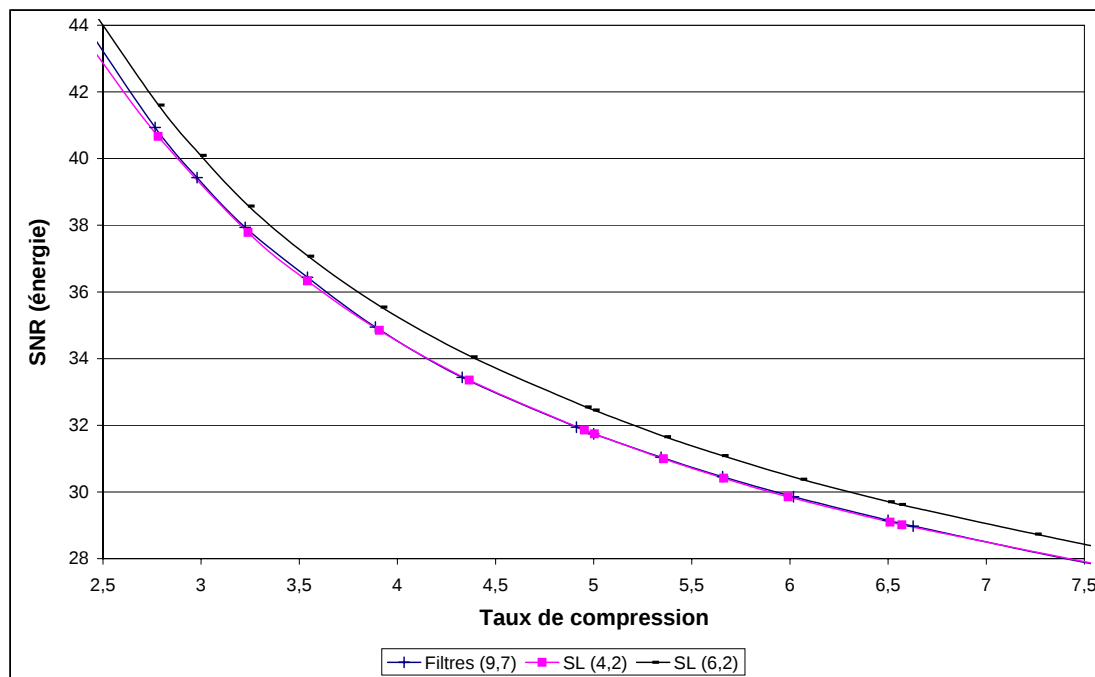


FIG. 5.3 – Représentation du SNR en énergie en fonction du taux de compression pour l'image satellite NICE. Ces courbes confrontent les différents opérateurs lifting quinconce obtenu à partir de la transformée de McClellan. (codeur employé : EBWIC).

filtrage. Le schéma lifting (6,2) bénéficie des mêmes qualités et facilités d'implémentation matérielle que le (4,2). Il requiert deux fois plus d'opérations que le (4,2) et le (9,7). Il est plus gourmand en espace mémoire, toutefois il reste nettement moins gourmand qu'un (9,7) quinconce implémenté par la TOR (voir TAB. 4.5). Du point de vue de la qualité SNR, l'utilisation du (6,2) entraîne un gain de 0,6 dB sur l'image MARSEILLE et de 0,7 dB sur l'image NICE (mesuré pour un taux de compression égal à 5). Le (6,2) permet en outre de rehausser la qualité visuelle obtenue avec les filtres (9,7). La figure (FIG. 5.4) donne un aperçu des résultats obtenus avec le lifting (6,2) et le (9,7) pour un taux de compression égal à 6. L'image donne une représentation de l'image NÎMES affectée par un zoom et un *sharpen*. Nous observons que le (9,7) génère des artefacts le long des contours du rond point, et lisse complètement la zone de texture dans le coin du bas et à gauche de l'image. Le (6,2) génère le même type d'erreurs sur certains contours, néanmoins elles sont bien moins visibles que celles générées par le (9,7). En résumé, le schéma lifting (9,7) est le plus performant en complexité pour une implémentation logicielle, le (4,2) est plus performant au niveau de la complexité de l'implémentation *hardware* et le schéma lifting (6,2) quinconce est celui qui offre la meilleure qualité à la fois selon les critères objectif et subjectif. Pour le codage d'un filtre sur un système embarqué, le choix s'oriente vers les schémas lifting (4,2) ou (6,2).

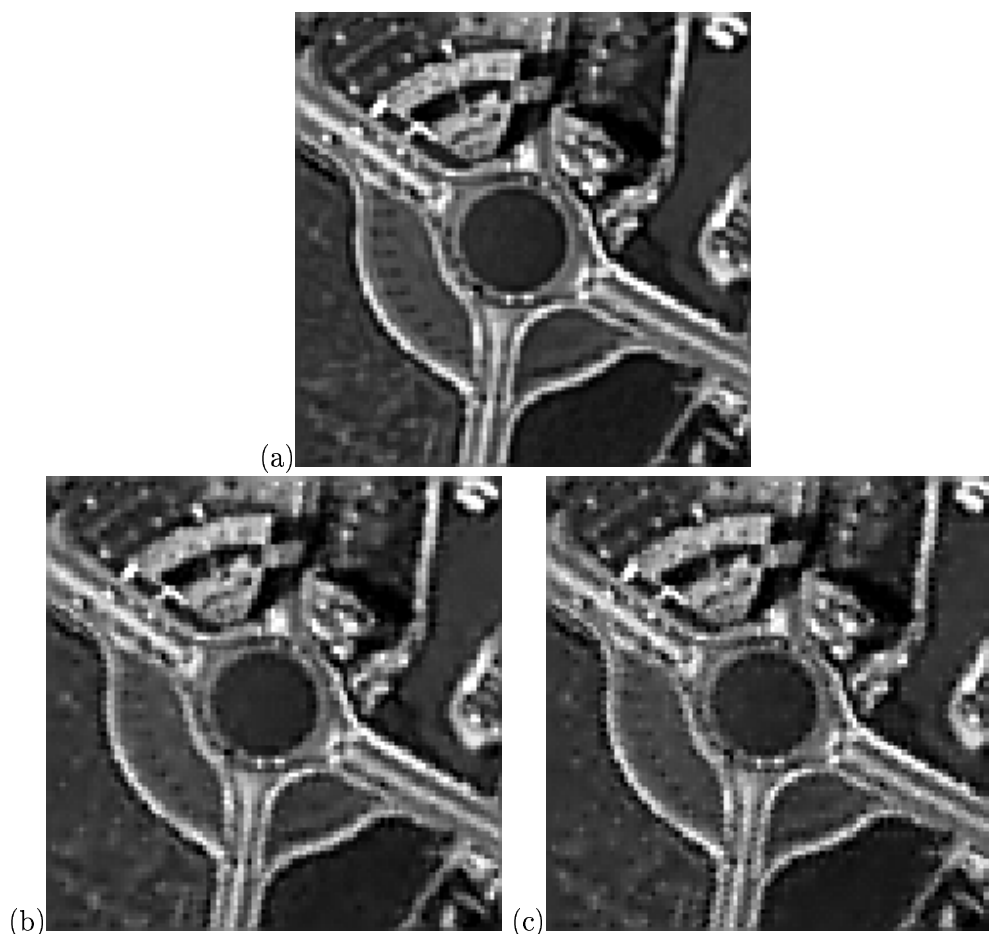


FIG. 5.4 – Comparaison visuelle sur l'image Nîmes quinconce (taux de compression de 6) pour des filtres lifting obtenus à partir de la transformée de McClellan : (a) image originale (b) Filtres lifting quinconce (6,2) (c) filtres quinconce (9,7).

5.4 Évaluation des méthodes d'optimisation

5.4.1 Définition du nombre de résolutions pour lesquelles le schéma lifting est optimisé

L'optimisation des opérateurs lifting définit un filtrage adapté aux propriétés statistiques de l'image. Plus exactement, les filtres sont spécifiés en fonction de l'autocorrélation des données sources. Les opérateurs, ainsi définis, sont adaptés aux propriétés statistiques de l'image source, mais pas forcément aux statistiques de ses approximations à plus faible résolution. La transformée en ondelettes est appliquée sur trois niveaux de résolution dans le cas séparable, soit six niveaux de résolution pour une transformée en ondelettes quinconce. La moyenne des approximations multirésolutions successives reste inchangée. Par contre la variance est modifiée, ainsi que les fonctions d'autocorrélations, néanmoins le rapport entre ces autocorrélations n'est que légèrement altéré (même image à des résolutions dif-

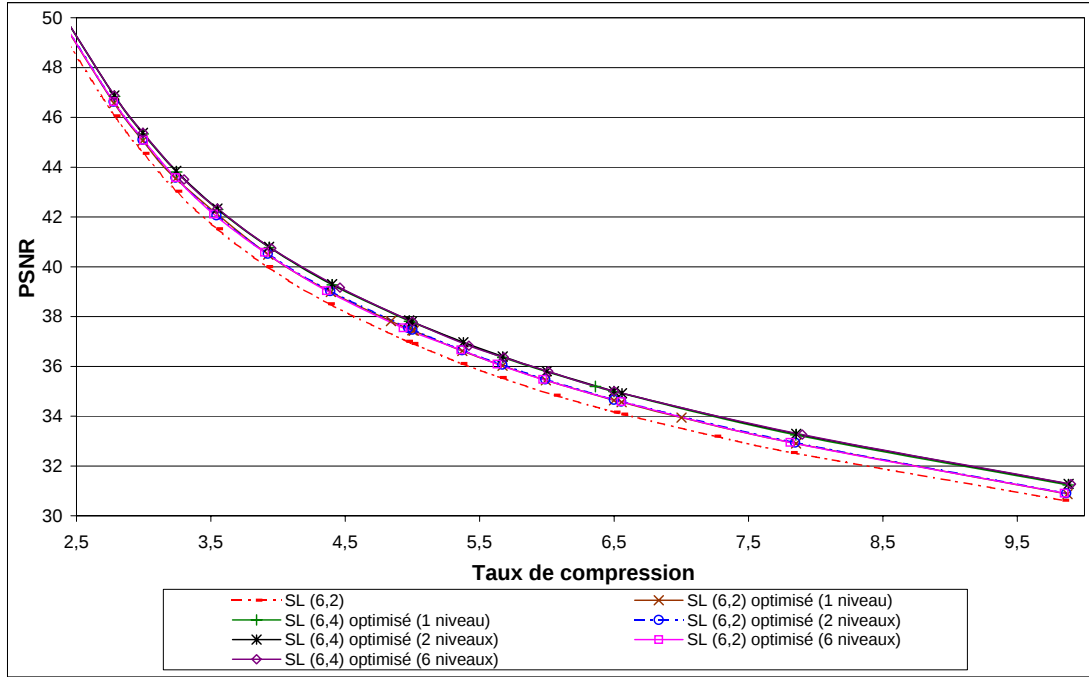


FIG. 5.5 – Comparaison pour l'image NICE du rapport PSNR - taux de compression pour un schéma lifting optimisé pour un SL(6,2) optimisé (1) et SL(6,4) optimisé (1)), deux (SL(6,2) optimisé (2) et SL(6,4) optimisé (2)) et 6 niveaux (SL(6,2) optimisé (6) et SL(6,4) optimisé (6)) de résolution.

férentes). Une première étape dans l'évaluation numérique de la méthode d'optimisation consiste à définir le nombre de niveaux de résolution successifs, pour lesquels l'algorithme d'optimisation doit être appliqué. Notre objectif n'est pas de définir un schéma lifting par une optimisation globale sur toutes les approximations successives. Les opérateurs lifting ne correspondraient pas aux opérateurs optimaux pour une approximation de résolution donnée. Nous cherchons à définir un schéma lifting différent pour chaque résolution afin d'être adapté au mieux à l'image traitée. Il est important du moins pour les premières décompositions, là où la réduction de débit doit être maximale, de parvenir à définir un filtrage optimal. Des tests de qualité ont été réalisés afin de définir le nombre de résolutions sur lesquelles l'optimisation doit être appliquée. Les simulations ont été réalisées pour 1, 2 et N échelles différentes (N représente le nombre de fois où le schéma lifting est appliqué). Dans le premier cas, l'algorithme d'optimisation définit un ensemble d'opérateurs lifting, constituant un schéma lifting, adapté à l'image originale. Lors du codage, le même schéma est appliqué N fois pour décomposer le signal. L'algorithme d'optimisation appliqué sur deux approximations successives définit deux séries d'opérateurs lifting en fonction de l'image source et son approximation à une résolution $\sqrt{2}$ fois plus petite. Les deux schémas sont appliqués alternativement aux différentes sous-bandes basse fréquence. L'application de l'algorithme d'optimisation à N étages définit N ensembles d'opérateurs

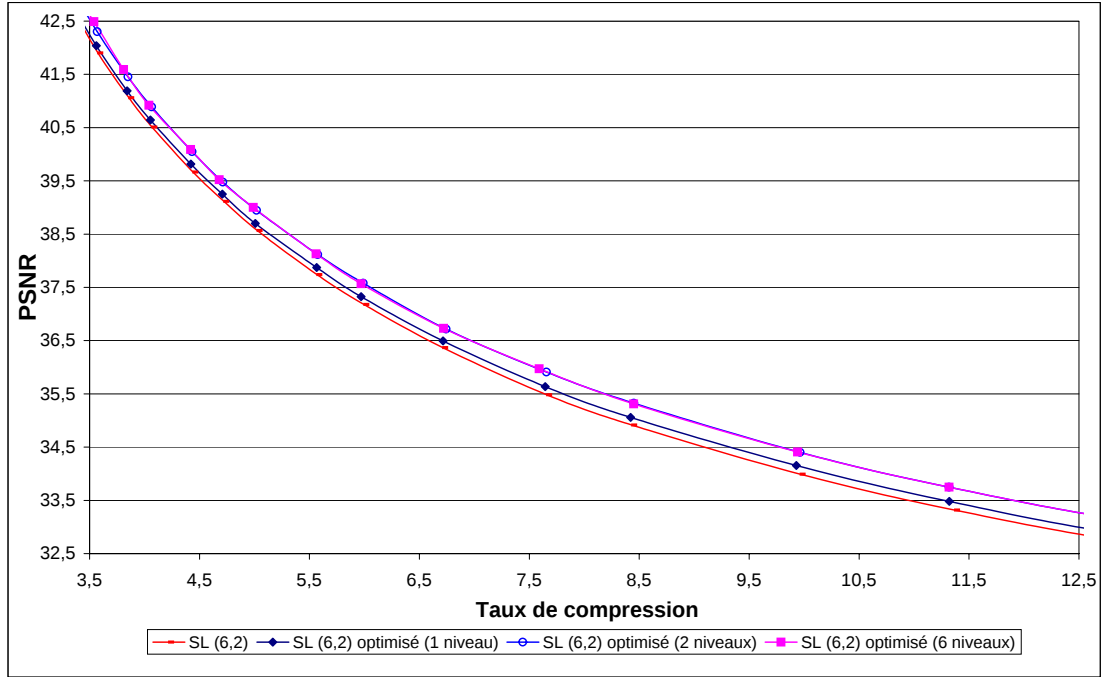


FIG. 5.6 – Comparaison pour l'image GOLDHILL du rapport PSNR - taux de compression pour un schéma lifting optimisé pour un (SL(6,2) optimisé (1)), deux (SL(6,2) optimisé (2)) et 6 niveaux (SL(6,2) optimisé (6)) de résolution.

lifting. Chacun est adapté à une approximation de l'image pour une résolution donnée. Dans le premier cas, nous travaillons dans le cadre des ondelettes de première génération, dans le second nous exploitons le principe des ondelettes de seconde génération. Pour ces ondelettes, les filtres basse et haute fréquences peuvent varier suivant la résolution et la zone spatiale auxquelles ils s'appliquent. Les résultats des tests, présentés pour les images NICE (image satellite) et GOLDHILL (image naturelle) (cf. FIG. 5.5 et FIG. 5.6), montrent qu'il n'est pas nécessaire d'optimiser les filtres à chaque résolution. L'application de l'algorithme d'optimisation sur un seul niveau de résolution peut suffire dans le cas des images, telles que NICE, qui ne favorisent pas de direction particulière. Les images satellite en sont un exemple. Pour des images naturelles, telles que GOLDHILL, l'algorithme d'optimisation doit être appliqué à deux niveaux de résolution. L'algorithme d'optimisation permet alors de disposer de deux schémas lifting différents :

- l'un pour les transformées envoyant une approximation de résolution 2^{-j} sur une approximation de résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$, avec $j \in \mathbb{Z}$,
- l'autre pour les transformées envoyant une approximation de résolution $2^{-j-\frac{1}{2}}$ sur une approximation de résolution 2^{-j-1} , avec $j \in \mathbb{Z}$.

La définition des deux schémas permet de mieux prendre en compte les corrélations spatio-fréquentielles. Dans le cas d'une analyse multirésolution associée aux ondelettes de première génération, le même filtre est utilisé à chaque niveau de résolution. La fonction L jouant le rôle du facteur d'échelle [37], met en oeuvre une symétrie ainsi qu'une homothétie de

rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$ (1.2.5). Pour une image présentant de très fortes corrélations spatiales sur les axes verticaux et horizontaux (GOLDHILL), le changement d'échelle répercute les corrélations sur les axes diagonaux de l'approximation de résolution $\sqrt{2}$ fois plus petite. L'image source nécessite un filtre qui décorrèle l'information principalement dans les directions horizontale et verticale, tandis que la sous-bande basse fréquence nécessite un filtre qui décorrèle l'information dans les directions des deux diagonales. Aussi, le schéma optimum pour une image de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$ ne l'est absolument pas à la résolution 2^{-j} . Le problème ne s'est pas posé pour l'image satellite, car aucune direction n'est privilégiée. Dans toutes nos applications, l'algorithme d'optimisation est appliqué de manière à définir des opérateurs lifting différents pour les deux niveaux successifs de résolution 2^{-j} et $2^{-j-\frac{1}{2}}$, $j \in \mathbb{Z}$.

5.4.2 Progressivité en résolution



FIG. 5.7 – Comparaison entre le schéma lifting quinconce (4,2) et (4,2) optimisé pour l'image Alsace reconstruite en annulant la première sous-bande haute fréquence.

La transmission d'images numériques passe par des réseaux hétérogènes. Les techniques de codage doivent développer des fonctionnalités qui introduisent l'adaptabilité aux différents systèmes informatiques et à l'encombrement des réseaux de télécommunications. Une solution consiste à définir des méthodes proposant un décodage progressif des images. La progressivité est réalisée par l'emboîtement dans un train binaire de plusieurs couches associées à une qualité, un débit, ou une résolution. Dans le cas d'un décodage progressif en résolution, la première couche doit contenir toute l'information nécessaire à la reconstruction d'un signal grossier, les différentes couches, qui suivent, permettent d'affiner la définition de l'image en apportant l'information nécessaire pour augmenter en résolution. Le schéma lifting quinconce permet un décodage progressif en résolution deux fois plus



FIG. 5.8 – Comparaison entre le schéma lifting quinconce (6,2) et (6,2) optimisé pour l'image Alsace reconstruite en annulant la première sous-bande haute fréquence.



FIG. 5.9 – Comparaison entre le schéma lifting quinconce (9,7) et (6,4) optimisé pour l'image Alsace reconstruite en annulant la première sous-bande haute fréquence.

fin que pour une transformée séparable. La technique d'optimisation d'opérateurs lifting quinconce avancée au chapitre 3, met au point un filtrage qui favorise la progressivité en résolution. L'opérateur de mise à jour est déterminé de façon à définir un signal basse

fréquence contenant l'information la plus essentielle à une bonne reconstruction du signal. Les tests sur l'image ALSACE (cf. FIG 5.7, FIG 5.8 et FIG 5.9) montrent que pour des filtres comparables, l'approximation basse résolution, obtenue par le schéma lifting optimisé, est bien meilleure. Les images, présentées dans les figures FIG 5.7, FIG 5.8 et FIG 5.9, ne correspondent pas exactement aux images basse résolution, elles correspondent à l'image reconstruite à partir des seules images basse fréquence (les images haute fréquence étant mises à zéro). La qualité visuelle de l'image, obtenue à partir des filtres optimisés, est nettement meilleure. Les contours sont mieux définis. Par exemple, nous observons sur les différentes images, obtenues à partir des filtres optimisés, que les rainures des volets sont bien dessinées, tandis que dans l'autre cas elles sont complètement striées.

5.4.3 Optimisation appliquée à la compression haut et bas débits

Les travaux, proposés au chapitre 3, portant sur l'optimisation d'opérateurs lifting quinconce sont maintenant évalués dans le cadre de la compression haut, moyen et bas débits. L'évaluation de la méthode pour les hauts et moyens débits, se rapporte, encore une fois, à une étude dans le cadre de l'imagerie satellitaire. Les images sources sont directement échantillonnées sur une grille quinconce. Dans le cadre de la compression bas et moyen débits, la méthode est évaluée pour des images naturelles bruitées (GOLDHILL) et non-bruitées (CAFÉ2). Les images sources utilisées proviennent du site UCLA et de l'éventail d'images test proposé par JPEG2000. Les opérateurs lifting doivent être transmis au décodeur. Le coût du codage des coefficients des opérateurs est négligeable par rapport au codage de l'image. Dans les résultats présentés, il n'est pas pris en compte.

5.4.3.1 Compression haut débit : imagerie satellitaire

L'algorithme d'optimisation génère un schéma lifting quinconce adapté aux propriétés statistiques des données. Le schéma lifting a pour principe de conserver les propriétés de reconstruction parfaite et de biorthogonalité. L'ajout de contraintes au critère d'optimisation permet d'associer le schéma lifting à un banc de filtres à phases nulles, vérifiant les propriétés sur la somme des coefficients du filtre passe-bas $\sum_n h_n = 1$ et du filtre passe-haut $\sum_n g_n = 0$. Dans le cadre de la compression non-conservative, les performances des filtres sont évaluées et comparées en appliquant à l'image transformée le codeur EBWIC (première version). Les filtres donnés en exemple correspondent aux versions lifting des filtres bidimensionnels non séparables, ainsi qu'aux filtres lifting quinconces (4,2), (6,2) et (6,4) optimisés. L'algorithme d'optimisation définit un schéma lifting quinconce à deux pas. Les opérateurs obtenus génèrent à la fois une image haute fréquence, de variance minimale, et une image basse fréquence, contenant l'information la plus essentielle à une bonne reconstruction du signal à plus haute résolution. L'étape de codage permet de réduire le débit, principalement dans les sous-bandes haute fréquence. La transformée en ondelettes permet de réduire l'énergie dans ces sous-bandes et de la concentrer sur un ensemble restreint de valeurs. La construction de l'opérateur de prédiction consiste à minimiser la variance dans les différentes sous-bandes haute fréquence. Le choix du critère de mise à jour doit permettre d'optimiser la qualité de la reconstruction, obtenue à partir de l'image basse fréquence. Le but est d'assurer une qualité de reconstruction minimale. Le défaut

de la méthode est qu'elle n'est pas adaptée à l'acquisition des images au cours du temps, et demande une connaissance a priori de l'ensemble des données. La méthode est évaluée pour les images NICE et NÎMES. Une étude qualitative détermine à la fois le PSNR et les normes L_1 et L_2 de l'erreur de reconstruction en fonction du taux de compression. Les résultats sont représentés aux figures (FIG. 5.10), (FIG. 5.11), (FIG. 5.12) et (FIG. 5.13). La mesure du PSNR, pour un taux de compression égal à 5, sur l'image NÎMES donne un aperçu des performances des différents filtres lifting (TAB. 5.1) et (TAB. 5.2). Le gain relatif

Nimes	PSNR	SNR	E_1	E_2
SL(9,7)	36,52	33,31	3,017	3,806
SL(6,2)	37,23	34,02	2,762	3,507
SL(6,2) optimisé	37,63	34,42	2,606	3,351
SL(6,4) optimisé	37,99	34,78	2,526	3,216

TAB. 5.1 – Les différents filtres lifting quinconce obtenus soit par McClellan, soit par optimisation sont appliqués dans le schéma de codage EBWIC. La qualité est évaluée par la mesure du PSNR, du SNR en énergie et des normes L_1 et L_2 de l'erreur entre l'image NÎMES et l'image restaurée à un taux décompression de 5.

pour un schéma lifting (6,2) optimisé par rapport au (6,2) est de 0,4dB, le gain entre le (6,2) optimisé et le (9,7) est de 1,1dB, et le gain relatif entre le (6,4) optimisé et le (9,7) est de 1,4dB. Pour l'image NICE, le gain relatif pour un schéma lifting (4,2) optimisé par rapport au (4,2) est de 0,86dB, le gain entre le (6,2) optimisé et le (6,2) est de 0,56dB, le gain entre le (6,2) optimisé et le (9,7) est de 1,27dB, et le gain relatif entre le (6,4) optimisé et le (9,7) est de 1,6dB. L'optimisation des opérateurs lifting induit une nette amélioration des performances du filtrage. Les gains en PSNR sont importants puisqu'ils se font uniquement au niveau du filtrage. Aussi, la méthode est très efficace dans le cadre d'applications haut et moyen débits et pour des images satellites. Du point de vue des critères psychovisuels (FIG. 5.14), l'optimisation engendre une amélioration de la qualité. Les images reconstruites à partir des filtres optimisés présentent beaucoup moins d'artefacts et la zone texturée est préservée. L'optimisation permet une meilleure compression, entraînant des améliorations suivant les critères de qualités subjective et objective.

5.4.3.2 Compression bas et moyen débits

Une image du type de GOLDHILL présente des caractéristiques très différentes de celles des images satellites (FIG. 5.15). Elle contient moins d'informations pertinentes, et elle est fortement bruitée. Les performances des schémas lifting quinconce (6,2) ou (4,2) chutent par rapport à celles des filtres (9,7) non-séparables qui donnent de meilleurs résultats. Pour un taux de compression égal à 6, le gain en qualité des filtres (9,7) par rapport au schéma lifting (6,2) est de 0,35dB. L'optimisation des filtres (6,2) génère un gain de 0,4dB. Elle permet d'égaliser les performances des filtres (9,7) quinconce. Les filtres (9,7) séparables procurent les meilleurs résultats. Leurs performances et leurs propriétés de régularité et d'optimalité les ont fait admettre dans la norme de codage JPEG2000. Ils sont biorthogonaux et proches des conditions d'orthogonalité. La différence de qualité PSNR entre les

filtres (9,7) séparables et les filtres (9,7) non-séparables est de 0,64dB. La différence entre les filtres (9,7) séparables et le (6,2) optimisé est de 0,59dB, la différence entre les filtres (9,7) séparables et le (6,4) optimisé est de 0,3dB. Le gain entre le (6,4) optimisé et le (6,2) est de 0,7dB et le gain entre le (6,4) optimisé et le (9,7) non-séparable est de 0,35dB. L'optimisation permet de réduire la différence de performances entre le filtrage séparable et non séparable pour ce type d'image. Dans ce cas de figure, il est tout de même plus intéressant d'utiliser un filtre séparable. L'image GOLDHILL présente davantage de corrélations verticale et horizontale et la méthode employée pour numériser l'image (acquisition sur une grille carrée) se prête mieux aux transformées séparables. L'image CAFÉ2 est une image photographique. La différence avec GOLDHILL est qu'elle est très contrastée, elle présente beaucoup de zones de singularités et relativement peu bruitée (FIG 5.16). Les filtres (9,7) non-séparables sont encore une fois plus performants que les filtres (6,2). La différence de qualité PSNR entre les deux atteint 0,34dB. La différence entre les filtres (6,2) optimisé et les filtres (6,2) est de 0,58dB, le gain par rapport au (9,7) est de 0,24dB. La différence entre le (6,4) optimisé et le (6,2) est de 0,81dB, la différence par rapport au (9,7) est de 0,54dB. Les résultats expérimentaux démontrent une fois de plus les performances de l'algorithme d'optimisation. Pour un même schéma lifting la version optimisée augmente la qualité de 0,58dB. Les performances restent cependant moins bonnes que celles obtenues pour les filtres séparables. Aussi, pour des images directement échantillonnées sur des grilles carrées et présentant principalement des corrélations sur les axes verticaux et horizontaux, il est préférable d'appliquer une transformée en ondelettes séparable.

5.5 Évaluation qualitative des critères d'optimisation (bruit de quantification pris en compte)

L'algorithme d'optimisation connaît une variante. Le critère permettant de définir l'opérateur de prédiction reste inchangé. Par contre, l'opérateur de mise à jour est défini en fonction de la distorsion engendrée lors de la quantification.

Nice	PSNR	SNR	E_1	E_2
SL(9,7)	36,20	31,74	3,166	3,949
SL(4,2)	36,20	31,74	3,057	3,949
SL(6,2)	36,91	32,46	2,810	3,637
SL(4,2) optimisé	37,06	32,60	2,766	3,576
SL(6,2) optimisé	37,47	33,02	2,630	3,411
SL(6,4) optimisé	37,8	33,34	2,592	3,286
SL(6,4) optimisé (v2)	37,86	33,40	2,557	3,263

TAB. 5.2 – Les différents filtres lifting quinquonce obtenus soit par McClellan, soit par optimisation sont appliqués dans le schéma de codage EBWIC. La qualité est évaluée par la mesure du PSNR, du SNR en énergie et de la norme L_1 de l'erreur entre l'image NICE et l'image restaurée à un taux décompression de 5.

Si nous considérons les performances des filtres optimisés par rapport aux filtres stan-

dards, l'algorithme donne des résultats très satisfaisants (cf. FIG. 5.17, FIG. 5.18, et FIG. 5.2). L'optimisation permet d'améliorer les performances en terme de qualité. Cependant, aucune amélioration notable ne se dégage par rapport à l'ancien critère. Les filtres sont construits en fonction des corrélations existantes entre les pixels d'un même voisinage. La stabilité des performances résulte du rapport peu évolutif entre les auto-corrélations des pixels de l'image haute fréquence et celles de l'image d'erreur de quantification. Les minces différences, de l'ordre de 0,05dB, vont jouer sur le rapport entre ces corrélations et le bruit qui interfèrent. Le second critère est meilleur en ce qui concerne les images peu bruitées et pour un pas de quantification de faible amplitude. Tandis que pour les images bruitées et un fort pas de quantification, les résultats sont légèrement moins bons. Dans le premier cas, la quantification réduit le faible bruit présent dans l'image et optimise le signal de façon plus performante. Dans le second cas, l'image d'erreur récupère principalement du bruit, qui va interférer dans la définition des filtres. Le premier critère, non itératif, donc moins coûteux, et de performance quasiment équivalente, doit être préféré au second.

5.6 Application aux schémas de compression sans perte d'information

5.6.1 Images de la base JPEG2000

Le principe de la compression dite « conservative » repose sur la réalisation d'une chaîne de codage réversible. L'image comprimée doit contenir l'information nécessaire à la restitution intégrale de la source. Les techniques de compression se basent sur un codage entropique. Certaines mettent en œuvre une transformée. Une version de JPEG2000 existe pour la compression sans perte. La chaîne de codage se compose d'une transformée par schéma lifting sur les entiers, et du codeur EBCOT. Les méthodes conservatives n'admettent pas d'étape de quantification. Elles permettent ainsi de conserver la qualité de la source. Leur intérêt est toutefois relativisé par leur faible potentialité à comprimer. Le débit ne peut être inférieur à l'entropie du signal, aussi les taux de compression atteints sont très limités. La compression sans perte n'est pas très adaptée au multimédia, qui requiert une transmission de données à moyen ou bas débits. Elle est cependant indispensable pour le traitement d'images militaires et médicales où la plus haute précision est exigée.

Le schéma lifting quinquonce admet une version entière (définie au chapitre 2) pouvant être intégrée dans une chaîne de compression sans perte. La transformée est associée au codeur EBWIC (implémentant une variante d'EBCOT) et testée sur les images GOLDHILL, CAFÉ2, NICE, MARSEILLE et NÎMES. Les résultats sont comparés en terme de débit et de complexité du filtrage. Le tableau TAB. 5.3 montre les performances de la compression sans perte sur l'image GOLDHILL. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par JPEG2000. Les résultats sur GOLDHILL confirment que le filtrage séparable est meilleur que le filtrage non-séparable. Les résultats montrent encore une fois que pour une image présentant de plus fortes corrélations verticales et horizontales, il est plus judicieux d'appliquer une transformée qui décorrèle le signal suivant ces axes, plutôt qu'une transformée qui décorrèle le signal selon les axes diagonaux.

	débit (en bpp)	TC
JPEG2000	4,603	1,736
SL(2,2)S	4,861	1,645
SL(4,2)S	4,858	1,647
SL(6,2)S	4,869	1,643
SL(6,2)S	4,869	1,643
SL(2,2)NS	5,098	1,569
SL(4,2)NS	4,936	1,621
SL(6,2)NS	4,922	1,625
(6,2) Optimisé	4,891	1,636
(6,4) Optimisé	4,901	1,632

TAB. 5.3 – Image GOLDHILL : Schéma lifting (SL) pour des filtres séparables (S) ou non-séparables (NS). Le schéma lifting est suivi de la version bêta du codeur EBWIC.

5.6.2 Imagerie satellitaire

Les données acquises par le système de double barrettes CCD sont testées, cette fois-ci, dans le cadre de la compression sans perte. Pour mettre en œuvre un codeur conservatif, nous allons utiliser la version entière de la transformée. Les performances des différents opérateurs lifting quinquonce figurent dans les tableaux TAB. 5.4, TAB. 5.5 et TAB. 5.6.

SB1	débit (en bpp)	TC	SB2	débit (en bpp)	TC	débit total (en Ko)
SL(2,2) S	6,454	1,549		6,455	1,549	199,69
SL(4,2) S	6,368	1,571		6,367	1,571	196,99
SL(6,2) S	6,359	1,572		1,364	1,571	196,81
Nîmes Quinquonce		débit (en bpp)	TC	débit total (en Ko)		
SL(2,2) NS		5,983	1,671	185,10		
SL(9,7) NS		5,753	1,738	177,98		
SL(4,2) NS		5,610	1,782	173,56		
SL(6,2) NS		5,480	1,825	169,54		

TAB. 5.4 – Image NÎMES : Schéma lifting (SL) pour des filtres séparables (S) ou non-séparables (NS). Le schéma lifting est suivi de la version bêta du codeur EBWIC.

Les résultats sont comparés avec le codage par transformées séparables de SB1 et de SB2, les sous-bandes générées par les deux barrettes CCD. Rappelons que la technologie SPOT5 réalise un codage séparé des sous-bandes à l'aide d'une DCT. Dans notre étude, le codage séparé des sous-bandes est réalisé à l'aide de différents schémas lifting séparables, qui offrent de bien meilleurs résultats que la DCT. Le codage de l'image quinquonce est largement plus performant que celui des deux canaux traités séparément. Le codage indépendant des sous-bandes est loin d'être optimal puisqu'il ne prend pas en compte les corrélations entre

SB1	débit (en bpp)	TC	SB2	débit (en bpp)	TC	débit total (Ko)
SL(2,2) S	6,592	1,517		6,591	1,517	525,67
SL(4,2) S	6,486	1,542		6,485	1,542	517,22
SL(6,2) S	6,478	1,544		6,480	1,543	516,70
Nimes Quinconce		débit (en bpp)	TC	débit total (Ko)		
SL(2,2) NS		6,195	1,614	494,05		
SL(9,7) NS		5,932	1,686	473,08		
SL(4,2) NS		5,826	1,716	464,62		
SL(6,2) NS		5,700	1,754	454,58		

TAB. 5.5 – Image NICE : Schéma lifting (SL) pour des filtres séparables (S) ou non-séparables (NS). Le schéma lifting est suivi de la version bêta du codeur EBWIC.

SB1	débit (en bpp)	TC	SB2	débit (en bpp)	TC	débit total (Ko)
SL(2,2) S	5,647	1,771		5,652	1,769	460,79
SL(4,2) S	5,581	1,792		5,582	1,791	455,24
SL(6,2) S	5,586	1,790		5,590	1,790	455,77
		débit (en bpp)	TC	débit total (Ko)		
SL(2,2) NS		5,210	1,919	424,94		
SL(9,7) NS		5,064	1,975	413,03		
SL(4,2) NS		4,901	2,040	399,74		
SL(6,2) NS		4,797	2,084	391,26		

TAB. 5.6 – Image MARSEILLE : Schéma lifting (SL) pour des filtres séparables (S) ou non-séparables (NS). Le schéma lifting est suivi de la version bêta du codeur EBWIC.

les deux sous-bandes. Un codeur quinconce est plus adapté aux traitement des images acquises sur des grilles d'échantillonnage quinconce.

5.7 Conclusion

Le schéma lifting quinconce est un atout majeur dans le traitement des images qui mérite d'être développé et davantage exploité. La transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable est réputée pour être lourde en calculs, plus complexe à implémenter et offrir de moins bons résultats face aux transformées en ondelettes séparables. Le schéma lifting par des propriétés lui permet de réduire le nombre d'opérations de façon conséquente. Il offre une solution au problème de la complexité du filtrage par transformée non-séparable.

Certaines images nécessitent un traitement quinconce qui est plus adapté à leurs propriétés et leur à leur schéma d'acquisition. Le schéma lifting permet de procéder à une transformée quinconce moins onéreuse. Les méthodes d'optimisation proposées permettent d'améliorer les performances du filtrage. Les gains en qualités SNR entre un schéma lifting

et le schéma optimisé varie entre 0,4 et 0,6dB, pour des opérateurs de même longueurs. Ce gain est important compte tenu que la comparaison se fait uniquement au niveau du filtrage. En effet, seul le filtre change au sein de la chaîne de codage.

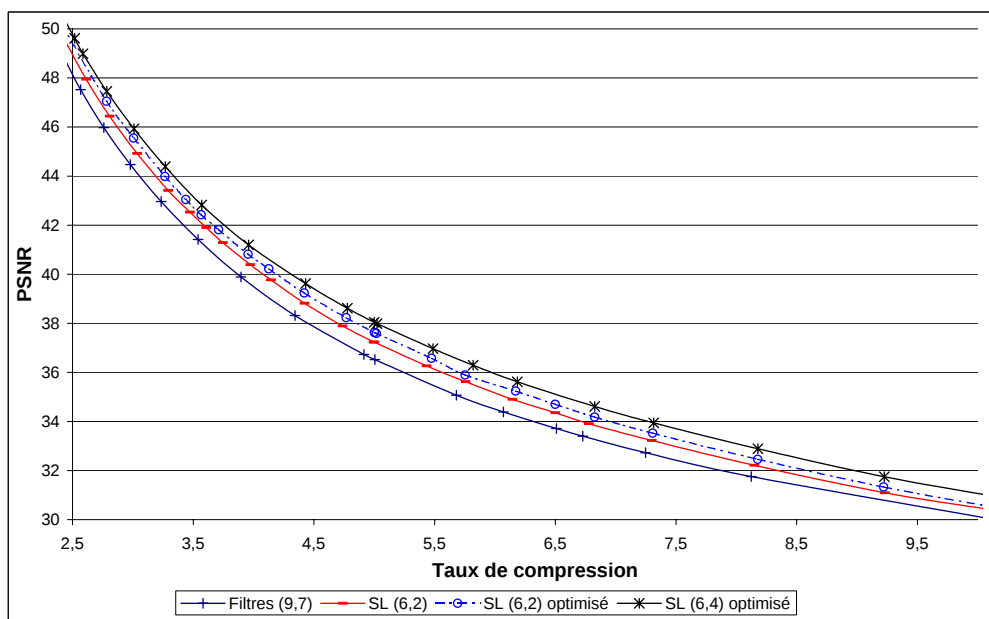


FIG. 5.10 – Comparaison sur l'image NîMES (CNES) du rapport PSNR - taux de compression pour une implémentation lifting de filtres 2D non-séparables (SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé).

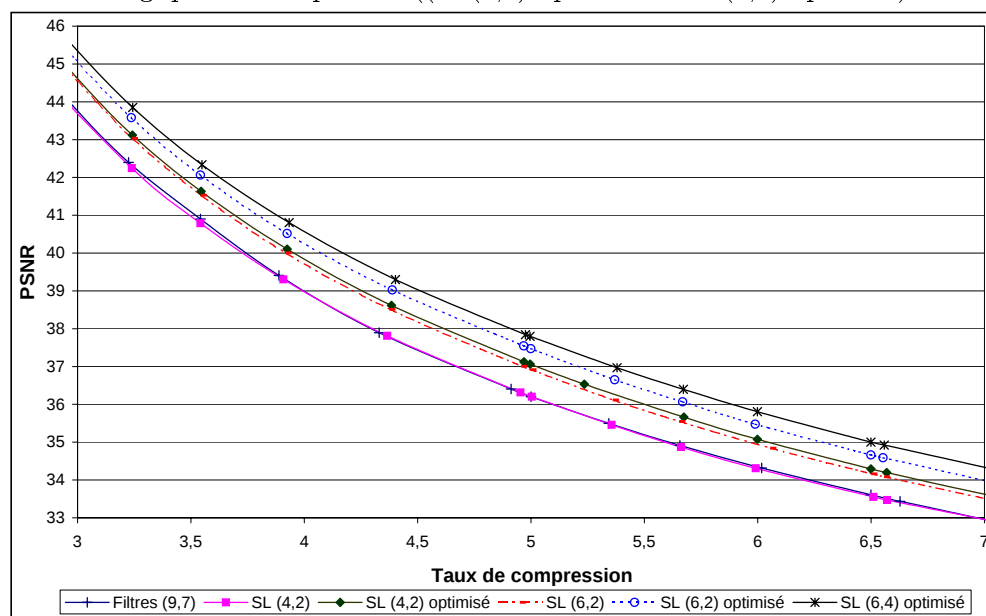


FIG. 5.11 – Comparaison sur l'image NICE (CNES) du rapport PSNR - taux de compression pour une implémentation lifting de filtres 2D non-séparables (SL(4,2), SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(4,2) optimisé, SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé).

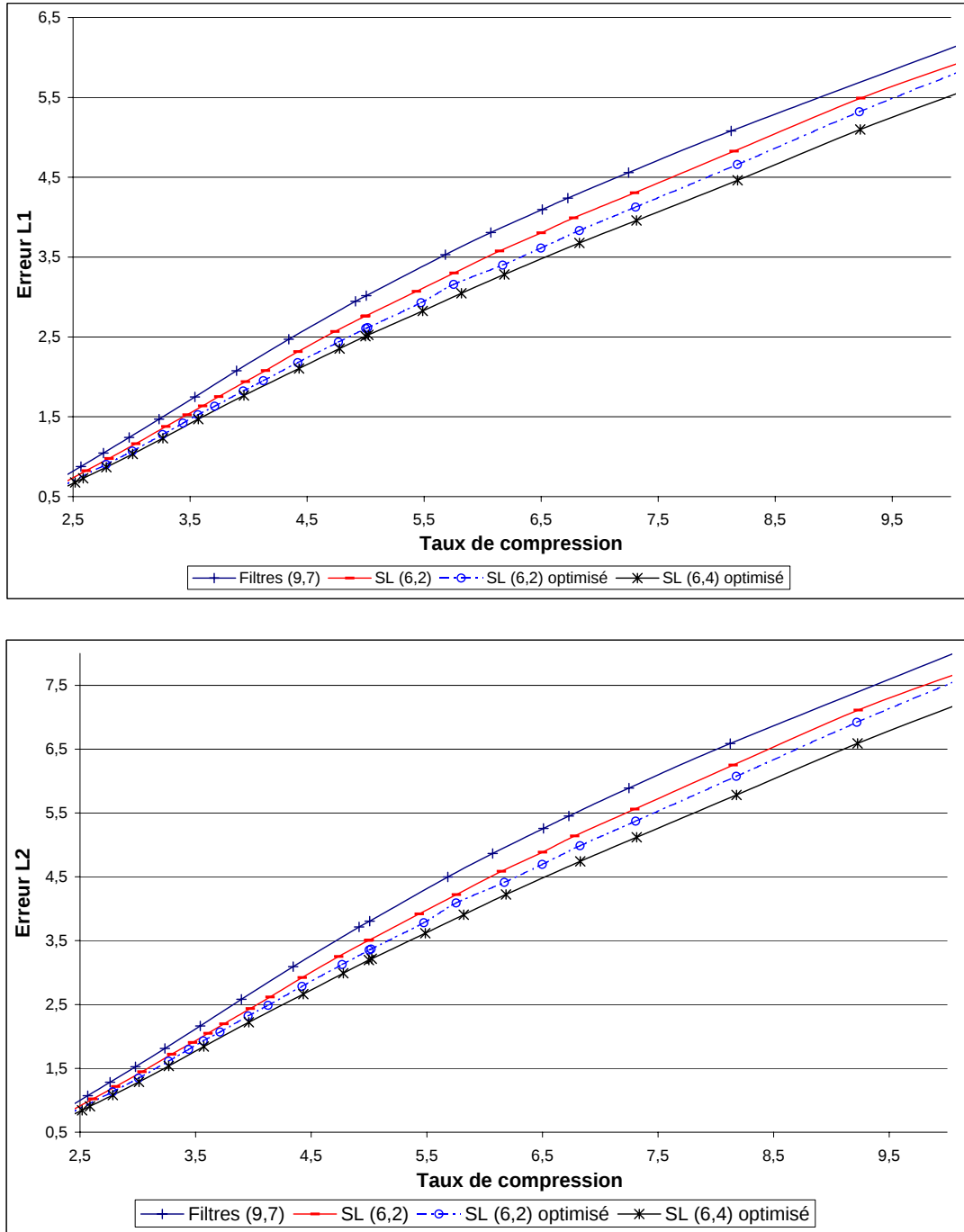


FIG. 5.12 – Comparaison pour l'image NIMES (fournie par le CNES) du rapport entre les normes L_1 , L_2 de l'erreur de reconstruction et le taux de compression pour une implémentation lifting de filtres bidimensionnels non-séparables (SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé).

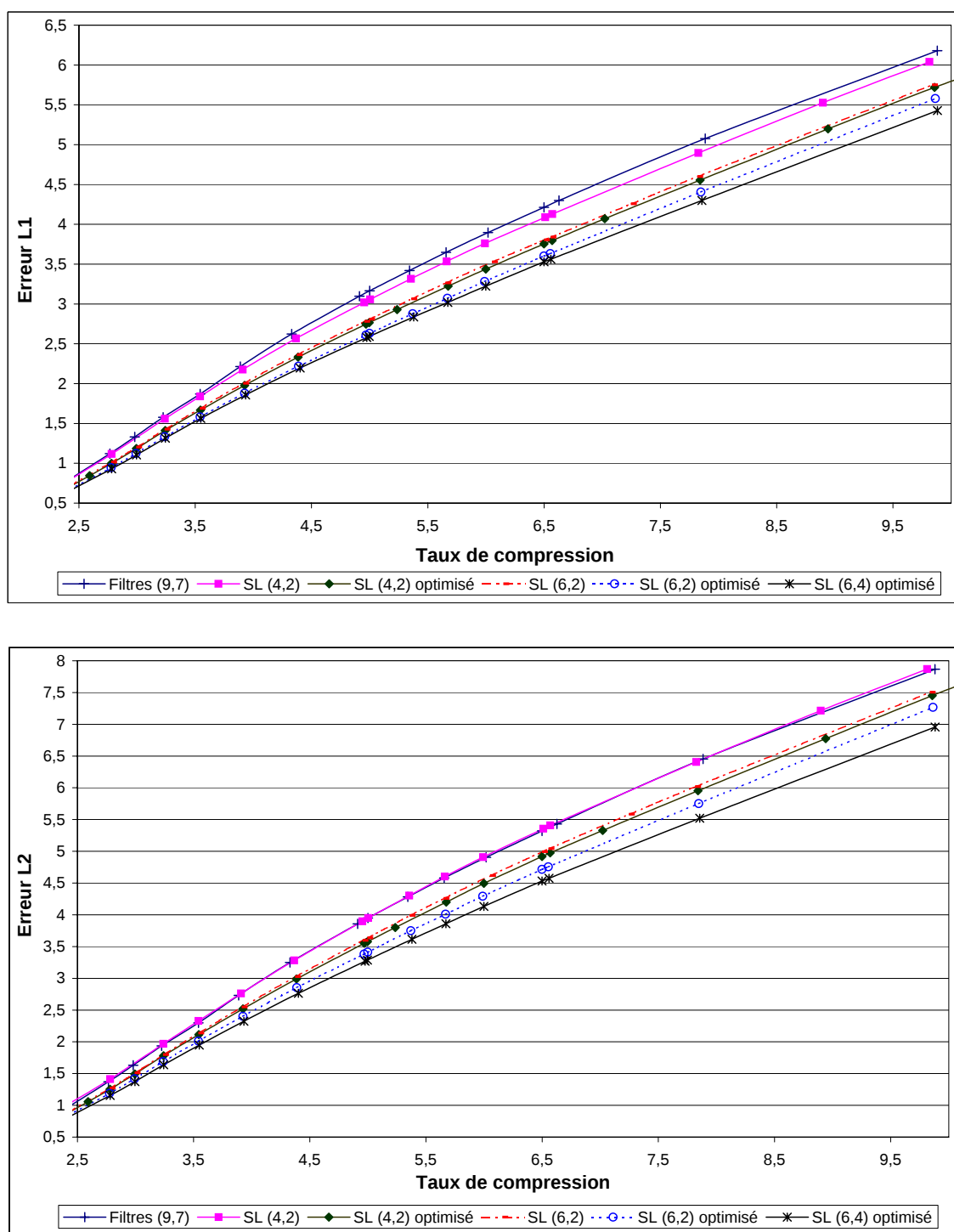


FIG. 5.13 – Comparaison pour l'image NICE (fournie par le CNES) du rapport entre les normes L_1 , L_2 de l'erreur de reconstruction et du taux de compression pour une implémentation lifting de filtres bidimensionnels non-séparables (SL(4,2), SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(4,2) optimisé, SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé).

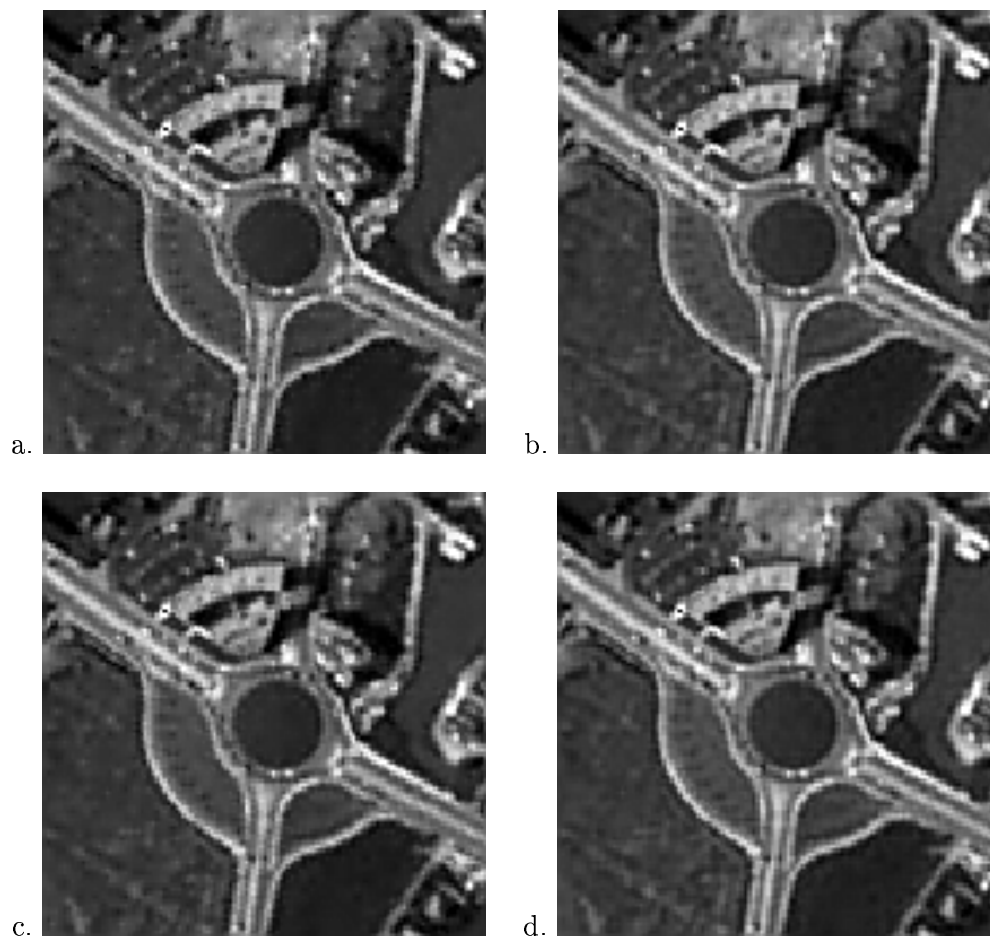


FIG. 5.14 – Comparaison visuelle sur NÎMES pour un taux de compression de 5. Les images sont comprimées avec les schémas lifting quinconces : a. (9,7), b. (6,4) optimisé, c. (6,2), et d. (6,2) optimisé.

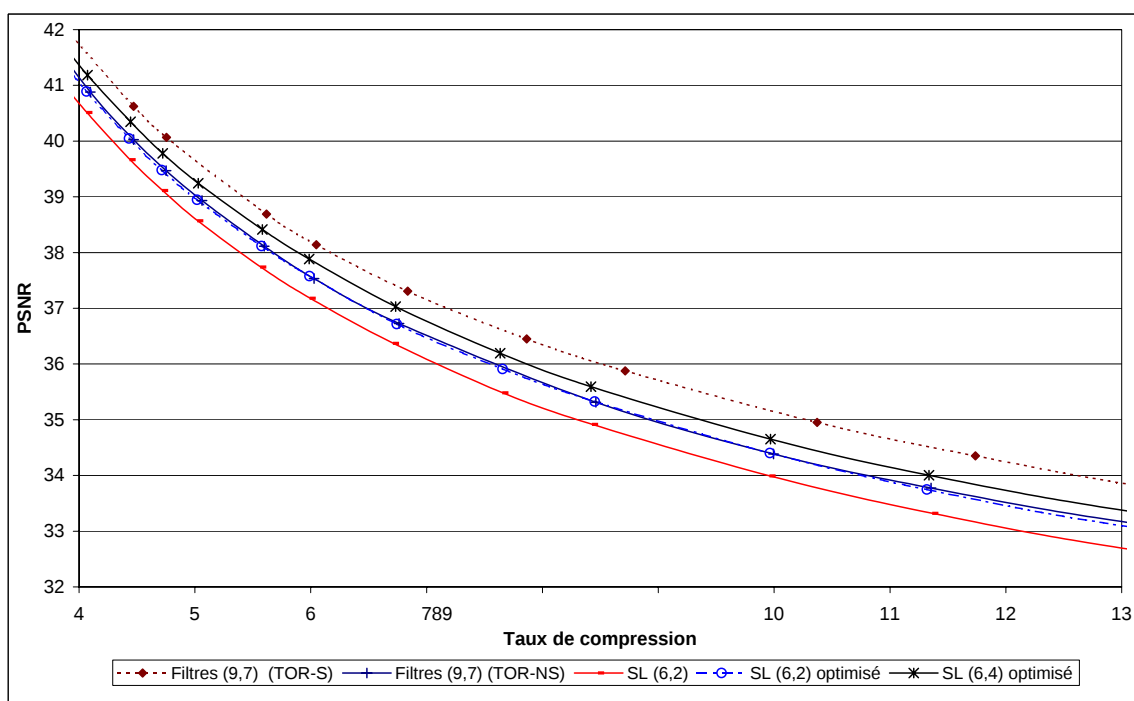
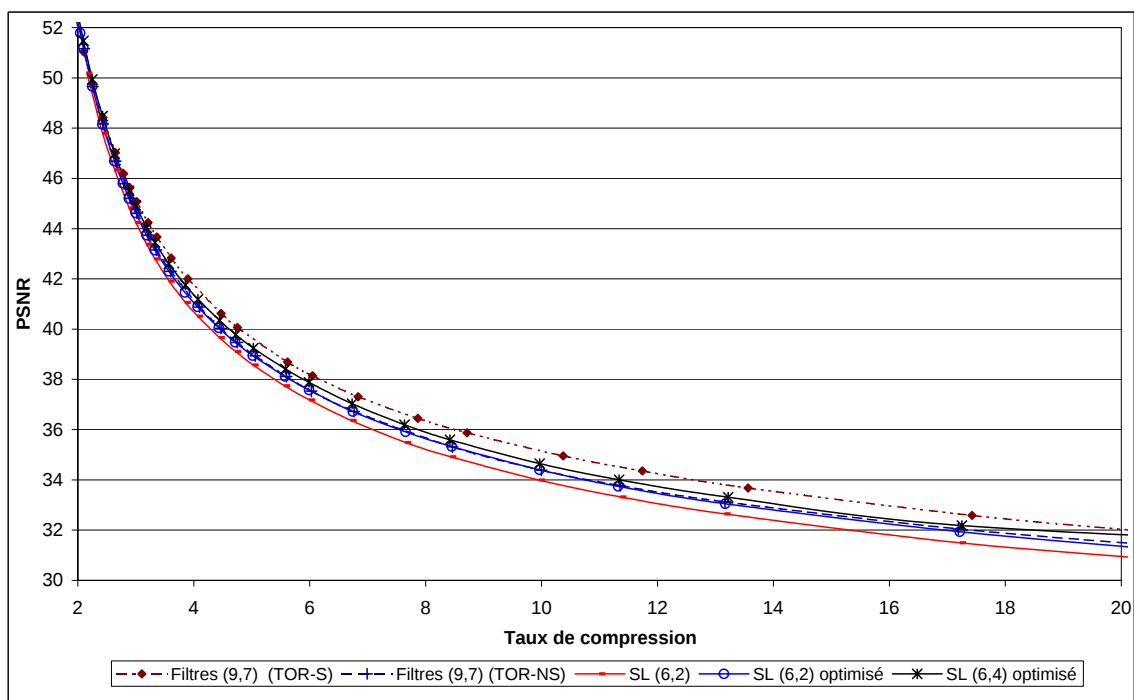


FIG. 5.15 – Comparaison pour l'image GOLDHILL (site UCLA) du rapport PSNR - taux de compression pour une implémentation lifting de filtres bidimensionnels non-séparables (SL(4,2), SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(4,2) optimisé, SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé).

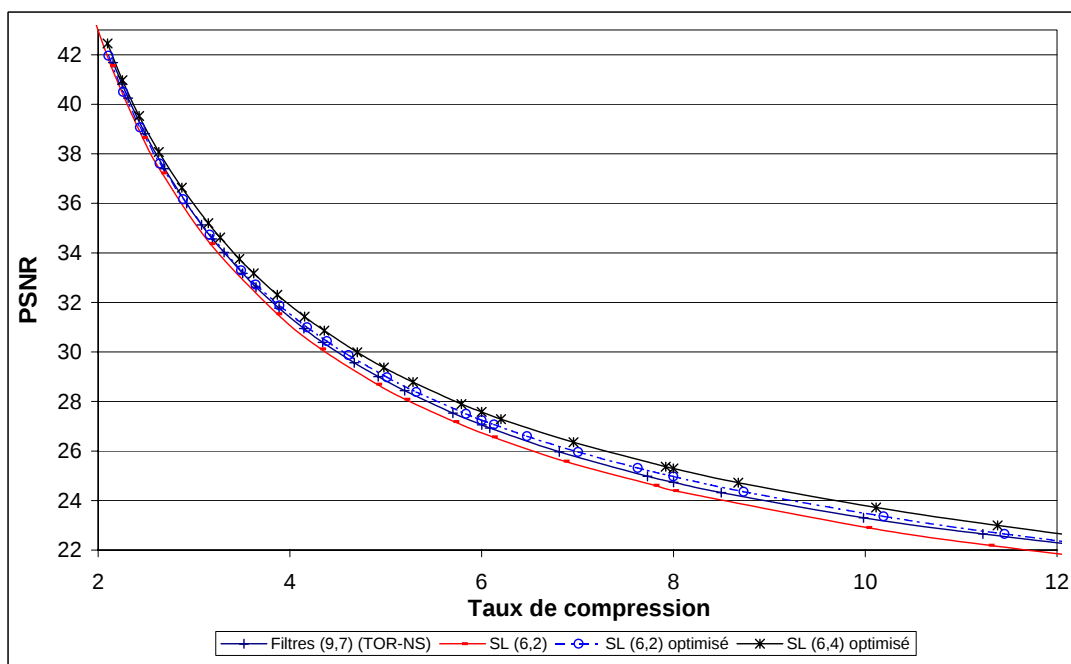


FIG. 5.16 – Comparaison pour l'image CAFÉ2 (source JPEG2000) du rapport PSNR - taux de compression pour une implémentation lifting de filtres bidimensionnels non-séparables (SL(4,2), SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(4,2) optimisé, SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé).

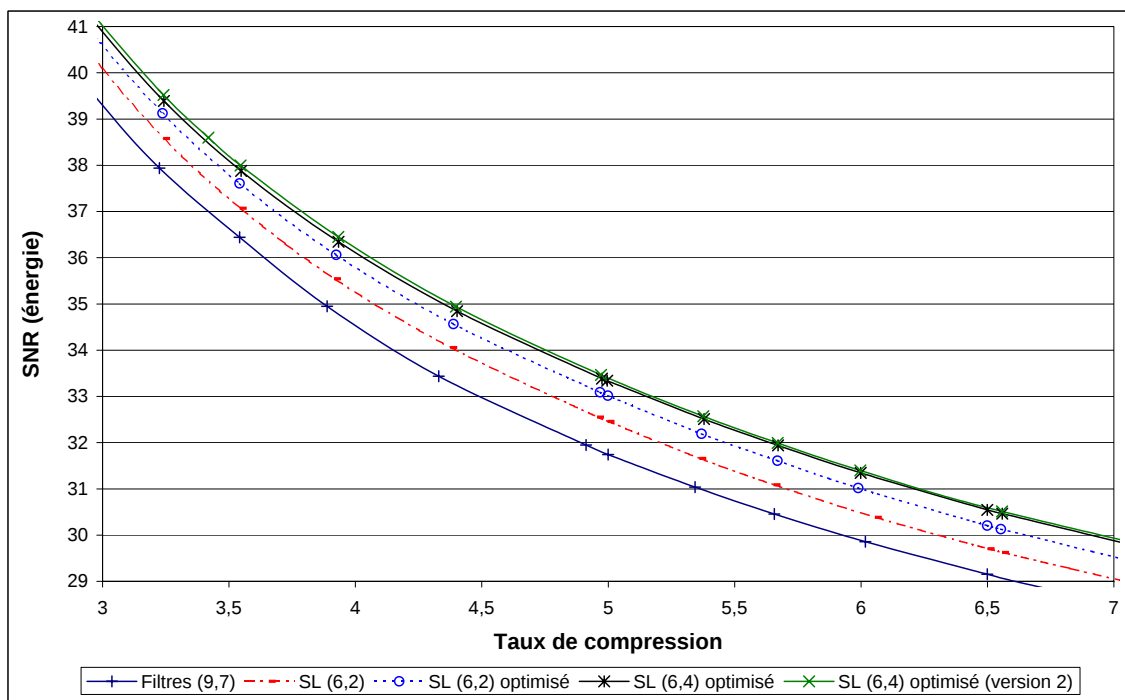


FIG. 5.17 – Comparaison sur l'image NICE (CNES) du rapport PSNR - taux de compression pour une implémentation lifting de filtres 2D non-séparables (SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(4,2) optimisé, SL(6,2) optimisé et SL(6,4) optimisé) et SL(6,4) optimisé (version 2)).

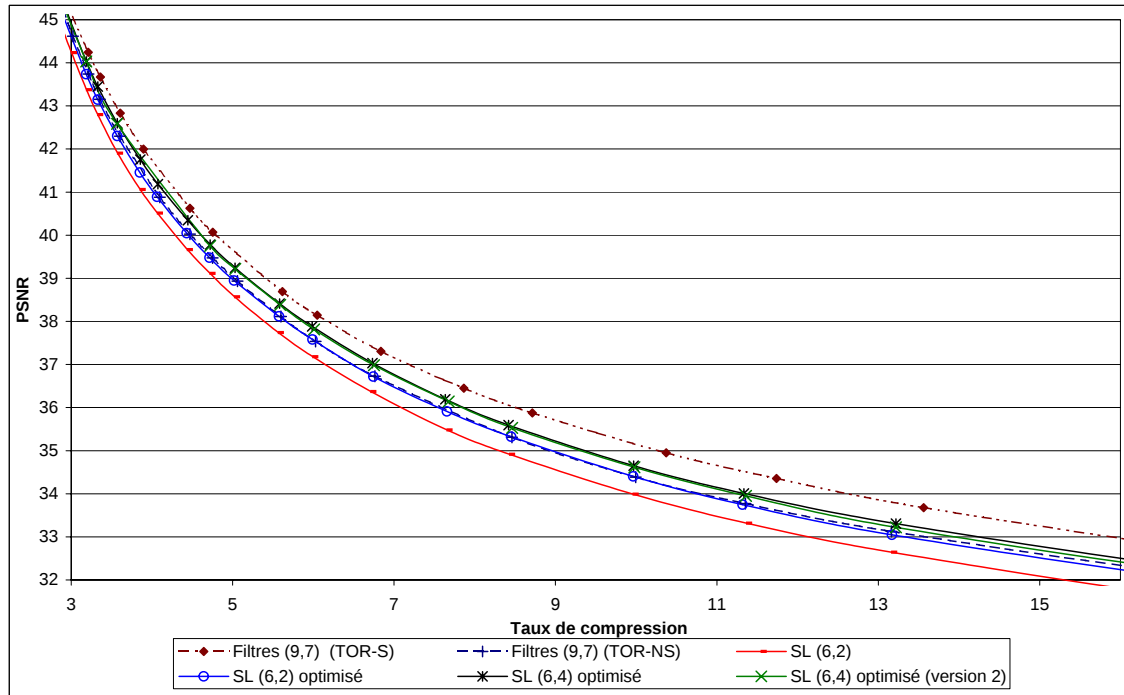


FIG. 5.18 – Comparaison pour l'image GOLDHILL (site UCLA) du rapport PSNR - taux de compression pour une implémentation lifting de filtres bidimensionnels séparables SL(9,7) (TOR-S) et de filtres non-séparables (SL(4,2), SL(6,2) et SL(9,7)) et un schéma lifting quinconce optimisé ((SL(6,2) optimisé, SL(6,4) optimisé et SL(6,4) optimisé (version 2) avec prise en compte du bruit de quantification. (dans les légendes S désigne le terme séparable et NS désigne le terme non-séparable).

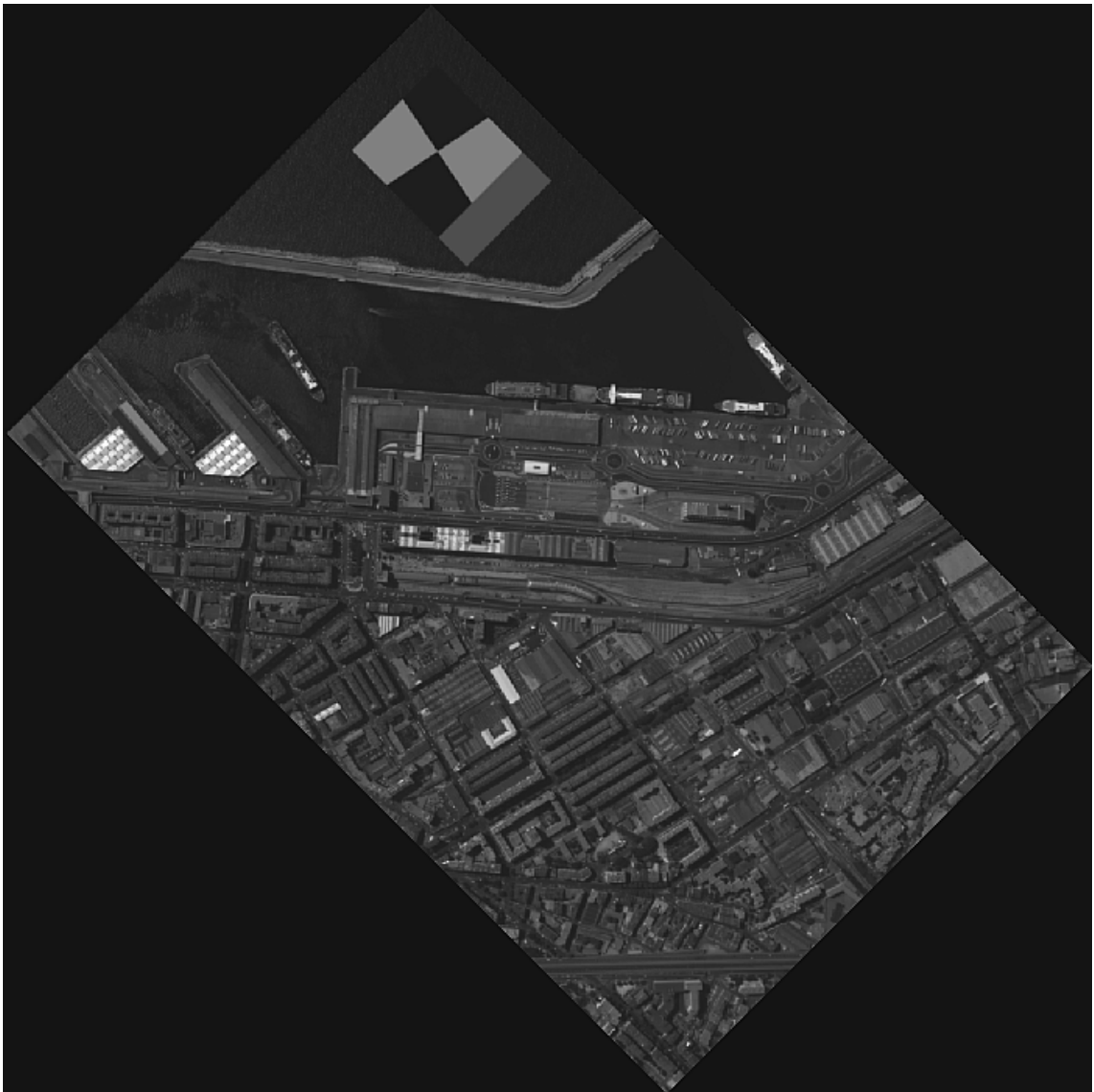


FIG. 5.19 – (a) : MARSEILLE : image satellite fournie par le CNES.

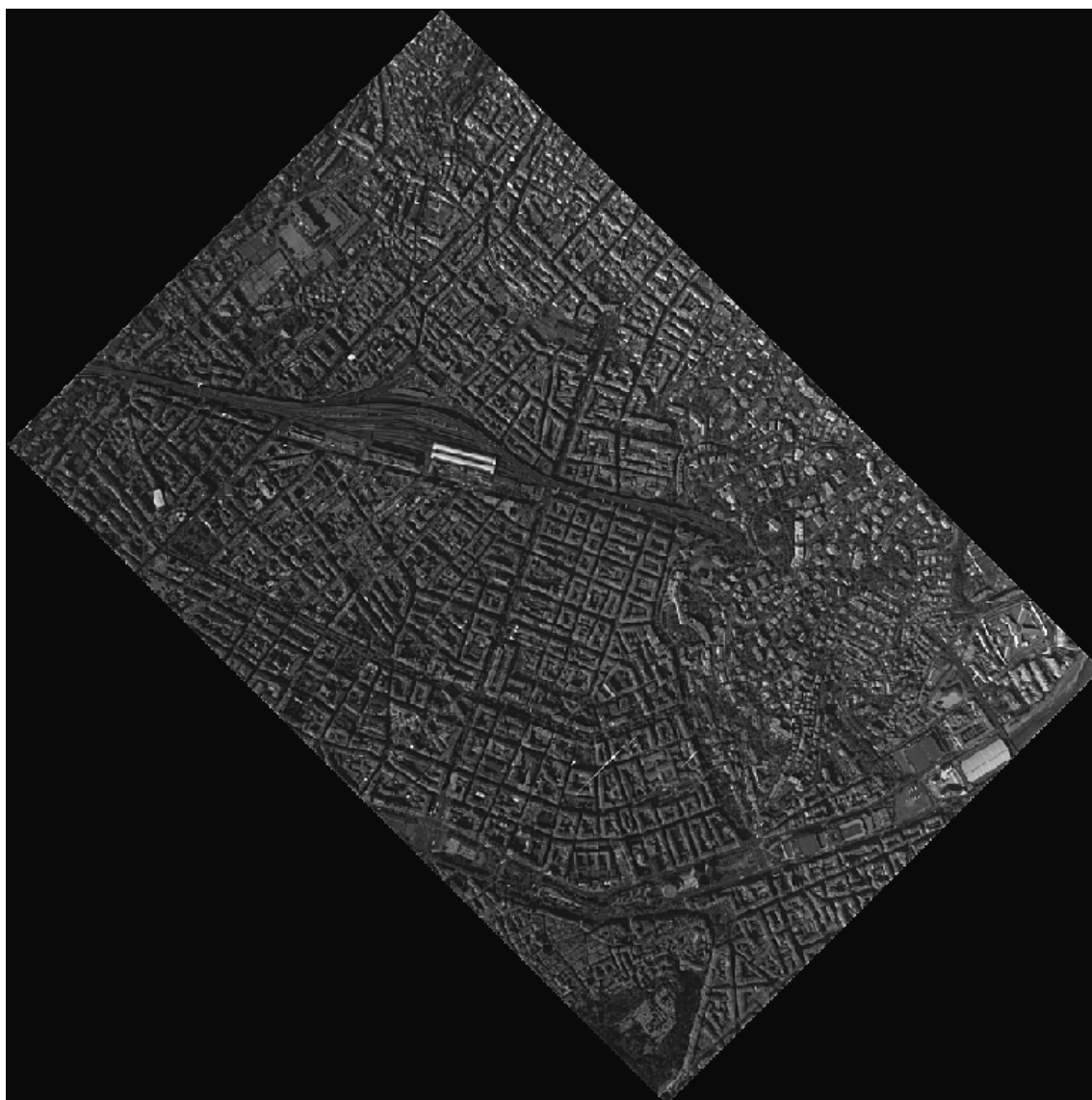


FIG. 5.20 – NICE : Image satellite fournie par le CNES.

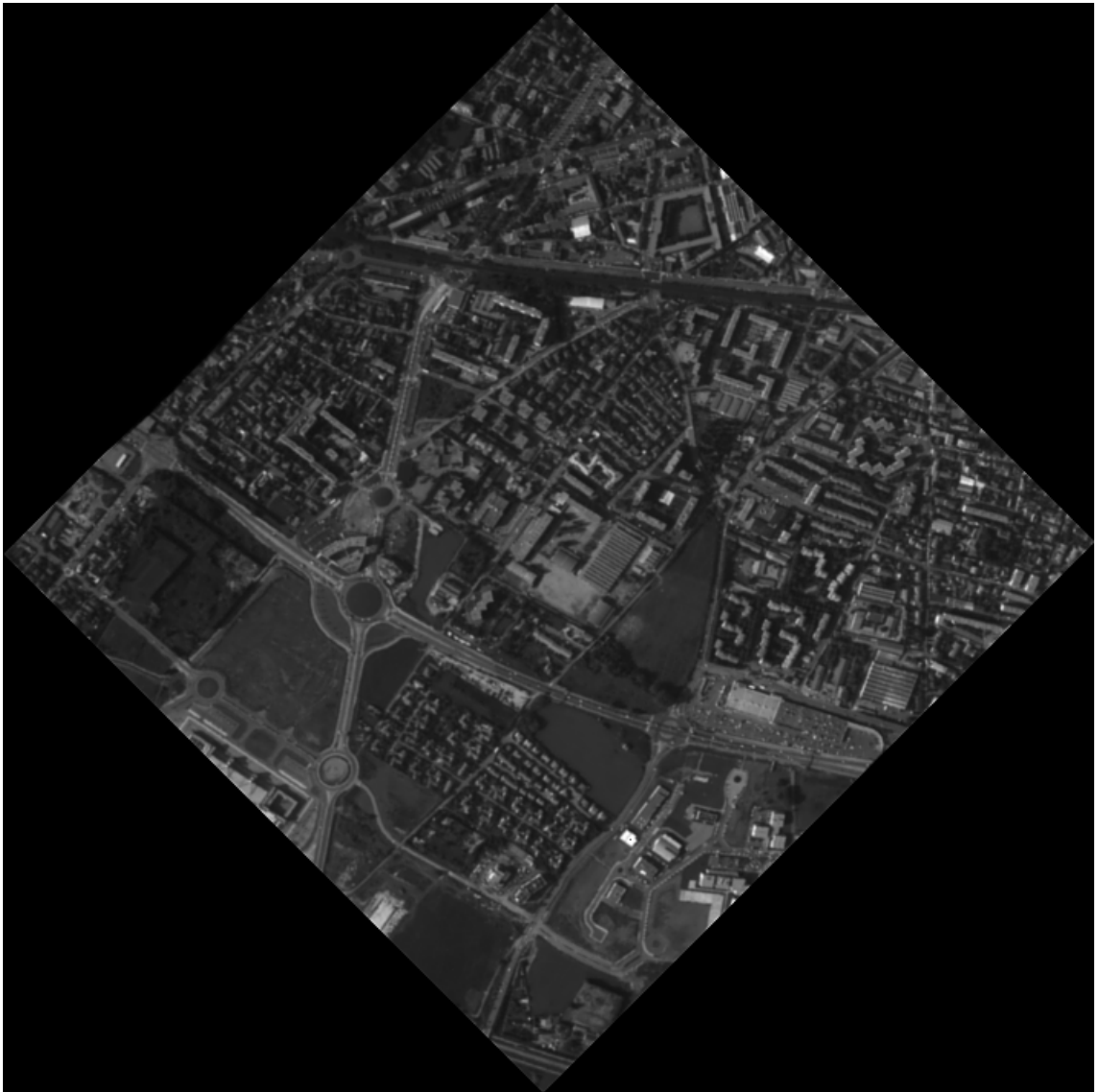


FIG. 5.21 – NÎMES : Image satellite fournie par le CNES.



FIG. 5.22 – GOLDHILL (référence UCLA).



FIG. 5.23 – CAFÉ2 : Image extraite de CAFÉ (référence JPEG2000).

Conclusion et perspectives

Conclusion

L'ensemble des travaux présentés s'inscrit dans le cadre de la compression d'images fixes. Il porte principalement sur l'étape transformée de la chaîne de codage. Les transformées sont étudiées et définies dans le cadre de l'imagerie quinconce. Aussi, nous nous sommes intéressé à la définition et la réalisation de transformées en ondelettes bidimensionnelles non-séparables. Les avantages sont premièrement une transformée qui se basent sur une analyse multirésolution deux fois plus fine que dans le cas séparable. En outre, elle n'utilise qu'une seule ondelette au lieu de trois pour le cas séparable, et permet ainsi de décomposer une image en deux canaux et non quatre. Les filtres utilisés sont non-séparables, de forme diamant, et sont moins anisotropes que les filtres séparables. Dans la pratique, le traitement des images par des transformées, définies sur une grille quinconce, offre plusieurs intérêts. Par exemple, certaines cartes vidéo récentes (GeForce3) définissent une image quinconce de résolution $\sqrt{2}$ fois supérieure à la résolution affichée afin d'obtenir la meilleure définition possible. En outre, le système d'acquisition SPOT 5 (du CNES) utilise deux barrettes de capteurs CCD qui définissent des images échantillonnées en quinconce. Sa fonction de transfert de modulation a un support fréquentiel proche du support quinconce. Les images acquises à partir de tels instruments doivent faire l'objet d'un traitement adéquat pour exploiter au mieux leurs caractéristiques fréquentielles. Une transformée pyramidale quinconce est manifestement plus appropriée qu'une transformée séparable pour des images acquises par ce type d'instruments. Cependant, la transformée non-séparable développée sur des grilles d'échantillonnage quinconce présente deux problèmes majeurs. La construction de filtres présentant les propriétés de reconstruction parfaite, de biorthogonalité et de régularité ne constitue pas un problème trivial. En outre, sa complexité d'implémentation en fait un facteur discriminant au sein d'une chaîne de codage qui requiert un minimum d'opérations. Ces deux difficultés sont la cause d'un faible engouement pour les techniques de compression basées sur des transformées non-séparables.

L'enjeu de cette thèse était de définir des transformées adaptées aux images acquises sur des grilles d'échantillonnage quinconce. Il consistait, en outre, à trouver des filtres moins coûteux ayant de bonnes caractéristiques. Le schéma lifting permet dans le cadre des signaux 1D de développer une implémentation de la transformée en ondelettes moins coûteuse qu'une implémentation usuelle en banc de filtres. Aussi, les travaux présentés ont pour objet le développement du schéma lifting quinconce et son évaluation dans cadre de la compression d'images.

Notre contribution théorique, traitée dans la deuxième partie, se résume en deux étapes.

Dans un premier temps nous avons introduit une implémentation lifting de filtres bidimensionnels non-séparables. Dans un second temps, nous avons défini des opérateurs lifting efficaces en tentant d'optimiser les performances du filtrage pour la compression.

Au chapitre 2, nous proposons une factorisation dans le cadre de filtres bidimensionnels non-séparables dont la transformée en z correspond à un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. Ces filtres présentent des symétries octogonales. La méthode proposée nous ramène à définir les calculs dans le cas 1D, grâce à l'application de la transformée de McClellan. Pour une meilleure lisibilité des résultats, nous avons introduit les équations relatives au schéma lifting quinconce bidimensionnel. Nous avons ensuite exposé les avantages intrinsèques au lifting. Ces avantages sont analogues au cas du schéma lifting 1D. La transformée en ondelettes quinconce implémentée par un banc de filtres classique est en règle générale non séparable. L'emploi d'une telle transformée présente un inconvénient important face aux transformées bidimensionnelles séparables, dans le sens où elle requiert un nombre d'opérations plus conséquent. Ainsi, la complexité d'un filtrage par transformée en ondelettes quinconce soulève un réel problème. L'implémentation en schéma lifting apporte une solution au problème par une réduction de la complexité. Nous avons mis en évidence le gain relatif au nombre d'opérations requises par les deux implémentations (lifting et classique) de la transformée en ondelettes. Le gain est d'autant plus important que le filtre à implémenter est long et donc coûteux. Les propriétés du filtrage par schéma lifting dépendent entièrement des propriétés relatives au banc de filtres associé.

Au chapitre 3, nous proposons une méthode de construction d'opérateurs lifting quinconce adaptés aux propriétés statistiques des données auxquelles le schéma est appliqué. La construction des opérateurs a pour principe d'optimiser les performances de la chaîne de codage, et d'offrir une décorrélation optimale. La méthode proposée se base sur un schéma à deux pas lifting et peut être exploitée pour tout type d'échantillonnages réguliers. Dans notre étude, elle est exploitée pour des échantillonnages quinconce. Le processus d'optimisation définit en premier lieu un opérateur de prédiction. Le choix de l'opérateur est très important afin de pouvoir parvenir à une compression efficace. En effet, l'opérateur de prédiction détermine la sous-bande haute fréquence qui contient peu d'information. Le pas de prédiction retourne un signal dont l'énergie est concentrée sur un petit nombre de coefficients. Le codage permet de gagner en débit principalement dans ce type de sous-bandes. La densité de probabilité du signal peut être approximée par une gaussienne généralisée. Le codage est plus performant sur un signal de faible variance. Le critère utilisé pour définir le pas de prédiction consiste à minimiser la variance de la sous-bande haute fréquence. Le pas de mise à jour détermine le signal basse résolution. Ce signal n'est que faiblement comprimé, contrairement à la sous-bande haute fréquence. Il contient l'information essentielle à une bonne reconstruction du signal original. L'opérateur de mise à jour est défini de façon à minimiser l'erreur de reconstruction suite à des dégradations dans l'image haute fréquence. Deux cas ont été présentés en ce qui concerne la définition des critères d'optimisation. La première méthode cherche à définir l'image basse fréquence et l'opérateur de mise à jour les plus fiables possibles. L'opérateur est donc défini en imposant une reconstruction optimale à partir de la seule image basse fréquence. Le signal haute fréquence est supposé perdu. Cette construction permet de s'adapter au cadre des applications qui admettent une progressivité en résolution. Le deuxième cas est, quant à lui, plus adapté

aux algorithmes d'allocations de débit et prend en compte l'erreur de quantification. L'optimisation de filtres est exploitée dans le cadre du schéma lifting quinconce. Les détails de l'application et les performances ont été donnés au chapitre 5 à travers une évaluation qualitative de la méthode.

Dans la troisième partie, nous avons abordé un aspect plus pratique par une évaluation des performances des méthodes proposées.

Au chapitre 4, nous avons proposé une implémentation au fil de l'eau de la transformée en ondelettes par schéma lifting quinconce. Les gains en mémoire et en nombres d'opérations par pixel sont évalués. Ils mettent en évidence l'amélioration apportée par cette implémentation qui permet une économie de mémoire de filtrage assez importante. La transformée en ondelettes séparable implémentée au « fil de l'eau » procure de bien meilleurs résultats. La transformée non-séparable est deux fois plus fine en résolution. L'introduction de résolutions intermédiaires décuple le nombre de décompositions et entraîne une augmentation de la taille de la mémoire tampon nécessaire au filtrage. En outre, l'implémentation de la transformée en ondelettes non-séparable par schéma lifting réduit le nombre d'opérations arithmétiques requises pour le filtrage. Nous avons mis en évidence le gain entre une implémentation lifting et une implémentation par bancs de filtres. L'implémentation lifting est définie par la méthode de « factorisation » énoncée au chapitre 2.2. Le nombre d'opérations arithmétiques est réduit de manière significative par une implémentation en lifting. Pour les filtres (9,7), le gain en nombre d'opérations de l'implémentation lifting quinconce par rapport à l'implémentation par banc de filtres est égal à facteur 3,59. La complexité du filtrage était jusqu'alors un facteur discriminant face à la simplicité d'implémentation de la transformée en ondelettes séparable. Pour les filtres (9,7), le gain entre une transformée séparable et un non-séparable est de 2,14 pour une implémentation par banc de filtres. Le gain entre le schéma lifting séparable et le quinconce tombe à 1,14. Ces résultats montrent que le lifting permet de diminuer le rapport de la complexité entre une transformée séparable et une non-séparable. L'implémentation par schéma lifting révèle des coûts calcul permettant à la transformée non-séparable de venir concurrencer la transformée séparable. Les avantages qu'offre une implémentation de la transformée en ondelettes quinconce par schéma lifting sont importants au niveau de l'implémentation. Nous proposons une implémentation au fil de l'eau du schéma lifting quinconce. Les coûts de l'implémentation et le gain en mémoire et en complexité par rapport au filtrage par banc de filtres sont évalués de manière théorique.

Le chapitre 5 donne une évaluation qualitative des méthodes développées. Nous avons présenté deux cadres d'étude. L'un porte sur des images naturelles échantillonnées sur des grilles carrées, l'autre sur des images satellites définies sur des grilles d'échantillonnage quinconce. Nous avons vu dans quel cas la transformée en ondelettes quinconce offre un intérêt. Et nous avons étudié les performances des filtres optimisés. Le schéma lifting quinconce est un atout majeur qui mérite d'être développé. La transformée en ondelettes bidimensionnelle non-séparable est réputée pour être lourde en calculs, plus complexe à implémenter et offrir de moins bons résultats face aux transformées en ondelettes séparables. Le schéma lifting par des propriétés lui permettant de réduire le nombre d'opérations de façon conséquente, renvoie le problème de la complexité à un autre plan et peut venir de ce point de vue se comparer aux filtres séparables. Le gain entre les schémas lifting obtenus

par factorisation et les filtres optimisés de même longueur varie entre 0,4 et 0,6 dB pour l'ensemble des images présentées. Ce gain est significatif étant donné que la comparaison est réalisée pour un même codeur. Seuls les coefficients des filtres varient. Cependant, pour des images naturelles échantillonnées sur une grille carrée, la compression par transformée séparable reste toujours plus efficace. Le schéma lifting quinconce est plus efficace et constitue un atout important dans le cadre d'applications et de données échantillonnées directement sur grille quinconce.

Perspectives

Ces travaux constituent une étape dans la valorisation de la transformée en ondelettes non-séparable. L'implémentation en schéma lifting quinconce permet de réduire la complexité de manière significative. Les critères d'optimisation permettent d'améliorer les performances du filtrage. Ces travaux s'ouvrent sur plusieurs perspectives.

D'une part, nous pouvons envisager l'application de la méthode d'optimisation à un ensemble de données en se basant non plus directement sur une image mais sur un modèle. Cette approche permettrait de ne plus avoir à transmettre automatiquement les coefficients des filtres. Par exemple, nous pourrions envisager un filtre efficace pour un ensemble d'images satellite. Aussi, le filtrage s'accommoderait mieux des techniques de codage au fil de l'eau. Ce nouveau critère serait cependant moins performant du fait qu'il ne soit pas directement adapté aux données sources. Pour améliorer les performances et adapter les opérateurs à un ensemble d'images suivant un modèle, nous pourrions ajouter une contrainte de régularité sur les filtres.

Dans le cadre des images satellite, il est plus économique de définir directement des filtres de précision finie. Par exemple nous pourrions chercher la solution optimale et par une recherche dichotomique définir le nombre rationnel le plus proche de la solution optimale.

Un autre axe de recherche consiste à généraliser la méthode de factorisation et d'appliquer l'optimisation dans le cadre de données échantillonnées sur des grilles hexagonales ou autres (à dimension multiple). Les échantillonnages hexagonaux sont de plus en plus répandus dans le cadre des maillages. Les filtres devraient alors être définis dans le cadre d'un échantillonnage régulier. Pour des maillages hexagonaux déformables, les coefficients des filtres seraient pondérés selon la déformation envisagée.

Glossaire et listes des abréviations

Glossaire

Données

Image : Signal fini à deux dimensions et à support compact (ou par exemple dans le cas d'images de synthèses, elles peuvent avoir trois dimensions et être représentées en deux dimensions) . Les images sont la plupart du temps représentées en mode point.

Image en mode point : Image conçue sous la forme d'une matrice de points (pixels). Les données images utilisées au cours de cette thèse sont représentées en mode point.

Filtrage

Filtrage passe-bas : Filtrage retournant les zones basses fréquences d'un signal.

Filtrage passe-haut : Filtrage retournant les zones hautes fréquences d'un signal.

Filtrage passe-bande : Filtrage retournant l'information contenue dans une certaine bande fréquentielle.

Erreur

Aliasing : Recouvrement de spectre. La théorie de Shannon définit, pour tout signal, un support délimité par la fréquence de Nyquist f_e . Le support est défini par $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$. En deçà des limites de ce support, nous avons un phénomène de repliement spectral.

Effet de bords : Dégradations apparentes aux limites du support du signal, liées à l'application de filtres dans le voisinage de la bordure du support. En effet, un filtre de taille supérieure à 1 «déborde» inévitablement du support de l'image quand il est appliqué et centré aux limites du domaine définissant l'image. La gestion de ce phénomène est rappelée en annexe A.4.

Technique, matériel et éléments de mesure

numérisation : La numérisation est le procédé qui permet de coder l'information en mode binaire (par un ensemble de bits).

- bit* : Abréviation des termes anglais *BiNary digiT* (chiffre binaire). Le bit est l'unité de base du système binaire utilisé par les systèmes informatiques. Il correspond à la plus petite unité d'information et de mémoire d'un ordinateur ou autre système numérique. La combinaison de plusieurs bits permet de coder n'importe quel type d'information. Par exemple dans la norme IEEE754, un nombre entier est codé sur 8 bits, un réel est représenté et approximé par un nombre flottant codé sur 32 bits (simple précision) ou sur 64 bits (en double précision).
- pixel* : Abréviation des termes anglais *PICTure ELement* (élément d'image). Le pixel, représente le plus petit échantillon ou la plus petite unité homogène d'une image affichée à l'écran, il équivaut à un point. En réalité, pour des images panchromatiques (monochrome), le pixel est un point. Pour des images couleur (RGB), le pixel comporte trois points de couleur de base (rouge, vert, bleu). Pour des images hyperspectrales, le pixel est un vecteur composé de n points soit un point par bande spectrale (pour n le nombre de capteurs hyperspectraux du système d'acquisition). La taille physique du pixel dépend de la résolution de l'image .
- bits par pixel (bpp)* : Mesure permettant de calculer le nombre de bits nécessaires en moyenne pour coder un pixel.
- Capteurs CCD* : (Charged Couple Device - Capteur à transfert de charges). Les capteurs utilisés pour l'acquisition d'image sont des photodétecteurs (cellules photoélectriques) qui transforment l'énergie lumineuse reçue en énergie électrique. Les capteurs CCD sont organisés en barrettes de photodiodes.

Liste des abréviations

Filtres

FCQ (ou CQF) : Filtre Conjugué en Quadrature

FQM (ou QMF) : Filtre Miroir en Quadrature (Quadrature Mirror Filter 1.2.3.3)

FTM (ou MTF) : Fonction de Transfert de Modulation (Modulation Transfer Function)

Transformée

DCT ou TCD : Transformée en Cosinus Discrète (Discrete Cosine Transform)

DFT ou TFD : Transformée de Fourier Discrète (Discrete Fourier transform)

DWT ou TOD : Transformée en Ondelettes Discrète (Discrete Wavelet Transform)

FWT ou TOR : Transformée en Ondelettes Rapide (Fast Wavelet Transform)

SL : Schéma lifting. Cette abréviation ne fait pas partie des abréviations usuelles comme la DCT DFT, ... Elle est surtout utilisée dans le but d'éviter trop de lourdeur dans les légendes de courbes ou de tableau.

WT ou TO : Transformée en Ondelettes (Wavelet Transform)

Codeur

EBWIC : Efficient Bit allocation Wavelet Image Coder. EBWIC est un codeur développé au sein du laboratoire i3s,

JPEG : Joint Photometric Expert Group (Groupe d'experts commun en photométrie). JPEG est un standard de compression d'images numériques faisant partie des normes ISO.

JPEG 2000 : Joint Photometric Expert Group 2000

MPEG : Motion Picture Expert Group ; MPEG rassemble une famille de formats standards utilisés pour le codage numérique de l'information audio -visuelle (séquences vidéo, musique, ..). Un comité de normalisation de l'ISO assure le développement et la standardisation de la norme MPEG.

Unité de mesure

bpp : Bit par pixel (Bit Per Pixel). Cette unité permet de mesurer le nombre de bits utilisés en moyenne pour coder un pixel de l'image.

Mesure

EQM ou MSE : Erreur des Moindres Carrés ou Erreur Quadratique Moyenne (Mean Square Error)

SNR ou RSB : Rapport Signal à Bruit (Signal to Noise Ratio)

PSNR ou PRSB : Pic du Rapport Signal à Bruit (Peak Signal to Noise Ratio)

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Compléments sur les grilles d'échantillonnages quinconce

Cette annexe délivre un complément d'informations sur le filtrage quinconce et une description théorique des données, ainsi que leur mise en forme en vue de leur implémentation. Les détails décrivant la forme des filtres sont donnés dans le cas particulier des filtres de forme diamant. Dans un premier temps, la mise en œuvre de la transformée en ondelettes est clarifiée par l'apport de précisions sur la représentation (sur des grilles d'échantillonnages carré et quinconce) des données et des filtres en fonction de la résolution de l'image. Dans un second temps, le même ensemble de précisions est présenté dans le cadre du schéma lifting quinconce. Enfin, partant du constat que l'ensemble de ces méthodes génère des effets de bords lorsqu'elles sont appliquées à l'image, nous décrivons le mode de gestion des problèmes de bords.

A.1 Grille quinconce

L'analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$, introduite par Feauveau [38], définit la suite des espaces d'approximations $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ d'une fonction f appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$. La projection d'une image $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ sur la famille des espaces emboîtés $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ retourne une suite de signaux bidimensionnels s_j de résolution 2^{-j} . La transformée en ondelettes rapide est une transformée multiéchelle (Fig. A.1), mise en œuvre par un banc de filtres (h, g) . Elle procède à un changement de résolution associé aux filtrages passe-bas et passe-haut. Son application à $s_{j-\frac{1}{2}}$, l'approximation de f de résolution $2^{-j+\frac{1}{2}}$, retourne une approximation s_j de résolution 2^{-j} et l'image de coefficients d'ondelettes, d_j , caractérisant les détails perdus lors du changement de résolution. Le banc des filtres duaux $(\tilde{h}, \tilde{g})$ réalise la transformée multiéchelle en sens inverse et affine l'approximation de l'image f en augmentant la résolution (voir 1.2.3.3). Le facteur de résolution inter-échelle est égal à $\sqrt{2}$, c'est à dire que les données sont dilatées d'un facteur $\sqrt{2}$ entre deux approximations successives allant de la plus grossière vers la plus fine (lors de la transformée en ondelettes inverse). Le changement de résolution demeure, en réalité, une opération un

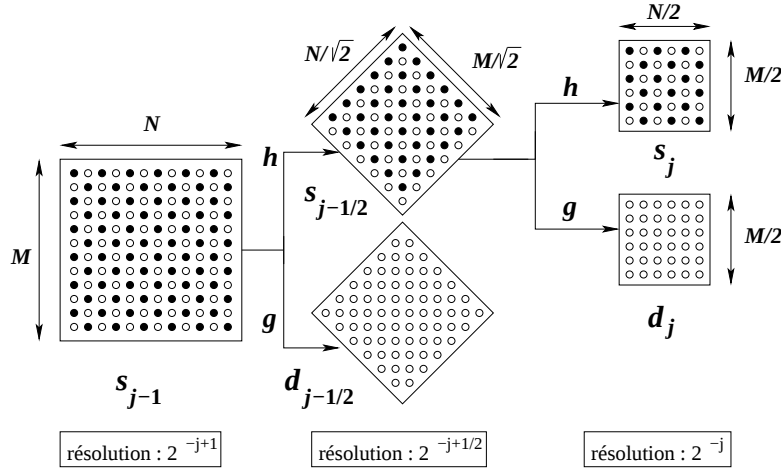


FIG. A.1 – Décomposition multiéchelle avec un facteur de résolution L ($\sqrt{2}$ par abus de langage)

peu plus complexe que la simple dilatation, il est réalisé par l'application de la fonction $L(x, y) = (x + y, x - y)$. L permet d'accroître la résolution, tandis que L^{-1} la réduit. En somme, la fonction de dilatation L agit comme un facteur de résolution. L se compose d'une symétrie orthogonale (induisant une symétrie sur l'image) et d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. La fonction L est appliquée à l'ensemble des indices de l'image. Ainsi, un point de coordonnées (n_x, n_y) de l'image s_j se reporte, après filtrage, sur le point de coordonnées $L(n_x, n_y)$ de l'image de plus haute résolution $s_{j-\frac{1}{2}}$ (cf. Fig. A.1). De même, le point (n_x, n_y) de l'image de coefficients d_j de résolution 2^{-j} se réfère au point $L(n_x, n_y) + (1, 0)$ de l'image $s_{j-\frac{1}{2}}$.

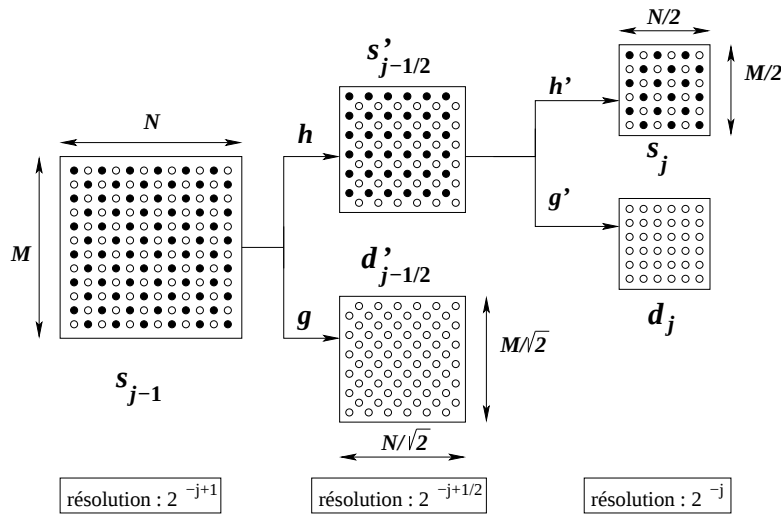


FIG. A.2 – Décomposition multiéchelle avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$

La transformée en ondelettes rapide se compose du filtrage auquel s'ajoute un sous-échantillonnage, ou un sur-échantillonnage dans le cas d'une transformée inverse. Afin de sous-échantillonner de manière régulière le réseau de points de $\mathbb{Z}^2$ restreint au support de l'image considérée, il suffit de ne conserver qu'un point sur deux à chaque ligne, avec un décalage d'un pixel sur les lignes d'indice impair. En ce qui concerne les images de détails, le décalage s'exécute sur les lignes d'indice pair. Aussi, une représentation plus classique de la transformée multiéchelle, illustrée par la figure (Fig. A.2), ne tient compte que du facteur de dilatation $\sqrt{2}$, sans prendre en considération la symétrie et le changement d'angle de l'homothétie. Ce mode de représentation montre de manière plus ostensible la pyramide multirésolution et les opérations de sur ou sous-échantillonnages. Les signaux s_j sont échantillonnés sur une grille carrée dans le cas où $j \in \mathbb{Z}$ et sur une grille quinconce dans le cas où $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$. Le banc de filtres (h, g) réalisant la transformée en ondelettes rapide est appliqué aux différentes images s_j ($j \in \mathbb{Z}$) autant de fois que nécessaire pour diminuer la résolution de l'approximation jusqu'à l'obtention de l'approximation désirée. En théorie, le banc de filtres (h, g) est employé indépendamment de la résolution 2^{-j} de l'image (Fig. A.1). En ce qui concerne la représentation classique (Fig. A.2), le banc de filtres (h, g) met en œuvre la transformée en ondelettes pour les images s_j avec $j \in \mathbb{Z}$, mais il ne s'applique pas directement à l'image quinconce s'_j ($j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$). Les opérations de changement de résolution qui n'ont pas été prises en compte lors du calcul de s'_j doivent nécessairement se répercuter sur le banc de filtres, afin d'exercer un filtrage identique au filtrage théorique. Les filtres (h', g') sont définis en opérant une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et une symétrie orthogonale sur les filtres (h, g) , comme le montre la figure (Fig. A.3).

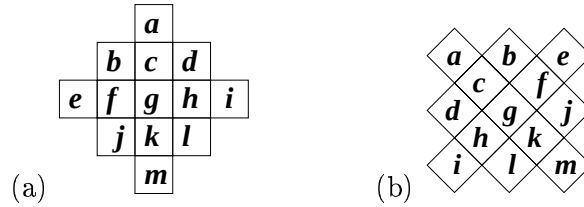


FIG. A.3 – (a) Exemple de filtres h (respectivement g) et (b) filtres h' (respectivement g') correspondant. Les filtres h et g sont employés pour des images échantillonnées sur une grille carrée tandis que les filtres h' et g' sont employés pour des images échantillonnées en quinconce.

A.2 Détails pour l'implémentation

En pratique, la structure des données doit ouvrir l'accès à une implémentation flexible et surtout peu onéreuse en espace mémoire. La représentation d'une image s_j pour $j \in \mathbb{Z}$, échantillonnée sur une grille carrée, est triviale. Celle des images approximées à des résolutions non entières est plus complexe. Les représentations théorique s_j et classique s'_j pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ ne conviennent pas, étant donné qu'on ne dispose pas de descriptif sous forme matricielle évident à part par l'insertion de zéros (méthode trop onéreuse). La méthode employée pour représenter l'image sur un ensemble de données plus compact est

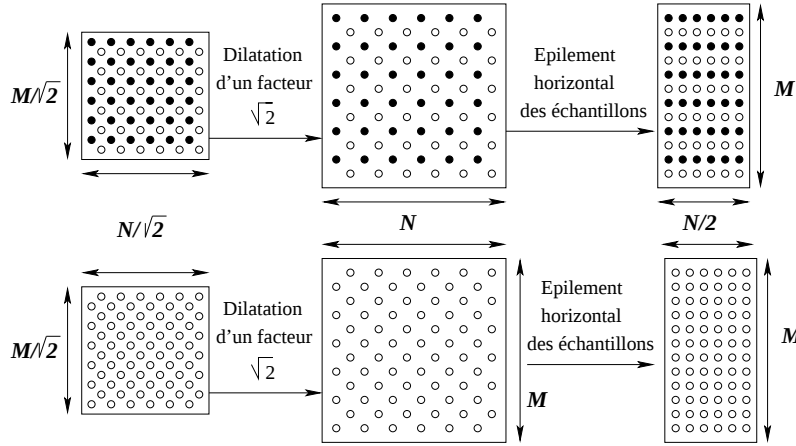


FIG. A.4 – Grilles quinconces et grilles quinconces projetées

de prendre l'image s'_j , de la dilater d'un facteur $\sqrt{2}$ et d'opérer un décalage des coefficients sur les lignes, comme il est montré dans la figure (Fig. A.4). Le banc de filtres appliqué à ce type d'images est montré et illustré par un exemple dans la figure (Fig. A.5). Les coefficients du banc de filtres (h', g') sont eux aussi décalés en ligne. Le décalage n'est pas effectué de la même manière pour h' et pour g' puisque le sous échantillonnage n'est pas tout à fait identique (voir Fig. A.4).

A.3 Filtrage par schéma lifting quinconce

Le schéma lifting s'apparente à la transformée en ondelettes rapide. Le lifting opère une transformée multiéchelle selon un principe de filtrage qui diffère de la transformée en ondelettes classique. La transformée comporte une étape de sous-échantillonnage en fin de cycle (suite au filtrage). En revanche, le lifting débute par un filtrage simple et trivial au moyen d'une transformée du type Haar ou polyphase. Elle se poursuit par un sous-échantillonnage. Il s'ensuit l'obtention de deux sous-images de plus faible résolution. La majeure partie du filtrage est ensuite réalisée sur les deux composantes de plus faible résolution (voir Fig A.6). Pour souligner ces dires, les équations du schéma lifting quinconce, déterminées au Chapitre 2, sont rappelés ci-après. La première étape se compose donc d'une transformée triviale $(h^{(0)}, g^{(0)})$ du type Haar ou polyphase, et d'un sous-échantillonnage :

$$\begin{aligned} s_j^{(0)}[n_x, n_y] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h^{(0)}[-k] s_{j-\frac{1}{2}}[L(n) - k] \\ d_j^{(0)}[n_x, n_y] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g^{(0)}[-k] s_{j-\frac{1}{2}}[L(n) + (1, 0) - k] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Par suite, intervient un ensemble de M opérateurs $\{U^{(l)}, P^{(l)}\}_{1 \leq l \leq L}$ (avec $M = 2L$), spécifiant les M pas lifting primaires et duaux qui composent le schéma. Les équations (A.2)

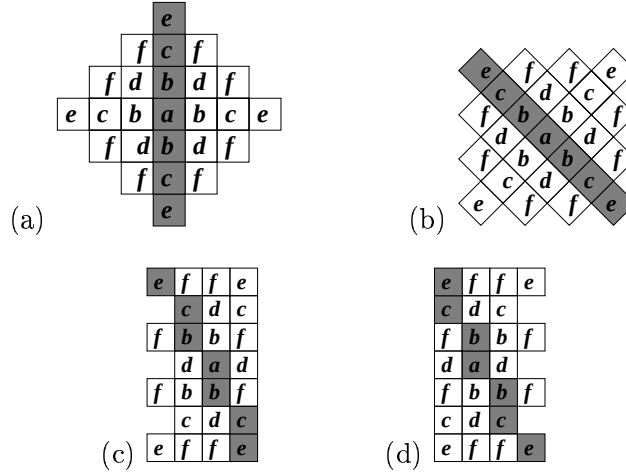


FIG. A.5 – (a) Exemple de filtre h ou g , (b) filtre h' ou g' correspondant, (c) Décalage sur les coefficients du filtre h' et (d) Décalage sur les coefficients du filtre g'

décrivent les différentes opérations lifting pour l allant de 1 à L :

$$\begin{aligned}
 s_j^{(l)}[n_x, n_y] &= s_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} U^{(l)}[k] d_j^{(l-1)}[n_x - k_1, n_y - k_2] \\
 d_j^{(l)}[n_x, n_y] &= d_j^{(l-1)}[n_x, n_y] - \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} P^{(l)}[k] s_j^{(l)}[n_x - k_1, n_y - k_2]
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Le filtrage réalisé par $(h^{(0)}, g^{(0)})$ est analogue au filtrage pratiqué lors d'une transformée en ondelettes rapide. En fait, l'équation (A.1) désigne tout simplement une transformée en ondelettes rapide en dimension 2 mise en œuvre par les filtres $(h^{(0)}, g^{(0)})$. Afin de prendre connaissances des détails explicitant le processus de filtrage pour des résolutions rationnelles ou réelles, il convient de se référer à la première partie du chapitre (A.1, A.2). Les opérateurs lifting $\{U^{(l)}, P^{(l)}\}_{1 \leq l \leq L}$ diffèrent, quant à eux, des filtres observés jusqu'à présent. Leur intervention au cours du traitement est postérieure au changement de résolution réalisé lors du filtrage initial et à l'opération de sous-échantillonnage. En conséquence, aucun facteur d'échelle n'intervient lors de l'implémentation des différents opérateurs lifting. Ainsi, les opérateurs ne peuvent mettre en œuvre la transformée pyramidale à eux seuls. Le lifting nécessite un filtrage préalable permettant d'acquérir les deux sous-signaux de plus faible résolution (A.1). En outre, si le schéma lifting correspond à une transformée en ondelettes rapide mise en œuvre par un banc de filtres bidimensionnels de forme diamant appliqué à l'image $s_{j-\frac{1}{2}}$, les opérateurs lifting $\{U^{(l)}, P^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$ s'appliquent aux diverses sous-images $\{s_j^{(l)}, d_j^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$ et sont de forme carrée (voir Fig. A.7). La forme carrée résulte du fait que les opérateurs ne sont pas appliqués à l'image originale, mais aux images sous-échantillonnées et réduites par l'application de L . En effet, imaginons le cas où le changement d'échelle et le sous-échantillonnage soient appliqués en fin de cycle, alors les opérateurs lifting sur-échantillonnés $\{U_{SE}^{(l)}, P_{SE}^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$ sont appliqués aux échantillons de $s_{j-\frac{1}{2}}$ de somme d'indices impaire (pour $U_{SE}^{(l)}$) et paire (pour $P_{SE}^{(l)}$). Notons

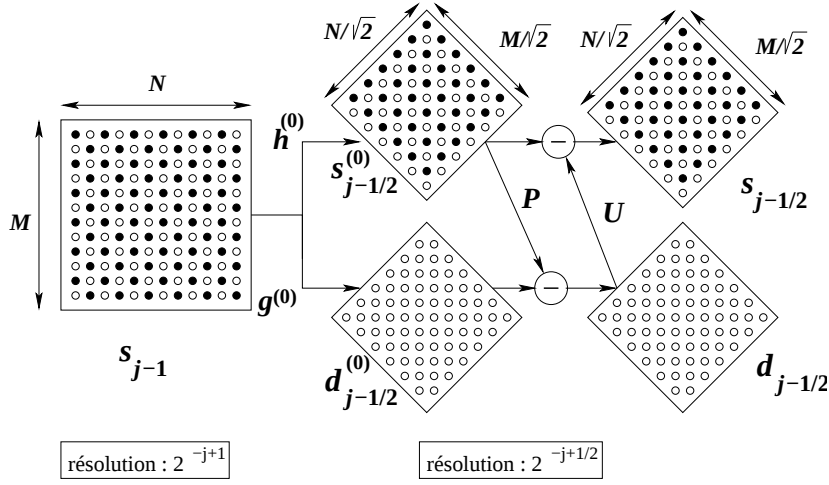
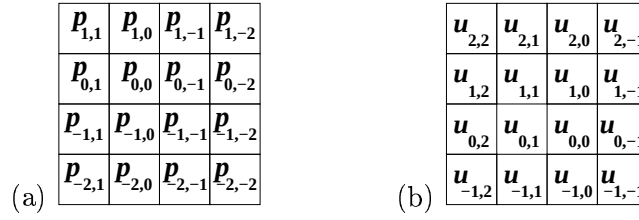


FIG. A.6 – Schéma lifting quinconce

FIG. A.7 – Exemples d'opérateurs (a) $P^{(l)}$ et (b) $U^{(l)}$

que l'image $s_{j-\frac{1}{2}}$ est modifiée par chaque pas lifting. Les opérateurs $\{U_{SE}^{(l)}, P_{SE}^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$ sont de forme diamant. La figure (Fig. A.8 en (a) et en (b)) en donne une représentation graphique. Le changement de résolution effectué à l'aide de l'opérateur L^{-1} se compose d'une homothétie de rapport $2^{-\frac{1}{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ suivie d'une symétrie orthogonale. L'opérateur L^{-1} plus le sous-échantillonnage permettent de retomber sur les opérateurs lifting $\{U^{(l)}, P^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$. Dans le cas où seul le changement d'échelle est réalisé (Fig. A.6), les opérateurs $\{\tilde{U}^{(l)}, \tilde{P}^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$, appliqués aux deux composantes échantillonnées sur des grilles quinconce $\{s_j^{(l)}, d_j^{(l)}\}_{0 \leq l \leq M}$, sont obtenus à partir de $\{U^{(l)}, P^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$ par rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de symétrie orthogonale, ou à partir de $\{U_{SE}^{(l)}, P_{SE}^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$ par dilatation d'un facteur $2^{-\frac{1}{2}}$ et sous échantillonnage. La figure (Fig. A.8 en (c) et en (d)) donne une représentation graphique des filtres $\{U^{(l)}, P^{(l)}\}_{1 \leq l \leq M}$.

A.4 Gestion des problèmes aux limites du support

L'application d'une transformée en ondelettes rapide à une image génère des problèmes aux alentours des limites du support de l'image. En effet, l'image n'est pas un signal infini.

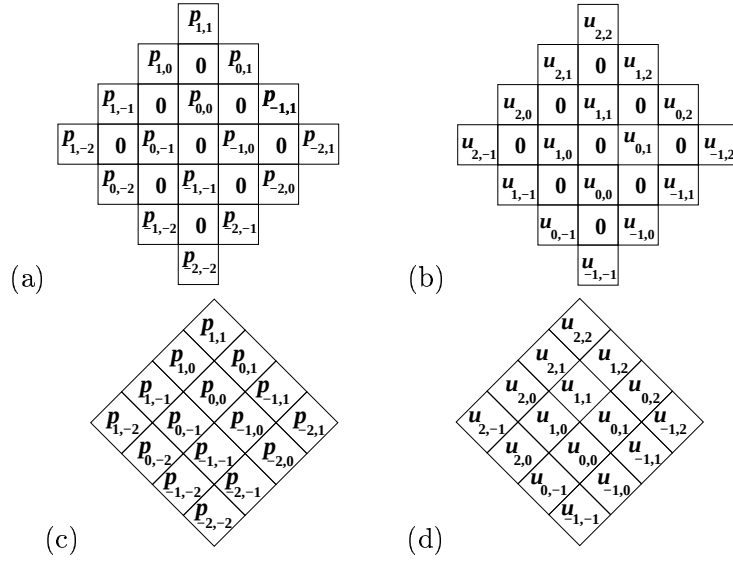


FIG. A.8 – Filtres P et U quinconces

Elle est restreinte à un domaine borné. L'application de filtres aux limites du support de l'image génère la plupart du temps des débordements. En effet, certains coefficients du filtres sont appliqués au delà du domaine de définition de l'image. Il existe plusieurs méthodes afin d'éviter tout problème de ce genre. Toutes ces méthodes permettent d'élargir l'image (de manière purement théorique). La première consiste à prolonger les bords par l'insertion de zéros, la deuxième consiste à considérer l'image comme une mosaïque et de reproduire l'image de chaque coté de l'image. La dernière méthode, exploitée dans nos expérimentations, consiste à symétriser les bords. La symétrie est entièrement décrite

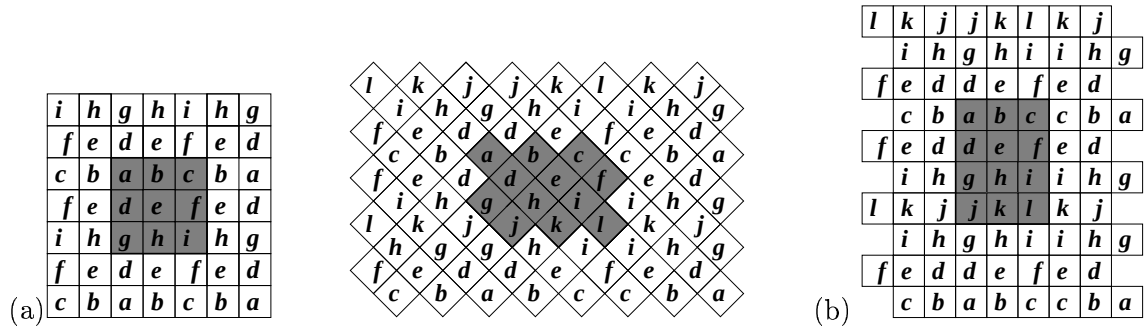


FIG. A.9 – Gestion des effets de bords pour une grille carré (a), une grille quinconce (b), et une grille quinconce décalée (c). Les points grisés illustrent les pixels de l'image et les blancs illustrent les pixels obtenus par symétrie.

par les figures (Fig A.9). Les points représentant les pixels de l'image sont grisés et les points obtenus par la symétrie sont représentés en blanc. La figure (Fig A.9 (a)) donne un exemple pour un échantillonnage carré. En ce qui concerne l'échantillonnage quinconce, deux illustrations permettent de comprendre comment la symétrie est appliquée pour une

grille quinconce (Fig A.9 (b)) et une grille quinconce décalée (Fig A.9 (c)).

Annexe B

Complément sur le schéma lifting quinconce et preuves

B.1 Preuve de la proposition 13

Cette annexe présente une démonstration de la proposition 13 établie au chapitre 2 dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

PROPOSITION 26 13

Soient h et $\tilde{h}$ des filtres passe-bas à phase nulle et définis dans $\ell^2(\mathbb{R})$, alors il existe une factorisation de la matrice

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ol}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) & -h_o(z^{-1}) \\ \tilde{h}_o(z) & h_e(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

en schéma lifting, les opérateurs lifting $p^{(l)}$ et $u^{(l)}$ ($1 \leq l \leq L$, $2L$ étant le nombre de pas lifting) vérifiant

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ol}(z) = \prod_{l=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & u^{(L-l)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^{(L-l)}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix},$$

telle que les $2L$ polynômes de Laurent $z^{-1}P^{(l)}(z^2)$ et $zU^{(l)}(z^2)$ ($\forall l \in \{1, \dots, L\}$) soient à phase nulle.

Avant d'établir la preuve, nous rappelons certaines règles utilisées lors de la démonstration.

COROLLAIRE 27 $\forall n \in \mathbb{N}$, le polynôme $z^{-n} + z^n$ est un polynôme en $z^{-1} + z$.

Preuve : Définissons une série (S_n) , telle que :

$$S_n = z^{-n} + z^n$$

alors $S_0 = 2$, $S_1 = z + z^{-1}$. D'autre part $S_n = z^n + z^{-n}$ est défini par la relation de récurrence :

$$S_n = z^n + z^{-n} = (z + z^{-1}) S_{n-1} - S_{n-2}$$

Posons $x = z + z^{-1}$ et vérifions de manière récursive que $S_n = z^n + z^{-n}$ peut se récrire sous forme d'un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[X]$.

$S_0 = 2$ et $S_1 = x$ sont des polynômes inclus dans $\mathbb{R}[X]$, la condition initiale est vérifiée. Formulons l'hypothèse que S_{n-2} et S_{n-1} appartiennent à $\mathbb{R}[X]$ et montrons que S_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Comme $S_n = xS_{n-1} - S_{n-2}$, $S_n \in \mathbb{R}[X]$ et S_n s'écrit sous forme d'un polynôme en x . Ainsi, $z^{-n} + z^n$ est un polynôme de $z + z^{-1}$. $\square$

COROLLAIRE 28 Soit la suite définie par

$$\begin{aligned} S_0 &= 2 \\ S_1 &= X \\ S_n &= XS_{n-1} - S_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \end{aligned}$$

alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, S_{2k} est une somme de monômes de degré pair $\in \mathbb{R}[X]$ et S_{2k+1} est une somme de monômes de degré impair $\in \mathbb{R}[X]$

Preuve : La preuve du corollaire s'obtient par récurrence.

- Conditions initiales : $S_0 = 2$ est clairement un monôme de degré pair et S_1 est un monôme de degré impair.
- Vérifions que si S_{2k-2} est une somme de monômes de degré pair et S_{2k-1} une somme de monômes de degré impair, alors S_{2k} est une somme de monômes de degré pair et S_{2k+1} une somme de monômes de degré impair. Soit

$$S_{2k} = XS_{2k-1} - S_{2k-2}$$

Si S_{2k-1} est une somme de monômes de degré impair alors XS_{2k-1} est une somme de monômes de degré pair. S_{2k} est donc une somme de monômes de degré pair. Nous montrons de façon analogue que $S_{2k+1} = XS_{2k} - S_{2k-1}$ est une somme de monômes de degré impair.

$\square$

Preuve de la proposition : Soient $h(z)$ et $\tilde{h}(z)$ des filtres passe-bas unidimensionnels symétriques en 0, posons $g(z) = z^{-1}\tilde{h}(-z^{-1})$ et $\tilde{g}(z) = z^{-1}h(-z^{-1})$. Les filtres h et g forment un banc de filtres procédant à la mise en oeuvre d'une transformée en ondelettes biorthogonale et le banc de filtres défini par $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ réalise l'opération de synthèse. La factorisation de la matrice polyphase duale

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{g}_e(z) \\ \tilde{h}_o(z) & \tilde{g}_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) & -h_o(z^{-1}) \\ \tilde{h}_o(z) & h_e(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

permet d'obtenir une implémentation lifting de la transformée en ondelettes. Cette opération, effectuée dans un espace non euclidien, n'admet pas de résultat unique. Néanmoins, nous pouvons prouver l'existence d'une factorisation en schéma lifting définissant les opérateurs $P^{(l)}(z)$ et $U^{(l)}(z)$, telle que les polynômes de Laurent $z^{-1}P^{(l)}(z^2)$ et $zU^{(l)}(z^2)$ soient

symétriques en zéro. Une remarque préalable à la démonstration proprement dite permet de recadrer le problème et de ne considérer que les polynômes engendrant les différents opérateurs lifting.

REMARQUE 29 *L'ensemble des polynômes $P^{(l)}(z)$ et $U^{(l)}(z)$ ($\forall l \in \{1, \dots, L-1\}$) s'identifie aux quotients successifs, notés $q_i(z)$, de la division «euclidienne» des deux composantes polyphases de $\tilde{h}$, soient $\tilde{h}_e(z)$ et $\tilde{h}_o(z)$. Les quotients de la division «euclidienne» sont déterminés de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\tilde{h}_e(z) &= \tilde{h}_o(z)q_1(z) + r_1(z) \\ \tilde{h}_o(z) &= r_1(z)q_2(z) + r_2(z) \\ r_1(z) &= r_2(z)q_3(z) + r_3(z) \\ &\vdots \\ r_{M-3}(z) &= r_{M-2}(z)q_{M-1}(z) + K \\ r_{M-2} &= Kq_M + 0\end{aligned}$$

avec $L = \lceil \frac{M}{2} \rceil + 1$. Le cas M impair se traduit tout simplement par l'assignation de $P^{(L-1)}(z) \equiv 0$. L'adjonction de cet opérateur est purement théorique et permet de ne pas singulariser le type de schéma traité. Une fois les filtres calculés, les pas lifting dont les opérateurs sont identiquement nuls sont supprimés du schéma, puisque ces pas ne provoquent aucune modification dans les sous bandes.

Les deux derniers pas lifting représentés par les polynômes $U^{(L)}(z)$ et $P^{(L)}(z)$ sont, quant à eux, obtenus à partir de $\tilde{g}(z)$ et de K le dernier reste non nul de la division.

$$\begin{aligned}q_{2l-1}(z) &= u^{(l)}(z) \\ q_{2l}(z) &= p^{(l)}(z) \quad \forall l \in \{1, \dots, L-1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K^2 s(z) &= u^{(L)}(z) \\ p^{(L)}(z) &= 0\end{aligned}$$

Démontrer la proposition (13) revient à démontrer que les fonctions $zq_{2l-1}(z^2)$ et $z^{-1}q_{2l}(z^2)$ sont symétriques en zéro pour les M premiers pas lifting, et que la fonction $K^2 s(z^2)$ est également symétrique pour le dernier pas.

Premier pas lifting : Preuve de l'existence d'un polynôme q_1 vérifiant $zq_1(z^2)$ symétrique en zéro

Dans un premier temps, nous montrons l'existence de $q_1(z)$, un quotient de la division «euclidienne» de $\tilde{h}_e(z)$ par $\tilde{h}_o(z)$, vérifiant l'assertion $zq_1(z^2)$ symétrique en zéro. Le polynôme q_1 est en partie défini par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_e(z) &= \tilde{h}_o(z)q_1(z) + r_1(z) \\ [r_1] &< [\tilde{h}_o]\end{aligned} \tag{B.1}$$

$[q_1] = \deg q_1^+ + \deg q_1^-$ désigne le degré de q_1 , et $\deg q_1^+$ et $\deg q_1^-$ les degrés des parties régulière $\left(q_1^+ = \sum_{n=0}^{\deg q_1^+} q_1(n)z^n\right)$ et singulière $\left(q_1^- = \sum_{n=1}^{\deg q_1^-} q_1(-n)z^{-n}\right)$ de la série de Laurent q_1 . L'application de z^2 au polynôme $\tilde{h}_e$ conduit aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_e(z^2) &= \tilde{h}_o(z^2) q_1(z^2) + r_1(z^2) \\ \tilde{h}_e(z^2) &= \left[z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)\right] \left[zq_1(z^2)\right] + r_1(z^2)\end{aligned}$$

L'hypothèse $\tilde{h}$ symétrique en zéro entraîne $\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ symétriques en zéro. En effet, si $\tilde{h}$ est symétrique, $\tilde{h}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\tilde{h}(z) = \sum_{k=-a}^a \tilde{h}_k z^{-k} = \tilde{h}_0 + 2 \sum_{k=1}^a \tilde{h}_k (z^{-k} + z^k) \quad (\text{B.2})$$

A partir de l'équation (B.2) définissant $\tilde{h}$, nous déduisons les équations de $\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ s'écrivant sous forme de polynômes symétriques en zéro :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_e(z^2) &= \tilde{h}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \tilde{h}_{2k} (z^{-2k} + z^{2k}) \\ z^{-1}\tilde{h}_o(z^2) &= 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \tilde{h}_{2k} (z^{-2k+1} + z^{2k-1})\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

La symétrie du polynôme $zq_1(z^2)$ se vérifie en deux étapes. La première consiste à montrer l'existence d'une division de $\tilde{h}_e(z^2)$ par $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ pour laquelle le quotient et le reste sont symétriques en zéro. La seconde consiste à montrer que le quotient de cette division est un polynôme de la forme $zq_1(z^2)$, q_1 vérifiant (B.1).

1. Nous allons maintenant établir la preuve de l'existence d'un couple de polynômes symétriques en zéro, respectivement quotient et reste de la division euclidienne de $\tilde{h}_e(z^2)$ par $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$. La propriété de symétrie des polynômes $\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ autorise le changement de variables suivant :

$$z + z^{-1} = x \quad (\text{B.4})$$

La faisabilité du changement de variables nécessite que les polynômes considérés soient fonctions de $(z + z^{-1})$. Consécutivement aux règles de symétrie, les polynômes

$\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^{\max} a_n (z^{-n} + z^n)$. Le corollaire (27) indique que $(z^{-n} + z^n) (\forall n \in \mathbb{N})$ est fonction de $(z + z^{-1})$. Ainsi, les polynômes $\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$ se définissent comme les sommes pondérées de polynômes fonction de $z^{-1} + z$, et par extension, ils sont aussi fonction de $(z + z^{-1})$. En conséquence, le

changement de variables (B.4) peut s'appliquer à $\tilde{h}_e(z^2)$ et $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$. Il engendre deux polynômes $h_0(x)$ et $h_1(x)$ appartenant à l'espace euclidien $\mathbb{R}[X]$:

$$h_0(x) = h_e(z^2) = h_0 + \sum_{i=1}^m h_{2i} \cdot S_{2i} \quad (\text{B.5})$$

$$h_1(x) = z^{-1}h_o(z^2) = \sum_{i=0}^n h_{2i+1} \cdot S_{2i+1}. \quad (\text{B.6})$$

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}[X]$, la division euclidienne est *unique*. Il existe donc un unique couple (Q_E, R_E) quotient et reste de la division de h_0 par h_1 dans $\mathbb{R}[X]$, vérifiant :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= h_1(x)Q_E(x) + R_E(x) \\ \deg R_E &< \deg h_1 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Par le changement de variable inverse à (B.4), les polynômes Q_E et $R_E \in \mathbb{R}[X]$ s'identifient aux polynômes Q_1 et R_1 :

$$\begin{aligned} Q_E(x) &= \sum_{n=0}^{\deg Q_E} Q_E(n)x^n = \sum_{n=0}^{\deg Q_E} Q_E(n)(z + z^{-1})^n = Q_1(z) \\ R_E(x) &= \sum_{n=0}^{\deg R_E} R_E(n)x^n = \sum_{n=0}^{\deg Q_E} R_E(n)(z + z^{-1})^n = R_1(z) \end{aligned}$$

avec $\deg Q_1 = 2 \deg Q_E$, $\deg R_1 = 2 \deg R_E$. Par ailleurs, $\deg h_0 = 2 \deg(\tilde{h}_e(z^2))$ et $\deg h_1 = 2 \deg(z^{-1}\tilde{h}_o(z^2))$. De ces dernières équations et de (B.7) se déduisent les formules :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e(z^2) &= z^{-1}\tilde{h}_o(z^2) Q_1(z) + R_1(z) \\ \deg R_1 &< \deg(\tilde{h}_e(z^2)) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

L'équation (B.8) certifie que le couple (Q_1, R_1) s'identifie au quotient et au reste d'une division de $\tilde{h}_e(z^2)$ par $z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$. La symétrie est évidente, puisque les polynômes Q_1 et R_1 sont des sommes pondérées de fonctions de la forme $(z + z^{-1})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Comme la somme pondérée de fonctions symétriques est une fonction symétrique, les polynômes Q_1 et R_1 sont également symétriques.

2. La suite de la démonstration consiste à vérifier l'existence de polynômes $q_1(z)$ et $r_1(z)$ solution de (B.1) et satisfaisant $Q_1(z) = zq_1(z^2)$, et $R_1(z) = r_1(z^2)$. Considérons les fonctions $h_0(x)$ et $h_1(x)$ définies par les équations (B.5) et (B.6). A l'aide de ces équations et des corollaires (28) et (27), nous pouvons établir que h_0 est une somme de monômes de degré pair et h_1 une somme de monômes de degré impair de $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \sum_{n=0}^{a_{max}} a_n x^{2n} \\ h_1(x) &= \sum_{n=1}^{b_{max}} b_n x^{2n-1} \end{aligned}$$

Posons

$$A(x) = \sum_{n=0}^{a_{max}} a_n x^n \quad B(x) = \sum_{n=0}^{b_{max}} b_n x^n$$

Nous remarquons alors :

$$h_0(x) = A(x^2) \quad h_1(x) = x^{-1}B(x^2) \quad (\text{B.9})$$

L'algorithme d'Euclide s'énonce :

$$\exists! (Q, R) \in \mathbb{R}[X] \mid A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

avec $\deg_x(B) > \deg_x(R)$.

L'équation (B.9) entraîne :

$$h_0(x) = h_1(x) \cdot xQ(x^2) + R(x^2)$$

avec $\deg(B(x^2)) > \deg(R(x^2))$ et $\deg(B(x^2)) - \deg(R(x^2)) \equiv 0 \pmod{2}$. A partir de ces deux dernières relations se déduit l'inégalité : $\deg(x^{-1}B(x^2)) > \deg(R(x^2))$. La condition d'Euclide est vérifiée pour les polynômes $h_0(x)$ et $h_1(x)$. L'unicité de la division euclidienne sur l'anneau $\mathbb{R}[X]$ implique l'identification $Q_E(x) = xQ(x^2)$ et $R_1(x) = R(x^2)$. Soit $Q_1(z) = Q_E(z + z^{-1}) = (z + z^{-1})Q(z^2 + z^{-2} + 2)$ et $R_1(z) = R_E(z + z^{-1}) = R(z^2 + z^{-2} + 2)$. Les polynômes $Q_1(z)$ et $R_1(z)$ sont respectivement des sommes de monômes de degré impair et pair. Il en résulte que $Q_1(z)$ est un polynôme symétrique de la forme $zq_1(z^2)$ et R_1 un polynôme symétrique de la forme $r_1(z^2)$. En conséquence, $Q_1(z)$ caractérise un pas lifting puisqu'il est appliqué aux échantillons d'indice impair.

Deuxième pas lifting et itération du processus :

Pour le pas lifting dual, nous avons la relation : $h_o(z) = r_1(z) \cdot q_2(z) + r_2(z)$, aussi :

$$z^{-1} \cdot h_o(z^2) = r_1(z^2) \cdot (z^{-1}q_2(z^2)) + z^{-1}r_2(z^2)$$

Les polynômes à diviser $z^{-1} \cdot h_o(z^2)$ et $r_1(z^2)$ sont des polynômes symétriques. La preuve que $z^{-1}q_2(z^2)$ et $z^{-1}r_2(z^2)$ sont symétriques en zéro s'obtient de la même façon que pour le premier pas lifting. En itérant la démonstration, nous pouvons montrer que les $2(L-1)$ premiers pas lifting sont symétriques. Le résultat montre l'existence d'une factorisation du vecteur $(h_e(z^2) \quad z^{-1}h_o(z^2))^T$ en schéma lifting telle que les filtres obtenus soient symétriques.

Dernier pas lifting :

En ce qui concerne le dernier pas lifting, nous avons $u_l(z) = K^2s(z)$. Après le sur-échantillonnage la transformée en z du filtre devient : $zu_l(z^2) = K^2zs(z^2)$. Pour vérifier la

proposition, il faut juste démontrer que $zs(z^2)$ soit effectivement symétrique en zéro. $s(z)$ est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} g_e(z) = h_e(z)s(z) + g_e^0(z) \\ g_o(z) = h_o(z)s(z) + g_o^0(z) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

La propriété de reconstruction parfaite implique que

$$\tilde{h}_e(z) = g_o(z^{-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{h}_o(z) = -g_e(z^{-1}).$$

En remplaçant (B.1) dans (B.10) :

$$\begin{cases} -\tilde{h}_o(z^{-1}) = h_e(z)s(z) - \tilde{h}_o^0(z^{-1}) \\ \tilde{h}_e(z^{-1}) = h_o(z)s(z) + \tilde{h}_e^0(z^{-1}) \end{cases}$$

A partir de (B.1) et après changement de variables, les égalités suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} -z(\tilde{h}_o(z^{-2}) - \tilde{h}_o^0(z^{-2})) = h_e(z^2) \cdot (zs(z^2)) \\ \tilde{h}_e(z^{-2}) - \tilde{h}_e^0(z^{-2}) = z^{-1}h_o(z^2) \cdot (zs(z^2)) \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que les polynômes $\tilde{h}_e(z^{-2}) - \tilde{h}_e^0(z^{-2}) = \tilde{h}_e(z^2) - \tilde{h}_e^0(z^2)$ et $z^{-1}h_o(z^2)$ sont symétriques. Aussi, le procédé mis en oeuvre auparavant est réutilisé afin de montrer que le polynôme $zs(z^2)$ est symétrique en zéro.

En conclusion, pour des filtres d'analyse et de synthèse passe-bas h et $\tilde{h}$, il existe une factorisation de la matrice polyphase en schéma lifting, avec P_i et U_i (pour $i \in \{1..L\}$) les opérateurs lifting, telle que $z^{-1}P_i(z^2)$ et $zU_i(z^2)$ soient symétriques.

□

Bibliographie

- [1] N. Ahmed, T. Natarajan et K.R. Rao. Discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Computers*, C-23 : 90–93, janvier 1974.
- [2] A. Aldroubi et Michael Unser. Families of multiresolution and wavelet spaces with optimal properties. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 14 : 417–446, 1993.
- [3] Isabelle Amonou. *Décompositions hiérarchiques non-redondantes orientées régions pour le codage des images numériques*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris, 2001.
- [4] R. Ansari et C. Guillemot. Exact reconstruction filter banks using diamond fir filters. *Proc. Bilcon 1990, Elsevier Press*, pages 1412–1424, juillet 1990.
- [5] R. Ansari, C. W. Kim et M. Dedovic. Structure and design of two-channel filter banks derived from a triplet of halfband filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, pages 1487–1496, décembre 1999.
- [6] Marc Antonini. *Transformée en Ondelettes et Compression Numériques des Images*. Thèse de Doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 1991.
- [7] Marc Antonini, Michel Barlaud, Pierre Mathieu et Ingrid Daubechies. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(2) : 205–220, avril 1992.
- [8] Michel Barlaud. *Wavelet and Image Communication*. Jan Biemond. Elsevier, 1994.
- [9] Michel Barlaud, Claude Labit et al. *Compression et codage des images et des vidéo*. Hermès Sciences Publications, Paris, 2002.
- [10] Michel Barlaud, Patrick Solé, Thierry Gaidon, Marc Antonini et Pierre Mathieu. Pyramidal lattice vector quantization for mutiscale image coding. *IEEE Transactions on Image Processing*, 3(4), juillet 1994.
- [11] T. Berger. *Rate Distortion Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [12] P.J. Burt et E.H Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Transactions on Communications*, 31(4) : 532–540, avril 1983.
- [13] A.R. Calderbank, I. Daubechies, W. Sweldens et B.-L. Yeo. Wavelet transforms that map integers to integers. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 5(3) : 332–369, 1998.
- [14] Pierre Charbonnier, Marc Antonini et Michel Barlaud. Implantation d’une transformée en ondelettes 2D dyadique au fil de l’eau. Rapport de recherche, CNES (French Space Agency), octobre 1995.

- [15] Jean Marc Chassery et Jules Waku. Spécification d'une ondelette pour la représentation en multirésolution d'un contour discret. *Traitement du Signal*, 10(3) : 231–240, 1993.
- [16] Hyeokho. Choi et Richard Baraniuk. Analysis of wavelet-domain wiener filters. Dans *Proc. IEEE-SP Int. Symp. on TimeFreq. and Time-Scale Anal.*, pages 613–616, Pittsburgh, PA, octobre 1998.
- [17] C. Christopoulos, A. Skodras et T. Ebrahim. The jpeg2000 still image coding system : An overview. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 46(4) : 1103–1127, novembre 2000.
- [18] C. Chrysafis et A. Ortega. Line based reduced memory wavelet image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(3) : 378–389, mars 2000.
- [19] Christos Chrysafis et Antonio Ortega. Minimum memory implementations of the lifting scheme. Dans *SPIE, International Symposium on Optical Science and Technology*, pages 333–338, août 2000.
- [20] Roger L. Claypoole, Geoffrey M. Davis, Wim Sweldens et Richard G. Baraniuk. Non-linear wavelet transforms for image coding via lifting. *soumis dans IEEE Transactions on Image Processing*, 2000.
- [21] A. Cohen. Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature. *ANN. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 1990.
- [22] A. Cohen, I. Daubechies et J. Feauveau. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45 : 485–560, 1992.
- [23] A. Croisier, D. Esteban et C. Galand. Perfect channel splitting by use of interpolation-decimation-tree decomposition techniques. Dans *Internationale Conference on Info. Sciences and Systems*, pages 443–446, Grèce, août 1976.
- [24] J. Little D. Cox et D.O'Shea. *Ideal, Varieties, and Algorithms : An Introduction to computation Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. undergraduate Texts in mathematics., Springer, 1992.
- [25] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41 : 909–996, 1988.
- [26] Ingrid Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signals analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36 : 961–1005, 1990.
- [27] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61 Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
- [28] Ingrid Daubechies et Wim Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps. *J. Fourier Anal. Appl.*, 4(3) : 247–269, 1998.
- [29] G. Davis et A. Nosratinia. Wavelet-based image coding : An overview. *Applied and Computational Control, Signals, and Circuits*, 1(1) : 205– 269, 1998.
- [30] Franck Davoine, Marc Antonini, Jean Marc Chassery et Michel Barlaud. Fractal image compression based on delaunay triangulation and vector quantization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(2) : 338–346, 1996.

- [31] François Moreau de Saint-Martin. *Bancs de filtres et ondelettes : synthèses, adaptations et applications*. Thèse de Doctorat, Université Paris IX Dauphine, janvier 1997.
- [32] François Moreau de Saint-Martin, Pierre Siohan et Albert Cohen. Biorthogonal filterbanks and energy preservation property in image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(2), février 1999.
- [33] P. Delsarte, B. Macq et D. T. M. Slock. Signal-adapted multiresolution transform for image coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) : 897–904, 1992.
- [34] Gilles Deslauriers et Serge Dubuc. Interpolation dyadique. Dans *Fractals, dimensions non entières et application*, pages 44–55. Masson, Paris, 1987.
- [35] Gilles Deslauriers et Serge Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.*, 5(1) : 49–68, 1989.
- [36] D. L. Donoho. Interpolating wavelet transform. *Preprint, Department of Statistics, Stanford University*, 1992.
- [37] Jean Christophe Feauveau. *Analyse Multirésolution par Ondelettes non Orthogonales et Bancs de Filtres Numériques*. Thèse de Doctorat, Université Paris Sud, 1990.
- [38] Jean Christophe Feauveau. Analyse multirésolution pour les images avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$. *Traitement du signal*, 7(2), 1990.
- [39] W. T. Freeman et E. H. Adelson. The design and use of steerable filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(9) : 891–906, 1991.
- [40] Didier Le Gall et A. Tabatabai. Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques. Dans *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Processing*, pages 761–764, Vancouver, avril 1988.
- [41] A. Gersho et R. M. Gray. *Vector quantization and signal compression*. Kluwers Academic Publishers, 1993.
- [42] Annabelle Gouze, Marc Antonini et Michel Barlaud. Quincunx filtering lifting scheme for image coding. Dans *SPIE, Visual Communication and Image Processing*, volume 1, pages 1–11, Janvier 1999.
- [43] Annabelle Gouze, Marc Antonini et Michel Barlaud. Quincunx lifting scheme for image compression. Dans *IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 665–668, Vancouver, septembre 2000.
- [44] Annabelle Gouze, Marc Antonini, Michel Barlaud et Benoit Macq. Optimized lifting scheme for two-dimensional quincunx sampling images. Dans *IEEE International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 253–258, Thessalonique, Grèce, octobre 2001.
- [45] Alex Grossmann et Jean Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4) : 723–736, 1974.
- [46] Michael L. Hilton, Björn D. Jawerth et Ayan Sengupta. Compressing still and moving images with wavelets. *Multimedia Systems*, 2(5) : 218–227, décembre 1994.
- [47] D. A. Huffman. A method for the construction of minimum redundancy codes. *Proceedings of the Institute of Electronics and Radio Engineers*, 40 : 1098–1101, 1952.

- [48] A. E. Jacquin. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(1) : 18–30, 1992.
- [49] A. E. Jacquin. Fractal image coding : a review. Dans *Proceedings of the IEEE*, volume 81, pages 1451–1465, octobre 1993.
- [50] Herbert Jahn et Ralf Reulke. Staggered line arrays in pushbroom cameras : theory and application. Dans *International archives of photogrammetry and remote sensing*, volume XXXIII, Amsterdam, 2000.
- [51] Anil K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice Hall, 1989.
- [52] Björn Jarwerth et Wim Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM rev.*, 36(3) : 377–412, 1994.
- [53] Ho Youl Jung. *Contribution à la compression sans pertes pour la transmission progressives des images. Proposition de transformation avec arrondis*. Thèse de Doctorat, Institut national de sciences appliquées de Lyon, avril 1998.
- [54] C. W. Kim et R. Ansari. Subband decomposition procedure for quincunx sampling grids. Dans *SPIE Conference on Visual Communication and Image Processing*, pages 112–123, novembre 1991.
- [55] Jelena Kovačević et Wim Sweldens. Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(3), 2000.
- [56] Jelena Kovačević et Martin Vetterli. Non-separable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelets bases for $\mathbb{R}^n$. *IEEE Transactions on Information theory*, 38(2) : 533–555, mars 1992.
- [57] Jelena Kovačević et Martin Vetterli. Nonseparable two- and three-dimensional wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(5) : 1269–1273, mai 1995.
- [58] Catherine Lambert-Nebout, Christophe Latry, Gilles Moury, Christophe Parisot, Marc Antonini et Michel Barlaud. Image compression for future high resolution optical remote sensing missions. Dans *SPIE*, San Diego, 2000.
- [59] Catherine Lambert-Nebout et Gilles Moury. A survey of on board image compression for CNES space missions. Dans *Proceedings of IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 1999.
- [60] Christophe Latry et Bernard Rougé. Spot5 thr mode. Dans *Visual Communication and Image Processing*, USA, 1998. SPIE.
- [61] Christophe Latry et Bernard Rougé. Optimized sampling for ccd instruments : the supermode scheme. Dans *IGARSS*, Honolulu, USA, juillet 2000.
- [62] Jérôme Lebrun. *Balancing MultiWavelets*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, mai 2000.
- [63] John Michael Lounsbery. *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*. Thèse de Doctorat, Department of Computer Science and Engineering, Université du Washington, Seattle, WA, 1994.
- [64] Eric Majani. Wavelet filter design for on-board image compression. *Image Analysis Group Section 384*, août 1994.

- [65] Stéphane Mallat. *Multiresolution representations and wavelets*. Thèse de Doctorat, University of Pennsylvania, 1988.
- [66] Stéphane Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1) : 69–87, 1989.
- [67] Stéphane Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, juillet 1989.
- [68] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.
- [69] Stéphane Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'école Polytechnique, 2000.
- [70] Stéphane Mallat et Frédéric Falzon. Analysis of low bit rate image transform coding. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46 : 1027–1042, avril 1998.
- [71] Henrique S. Malvar. Lapped transforms for efficient transform/subband coding. *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing*, 38(6), juin 1990.
- [72] J.L. Mannos et D.J. Sakrison. The effect of visual fidelity criterion on the encoding of images. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(4) : 525–536, 1974.
- [73] T. G. Marshall. Fast wavelet transform based upon the euclidean algorithm. Dans *27th annual conference on Information Sciences and Systems*, pages 54–58, Baltimore, USA, 1993.
- [74] J. McClellan. The design of two-dimensional filters by transformations. Dans *Seventh Ann. Princeton Conference on ISS*, pages 247–251, Princeton, NJ, 1973.
- [75] Jean-Yves Mertés. *Optimisation et dimensionnement de la transformée multirésolution en précision finie*. Thèse de Doctorat, Université Catholique de Louvain, 1995.
- [76] Jean-Yves Mertés, Benoit Macq, Serge Comes et Jean-Didier Legat. In search of an optimal signal-adapted multiresolution transform for image compression. Dans *IEEE-ProRISC Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, pages 175–178., Houthalen, avril 1992.
- [77] Yves Meyer. Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées. Cahier de Math. du CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 1987.
- [78] Yves Meyer. *Ondelettes et Opérateurs, I : Ondelettes, II : Opérateurs de Calderón-Zygmund, III : (with R. Coifman), Opérateurs Multilinéaires*. Hermann, Paris, 1990.
- [79] Pierre Moulin et M.Kivanç Mihçak. Theory and design of signal-adapted fir paraunitary filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing, Special Issue on Theory and Application of Filter Banks and Wavelet Transforms*, 46(4) : 920–929, avril 1998.
- [80] P. Raffeney, M. Antonini and M. Barlaud. Non-asymptotical distortion-rate models for entropy coded lattice vector quantization. *IEEE Transactions on Image Processing*, décembre 2000.
- [81] Christophe Parisot, Marc Antonini et Michel Barlaud. Ebwic : A low complexity and efficient rate constrained wavelet image coder. Dans *IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 653–656, Vancouver, septembre 2000.

- [82] Christophe Parisot, Marc Antonini et Michel Barlaud. Scan-based quality control for JPEG2000 using R-D models. Dans *Proceedings of XI European Signal Processing Conference*, Toulouse, France, septembre 2002.
- [83] Christophe Parisot, Marc Antonini et Michel Barlaud. Stripe-based MSE control in image coding. Dans *Proceedings of IEEE International Conference in Image Processing*, Rochester, USA, septembre 2002.
- [84] H. Park et C. Woodburn. An algorithmic proof of suslin's stability theorem for polynomial rings, 1994.
- [85] Hyungju Park. *A Computational Theory of Laurent Polynomial Rings and Multidimensional FIR Sytems*. Thèse de Doctorat, Université de Californie à Berkeley, 1995.
- [86] Hyungju Park, Tom Kalker et Martin Vetterli. Gr obner bases and mutlidimensional fir multirate systems. *Journal of multidimensional systems and signal processing*, 8 : 11–30, 1997.
- [87] Erwan Le Pennec et Séphane Mallat. Image compression with geometrical wavelets. Dans *International Conference on Image Processing*, Vancouver, septembre 2000.
- [88] Gemma Piella et Henk J.A.M. Heijmans. Adaptive lifting schemes with perfect reconstruction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(7) : 1620–1630, juillet 2002.
- [89] D. Pinchon et P. Siohan. Determination of a canonical structure for odd length linear-phase filter banks. Dans *Proceedings of IEEE ICASSP*, volume 3, pages 1574–1577, Atlanta, USA, 1996.
- [90] Philippe Raffy. *Modélisation, optimisation et mise en oeuvre de quantificateurs bas débits pour la compression d'images utilisant une transformée en ondelettes*. Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1997.
- [91] Julien Reichel. *Complexity Related Aspects of image Compression*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.
- [92] Julien Reichel. On the arithmetic and bandwidth complexity of the lifting scheme. Dans *IEEE International Conference on Image Processing*, pages 198–201, Thessaloniki, Greece, octobre 2001.
- [93] Olivier Rioul. *Ondelettes régulières : Application à la compression d'images fixes*. Thèse de Doctorat, ENST, Centre de Recherche en Physique del'Environnement Terrestre et Planétaire, 1993.
- [94] Olivier Rioul. Regular wavelets : A discrete-time approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12) : 3572–3579, décembre 1993.
- [95] J. Rissanen et G. Langdon. Arithmetic coding. *IEEE transaction on Communication*, 6 : 858–867, juin 1981.
- [96] Bernard Rougé. Evaluation de l'adéquation des méthodes de restauration d'images optiques aux besoins du cnes. Rapport de recherche, Résultats de l'expertise de l'action Recherche et Développement, septembre 1997.

- [97] A. Said et W. Pearlman. An image multiresolution representation for lossless and lossy image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(9) : pp 1303–1310, 1996.
- [98] Amir Said et William A. Pearlman. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 6 : 243–250, juin 1996.
- [99] Peter Schröder et Wim Sweldens. Spherical wavelets : efficiently representing functions on the sphere. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series) : 161–172, 1995.
- [100] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, pages 379–423, juillet 1948.
- [101] J.M. Shapiro. Embedded images coding using zerotrees of wavelets coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12) : 3445–3463, décembre 1993.
- [102] Eero P. Simoncelli et William T. Freeman. The steerable pyramid : A flexible architecture for multi-scale derivation computation. Dans *2nd Annual IEEE International Conference on Image Processing*, Washington, DC., octobre 1995.
- [103] Pierre Siohan. An analysis of coefficient inaccuracy for 2-d fir direct form digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-37(10) : 1308–1313, octobre 1990.
- [104] Pierre Siohan et A. Benslimane. Finite precision design of optimal linear phase 2-d fir digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-36(1) : 11–22, janvier 1989.
- [105] Pierre Siohan et Valéry Ouvrard. Design of two-dimensional non-separable qmf banks. Dans *Proceedings of the IEEE ICASSP conference*, volume 4, pages 645–648, San Francisco, USA, mars 1992.
- [106] Pierre Siohan et Valéry Ouvrard. Design of optimal non-separable 2-d half-band filters. Dans *Proceedings Symposium IEEE Circuits and Systems*, volume 1, pages 914–917, Chicago, USA, mai 1993.
- [107] M.J. Smith et K.M. Barnwell. Exact reconstruction for tree-structured subband coders. *IEEE Transactions ASSP*, 34 : 434–441, 1986.
- [108] G. J. Sullivan. Efficient scalar quantization of exponential and laplacien random variables. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(5), 1996.
- [109] A. Suslin. Projective modules over a polynomial ring are free. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 229 : 1063–1066, 1976. (traduction anglaise du russe : Soviet. Math. Dokl., Vol. 17, 1976, p. 1160- 1164).
- [110] A. Suslin. On the structure of the special linear group over polynomial rings (russian). *Izv. AN. Nauk SSSR*, 41 : 235–252, 1977. Traduction : Math. USSR, Izv. 11, 221-238 (1977).
- [111] Wim Sweldens. The lifting scheme : A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. Dans A. F. Laine et M. Unser, éditeurs, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, pages 68–79. Proc. SPIE 2569, 1995.

- [112] Wim Sweldens. The lifting scheme : A costum-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied Comput. Harmon. Anal.*, 3(2) : 186–200, 1996.
- [113] Wim Sweldens. The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2) : 511–546, 1998.
- [114] Wim Sweldens et Peter Schröder. Building your own wavelets at home. Dans *Wavelets in Computer Graphics*, pages 15–87. ACM SIGGRAPH Course Notes, 1996.
- [115] David Taubman. High performance scalable image compression with ebcot. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(7) : 1158–1170, juillet 2000.
- [116] Bryan Usevitch. Optimal bit allocation for biorthogonal wavelet coding. Dans *IEEE Data Compression Conference*, pages 387–395, avril 1996.
- [117] Geert Uytterhoeven et Adhemar Bultheel. The red-black wavelet transform. Rapport de recherche, Department of Computer Science, K.U. Leuven, 1997.
- [118] Martin Vetterli. Multidimensionnal subband coding : Some theory and algorithms. *Signal Processing*, 6(2) : 97–112, avril 1984.
- [119] Martin Vetterli. Filter banks allowing perfect reconstruction. *Signal Processing*, 10(13) : 219–244, avril 1986.
- [120] Martin Vetterli et Jelena Kovačević. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [121] Martin Vetterli et C. Herley. Wavelets and filter banks : theory and design. *IEEE Transactions on Acoustic Speech Signal Processing*, 40(9) : 2207–2232, 1992.
- [122] Gregory K. Wallace. The jpeg still picture compression standard. *Communications of the ACM*, 34(4), 1991.
- [123] ISO/IEC JTC1 SC29 WG01. <http://www.jpeg.org>.
- [124] ISO/IEC JTC1 SC29 WG01. JPEG-2000 part-1 standard. ISO/IEC 15444-1.
- [125] I. H. Witten, R. M. Neal et J. G. Cleary. Arithmetic coding for data compression. *Communications of the ACM*, 30(6) : 520–540, 1987.
- [126] J. Xu, S. Li, Z. Xiong et Y.-Q. Zhang. Memory-constrained 3D wavelet transforms for video coding without boundary effects. Dans *Proceedings of IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems*, novembre 2000.

Publications

Publications dans des conférences internationales avec comité de relecture

- Annabelle Gouze, Marc Antonini et Michel Barlaud, «Quincunx Filtering Lifting Scheme for Image Coding», *SPIE, Visual Communication and Image Processing*, vol.1, pages 1-11, San-José 1999.
- Annabelle Gouze, Marc Antonini and Michel Barlaud, «Quincunx Lifting Scheme for Image Compression», *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 1, pages 665-668, Vancouver, septembre, 2000.
- Annabelle Gouze, Marc Antonini, Michel Barlaud and Benoit Macq, «Optimized lifting scheme for two-dimensional quincunx sampling images», *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 2, pages 253-258, Thessalonique, octobre, 2001

Conférences nationales sans comité de relecture

- Annabelle Gouze, Marc Antonini et Michel Barlaud, «Compression d'images sans pertes par lifting quincunx», Atelier CNES, Compression Embarquée d'images fixes, Toulouse, 22-23 juin, 1999.

Rapports de contrat

- Marc Antonini, Michel Barlaud, Annabelle Gouze et Christophe Parisot, «Compression Bord Multirésolution 99» Rapport du contrat CNES, n°- 1/96/CNES/96/0761, 1999.
- Marc Antonini, Michel Barlaud, Annabelle Gouze et Christophe Parisot, «Compression Bord Multirésolution 99» Rapport final du contrat CNES, n°- 1/96/CNES/96/0761, 07 juin 2000.

Schéma lifting quinconce pour la compression d'images

Résumé

Les travaux développés dans cette thèse portent sur la transformée en ondelettes 2D non-séparable appliquée dans le domaine de la compression d'images. L'implémentation en schéma lifting réduit la complexité de la transformée. Notre premier objectif consiste à factoriser un banc de filtres bidimensionnels non-séparables en schéma lifting quinconce. La solution apportée s'applique aux filtres dont la transformée en z est un polynôme en $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. Nous proposons une implémentation au fil de l'eau du schéma lifting quinconce. Les coûts de l'implémentation et le gain en mémoire et en complexité par rapport au filtrage par banc de filtres sont évalués. Le second objectif consiste à définir un schéma lifting en fonction des propriétés statistiques de l'image. Le but est de définir un schéma optimisant les performances, en adéquation avec les méthodes d'allocation de débit. Ces méthodes ont pour objectif de fournir un algorithme de compression approprié et efficace pour des images directement échantillonnées en quinconce.

Mots-clés :

Transformée en ondelettes 2D non-séparables, schéma lifting quinconce, factorisation 2D, construction de filtres lifting, optimisation, compression d'images, image satellite.

Quincunx lifting scheme for images compression

Abstract

The work, presented in this thesis, concerns the application of the 2D wavelet transform via quincunx lifting scheme to image compression. Lifting implementation reduces the complexity of the transform. Our prime objective consists in factorizing non-separable 2D filter banks into quincunx lifting scheme. The solution brought applies to the filters whose z -transform is a polynomial in $(z_x + z_x^{-1} + z_y + z_y^{-1})$. We propose a stripe-based implementation of the quincunx lifting scheme. We evaluate in a theoretical way the cost of the implementation and the profit in memory and complexity compared to filtering by filter bank. The second objective consists in defining the lifting operators by an adaptation to the statistical properties of the images to encode. The goal is to define a scheme optimizing the performances, in adequacy with the coders including a bit allocation method. These methods aim to provide an algorithm suitable and efficient for directly quincunx sampled images.

Keywords :

2D non-separable wavelet transforms, quincunx lifting scheme, 2D factorisation, lifting operator design, optimization, image compression, satellite images.