

Chapitre 3

Modélisation

3.1. Introduction

Les paramètres qui interviennent dans le modèle dynamique sont de deux types. Premièrement, les paramètres qui caractérisent la répartition de masses dans les segments et deuxièmement les paramètres caractérisant les articulations tels que les coefficients de frottement. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à la première famille de paramètres.

La modélisation ainsi que la génération des équations du modèle dynamique sort du cadre de notre travail, elle constitue une étude parallèle à la nôtre réalisée par Maes, Samin et Willems (Maes 88, 89 et 90). Il faut néanmoins remarquer que ces travaux ont été conduits dans une optique globale sans se soucier de l'utilisation des équations du modèle dynamique. Ces équations peuvent ainsi servir à réaliser des simulations, des algorithmes de commande dynamique, etc ... Chaque application a bien évidemment ses propres exigences. Par exemple, dans le cas de la commande on cherchera à minimiser le temps de calcul pour une mise en oeuvre en temps réel. Par contre, dans un problème d'estimation, c'est le choix des paramètres qui est primordial. C'est de ce choix et des propriétés qui en découlent que nous allons discuter tout au long de ce chapitre.

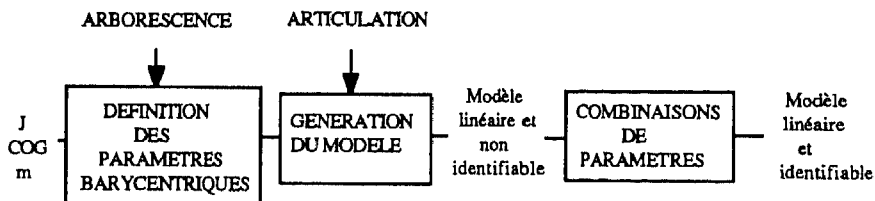


fig. 3.1 Schéma de la procédure.

Nous effectuons les combinaisons de paramètres en deux étapes comme présenté à la figure 3.1. Le premier type de regroupement est basé sur la définition des paramètres barycentriques semblables à ceux introduits par O. Fischer (Fischer 06), Roberson et Wittenburg (Roberson 66) et (Wittenburg 77) et enfin Liégeois et Renaud (Liégeois 74 et 80 a) et (Renaud 87). Ces paramètres sont des combinaisons des paramètres inertiels classiques

(masse, position du centre de masse (COG) et tenseur d'inertie) définis uniquement sur base des particularités de l'arborescence.

L'utilisation de ces paramètres est un atout considérable pour la résolution de notre problème d'estimation. Nous montrons trois propriétés fondamentales. Premièrement, comme les paramètres inertiels classiques, les paramètres barycentriques sont *indépendants*. Deuxièmement, ils apparaissent *linéairement* dans les équations de la dynamique. Enfin, troisièmement, ils forment des *combinaisons indispensables à l'estimation*. En particulier, nous montrons sur des exemples que certains paramètres inertiels classiques, bien qu'influençant la dynamique, ne peuvent pas être identifiés car ils n'assurent pas l'indépendance des colonnes de la matrice ϕ .

Nous commençons ce chapitre en définissant les paramètres barycentriques. En second lieu, nous présentons la génération des équations du modèle. Ensuite, ce sont les propriétés des paramètres barycentriques et du modèle dynamique qui seront l'objet de toute notre attention (indépendance, linéarité, combinaisons nécessaires). Enfin, nous présentons quelques exemples permettant d'illustrer nos propos.

3.2. Les paramètres barycentriques: Définitions

Considérons le système composé de n segments rigides reliés par n articulations formant une arborescence cinématique ouverte (fig 3.2).

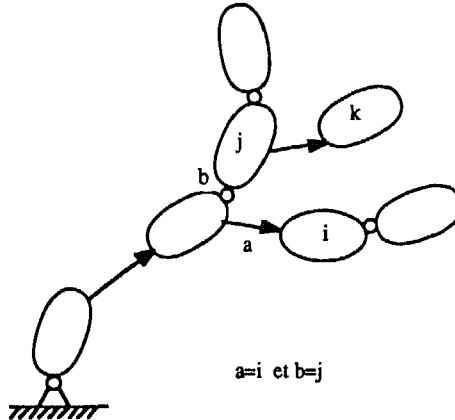


Fig. 3.2 Chaîne cinématique ouverte

Numérotions les joints -indices $a, b, c, \dots$ - en ordre croissant à partir de la base et numérotions chaque segment par le même indice que l'articulation précédente, indices $i, j, \dots$. Définissons la fonction **Inbody** du corps -ou de l'articulation- par l'indice du segment précédent ($\text{Inbody}(k) = j$). En d'autres termes, la fonction **Inbody** représente le segment parent d'un corps ou d'une articulation. Un usage récursif de cette fonction nous permet de sélectionner tous les ascendants d'un corps ou d'une articulation. La notation $b \leq c$ signifie que l'articulation c est un ascendant de l'articulation b (b est considéré comme ascendant à lui même). Nous définissons alors la matrice de descendance T par:

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (3.1)$$

On notera l'équivalence des écritures:

$$\sum_i T_{ij}(\dots)_i = \sum_{i:i \leq j} (\dots)_i \quad (1) \quad (3.2)$$

$$\sum_j T_{ij}(\dots)_j = \sum_{j:i \leq j} (\dots)_j \quad (3.3)$$

Soit le corps i (Fig. 3.3) relié à son père Inbody(i) par l'articulation a ($a=i$). Ce corps i est caractérisé par son centre de masse G^i , par le point d'ancrage de l'articulation O^i et éventuellement par le vecteur de translation relative de l'articulation $\underline{z}^a$.

Soit j et k des corps descendants de i .

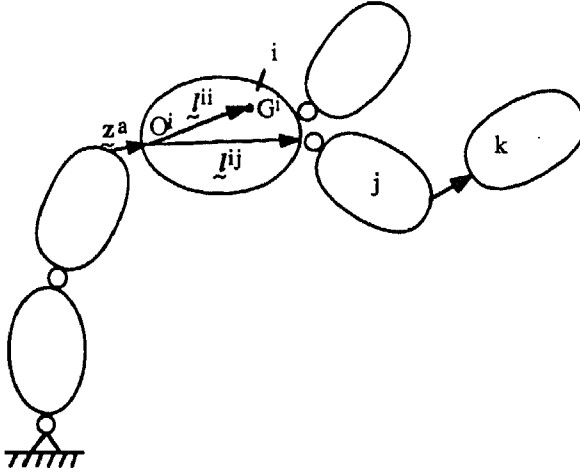


Fig. 3.3 Description d'une structure arborescente

Vu la structure en arbre du système, deux indices sont nécessaires pour caractériser les longueurs. Nous définissons:

- $\underline{l}^{ik}$ ($i < k$) la contribution du corps i au chemin géométrique liant la base au segment k .
Si $i = \text{Inbody}(j)$ et $i < j \leq k$ (c'est-à-dire que le segment j est le plus proche descendant de i menant au segment k), alors $\underline{l}^{ik} = \underline{l}^{ij}$.
- $\underline{l}^{ii}$ la position du centre de masse du corps i (G^i).

D'autre part, nous notons la masse du segment i par m^i et son tenseur d'inertie par rapport à son centre de masse J^i .

Les vecteurs $\underline{l}^{ii}$, $\underline{l}^{ij}$ et $\underline{z}^a$ ($a=i$) étant exprimés dans un repère $(\hat{x}^i)$ associé au corps i , on peut écrire:

$$\underline{l}^{z^{ij}} = \underline{l}^{ij} + \underline{z}^a \quad (3.4a)$$

$$= [\hat{x}^i]^t [\underline{l}^{ij} + \underline{z}^a] = [\hat{x}^i]^t \underline{l}^{ij} + [\hat{x}^a]^t \underline{z}^a \quad (3.4b)$$

Contrairement à $\underline{z}^a$ et $\underline{l}^{z^{ij}}$, les vecteurs $\underline{l}^{ij}$ et $\underline{l}^{ii}$ ainsi que le tenseur J^i ont des composantes constantes dans leur base $(\hat{x}^i)$.

a) Corps augmentés

Nous appelons *corps augmenté* i le corps fictif composé du segment i et des masses de ses descendants (m^i, m^j, m^p) rapportées aux points d'ancrage des articulations descendantes directes de i , comme présenté à la figure 3.4. A titre d'exemple, la contribution du segment j au corps augmenté k est la masse m^j placée sur l'articulation b avec $k < b < j$ et $\text{Inbody}(b) = k$. C'est-à-dire que l'articulation b est la première du chemin menant du segment k à j . A chaque segment, correspond un corps augmenté. La répartition de masse de celui-ci est caractérisée par sa masse barycentrique (somme de masses), son vecteur barycentrique (moment du premier ordre) et son tenseur barycentrique (moment du deuxième ordre) par rapport au joint O^k . Ces paramètres jouent pour les corps augmentés le même rôle que la masse, les moments du premier et du deuxième ordre pour les corps classiques.

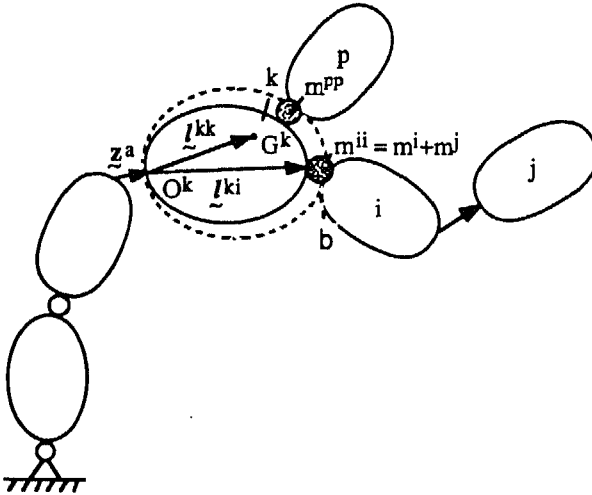


Fig. 3.4 Corps augmenté

b) Masses Barycentriques

Nous définissons la *masse barycentrique* du corps k par la masse de tous les descendants de l'articulation a ($a=k$):

$$m^{kk} = \sum_i T^{ki} m^i \quad (3.5)$$

c) Vecteurs Barycentriques

Le *vecteur barycentrique* associé au corps k est défini comme le moment du premier ordre du centre de masse du corps augmenté k par rapport à O^k :

$$\underline{m}^b k = \sum_i T^{ki} m^i \underline{l}^{ki} \quad (3.6)$$

Ce vecteur peut être calculé a priori, ses composantes étant constantes dans le repère de définition lié au corps k $\{\hat{x}^k\}$.

d) Tenseurs Barycentriques

Soit J^k le tenseur d'inertie du corps k par rapport à son centre de masse.

$$J^k = \int_{\text{corps } k} -\tilde{x} \tilde{x} \, dm \quad (1)$$

Par le théorème de Steiner, nous définissons *le tenseur barycentrique K^k comme étant le tenseur d'inertie du corps augmenté k par rapport à son point d'ancrage O^k (Fig. 3.4).*

$$K^k = J^k - \sum_i T^{ki} m^i \tilde{l}^{ki} \tilde{l}^{ki} \quad (3.7)$$

$$= I^k - \sum_i^* m^i \tilde{l}^{ki} \tilde{l}^{ki} \quad (3.8)$$

où $I^k = J^k - m^k \tilde{l}^{kk} \tilde{l}^{kk}$ le tenseur d'inertie du corps k par rapport à son point d'ancrage

$\sum_i^*$ porte sur les indices i tel que $\text{Inbody}(i) = k$, c-à-d sur les enfants de k

Tout comme les vecteurs barycentriques, les composantes du tenseur barycentrique exprimées dans le repère lié au corps $\{\hat{x}^k\}$ sont constantes et peuvent donc être calculées a priori. Enfin, tout comme le tenseur d'inertie, le tenseur barycentrique du corps augmenté est symétrique.

¹ La notation $\tilde{x}$ désigne le tenseur de pré-produit vectoriel associé au vecteur $\underline{x}$:

$$\forall \underline{y} : \tilde{x} \underline{y} = \underline{x} \times \underline{y}$$

avec $\underline{x} \times \underline{y}$ le produit vectoriel de $\underline{x}$ par $\underline{y}$

On notera les propriétés $\tilde{x} \underline{y} = -\tilde{y} \underline{x}$ (antisymétrie)

$\tilde{x} \underline{y} \cdot \underline{z} = \tilde{y} \underline{z} \cdot \underline{x}$ (produit mixte)

3.3. Modélisation Dynamique

Nous allons maintenant écrire les équations de la Dynamique en nous basant sur la description des paramètres barycentriques. Dans nos travaux, nous nous sommes principalement intéressés au choix des paramètres et aux méthodes d'estimations. La génération proprement dite est l'objet d'un travail parallèle réalisé par Maes, Samin et Willems (Maes 88, 89 et 90). Le lecteur intéressé trouvera dans ces références les approfondissements qu'il souhaite.

Notre objectif est d'écrire les équations de la dynamique sous une forme vectorielle la plus générale possible pour déduire un certain nombre de propriétés. Ensuite, ce modèle vectoriel devra être projeté sur les articulations du manipulateur pour obtenir le modèle dynamique classique. Pour obtenir cette forme vectorielle, le formalisme de Lagrange-Euler est mal adapté car il nécessite la définition préalable des coordonnées généralisées; voir les travaux de Renaud (Renaud 87). Nous préférons nous baser sur le formalisme de d'Alembert.

3.3.1. Cinématique

Commençons par décrire la cinématique de chaque corps sans tenir compte des coordonnées articulaires. Si nous définissons $\underline{\Omega}^k$ comme le vecteur de la *vitesse angulaire relative* du corps i dû à la liaison k , nous écrivons la vitesse angulaire absolue du corps i :

$$\underline{\omega}^i = \sum_k T^{ki} \underline{\Omega}^k \quad (3.9)$$

Dans cette expression la vitesse relative $\underline{\Omega}^k$ est fonction des coordonnées articulaires et est décrit dans le repère $\{\hat{x}^i\}$ lié au corps i . Sa dérivée temporelle s'écrit:

$$\dot{\underline{\Omega}}^i = \underline{\omega}^i \times \underline{\Omega}^i + \dot{\underline{\Omega}}^i \quad (3.10)$$

où $\dot{\underline{\Omega}}^i$ représente la dérivée relative de $\underline{\Omega}^i$, obtenue en dérivant ses composantes dans le repère $\{\hat{x}^i\}$. Le premier terme de l'expression (3.10) est dû au mouvement de ce même repère.

De (3.9) et (3.10) nous trouvons l'expression de la dérivée temporelle de la vitesse angulaire de i :

$$\dot{\underline{\omega}}^i = \sum_k T^{ki} \left(\underline{\omega}^k \times \underline{\Omega}^k + \dot{\underline{\Omega}}^k \right) \quad (3.11)$$

La position absolue du centre de masse G^i s'écrit:

$$\underline{x}^i = \sum_k T^{ki} \left(\underline{z}^k + \underline{l}^{ki} \right) \quad (3.12)$$

et ses dérivées temporelles:

$$\dot{\tilde{x}}^i = \sum_k T^{ki} \left(\dot{\tilde{z}}^k + \underline{\omega}^k \times (\tilde{z}^k + l^{ki}) \right) \quad (3.13)$$

$$\ddot{\tilde{x}}^i = \sum_k T^{ki} \left(\ddot{\tilde{z}}^k + (\dot{\underline{\omega}}^k + \underline{\omega}^k \times \underline{\omega}^k) l^{ki} \right) \quad (3.14)$$

$$\text{où} \quad \ddot{\tilde{z}}^k = \ddot{\tilde{z}}^k + 2\underline{\omega}^k \times \dot{\tilde{z}}^k + \dot{\underline{\omega}}^k \times \tilde{z}^k + \underline{\omega}^k \times \underline{\omega}^k \times \tilde{z}^k \quad (3.15)$$

3.3.2. Modélisation dynamique

La forme vectorielle des équations d'Euler pour chaque segment se présente sous la forme suivante:

$$\underline{f}^i = m^i \ddot{\tilde{x}}^i \quad (3.16 a)$$

$$\underline{t}^i = J^i \dot{\underline{\omega}}^i + \underline{\omega}^i \times J^i \underline{\omega}^i \quad (3.16 b)$$

avec: $\underline{f}^i$ le vecteur de la résultante des efforts extérieurs appliqués sur le segment i

$\underline{t}^i$ le vecteur de la résultante des couples et moments de forces extérieurs appliqués sur le segment i par rapport à son centre de masse

En combinant les deux expressions (3.16 a) et (3.16 b), on peut écrire le principe des puissances potentielles pour un système composé de corps rigides, cfr (Willems 79):

$$\sum_i \left(m^i \ddot{\tilde{x}}^i - \underline{f}^i \right) \cdot \Delta \dot{\tilde{x}}^i + \left(J^i \dot{\underline{\omega}}^i + \underline{\omega}^i \times J^i \underline{\omega}^i - \underline{t}^i \right) \cdot \Delta \underline{\omega}^i = 0 \quad (3.17)$$

Cette équation peut s'écrire pour toutes les variations possibles des vitesses $\Delta \dot{\tilde{x}}^i$ et $\Delta \underline{\omega}^i$. On peut les choisir compatibles avec la topologie du système, c'est-à-dire avec les relations cinématiques (3.9) et (3.13). Donc, nous écrivons:

$$\Delta \underline{\omega}^i = \sum_k T^{ki} \Delta \underline{\omega}^k \quad (3.18)$$

$$\Delta \dot{\tilde{x}}^i = \sum_k T^{ki} \Delta \dot{\tilde{z}}^k + \sum_{j,k} T^{ki} T^{jk} \Delta \underline{\omega}^j \times (\tilde{z}^k + l^{ki}) \quad (3.19)$$

La puissance potentielle, c-à-d la variation de la puissance des efforts et couples extérieurs s'écrit:

$$\Delta P = \sum_i (\underline{\tilde{f}}^i \cdot \Delta \underline{\tilde{x}}^i + \underline{\tilde{t}}^i \cdot \Delta \underline{\omega}^i) \quad (3.20)$$

En limitant ces efforts externes à la gravité et aux forces $\underline{\tilde{F}}^k$ et couples $\underline{\tilde{L}}^k$ transmis par les liaisons, l'expression (3.20) devient:

$$\Delta P = \sum_i m^i \underline{\tilde{g}} \cdot \Delta \underline{\tilde{x}}^i + \sum_k (\underline{\tilde{F}}^k \cdot \Delta \underline{\tilde{z}}^k + \underline{\tilde{L}}^k \cdot \Delta \underline{\omega}^k) \quad (3.21)$$

L'expression (3.17) se réécrit alors:

$$\sum_i (m^i \underline{\tilde{x}}^i - \underline{\tilde{g}}) \cdot \Delta \underline{\tilde{x}}^i + \left(\underline{J}^i \dot{\underline{\omega}}^i + \underline{\omega}^i \times \underline{J}^i \underline{\omega}^i \right) \cdot \Delta \underline{\omega}^i = \sum_k \left(\underline{\tilde{F}}^k \cdot \Delta \underline{\tilde{z}}^k + \underline{\tilde{L}}^k \cdot \Delta \underline{\omega}^k \right) \quad (3.22)$$

Cette équation est valable pour toutes les variations finies de $\underline{\tilde{z}}^k$ et $\underline{\omega}^k$. Les équations reliant $\underline{\tilde{F}}^k$ et $\underline{\tilde{L}}^k$ avec la dynamique peuvent-être obtenues en annulant les coefficients de ces variations $\Delta \underline{\tilde{z}}^k$ et $\Delta \underline{\omega}^k$ à condition que ces dernières soient indépendantes.

Quand il existe des contraintes, les équations sont obtenues par la technique des multiplicateurs de Lagrange. Nous discuterons de ce problème aux paragraphes 4.3.

3.3.3. Forme vectorielle des équations

Equation de translation

En tenant compte de (3.19) dans l'expression (3.22), nous dégagons la formulation de $\underline{\tilde{F}}^j$:

$$\underline{\tilde{F}}^j = \sum_i T^{ji} m^i (\underline{\tilde{x}}^i - \underline{\tilde{g}}) \quad (3.23)$$

en substituant $\underline{\tilde{x}}^i$ de l'expression (3.14) dans (3.23), on obtient:

$$\underline{\tilde{F}}^j = \sum_{i,k} T^{ji} T^{ki} m^i \left(\underline{\tilde{z}}^k + \underline{\omega}^k \times \underline{l}^{ki} + \underline{\omega}^k \times \underline{\omega}^k \times \underline{l}^{ki} \right) - \sum_i T^{ji} m^i \underline{\tilde{g}} \quad (3.24)$$

Etudions les différents cas possibles suivant les indices i, j et k . Ce travail est simple mais long à décrire, aussi nous nous contentons de présenter les résultats sous la forme de deux propriétés:

$$\sum_i T_{ji} T_{ki} m^i = \begin{cases} m^{kk} & \text{si } j \leq k \\ m_{jj} & \text{si } k < j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{cfr. (3.5)} \\ \text{cfr. (3.5)} \end{matrix} \quad (3.25)$$

$$\sum_i T_{ji} T_{ki} m_{ij}^{ki} = \begin{cases} \sum_i T_{ji} m_{ij}^{ki} = m_{jj}^{kk} & \text{si } j \leq k \\ \sum_i T_{ji} m_{ij}^{kj} = m_{jj}^{kj} & \text{si } k < j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{cfr. (3.6)} \\ \text{cfr. (3.5)} \end{matrix} \quad (3.26)$$

En utilisant ces deux propriétés (3.25) et (3.26), l'expression (3.23) peut se réécrire:

$$\underline{F}^j = m_{jj} \left(\sum_{k:k < j} \left(\underline{\ddot{z}}^k + \left(\underline{\tilde{\omega}}^k + \underline{\tilde{\omega}}^k \underline{\tilde{\omega}}^k \right) \underline{l}^{kj} \right) \cdot \underline{g} \right) + \sum_{k:j \leq k} \left(m^{kk} \underline{\ddot{z}}^k + \left(\underline{\tilde{\omega}}^k + \underline{\tilde{\omega}}^k \underline{\tilde{\omega}}^k \right) m_{jj}^{kk} \right) \quad (3.27)$$

Equations de rotation

En introduisant (3.18) et (3.19) dans l'expression (3.22) et en posant le coefficient de $\Delta \Omega^j$ égal à zéro, nous arrivons à l'expression:

$$\underline{L}^j = \sum_{i,k} T_{ki} T_{jk} \left(\underline{z}^k + \underline{l}^{ki} \right) \times m^i \left(\underline{\ddot{x}}^i - \underline{g} \right) + \sum_k T_{jk} \left(J^k \underline{\dot{\omega}}^k + \underline{\omega}^k \times J^k \underline{\omega}^k \right) \quad (3.28)$$

Décomposons le terme de droite de cette expression en trois parties:

$$a) \sum_{i,k} T_{ki} T_{jk} \underline{z}^k \times m^i \left(\underline{\ddot{x}}^i - \underline{g} \right) = \sum_k T_{jk} \underline{z}^k \times \underline{F}^k \quad \text{cfr. (3.23)} \quad (3.29 a)$$

$$b) \sum_{i,k} T_{ki} T_{jk} \underline{l}^{ki} \times m^i \left(\underline{\ddot{x}}^i - \underline{g} \right) \quad (3.29 b)$$

$$c) \sum_k T_{jk} \left(J^k \underline{\dot{\omega}}^k + \underline{\omega}^k \times J^k \underline{\omega}^k \right) \quad (3.29 c)$$

En substituant $\underline{\ddot{x}}$ de (3.14) dans (3.29 b), nous obtenons:

$$\sum_k T_{jk} \sum_l \left(\sum_i T_{ki} T_{li} m_{ij}^{li} \right) \times \underline{\ddot{z}}^l - \sum_k T_{jk} \sum_i T_{ki} m_{ij}^{ki} \times \underline{g} + \sum_{k,l} T_{jk} \sum_i T_{ki} T_{li} m_{ij}^{li} \left(\underline{\tilde{\omega}}^l + \underline{\tilde{\omega}}^l \underline{\tilde{\omega}}^l \right) \underline{l}^{li} \quad (3.30)$$

En utilisant les propriétés (3.25) et (3.26), la première somme de l'expression (3.30) peut se réécrire:

$$\sum_k T^{jk} \underline{m} \underline{b}^k \times \left(\sum_{l: l \leq k} \ddot{\underline{z}}^l \right) + \sum_k T^{jk} \sum_{l: k < l} m^l \left(\underline{l}^{kl} \times \ddot{\underline{z}}^l \right) \quad (3.31)$$

tandis que la deuxième devient:

$$- \sum_k T^{jk} \underline{m} \underline{b}^k \times \underline{g} \quad (3.32)$$

Dans la troisième somme, le terme $\sum_i T^{ki} T^{li} \underline{m} \underline{l}^{ki} \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{l}^{li}$ devient:

$$\sum_i T^{li} \underline{m} \underline{l}^{li} \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{l}^{li} = \underline{l}^{kl} \times \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{m} \underline{b}^l \quad \text{si } k < l \quad (3.33)$$

$$\sum_i T^{ki} \underline{m} \underline{l}^{ki} \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{l}^{lk} = \underline{m} \underline{b}^k \times \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{l}^{lk} \quad \text{si } k > l \quad (3.34)$$

Finalement, si $l = k$ ce terme peut se réécrire:

$$- \sum_i T^{ki} \underline{m} \underline{l}^{ki} \underline{k} \underline{l}^{ki} \ddot{\underline{\omega}}^k - \ddot{\underline{\omega}}^k \left(\sum_i T^{ki} \underline{m} \underline{l}^{ki} \underline{k} \underline{l}^{ki} \right) \underline{\omega}^k \quad (3.35)$$

Combinons cette dernière expression avec (3.29 c) pour obtenir:

$$\sum_k T^{jk} \left(K^k \ddot{\underline{\omega}}^k + \underline{\omega}^k \times K^k \underline{\omega}^k \right) \quad (3.36)$$

Finalement, $\underline{L}^j$ est composé de la somme des expressions (3.29 a), (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.36) que nous pouvons écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \underline{L}^j = & \sum_k T^{jk} \left(\underline{z}^k \times \underline{F}^k + \underline{m} \underline{b}^k \times \left(\ddot{\underline{z}}^k - \underline{g} \right) + K^k \ddot{\underline{\omega}}^k + \underline{\omega}^k \times K^k \underline{\omega}^k \right) \\ & + \sum_k T^{jk} \sum_{l: l < k} \underline{m} \underline{b}^k \times \left(\ddot{\underline{z}}^l + \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{l}^{lk} \right) \\ & + \sum_k T^{jk} \sum_{l: k < l} \underline{l}^{kl} \times \left(m^l \ddot{\underline{z}}^l + \left(\ddot{\underline{\omega}}^l + \ddot{\underline{\omega}}^l \underline{\omega}^l \right) \underline{m} \underline{b}^l \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3.4. Propriétés des paramètres et du modèle

a) indépendance

L'indépendance des paramètres barycentriques découle directement de leur définition. A titre d'exemple, nous développons ces définitions sur une structure de n corps disposés en chaîne simple, c'est-à-dire en une seule chaîne.

La masse barycentrique de k (3.5) est:

$$m^{kk} = m^k + m^{(k+1)} + m^{(k+2)} + \dots + m^n$$

le vecteur barycentrique de k (3.6) est:

$$\underline{m}^k = m^k \underline{j}^{kk} + m^{(k+1)} \underline{j}^{k(k+1)}$$

et le tenseur barycentrique de k (3.7) est:

$$\underline{K}^k = \underline{J}^k - m^k \underline{j}^{kk} \underline{j}^{kk} - m^{(k+1)} \underline{j}^{k(k+1)} \underline{j}^{k(k+1)}$$

De ces trois expressions, il ressort que les paramètres barycentriques sont bien des combinaisons linéaires indépendantes des paramètres inertiels de base m^{kk} , $\underline{m}^k \underline{j}^{kk}$ et $\underline{J}^k$.

b) linéarité

Des relations (3.27) et (3.37) il apparaît que les équations de translation et de rotation sont *linéaires* vis-à-vis des paramètres barycentriques et *bilinéaires* par rapport à l'ensemble des paramètres géométriques et barycentriques. Les équations peuvent donc se mettre sous la forme (2.32).

c) descendance

Remarquons que $\underline{F}^j$ et $\underline{L}^j$ ne sont fonctions linéaires que des paramètres barycentriques de leurs descendants, c'est-à-dire m^{kk} , $\underline{m}^k$ et $\underline{K}^k$ avec $j \leq k$. Inversement, les paramètres barycentriques d'un corps ne peuvent figurer que dans les équations relatives aux articulations ascendantes. Seules ces équations permettent par conséquent de procéder à leur identification. Par conséquent, les paramètres barycentriques peuvent être estimés de façon itérative en partant du dernier joint vers la base comme dans l'algorithme de Newton-Euler.

L'application la plus courante de cette propriété est l'estimation des paramètres barycentriques de la charge en plaçant un capteur de force à six composantes dans le poignet, voir par exemple les travaux de Mukerjee et Ballard (Mukerjee 85), Olsen et Bekey (Olsen 85 et 86) et An, Atkeson et Hollerbach (An 88). Pour l'estimation des paramètres barycentriques des segments, on ne dispose généralement pas des six mesures de force et de couple sur toutes les articulations; on se limite alors aux équations du modèle dynamique présentées dans le paragraphe suivant.

Pour les équations de rotation, nous pouvons réécrire l'expression (3.37) sous une forme récursive :

$$\begin{aligned}
 \underline{L}^j = & \underline{L}^{j+1} + \left(\underline{\ddot{z}}^j \times \underline{F}^j + m \underline{b}^j \times \left(\underline{\ddot{z}}^j - \underline{g} \right) + K^j \underline{\dot{\omega}}^j + \underline{\omega}^j \times K^j \underline{\omega}^j \right) \\
 & + \sum_{1 \leq l < j} m \underline{b}^l \times \left(\underline{\ddot{z}}^1 + \left(\underline{\tilde{\omega}}^1 + \underline{\tilde{\omega}}^1 \underline{\tilde{\omega}}^1 \right) \underline{l}^{lj} \right) \\
 & + \sum_{1 \leq j < l} \underline{l}^{jl} \times \left(m^l \underline{\ddot{z}}^1 + \left(\underline{\tilde{\omega}}^1 + \underline{\tilde{\omega}}^1 \underline{\tilde{\omega}}^1 \right) m^l \underline{b}^1 \right)
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Remarquons que l'utilisation de nos paramètres barycentriques ne permet pas de présenter l'expression (3.27) sous une forme récursive équivalente en raison notamment du terme de gravité.

d) combinaisons nécessaires

Nous allons montrer que les paramètres barycentriques sont des combinaisons des paramètres inertiels de bases *nécessaires* à l'identification.

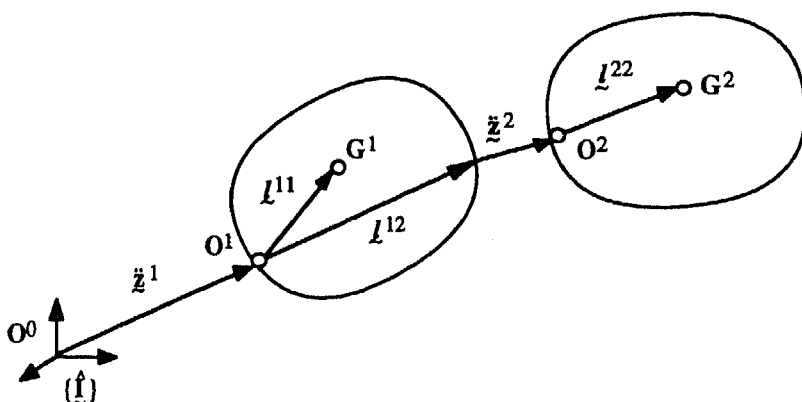


fig. 3.5 Structure à deux corps.

Soit la structure articulée composée de deux corps et de deux articulations à six degrés de liberté (trois translations et trois rotations) présentée à la figure 3.5. Ecrivons les paramètres barycentriques correspondants, cfr définitions (3.5), (3.6) et (3.8).

$$m^{22} = m^2 \quad (3.39)$$

$$m^{11} = m^1 + m^2 \quad (3.40)$$

$$\underline{m}\underline{b}^2 = m^2 \underline{l}^{22} \quad (3.41)$$

$$\underline{m}\underline{b}^1 = m^1 \underline{l}^{11} + m^2 \underline{l}^{12} \quad (3.42)$$

$$\underline{K}^2 = \underline{I}^2 \quad (3.43)$$

$$\underline{K}^1 = \underline{I}^1 - m^2 \underline{l}^{12} \underline{l}^{12} \quad (3.44)$$

Développons ensuite les expressions (3.27) et (3.38) .

$$\underline{F}^2 = m^{22} \left(\underline{\ddot{z}}^1 + \underline{\ddot{z}}^2 - \underline{g} + \left(\underline{\tilde{\omega}}^1 + \underline{\tilde{\omega}}^1 \underline{\tilde{\omega}}^1 \right) \underline{l}^{12} \right) + \left(\underline{\tilde{\omega}}^2 + \underline{\tilde{\omega}}^2 \underline{\tilde{\omega}}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \quad (3.45)$$

$$\underline{F}^1 = m^{11} \left(\underline{\ddot{z}}^1 - \underline{g} \right) + m^{22} \underline{\ddot{z}}^2 + \left(\underline{\tilde{\omega}}^1 + \underline{\tilde{\omega}}^1 \underline{\tilde{\omega}}^1 \right) \underline{m}\underline{b}^1 + \left(\underline{\tilde{\omega}}^2 + \underline{\tilde{\omega}}^2 \underline{\tilde{\omega}}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}^2 &= \underline{z}^2 \times \underline{F}^2 + \underline{m}\underline{b}^2 \times \left(\underline{\ddot{z}}^2 - \underline{g} \right) + \underline{K}^2 \underline{\dot{\omega}}^2 + \underline{\omega}^2 \times \underline{K}^2 \underline{\omega}^2 \\ &\quad + \underline{m}\underline{b}^2 \times \left(\underline{\ddot{z}}^1 + \left(\underline{\tilde{\omega}}^1 + \underline{\tilde{\omega}}^1 \underline{\tilde{\omega}}^1 \right) \underline{l}^{12} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}^1 &= \underline{L}^2 + \underline{z}^1 \times \underline{F}^1 + \underline{m}\underline{b}^1 \times \left(\underline{\ddot{z}}^1 - \underline{g} \right) + \underline{K}^1 \underline{\dot{\omega}}^1 + \underline{\omega}^1 \times \underline{K}^1 \underline{\omega}^1 \\ &\quad + \underline{l}^{12} \times \left(m^{22} \underline{\ddot{z}}^2 + \left(\underline{\tilde{\omega}}^2 + \underline{\tilde{\omega}}^2 \underline{\tilde{\omega}}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Le modèle dynamique est donc fonction de 20 paramètres barycentriques. Si l'on développe les définitions (3.39) à (3.44) dans les expressions (3.45) à (3.48), le modèle dynamique est alors fonction des 20 paramètres inertiels de base (masses, moments du premier ordre et moments du deuxième ordre). Dans le cas général (les deux joints ont six degrés de liberté), ces deux jeux de paramètres sont identifiables.

Si on considère le modèle du double pendule sphérique, c'est-à-dire deux articulations rotoïdes à trois degrés de liberté, le modèle dynamique n'est plus composé que des seules équations de rotation et les expressions (3.47) et (3.48) deviennent:

$$\underline{L}^2 = -\underline{m}\underline{b}^2 \times \underline{g} + \underline{K}^2 \underline{\dot{\omega}}^2 + \underline{\omega}^2 \times \underline{K}^2 \underline{\omega}^2 + \underline{m}\underline{b}^2 \times \left(\underline{\tilde{\omega}}^1 + \underline{\tilde{\omega}}^1 \underline{\tilde{\omega}}^1 \right) \underline{l}^{12} \quad (3.49)$$

$$\underline{L}^1 = \underline{L}^2 - \underline{m}\underline{b}^1 \times \underline{g} + \underline{K}^1 \underline{\dot{\omega}}^1 + \underline{\omega}^1 \times \underline{K}^1 \underline{\omega}^1 + \underline{l}^{12} \times \left(\underline{\tilde{\omega}}^2 + \underline{\tilde{\omega}}^2 \underline{\tilde{\omega}}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \quad (3.50)$$

Les masses barycentriques sont absentes de ces deux expressions. Le jeu de paramètres identifiables est donc réduit à 18 paramètres. Or, les vecteurs et tenseurs barycentriques sont fonctions des 20 paramètres inertiels de base et en particulier des deux masses, cfr définitions (3.41) à (3.44). Substituons les définitions des paramètres barycentriques dans (3.49) et (3.50); nous observons que m^1 n'apparaît pas dans les équations. Par contre, m^2 apparaît via les termes $\underline{m}\underline{b}^2 = m^2 \underline{l}^{22}$ (3.41) et $\underline{K}^1 = \underline{I}^1 - m^2 \underline{l}^{12} \underline{l}^{12}$ (3.44). Cette masse influence donc bien la dynamique de la structure, mais n'est pas identifiable car elle est combinée avec d'autres

paramètres. Nous obtenons alors un modèle surparamétré caractérisé par 19 paramètres au lieu de 20, et donc non identifiable.

3.3.5. Modèle dynamique

Pour obtenir le modèle dynamique mettant en relation les couples et les forces dans les liaisons avec les coordonnées généralisées et leurs dérivées, il suffit de projeter les expressions de $\underline{L}_j$ ($\underline{F}_j$) sur l'axe $\hat{e}^j$ de l'articulation correspondante et de substituer les vecteurs $\underline{\omega}^k$ et $\underline{\dot{\omega}}^k$ en fonction de vitesses relatives $\underline{\Omega}^k$ et $\underline{\dot{\Omega}}^k$. Enfin, il faut effectuer tous les produits scalaires et vectoriels pour obtenir les équations sous forme scalaire.

Propriétés du modèle dynamique

a) linéarité

Les paramètres barycentriques apparaissent linéairement dans les équations du modèle dynamique. En effet, les opérateurs de produits scalaire et vectoriel conservent la propriété de linéarité.

b) descendance

La règle de descendance exprimée pour les équations vectorielles reste d'application.

d) combinaisons nécessaires mais insuffisantes

Nous avons montré au paragraphe 3.3.4 d que les paramètres barycentriques définissent des combinaisons nécessaires. Toutefois, comme ils ne dépendent que de l'arborescence, ils ne sauraient tenir compte de toutes les combinaisons possibles. En particulier, il faut encore rechercher les combinaisons dues aux particularités des articulations et aux pertes de mobilité qui en résultent. Au paragraphe 3.4 c, nous montrerons un exemple de ce type de combinaisons.

3.4. Exemples

a) Exemple 1

Nous allons prendre comme premier exemple le manipulateur proposé par Lee (Lee 78) et repris postérieurement par Ferreira (Ferreira 84). Il s'agit du manipulateur PUMA 500 (Unimation) limité à ses trois premières articulations sans les moteurs. Les segments sont représentés par des masses ponctuelles sans inertie. La représentation du modèle est donnée à la figure 3.6.

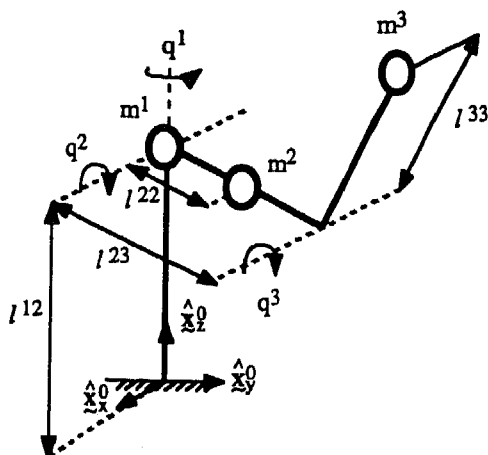


Fig. 3.6 Exemple 1: le modèle de Lee

Définissons quatre repères:

- un repère inertiel à la base du manipulateur $\{\hat{x}^0\}$ avec $\hat{x}_x^0$ et $\hat{x}_y^0$ décrivant le plan horizontal et $\hat{x}_z^0$ la direction verticale.
- un repère mobile $\{\hat{x}^1\}$ attaché au corps 1 avec $\hat{x}_z^1$ correspondant à $\hat{x}_z^0$, le premier axe de rotation du robot (angle q^1). Ce repère est positionné à la base du manipulateur.
- un repère mobile $\{\hat{x}^2\}$ attaché au corps 2 avec $\hat{x}_x^2$ correspondant à $\hat{x}_x^1$, le deuxième axe de rotation (angle q^2) et $\hat{x}_z^2$ aligné avec le segment 2. L'origine O^2 est positionnée par le vecteur

$$l^{12} = [\hat{x}^1]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{12} \end{pmatrix}$$

- un repère mobile $\{\hat{\underline{x}}^3\}$ attaché au corps 3 avec $\hat{\underline{x}}^3_x$ correspondant à $\hat{\underline{x}}^2_z$, le troisième axe de rotation (angle q^3) et $\hat{\underline{x}}^3_z$ aligné avec le segment 3. Son origine O^3 est décrite par le vecteur

$$\underline{l}^{12} + \underline{l}^{23} = [\hat{\underline{x}}^1]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^{12} \end{pmatrix} + [\hat{\underline{x}}^2]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^{23} \end{pmatrix}$$

La répartition de masse est décrite comme suit:

- m^1 , m^2 et m^3 sont les masses des segments 1, 2 et 3
- les vecteurs de position des centres de masse sont:

$$\underline{l}^{11} = [\hat{\underline{x}}^1]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^{11} \end{pmatrix}$$

$$\underline{l}^{22} = [\hat{\underline{x}}^2]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^{22} \end{pmatrix}$$

$$\underline{l}^{33} = [\hat{\underline{x}}^3]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^{33} \end{pmatrix}$$

- les inerties sont nulles

Les paramètres barycentriques sont au nombre de 30 (10 pour chaque segment).

- * masses barycentriques:

$$\begin{aligned} m^{11} &= m^1 + m^2 + m^3 \\ m^{22} &= m^2 + m^3 \\ m^{33} &= m^3 \end{aligned}$$

- * vecteurs barycentriques:

$$\underline{mb}^1 = \{\hat{\underline{x}}^1\}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m^{22}l^{12} + m^1l^{11} \end{pmatrix}$$

$$\underline{mb}^2 = \{\hat{\underline{x}}^2\}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m^{33}l^{23} + m^2l^{22} \end{pmatrix}$$

$$\underline{mb}^3 = \{\hat{\underline{x}}^3\}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m^3l^{33} \end{pmatrix}$$

- * tenseurs barycentriques:

$$\underline{K}^1 = \begin{pmatrix} m^{22}(l^{12})^2 + m^1(l^{11})^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^{22}(l^{12})^2 + m^1(l^{11})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} m^{33}(l^{23})^2 + m^2(l^{22})^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^{33}(l^{23})^2 + m^2(l^{22})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} m^3(l^{33})^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^3(l^{33})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit δ le vecteur (N) des paramètres barycentriques non nuls:

$$\delta = (m^{11} \quad m^{22} \quad m^{33} \quad mb_z^1 \quad mb_z^2 \quad mb_z^3 \quad K_{xx}^1 \quad K_{xx}^2 \quad K_{xx}^3)^t$$

avec $K_{yy}^1 = K_{xx}^1$, $K_{yy}^2 = K_{xx}^2$ et $K_{yy}^3 = K_{xx}^3$ (en raison de l'absence d'inertie propre aux segments)

Soit le modèle dynamique de ce manipulateur:

$$M(q) \ddot{q} + F(q, \dot{q}) = Q$$

avec: q le vecteur (3) des positions articulaires $\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$

M la matrice de masses généralisées (3 x 3)

F le vecteur (3) des forces de Coriolis, action de la gravité, ...

Q le vecteur (3) des forces généralisées dans les articulations.

Les équations de ce modèle peuvent être fournies par le logiciel ROBOTRAN développé par Maes, Samin et Willems (Maes 88, 89 et 90).

$$M = \begin{pmatrix} K_{xx}^2 z_6 + K_{xx}^3 z_7 + 2mb_z^3 l^{23} z_8 & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx}^3 + K_{xx}^2 + 2mb_z^3 l^{23} c_3 & K_{xx}^3 + mb_z^3 l^{23} c_3 \\ 0 & K_{xx}^3 + mb_z^3 l^{23} c_3 & K_{xx}^3 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} (K_{xx}^2 s_{22} + K_{xx}^3 s_{2233} + 2mb_z^3 l^{23} s_{223}) \dot{q}^1 \dot{q}^2 \\ + (K_{xx}^3 s_{2233} + 2mb_z^3 l^{23}(z_9)) \dot{q}^1 \dot{q}^3 \\ (-K_{xx}^2 z_4 - K_{xx}^3 z_1 - mb_z^3 l^{23} s_{223}) (\dot{q}^1)^2 - mb_z^3 (\dot{q}^3)^2 l^{23} s_3 \\ - 2mb_z^3 \dot{q}^2 \dot{q}^3 l^{23} s_3 - mb_z^2 g s_2 - mb_z^3 g s_{23} \\ (-K_{xx}^3 z_1 - mb_z^3 l^{23}(z_9)) (\dot{q}^1)^2 + mb_z^3 (\dot{q}^2)^2 l^{23} s_3 - mb_z^3 g s_{23} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

avec les conventions:

$$\begin{aligned} s_2 &= \sin(q^2) \\ c_2 &= \cos(q^2) \\ c_{23} &= \cos(q^2 + q^3) \\ \text{etc ...} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{23} s_{23} & z_4 &= c_2 s_2 & z_7 &= s_{23} s_{23} & z_{10} &= c_2 s_{23} \\ z_2 &= c_2 c_3 s_2 & z_5 &= c_2 c_2 s_3 & z_8 &= s_2 s_{23} \\ z_3 &= s_2 s_{23} & z_6 &= s_2 s_2 & z_9 &= s_2 c_{23} \end{aligned}$$

Notons δ_d le vecteur (N_d) des paramètres barycentriques intervenant dans les équations du modèle dynamique. Nous avons démontré au paragraphe précédent que ce modèle est linéaire par rapport aux éléments de δ et donc par rapport à δ_d . On peut donc réécrire le modèle sous la forme:

$$\Phi_d \delta_d = Q$$

avec:

$$\delta_d = \begin{pmatrix} mb_z^2 \\ mb_z^3 \\ K_{xx}^2 \\ K_{xx}^3 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$\Phi_d = \begin{pmatrix} 0 & 2l^{23} z_8 \dot{q}^1 + 2l^{23} s_{223} \dot{q}^1 \dot{q}^2 + 2l^{23} z_9 \dot{q}^1 \dot{q}^3 & z_6 \dot{q}^1 + s_{22} \dot{q}^1 \dot{q}^2 + s_{2233} \dot{q}^1 \dot{q}^3 \\ -g s_2 & -l^{23} s_{223} (\dot{q}^1)^2 - l^{23} s_3 (\dot{q}^3)^2 - 2l^{23} s_3 \dot{q}^2 \dot{q}^3 - g s_{23} & \ddot{q}^2 - z_4 (\dot{q}^1)^2 & \ddot{q}^2 + \ddot{q}^3 - z_1 (\dot{q}^1)^2 \\ 0 & l^{23} c_3 \ddot{q}^2 - l^{23} z_9 (\dot{q}^1)^2 + l^{23} s_3 (\dot{q}^2)^2 - g s_{23} & 0 & \ddot{q}^2 + \ddot{q}^3 - z_1 (\dot{q}^1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Le modèle dynamique est donc décrit par un jeu de quatre paramètres δ_d . Dans ses travaux, Lee, après avoir écrit les équations de la dynamique du manipulateur, avait effectué des regroupements pour former un jeu de 5 paramètres.

Sur cet exemple, il est facile de trouver une trajectoire excitante. Par exemple, en posant $\dot{q}^1 = \dot{q}^2 = \ddot{q}^2 = 0$, c'est-à-dire que seul $\ddot{q}^1$ est choisi non nul, les deux configurations suivantes permettent d'identifier tous les éléments de δ_d .

$$\text{configuration 1} \quad s_2 = 0 \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (s_{23})^2 \ddot{q}^1 \\ 0 & -gs_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -gs_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{configuration 2} \quad s_{23} = 0 \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (s_2)^2 \ddot{q}^1 & 0 \\ -gs_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ est évidemment de plein rang. Le système est donc identifiable.

b) Exemple 2

Comme deuxième exemple, nous proposons le même manipulateur, mais en remplaçant la première articulation par une translation verticale (suivant $\hat{x}_2^0$). Les paramètres barycentriques ne dépendent pas du type d'articulation et restent donc inchangés. Les matrices qui décrivent le modèle deviennent:

$$M = \begin{pmatrix} m^{11} & -mb_z^2 s_2 - mb_z^3 s_{23} & -mb_z^3 s_{23} \\ -mb_z^3 s_{23} - mb_z^2 s_2 & K_{xx}^3 + K_{xx}^2 + 2mb_z^3 l^{23} c_3 & K_{xx}^3 + mb_z^2 l^{23} c_3 \\ -mb_z^3 s_{23} & K_{xx}^3 + mb_z^3 l^{23} c_3 & K_{xx}^3 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$F = \begin{pmatrix} (-mb_z^2 c_2 - mb_z^3 c_{23})(\dot{q}^2)^2 - 2mb_z^3 \dot{q}^2 \dot{q}^3 c_{23} - mb_z^3 (\dot{q}^3)^2 c_{23} + m^{11} g \\ -mb_z^3 (\dot{q}^3)^2 l^{23} s_3 - 2mb_z^3 \dot{q}^2 \dot{q}^3 l^{23} s_3 - mb_z^2 g s_2 - mb_z^3 g s_{23} \\ mb_z^3 (\dot{q}^2)^2 l^{23} s_3 - mb_z^3 g s_{23} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

ou encore, sous forme d'identification

$$\delta_d = \begin{pmatrix} m^{11} \\ mb_z^2 \\ mb_z^3 \\ K_{xx}^2 \\ K_{xx}^3 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\phi_d = \begin{pmatrix} \ddot{q}^1 + g & -s_2 \ddot{q}^2 - c_2 (\dot{q}^2)^2 & -s_{23}(\ddot{q}^2 + \ddot{q}^3) - c_{23}(\dot{q}^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2 \ddot{q}^1 - g s_2 & -s_{23} \ddot{q}^1 + 2l^2 c_3 \ddot{q}^2 & \ddot{q}^2 & \ddot{q}^2 + \ddot{q}^3 \\ 0 & 0 & -s_{23} \ddot{q}^1 + 2l^2 c_3 \ddot{q}^2 & 0 & \ddot{q}^2 + \ddot{q}^3 \\ 0 & 0 & l^2 c_3 \ddot{q}^3 - l^2 s_3 (\dot{q}^3)^2 & 0 & \ddot{q}^2 + \ddot{q}^3 \\ 0 & 0 & -2l^2 s_3 \dot{q}^2 \dot{q}^3 - g s_{23} & 0 & \ddot{q}^2 + \ddot{q}^3 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Ces deux premiers exemples ne diffèrent que par les articulations. Néanmoins, comme nous l'avions annoncé, le jeu des paramètres barycentriques présents ((3.52) et (3.56)) est différent dans les deux modèles.

c) Exemple 3

Comme troisième exemple, nous avons choisi un manipulateur moins trivial, à savoir le manipulateur APRA (Sirtès Renault) à cinq articulations (voir fig. 3.7). Pour rester dans des tailles raisonnables d'équations, nous limitons notre modélisation aux deux premières articulations sans tenir compte des effets dus aux actionneurs.

Définissons trois repères:

- un repère inertiel à la base du manipulateur $\{\hat{x}^0\}$ avec $\hat{x}_x^0$ et $\hat{x}_y^0$ décrivant le plan horizontal et $\hat{x}_z^0$ le vecteur vertical
- un repère mobile $\{\hat{x}^1\}$ attaché au corps 1 avec $\hat{x}_z^1$ correspondant à $\hat{x}_z^0$, le premier axe de rotation du robot (angle q^1). Ce repère est positionné à la base du manipulateur.
- un repère mobile $\{\hat{x}^2\}$ attaché au corps 2 avec $\hat{x}_x^2$ correspondant à $\hat{x}_x^1$, le deuxième axe de rotation (angle q^2) et $\hat{x}_z^2$ aligné avec le segment 2. Sa position est caractérisée par le vecteur:

$$l^{12} = [\hat{x}^1]^t \begin{pmatrix} l_x^{12} \\ 0 \\ l_z^{12} \end{pmatrix}$$

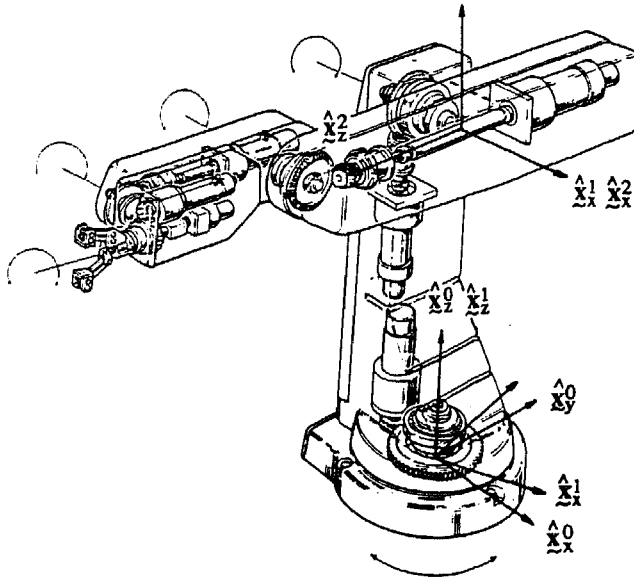


fig. 3.7 Le manipulateur APRA.

La répartition de masse est décrite comme suit:

- m^1 et m^2 sont les masses des segments 1 et 2
- $\underline{l}^{11}$ et $\underline{l}^{22}$ les vecteurs de position des centres de masses.

$$\underline{l}^{11} = [\hat{x}^1] \begin{pmatrix} l_x^{11} \\ 0 \\ l_z^{11} \end{pmatrix}$$

$$\underline{l}^{22} = [\hat{x}^2] \begin{pmatrix} l_x^{22} \\ 0 \\ l_z^{22} \end{pmatrix}$$

- les tenseurs d'inertie des deux segments sont supposés diagonaux:

$$J^1 = \begin{pmatrix} J_{xx}^1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^1 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} J_{xx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^2 \end{pmatrix}$$

Les paramètres barycentriques de ce robot sont:

* les masses barycentriques:

$$\begin{aligned} m^{11} &= m^1 + m^2 \\ m^{22} &= m^2 \end{aligned}$$

* les vecteurs barycentriques:

$$\underline{\mathbf{mb}}^1 = [\hat{\underline{\mathbf{x}}}^1]^t \begin{pmatrix} l_x^{11} m^1 + l_x^{12} m^2 \\ 0 \\ l_z^{11} m^1 + l_z^{12} m^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{mb}}^2 = [\hat{\underline{\mathbf{x}}}^2]^t \begin{pmatrix} l_x^{22} m^2 \\ 0 \\ l_z^{22} m^2 \end{pmatrix}$$

* les tenseurs barycentriques:

$$\mathbf{K}^1 = \begin{pmatrix} J_{xx}^1 + m^2 (l_x^{12})^2 + m^1 (l_z^{11})^2 & 0 & -m^1 l_x^{11} l_z^{11} - m^2 l_x^{12} l_z^{12} \\ 0 & J_{yy}^1 + m^2 ((l_x^{12})^2 + (l_z^{12})^2) + m^1 ((l_x^{11})^2 + (l_z^{11})^2) & 0 \\ -m^1 l_x^{11} l_z^{11} - m^2 l_x^{12} l_z^{12} & 0 & J_{zz}^1 + m^1 (l_x^{11})^2 + m^2 (l_x^{12})^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{pmatrix} J_{xx}^2 + m^2 (l_z^{22})^2 & 0 & -m^2 l_x^{22} l_z^{22} \\ 0 & J_{yy}^2 + m^2 ((l_x^{22})^2 + (l_z^{22})^2) & 0 \\ -m^2 l_x^{22} l_z^{22} & 0 & J_{zz}^2 + m^2 (l_x^{22})^2 \end{pmatrix}$$

Les matrices du modèle dynamique de ce manipulateur sont:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} K_{zz}^1 + K_{yy}^2 (s_2)^2 + K_{zz}^2 (c_2)^2 + 2mb_z^2 l_x^{12} & (K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^{12}) c_2 \\ (K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^{12}) c_2 & K_{xx}^2 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -(K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^{12}) (\dot{q}^2)^2 s_2 + (K_{yy}^2 - K_{zz}^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 s_{22} \\ (-K_{yy}^2 + K_{zz}^2) (\dot{q}^1)^2 c_2 s_2 - mb_z^2 g s_2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

ou encore sous sa forme de modèle d'identification:

$$\varphi_d = \begin{pmatrix} 2\ddot{q}^1 l_x^2 & -l_x^2(c_2\ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2) & \ddot{q}^1 & 0 & c_2\ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2 & (s_2)^2 \ddot{q}^1 + s_{22}\dot{q}^1\dot{q}^2 & (c_2)^2 \ddot{q}^1 - s_{22}\dot{q}^1\dot{q}^2 \\ 0 & -l_x^2 c_2\ddot{q}^1 - g s_2 & 0 & \ddot{q}^2 & c_2\ddot{q}^1 & -c_2 s_2(\dot{q}^1)^2 & c_2 s_2(\dot{q}^1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$\delta_d = \begin{pmatrix} mb_x^2 \\ mb_z^2 \\ K_{zz}^1 \\ K_{xx}^2 \\ K_{xz}^2 \\ K_{yy}^2 \\ K_{zz}^2 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Remarquons que, contrairement aux deux premiers exemples, les colonnes de la matrice φ_d sont liées. Soit les deux combinaisons:

- colonne 1 = $2l_x^2$ colonne 3
- colonne 7 = colonne 3 - colonne 6
(avec la propriété trigonométrique $\cos^2(q) = 1 - \sin^2(q)$)

Du fait de la dépendance entre les colonnes de la matrice φ_d , ϕ ne pourra jamais être de rang 7 (quelle que soit la trajectoire d'essai) et le vecteur δ_d n'est pas identifiable.

La première combinaison est due à un *report* de mb_x^2 (appartenant au deuxième segment) sur K_{zz}^1 (appartenant au premier segment). La deuxième est un *regroupement* entre des éléments du deuxième segment.

Effectuons donc des combinaisons entre les paramètres pour obtenir un jeu identifiable:

$$(\delta_d)^* = \begin{pmatrix} mb_z^2 \\ K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + 2l_x^2 mb_x^2 \\ K_{xx}^2 \\ K_{xz}^2 \\ K_{yy}^2 - K_{zz}^2 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

et le modèle correspondant:

$$(\varphi_d)^* = \begin{pmatrix} -l_x^2(c_2\ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2) & \ddot{q}^1 & 0 & c_2\ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2 & (s_2)^2 \ddot{q}^1 + s_{22}\dot{q}^1\dot{q}^2 \\ -l_x^2 c_2\ddot{q}^1 - g s_2 & 0 & \ddot{q}^2 & c_2\ddot{q}^1 & -c_2 s_2(\dot{q}^1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Dans le chapitre suivant nous étudierons des règles de combinaison pour trouver ce jeu identifiable.

3.5. Conclusions

Dans ce chapitre, nous venons d'exposer les avantages liés à l'utilisation des *paramètres barycentriques* pour la modélisation dynamique de structures arborescentes. Trois propriétés y sont rattachées.

Ils sont indépendants.

Ils apparaissent linéairement dans les équations de la dynamique.

Ils forment des combinaisons nécessaires à l'estimation.

Par contre, nous avons montré dans le troisième exemple que ces combinaisons ne sont pas toujours suffisantes. En effet, la définition des *paramètres barycentriques* ne dépend que de l'arborescence. Si toutes les articulations avaient six degrés de liberté, ils formeraient un jeu de paramètres identifiable. Or, les articulations des manipulateurs ont rarement plus d'un seul degré de liberté. Par conséquent, la recherche d'un jeu de paramètres identifiables passe obligatoirement par l'étude des combinaisons des colonnes de Φ en fonction des particularités des articulations.

Cette étude, présentée dans le chapitre suivant, est basée sur la *propriété de descendance* des paramètres qui exprime que l'équation d'une articulation ne fait intervenir que des paramètres barycentriques des éléments descendants de cette articulation. En particulier cette propriété permet de distinguer deux types de combinaisons de paramètres: les *regroupements* entre des paramètres d'un même segment et les *reports* de paramètres d'un segment vers un segment ascendant.

Signalons enfin que nous nous sommes limités dans ce chapitre au cas des *arborescences sans contrainte*. Or celles-ci sont très courantes, citons par exemple le cas des boucles cinématiques ou plus simplement la contrainte liant la vitesse d'un actionneur à celle de son segment. L'élimination des contraintes dans le modèle introduit de nouveaux types de combinaisons. C'est pourquoi nous avons choisi de traiter de l'ensemble des combinaisons dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Combinaisons des paramètres

4.1. Introduction

Au chapitre troisième, nous avons défini les paramètres barycentriques. Nous avons montré qu'ils étaient indépendants et qu'ils formaient des combinaisons indispensables, mais non suffisantes, pour l'estimation. Pour trouver un jeu de paramètres identifiables, nous devons encore effectuer des combinaisons en tenant compte de la mobilité qui résulte des particularités des articulations. D'autres types de combinaisons peuvent être étudiés, par exemple pour minimiser le temps de calcul, mais ils n'entrent pas dans le cadre de notre étude et par conséquent nous ne les étudierons pas ici. Nous nous limitons donc, dans ce chapitre, à la recherche des combinaisons conduisant à un jeu de paramètres identifiables.

Sur l'exemple exposé au paragraphe 3.4. c il est facile de trouver des combinaisons conduisant à un jeu identifiable. Malheureusement, cette recherche n'est pas toujours aussi facile et dépend de la dextérité de l'opérateur. De plus, elle n'est pas unique et peut donc dépendre d'un opérateur à un autre. Pour des structures plus complexes, cette recherche peut devenir très hasardeuse. C'est pourquoi, nous désirons étudier des règles systématiques qui régissent ses combinaisons.

Dans leurs travaux, Gautier et Kalhil (Gautier 88) ont présenté des règles systématiques de combinaisons pour des structures simples. Pour décrire la répartition de masse des segments, ils ont choisi les masses, les moments du premier ordre et les moments du second ordre. Par conséquent, dans leurs règles nous retrouvons des combinaisons équivalentes à nos paramètres barycentriques (combinaisons que nous avons effectués uniquement sur base de l'arborescence) et des combinaisons basées sur les particularités des articulations (ce dont les paramètres barycentriques ne peuvent tenir compte).

Dans cette recherche, nous distinguons trois cas de complexité croissante. Premièrement nous étudierons une structure sans contrainte. Pour ce cas simple, il est aisé de mettre en évidence un certain nombre de règles permettant de générer un jeu identifiable. Deuxièmement, nous traitons le cas des arborescences avec contraintes provenant de la présence d'actionneurs. La contrainte est alors simplement l'expression qui lie la vitesse de l'actionneur à son segment. Enfin, signalons le cas de structures bouclées qui n'a pas été étudiée ici, mais qui fera l'objet de recherches ultérieures.

4.2. Arborescence sans contrainte

4.2.1. Règles de combinaisons

Des paramètres se combinent quand ils se retrouvent sous la forme d'une *combinaison* (linéaire et à coefficients constants) dans toutes les équations du mouvement où ils apparaissent. Dans ce cas, cette combinaison constitue un nouveau paramètre qui remplace les paramètres combinés.

La propriété de descendance exposée au chapitre précédent (cfr § 3.3.4 c) nous indique que le paramètre x^k , appartenant au segment k , ne peut intervenir que dans l'équation des articulations j ascendantes au segment k ($j \leq k$). Par conséquent, si x^k se combine, le nouveau paramètre ainsi formé ne peut apparaître que dans les équations des articulations ascendantes à k .

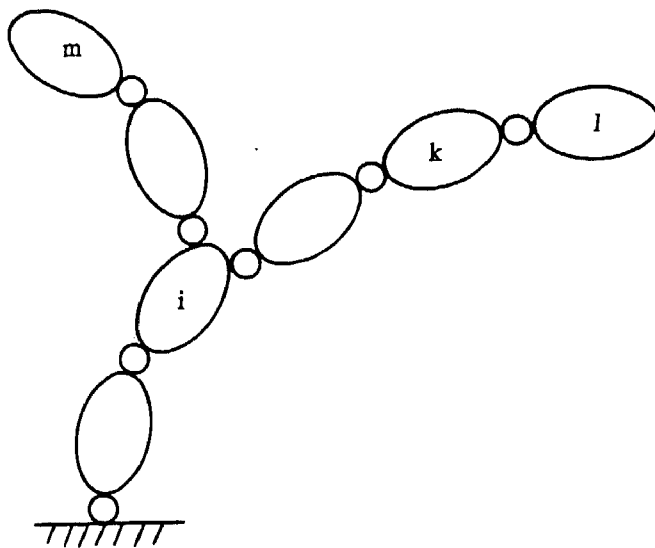


Fig. 4.1 Application de la règle de descendance pour les combinaisons.

Considérons la structure arborescente présentée à la figure 4.1. Nous distinguons deux cas de combinaisons, cfr l'exemple exposé au paragraphe 3.4.c.

- * Deux paramètres d'un même segment se *regroupent*, s'ils se combinent pour former un nouveau paramètre dans l'équation du corps considéré et dans toutes celles des articulations ascendantes où ils interviennent.

- * Un paramètre y^l , appartenant au corps l , se *reporte* sur le paramètre x^k , appartenant au corps k avec $k < l$, s'il n'apparaît pas comme tel dans les équations des corps j , avec $k < j \leq l$, et se combine avec x^k pour former un nouveau paramètre associé au corps k dans l'équation du corps k et dans toutes celles des articulations ascendantes où ils interviennent. En général, les deux corps l et k sont adjacents, c'est-à-dire $\text{Inbody}(l) = k$.

Par extension à ce deuxième cas, nous observons que deux paramètres y^m et x^k appartenant à des branches différentes ne peuvent se combiner que s'ils sont reportés sur le même paramètre de j avec $j < i$ et i le premier ascendant commun de m et de k .

Remarquons enfin qu'un paramètre peut se retrouver dans plusieurs combinaisons. Dans le troisième exemple présenté au chapitre précédent, K_{zz}^2 est ainsi regroupé avec K_{yy}^2 et reporté sur K_{zz}^1 .

D'après ces considérations, le modèle de travail peut se limiter à deux corps. Nous mettons en évidence les regroupements sur le deuxième segment et les reports de paramètres du deuxième segment sur le premier.

Pour être général, nous devons considérer tous les cas possibles de mobilité du premier corps. C'est pourquoi, nous imposons six degrés de liberté au premier corps et un seul degré de liberté entre les deux corps. Sur cette structure, nous recherchons l'ensemble de toutes les combinaisons possibles.

Définissons les conditions de regroupement et de report.

Conditions de regroupement:

Des paramètres du deuxième segment se regroupent

ssi

ils apparaissent sous forme combinée dans l'équation scalaire de la deuxième articulation (c.1.1) et dans les équations vectorielles de la première (c.1.2)

Conditions de report:

Un paramètre du deuxième segment est reporté sur le premier segment

ssi

premièrement, il n'apparaît pas comme tel dans l'équation scalaire de la deuxième articulation (c.2.1)

deuxièmement, il apparaît dans les équations vectorielles de la première articulation combiné avec un (ou plusieurs) paramètre(s) du premier segment. (c.2.2)

Les regroupements et les reports peuvent donc être mis en évidence en écrivant les sept équations correspondantes. Les premiers sont relativement faciles à mettre en évidence dans les

équations. Par contre, pour les seconds, ce travail est fastidieux car la deuxième articulation doit être prise quelconque par rapport à la première. Par conséquent, les calculs s'alourdissent par la présence d'une matrice de passage quelconque. Remarquons que pour une articulation prismatique, cette matrice est toujours constante, et que pour une articulation rotoïde il est toujours possible de la décomposer en une transformation constante et en une rotation autour de l'articulation. Or *une transformation constante ne joue aucun rôle dans l'attribution des candidats aux reports*. Son rôle se limite à la répartition des paramètres (des composantes). Par conséquent, la recherche des candidats à un report peut se faire en ne tenant compte que de la matrice de rotation autour de l'axe, ce qui revient à exprimer les équations dans un repère lié au premier segment mais aligné avec la deuxième articulation.

Sur base de l'ensemble de ces considérations, nous proposons, pour la recherche des regroupements et des reports, la procédure suivante:

En exprimant les équations dans un repère lié au premier segment (mais aligné avec la deuxième articulation, c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte de la composante constante de la matrice de passage).

Nous étudions sur L^2 pour une articulation rotoïde ou sur F^2 pour une articulation prismatique, les regroupements (condition c.1.1) et les candidats potentiels à un report (condition c.2.2).

Ensuite sur $\underline{L}^1$ et $\underline{F}^1$, nous confirmons les regroupements (condition c.1.2) et les candidats à un report (condition c.2.1).

En exprimant les équations dans le repère du premier segment (c'est-à-dire en tenant compte de la composante constante de la matrice de passage), nous recherchons la répartition des reports sur $\underline{L}^1$ et $\underline{F}^1$.

L'aboutissement de cette procédure est un ensemble de règles régissant les regroupements et les reports possibles.

Appliquons maintenant cette approche en décrivant le modèle de travail de façon plus précise. Nous traiterons ensuite du cas le plus complexe, celui de l'articulation rotoïde pour finir par l'articulation prismatique.

Modèle de travail

Soit la structure en chaîne simple composée de deux segments et de deux articulations dont la première a six degrés de liberté (voir figure 4.2) et la deuxième n'a qu'un seul degré de liberté. Sur base des conventions introduites dans le troisième chapitre, nous définissons deux repères $\{\hat{x}^1\}$ et $\{\hat{x}^2\}$ liés respectivement aux corps un et deux ainsi que les grandeurs géométriques et barycentriques correspondantes aux segments (pour simplifier l'écriture nous notons $\underline{l}^{12} = \underline{l}$). L'articulation rotoïde ou prismatique du deuxième segment est orientée suivant le vecteur $\hat{e}$. Sans perdre de généralité, nous supposons que ce vecteur correspond à $\hat{x}_2^2$.

Nous définissons un repère de travail $\{\hat{\underline{y}}\}$ lié au premier segment et dont le troisième axe est aligné avec $\hat{\underline{e}}$. Soit les matrices de transformations suivantes:

$$[\hat{\underline{x}}^2] = A [\hat{\underline{x}}^1] \quad (4.1)$$

$$[\hat{\underline{x}}^2] = RC [\hat{\underline{x}}^1] \quad (4.2)$$

$$[\hat{\underline{y}}] = C [\hat{\underline{x}}^1] \quad (4.3)$$

avec R la matrice de rotation correspondant à l'articulation (orientée suivant $\hat{\underline{x}}_z^2$)

$$R = \begin{pmatrix} \cos(q) & \sin(q) & 0 \\ -\sin(q) & \cos(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour une articulation rotoïde} \quad (4.4)$$

où q est la coordonnée articulaire

$$R = E \quad \text{pour une articulation prismatique} \quad (4.5)$$

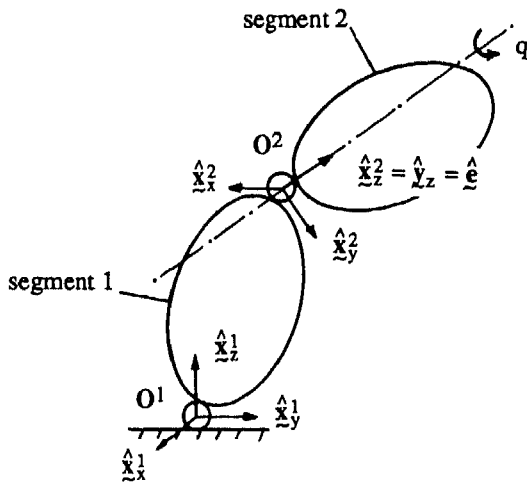


fig. 4.2 Le modèle de travail.

Cinématique

Nous définissons les vecteurs vitesses angulaires absolues des deux segments dans le repère $\{\hat{\underline{y}}\}$:

$$\underline{\omega}^1 = [\hat{\underline{y}}]^t \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\dot{\underline{\omega}}^1 = [\hat{\underline{y}}]^t \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Pour une articulation prismatique:

$$\underline{\omega}^2 = \underline{\omega}^1 \quad (4.8)$$

Pour une articulation rotoïde:

$$\underline{\omega}^2 = \underline{\omega}^1 + \hat{\underline{e}} \dot{q} \quad (4.9)$$

$$\dot{\underline{\omega}}^2 = \dot{\underline{\omega}}^1 + \underline{\omega}^1 \times \hat{\underline{e}} \dot{q} + \hat{\underline{e}} \ddot{q} \quad (4.10)$$

a) Articulation rotoïde

Pour effectuer la première partie de notre étude nous n'avons besoin que de $\underline{L}^2$, c'est-à-dire la projection de $\underline{L}^2$ sur $\hat{\underline{e}}$ car c'est la seule composante intervenant dans le modèle dynamique. Or, nous avons montré dans le paragraphe 3.3.4, expression (3.38), que $\underline{L}^1$ contient explicitement $\underline{L}^2$. Par conséquent, afin de limiter les calculs de $\underline{L}^1$ nous calculons directement $\underline{L}^2$.

Reprenons les formes vectorielles de $\underline{F}$ (3.27) et de $\underline{L}$ (3.38) et appliquons les à notre structure.

$$\underline{L}^2 = -m\underline{b}^2 \times \underline{g} + K^2 \underline{\omega}^2 + \underline{\omega}^2 \times K^2 \underline{\omega}^2 + m\underline{b}^2 \times \left((\tilde{\underline{\omega}}^1 + \tilde{\underline{\omega}}^1 \tilde{\underline{\omega}}^1) \underline{I} \right) + \underline{\dot{z}}^1 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
\underline{L}^1 &= \underline{m}\underline{b}^1 \times (\ddot{\underline{z}}^1 - \underline{g}) \\
&+ \underline{z}^1 \times \left(\ddot{\underline{z}}^1 m^{11} + \left(\ddot{\omega}^1 + \ddot{\omega}^1 \ddot{\omega}^1 \right) \underline{m}\underline{b}^1 + \left(\ddot{\omega}^2 + \ddot{\omega}^2 \ddot{\omega}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 - m^{11} \underline{g} \right) \\
&+ \underline{K}^1 \dot{\omega}^1 + \omega^1 \times \underline{K}^1 \omega^1 + \underline{l} \times \left(\left(\ddot{\omega}^2 + \ddot{\omega}^2 \ddot{\omega}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \right) \\
&+ \underline{L}^2
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Développons $\underline{L}^2$ dans cette expression :

$$\begin{aligned}
\underline{L}^1 &= \left(\underline{m}\underline{b}^1 + \underline{m}\underline{b}^2 \right) \times (\ddot{\underline{z}}^1 - \underline{g}) \\
&+ \underline{z}^1 \times \left(\ddot{\underline{z}}^1 m^{11} + \left(\ddot{\omega}^1 + \ddot{\omega}^1 \ddot{\omega}^1 \right) \underline{m}\underline{b}^1 + \left(\ddot{\omega}^2 + \ddot{\omega}^2 \ddot{\omega}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 - m^{11} \underline{g} \right) \\
&+ \underline{K}^1 \dot{\omega}^1 + \omega^1 \times \underline{K}^1 \omega^1 + \underline{K}^2 \dot{\omega}^2 + \omega^2 \times \underline{K}^2 \omega^2 \\
&+ \underline{l} \times \left(\left(\ddot{\omega}^2 + \ddot{\omega}^2 \ddot{\omega}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \right) + \underline{m}\underline{b}^2 \times \left(\left(\ddot{\omega}^1 + \ddot{\omega}^1 \ddot{\omega}^1 \right) \underline{l} \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\underline{F}^1 = -m^{11} \underline{g} + m^{11} \ddot{\underline{z}}^1 + \left(\ddot{\omega}^1 + \ddot{\omega}^1 \ddot{\omega}^1 \right) \underline{m}\underline{b}^1 + \left(\ddot{\omega}^2 + \ddot{\omega}^2 \ddot{\omega}^2 \right) \underline{m}\underline{b}^2 \tag{4.14}$$

Nous remarquons dans l'expression (4.12) que le tenseur $\underline{K}^2$ ne peut apparaître dans $\underline{L}^1$ que grâce à $\underline{L}^2$.

Etude de $\underline{L}^2$

Etude des vecteurs barycentriques

Commençons par étudier le premier terme de l'expression (4.11) où le vecteur barycentrique intervient. En écrivant ce terme dans le repère $\{\hat{\underline{y}}\}$, nous obtenons:

$$-\underline{m}\underline{b}^2 \times \underline{g} = [\hat{\underline{y}}]^t \left(-(\underline{R}^t \underline{m}\underline{b}^2)^\sim \underline{g} \right) \tag{4.15}$$

$$= [\hat{\underline{y}}]^t \begin{pmatrix} 0 & \underline{m}\underline{b}_x^2 & s(q)\underline{m}\underline{b}_x^2 - c(q)\underline{m}\underline{b}_y^2 \\ -\underline{m}\underline{b}_x^2 & 0 & c(q)\underline{m}\underline{b}_x^2 + s(q)\underline{m}\underline{b}_y^2 \\ -s(q)\underline{m}\underline{b}_x^2 + c(q)\underline{m}\underline{b}_y^2 & -c(q)\underline{m}\underline{b}_x^2 - s(q)\underline{m}\underline{b}_y^2 & 0 \end{pmatrix} \underline{g} \tag{4.16}$$

Si nous projetons l'expression (4.16) sur l'articulation $\hat{e}$, c'est-à-dire que nous considérons $\hat{e} \cdot \underline{L}^2$, nous obtenons la contribution de la gravité à l'équation scalaire de la deuxième articulation.

$$e^t(-(\mathbf{R}^t \mathbf{mb}^2)^{\sim} \mathbf{g}) = (-s(q)\mathbf{mb}_x^2 + c(q)\mathbf{mb}_y^2)\mathbf{g}_x - (c(q)\mathbf{mb}_x^2 + s(q)\mathbf{mb}_y^2)\mathbf{g}_y \quad (4.17)$$

Nous remarquons que les deux composantes $\mathbf{mb}_x^2$ et $\mathbf{mb}_y^2$ sont présentes dans cette expression, sauf cas très particulier où l'axe $\hat{e}$ reste constamment aligné avec la verticale, cfr étude des cas particuliers § 4.2.4. La gravité permet donc d'estimer ces deux composantes. Par conséquent, elles ne peuvent être ni regroupées ni reportées.

Par contre, $\mathbf{mb}_z^2$ n'est jamais fonction de la gravité. Ce paramètre est donc susceptible d'être reporté sur des paramètres du premier segment, ou d'être regroupé avec des éléments de $\mathbf{K}^2$. Par conséquent, nous continuons notre étude en recherchant la présence de $\mathbf{mb}_z^2$ dans les autres termes de (4.11). Nous remarquons qu'il ne peut apparaître que dans le quatrième terme de cette expression. Développons donc ce terme en nous ne nous intéressant qu'à $\mathbf{mb}_z^2$, ce qui revient à remplacer le vecteur $\mathbf{mb}^2$ par $\hat{e}\mathbf{mb}_z^2$.

$$\mathbf{mb}^2 \times \left(\left(\tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^1 \tilde{\omega}^1 \right) \underline{l} \right) + \underline{z}^1 = \mathbf{mb}_z^2 \hat{e} \times \left(\left(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \right) \underline{l} \right) + \underline{z}^1 \quad (4.18)$$

La projection de (4.18) sur l'axe de rotation est nulle. Par conséquent, le paramètre $\mathbf{mb}_z^2$ n'apparaît jamais dans l'expression scalaire de la deuxième articulation. Ce paramètre est donc un candidat sérieux à un report.

Etude des paramètres du tenseur barycentrique

Les éléments de $\mathbf{K}^2$ apparaissent dans les termes deux et trois de l'expression (4.11). En utilisant les relations (4.9) et (4.10), développons ces termes dans le repère $\{\hat{y}\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^2 \tilde{\omega}^2 + \omega^2 \times \mathbf{K}^2 \omega^2 = & [\hat{y}]^t \left((\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t) (\dot{\omega} + \mathbf{e}\dot{q} + \tilde{\omega} \mathbf{e}\dot{q}) \right) \\ & + [\hat{y}]^t \left((\omega + \mathbf{e}\dot{q})^{\sim} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t (\omega + \mathbf{e}\dot{q}) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pour interpréter cette expression développons le terme $\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t$ en utilisant la définition de $\mathbf{R}$ (4.4):

$$\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t = \begin{pmatrix} (c^2 \mathbf{K}_{xx}^2 + s^2 \mathbf{K}_{yy}^2 + 2cs \mathbf{K}_{xy}^2) & ((c^2 - s^2) \mathbf{K}_{xy}^2 - cs(\mathbf{K}_{xx}^2 - \mathbf{K}_{yy}^2)) & c\mathbf{K}_{xz}^2 + s\mathbf{K}_{yz}^2 \\ ((c^2 - s^2) \mathbf{K}_{xy}^2 - cs(\mathbf{K}_{xx}^2 - \mathbf{K}_{yy}^2)) & (s^2 \mathbf{K}_{xx}^2 + c^2 \mathbf{K}_{yy}^2 - 2cs \mathbf{K}_{xy}^2) & -s\mathbf{K}_{xz}^2 + c\mathbf{K}_{yz}^2 \\ c\mathbf{K}_{xz}^2 + s\mathbf{K}_{yz}^2 & -s\mathbf{K}_{xz}^2 + c\mathbf{K}_{yz}^2 & \mathbf{K}_{zz}^2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

avec les notations $c = \cos(q)$ et $s = \sin(q)$

Certains paramètres figurant dans (4.20) pourraient disparaître de (4.18) pour un ω particulier (par exemple avec une composante nulle). Dans ce cas, ils n'apparaîtront pas non plus dans $\underline{L}^1$, cfr (4.12). Ils ne doivent donc pas être identifiés. Les paramètres subsistants de (4.19) seront identifiables distinctement s'ils sont multipliés par une fonction de q ou de ses dérivées. Par exemple, tous les éléments de la troisième colonne de (4.20) apparaissent multipliés par $\dot{q}$ dans (4.19): K_{xz}^2 , K_{yz}^2 et K_{zz}^2 sont identifiables (à moins de disparaître complètement) soit par L^2 soit par $\underline{L}^1$.

Nous allons donc étudier uniquement les paramètres K_{xx}^2 , K_{xy}^2 et K_{yy}^2 . Nous nous intéressons donc à la matrice:

$$\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t = \begin{pmatrix} (c)^2 K_{xx}^2 + (s)^2 K_{yy}^2 + 2cs K_{xy}^2 & ((c)^2 - (s)^2) K_{xy}^2 - cs(K_{xx}^2 - K_{yy}^2) & 0 \\ ((c)^2 - (s)^2) K_{xy}^2 - cs(K_{xx}^2 - K_{yy}^2) & (s)^2 K_{xx}^2 + (c)^2 K_{yy}^2 - 2cs K_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Pour cette matrice (4.21), nous développons l'expression (4.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^2 \dot{\omega}^2 + \omega^2 \times \mathbf{K}^2 \omega^2 &= [\hat{\underline{y}}]^t (\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \dot{\omega} + \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \dot{e} \dot{q} + \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \tilde{\omega} e \dot{q}) \\ &+ [\hat{\underline{y}}]^t (\tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \omega + \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t e \dot{q} + \tilde{e} \dot{q} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \omega + \tilde{e} \dot{q} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t e \dot{q}) \end{aligned}$$

en utilisant la propriété $\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t e = 0$, propre à la forme (4.21), cette expression se réduit à:

$$= [\hat{\underline{y}}]^t (\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \dot{\omega} + \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \tilde{\omega} e \dot{q} + \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \omega + \tilde{e} \dot{q} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \omega) \quad (4.22)$$

La comparaison des mesures de $\underline{L}^1$ effectuées au cours de deux essais permet d'identifier K_{xy}^2 et la différence $(K_{xx}^2 - K_{yy}^2)$. Soit les deux trajectoires d'essais effectuées à ω constant, l'une avec $\dot{q} = 0$ et l'autre avec $\dot{q} \neq 0$, la différence de la mesure de $\underline{L}^1$ entre ces deux trajectoires permet de mettre en évidence le terme:

$$[\hat{\underline{y}}]^t (\mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \tilde{\omega} e \dot{q} + \tilde{e} \dot{q} \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t \omega) \quad (4.23)$$

qui s'écrit:

$$[\hat{\underline{y}}]^t \left(\cos(2q) \dot{q} \begin{pmatrix} -2K_{xy}^2 & K_{xx}^2 - K_{yy}^2 & 0 \\ K_{xx}^2 - K_{yy}^2 & -2K_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega - \sin(2q) \dot{q} \begin{pmatrix} K_{xx}^2 - K_{yy}^2 & 2K_{xy}^2 & 0 \\ -2K_{xy}^2 & K_{xx}^2 - K_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega \right)$$

L'expression (4.23) permet donc l'identification de K_{xy}^2 et de la différence ($K_{xx}^2 - K_{yy}^2$) sauf dans le cas très particulier où $\underline{\omega}^1$ serait constamment aligné avec $\hat{e}$, auquel cas ils disparaissent complètement du modèle. La différence ($K_{xx}^2 - K_{yy}^2$) est en fait un regroupement, issu de la propriété $(s)^2 + (c)^2 = 1$, qui permet de réécrire la forme originale (4.20) de $R K^2 R^t$ comme suit:

$$R K^2 R^t = \begin{pmatrix} (c)^2(K_{xx}^2 - K_{yy}^2) + 2csK_{xy}^2 + K_{yy}^2 & ((c)^2 - (s)^2)K_{xy}^2 - cs(K_{xx}^2 - K_{yy}^2) & cK_{xz}^2 + sK_{yz}^2 \\ ((c)^2 - (s)^2)K_{xy}^2 - cs(K_{xx}^2 - K_{yy}^2) & (s)^2(K_{xx}^2 - K_{yy}^2) - 2csK_{xy}^2 + K_{yy}^2 & -sK_{xz}^2 + cK_{yz}^2 \\ cK_{xz}^2 + sK_{yz}^2 & -sK_{xz}^2 + cK_{yz}^2 & K_{zz}^2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Ce regroupement apparaît donc comme tel dans l'expression de $\underline{L}^2$ et dans celle de $\underline{L}^1$ (cfr. la forme récursive (4.12) de $\underline{L}^1$). Les conditions c.1.1 et c.1.2 sont donc automatiquement satisfaites et K_{xx}^2 disparaît de toutes les équations. Ce choix est arbitraire car nous aurions pu faire ressortir K_{xx}^2 en lieu et place de K_{yy}^2 .

Etudions maintenant la contribution dans $\underline{L}^2$ de K_{yy}^2 qui n'a pas encore été identifié à ce stade. Nous ne nous intéressons donc plus qu'à ce seul paramètre dans (4.24):

$$R K^2 R^t = \begin{pmatrix} K_{yy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

La contribution de K_{yy}^2 à $\underline{L}^2$ (4.22) devient:

$$K^2 \dot{\underline{\omega}}^2 + \underline{\omega}^2 \times K^2 \underline{\omega}^2 = [\hat{y}]^t (RK^2 R^t \dot{\underline{\omega}} + \tilde{\omega} RK^2 R^t \underline{\omega}) \quad (4.26)$$

En projetant (4.26) sur $\hat{e}$, nous observons que K_{yy}^2 est absent de l'équation scalaire de $\underline{L}^2$.

En conclusion, nous avons montré qu'il existe un regroupement interne au deuxième segment. Nous avons choisi les paramètres $K_{xx}^2 - K_{yy}^2$ et K_{yy}^2 . Aussi, le paramètre K_{xx}^2 disparaît en tant que tel du modèle dynamique. Nous avons également montré que mb_z^2 et K_{yy}^2 n'apparaissent pas dans l'équation scalaire $\underline{L}^2$. De plus, nous voyons facilement que m^{22} n'apparaît pas dans l'expression (4.11). Ces trois paramètres sont donc des candidats sérieux pour être reportés sur des paramètres du premier segment. Nous allons maintenant vérifier cette hypothèse en étudiant $\underline{L}^1$ et $\underline{F}^1$.

Etude de $\underline{L}^1$

Limitons nous à l'étude de $m\mathbf{b}_z^2$ et K_{yy}^2 car m^{22} ne peut pas apparaître dans $\underline{L}^1$. Remplaçons dans (4.13) le vecteur $m\mathbf{b}^2$ par $\hat{e}mb_z^2$ et introduisons la relation (4.26); nous obtenons:

$$\begin{aligned}\underline{L}^1 &= [\hat{\mathbf{y}}]^t (m\mathbf{b}^1 + emb_z^2) \sim (\tilde{\mathbf{z}}^1 - \mathbf{g})) \\ &+ [\hat{\mathbf{y}}]^t \left(\tilde{\mathbf{z}}^1 (\tilde{\mathbf{z}}^1 m^{11} + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) m\mathbf{b}^1 + (\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega}^2) emb_z^2 - m^{11} \mathbf{g}) \right) \\ &+ [\hat{\mathbf{y}}]^t \left((\mathbf{K}^1 + \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t) \dot{\omega} + \tilde{\omega} (\mathbf{K}^1 + \mathbf{R} \mathbf{K}^2 \mathbf{R}^t) \omega \right) \\ &+ [\hat{\mathbf{y}}]^t mb_z^2 \left(\tilde{\mathbf{e}} (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) I + \mathcal{I} (\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega}^2) \mathbf{e} \right) + \dots\end{aligned}\quad (4.27)$$

Dans cette expression les trois points de suspension correspondent à la participation des termes déjà identifiés dans $\underline{L}^1$.

Développons $(\dot{\omega}^2 + \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega}^2) \mathbf{e}$ en utilisant les relations (4.9) et (4.10):

$$(\dot{\omega}^2 + \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega}^2) \mathbf{e} = ((\dot{\omega} + \mathbf{e}\dot{q} + \tilde{\omega} \mathbf{e}\dot{q}) \sim (\omega + \mathbf{e}\dot{q}) \sim (\omega + \mathbf{e}\dot{q}) \sim) \mathbf{e} \quad (4.28)$$

$$= (\tilde{\omega} + \tilde{\mathbf{e}}\dot{q} + (\tilde{\omega} \mathbf{e}) \sim \dot{q} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} + \tilde{\mathbf{e}}\dot{q} \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\mathbf{e}}\dot{q} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{e}} (\dot{q})^2) \mathbf{e} \quad (4.29)$$

Soit les deux propriétés relatives au produit vectoriel:

$$\tilde{\mathbf{e}} \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \text{Le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul} \quad (4.30)$$

$$(\tilde{\omega} \mathbf{e}) \sim = \tilde{\omega} \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\omega} \quad \text{voir (*)} \quad (4.31)$$

en utilisant ces deux propriétés, l'expression (4.29) se réécrit:

$$(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega}^2) \mathbf{e} = (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) \mathbf{e} \quad (4.32)$$

* Soit la propriété du produit vectoriel:

$$\underline{x} \times \underline{y} \times \underline{z} + \underline{y} \times \underline{z} \times \underline{x} + \underline{z} \times \underline{x} \times \underline{y} = \mathbf{0}$$

En considérant le vecteur $\underline{x} \times \underline{y}$ dans le deuxième terme et les vecteurs $\underline{z}$ et $(\underline{x} \times \underline{y}) \times \underline{z}$ dans le troisième, nous écrivons:

$$\underline{x} \times \underline{y} \times \underline{z} - \underline{y} \times \underline{x} \times \underline{z} - (\underline{x} \times \underline{y}) \times \underline{z} = \mathbf{0}$$

cette expression peut s'écrire:

$$\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{y}} \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{z} - (\tilde{\mathbf{x}} \mathbf{y}) \sim \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

cette propriété est valable quelque soit $\underline{z}$, par conséquent, nous écrivons:

$$(\tilde{\mathbf{x}} \mathbf{y}) \sim = \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{x}}$$

Introduisons (4.32) dans (4.27), la dernière ligne de cette expression devient:

$$mb_2^2[\hat{y}]^t \left(\mathcal{T}(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) e + \tilde{e} \left(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \right) I \right) \quad (4.33)$$

Développons cette expression, nous écrivons:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \tilde{\omega} e + \tilde{e} \tilde{\omega} I &= -\mathcal{T} \tilde{e} \tilde{\omega} - \tilde{e} \mathcal{T} \tilde{\omega} \\ &= -(\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T}) \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \tilde{\omega} \tilde{\omega} e + \tilde{e} \tilde{\omega} \tilde{\omega} I &= -\mathcal{T} \tilde{\omega} \tilde{e} \omega - \tilde{e} \tilde{\omega} \mathcal{T} \omega \\ &= -\tilde{\omega} \mathcal{T} \tilde{e} \omega + (\tilde{\omega} I) \tilde{e} \omega - \tilde{\omega} \tilde{e} \mathcal{T} \omega + (\tilde{\omega} e) \tilde{e} \mathcal{T} \omega \\ &= -\tilde{\omega} (\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T}) \omega - (\tilde{\omega} e) \tilde{e} \mathcal{T} \omega + (\tilde{\omega} e) \tilde{e} \mathcal{T} \omega \\ &= -\tilde{\omega} (\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T}) \omega \end{aligned} \quad (4.35)$$

Introduisons (4.34) et (4.35), dans (4.33), nous obtenons:

$$mb_2^2[\hat{y}]^t \left(-(\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T}) \tilde{\omega} - \tilde{\omega} (\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T}) \omega \right) \quad (4.36)$$

Finalement en tenant compte de (4.32) et (4.36), l'expression (4.27) devient:

$$\begin{aligned} \underline{L}^1 &= [\hat{y}]^t (mb^1 + emb_2^2) \tilde{z}^1 - g)) \\ &+ [\hat{y}]^t \left(\tilde{z}^1 (\tilde{z}^1 m^{11} + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) (mb^1 + emb_2^2) - m^{11} g) \right) \\ &+ [\hat{y}]^t \left((K^1 + RK^2R^t - mb_2^2 (\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T})) \tilde{\omega} \right) \\ &+ [\hat{y}]^t \left(\tilde{\omega} (K^1 + RK^2R^t - mb_2^2 (\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T})) \omega \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dans l'expression (4.37) nous observons le report suivant :

$$(mb^1)^* = mb^1 + \hat{e} mb_2^2 \quad (4.38)$$

$$(K^1)^* = K^1 - mb_2^2 (\mathcal{T} \tilde{e} + \tilde{e} \mathcal{T}) + \begin{pmatrix} K_{yy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (*) \quad (4.39)$$

* Nous remarquons l'analogie avec la définition du tenseur d'inertie:

$$J = \int -\tilde{x} \tilde{x} \, dm = \int x^t x E - x x^t$$

avec E la matrice unité

Etude de $\underline{F}^1$

En se limitant à l'étude de emb_z^2 dans (4.14), nous obtenons :

$$\underline{F}^1 = [\hat{\underline{y}}]^t \left(-m^{11} \underline{g} + m^{11} \ddot{\underline{z}}^1 + \left(\tilde{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}} \tilde{\underline{\omega}} \right) (\underline{m} \underline{b}^1 + \text{emb}_z^2) \right) + \dots \quad (4.40)$$

Par conséquent, le report défini en (4.38) est bien d'application pour $\underline{F}^1$.

b) Articulation prismatique

Une étude similaire nous permet de traiter le cas de l'articulation prismatique. Appliquons les expressions (3.27) et (3.37) à notre structure avec:

$$\begin{aligned} \underline{\omega}^2 &= \underline{\omega}^1 = \underline{\omega} \\ \text{et} \quad \ddot{\underline{z}}^2 &= \hat{\underline{e}} \ddot{q} \end{aligned}$$

$$\underline{F}^2 = \left(\ddot{\underline{z}}^1 + \ddot{\underline{z}}^2 + \left(\tilde{\underline{\omega}}^1 + \tilde{\underline{\omega}}^1 \tilde{\underline{\omega}}^1 \right) \underline{l} - \underline{g} \right) m^{22} + \left(\tilde{\underline{\omega}}^2 + \tilde{\underline{\omega}}^2 \tilde{\underline{\omega}}^2 \right) \underline{m} \underline{b}^2 \quad (4.41)$$

$$\underline{F}^1 = m^{11} \left(-\underline{g} + \ddot{\underline{z}}^1 \right) + m^{22} \ddot{\underline{z}}^2 + \left(\tilde{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}} \tilde{\underline{\omega}} \right) (\underline{m} \underline{b}^1 + \underline{m} \underline{b}^2) \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}^1 &= (\underline{K}^1 + \underline{K}^2) \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times (\underline{K}^1 + \underline{K}^2) \underline{\omega} \\ &+ \underline{z}^1 \times \underline{F}^1 + \underline{z}^2 \times \underline{F}^2 \\ &+ (\underline{m} \underline{b}^1 + \underline{m} \underline{b}^2) \times (\ddot{\underline{z}}^1 - \underline{g}) \\ &+ \underline{l} \times \left(\tilde{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}} \tilde{\underline{\omega}} \right) \underline{m} \underline{b}^2 + \underline{m} \underline{b}^2 \times \left(\left(\tilde{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}} \tilde{\underline{\omega}} \right) \underline{l} \right) \\ &+ \underline{l} \times m^{22} \ddot{\underline{z}}^1 + \underline{m} \underline{b}^2 \times \ddot{\underline{z}}^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Etude de $\underline{F}^2$

Comme $\underline{K}^2$ n'apparaît jamais dans les équations de force, et donc dans $\underline{F}^2$ (et dans $\underline{F}^1$), toutes ses composantes sont candidates à un report. Nous n'étudierons donc sur $\underline{F}^2$ que les paramètres m^{22} et $\underline{m} \underline{b}^2$.

Projetons $\tilde{\mathbf{F}}^2$ (4.41) sur l'axe de l'articulation pour obtenir l'équation scalaire de cette articulation:

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{e}^t \left(\left(\tilde{\mathbf{z}}^1 + \tilde{\mathbf{z}}^2 + \left(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \right) \mathbf{l} \right) - \mathbf{g} \right) \mathbf{m}^{22} + \mathbf{e}^t \left(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \right) \mathbf{m} \mathbf{b}^2 \quad (4.44)$$

$$\text{avec: } \mathbf{e}^t \left(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \right) = \begin{pmatrix} \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y & \omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x & -(\omega_x)^2 - (\omega_y)^2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Il apparait clairement de (4.44) et (4.45) que pour ω *quelconque* tous les éléments de $\mathbf{m} \mathbf{b}^2$ apparaissent tels quels. Par conséquent, aucun regroupement ni report ne sont à envisager et les composantes du vecteur barycentrique sont identifiables. Nous étudierons au paragraphe 4.2.4 des cas particuliers ou des reports sont possibles en fonction des particularités de ω^1 .

Etude de $\tilde{\mathbf{L}}^1$

La première ligne de l'expression (4.43) nous indique clairement que $\mathbf{K}^2$ est intégralement reporté sur $\mathbf{K}^1$.

c) Règles générales de combinaisons

Nous exprimons maintenant les règles générales de regroupement et de report sur deux segments successifs $i-1$ et i séparés par l'articulation i . *Ces règles doivent être appliquées récursivement en partant de l'extrémité du manipulateur vers la base.* De plus, il est intéressant de les effectuer *a priori* avant la *génération des équations*. En effet, ces combinaisons peuvent être interprétées comme de nouveaux paramètres barycentriques. Donc, toutes les propriétés démontrées dans le chapitre précédent restent d'application. En particulier, le logiciel ROBOTRAN de génération des équations est toujours d'application. Un exemple d'application de ces règles est présenté dans le paragraphe suivant.

Ces règles sont générales quelque soit l'orientation de $\{\hat{\mathbf{x}}^2\}$ par rapport à $\{\hat{\mathbf{x}}^1\}$. Par conséquent, elles tiennent compte de la composante constante de matrice de passage $\mathbf{C}$, cfr (4.3), et de toutes les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{e}}$ exprimé dans le repère $\{\hat{\mathbf{x}}^1\}$.

a) i est une articulation prismatique.

Le tenseur d'inertie est *reporté* intégralement sur le segment parent, nous écrivons donc pour le segment enfant:

$$(\mathbf{K}^i)^* = 0 \quad (4.46)$$

et pour le parent:

$$(\mathbf{K}^{i-1})^* = \mathbf{K}^{i-1} + \mathbf{C}^1 \mathbf{K}^i \mathbf{C} \quad (4.47)$$

b) i est une articulation rotatoire.

L'élément K_{yy}^i est regroupé avec K_{xx}^i et reporté sur K^{i-1} . Pour tenir compte de ces combinaisons, il faut que la matrice $\mathbf{R}K^i\mathbf{R}^t$ corresponde à la différence entre les expressions (4.24) et (4.25). Nous écrivons alors K^i sous la forme:

$$(K^i)^* = \begin{pmatrix} K_{xx}^i - K_{yy}^i & K_{xy}^i & K_{xz}^i \\ K_{xy}^i & 0 & K_{yz}^i \\ K_{xz}^i & K_{yz}^i & K_{zz}^i \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

ou sous une forme équivalente:

$$(K^i)^* = K^i - \begin{pmatrix} K_{yy}^i & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49 \text{ a})$$

Le paramètre mb_z^i est reporté sur le parent. Nous devons donc le retrancher de l'enfant:

$$(\underline{mb}^i)^* = \underline{mb}^i - \hat{\underline{e}}^i mb_z^i \quad (4.49 \text{ b})$$

Sur le segment parent, nous reportons K_{yy}^i et mb_z^i sur $\underline{mb}^{i-1}$ et K^{i-1} comme annoncé en (4.38) et (4.39), mais en considérant $\{\hat{\underline{x}}^{i-1}\}$ et non plus $\{\hat{\underline{y}}^{i-1}\}$ comme repère de référence attaché au corps $i-1$.

$$(\underline{mb}^{i-1})^* = \underline{mb}^{i-1} + \hat{\underline{e}}^i mb_z^i \quad (4.50 \text{ a})$$

$$(K^{i-1})^* = K^{i-1} + C^t \begin{pmatrix} K_{yy}^i & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C + mb_z^i \begin{pmatrix} 2(l_y e_y + l_z e_z) & -l_x e_y - l_y e_x & -l_x e_z - l_z e_x \\ -l_x e_y - l_y e_x & 2(l_x e_x + l_z e_z) & -l_y e_z - l_z e_y \\ -l_x e_z - l_z e_x & -l_y e_z - l_z e_y & 2(l_x e_x + l_y e_y) \end{pmatrix} \quad (4.50 \text{ b})$$

avec $\hat{\underline{e}}$ l'axe de l'articulation i , exprimée dans le repère $\{\hat{\underline{x}}^{i-1}\}$

$\underline{l} = \underline{l}^{(i-1)}$ le vecteur $(O^{i-1} O^i)$, exprimé dans le repère $\{\hat{\underline{x}}^{i-1}\}$

4.2.2. Interprétation

Interprétons le report de mb_z^2 sur mb^1 et sur K^1 .

Développons le cas particulier d'un actionneur électrique. Les paramètres relatifs au stator sont immédiatement rapportés sur le segment porteur. Il ne reste donc à étudier que l'application de nos règles aux paramètres du rotor. Celui-ci est un corps de révolution, par conséquent, seule la composante suivant l'axe de rotation du vecteur barycentrique (mb_z^2) est non nulle et le tenseur d'inertie est diagonal avec $J_{xx}^2 = J_{yy}^2$. Etant donné cette symétrie cylindrique leur différence est nulle et J_{yy}^2 peut être reporté tout comme mb_z sur le segment parent. Donc, le seul paramètre intervenant encore dans l'équation articulaire de l'actionneur est J_{zz}^2 .

Innuitivement, il est évident que le point de référence de l'articulation rotoïde peut être placé n'importe où sur son axe. En le plaçant *sur le centre de masse*, nous aurions eu dès le départ $mb_z^2 = 0$ dans l'exemple ci-dessus et la masse de l'actionneur aurait été automatiquement prise en compte sur le segment porteur grâce à mb^1 et K^1 . On aurait donc obtenu le même résultat que celui donné par nos règles (hormis le report de J_{yy}^2 sur K^1). Ces particularités propres aux rotors symétriques sont bien connues dans la littérature relative aux gyrostats (Wittenburg 77).

Etendons maintenant cette interprétation au cas plus général de notre modèle de travail. Considérons la figure 4.3. La composante de I_z^{22} dirigée suivant l'axe de rotation n'intervient pas dans l'équation scalaire L^2 . Nous pouvons donc, sans crainte de modifier L^2 , translater la deuxième articulation (positionnée initialement en O^2) sur la projection orthogonale du centre de masse (G^2) sur l'axe de rotation. Autrement dit, O^2 est translaté de $\hat{e}_z^{I_z^{22}}$. Nous définissons ainsi O^2 la nouvelle position de l'articulation. Cette opération revient à éliminer I_z^{22} du deuxième segment. Ce paramètre intervient dans l'équation vectorielle de la première articulation. Il faut donc le rajouter sur le premier segment. Ceci peut se faire simplement en appliquant la définition du corps augmenté, cfr § 3.2, pour la nouvelle position de l'articulation. Nous obtenons la définition des *corps augmentés déplacés* (voir figure 4.3).

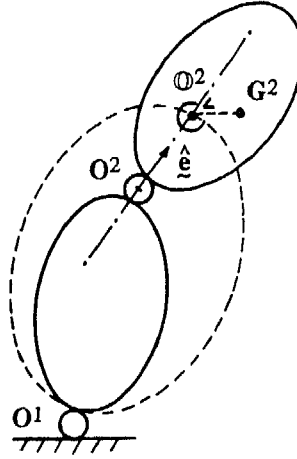


Fig. 4.3 Définition des corps augmentés déplacés.

Ecrivons les nouveaux paramètres des corps augmentés déplacés (notés *) en fonction des paramètres classiques introduits dans le chapitre précédent (cfr § 3.2.1).

Soit la position du centre de masse par rapport à $\mathbb{O}^2$:

$$(\underline{l}^{22})^* = \underline{l} + \hat{\underline{e}} \underline{l}_Z^{22} \quad (4.51)$$

Le vecteur de liaison entre les deux articulations devient

$$(\underline{l})^* = \underline{l} + \hat{\underline{e}} \underline{l}_Z^{22} \quad (4.52)$$

Nous appliquons les définitions (3.7) et (3.8) pour calculer les nouveaux paramètres barycentriques:

$$(\underline{mb}^1)^* = \underline{mb}^1 + \hat{\underline{e}} \underline{mb}_Z^2 \quad (4.53)$$

$$(\underline{mb}^2)^* = \underline{mb}^2 - \hat{\underline{e}} \underline{mb}_Z^2 \quad (4.54)$$

$$(\underline{K}^1)^* = \underline{K}^1 - m^2 (\hat{\underline{e}} \underline{l}_Z^{22} + \underline{l}_Z^{22} \hat{\underline{e}} + \hat{\underline{e}} \hat{\underline{e}} (\underline{l}_Z^{22})^2) \quad (4.55)$$

$$(\underline{K}^2)^* = \underline{K}^2 + m^2 (\hat{\underline{e}} \underline{l}_Z^{22} \underline{l}_Z^{22} + \underline{l}_Z^{22} \hat{\underline{e}} \underline{l}_Z^{22} - \hat{\underline{e}} \hat{\underline{e}} (\underline{l}_Z^{22})^2) \quad (4.56)$$

Nous observons que (4.53) et (4.56) comprennent bien les reports de $\underline{mb}_Z^2$ exprimés par les règles (4.49 b) et (4.50 b). En introduisant ces nouveaux paramètres dans les relations (4.13) et (4.14) nous démontrons qu'ils produisent bien les mêmes équations vectorielles $\underline{L}^1$ et de $\underline{F}^1$.

L'ensemble de ces résultats est immédiatement applicable à des structures arborescentes plus complexes pour autant qu'elles ne possèdent pas de contrainte. Remarquons que contrairement aux corps augmentés classiques qui ne sont fonctions que des caractéristiques des segments descendants, nous devons maintenant tenir compte en plus des caractéristiques des articulations du corps étudié et de celles de ses descendants. *Les corps augmentés déplacés doivent donc être définis de façon récursive en partant de l'extrémité de la structure.* Dans le cas d'articulations rotoïdes successives, voir figure 4.4, il faut être prudent dans l'application de la règle car les reports peuvent être récurrents. Par exemple, dans les expressions (4.53) et (4.55) on doit tenir compte des particularités de la première articulation. Si elle rotoïde, on doit déplacer O^1 en O^1 projection de G^1 sur l'axe de rotation.

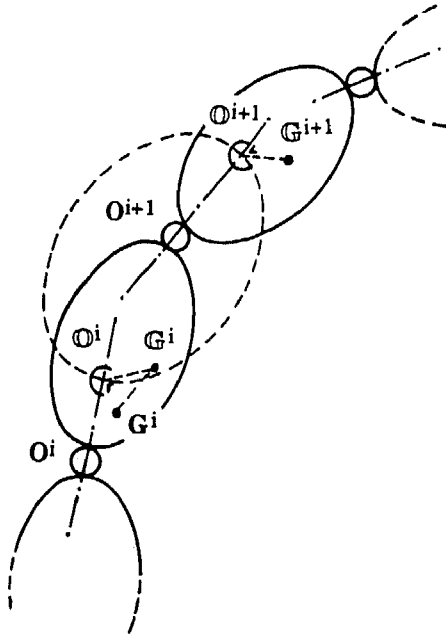


Fig. 4.4. Corps augmentés déplacés pour des articulations rotoïdes successives.

En particulier, si les axes sont parallèles, les composantes axiales de leurs vecteurs barycentriques sont reportées de proche en proche jusqu'au premier segment ayant un axe non parallèle ou une articulation prismatique.

La notion de corps augmenté déplacé nous donne une interprétation intéressante des reports de la composante axiale du vecteur barycentrique sur le parent. Elle ne tient malheureusement pas compte de toutes les combinaisons des inerties. Pour être complet, il faut tenir compte de la combinaison d'un moment d'inertie suivant un des axes perpendiculaires à l'axe de rotation et de la nouvelle définition de $(I)^*$ qui contient I_2^2 .

Cette interprétation géométrique n'est cependant pas utilisable dans la pratique car les corps augmentés *déplacés* sont définis sur base de la position du centre de masse qu'il nous faut précisément identifier. Il en résulte que le vecteur $(I)^*$ n'est plus simplement un vecteur caractérisant la géométrie et qu'il devrait donc être identifié. Or notre étude est basée sur la

linéarité du modèle par rapport aux paramètres recherchés: cette linéarité n'est plus garantie a priori dès l'instant où l'on considère simultanément des grandeurs barycentriques et géométriques. Une étude plus détaillée nous conduirait vraisemblablement à reconnaître des combinaisons identifiables de ces deux types d'éléments, mais cette étude n'apporterait aucun résultat fondamentalement nouveau par rapport à ceux que nous connaissons déjà.

4.2.3. Exemples

Les deux premiers exemples du chapitre troisième (§ 3.4) sont insensibles aux reports. En effet, ni le vecteur $\underline{l}^{22}$ ni $\underline{l}^{33}$ n'ont de composantes suivant l'axe de l'articulation qui la précède. Seul $\underline{l}^{11}$ a une composante suivant l'axe $\hat{e}^1$ mais elle n'a aucune influence sur les équations car il est bien connu que le premier repère peut être placé n'importe où sur le premier axe. De plus, nous avons considéré des segments sans inertie.

Prenons donc le troisième exemple (cfr §3.4 c) et appliquons les règles énoncées dans le paragraphe précédent en commençant par l'extrémité (le deuxième segment) du manipulateur.

La deuxième articulation est dirigée suivant $\hat{x}_x^1$. Nous reportons alors $m\mathbf{b}_x^2$ et K_{zz}^2 sur le premier segment, et nous regroupons K_{zz}^2 avec K_{yy}^2 .

Sur le deuxième segment, nous avons:

$$(m\mathbf{b}^2)^* = m\mathbf{b}^2 - \hat{e}^2 m\mathbf{b}_x^2 = [\hat{x}^2]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m^2 l_z^{22} \end{pmatrix} \quad (4.517 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} (K^2)^* &= K^2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{zz}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx}^2 & 0 & K_{xz}^2 \\ 0 & K_{yy}^2 - K_{zz}^2 & 0 \\ K_{xz}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{xx}^2 + m^2 (l_z^{22})^2 & 0 & -m^2 l_x^{22} l_z^{22} \\ 0 & J_{yy}^2 - J_{zz}^2 + m^2 (l_z^{22})^2 & 0 \\ -m^2 l_x^{22} l_z^{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.57 \text{ b})$$

Les reports de $m\mathbf{b}_x^2$ et K_{zz}^2 s'écrivent:

$$(m\mathbf{b}^1)^* = m\mathbf{b}^1 + \hat{e}^2 m\mathbf{b}_x^2 = [\hat{x}^1]^t \begin{pmatrix} m^1 l_x^{11} + m^2 (l_x^{12} + l_z^{22}) \\ 0 \\ m^1 l_z^{11} + m^2 l_z^{12} \end{pmatrix} \quad (4.58 \text{ a})$$

$$\begin{aligned}
(K^1)^* &= K^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{zz}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}^2 \end{pmatrix} + mb_z^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -l_z^{12} \\ 0 & 2l_x^{12} & 0 \\ -l_z^{12} & 0 & 2l_x^{12} \end{pmatrix} \\
&= K^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -mb_x^2 l_z^{12} \\ 0 & J_{zz}^2 + m^2(l_x^{22})^2 + 2mb_x^2 l_x^{12} & 0 \\ -mb_x^2 l_z^{12} & 0 & J_{zz}^2 + m^2(l_x^{22})^2 + 2mb_x^2 l_x^{12} \end{pmatrix} \quad (4.58 \text{ b})
\end{aligned}$$

La première articulation est dirigée suivant $\hat{x}_z^1$. Par conséquent, $(K_{yy}^1)^*$ est regroupé avec $(K_{xx}^1)^*$, de plus, $(mb_z^1)^*$ ainsi que $(K_{yy}^1)^*$ sont reportés sur la base. Par conséquent, ils n'apparaissent pas explicitement dans les équations.

$$(\underline{mb}^1)^* = (\underline{mb}^1)^* - \hat{e}^1 (mb_z^1)^* = [\hat{x}^1]^T \begin{pmatrix} m^1 l_x^{11} + m^2 (l_x^{12} + l_x^{22}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.59 \text{ a})$$

$$(K^1)^* = (K^1)^* - \begin{pmatrix} (K_{yy}^1)^* & 0 & 0 \\ 0 & (K_{yy}^1)^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59 \text{ b})$$

Comme la première articulation est dirigée suivant $\hat{x}_z^1$, seul le terme $(K_{zz}^1)^*$ apparaîtra dans L^1 . Ce terme n'est pas modifié par les reports et le regroupement dus à la première articulation, il est développé dans l'expression 4.59 b).

Les équations (3.60) du modèle dynamique inverse deviennent:

$$(\varphi_d)^* (\delta_d)^* = Z_d$$

avec:

$$(\delta_d)^* = \begin{pmatrix} (mb_z^2)^* \\ (K_{zz}^1)^* \\ (K_{xx}^2)^* \\ (K_{xz}^2)^* \\ (K_{yy}^2)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mb_z^2 \\ K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + 2l_x^{12} mb_x^2 \\ K_{xx}^2 \\ K_{xz}^2 \\ K_{yy}^2 - K_{zz}^2 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$(\varphi_d)^* = \begin{pmatrix} -I_x^2(c_2\ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2) & \ddot{q}^1 & 0 & c_2\ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2 & (s_2)^2 \ddot{q}^1 + s_{22}\dot{q}^1\dot{q}^2 \\ -I_x^2c_2\ddot{q}^1 - g s_2 & 0 & \ddot{q}^2 & c_2\ddot{q}^1 & -c_2s_2(\dot{q}^1)^2 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Nous retrouvons bien les combinaisons (3.61) que nous avons trouvées intuitivement dans le paragraphe 3.4.c. Un autre exemple est présenté au paragraphe 7.5.2.

4.2.4 Cas particuliers

Nous désirons maintenant étudier les cas particuliers qui conduisent à de nouvelles combinaisons identifiables qui n'apparaissent pas dans les règles générales. Reprenons le modèle de travail défini au paragraphe 4.2.1. Nous y avons posé que le premier segment avait une mobilité totale, c'est-à-dire que l'articulation avait six degrés de liberté, nous devons maintenant considérer le cas où il a une mobilité moindre.

L'étude de l'équation $\underline{L}^2$ (4.11) et de $\underline{R}\underline{K}^2\underline{R}^t$ (4.24) nous a montré que les seuls *regroupements* possibles dans le cas d'une articulation rotoïde provenaient des termes K_{xx}^2 et K_{yy}^2 et cela quelque soit la vitesse angulaire de la première articulation. De même, il est facile de montrer sur (4.41) qu'aucun *regroupement* n'est possible dans le cas d'une articulation prismatique. Par conséquent, nous limitons notre étude à la recherche de *nouveau report*.

Articulation rotoïde

Dans l'étude de $\underline{L}^2$, l'expression (4.17) nous a apporté un premier cas particulier. Supposons que l'axe de l'articulation soit à tout instant vertical, ce qui revient à poser $\underline{g} = g\hat{e}$. Pour assurer cette condition, nous devons imposer que $\underline{\omega}^1$ soit constamment vertical (ou nul), c'est-à-dire: $\underline{\omega}^1 = \omega^1\hat{e}$. Le terme $\hat{e} \cdot \underline{m}\underline{b}^2 \times \left((\tilde{\underline{\omega}} + \tilde{\underline{\omega}}\tilde{\underline{\omega}}) - \underline{g} \right)$ de $\underline{L}^2$ (4.11) est alors nul. Il n'empêche que $\underline{m}\underline{b}_x^2$ et $\underline{m}\underline{b}_y^2$ restent identifiables grâce à la présence du terme $\underline{z}^1$ dans $\underline{L}^2$ sauf si $\underline{z}^1$ est également vertical ou nul, auquel cas $\underline{L}^2$ devient indépendant de toutes les composantes du vecteur $\underline{m}\underline{b}^2$. Ces composantes sont alors candidates à un report. Nous avons déjà fait ressortir le report de $\underline{m}\underline{b}_z^2$ dans le cas général. Par conséquent, nous nous limitons à l'étude de

la participation de mb_x^2 et mb_y^2 aux équations vectorielles $\underline{L}^1$ et $\underline{F}^1$. Nous observons que ces deux paramètres apparaissent tels quels, entre autre dans le quatrième terme de $\underline{F}^1$ (4.14). Ces deux paramètres sont donc identifiables à condition de disposer des mesures de toutes les composantes de $\underline{F}^1$. Ce cas particulier n'introduit donc pas de nouveau report.

Articulation prismatique

Il apparait dans les expressions (4.44) et (4.45) que certaines composantes de $\underline{mb}^2$ peuvent disparaître de $\underline{F}^2$ pour un $\underline{\omega}^1$ particulier (par exemple avec une composante nulle). Etudions les différents cas possibles:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) Si } \underline{\omega} = [\hat{y}]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{alors } mb_x^2, mb_y^2 \text{ et } mb_z^2 \text{ sont candidats à un report} \\
 \text{b) Si } \underline{\omega} = [\hat{y}]^t \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{alors } mb_x^2 \text{ est candidat à un report} \\
 \text{c) Si } \underline{\omega} = [\hat{y}]^t \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} & \text{alors } mb_y^2 \text{ est candidat à un report} \\
 \text{d) Si } \underline{\omega} = [\hat{y}]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} & \text{alors } mb_x^2, mb_y^2 \text{ et } mb_z^2 \text{ sont candidats à un report}
 \end{array}$$

Nous allons montrer que dans $\underline{L}^1$ les termes $\underline{z}^2 \times \underline{F}^2$ et $\underline{mb}^2 \times \underline{\ddot{z}}^2$ empêchent un report complet de $\underline{mb}^2$ sur $\underline{mb}^1$. Nous étudions alors ces deux termes.

Développons le terme $\underline{mb}^2 \times \underline{\ddot{z}}^2$:

$$\underline{mb}^2 \times \underline{\ddot{z}}^2 = [\hat{y}]^t \underline{mb}^2 (\underline{e}\ddot{q} + 2\tilde{\omega} \underline{e}\dot{q} + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) \underline{e}q) \quad (4.62)$$

Rappelons que dans cette expression, $\dot{q}$ est la vitesse linéaire relative de la deuxième articulation.

Le premier terme de (4.62) fait apparaître explicitement mb_x^2 et mb_y^2 multiplié par $\ddot{q}$ et cela quelque soit la vitesse angulaire. Par conséquent, ces deux composantes sont identifiables si

l'on dispose des mesures de toutes les composantes de $\underline{L}^1$. Les cas particuliers b et c n'apportent donc pas de nouveau report. Pour les cas particuliers a et d, l'expression (4.62) est toujours nulle.

Etudions ensuite la participation de mb_z^2 dans l'expression $\underline{z}^2 \times \underline{F}^2$. Il est évident que si $\underline{\omega} = \underline{0}$, mb_z^2 est absent de $\underline{F}^2$. Pour étudier le cas $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{\hat{e}}$, nous développons le terme :

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega}) \text{emb}_z^2 = \begin{pmatrix} \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y & \omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x & -(\omega_x)^2 - (\omega_y)^2 \end{pmatrix}^t mb_z^2 \quad (4.63)$$

Nous trouvons ainsi une expression qui comme (4.45) est nulle pour $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{\hat{e}}$.

Nous remarquons que la contribution de mb_z^2 dans les lignes 2, 3 et 4 de l'expression (4.43) est la même que celle que nous avons sur $\underline{L}^1$ en (4.13) dans le cas rotoïde. De plus, nous vérifions facilement en introduisant (4.63) dans (4.42), que mb_z^2 est absent de $\underline{F}^1$ pour les cas particuliers a et d considérés. Dès lors, $\hat{\text{emb}}_z^2$ est reporté sur $\underline{mb}^1$ et $\underline{K}^1$ exactement de la même façon que dans le cas rotoïde.

4.2.5. Conclusions

Nous venons de montrer que les regroupements et les reports peuvent être définis a priori. Comme de plus ils respectent les définitions des paramètres barycentriques, tous les propos énoncés précédemment restent d'application. En particulier, le logiciel ROBOTRAN développé par Maes, Samin et Willems (Maes 88) est encore utilisable pour générer les équations du modèle.

4.3. Arborescence avec contraintes

Jusqu'ici, nous avons considéré des manipulateurs sans actionneurs. Or, leur influence est loin d'être négligeable. Prenons l'exemple, ce qui constitue la tendance actuelle, d'un robot muni d'actionneurs électriques. La quasi totalité de ceux-ci (exception faite des direct-drive) ont un rapport couple/poids très défavorable (surtout à faible vitesse). Pour rester dans des gammes de poids raisonnables on est forcé d'utiliser des moteurs tournant à haute vitesse accouplés à des réducteurs de vitesse. De ce fait, l'inertie des actionneurs rapportée au segment (c'est-à-dire multipliée par le carré du rapport de réduction) est loin d'être négligeable. Il n'est pas rare de trouver un rapport $\frac{\text{inertie actionneur}}{\text{inertie segment}} = 0.5 \dots 1$. Une méthode simpliste pour tenir compte des actionneurs est de rajouter leurs inerties rapportées sur les segments actionnés. Il s'agit là d'une modélisation grossière. En effet, les actionneurs peuvent être orientés et positionnés de façon quelconque sur le manipulateur. Si l'on veut tenir compte de tous les effets liés aux actionneurs on est obligé de les considérer comme des segments propres avec des contraintes cinématiques liant leur vitesse à celle des segments.

Nous considérons alors un manipulateur présenté à la figure 4.5 de n segments plus n actionneurs et n liaisons segment-segment plus n liaisons segment-actionneur soit au total $2n$ segments liés par $2n$ articulations, avec n contraintes cinématiques entre les liaisons.

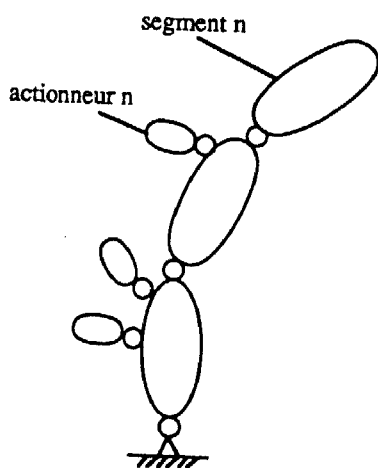


fig. 4.5 Exemple de chaîne de manipulateur avec actionneur

Le modèle dynamique inverse de ce manipulateur à $2n$ articulations avec n contraintes peut se mettre sous la forme (Maes 89):

$$M(q) \ddot{q} + F(q, \dot{q}) - A_d^t \lambda_d = Q \quad (4.65)$$

avec: $q = \begin{pmatrix} q_s \\ q_a \end{pmatrix}$ le vecteur $(2n)$ des variables articulaires $\begin{pmatrix} s = \text{segment} \\ a = \text{actionneur} \end{pmatrix}$

$M(q)$ la matrice de masse $(2n \times 2n)$

$F(q, \dot{q})$ le vecteur $(2n)$ des accélérations de Coriolis, action de la gravité, ...

A_d la matrice $(n \times 2n)$ jacobienne des contraintes

Q le vecteur $(2n)$ des forces généralisées des actionneurs (voir (4.70))

λ_d le vecteur (n) des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes

Les transmissions sont supposées idéales, c'est-à-dire sans jeu, sans souplesse et sans inertie propre dans les étages intermédiaires éventuels. Entre chaque segment et son actionneur, nous imposons alors la contrainte cinématique suivante:

$$\dot{q}_a^i = n^i \dot{q}_s^i \quad (4.66)$$

avec:

$\dot{q}_s^i$ la vitesse articulaire du segment i

$\dot{q}_a^i$ la vitesse articulaire de l'actionneur du segment i

n^i le rapport de réduction de la transmission correspondante

Soit sous forme matricielle:

$$\dot{q}_a = A_{as} \dot{q}_s \quad (4.67)$$

$$\text{avec: } A_{as} = \begin{pmatrix} n^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n^n \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est diagonale, elle est symétrique ($A_{as} = A_{as}^t$) et inversible ($A_{as}^{-1} = A_{sa}$).

La relation (4.67) peut encore s'écrire:

$$A_d \dot{q}_d = 0 \quad (4.68)$$

avec:

$$\dot{q}_d = \begin{pmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_a \end{pmatrix}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} -A_{as} & E \end{pmatrix}$$

En intégrant la contrainte de vitesse on trouve

$$q_a(q_s) = A_{as} q_s + c \quad (4.69)$$

où c est un vecteur constant.

La relation entre la position de l'actionneur et celle du segment est donc définie à une constante près (mais comme le rotor de l'actionneur présente une symétrie de révolution, cette constante est ignorable d'un point de vue dynamique).

Le modèle dynamique inverse du manipulateur avec contrainte (4.65) se réécrit:

$$\begin{pmatrix} M_{ss} & M_{sa} \\ M_{as} & M_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_s \\ \ddot{q}_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_s \\ f_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -A_{as} \\ E \end{pmatrix} \lambda_d = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_a \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

avec Q_a le vecteur (n) des forces généralisées fournies par les actionneurs

Les règles de combinaisons présentées dans le paragraphe précédent définissent un jeu de paramètres pour le modèle (4.70) non encore réduit au nombre de degrés de liberté de la structure. La méconnaissance de λ_d interdit toute identification à ce stade.

La deuxième ligne du modèle représente le *modèle des actionneurs*. Comme les actionneurs sont situés aux extrémités de la structure, aucun paramètre des segments ne s'y reporte (cfr § 4.2.2 relatif à l'interprétation des combinaisons). Le modèle ne contient donc que l'inertie principale suivant l'axe de rotation. Par conséquent, M_{as} , M_{sa} , M_{aa} et f_a sont des fonctions de ce seul paramètre à l'exclusion de tous les autres et sont indépendants des paramètres des segments.

La première ligne représente le *modèle des segments*. L'équation d'un segment contient les paramètres barycentriques de ses descendants (segments et/ou actionneurs). Donc M_{ss} et f_s sont fonctions des paramètres relatifs aux segments et aux actionneurs.

Nous cherchons maintenant à réduire le système (4.70) de façon à éliminer les multiplicateurs inconnus λ_d .

De la deuxième ligne de (4.70) on tire:

$$\lambda_d = M_{as}\ddot{q}_s + M_{aa}\ddot{q}_a + f_a - Q_a \quad (4.71)$$

En introduisant (4.71) dans la première ligne de (4.70), nous obtenons:

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{M}_{sa}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{f}_s + \mathbf{A}_{as}(\mathbf{M}_{as}\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{f}_a) = \mathbf{A}_{as}\mathbf{Q}_a$$

en éliminant $\mathbf{q}_s$ et en prémultipliant par $\mathbf{A}_{sa}$, nous trouvons:

$$(\mathbf{M}_{as}\mathbf{A}_{sa} + \mathbf{M}_{aa} + \mathbf{A}_{as}^{-1}\mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}_{sa} + \mathbf{A}_{as}^{-1}\mathbf{M}_{sa})\ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{f}_a + \mathbf{A}_{sa}\mathbf{f}_s = \mathbf{Q}_a \quad (4.72)$$

Pour des besoins liés à l'expérimentation (voir chapitre sixième), il peut être intéressant d'exprimer le vecteur $\mathbf{q}_a$ en fonction de $\mathbf{q}_s$. Le modèle est alors décrit par les *variables cinématiques des segments* (mesurés par un dispositif externe) et les *efforts sur les actionneurs* (mesurés sur le circuit d'alimentation). Cette présentation hybride est peu usuelle, elle a la particularité de fournir une *matrice de masse non symétrique* (voir exemple § 4.3.2). Le modèle (4.72) devient :

$$(\mathbf{M}_{as} + \mathbf{M}_{aa}\mathbf{A}_{as} + \mathbf{A}_{as}^{-1}\mathbf{M}_{ss} + \mathbf{A}_{as}^{-1}\mathbf{M}_{sa}\mathbf{A}_{as})\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{f}_a + \mathbf{A}_{sa}\mathbf{f}_s = \mathbf{Q}_a \quad (4.73)$$

La loi d'action-réaction nous permet d'établir la relation entre les forces généralisées $\mathbf{Q}_a$ fournies par les actionneurs et celles ($\mathbf{Q}_s$) appliquées aux segments:

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{A}_{as}\mathbf{Q}_a \quad (4.74)$$

En introduisant (4.74) dans (4.73) et en prémultipliant par $\mathbf{A}_{sa}^{-1}$, nous obtenons:

$$(\mathbf{A}_{sa}^{-1}\mathbf{M}_{as} + \mathbf{A}_{sa}^{-1}\mathbf{M}_{aa}\mathbf{A}_{as} + \mathbf{M}_{ss} + \mathbf{M}_{sa}\mathbf{A}_{as})\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{A}_{sa}^{-1}\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_s = \mathbf{Q}_s \quad (4.75)$$

4.3.1. Propriétés du modèle réduit

Pour nos besoins d'estimation, nous nous intéressons à la linéarité de ce modèle et au choix du jeu de paramètres.

a) linéarité

Nous avons montré précédemment que le modèle dynamique non réduit (4.70) est linéaire par rapport à δ (voir § 3.3.4 b). Si $\mathbf{A}_{as}$ est connu, c-à-d si on connaît les rapports de réduction des réducteurs de vitesse, vu la forme des équations réduites (4.72) à (4.75), le modèle dynamique reste linéaire par rapport à δ .

b) combinaisons

Le cas de la structure sans contrainte a été traité dans le paragraphe 4.2. Dans ce cas, les règles de combinaisons nous permettent de trouver un jeu de paramètres identifiable. Ces développements sont évidemment applicables pour la structure avec contrainte **avant** que l'on

ne la réduise. Encore faut-il étudier les nouvelles combinaisons introduites lors de la réduction du modèle. Nous distinguons les cas où l'inertie des actionneurs est connue ou inconnue.

Inertie des actionneurs inconnue

Si les paramètres des actionneurs sont inconnus, ils sont à identifier au même titre que ceux des segments, après avoir éliminé les paramètres de Lagrange dans les équations. On réécrit alors l'expression (4.75) (ou (4.72) ou encore (4.73) suivant le type de mesure réalisée) sous la forme d'identification (2.32) avec δ_d qui contient des paramètres des segments et des actionneurs.

De nouvelles combinaisons, dues à la réduction du modèle, vont apparaître. Néanmoins, elles sont limitées à des reports de l'inertie principale des actionneurs sur les segments. Elles sont fonctions de l'implantation des actionneurs sur les segments. Comme il existe une multitude de possibilités de placer les actionneurs, nous n'avons pas étudié ces regroupements. De plus, dans la pratique les inerties des actionneurs sont connues. Nous nous retrouvons alors dans le deuxième cas.

Inertie des actionneurs connue

En supposant l'inertie principale des actionneurs connue, il est possible de décomposer le modèle en fonction des paramètres connus et inconnus. Ce cas est fort intéressant car dans la pratique ces paramètres sont donnés par les constructeurs. De plus, cette hypothèse se révélera indispensable à l'application de la méthode d'estimation externe (cfr chapitre cinquième). Développons donc ce cas.

Nous définissons:

δ_d le vecteur (N_d) des paramètres intervenants dans le modèle dynamique

δ_{du} le vecteur (N_{du}) des paramètres inconnus (à identifier)

δ_{dk} le vecteur (N_{dk}) des paramètres connus

$$\delta_d = \begin{pmatrix} \delta_{du} \\ \delta_{dk} \end{pmatrix}$$

On écrit alors:

$$\delta_{du} = T^t \delta \quad (4.76)$$

avec T^t une matrice ($N \times N_{du}$) de plein rang

Si l'on suppose les inerties des actionneurs connues, nous allons regrouper le modèle (3.75) en plaçant à gauche les termes inconnus et à droite les termes connus. Remarquons que dans cette expression les matrices M_{as} , M_{sa} , M_{aa} ainsi que le vecteur f_a ne sont fonctions que des inerties principales suivant l'axe de rotation des actionneurs (supposés connus), à l'exclusion des paramètres des segments. Les matrices A_{as} et A_{sa} pour leurs parts ne sont fonctions que des rapports de réduction (supposés connus). Nous réécrivons alors l'expression (3.75) sous la forme:

$$M_{ss}\ddot{q}_s + f_s = Q_s - A_{sa}^{-1}f_a - (A_{sa}^{-1}M_{as} + A_{sa}^{-1}M_{aa}A_{as} + M_{sa}A_{as})\ddot{q}_s \quad (4.77)$$

Dans cette expression, nous remarquons que le terme de gauche correspond à celui du modèle du manipulateur sans actionneur. Par conséquent, toutes les considérations concernant les combinaisons restent d'application. Nous écrivons alors cette expression sous sa forme d'identification:

$$\varphi_{du}(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) \delta_{du} = Q_s - \varphi_{dk}(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) \delta_{dk} \quad (4.78)$$

Nous retrouvons ainsi le modèle (2.32), introduit au § 2.5, dans lequel, nous remplaçons φ par φ_{du} , δ par δ_{du} et Q par $Q_s - \varphi_{dk}(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) \delta_{dk}$.

Si au lieu de partir de l'expression (4.75) nous avions choisi l'expression (4.72) ou (4.73) nous aurions obtenu le même type de résultat à la matrice A_{as} près.

4.3.2. Exemple

Reprenons l'exemple 3 présenté aux paragraphes 3.4 c et 4.2.3 en y ajoutant les actionneurs (voir fig. 4.6).

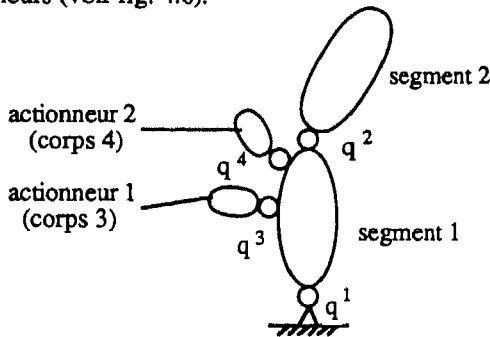


fig. 4.6 Le manipulateur APRA avec ces actionneurs

Les actionneurs (segments 3 et 4) sont tous deux des moteurs électriques localisés sur le premier segment. Nous avons montré au paragraphe 4.2.2 que tous les paramètres, excepté l'inertie suivant l'axe de rotation, sont reportés sur le segment parent pour former de nouveaux paramètres. Pour simplifier les expressions, nous conservons la même appellation pour ces paramètres. Les actionneurs sont donc modélisés comme des corps sans masse caractérisés par la seule inertie principale suivant l'axe de rotation.

Sur base de ces descriptions les paramètres barycentriques définis au paragraphe 3.4 c restent formellement inchangés, il nous suffit d'y ajouter les paramètres relatifs aux actionneurs.

$$m^{33} = m^{44} = 0$$

$$mb^3 = mb^4 = 0$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^3 \end{pmatrix}$$

$$K^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^4 \end{pmatrix}$$

La transmission entre les segments et leurs actionneurs est composée d'un réducteur et d'un renvoi d'angle ayant un rapport de réduction total de $n^1 = n^2 = 400$ (Renault Automation 85). Dès lors, les contraintes aux articulations sont:

$$\dot{q}^3 = n^1 \dot{q}^1$$

$$\dot{q}^4 = n^2 \dot{q}^2$$

et on en déduit la matrice jacobienne des contraintes:

$$A_d = \begin{pmatrix} n^1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le modèle dynamique inverse est de la forme:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \\ \ddot{q}^3 \\ \ddot{q}^4 \end{pmatrix} + f - A_d^T \lambda_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

et les matrices générées par le logiciel ROBOTRAN :

$$M = \begin{pmatrix} K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + (K_{yy}^2 - K_{zz}^2)(s_2)^2 & (K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^{12})c_2 & K_{zz}^3 & K_{zz}^4 \\ + 2mb_x^2 l_x^{12} + K_{zz}^3 + K_{zz}^4 & & & \\ (K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^{12})c_2 & K_{xx}^2 & 0 & 0 \\ K_{zz}^3 & 0 & K_{zz}^3 & 0 \\ K_{zz}^4 & 0 & 0 & K_{zz}^4 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

$$f = \begin{pmatrix} -(K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^2)(\dot{q}^2)^2 s_2 + (K_{yy}^2 - K_{zz}^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 s_{22} \\ -(K_{yy}^2 - K_{zz}^2)(\dot{q}^1)^2 c_2 s_2 - mb_z^2 g s_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

a) Inerties actionneurs inconnues

Si les inerties des actionneurs sont inconnues, ils faut les identifier au même titre que les paramètres des segments. En introduisant nos données dans la formule (4.75) nous obtenons:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \end{pmatrix} + f(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou par (4.74)} \quad Q^1 = \frac{Q^3}{n^1} \quad \text{et} \quad Q^2 = \frac{Q^4}{n^2}$$

$$M = \begin{pmatrix} K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + K_{zz}^4 + (s_2)^2 (K_{yy}^2 - K_{zz}^2) + 2mb_x^2 l_x^2 + (1+n^1)^2 K_{zz}^3 & (K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^2) c_2 + n^2 K_{zz}^4 \\ (K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^2) c_2 + n^2 K_{zz}^4 & (n^2)^2 K_{zz}^4 + K_{xx}^2 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} -(K_{xz}^2 - mb_z^2 l_x^2)(\dot{q}^2)^2 s_2 + (K_{yy}^2 - K_{zz}^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 s_{22} \\ -(K_{yy}^2 - K_{zz}^2)(\dot{q}^1)^2 c_2 s_2 - mb_z^2 g s_2 \end{pmatrix}$$

En supposant les rapports de réduction connus, nous définissons les regroupements suivant:

$$\delta_d = \begin{pmatrix} mb_z^2 \\ K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + K_{zz}^4 + 2mb_x^2 l_x^2 + (1+n^1)^2 K_{zz}^3 \\ K_{xx}^2 + (n^2)^2 K_{zz}^4 \\ K_{xz}^2 \\ K_{yy}^2 - K_{zz}^2 \\ K_{zz}^4 \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Remarquons que l'inertie du premier moteur K_{zz}^3 n'apparaît que dans l'équation de la première articulation. Cela se justifie facilement car cet actionneur est placé sur le premier segment, il est donc impossible de "l'exciter" autrement qu'en bougeant le premier segment.

Nous écrivons alors le modèle dynamique inverse d'estimation sous la forme:

$$\varphi_d \delta_d = \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

avec la matrice :

$$\varphi_d = \begin{pmatrix} -l_x^{12}(c_2 \ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2) & \ddot{q}^1 & 0 & c_2 \ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2 & (s_2) \ddot{q}^1 + s_{22} \dot{q}^1 \dot{q}^2 & n \ddot{q}^2 \\ -l_x^{12} c_2 \ddot{q}^1 - g s_2 & 0 & \ddot{q}^2 & c_2 \ddot{q}^1 & -c_2 s_2 (\dot{q}^1)^2 & n \ddot{q}^1 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

b) Les inerties des actionneurs sont supposées connues

Si l'on suppose les inerties des actionneurs connues, nous allons regrouper le modèle suivant l'expression (4.78) en plaçant à gauche les termes inconnus et à droite les termes connus.

$$\varphi_{du} \delta_{du} = \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix} - \varphi_{dk} \delta_{dk}$$

avec (4.60)

$$\delta_{du} = \delta_d = \begin{pmatrix} mb_z^2 \\ K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + 2mb_x^2/l_x^{12} \\ K_{xx}^2 \\ K_{xz}^2 \\ K_{yy}^2 - K_{zz}^2 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{dk} = \begin{pmatrix} K_{zz}^3 \\ K_{zz}^4 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

avec les matrices :

$$\varphi_{du} = \varphi_d = \begin{pmatrix} -l_x^{12}(c_2 \ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2) & \ddot{q}^1 & 0 & c_2 \ddot{q}^2 - s_2(\dot{q}^2)^2 & (s_2) \ddot{q}^1 + s_{22} \dot{q}^1 \dot{q}^2 \\ -l_x^{12} c_2 \ddot{q}^1 - g s_2 & 0 & \ddot{q}^2 & c_2 \ddot{q}^1 & -c_2 s_2 (\dot{q}^1)^2 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

$$\varphi_{dk} = \begin{pmatrix} (n^1 + 1)^2 \ddot{q}^1 & \ddot{q}^1 + n^2 \ddot{q}^2 \\ 0 & n^2 \ddot{q}^1 + (n^2)^2 \ddot{q}^2 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

4.4. Conclusions

Le choix des paramètres caractérisant la répartition de masse dans les segments est primordial pour la suite de nos travaux. Nous avons démontré que *les paramètres barycentriques permettent de présenter les équations du modèle dynamique sous forme linéaire, pour autant que la géométrie soit connue*. Cette propriété est fondamentale pour l'identification de ces paramètres. Mais elle n'est pas suffisante. En effet, la description en terme de paramètres barycentriques ne tient pas compte des particularités liées aux articulations. *Les paramètres barycentriques forment les combinaisons indispensables compte tenu de l'arborescence*, mais pas nécessairement compte tenu des articulations du modèle. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder l'exemple du paragraphe 3.4 c.

Nous avons alors étudié les *combinaisons supplémentaires* permettant de trouver un jeu identifiable de paramètres. Reprenons brièvement les différentes règles établies.

Pour une articulation prismatique, le tenseur d'inertie de l'enfant est reporté intégralement sur le parent en respectant la transformation liant les deux repères.

Pour une articulation rotoïde, les combinaisons sont de deux types. La première est un regroupement entre les composantes des moments d'inerties suivant des directions perpendiculaires à l'axe de rotation. La deuxième est un report de la composante du vecteur barycentrique alignée avec l'axe de la rotation de l'enfant sur le vecteur et le tenseur barycentrique du parent.

Sur base de l'étude de ces combinaisons, nous définissons des règles de combinaison qui doivent s'appliquer récursivement en partant de l'extrémité du manipulateur vers la base. Nous obtenons ainsi de nouveaux paramètres constants qui se comportent comme les paramètres barycentriques. Par conséquent, toutes les propriétés définies sur les paramètres barycentriques sont applicables. Le logiciel ROBOTRAN de génération des équations est donc encore applicable.

A la fin de ce chapitre, nous avons traité de la prise en compte des actionneurs dans les équations. La réduction du modèle entraîne l'apparition de nouvelles combinaisons entre les inerties principales des actionneurs et les paramètres des segments. Il faut donc effectuer de nouvelles combinaisons, cette fois a posteriori après la réduction du modèle. Leur étude n'a cependant pas grand intérêt car dans la pratique les inerties des actionneurs sont connues (elles sont données par le constructeur). Dans ce cas, elles peuvent être séparées des paramètres à identifier et nous retrouvons ainsi le jeu de paramètres du manipulateur sans actionneur.