

|  |                                                                                     |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Sur un invariant cohomologique<br/>de degré 3 pour les involutions unitaires</p> |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------|

Alexandre Masquelein

## Sur un invariant cohomologique de degré 3 pour les involutions unitaires

Alexandre Masquelein

Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences,  
le 20 février 2013, au Département de Mathématique de la Faculté des Sciences  
de l'Université Catholique de Louvain, à Louvain-la-Neuve.

Promoteur : Jean-Pierre Tignol

Jury : Karim Becher (Universiteit Antwerpen)

Yves Félix (UCL)

Pasquale Mammone (Université d'Artois)

Anne Quéguiner-Mathieu (Université de Paris XIII)

Jean-Pierre Tignol (UCL)

Paul Van Dooren (UCL, Président de jury)





## REMERCIEMENTS

Voilà, après cinq ans de travail, je termine la rédaction de ce texte et m'attèle à ces remerciements. Sans aucun doute, de nombreuses personnes méritent d'être remerciées et si je viens à les oublier dans les lignes suivantes, je prie de bien vouloir excuser ma maladresse et ma mémoire.

Pour être original, je commencerai par remercier les membres de mon jury. Je remercie Pasquale Mammone qui m'a donné un avant-goût agréable des mathématiques et la chance de devenir "virtuellement" belge, Karim Becher pour les deux séjours de recherche agréables à Konstanz, autant du point de vue mathématiques que personnel, et Anne Quéguiner-Mathieu pour son extrême gentillesse et sa lecture on ne peut plus attentive de mon texte. Tout cela sans oublier Paul Van Dooren, qui a bien voulu présider une thèse bien en dehors du cadre de ses propres recherches.

J'ai enfin une pensée particulière pour Yves Félix, qui fut la première personne en chair et en os que je découvris à Louvain-la-neuve lors de mon arrivée, pour son accueil chaleureux, malgré mon heure de retard à notre rendez-vous, et l'attention qu'il a toujours témoignée à mon égard.

Il me faut aussi remercier toutes les personnes qui rendent le vieux cyclotron vivant. En particulier, Marino, arpentant les couloirs du cyclotron à la recherche de théorème flottant dans les airs ; Enrico, le pilier de comptoir du cyclotron ; le trio de secrétaires Carine, Cathy et Martine, sans qui mes clefs seraient perdues depuis longtemps ; Mathieu D., ses encens et ses nombreux discours sur la logique ; Hector et sa jovialité naturelle, c'est vrai ; ainsi que Demba pour nos discussions mathématiques enrichissantes ; Valérian et Alexandra, sans qui les lunchs et pauses cafés ne seraient pas aussi gais. Sans oublier Mathieu C et son indécision absolue lui permettant de commencer un nombre interminable de phrases sans pouvoir en finir une seule.

Bien entendu, je n'oublie pas Mélanie, pour avoir gardé un oeil sur moi, autant du point de vue mathématique que personnel ; Cubi, mon chum, dont l'obstination pour garder le contact surpasse heureusement son agacement par mes retards, mon indisponibilité notoire et autres ; le camarade King Louie,

pour nos débats plus ou moins constructifs lors de feu nos apéros du mardi soir et son enthousiasme sur tout sujet mathématique; Julien, pour m'avoir si chaleureusement accueilli, pour nos ballades louvanistes et pour être son témoin; Laurent, pour son extrême gentillesse et ses propos délicieusement vindicatifs.

Pour avoir supporté ma capacité à m'étaler sur un bureau, pour avoir retrouvé mes clés tous les midis sur ce même bureau, pour ses truculentes histoires sans réelles chutes, pour ce côté pince-sans-rire surprenant et pour ses attentions, Didier fut un compagnon de bureau des plus appréciables.

Je vous remercie tous d'avoir préservé notre amitié malgré mes occupations et nos relatives pertes de vue.

Il reste encore à remercier les amis compatriotes, la FRAJP. Plus précisément, Jeff, même s'il ne lira probablement pas ce texte; Pierre, coéquipier sur les prés, chauffeur ouvert à mes élucubrations philosophico-sociales, pourvoyeur de cornes et parrain de mon fils; et Romu, pour notre amitié franche, sans paroles inutiles, pour sa capacité à se soucier du bien-être des autres, ses attentions particulières et sa volonté d'être toujours présent lorsque le besoin se fait sentir. Bien entendu, les petites familles sont englobées!

D'ailleurs, je remercie mes parents pour leur soutien aveugle, malgré les longues semaines de silence radio dont je suis capable, Ch'Max pour avoir partagé nos expériences dans l'enseignement et Ch'Ben pour être désespérément plein de bonne volonté.

Je remercie Jean-Luc et Concetta d'avoir pris en charge ma formation dans le bâtiment et de s'être soucié de l'avancement de mes travaux (de recherche!), et Amandine pour m'avoir supporté, soutenu, poussé, organisé, motivé et j'en passe ... Et surtout de m'avoir offert le plus beau des cadeaux.

Après cette aparthé familiale, je voudrais exprimer ma profonde gratitude pour Jean-Pierre Tignol. Alors que j'étais encore à Lens et ignorant à quoi pouvais bien ressembler Louvain-la-neuve, il me fut décrit par cette simple phrase.

"Un homme au calme olympien".

C'est pour moi la meilleure description que l'on puisse faire de Jean-Pierre. Doté d'une infinie patience mise à l'épreuve par mon exaspérante lenteur à rédiger cette thèse et ma tendance à encombrer une boîte électronique, il m'a habilement guidé lors de ce doctorat et ses relectures on ne peut plus minutieuses ont grandement contribué à la version ci-présente de mon texte. Pour tout cela, merci.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Remerciements</b> .....                                                                                                      | v  |
| <b>Introduction</b> .....                                                                                                       | 1  |
| Invariants cohomologiques et chaîne d'invariants de Milnor.....                                                                 | 2  |
| Résultats principaux.....                                                                                                       | 2  |
| Survol de la thèse.....                                                                                                         | 4  |
| <b>1. Chaîne d'invariants cohomologiques</b> .....                                                                              | 5  |
| Notations.....                                                                                                                  | 5  |
| 1.1. Chaîne d'invariants cohomologiques d'algèbres à involution.....                                                            | 6  |
| 1.2. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs d'algèbres à involution                                                        | 27 |
| 1.3. Quelques rappels sur l'invariant de Rost.....                                                                              | 37 |
| 1.4. Chaîne d'invariants de Milnor faiblement relatifs pour les algèbres<br>à involution unitaire de degré impair.....          | 38 |
| <b>2. Un invariant cohomologique relatif de degré 3 pour les<br/>    involutions unitaires</b> .....                            | 43 |
| Notations.....                                                                                                                  | 43 |
| 2.1. Invariant cohomologique absolu d'algèbres à involution unitaire...                                                         | 43 |
| 2.2. Invariant cohomologique relatif d'algèbres à involution unitaire....                                                       | 45 |
| 2.3. Comparaison des invariants cohomologiques.....                                                                             | 50 |
| <b>3. Sur l'invariant cohomologique de degré 3 pour les involutions<br/>    unitaires de degré <math>2(2m + 1)</math></b> ..... | 59 |
| Notations.....                                                                                                                  | 59 |
| 3.1. Invariant absolu en degré $2(2m + 1)$ .....                                                                                | 59 |
| 3.2. Réinterprétation de l'invariant ${}^R e_3^{\text{hyp}}$ .....                                                              | 60 |
| 3.3. Décomposabilité et hyperbolicité.....                                                                                      | 62 |
| 3.4. Décomposabilité en degré 6.....                                                                                            | 63 |
| 3.5. Vers une classification en degré 6.....                                                                                    | 64 |

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>4. Sur l'invariant cohomologique de degré 3 pour les involutions unitaires de degré 4</b>           | 67  |
| Notations                                                                                              | 67  |
| 4.1. Unicité de l'invariant de Milnor relatif de degré 3                                               | 68  |
| 4.2. Interprétation de l'invariant en termes de formes quadratiques                                    | 69  |
| 4.3. Cas d'une descente orthogonale sur une algèbre $A$                                                | 74  |
| 4.4. Cas d'une descente symplectique sur une algèbre $A$                                               | 80  |
| <b>5. Sur l'invariant cohomologique de degré 3 pour les involutions unitaires de degré 8</b>           | 83  |
| Notations                                                                                              | 83  |
| 5.1. Condition nécessaire telle que ${}^R e_3^{\text{hyp}} = 0$                                        | 84  |
| 5.2. Cas où $[B] = [D_K]$                                                                              | 85  |
| 5.3. Exemple d'involution unitaire totalement décomposable d'invariant ${}^R e_3^{\text{hyp}}$ non nul | 88  |
| <b>6. On quadratic forms of dimension 8, with Clifford algebras of index 4</b>                         | 91  |
| 6.1. Notations and statement of the theorem                                                            | 92  |
| 6.2. Clifford algebra of the transfer of a quadratic form                                              | 94  |
| 6.3. Proof of the decomposability theorem                                                              | 97  |
| 6.4. A new proof of Izhboldin and Karpenko's theorem                                                   | 99  |
| <b>Bibliographie</b>                                                                                   | 101 |
| <b>Index</b>                                                                                           | 105 |



## INTRODUCTION

Diverses techniques sont employées pour comprendre les algèbres simples centrales munies d’une involution, telles que l’étude des formes quadratiques, l’étude des groupes algébriques ou une étude plus frontale.

Dans le cadre de ces études sont sortis des invariants classiques pour les involutions, comme le discriminant d’une involution orthogonale  $\text{disc}(\sigma)$  à valeurs dans  $F^\times/F^{\times 2} = H^1(F, \mu_2)$ , son algèbre de Clifford  $C(A, \sigma)$  ou encore l’algèbre discriminante  $D(B, \tau)$  d’une involution unitaire, toutes deux représentant des éléments dans le groupe de Brauer  $Br(F) = H^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$  (cf [KMRT98]). On peut donc voir ces invariants comme des invariants *cohomologiques*.

De l’autre côté, l’étude des involutions via les formes quadratiques se justifie par l’existence d’un lien très fort entre les involutions orthogonales sur des algèbres déployées et les formes quadratiques. De ce fait, la classification des formes quadratiques via des invariants cohomologiques par la résolution de la conjecture de Milnor par Orlov, Vishik et Voevodsky [OVV00] a permis la classification des involutions orthogonales sur une algèbre déployée. Mieux encore, les invariants  $\text{disc}$  et  $[C(A, \sigma)]$  coïncident exactement avec les invariants  $e_1$  et  $e_2$  pour les formes quadratiques.

Dans la veine de ce résultat, Berhuy, Monsurro et Tignol ont mis à jour un invariant cohomologique relatif pour les involutions symplectiques [BMT03], appelé *discriminant*  $\Delta_\gamma$  à valeurs dans  $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  en utilisant l’invariant de Rost sur le groupe algébrique  $\mathbf{Sp}(A, \gamma)$  associé aux involutions symplectiques. Toujours à l’aide de l’invariant de Rost, Berhuy a construit un invariant pour certaines formes anti-hermitiennes compatibles dans un sens convenable avec celui créé pour les formes quadratiques dans [Ber06], tandis que Garibaldi, Parimala et Tignol dégageaient le *discriminant absolu*  $\Delta$  pour les involutions symplectiques dans [GPT09], que l’on peut construire aussi à l’aide de l’invariant de Rost. D’ailleurs ce procédé fut exploité à nouveau par Garibaldi

dans [Gar09] pour créer deux invariants  $e_3^{16}$  et  $e_3^{\text{hyp}}$  sur certaines algèbres simples centrales à involution orthogonale et est en phase d'être généralisé pour les involutions orthogonales dans [QMT]. Pour finir, très récemment, Quéguiner-Mathieu et Tignol ont mis à jour un invariant cohomologique pour les involutions orthogonales sur des algèbres simples centrales de degré 8 mais d'une manière plus élémentaire [QMT12], en utilisant la trialité décrite dans [KMRT98].

Dans la continuité de ces différents travaux, nous allons aborder le cas des invariants pour les algèbres simples centrales munies d'une involution unitaire.

### Invariants cohomologiques et chaîne d'invariants de Milnor

Nous avons décidé de fixer une bonne fois pour toute ce que nous entendrons par un invariant cohomologique pour des involutions en général ainsi que les notions d'invariant relatif et d'invariant absolu. Un simple constat nous a amené à poser la nuance entre un invariant dit *absolu* et un invariant dit *relatif*, tout deux étant des transformations naturelles, l'un à valeurs dans la catégorie des ensembles **Sets** et l'autre à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés **Sets\***.

Ensuite, nous avons formalisé le fait que chaque invariant se définit sur le noyau du précédent et, dès lors, nécessite la connaissance des invariants qui le précèdent. Ceci nous a amené à la notion de *chaîne d'invariants cohomologiques*. Une majeure partie du Chapitre 1 recense les principaux résultats publiés sur les invariants cohomologiques sous le formalisme introduit, tant pour les invariants des formes quadratiques que pour les involutions des trois types.

Nous avons également distingué un type de chaîne d'invariants cohomologiques (relatif ou non), dit de *Milnor*. Ces chaînes d'invariants pour les involutions ont la particularité de coïncider avec les chaînes d'invariants pour les formes quadratiques (ou hermitiennes) tirées de la conjecture de Milnor lorsque les algèbres sont "déployées" dans un sens convenable, ce qui est le cas de la majorité des invariants étudiés à ce jour.

### Résultats principaux

Le premier résultat de cette thèse est la construction, via l'invariant de Rost sur  $\mathbf{SU}(B, \tau_0)$ , de l'invariant cohomologique relatif  ${}^R e_3^{\tau_0}$ . Ses propriétés concernant les involutions unitaires dépendent du degré de l'algèbre portant l'involution. Il donne, entre autres, un critère d'isomorphisme de la façon suivante.

**Théorème.** — Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale,  $\tau$  et  $\tau_0$  deux involutions unitaires sur  $B$  d'algèbres discriminantes triviales vérifiant l'une des conditions suivantes

- $\deg(B) = 4$  ;
- $B$  est déployée et  $\deg(B) = 6$  ;
- $\deg(B) = 6$ ,  $\text{ind}(B) = 3$  et il existe  $(D, \theta)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 3 munie d'une involution unitaire  $\theta$  telle que  $\tau$  et  $\tau_0$  sont des involutions adjointes à deux  $(D, \theta)$ -formes hermitiennes de la forme  $\langle\langle s \rangle\rangle$  et  $\langle\langle s_0 \rangle\rangle$ , pour  $s, s_0 \in \text{Sym}(B, \tau_0)$ .

Alors  $\tau$  et  $\tau_0$  sont conjuguées si et seulement si  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ .

Ce résultat est la synthèse du Théorème 4.2.5 du chapitre 3 pour le degré 4 et des Propositions 3.5.1 et 3.5.2 du chapitre 4 pour le degré 6. On constate que la classification est complète en degré 4 et pour le moment partielle en degré 6.

Dans le cadre des involutions unitaires de discriminant trivial sur des algèbres de degré 8, le comportement de l'invariant cohomologique relatif dépend de l'écriture de  $B$ .

En effet, si  $B = M_2(D_K)$  pour  $D$  une  $F$ -algèbre de biquaternions, l'invariant donne un critère de décomposabilité totale, sous certaines conditions sur l'involution via la

**Proposition (cf. Proposition 5.2.2 et 5.2.3).** — Soit  $B = M_2(D_K)$  une  $K$ -algèbre simple centrale avec  $D$  une  $F$ -algèbre de biquaternions et  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  totalement décomposable, on a  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ .

De plus, la réciproque est vraie dans les cas suivants :

- $B$  est déployée ;
- $\text{ind}(D) = 4$  et il existe  $\theta$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $D_K$  d'algèbre discriminante triviale telle que  $\tau$  est une involution adjointe à une  $(D, \theta)$ -forme hermitienne de la forme  $\langle\langle s \rangle\rangle$ , pour  $s \in \text{Sym}(D, \theta)$ .

On a donc un critère partiel de décomposabilité totale, critère qui disparaît si  $B \neq M_2(D_K)$  par le

**Théorème (cf. Théorème 5.1.1).** — Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré 8 et d'indice divisant  $\frac{1}{2}\deg B$  et  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire décomposable sur  $B$ . Alors  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$  si et seulement si  $B \sim D_K$  pour une certaine  $F$ -algèbre de biquaternions  $D$ .

### Survol de la thèse

De manière liminaire, le Chapitre I contient les notions sur lesquelles nous allons nous baser pour développer cette thèse. Nous y posons les définitions de base et recensons une grande partie des résultats connus de la théorie, écrits dans le formalisme proposé.

Le Chapitre II commence la création et l'étude de l'invariant (relatif ou non) de Milnor pour les involutions unitaires déduit de l'invariant de Rost sur  $H^1(F, \mathbf{SU}(B, \tau_0))$  ainsi que sa relation avec les différents invariants cohomologiques pour les involutions symplectiques ou orthogonales, dans le cadre d'une *extension quadratique* ou d'une *descente*.

Au Chapitre III, nous nous intéressons au cas où l'involution unitaire est sur une algèbre simple centrale de degré  $2(2m + 1)$ . Un invariant absolu de Milnor y est exhibé et, dans le cas particulier où  $m = 1$ , on démontre sa capacité à déceler si une involution est hyperbolique, ainsi qu'un embryon de classification.

Le Chapitre IV se penche sur les involutions unitaires sur des algèbres simples centrales de degré 4. Nous y donnons une nouvelle interprétation en termes de formes quadratiques permettant de déduire une classification des involutions unitaires d'algèbre discriminante déployée. Nous y développons une interprétation de l'invariant en fonction de l'application  $\partial : H^1(F, O^+(A, \sigma_0)) \rightarrow H^2(F, \mu_2)$ .

Le Chapitre V s'attarde sur les algèbres simples centrales de degré 8 munies d'une involution unitaire. Nous dégageons le comportement de l'invariant qui semble détecter la décomposition de l'involution unitaire sur certaines algèbres.

Finalement, le Chapitre VI, quant à lui, propose une nouvelle démonstration d'un résultat de Izhboldin-Karpenko [IK00], plus naturelle. Nous y démontrons un résultat concernant le lien entre le second invariant pour les involutions orthogonales sur une algèbre simple centrale de degré 8 et l'écriture de l'involution, résultat qui inspirera les démonstrations du Théorème 3.4.1 et de la Proposition 5.2.3. Ce chapitre est le fruit d'un travail en collaboration avec Quéguiner-Mathieu et Tignol, qui a fait l'objet de la publication [MQMT09]. Notre contribution a porté principalement sur la relation entre l'algèbre de Clifford du transfert d'une forme quadratique et la norme de l'algèbre de Clifford de la forme.

## CHAPITRE 1

### CHAÎNE D'INVARIANTS COHOMOLOGIQUES

**Résumé.** — L'objectif de ce chapitre est de poser le formalisme utilisé par la suite pour les *chaînes d'invariants chomologiques*, relatif ou non, et d'illustrer ce formalisme par les divers exemples existants dans la littérature concernant les formes quadratiques, formes hermitiennes, les algèbres à involution de première ou seconde espèce. On y rappelle les propriétés de l'invariant de Rost ainsi qu'un invariant cohomologique de degré 3 pour les involutions unitaires sur des algèbres de degré impair utilisant l'invariant de Rost.

#### Notations

On se fixe un corps  $F$  commutatif de caractéristique ne divisant pas le degré de  $B$  et différente de 2,  $\delta \in F^\times - F^{\times 2}$  et  $K = F[X]/(X^2 - \delta)$ . On note  $\mathfrak{Fields}_F$  la catégorie des extensions de corps de  $F$ ,  $\mathfrak{Sets}$  la catégorie des ensembles et  $\mathfrak{Sets}^*$  la catégorie des ensembles pointés.

Soit  $(A, \sigma)$  une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution orthogonale ou symplectique, et  $L$  un corps de  $\mathfrak{Fields}_F$ , l'algèbre  $A \otimes_F L$  sera notée  $A_L$  et l'involution  $\sigma \otimes_F \text{Id}_L$  sera notée  $\sigma_L$ .

Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale,  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire telle que  $\tau|_F = \text{Id}_F$ , soit  $L$  un corps de  $\mathfrak{Fields}_F$ , l'algèbre  $B \otimes_F L$  sera notée  $B_L$  et l'involution  $K_L/L$ -unitaire  $\tau \otimes_F \text{Id}_L$  sera notée  $\tau_L$ .

On note  $\text{Ad}_q$  pour désigner  $(\text{End}_F(V), \text{ad}_q)$  l'algèbre simple centrale déployée munie de l'involution adjointe à  $q$  une  $F$ -forme quadratique. De même  $\text{Ad}_{h, (E, \theta)}$  désignera l'algèbre simple centrale déployée munie de l'involution adjointe à  $h$  une  $(E, \theta)$ -forme hermitienne  $(\text{End}_E(V), \text{ad}_h)$ .

On note  $\deg A$  pour le degré  $A$ ,  $\exp A$  pour l'exposant de  $A$  et  $\text{Ind} A$  pour l'indice. Pour tout élément  $x$  de  $A$ , on pose  $\text{Int}(x)$  l'automorphisme intérieur  $A \rightarrow A, y \mapsto xyx^{-1}$ .

### 1.1. Chaîne d'invariants cohomologiques d'algèbres à involution

**1.1.1. Chaîne d'invariants cohomologiques.** — Grâce aux relations entre les algèbres simples centrales à involutions et certains groupes de cohomologie (voir par exemple [KMRT98, Chapitre VI]) on peut, afin de connaître les involutions de différents types, créer diverses applications, plus ou moins liées les unes aux autres, à valeurs dans les groupes de cohomologie successifs  $H^i(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$  ou dérivés de ce groupe.

*Remarque.* — Dans le cas où la caractéristique du corps est nulle, le groupe de cohomologie  $H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$  est défini comme suit. Soit le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité dans  $L_{\text{sep}}$  muni de l'action naturelle du groupe de Galois  $\text{Gal}(L_{\text{sep}}/L)$ . On considère alors le groupe  $\mu_n^{\otimes i-1}$  muni de l'action du groupe de Galois induite ce qui permet de calculer  $H^i(L, \mu_n^{\otimes i-1})$ . On pose alors

$$H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H^i(L, \mu_n^{\otimes i-1}).$$

Lorsque la caractéristique du corps n'est pas nulle, on pourra se référer à [GMS03, Appendice A]. La particularité de ces cas ne sera cependant pas rencontrée ici.

*Exemple 1.1.1.* — On peut considérer les différents invariants existants pour les involutions orthogonales. Soit une involution orthogonale  $\sigma$  sur une algèbre simple centrale  $A$ , le premier invariant est tout simplement le degré de  $A$  modulo 2, qui est à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H^0(F, \mu_2)$ . Si cet invariant est nul, autrement dit si le degré de  $A$  est pair, on peut définir  $\text{disc}(\sigma)$  le discriminant signé de  $\sigma$  comme étant  $\pm \det(M_\sigma)$  où  $M_\sigma$  est une matrice représentant une forme quadratique associée à  $\sigma_{F_s}$ . Cet invariant est à valeurs dans  $F^\times / F^{\times 2} = H^1(F, \mu_2)$ . Si cet invariant est nul, l'algèbre de Clifford associée à  $\sigma$  est le produit cartésien de deux algèbres simples centrales  $C^+$  et  $C^-$ . De plus  $[C^+] + [C^-] = [A]$ , ce qui permet de définir  $c(\sigma) = [C^+] \bmod [A]$  à valeurs dans  $\text{Br}_2(F)/[A] = H^2(F, \mu_2)/[A]$ . La situation peut se résumer par ce diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Orth}_A(L) & \xrightarrow{\text{dim}} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H^0(L, \mu_2) \\ \uparrow \iota & & \\ \text{Ker}(\text{dim})(L) & \xrightarrow{\text{disc}} & L^\times / L^{\times 2} = H^1(L, \mu_2) \\ \uparrow \iota & & \\ \text{Ker}(\text{disc})(L) & \xrightarrow{c} & \text{Br}_2(L)/[A_L] = H^2(L, \mu_2)/[A_L] \end{array}$$

On constate dès lors le caractère fonctoriel des invariants (stables par extension de corps) et que chaque invariant est défini sur le "noyau" du précédent.

Cependant l'ensemble des involutions orthogonales n'est pas un ensemble pointé naturel, contrairement aux  $H^i$ . Par conséquent, les invariants sont des transformations naturelles de foncteurs de  $\mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}$  dépendant des précédents.

On pose tout d'abord pour tout  $i \geq 0$  le foncteur

$$\mathbf{H}_F^i : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathbf{AbelianGroups}$$

tel que pour tout  $L$  dans  $\mathfrak{Fields}_F$ ,

$$\mathbf{H}_F^i(L) := H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)).$$

**Définition 1.1.2.** — Une chaîne d'invariants cohomologiques de degré  $d$  sur un foncteur  $\mathbf{Base}_F : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}$  est la donnée pour tout  $0 \leq i \leq d$ , de foncteurs

$$\mathbf{Coeff}_F^i : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

où  $\mathbf{Coeff}_F^i(L)$  est un groupe quotient de  $\mathbf{H}_F^i(L)$  vu comme ensemble ; ainsi que d'une suite de transformations naturelles de foncteurs

$$e_i : \mathbf{Base}_F^i \rightarrow \mathbf{Coeff}_F^i$$

telles que  $\mathbf{Base}_F^0 := \mathbf{Base}_F$  et  $\mathbf{Base}_F^i := \mathbf{Ker}(e_{i-1})$ . Elle sera notée  $\mathbf{e}$ . Les transformations naturelles  $e_i$  seront appelées des *invariants cohomologiques de degré  $i$* .

**Exemple 1.1.3.** — Dans l'exemple précédent, la suite de transformations naturelles  $e_0(\sigma) = \deg(A_L) \bmod 2$ ,  $e_1(\sigma) = \text{disc}(\sigma)$  et  $e_2(\sigma) = [C(A_L, \sigma)] \bmod [A_L]$  sur le foncteur associant à tout corps  $L$  l'ensemble des classes de conjugaisons des involutions orthogonales sur  $A_L$  est une chaîne d'invariants cohomologiques de degré 2.

**Remarque.** — Dans la définition précédente, le foncteur

$$\mathbf{Ker}(e_i) : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

est défini de la façon suivante. Pour tout  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ , l'ensemble  $\mathbf{Ker}(e_i)(L)$  est l'ensemble des éléments  $\xi \in \mathbf{Base}_F^i(L)$  tels que  $e_i(\xi) = 0_{\mathbf{Coeff}_F^i(L)}$ .

**Définition 1.1.4.** — Un invariant cohomologique  $e_i$  est dit *trivial* si pour toute extension de corps  $L$  sur  $F$ , soit  $\mathbf{Base}_F^i(L)$  est vide, soit, pour tout  $\xi \in \mathbf{Base}_F^i(L)$ ,  $e_i(\xi) = 0$  où 0 est l'élément nul du groupe quotient  $\mathbf{Coeff}_F^i(L)$ .

**Remarque.** — La notion de *degré* pour les chaînes d'invariants cohomologiques est introduite car la plupart de nos exemples ont un degré fini. Bien entendu, il est toujours possible d'augmenter le degré en complétant avec les invariants triviaux. Cependant, les invariants triviaux peuvent ne

pas convenir étant donné que la présente étude porte essentiellement sur les chaînes de Milnor. On introduit donc la notion de *trivialité en  $d_0$*  pour les chaînes.

**Définition 1.1.5.** — Soit  $d_0 \leq d$ . Une chaîne  $\mathbf{e}$  d'invariants cohomologiques de degré  $d$  sur  $\mathbf{Base}_F$  est dite *triviale en  $d_0$*  si  $e_{d_0}$  est un invariant cohomologique trivial.

**1.1.2. Chaîne d'invariants cohomologiques canoniques pour les formes quadratiques.** — La présente section vise à construire une chaîne d'invariants cohomologiques dans le cadre sympathique des formes quadratiques.

Cette dernière concerne les formes quadratiques non dégénérées de dimension  $n$  sur un corps  $F$ . Afin d'illustrer le formalisme, on introduit cet exemple devenu traditionnel par la théorie de Pfister et la conjecture de Milnor. Cet exemple permet également de poser le "phare" cohomologique après extension des scalaires en raison du lien entre formes quadratiques et involutions sur des algèbres simples centrales.

Pour cela, on introduit le foncteur

$$\mathbf{Quad}_{n,F} : \mathbf{Fields}_F \rightarrow \mathbf{Sets}$$

tel que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$$\mathbf{Quad}_{n,F}(L) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Les formes quadratiques sur } L \\ \text{de dimension } n \text{ à } L\text{-isométrie près} \end{array} \right\}.$$

**Définition 1.1.6.** — La chaîne d'invariants de Milnor canoniques  ${}^c\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{Quad}_{n,F}$  de degré  $d$  est la chaîne d'invariants cohomologiques de degré  $d$  suivante

$$\begin{aligned} {}^c e_i : \mathbf{Quad}_{n,F}(L)^i &\rightarrow \mathbf{H}_F^i(L) \\ {}^c e_0(q) &= \dim_L(q) \\ {}^c e_i\left(\sum_{j=1}^m \langle\langle a_1^j, \dots, a_i^j \rangle\rangle\right) &= \sum_{j=1}^m (a_1^j, \dots, a_i^j) \end{aligned}$$

pour toute extension de corps  $L$  sur  $F$ , où  $\mathbf{H}_F^i(L)$  est vu comme un ensemble.

La trivialité de  ${}^c\mathbf{e}$  est dépendante de la valeur de  $n$  et du corps  $F$ . En particulier, si  $n$  est impair, la chaîne d'invariants de Milnor canoniques est triviale en  $m \geq 1$ .

**Proposition 1.1.7.** — [Lam05, Hauptsatz 5.1] Soit  $d, n$  et  $m$  tels que  $n < 2^m$  et  $m \leq d$ . Alors la chaîne d'invariants de Milnor canoniques de degré  $d$  sur  $\mathbf{Quad}_{n,F}$  est triviale en  $m$ .



*Démonstration.* — C'est une conséquence de  $\mathbf{Quad}_{n,F}^i(L) = I^i L$  et du fait que si  $q$  n'est pas hyperbolique,  $q \in I^i L$  entraîne  $\dim_L q \geq 2^i$ .  $\square$

**1.1.3. Chaîne d'invariants cohomologiques canoniques pour les formes hermitiennes.** — L'objet de cette section est de construire une chaîne d'invariants cohomologiques dans le cadre des formes hermitiennes sur une extension quadratique  $K$  de  $F$  ou sur une algèbre de quaternions  $Q$  sur  $F$ .

*1.1.3.1. Définition de  $\mathbf{Herm}_{n,Q/F}$ .* — On définit la chaîne d'invariants cohomologiques pour les formes hermitiennes sur une extension sur  $Q$  une algèbre de quaternions sur  $F$  munie de son involution symplectique.

$$\mathbf{Herm}_{n,Q/F}(L) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Les formes hermitiennes sur } Q_L \\ \text{de dimension } n \text{ à } Q_L\text{-isométrie près} \end{array} \right\}.$$

Il existe une injection canonique entre

$$\mathbf{Herm}_{n,Q/F}(L) \rightarrow \mathbf{Quad}_{4n,F}(L).$$

Pour toute forme hermitienne  $h$  sur  $Q$ , on peut définir la forme  $q_h$  comme suit. Soit  $V$  le  $Q$ -module sur lequel la forme  $h$  est définie. On dote  $V$  d'une structure de  $F$ -espace vectoriel en restreignant à  $F$  la multiplication scalaire. Soit  $V_F$  cet  $F$ -espace vectoriel qui a une  $F$ -dimension de  $4n$ . On note  $q_h$  la  $F$ -forme quadratique suivante

$$\begin{aligned} q_h : V_F &\rightarrow F \\ v &\mapsto h(v, v). \end{aligned}$$

Cette forme quadratique définit de manière unique  $h$ . En effet, soit  $i \notin F$  un élément de carré central dans  $Q$  (anti-symétrique),

$$\begin{aligned} h(v, w) &= \frac{1}{2}(q_h(v + w) - q_h(v) - q_h(w) + \\ &\quad + q_h(v + wi)i^{-1} - q_h(v)i^{-1} - q_h(wi)i^{-1}). \end{aligned}$$

On a la transformation naturelle suivante

$$q : \mathbf{Herm}_{n,K/F} \rightarrow \mathbf{Quad}_{4n,F}$$

telle que  $h \mapsto q_h$ . Ceci permet de définir la chaîne d'invariants cohomologiques

$$\mathbf{Herm}_{n,Q/F}^i \xrightarrow{q_\cdot} \mathbf{Quad}_{4n,F}^i \xrightarrow{c e_i} \mathbf{H}_F^i.$$

**Définition 1.1.8.** — La chaîne d'invariants cohomologiques ainsi construite sur  $\mathbf{Herm}_{n,Q}$  est appelée la chaîne d'invariants de Milnor canoniques sur  $\mathbf{Herm}_{n,Q}$  et sera notée  ${}^Q\mathbf{e}$ .

**Proposition 1.1.9.** — Soit  $d$ ,  $n$  et  $m$  tels que  $n < 2^m$  et  $d \geq (m + 2)$ . Alors la chaîne d'invariants de Milnor canoniques de degré  $d$  sur  $\mathbf{Herm}_{n,Q/F}$  est triviale en  $(m + 2)$ .

*Démonstration.* — Ceci est une conséquence directe de la définition de  ${}^Q e_i$  et de la Proposition 1.1.7.  $\square$

*1.1.3.2. Définition de  $\mathbf{Herm}_{n,K/F}$ .* — On définit la chaîne d'invariants cohomologiques pour les formes hermitiennes sur une extension quadratique de corps  $K$  de  $F$  munie de son automorphisme non trivial

$$\mathbf{Herm}_{n,K/F}(L) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Les formes hermitiennes sur } K_L \\ \text{de dimension } n \text{ à } K_L\text{-isométrie près} \end{array} \right\}$$

Il convient de distinguer le cas où  $L \otimes K$  est un corps ou non.

*1.1.3.2.1. Etude des  $(K, \iota)$ -formes hermitiennes lorsque  $L \otimes_F K$  n'est pas un corps.* — On va à présent montrer que dans le cas où  $L$  est une extension de corps de  $F$  telle que  $L \otimes_F K$  n'est pas un corps, les  $(K_L, \iota_L)$ -formes hermitiennes sont toutes isométriques entre elles. Ceci permettra de définir la chaîne d'invariants de Milnor canoniques lorsque  $L_K$  n'est pas un corps.

Pour montrer l'isométrie entre les  $(K_L, \iota_L)$ -formes hermitiennes, on développe un procédé de construction. On remarque ensuite que toutes les formes construites selon ce procédé sont isométriques et que toutes les  $(K_L, \iota_L)$ -formes hermitiennes se construisent selon ce procédé.

Voici quelques identifications qui simplifieront les calculs. Si  $L \otimes_F K$  n'est pas un corps, cela implique que  $K \subset L$ . Il existe donc deux  $F$ -morphisms de corps injectifs  $\alpha : K \rightarrow L$  et  $\beta : K \rightarrow L$ . En fait,  $\alpha \circ \iota = \beta$ . Par conséquent, l'application suivante

$$\begin{aligned} \psi : L \otimes_F K &\rightarrow L \times L \\ l \otimes k &\mapsto (l\alpha(k), l\beta(k)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres. Comme

$$\begin{aligned} \psi(\text{id} \otimes \iota_L(l \otimes k)) &= \psi(l \otimes \iota(k)) \\ &= (l\alpha \circ \iota(k), l\beta \circ \iota(k)) \\ &= (l\beta(k), l\alpha(k)) = \epsilon(l\alpha(k), l\beta(k)), \end{aligned}$$

où  $\epsilon : L \times L \rightarrow L \times L$ ,  $(l_1, l_2) \mapsto (l_2, l_1)$ , l'application  $\psi$  permet d'identifier  $(K_L, \iota_L)$  et  $(L \times L, \epsilon)$ .

A présent soit un  $K_L$ -module  $V_0$  et un  $L$ -espace vectoriel  $V$  tels que  $V_0 \simeq V \otimes_F K$ . Le module  $V_0$  s'identifie avec  $V \otimes_{K,\alpha} K \times V \otimes_{K,\beta} K$ .

On construit maintenant une  $(K_L, \iota_L)$ -forme hermitienne sur  $V_0$ . Soit  $\varphi : V \otimes_{K,\beta} K \rightarrow (V \otimes_{K,\alpha} K)^*$  un isomorphisme de  $K_L$ -modules et

$$\begin{aligned} h_\varphi : (V \otimes_{K,\alpha} K \times V \otimes_{K,\beta} K) &\times (V \otimes_{K,\alpha} K \times V \otimes_{K,\beta} K) \rightarrow L \times L \\ ((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) &\mapsto (\langle \varphi(\xi_2), \eta_1 \rangle, \langle \varphi(\eta_2), \xi_1 \rangle). \end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que  $h_\varphi$  est une  $(K_L, \iota_L)$ -forme hermitienne.

**Proposition 1.1.10.** — Soit  $\varphi, \varphi' : V \otimes_{K,\beta} K \rightarrow (V \otimes_{K,\alpha} K)^*$  deux isomorphismes de  $K_L$ -modules. Alors  $h_\varphi$  et  $h_{\varphi'}$  sont isométriques.

*Démonstration.* — Comme  $\varphi^{-1} \circ \varphi' : V \otimes_{K,\beta} K \rightarrow V \otimes_{K,\beta} K$  est un isomorphisme de  $K_L$ -modules et que

$$\begin{aligned} h_\varphi((\xi_1, \varphi^{-1} \circ \varphi'(\xi_2)), (\eta_1, \varphi^{-1} \circ \varphi'(\eta_2))) &= (\langle \varphi'(\xi_2), \eta_1 \rangle, \langle \varphi'(\eta_2), \xi_1 \rangle) \\ &= h_{\varphi'}((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) \end{aligned}$$

les formes hermitiennes  $h_\varphi$  et  $h_{\varphi'}$  sont isométriques.  $\square$

Soit  $h$  une  $(K_L, \iota_L)$ -forme hermitienne sur  $V \otimes_{K,\alpha} K \times V \otimes_{K,\beta} K$ .

**Proposition 1.1.11.** — Il existe un isomorphisme de  $K_L$ -modules

$$\varphi : V \otimes_{K,\beta} K \rightarrow (V \otimes_{K,\alpha} K)^*$$

tel que  $h$  et  $h_\varphi$  sont isométriques.

Tout d'abord, quelques résultats et notations préliminaires. En posant

$$\begin{aligned} \bar{h} : V \times V &\rightarrow L \times L \\ (v, w) &\mapsto h((0, w \otimes 1), (v \otimes 1, 0)) \end{aligned}$$

et  $p_1 : L \times L \rightarrow L$  la projection suivant la première coordonnée, on a

$$\begin{aligned} \bar{h}(v, w) &= h((0, w \otimes 1), (v \otimes 1, 0)) \\ &= h((0, 1) \cdot (0, w \otimes 1), (v \otimes 1, 0)) \\ &= \epsilon(0, 1) \cdot h((0, w \otimes 1), (v \otimes 1, 0)) \\ &= (1, 0) \cdot h((0, w \otimes 1), (v \otimes 1, 0)) \\ &= (p_1(\bar{h}(v, w)), 0). \end{aligned}$$

Ensuite on a le

**Lemme 1.1.12.** — Pour tout  $v_i, w_i \in V$ ,  $l_i, k_i \in K$ , en posant

$$(v, w) = ((v_1 \otimes l_1, v_2 \otimes l_2), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2))$$

on a

$$h(v, w) = (\beta(l_2)\alpha(k_1)p_1(\bar{h}(w_1, v_2)), \alpha(l_1)\beta(k_2)p_1(\bar{h}(v_1, w_2))).$$

*Démonstration.* — Premièrement, on décompose par bilinéarité

$$h((v_1 \otimes l_1, v_2 \otimes l_2), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2))$$

en

$$h((v_1 \otimes l_1, 0), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2)) + h((0, v_2 \otimes l_2), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2)).$$

On peut calculer le premier terme de l'addition

$$\begin{aligned}
h((v_1 \otimes l_1, 0), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2)) &= h((1, 0) \cdot (v_1 \otimes l_1, 0), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2)) \\
&= h((v_1 \otimes l_1, 0), (0, 1) \cdot (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2)) \\
&= \alpha(l_1)\beta(k_2)h((v_1 \otimes 1, 0), (0, w_2 \otimes 1)) \\
&= \alpha(l_1)\beta(k_2)\epsilon(h((0, w_2 \otimes 1), (v_1 \otimes 1, 0))) \\
&= \alpha(l_1)\beta(k_2)\epsilon(p_1(h(v_1, w_2)), 0) \\
&= (0, \alpha(l_1)\beta(k_2)p_1(\bar{h}(v_1, w_2))).
\end{aligned}$$

De même pour le second terme on obtient

$$h((0, v_2 \otimes l_2), (w_1 \otimes k_1, w_2 \otimes k_2)) = (\beta(l_2)\alpha(k_1)p_1(\bar{h}(w_1, v_2)), 0),$$

ce qui donne le résultat annoncé.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 1.1.11.* — Soit l'application  $\varphi : V \otimes_{K,\beta} K \rightarrow (V \otimes_{K,\alpha} K)^*$  définie par

$$\langle \varphi(y \otimes k), (x \otimes l) \rangle = \alpha(l)\beta(k)p_1(\bar{h}(x, y))$$

qui est un morphisme de  $L$ -espaces vectoriels. En posant  $(v, w) = ((v_1 \otimes l_1, v_2 \otimes l_2), (w_1 \otimes m_1, w_2 \otimes m_2))$ , le calcul suivant

$$\begin{aligned}
h_\varphi(v, w) &= (\langle \varphi(v_2 \otimes l_2), (w_1 \otimes m_1) \rangle, \langle \varphi(w_2 \otimes m_2), (v_1 \otimes l_1) \rangle) \\
&= (\alpha(m_1)\beta(l_2)p_1(\bar{h}(w_1, v_2)), \alpha(l_1)\beta(m_2)p_1(\bar{h}(v_1, w_2))) \\
&= h(v, w)
\end{aligned}$$

conclut la démonstration.  $\square$

Comme toute  $(K_L, \iota_L)$ -forme hermitienne est de la forme  $h_\varphi$ , toutes les  $(K_L, \iota_L)$ -formes hermitiennes de même dimension sont isométriques.

*1.1.3.2.2. Cas où  $L \otimes K$  est un corps.* — Il existe une injection canonique entre

$$\mathbf{Herm}_{n, K/F}(L) \rightarrow \mathbf{Quad}_{2n, F}(L)$$

Pour toute forme hermitienne  $h$  sur  $K/F$ , on peut définir la forme  $q_h$  comme suit. Soit  $V$  le  $K$ -espace vectoriel sur lequel la forme  $h$  est définie. On dote  $V$  d'une structure de  $F$ -espace vectoriel en restreignant à  $F$  la multiplication scalaire. Soit  $V_F$  cet  $F$ -espace vectoriel qui a une  $F$ -dimension de  $2n$ . On note  $q_h$  la  $F$ -forme quadratique suivante

$$\begin{aligned}
q_h : V_F &\rightarrow F \\
v &\mapsto h(v, v).
\end{aligned}$$

Cette forme quadratique définit de manière unique  $h$ . En effet

$$h(v, w) = \frac{1}{2}(q_h(v + w) - q_h(v) - q_h(w) + q_h(v + \sqrt{\delta}w)\sqrt{\delta}^{-1} - q_h(v)\sqrt{\delta}^{-1} - q_h(\sqrt{\delta}w)\sqrt{\delta}^{-1}).$$

On a la transformation naturelle suivante

$$q : \mathbf{Herm}_{n, K/F} \rightarrow \mathbf{Quad}_{2n, F}$$

telle que  $h \mapsto q_h$ .

*1.1.3.2.3. Définition de  ${}^K_c \mathbf{e}$ .* — A partir des deux études précédentes, on peut définir la chaîne d'invariants cohomologiques sur  $\mathbf{Herm}_{n, K/F}$  suivante.

**Définition 1.1.13.** — La chaîne formée des transformations naturelles définies, pour tout  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ , si  $L \otimes K$  est un corps, par

$${}^K_c e_i : \mathbf{Herm}_{n, K/F}^i(L) \xrightarrow{q_i} \mathbf{Quad}_{2n, F}^i(L) \xrightarrow{ce_i} \mathbf{H}_F^i(L) ;$$

si  $L \otimes K$  n'est pas un corps comme étant l'application triviale est appelée la *chaîne d'invariants de Milnor canoniques sur  $\mathbf{Herm}_{n, K/F}$* .

Comme dans le cadre des formes quadratiques et des  $(Q, \text{can})$ -formes hermitiennes on a la

**Proposition 1.1.14.** — Soit  $d, n$  et  $m$  tels que  $n < 2^m$  et  $d \geq (m + 1)$ . Alors la chaîne d'invariants de Milnor canoniques de degré  $d$  sur  $\mathbf{Herm}_{n, K/F}$  est triviale en  $(m + 1)$ .

*Démonstration.* — Ceci est une conséquence directe de la définition de  ${}^K_c e_i$  et de la Proposition 1.1.7.  $\square$

**1.1.4. Chaîne d'invariants cohomologiques d'algèbres à involution orthogonale.** —

*1.1.4.1. Définition de  $\mathbf{Orth}_A$  et  $\mathbf{M}^i$ .* — Dans cette section est exposée une chaîne d'invariants de degré 2 sur le foncteur  $\mathbf{Orth}_A$  d'une algèbre  $A$  simple centrale sur  $F$ .

Pour cela, soit le foncteur

$$\mathbf{Orth}_A : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

où  $A$  est une  $F$ -algèbre simple centrale, tel que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$$\mathbf{Orth}_A(L) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Les involutions orthogonales sur } A_L \\ \text{à } L\text{-isomorphisme près} \end{array} \right\}.$$

Si  $L$  dans  $\mathfrak{Fields}_F$  déploie  $A$ , il existe une application surjective

$$\text{ad} : \mathbf{Quad}_{\deg A, F}(L) \rightarrow \mathbf{Orth}_A(L).$$

Les invariants que l'on considère doivent respecter quelques concepts liés à cette correspondance entre formes quadratiques et involutions orthogonales dans le cas où  $A$  est déployée. D'où l'introduction de la notion suivante.

**Définition 1.1.15.** — Une *chaîne d'invariants de Milnor de degré  $d$  pour les involutions orthogonales* est une chaîne d'invariants cohomologiques  $\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{Orth}_A$  telle que pour tout corps  $L$  déployant  $A$  et tout  $0 \leq i \leq d$ ,  $\mathbf{H}_L^i(L) = \mathbf{Coeff}_L^i(L)$  et le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Quad}_{\deg A, L}^i & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathbf{Orth}_{A_L}^i \\ & \searrow \scriptstyle c e_i & \swarrow \scriptstyle e_i \\ & \mathbf{Coeff}_L^i & \end{array}$$

est commutatif.

Pour la suite, la chaîne d'invariants cohomologiques sur  $\mathbf{Orth}_A$  sera à valeurs dans  $\mathbf{Coeff}_F^i = \mathbf{M}_A^i$  où

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A^i : \mathfrak{Fields}_F &\rightarrow \mathfrak{Sets} \\ \mathbf{M}_A^i(L) &= \begin{cases} H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)), & i = 0, 1 \\ H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))/K_{i-2}(L).[A_L], & i > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vient le résultat suivant.

**Proposition 1.1.16.** — Pour  $d = 0, 1, 2$ , les chaînes d'invariants de Milnor de degré  $d$  à valeurs dans  $\mathbf{M}_A$  sont uniques.

*Démonstration.* — En effet, pour  $d = 0$ ,  $d = 1$  [Ami55] et  $d = 2$  [GS06, Théorème 5.4.1] et pour tout corps  $L$  sur  $F$

$$\text{res}_{L_A/L} : M_A^d(L) \rightarrow M_A^d(L_A)$$

est injective, où  $L_A$  est le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer associée à  $A_L$ . Soit  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{e}'$  deux chaînes d'invariants de Milnor de degré  $d$ . Comme l'algèbre  $A_{L_A}$  sur  $L_A$  est déployée, pour toute involution  $\sigma$  représentant un élément de  $\mathbf{Orth}_{A_L}^i(L)$ ,

$$\begin{aligned} \text{res}_{L_A/L}(e_i(\sigma)) &= e_i(\sigma_{L_A}) \\ &= {}_c e_i(q) \end{aligned}$$

où  $q$  est une  $L_A$ -forme quadratique adjointe à l'involution  $\sigma_{L_A}$ . De même pour  $\text{res}_{L_A/L}(e'_i(\sigma))$ . Mais l'application  $\text{res}_{L_A/L}$  étant injective,  $e_i(\sigma) = e'_i(\sigma)$ .  $\square$

1.1.4.2. *L'invariant  $e_0$ .* — L'invariant  $e_0$  de la chaîne d'invariants de Milnor  $\mathbf{e}$  est

$$e_0 : \mathbf{Orth}_A(L) \rightarrow \mathbf{M}_A^0(L) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ [\sigma] \mapsto \dim_L A_L \pmod{2}.$$

La chaîne d'invariants cohomologiques ainsi créée est l'unique chaîne de Milnor de degré 0.

1.1.4.3. *L'invariant  $e_1$ .* — Dans le cadre des involutions orthogonales sur  $A_L$  telle que  $[\sigma] \in \mathbf{Orth}_A^1(L)$ , on peut poser

$$e_1(\sigma) = \text{disc}(\sigma)$$

comme étant le discriminant défini dans [KMRT98, Définition 7.2] qui est à valeurs dans  $\mathbf{M}_A^1(L) = H^1(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(0))$ . De plus pour tout corps  $L$  déployant  $A$

$$\text{disc}(\text{ad}(q)) = \text{disc}(q) = {}_c e_1(q)$$

par définition de  ${}_c e_1$ . La fonction ayant les bonnes propriétés fonctorielles, ceci forme l'unique chaîne d'invariants de Milnor de degré 1.

Cette chaîne d'invariants de Milnor permet de classifier les involutions orthogonales sur une algèbre donnée  $A$  de degré 2. Elle donne aussi un critère de décomposition en degré 4 comme suit.

**Proposition 1.1.17.** — [KPS91, Corollaire 5.4] *Toute involution orthogonale  $\sigma$  sur  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 représentant une classe de  $\mathbf{Orth}_A^2(F)$  s'écrit de façon unique sous la forme*

$$(A, \sigma) = (Q_1, \text{can}) \otimes_F (Q_2, \text{can})$$

où  $Q_i$  sont des algèbres de quaternions sur  $F$  munies de leur involution symplectique canonique.

Ce genre de propriétés est étudié et recherché dans tous les invariants cohomologiques construit dans la présente étude.

1.1.4.4. *L'invariant  $e_2$ .* — Afin de compléter la chaîne d'invariants de Milnor de degré 1, on souhaite à présent construire une transformation naturelle

$$\mathbf{Orth}_A^2 \rightarrow \mathbf{M}_A^2$$

sachant que  $\mathbf{Orth}_A^2(L)$  est non vide seulement si  $A$  est de degré pair. De plus, toute involution  $\sigma$  telle que  $[\sigma] \in \mathbf{Orth}_A^2(L)$  est de discriminant trivial.

L'algèbre de Clifford  $C(A, \sigma)$  d'une involution orthogonale de discriminant trivial se décompose en un produit direct de  $F$ -algèbres centrales simples  $C^+$  et  $C^-$ , telles que  $[C^+] - [C^-] = [A]$ . Ce qui signifie que  $[C^+] = [C^-]$  dans  $\mathbf{M}_A^2(L)$

(d'où le choix de ce groupe quotient de  $H^2(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ ). Soit

$$\begin{aligned} e_2 : \mathbf{Orth}_A^2(L) &\rightarrow \mathbf{M}_A^2(L) \\ \sigma &\mapsto [C^+]. \end{aligned}$$

Il reste à voir que cette chaîne d'invariants cohomologiques de degré 2 est la chaîne d'invariants de Milnor de degré 2. On se place donc dans le cas où  $A$  est déployée par un corps  $L$ . L'algèbre de Clifford  $C(A_L, \text{ad}_q)$  est isomorphe à  $C_0(q)$  et les composantes de cette algèbre sont Brauer-équivalentes à  $[C(q)]$ . Donc  $e_2(\text{ad}(q)) = {}_c e_2(q)$ . Cela donne la chaîne d'invariants de Milnor de degré 2.

**Proposition 1.1.18.** — [LT99, Proposition 2] *Soit  $A$  une algèbre simple centrale de degré 4 et  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ . Alors pour toute involution orthogonale  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  représentant des éléments de  $\mathbf{Orth}_A^2(L)$ ,  $e_2(\sigma_{1_L}) = e_2(\sigma_{2_L})$  si et seulement si  $\sigma_{1_L}$  et  $\sigma_{2_L}$  sont conjuguées.*

*Démonstration.* — On peut supposer  $L = F$  sans perdre de généralité. Si  $e_1(\sigma_i) = 0$ , les involutions se décomposent sous la forme  $(A, \sigma_i) = (Q_i, \text{can}) \otimes_F (Q'_i, \text{can})$ . L'algèbre de Clifford associée à une algèbre munie d'une involution orthogonale totalement décomposable de degré 4 s'écrit  $C(A, \sigma_i) = Q_i \times Q'_i$  [Tao95, Théorème 4.12]. D'où  $e_2(\sigma_1) = [Q_1] \bmod [A]$  et  $e_2(\sigma_2) = [Q_2] \bmod [A]$ . Or  $e_2(\sigma_1) = e_2(\sigma_2)$ , autrement dit  $[Q_1] = [Q_2] \bmod [A]$ . Donc  $Q_1$  est soit Brauer-équivalent à  $Q_2$  soit à  $Q'_2$ . Pour fixer les idées, soit  $Q_1$  Brauer-équivalent à  $Q_2$ , par raison de degré  $Q_1 \simeq Q_2$  et donc  $(Q_1, \text{can}) = (Q_2, \text{can})$ . De même  $(Q'_1, \text{can}) = (Q'_2, \text{can})$  ceci permet de conclure que

$$\begin{aligned} (A, \sigma_1) &= (Q_1, \text{can}) \otimes_F (Q'_1, \text{can}) \\ &= (Q_2, \text{can}) \otimes_F (Q'_2, \text{can}) \\ &= (A, \sigma_2). \end{aligned}$$

D'où la classification annoncée.  $\square$

Le second invariant permet également de détecter la décomposabilité des algèbres simples centrales de degré 8 munies d'une involution orthogonale via le

**Théorème 1.1.19.** — [KMRT98, Théorème 42.10] *Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 8 et  $\sigma$  une involution orthogonale.*

*Alors  $e_1(\sigma) = 0$  et  $e_2(\sigma) = 0$  si et seulement si  $(A, \sigma) \simeq \bigotimes_{i=1}^3 (Q_i, \sigma_i)$  pour certaines algèbres de quaternions munies d'une involution orthogonale  $(Q_i, \sigma_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ .*



1.1.4.5. *L'invariant  $e_3$ .* — Des conditions sur le degré de  $A$  doivent être posée afin de compléter la chaîne d'invariants de Milnor de degré 3.

**Proposition 1.1.20.** — [Gar09, §3] *Soit  $A$  une algèbre simple centrale de degré  $\geq 8$  telle que  $\text{ind}A$  divise  $\frac{1}{2}\text{deg}A$ . Alors il existe un invariant cohomologique*

$$e_3 : \text{Orth}_A^3 \rightarrow \mathbf{M}_A^3$$

*qui complète la chaîne d'invariants de Milnor de degré 2 précédente.*

**Remarque.** — Cet invariant est noté  $e_3^{\text{hyp}}$  dans [Gar09].

Garibaldi construit aussi un autre invariant qu'il nomme  $e_3^{16}$  pour certaines algèbres simples centrales de degré 16 et pose la question de l'égalité entre ces invariants, ceci est démenti par Becher-Tignol.

D'un autre côté, Quéguiner-Mathieu et Tignol démontrent que l'on ne peut étendre cette chaîne pour certaines algèbres simples centrales.

**Théorème 1.1.21.** — [QMT, Théorème 1.2] *Il n'existe pas de chaîne d'invariants de Milnor de degré 3 dans les cas suivants*

1.  $\text{ind}A = 8$  et  $\text{deg}A \equiv 8 \pmod{16}$  ;
2.  $\text{ind}A = 4$ ,  $\text{deg}A \equiv 4 \pmod{8}$  et  $\text{deg}A \geq 12$ .

### 1.1.5. Chaîne d'invariants cohomologiques d'algèbres à involution symplectique. —

1.1.5.1. *Définition de  $\text{Symp}_A$ .* — Cette section est consacrée à l'élaboration d'une chaîne d'invariants de Milnor sur le foncteur  $\text{Symp}_A$  d'une  $F$ -algèbre simple centrale  $A$ .

Soit le foncteur

$$\text{Symp}_A : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

où  $A$  est une  $F$ -algèbre simple centrale, tel que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$$\text{Symp}_A(L) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Les involutions symplectiques sur } A_L \\ \text{à } L\text{-isomorphisme près} \end{array} \right\}.$$

A l'instar des involutions orthogonales, les invariants doivent respecter certains concepts naturels. Le souci est que toute involution symplectique sur une algèbre déployé est hyperbolique. Par contre, il existe une correspondance entre formes hermitiennes et involutions symplectiques dans le cas où  $A$  est d'indice 2, c'est à dire Brauer-équivalente à une algèbre de quaternions à division.

**Définition 1.1.22.** — Une chaîne d'invariants cohomologiques  $\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{Symp}_A$  est une *chaîne d'invariants de Milnor de degré  $d$  pour les involutions symplectiques* si, pour tout corps  $L$  sur  $F$  tel que  $A_L$  est d'indice 2, et tout  $0 \leq i \leq d$ ,  $\mathbf{H}_L^i(L) = \mathbf{Coeff}_L^i(L)$  et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Herm}_{\deg A, Q/L}^i & \xrightarrow{\quad \text{ad} \quad} & \mathbf{Symp}_{A_L}^i \\ & \searrow \scriptstyle Q e_i \quad \swarrow \scriptstyle e_i & \\ & \mathbf{H}_L^i & \end{array}$$

où  $Q$  est une  $L$ -algèbre de quaternions Brauer-équivalente à  $A_L$ .

La chaîne d'invariants de Milnor qui sera construite sera à valeurs dans  $\mathbf{H}_F^i$ . A l'instar des involutions orthogonales, on a la

**Proposition 1.1.23.** — *Pour  $d = 0, 1$  les chaînes d'invariants de Milnor de degré  $d$  à valeurs dans  $\mathbf{H}_F$  sont uniques.*

**1.1.5.2. L'invariant  $e_0$  et l'invariant  $e_1$ .** — Ces invariants sont déterminés uniquement par le cas où  $A_L$  est d'indice 2 pour  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ . Soit  $L$  un tel corps, les involutions symplectiques sur  $A_L$  sont adjointes à des  $(Q, \text{can})$ -formes hermitiennes  $h$ , avec  $Q$  une algèbre de quaternions sur  $L$  telle que  $Q \sim A_L$ . Soit  $a_1, \dots, a_n$  dans  $L$  tels que  $h = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  et  $Q = (c, d)_L$ , avec  $c, d \in L$ . On obtient

$$q_h = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \langle\langle c, d \rangle\rangle.$$

La forme quadratique  $q_h$  est dans  $I^2(L)$ . Autrement dit  ${}_c e_0(q_h) = 0$  de même  ${}_c e_1(q_h) = 0$ . De cette manière, on démontre la

**Proposition 1.1.24.** — *Les chaînes d'invariants de Milnor pour les involutions symplectiques sont triviales en 0 et 1.*

**1.1.5.3. L'invariant  $e_2$ .** — Soit fixée une algèbre  $A$  de degré  $2m$ . On suppose le degré pair car dans le cas impair, il n'existe pas d'involution symplectique.

Pour trouver la transformation  $e_2$ , on va se servir de certaines suites de cohomologie. La suite exacte suivante

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \text{Sp}_{2m} \longrightarrow \text{PGSp}_{2m} \longrightarrow 1$$

offre pour toute extension de corps  $L$  sur  $F$

$$\partial : H^1(L, \text{PGSp}_{2m}) \rightarrow H^2(L, \mu_2).$$

Comme [KMRT98, 29.22]

$$H^1(L, \text{PGSp}_{2m}) = \coprod_A \mathbf{Symp}_A(L),$$

où  $A$  parcourt toutes les  $L$ -algèbres simples centrales de degré  $2m$  à  $L$ -isomorphisme près, ceci induit une transformation naturelle définie pour toute extension  $L$  sur  $F$

$$\begin{aligned} e_2 : \mathbf{Symp}_A(L) &\rightarrow \mathbf{H}^2(L) \\ [\gamma] &\mapsto \partial(A, \gamma)_L. \end{aligned}$$

Afin de vérifier si cette chaîne d'invariants cohomologiques est une chaîne de Milnor, on explicite l'application  $e_2$ , à savoir

$$\begin{aligned} e_2 : \mathbf{Symp}_A(L) &\rightarrow \mathbf{H}^2(L) \\ [\gamma] &\mapsto [A_L]. \end{aligned}$$

Pour être un invariant de Milnor, il est nécessaire de coïncider, après extension par un corps  $L$  tel que  $\text{ind} A_L = 2$ , à l'invariant construit sur les formes  $(Q, \text{can})$ -hermitiennes où  $[A_L] = [Q]$ . Or, pour toute forme hermitienne  $h$ , cet invariant est nul lorsque  $m$  est pair et vaut  $[Q] = [A_L]$  lorsque  $m$  est impair.

**Proposition 1.1.25.** — *La chaîne d'invariants de Milnor pour les involutions symplectique est soit triviale en 2 si  $m$  est pair, soit définie par  $\partial$  si  $m$  est impair.*

*Démonstration.* — Comme l'application

$$\text{res}_{F_A/F} : \mathbf{M}_A^2(F) \rightarrow \mathbf{M}_A^2(F_A) = \mathbf{H}_F^2(F_A)$$

est injective, la transformation naturelle  $e_2$  est définie de manière unique sur  $F_A$ , modulo la classe de  $A$  dans  $\mathbf{H}^2(F)$ . Comme  $e_2(\gamma_{F_A}) = 0$ , on peut dire que  $e_2(\gamma) \bmod [A] = 0$ . Ceci donne  $e_2(\gamma) = [A]$  ou  $e_2(\gamma) = 0$ . Comme c'est une chaîne d'invariants de Milnor de degré 2,  $e_2$  doit coïncider avec  ${}^Q e_2$  dans le cas où  $\text{ind}(A_L) = 2$ . D'où, si  $m$  est pair,  $e$  est triviale en 2, sinon  $e_2(\gamma) = [A]$  pour tout  $[\gamma] \in \mathbf{Symp}_A^2(F)$ .  $\square$

**Proposition 1.1.26.** — *Si  $A$  est de degré  $2(2k+1)$ , pour tout  $d \geq 3$ , la chaîne d'invariants cohomologiques triviale en  $m \geq 3$  de degré  $d$  complétant la chaîne précédemment construite est une chaîne d'invariants de Milnor.*

*Démonstration.* — L'invariant  $e_3$ , pour une extension  $L$  donnée de  $F$ , doit partir de l'ensemble  $\mathbf{Symp}_A^3(L)$  des involutions symplectiques  $\gamma$  sur  $A_L$  telles que  $e_2(\gamma) = 0$ . Or  $e_2(\gamma) = [A_L]$ . Autrement dit  $A_L$  sera déployée. Cependant toute involution symplectique sur une algèbre déployée étant hyperbolique,  $\mathbf{Symp}_A^3(L) = \{(A_L, \text{hyp})\}$ . Par conséquent,  $e_3$  sera nul pour tout corps  $L$  tel que  $\text{Ind} A_L = 2$ , ainsi que tous les  $e_i$  supérieurs.  $\square$

A présent on suppose que le degré de  $A$  s'écrit sous la forme  $2m$  avec  $m$  pair et on considère l'unique chaîne d'invariants de Milnor de degré 2, triviale en 0, 1 et 2.

1.1.5.4. *Un invariant  $e_3$ .* — Trouver une chaîne d'invariants cohomologiques de degré 3 n'est pas toujours possible, il faut pour cela faire quelques concessions sur le degré de l'algèbre  $A$ . En effet,

**Proposition 1.1.27.** — [Tig10, §5.3] *Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 à division. Alors il n'existe pas d'invariant de Milnor de degré 3 pour les involutions symplectiques.*

Par contre, on a

**Théorème 1.1.28.** — [GPT09, Théorème A] *Pour tout entier  $m$  divisible par 4, il existe un invariant unique*

$$\Delta : H^1(*, \text{PGSp}_{2m}) \rightarrow H^3(*, \mu_2).$$

Il s'agit cependant d'une concession relativement mineure, vu que l'invariant  $e_3$  lorsque  $m$  n'est pas divisible par 2 est forcément nul par ce qui est dit précédemment. De l'autre côté, il existe une distinction entre le cas où le degré est 0 mod 8 ou 4 mod 8. D'où,

**Proposition 1.1.29.** — *Si  $A$  est une  $F$ -algèbre simple centrale de degré un multiple de 8, la transformation naturelle définie pour tout extension  $L$  dans  $\mathbf{Fields}_F$  par*

$$\begin{aligned} e_3 : \mathbf{Symp}_A(L) &\rightarrow \mathbf{H}^i(L) \\ [\gamma] &\mapsto \Delta(A_L, \gamma) \end{aligned}$$

*complète la chaîne d'invariants de Milnor de degré 3.*

Cet invariant possède lui aussi des propriétés intéressantes concernant l'étude des involutions symplectiques.

**Théorème 1.1.30.** — [GPT09, Théorème B] *Pour toute  $F$ -algèbre simple centrale  $A$  de degré 8 munie d'une involution symplectique  $\gamma$ , les propositions suivantes sont équivalentes.*

- *L'invariant  $e_3(\gamma_L) = 0$*
- *Il existe  $Q_i$  des  $L$ -algèbres de quaternions telles que*

$$(A_L, \gamma_L) = (Q_1, \text{can}) \otimes_L (Q_2, \text{can}) \otimes_L (Q_3, \text{can}).$$

*On dit que l'involution  $\gamma_L$  est totalement décomposable.*

L'invariant  $e_3$  permet donc de détecter la décomposabilité totale en degré 8 pour les involutions symplectiques comme l'invariant  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) permet de détecter la décomposition totale en degré 4 (resp. en degré 8) pour les involutions orthogonales par la Proposition 1.1.17 (resp. le Théorème 1.1.19).

**1.1.6. Chaîne d'invariants cohomologiques d'algèbres à involution unitaire.** — Dans le cadre du travail entrepris dans cette thèse, soit fixée  $B$  une algèbre simple centrale sur  $K$  une extension quadratique de  $F$ . La présente section est consacrée à l'ébauche d'une chaîne d'invariants cohomologiques de degré 2.

*1.1.6.1. Rappels et notations.* — [KMRT98, §2.B]

Une involution de seconde espèce sur une  $F$ -algèbre  $B$  simple centrale est une involution qui n'est pas l'identité sur le centre. Il est commode donc d'identifier ce centre avec une extension quadratique d'un sous-corps. Pour se conformer à la littérature, on procède à un remaniement de notations dans le cas des involutions unitaires. Le sous-corps sera désormais  $F$  (même s'il n'est pas le centre de  $B$ ), l'extension quadratique  $(Z(B))$  sera notée  $K$ . Il est nécessaire, dans le cadre d'un travail visant à comparer différentes involutions sur des algèbres isomorphes (et non forcément sur  $B$ ) de connaître l'identification du centre avec  $K$ , d'où la définition suivante.

**Définition 1.1.31.** — Soit  $K$  une extension quadratique de  $F$ . Une  $F$ -algèbre  $B$  simple centrale munie d'une involution  $K/F$ -unitaire est la donnée d'une  $F$ -algèbre  $B$  simple munie d'une involution  $\sigma$  de seconde espèce (ou unitaire) qui laisse invariant  $F$  et d'un isomorphisme  $\varphi : Z(B) \rightarrow K$ . On le notera  $(B, \sigma, \varphi)$  ou  $(B, \sigma)$  lorsque cela ne prête pas à confusion.

La précision concernant l'identification du centre entraîne une nuance concernant la notion de morphisme de  $F$ -algèbres simples centrales à involution  $K/F$ -unitaire :

**Définition 1.1.32.** — Un *morphisme* de  $F$ -algèbres à involutions  $K/F$ -unitaires entre  $(B, \sigma, \varphi)$  et  $(B', \sigma', \varphi')$  est un morphisme de  $F$ -algèbres  $\psi : B \rightarrow B'$  tel que  $\psi \circ \sigma = \sigma' \circ \psi$  et  $\varphi' \circ \psi|_{Z(B)} = \varphi$ .

**Convention 1.1.33.** — Si l'on prend comme extension  $K$ , on se retrouve avec  $Z(B_K) = Z(B) \otimes_F K = K \otimes_F K$ . Or ce centre n'est plus un corps (remarquer par exemple, lorsque  $K = F(\sqrt{\delta})$  avec  $\sqrt{\delta}^2 \in F$ , on a  $(1 \otimes \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta} \otimes 1)(1 \otimes \sqrt{\delta} + \sqrt{\delta} \otimes 1) = 0$ ). De même, l'algèbre  $B_K$  n'est plus vraiment simple mais est le produit direct de deux  $K$ -algèbres simples. Pour pallier à ce problème, on permet, uniquement dans le cadre des  $F$ -algèbres  $B$  simples centrales munies d'une involution  $K/F$ -unitaire, que le centre de  $B$  ne soit pas un corps mais un produit de deux copies de  $F$ . Dans ce cas,  $B$  est de la forme

$$B = A \times A^{op}$$

avec  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale,  $A^{op}$  l'algèbre opposée construite comme suit :

$$A = \{a^{op} | a \in A\}, \quad a^{op} + b^{op} = (a+b)^{op}, \quad \lambda \cdot a^{op} = (\lambda \cdot a)^{op} \text{ et } (a \cdot b)^{op} = b^{op} \cdot a^{op}.$$

Par [KMRT98, Proposition 2.11], une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B = A \times A^{op}$  est toujours conjuguée à l'involution

$$\begin{aligned} \epsilon : A \times A^{op} &\rightarrow A \times A^{op} \\ (x, y^{op}) &\mapsto (y, x^{op}). \end{aligned}$$

**1.1.6.2. Définition de  $\mathbf{Unit}_B$  et  $\mathbf{M}_{B,K}^i$ .** — Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré  $n$ , on introduit le foncteur

$$\mathbf{Unit}_B : \mathbf{Fields}_F \rightarrow \mathbf{Sets}$$

tel que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$$\mathbf{Unit}_B(L) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Les involutions } K_L/L\text{-unitaires sur } B_L \\ \text{à } L\text{-isomorphisme près} \end{array} \right\}.$$

Pour définir un analogue aux invariants de Milnor dans le cas orthogonal et symplectique, on se place dans le cas où  $B$  est déployée. On obtient non pas une algèbre de matrices sur  $F$  mais sur  $K$ . Si  $B = \text{End}_K(V)$  et  $K$  un corps, la correspondance dans le cas des involutions  $K/F$ -unitaires est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Les formes hermitiennes} \\ \text{de dimension } n \text{ sur } V \otimes_F L \\ \text{à } L\text{-isométrie près} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Les involutions } K_L/L\text{-unitaires} \\ \text{sur } \text{End}_K(V) \otimes_F L \\ \text{à } L\text{-isomorphisme près} \end{array} \right\}$$

$$h \mapsto \text{Ad}(h).$$

Dans le cas où  $K$  n'est pas un corps, toutes les involutions sur  $B$  sont conjuguées et toutes les  $(K, \iota)$ -formes hermitiennes sont isométriques. La correspondance est donc naturellement triviale.

D'où la définition suivante.

**Définition 1.1.34.** — Une *chaîne d'invariants de Milnor de degré  $d$  pour les involutions unitaires* est la donnée d'une chaîne d'invariants cohomologiques  $\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{Unit}_B$  de degré  $d$  telle que pour tout corps  $L$  sur  $F$  déployant  $B$  et tout  $0 \leq i \leq d$ ,  $\mathbf{H}_L^i(L) = \mathbf{Coeff}_L^i(L)$  et telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Herm}_{\deg B, K_L/L}^i & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathbf{Unit}_{B_L}^i \\ & \searrow \scriptstyle K_c e_i & \swarrow \scriptstyle e_i \\ & \mathbf{H}_L^i & \end{array}$$

est commutatif.

**Remarque.** — La chaîne d'invariants de Milnor présentée ici sera à valeurs dans  $\mathbf{M}_{B,K}^i$  défini pour tout  $L$  dans  $\mathfrak{Fields}_F$  par

$$\mathbf{M}_{B,K}^i(L) = \begin{cases} H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)), & i = 0, 1 \\ H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))/\text{cor}_{K_L/L}(K_{i-2}(K_L) \cdot [B_L]), & i \geq 2 \end{cases}.$$

**Proposition 1.1.35.** — Pour  $d = 0, 1, 2$ , les chaînes d'invariants de Milnor de degré  $d$  à valeurs dans  $\mathbf{M}_{B,K}^i$  sont uniques.

*Démonstration.* — Le cas  $d = 0$  est évident. Pour  $d = 1$  et  $d = 2$ , le raisonnement est identique à celui de la Proposition 1.1.16 en remplaçant le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer associée à  $A$  par le corps des fonctions du transfert de Weil, de  $K$  à  $F$ , de la variété de Severi-Brauer associée à  $B$ . L'injectivité de l'homomorphisme de restriction en degré 1 résulte du fait que le transfert est une variété géométriquement irréductible [Wei62]. En degré 2, elle résulte du [MT, Corollaire 2.12]  $\square$

En outre, si  $B$  admet une involution  $K/F$ -unitaire, l'algèbre représentant  $\text{cor}_{K/F}(B)$  est déployée. Donc  $\mathbf{M}_{B,K}^2 = \mathbf{H}_F^2$ .

1.1.6.3. *L'invariant  $e_0$ .* — Soit  $(B, \tau)$  une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution  $K/F$ -unitaire. Si  $L$  déploie  $B$  et que  $L \otimes_F K$  n'est pas un corps, l'invariant  $e_0(\tau_L) = {}_c^K e_0(h) = 0$ . Si  $L \otimes_F K$  est un corps, l'invariant  $e_0(\tau_L) = {}_c e_0(q_h)$  est égal à la dimension de  $q_h$  la forme quadratique associée à la forme hermitienne adjointe à  $\tau_L$ . Or cette forme quadratique est de la forme  $q \cdot \langle\langle \delta \rangle\rangle$  qui est de dimension paire. Ceci permet de dire

**Proposition 1.1.36.** — La chaîne d'invariants cohomologiques triviale en 0 de degré 0 est la chaîne d'invariants de Milnor de degré 0.

1.1.6.4. *L'invariant  $e_1$ .* —

**Proposition 1.1.37.** — Si  $B$  est une  $K$ -algèbre de degré impair, alors pour tout  $L$  dans  $\mathfrak{Fields}_F$  et toute classe d'involution  $K_L/L$ -unitaire  $\tau$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B(L)$ ,

$$e_1 : \mathbf{Unit}_B(L) \rightarrow \mathbf{M}_{B,K}^1(L)$$

est constant et vaut  $e_1(\tau) = (\delta)$ .

*Démonstration.* — On suppose d'abord que  $L$  est une extension de corps sur  $F$  déployant  $B$ . Si  $L \otimes_F K$  n'est pas un corps,  $\delta$  est un carré dans  $L$  et  $e_1(\tau) = 0 = (\delta)$ . Si  $L \otimes_F K$  est un corps, alors  $B_L = \text{End}_{K_L} V$  pour un  $K_L$ -espace

vectorel  $V$  de dimension  $\deg B = 2m + 1$ . Dans ce cas, il existe  $h$  une  $K_L$ -forme hermitienne sur  $V$  telle que  $\text{ad}_h = \tau_{K_L}$ . Comme  $e_1$  est supposé être de Milnor,  $e_1(\text{ad}_h) = {}_c e_1^K(h)$ . Il existe  $a_1, \dots, a_{2m+1}$  dans  $F$  tels que

$$h = \langle a_1, \dots, a_{2m+1} \rangle$$

ce qui donne

$$q_h = \langle a_1, \dots, a_{2m+1} \rangle \langle \langle \delta \rangle \rangle.$$

Comme  $q_h$  est de dimension paire,  $q_h$  est dans  $I^1 F$ . Mais

$$\begin{aligned} {}_c e_1(q_h) &= {}_c e_1(\langle a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, a_{2m+1} \rangle \langle \langle \delta \rangle \rangle) \\ &= (\delta). \end{aligned}$$

Maintenant, si  $L$  ne déploie pas  $B$ , soit  $L'$  le corps des fonctions transfert de Weil de  $K_L$  à  $L$  de la variété de Severi-Brauer de  $B_L$ . Alors  $B_{L'}$  est déployée donc  $e_1(\tau_{L'}) = (\delta)$ . Par fonctorialité, on a  $e_1(\tau)_{L'} = (\delta)$ , donc  $e_1(\tau) = (\delta)$  puisque l'homomorphisme de restriction  $\mathbf{M}_{B,K}^1(L) \rightarrow \mathbf{M}_{B,K}^1(L')$  est injectif vu que  $L$  est algébriquement clos dans  $L'$ .  $\square$

Ceci entraîne le

**Corollaire 1.1.38.** — *Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré impair, toute chaîne d'invariants de Milnor est triviale en  $m$  pour tout  $m \geq 2$ .*

*Démonstration.* — Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré impair, pour tout  $L \in \mathfrak{Fieids}_F$ ,  $e_1(\tau) = (\delta)_L$  pour toute involution  $K_L/L$ -unitaire  $\tau$  sur  $B_L$ . Deux cas se présentent.

Si  $(\delta)_L$  est non nul, l'invariant  $e_1$  pour toute involution  $K_L/L$ -unitaire  $\tau$  sur  $B_L$  est non nul et  $\mathbf{Unit}_B^2(L)$  est vide.

Si  $(\delta)_L$  est nul,  $K_L$  n'est pas un corps. Dans ce cas  $\mathbf{Unit}_B^2(L)$  est un singleton.

En conclusion, la chaîne d'invariants de Milnor sur  $\mathbf{Unit}_B$  est triviale en  $m$  pour  $\geq 2$ .  $\square$

D'un autre côté,

**Proposition 1.1.39.** — *Si  $B$  est une  $K$ -algèbre simple centrale de degré pair, une chaîne d'invariants de Milnor de degré  $d \geq 1$  est triviale en 0 et 1.*

*Démonstration.* — Soit  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_B(F)$  et  $L \in \mathfrak{Fieids}_F$  déployant  $B$  alors  $e_1(\tau_L) = 0$  car la forme  $q_h$  associée est dans  $I^2 F$ . La chaîne d'invariants cohomologiques triviale en 0 et 1 est dès lors la chaîne de Milnor de degré 1.  $\square$



1.1.6.5. *L'invariant  $e_2$ .* — A présent, le degré de  $B$  est  $n = 2m$ . Pour mettre la main sur le second invariant cohomologique de façon explicite, on étudie une suite de cohomologie. Comme le groupe  $\mathrm{PGU}_{n,K}$  n'est pas simplement connexe, contrairement à  $\mathrm{PGSp}_n$ , il existe un revêtement par le groupe simplement connexe

$$\mathrm{SU}_{n,K} := \{u \in \mathrm{U}_{n,K} \mid \det(u) = 1\}.$$

Son centre est alors un *twist* du groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité

$$\mu_{n,K} := \{z \in K^\times \mid N_{K/F}(z) = 1 = z^n\}.$$

On suppose que la caractéristique de  $F$  ne divise pas  $n$ , ceci permet à  $\mu_{n,K}$  d'être un groupe algébrique lisse. Son groupe des points rationnels sur  $F_s$  est isomorphe au groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité sur  $F_s$ . On déduit de la suite exacte suivante

$$1 \longrightarrow \mu_{n,K} \longrightarrow \mathrm{SU}_{n,K} \longrightarrow \mathrm{PGU}_{n,K} \longrightarrow 1$$

le morphisme

$$\partial : H^1(F, \mathrm{PGU}_{n,K}) \rightarrow H^2(F, \mu_{n,K})$$

qui permet d'extraire un invariant de degré 2. Il est à noter que le comportement de  $\partial$  diffère selon la parité du degré  $n$ , bien qu'ici on ne considère que le cas où le degré est pair.

Par [CTGP04, Proposition 2.10], il existe une injection

$$(\mathrm{res}_{K/F}, m) : H^2(F, \mu_{n,K}) \rightarrow H^2(K, \mu_n) \times H^2(F, \mu_2),$$

telle que l'image d'un élément de  $H^2(F, \mu_{n,K})$  soit un couple  $(\xi, \eta)$  tel que  $\xi^m = \mathrm{res}_{K/F}(\eta)$  et  $\mathrm{cor}_{K/F}(\xi) = 0$ . Afin de mieux cerner cette application et pouvoir en déduire un invariant cohomologique, il existe une correspondance  $1 - 1$  entre

$$H^1(F, \mathrm{PGU}_{n,K}) \leftrightarrow \coprod_B \mathbf{Unit}_B(F)$$

où  $B$  parcourt l'ensemble des algèbres simples centrales de degré  $n$  à isomorphisme près. Autrement dit, pour  $B$  une  $K$ -algèbre centrale simple donnée, de degré  $n$  (que  $n$  soit pair ou non), il existe une injection [KMRT98, Chap VII, p.400]

$$in : \mathbf{Unit}_B(F) \hookrightarrow H^1(F, \mathrm{PGU}_{n,K}).$$

Soit  $(B, \tau)$  une algèbre simple centrale de degré  $n$  à involution  $K/F$ -unitaire et  $\Delta(B, \tau)$  dans  $H^2(F, \mu_{n,K})$  l'image sous  $\partial$  de la classe cohomologique correspondante dans  $H^1(F, \mathrm{PGU}_{n,K})$ . Un calcul montre

$$\mathrm{res}_{K/F} \Delta(B, \tau) = [B],$$

ceci donne une information uniquement sur l'algèbre et non sur l'involution elle-même. Par contre, l'autre composante de  $\Delta(B, \tau)$  qui est  $\Delta(B, \tau)^m$ , est

en fait Brauer-équivalente à l'algèbre discriminante  $D(B, \tau)$  construite dans [KMRT98, §10]. Lorsque  $B$  est déployée,  $\Delta(B, \text{ad}_h) = (\delta, \text{disc}(h))$  qui est l'invariant défini pour les formes hermitiennes. Soit pour toute extension de corps  $L$  sur  $F$  l'application

$$e_2 : \mathbf{Unit}_B^2(L) \xrightarrow{\text{in}} H^1(L, \text{PGU}_{n, K_L}) \xrightarrow{\Delta^m} H^2(L, \mu_2) \longrightarrow \mathbf{M}_{B, K}^2(L) .$$

Elle forme la chaîne d'invariants de Milnor de degré 2 pour les involutions unitaires.

Cette chaîne d'invariants de Milnor permet de déceler quelques propriétés intéressantes.

**Proposition 1.1.40.** — [KQM00, Théorème 3.1] *Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale et  $L$  une extension de corps de  $F$ .*

1. *Si le degré de  $B$  est 2, alors deux involutions  $K_L/K$ -unitaires  $\tau'$  et  $\tau$  sur  $B_L$  sont conjuguées si et seulement si  $e_2(\tau) = e_2(\tau')$ .*
2. *Si le degré de  $B$  est 4, pour toute involution  $K_L/L$ -unitaire  $\tau$  sur  $B_L$ ,  $e_2(\tau_L) = 0$  si et seulement si*

$$(B_L, \tau_L) = (Q_1, \text{can})_L \otimes_L (Q_2, \text{can})_L \otimes_L (K, \iota)$$

*où  $(Q_i, \text{can})_L$  sont des algèbres de quaternions sur  $L$  munies de leur involution symplectique.*

Autrement dit, la chaîne d'invariants cohomologiques construite permet de classier toutes les involutions unitaires de degré 2 et de donner un critère nécessaire et suffisant de décomposition en algèbres de quaternions pour le degré 4, comme l'invariant  $e_3$  pour les involutions symplectiques en degré 8 détecte la décomposabilité via le Théorème 1.1.30 et l'invariant  $e_2$  pour les involutions orthogonales en degré 4 classifie les involutions orthogonales par la Proposition 1.1.18 et, en degré 8, détecte la décomposabilité via le Théorème 1.1.19.

**Conclusion.** — Les chaînes d'invariants de Milnor permettent de déceler des propriétés de décompositions des involutions associées aux algèbres en termes d'involutions sur des algèbres de quaternions tout comme ils détectent qu'une forme quadratique est une  $n$ -forme de Pfister. Ils permettent aussi de classier quelques involutions suivant le degré de l'algèbre associée. Mais leur construction impose néanmoins des restrictions parfois trop lourdes, par exemple la non-existence d'une chaîne de degré 3 pour les involutions symplectiques de degré 4 mod 8. Pour cette raison, on introduit une notion plus faible de chaîne d'invariants, à savoir les chaînes d'invariants dits *relatifs*.

### 1.2. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs d'algèbres à involution

La première chaîne d'invariants cohomologiques de degré 3 fut une chaîne d'invariants de Milnor dit *relatifs* pour les involutions symplectiques. L'idée principale de ce type de chaînes d'invariants est la suivante. Lorsqu'il est impossible d'exprimer un invariant classique, en d'autres termes d'étudier les involutions données sans référentiel, impliquant une étude *absolue*, on se donne une involution et l'on tente plutôt de comparer toutes les involutions à l'involution fixée. Il s'agit dès lors d'une étude *relative* des involutions. Ceci permet de contourner l'absence d'invariant dit *absolu* pour le cas où le degré de  $A$  est  $4 \bmod 8$  par exemple.

**1.2.1. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs.** — L'idée principale des invariants dit *relatifs* étant de comparer tous les objets à un objet fixé, il convient de travailler avec la catégorie  $\mathfrak{Scts}^*$  à la place de  $\mathfrak{Scts}$ .

**Définition 1.2.1.** — Une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs de degré  $d$  sur un foncteur  $\mathbf{Base}_F : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Scts}^*$  est la donnée de foncteurs, pour  $0 \leq i \leq d$ ,

$$\mathbf{Base}_F^i : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Scts}^*$$

$$\mathbf{Coeff}_F^i : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Scts}^*$$

où  $\mathbf{Coeff}_F(L)^i$  est un groupe quotient de  $H^i(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$  vu comme ensemble, l'élément pointé étant l'élément nul. Si  $\xi_0$  désigne l'élément pointé de  $\mathbf{Base}_F(F)$ , on se donne aussi une suite de transformations naturelles de foncteurs

$$e_i^{\xi_0} : \mathbf{Base}_F^i \rightarrow \mathbf{Coeff}_F^i$$

tels que  $\mathbf{Base}_F^0 := \mathbf{Base}_F$  et  $\mathbf{Base}_F^i := \mathbf{Ker}(e_{i-1}^{\xi_0})$  pour tout  $0 \leq i \leq d$ . On le note  $\mathbf{e}^{\xi_0}$ . Les transformations naturelles  $e_i^{\xi_0}$  sont appelées des *invariants relatifs de degré  $i$* .

De façon similaire aux chaînes d'invariants cohomologiques, on définit les chaînes d'invariants cohomologiques relatifs triviales en  $d_0$  et les invariants cohomologiques relatifs *triviaux*.

**1.2.2. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs pour les formes quadratiques et hermitiennes.** — Comme pour le cadre absolu, on introduit une chaîne d'invariants cohomologiques *relatifs* pour les formes quadratiques et hermitiennes. On se fixe pour la suite  $q_0$  une  $F$ -forme quadratique de dimension  $n$ .

Soit

$$\mathbf{Quad}_{q_0} : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}^*$$

tels que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$$\mathbf{Quad}_{q_0}(L) = \mathbf{Quad}_{n,F}(L)$$

muni de l'élément pointé  $[q_{0_L}]$ .

**Définition 1.2.2.** — Soit donnée  $q_0$  une  $F$ -forme quadratique de dimension  $n$ . La chaîne d'invariants de Milnor canoniques relatifs à  $q_0$  de degré  $d$  notée  ${}_c\mathbf{e}^{q_0}$  est la donnée d'une suite de transformations naturelles

$${}_c e_i^{q_0} : \mathbf{Quad}_{q_0}^i \rightarrow \mathbf{H}^i$$

telle que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$${}_c e_i^{q_0}(q) := {}_c e_i(q - q_{0_L})$$

où  ${}_c\mathbf{e}$  est la chaîne d'invariants cohomologiques canoniques sur  $\mathbf{Quad}_{2n,F}$ , pour  $0 \leq i \leq d$ .

De même il est possible de définir un invariant pour les formes hermitiennes pour  $K$  une extension quadratique de  $F$  munie de son  $F$ -automorphisme non trivial (resp.  $Q$  une algèbre de quaternions sur  $F$  munie de son involution symplectique canonique).

Soit fixée  $h_0$  une  $(K, \iota)$ -forme hermitienne (resp.  $(Q, \text{can})$ -forme hermitienne) de dimension  $n$ .

On pose

$$\mathbf{Herm}_{h_0} : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}^*$$

tel que pour toute extension de corps  $L$  sur  $F$ ,

$$\mathbf{Herm}_{h_0}(L) = \mathbf{Herm}_{n,K/F}(L)$$

$$(\text{resp. } \mathbf{Herm}_{h_0}(L) = \mathbf{Herm}_{n,Q/F}(L))$$

muni de l'élément pointé  $[h_{0_L}]$ .

**Définition 1.2.3.** — Soit donnée une  $K$ -forme hermitienne  $h_0$  (resp. d'une  $Q$ -forme hermitienne) de dimension  $n$ . La chaîne d'invariants de Milnor canoniques relatifs à  $h_0$  de degré  $d$  est une suite de transformations naturelles

$${}_c^K e_i^{h_0} \text{ (resp. } {}_c^Q e_i^{h_0}) : \mathbf{Herm}_{h_0}^i \rightarrow \mathbf{H}_F^i$$

telle que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$

$${}_c^K e_i^{h_0}(h) := {}_c^K e_i(h - h_{0_L}) \text{ (resp. } {}_c^Q e_i^{h_0}(h) = {}_c^Q e_i(h - h_{0_L})).$$

où  ${}_c^K\mathbf{e}$  (resp.  ${}_c^Q\mathbf{e}$ ) est la chaîne d'invariants cohomologiques canoniques sur  $\mathbf{Herm}_{2n,K/F}$  (resp. sur  $\mathbf{Herm}_{2n,Q/F}$ ), pour  $0 \leq i \leq d$ .

L'introduction de ces invariants présente un intérêt non négligeable en termes de classification. Par la théorie des formes de Pfister, on a le

**Théorème 1.2.4.** — [Lam05, Hauptsatz 5.1] *Soit  $q$  une  $F$ -forme quadratique de dimension  $n$  sur  $F$  et  $d$  tel que  $n < 2^d$ . Si  ${}_c e_i^{q_0} (q_L) = 0$  pour tout  $0 \leq i \leq d$  alors les formes  $q_L$  et  $q_{0_L}$  sont isométriques.*

Autrement dit les chaînes d'invariants cohomologiques relatifs canoniques sur  $\mathbf{Quad}_{n,F}$  pour un entier  $d$  bien choisi classifient les formes quadratiques  $q$  sur  $F$ .

**Remarque.** — Si  $[q_0] \in \mathbf{Quad}_{n,F}^d(F)$ ,  $[h_0] \in \mathbf{Herm}_{n,K/F}^d(F)$  ou encore  $[h_0] \in \mathbf{Herm}_{n,Q/F}^d(F)$ , les chaînes d'invariants cohomologiques relatifs canoniques de degré  $d$  précédentes se construisent à partir de la chaîne d'invariants cohomologiques canoniques. Ce procédé peut se généraliser de la façon suivante.

**Définition 1.2.5.** — A partir de toute chaîne d'invariants cohomologiques  $\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{Base}_F$  à valeurs dans  $\mathbf{Coeff}_F^i$ , il est possible de construire une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs comme suit. Fixons un élément  $\xi_0$  dans  $\mathbf{Base}_F(F)$ . Pour toute extension de corps  $L$  et tout élément  $\xi$  de  $\mathbf{Base}_F^i(L)$ , définissons les applications

$$e_i^{\xi_0}(\xi) := e_i(\xi) - e_i(\xi_{0,L}).$$

qui forment une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs. Cette chaîne d'invariants est appelée *la chaîne d'invariants cohomologiques relatifs à  $\xi_0$  issue de  $\mathbf{e}$*  et elle est notée  $\mathbf{e}^{\xi_0}$ .

**1.2.3. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs d'algèbres à involution orthogonale.** — On se fixe  $(A, \sigma_0)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré  $n$  munie d'une involution orthogonale. L'objectif de cette section est de construire une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\sigma_0$  de degré 2 à valeurs dans  $\mathbf{M}_A^i$ . Pour que les invariants cohomologiques successifs soient compatibles avec les invariants  ${}_c \mathbf{e}$ , on demandera que l'involution  $\sigma_0$  vérifie la condition suivante :

*Pour tout  $L \in \mathbf{Fields}_F$  déployant  $A$  et toute  $L$ -forme quadratique  $q_0$  telle que  $(A, \sigma_0)_L = Ad_{q_0}$ , on a  $[q_0] \in \mathbf{Quad}_{n,F}^d(L)$ .*

**1.2.3.1. Définition de  $\mathbf{Orth}_{\sigma_0}$ .** — Soit le foncteur

$$\mathbf{Orth}_{\sigma_0} : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}^*$$

qui à tout élément  $L$  de  $\mathfrak{Fields}_F$  associe l'ensemble  $\mathbf{Orth}_A(L)$  muni de l'élément pointé  $[\sigma_{0_L}]$ , la classe de  $L$ -isomorphisme de  $\sigma_{0_L}$ .

**Définition 1.2.6.** — Soit donnée  $\sigma_0$  une involution orthogonale sur  $A$ . Une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\sigma_0$  de degré  $d$  est la donnée d'une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs sur  $\mathbf{Orth}_{\sigma_0}$  de degré  $d$  vérifiant la condition suivante. Pour tout  $0 \leq i \leq d$ , toute extension  $L$  du corps  $F$  qui déploie  $A$ ,  $\mathbf{Coeff}_F^i(L) = \mathbf{H}_F^i(L)$ . De plus pour toutes les  $L$ -formes quadratiques  $q_0$  telles que  $(A_L, \sigma_{0,L}) = \text{Ad}(q_0)$ , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Quad}_{q_0}^i & \xrightarrow{ad} & \mathbf{Orth}_{\sigma_{0,L}}^i \\ & \searrow \scriptstyle {}_c e_i^{q_0} & \swarrow \scriptstyle e_i^{\sigma_0} \\ & \mathbf{H}_L^i & \end{array}$$

est commutatif.

**Remarque (Condition sur  $\sigma_0$ ).** — A priori, la condition sur l'involution  $\sigma_0$  peut sembler très restrictive mais elle s'avère nécessaire si l'on souhaite s'assurer d'une bonne définition des invariants de Milnor relatifs. En effet, pour tout  $\sigma \in \mathbf{Orth}_F^i(F)$ , soit  $L$  un corps déployant  $A$ , il existe  $q_0$  et  $q$  dans  $\mathbf{Quad}_{\deg(A),F}^i(L)$  tels que  $\sigma_L = \text{ad}_{\langle \lambda \rangle \cdot q}$  et  $\sigma_{0,L} = \text{ad}_{\langle \lambda_0 \rangle \cdot q_0}$  pour toutes valeurs  $\lambda$  et  $\lambda_0 \in L$ . L'invariant est bien défini si et seulement si pour tout choix de  $\lambda$  et  $\lambda_0$ ,  ${}_c e_i^{\langle \lambda_0 \rangle \cdot q_0}(\langle \lambda \rangle \cdot q) = {}_c e_i^{q_0}(q)$ . Ceci entraîne

$$\begin{aligned} {}_c e_i^{\langle \lambda_0 \rangle \cdot q_0}(\langle \lambda \rangle \cdot q) - {}_c e_i^{q_0}(q) &= {}_c e_i(\langle \lambda \rangle \cdot q - \langle \lambda_0 \rangle \cdot q_0) - {}_c e_i(q - q_0) \\ &= {}_c e_i(q - \langle \lambda \lambda_0 \rangle \cdot q_0) - {}_c e_i(q - q_0) \\ &= {}_c e_i(q - \langle \lambda \lambda_0 \rangle \cdot q_0 - q + q_0) \\ &= {}_c e_i(\langle 1, -\lambda \lambda_0 \rangle \cdot q_0) \\ &= (\lambda \lambda_0) \cdot {}_c e_{i-1}(q_0). \end{aligned}$$

Autrement dit la valeur de l'invariant ne dépend pas du choix de  $\lambda$  et  $\lambda_0$  si et seulement si  ${}_c e_{i-1}(q_0) = 0$ . Et donc  $[q_0] \in \mathbf{Quad}_{\deg(A),F}^i(L)$ .

Il est possible dans certain cas d'éviter ces restrictions en modifiant le foncteur  $\mathbf{Base}_F$ . On évoquera des exemples dans 1.2.3.4 et 1.4.1.

Une autre façon de contourner le problème serait de quotienter  $\mathbf{Coeff}_F^i(L)$  par  $e_i(\sigma_{0,L}) \cdot L^\times$ , mais j'ignore la pertinence de ce genre d'invariants.

**Proposition 1.2.7.** — Pour  $d = 0, 1, 2$ , les chaînes d'invariants de Milnor relatifs à une involution orthogonale de degré  $d$  à valeurs dans  $\mathbf{M}_A^i$  sont uniques.

*Démonstration.* — On peut reprendre le raisonnement du cas des chaînes d'invariants de Milnor pour les involutions orthogonales.  $\square$

*1.2.3.2. Les invariants  $e_0^{\sigma_0}$ ,  $e_1^{\sigma_0}$ , et  $e_2^{\sigma_0}$ .* — Comme les chaînes d'invariants de Milnor relatifs à  $\sigma_0$  de degré 0, 1 et 2 sont uniques, soit  $\mathbf{e}$  la chaîne d'invariants de Milnor pour les involutions orthogonales définie précédemment. La chaîne d'invariants cohomologiques relative à  $\sigma_0$  issue de  $\mathbf{e}$  est l'unique chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\sigma_0$ .

Ceci donne comme chaîne d'invariants de Milnor relatifs

$$\begin{aligned} e_0^{\sigma_0}(\sigma) &:= \dim(A) - \dim(A) \bmod 2 = 0, \\ e_1^{\sigma_0}(\sigma) &:= \text{disc}(\sigma) - \text{disc}(\sigma_0) \text{ et} \\ e_2^{\sigma_0}(\sigma) &:= [C(A, \sigma)] - [C(A, \sigma_0)]. \end{aligned}$$

*1.2.3.3. Invariant relatif  $e_3^{\sigma_0}$ .* — Quéguiner-Mathieu et Tignol ont construit un invariant de Milnor relatif pour les involutions orthogonales de degré 3 sur une algèbre simple centrale de degré 8 en utilisant la trialité [QMT12] de la façon suivante.

Soit  $\sigma_0$  et  $\sigma$  deux involutions orthogonales sur une  $F$ -algèbre simple centrale  $A$  représentant des éléments de  $\mathbf{Orth}_{\sigma_0}^3(F)$ . Cela signifie que leurs discriminants sont triviaux et que leurs algèbres de Clifford  $C(A, \sigma_0)$  et  $C(A, \sigma)$  sont le produit cartésien  $C^+ \times C^-$  où  $C^+ \sim 0$  et  $C^- \sim A$ . Si l'on considère l'involution canonique sur  $C(A, \sigma_0)$ , elle peut s'écrire

$$(C(A, \sigma_0), \text{can}) = (A, \sigma_0) \times \text{Ad}_{q_0}$$

pour une  $F$ -forme quadratique représentant un élément de  $\mathbf{Quad}_F^3(F)$  définie à similitude près. De même

$$C(A, \sigma), \text{can}) = (A, \sigma) \times \text{Ad}_q.$$

Alors

**Proposition 1.2.8.** — [QMT12, Définition 1.4] *Soit  $\sigma$ ,  $\sigma_0$ ,  $q$  et  $q_0$  comme ci-dessus. L'application*

$$e_3(\sigma/\sigma_0) = {}_c e_3^{q_0}(q)$$

*définit un invariant de Milnor relatif de degré 3.*

Alors qu'il était naturel d'espérer que cet invariant classifie les involutions orthogonales sur  $A$  de second invariant trivial, les deux auteurs ont construit deux involutions  $\sigma$  et  $\sigma_0$  vérifiant l'égalité  $e_3(\sigma/\sigma_0) = 0$  mais non-isomorphes.

**Remarque.** — Quéguiner-Mathieu et Tignol ont aussi construit un invariant relatif pour les involutions orthogonales dans [QMT] que l'on peut déduire de l'invariant de Rost sur  $H^1(F, \text{Spin}(A, \sigma_0))$  généralisant le procédé de Garibaldi [Gar09]. Dans le cas où l'algèbre  $A$  est de degré 8, cet invariant coïncide avec l'invariant relatif construit dans [QMT12].

1.2.3.4. *Cas particulier où  $e_0(\sigma_0) \neq 0$ .* — Si  $\sigma$  est une involution telle que  $e_0(\sigma) \neq 0$ , l'algèbre  $A$  est de degré  $n$  impair et se trouve être déployée par [KMRT98, Corollaire 2.8]. Autrement dit il existe une  $F$ -forme quadratique  $q'$  représentant un élément de  $\mathbf{Quad}_{n,F}(F)$  et  $(A, \sigma) = \text{Ad}_{q'}$ . A priori on ne peut construire de chaîne d'invariants de Milnor relatifs de degré supérieur. Mais il existe une unique  $F$ -forme quadratique  $q$  telle que  $\text{disc}(q - q_0) = F^{\times^2}$  et  $(A, \sigma) = \text{Ad}_q$  (prendre n'importe quelle forme  $q'$  telle que  $\text{ad}_{q'} = \sigma$  et poser  $q = \left\langle \frac{\text{disc}(q')}{\text{disc}(q_0)} \right\rangle \cdot q'$ ).

On peut alors construire une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs ayant presque les caractéristiques d'une chaîne d'invariants de Milnor relatifs (on appellera ce genre de chaînes une chaîne d'invariants de Milnor *faiblement relatifs*).

Pour cela, on considère la chaîne d'invariants de Milnor canoniques relatifs à  $q_0$  en remplaçant  $\mathbf{Quad}_{q_0}$  par  $\mathbf{Quad}_{q_0}^2$ .

La chaîne d'invariants de Milnor *faiblement relatifs* à  $\sigma_0$  est alors définie comme suit. Les invariants  $f_0^{\sigma_0}$  et  $f_1^{\sigma_0}$  seront les transformations naturelles nulles.

Soit  $q_0$  l'unique  $F$ -forme quadratique telle que  $\text{Ad}_{q_0} = (A, \sigma_0)$  et  $\text{disc}(q_0) = F^{\times^2}$ , pour  $i \leq 2$  et toute involution  $\sigma$  telle que  $[\sigma] \in \mathbf{Orth}_{\sigma_0}^i(L)$ , on pose

$$f_i^{\sigma_0}(\sigma) = {}_c c_i^{q_0}(q)$$

où  $q$  est l'unique  $F$ -forme quadratique telle que  $q \in \mathbf{Quad}_{q_0}^2(L)$  et  $\text{Ad}_q = (A_L, \sigma)$ .

Cette chaîne n'est donc pas une chaîne d'invariants de Milnor relatifs car pour  $i = 0, 1$ , les invariants relatifs n'ont pas les propriétés souhaitées. Par contre pour  $i \geq 2$ , les invariants relatifs coïncident avec les invariants de Milnor canoniques relatifs pour les formes quadratiques. D'où l'appellation *faiblement relatif*.

**Corollaire 1.2.9.** — [Lam05, Hauptsatz 5.1] *Soit  $\deg(A) = 2k + 1$  et  $d$  un entier tel que  $2^d \leq 2k + 1 < 2^{d+1}$ . Alors  $\sigma$  et  $\sigma_0$  deux involutions orthogonales sur  $A$  sont conjuguées si et seulement si  $f_i^{\sigma_0}(\sigma) = 0$  pour tout  $i \in \{2, \dots, d\}$ .*

**Remarque.** — Ce corollaire et le Corollaire 1.4.3 expliquent pourquoi l'on introduit ces chaînes d'invariants cohomologiques qui ne sont pas des chaînes d'invariants de Milnor.

**1.2.4. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs pour les involutions symplectiques.** — Voici à présent la construction du premier invariant de degré 3 dans la littérature concernant les involutions symplectiques. Soit fixé  $(A, \gamma_0)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré  $2m$  munie d'une involution symplectique, ce qui entraîne que  $A$  est de degré pair. Le but de la section est



de construire une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\gamma_0$  de degré 3 à valeurs dans  $\mathbf{H}_F^i$ .

Pour construire une chaîne d'invariants de Milnor relatifs de degré  $d$ , on part d'une involution symplectique  $\gamma_0$  respectant la condition suivante :

*Pour tout corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  tel que  $A_L$  est d'indice 2, pour toute  $L$ -algèbre de quaternions  $Q$  et toute forme  $Q$ -hermitienne  $h_0$  telles que  $(A, \gamma_0)_L = \text{Ad}_{h_0, (Q, \text{can})}$ , on a  $[h_0] \in \mathbf{Herm}_{n, Q/F}^d(L)$ .*

1.2.4.1. *Définition de  $\mathbf{Symp}_{\gamma_0}$ .* — Soit

$$\mathbf{Symp}_{\gamma_0} : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathbf{Sets}^*$$

le foncteur tel que pour tout  $L$  dans  $\mathfrak{Fields}_F$ , l'ensemble pointé  $\mathbf{Symp}_{\gamma_0}(L)$  soit l'ensemble  $\mathbf{Symp}_A(L)$  muni de l'élément pointé  $[\gamma_{0_L}]$  qui est la classe de  $L$ -isomorphisme de  $\gamma_{0_L}$ .

**Définition 1.2.10.** — Une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\gamma_0$  de degré  $d$  est la donnée d'une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs sur  $\mathbf{Symp}_{\gamma_0}$  de degré  $d$  vérifiant la condition suivante. Pour  $0 \leq i \leq d$  et pour toute extension  $L$  du corps  $F$  telle que  $A_L$  est Brauer-équivalente à  $Q$ ,  $\mathbf{Coeff}_F^i(L) = \mathbf{H}_F^i(L)$ . De plus, pour toute  $(Q, \text{can})$ -forme hermitienne  $h_0$  telle que  $\sigma_{0_L} = \text{ad}_{h_0}$ , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Herm}_{m, Q}^i & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathbf{Symp}_{\gamma_{0_L}}^i \\ & \searrow \text{Q } e_i^{h_0} & \swarrow e_i \\ & \mathbf{H}_L^i & \end{array}$$

est commutatif.

Comme dans le cadre des chaînes d'invariants de Milnor pour les involutions symplectiques, on a la

**Proposition 1.2.11.** — *Pour  $d = 0, 1$  les chaînes d'invariants de Milnor relatifs pour les involutions symplectiques de degré  $d$  à valeurs dans  $\mathbf{H}_F^i$  sont uniques.*

1.2.4.2. *Les invariants  $e_0^{\gamma_0}$  et  $e_1^{\gamma_0}$ .* — Soit  $\mathbf{e}$  la chaîne d'invariants de Milnor définie précédemment pour les involutions symplectiques. Comme les chaînes d'invariants de Milnor relatifs à  $\gamma_0$  sont uniques en degré 0 et 1, ces chaînes sont les chaînes d'invariants cohomologiques relatifs à  $[\gamma_0]$  issues de  $\mathbf{e}$ , triviales en 0 et 1.

*1.2.4.3. L'invariant  $e_2^{\gamma_0}$ .* — Une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\gamma_0$  de degré 2 est définie par son image dans le cas déployé modulo la classe de  $A$ . Or  $q_h - q_{h_0}$  est dans  $I^3 F$  dans le cas déployé. La chaîne est dès lors soit triviale en 2 soit définie par  $e_2(\gamma) = [A_L]$ . Comme c'est aussi une chaîne de Milnor, pour tout  $L$  tel que  $\text{ind} A_L = 2$ ,  $e_2^{\gamma_0}(\gamma_L) = {}_c e_2^Q(h) - {}_c e_2^Q(h_0)$ , où  $(A, \gamma_0)_L = \text{Ad}_{h_0, (Q, \text{can})}$  et  $(A, \gamma)_L = \text{Ad}_{h, (Q, \text{can})}$ . Or  ${}_c e_2$  dépend uniquement de la classe de  $A$  et est constante. Donc  $e_2^{\gamma_0}(\gamma_L) = 0$ . De  $[A_L] = [Q]$  qui est non nulle en général, on en déduit la trivialité en 0, 1 et 2 des chaînes d'invariants de Milnor relatifs à  $\gamma_0$  de degré  $d \geq 2$ .

*1.2.4.4. L'invariant  $e_3^{\gamma_0}$ .* — A présent, voici un exemple où la notion de chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\gamma_0$  permet de combler une lacune de la chaîne d'invariants de Milnor. On considère le discriminant des involutions symplectiques créé dans [BMT03] dont voici un résumé de la construction et de ses propriétés.

Dans le cadre des involutions symplectiques, le schéma en groupe  $\text{Sp}(A, \gamma_0)$  est défini par

$$\text{Sp}(A, \gamma_0)(E) = \{x \in A_E \mid \gamma_0(x)x = 1\}$$

pour n'importe quelle  $F$ -algèbre  $E$  commutative. De plus étant donnée l'égalité suivante [KMRT98, 29.23]

$$H^1(L, \text{GSp}(A, \gamma_0)) = \mathbf{Symp}_{\gamma_0}(L)$$

en tant qu'ensemble pointé, pour toute  $F$ -algèbre simple centrale  $A$  et toute extension de corps  $L$  de  $F$ , définir  $e_3$  sur  $\mathbf{Symp}_{\gamma_0}(L)$  revient à le faire sur  $H^1(L, \text{GSp}(A, \gamma_0))$ . L'utilisation de la suite exacte de groupes algébriques suivantes

$$1 \longrightarrow \text{Sp}(A, \gamma_0) \longrightarrow \text{GSp}(A, \gamma_0) \xrightarrow{\mu} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

permet de lier  $\text{Inv}^3(\text{GSp}(A, \gamma_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  et  $\text{Inv}^3(\text{GSp}(A, \gamma_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ . De cette manière, on définit l'invariant sur  $H^1(L, \text{Sp}(A, \gamma_0))$ . Soit  $\text{Nrp}_{\gamma_0}$  la norme Pfaffienne de  $\gamma_0$  définie dans [KMRT98, 2.10] par exemple, ainsi que

$$\text{Sym}(A, \gamma_0) = \{s \in A \mid \gamma_0(s) = s\}.$$

On pose alors  $\text{Sym}(A, \gamma_0)^\times = \text{Sym}(A, \gamma_0) \cap A^\times$ . On a [KMRT98, 29.24]

$$H^1(L, \text{Sp}(A, \gamma_0)) \simeq \text{Sym}(A, \gamma_0)^\times / \sim$$

où  $s \sim s'$  s'il existe  $b$  dans  $F^\times$  tel que  $s = bs\gamma_0(b)$ . L'invariant relatif  $e_3^{\gamma_0}$  est défini comme étant

$$e_3^{\gamma_0}(\gamma) := (\text{Nrp}_{\gamma_0}(s)) \cdot [A]$$

où  $s$  appartient à  $\text{Sym}(A, \gamma_0)^\times$  tel que  $\gamma_0 = \text{int}(s) \circ \gamma$ .

**Remarque 1.2.12.** — L'invariant est noté  $\Delta_{\gamma_0}$  dans [BMT03].

Il est démontré que cet invariant est bien un invariant de Milnor relatif à  $\gamma_0$  de degré 3 à la condition que le degré de  $A$  soit divisible par 4. Comme le second invariant de Milnor est non nul pour  $A$  de degré non divisible par 4, cette restriction n'en est pas une.

Cet invariant possède des propriétés naturelles tel que la relation de Chasles suivante  $e_3^{\gamma_0}(\gamma_1) = e_3^{\gamma_2}(\gamma_1) + e_3^{\gamma_0}(\gamma_2)$  pour toute extension  $L$  de corps de  $F$  et tout triplet  $\gamma_i$  d'involutions symplectiques sur  $A_L$  et permet de classifier les involutions symplectiques de degré 4 sur une algèbre  $A_L$  donnée.

**Proposition 1.2.13.** — [GPT09, Théorème A] *Soit  $A$  une algèbre de degré  $2m$ ,  $L$  une extension de corps de  $F$  et  $\gamma_0$  et  $\gamma$  deux involutions symplectiques sur  $A_L$ . Si  $m$  est divisible par 4,*

$$e_3^{\gamma_0}(\gamma) = e_3(\gamma) - e_3(\gamma_0).$$

**Proposition 1.2.14.** — [KMRT98, Théorème 16.19] *Si  $A$  est de degré 4,  $\gamma$  et  $\gamma_0$  sont conjuguées si et seulement si  $e_3^{\gamma_0}(\gamma) = 0$ .*

**1.2.5. Chaîne d'invariants cohomologiques relatifs d'algèbres à involution unitaire.** — Soit fixée  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale et  $\tau_0$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$ . On construit durant cette section une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 2 à valeurs dans  $\mathbf{M}_{B,K}^i$ .

Pour construire une chaîne d'invariants de Milnor relatifs de degré  $d$ , on part d'une involution  $K/F$ -unitaire  $\tau_0$  qui respecte la condition suivante :

*Pour tout corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  tel que  $A_L$  soit déployée, pour toute  $K_L$ -forme hermitienne  $h_0$  telle que  $(B, \tau_0)_L = \text{Ad}_{h_0, (K, \iota)}$ , on a  $[h_0] \in \mathbf{Herm}_{n, K/F}^d(L)$ .*

**1.2.5.1. Définition de  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}$ .** — Soit le foncteur

$$\mathbf{Unit}_{\tau_0} : \mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathfrak{Sets}^*$$

tel que pour toute extension de corps  $L$  de  $F$ ,

$$\mathbf{Unit}_{\tau_0}(L) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Les involutions } K_L/L\text{-unitaires sur } B_L \\ \text{à } L \text{ isomorphisme près} \end{array} \right\}$$

avec pour élément pointé la classe d'isomorphisme de  $\tau_0$ .

**Définition 1.2.15.** — Une chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré  $d$  est la donnée d'une chaîne d'invariants cohomologiques  $e_i : \mathbf{Unit}_{\tau_0}^i \rightarrow \mathbf{Coeff}_F^i$  vérifiant la condition suivante. Pour  $0 \leq i \leq d$  et pour tout corps  $L$

déployant  $B$ ,  $\mathbf{Coeff}_F^i(L) = \mathbf{M}_{B,K}^i(L)$ . De plus, pour toute  $L_K$ -forme hermitienne  $h_0$  telle que  $\tau_{0L} = \text{ad}_{h_0}$ , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Herm}_{\deg B, K_L/L}^i & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathbf{Unit}_{(B, \tau_0)_L}^i \\ & \searrow \scriptstyle K_c e_i & \swarrow \scriptstyle e_i \\ & \mathbf{M}_{B_L, K_L}^i & \end{array}$$

est commutatif.

**Proposition 1.2.16.** — Pour  $d = 0, 1, 2$ , les chaînes d'invariants de Milnor relatifs à une involution unitaire de degré  $d$  à valeurs dans  $\mathbf{M}_{B,K}^i$  sont uniques.

*Démonstration.* — On peut reprendre le raisonnement du cas des chaînes d'invariants de Milnor pour les involutions unitaires.  $\square$

1.2.5.2. *Les invariants  $e_0^{\tau_0}$  et  $e_1^{\tau_0}$ .* — Ces invariants étant définis par leur valeur dans  $F_{R_{K/F}}(SB(B))$ , on regarde ce qu'il se passe sur les formes hermitiennes. Soit  $h$  et  $h_0$  deux formes hermitiennes adjointes à  $\tau$  et  $\tau_0$ . La forme  $q_h - q_{h_0}$  s'écrit alors

$$q_h - q_{h_0} = \langle a_1, \dots, a_n, -a_{1,0}, \dots, -a_{n,0} \rangle \langle\langle \delta \rangle\rangle.$$

Donc la forme  $q_h - q_{h_0}$  est dans  $I^2 F_{R_{K/F}}(SB(B))$ . Autrement dit

$$e_i^{\tau_0}(\tau) = {}_c e_i(q_h - q_{h_0}) = 0$$

pour  $i = 0, 1$ . Les chaînes d'invariants de Milnor sont par conséquent triviales en 0 et 1.

1.2.5.3. *L'invariant  $e_2^{\tau_0}$ .* —

**Proposition 1.2.17.** — Si  $B$  est une  $K$ -algèbre simple centrale de degré pair, la chaîne d'invariants de Milnor relatifs a pour second invariant

$$e_2^{\tau_0}(\tau) = [D(B_L, \tau)] - [D(B_L, \tau_{0L})].$$

*Démonstration.* — La chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 2 étant unique, elle est la chaîne d'invariants relatifs à  $\tau_0$  issue de la chaîne d'invariants de Milnor pour les involutions unitaires. Autrement dit

$$\begin{aligned} e_2^{\tau_0}(\tau) &= e_2(\tau) - e_2(\tau_{0L}) \\ &= [D(B_L, \tau)] - [D(B_L, \tau_{0L})]. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 1.2.18.** — Si  $B$  est une  $K$ -algèbre simple centrale de degré impair, la chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré  $d$  est triviale en  $d_0$  pour tout  $d_0 \leq d$  si  $K$  n'est pas un corps, n'existe pas sinon.

*Démonstration.* — Comme la chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 2 n'existe que lorsque  $\tau_0$  est l'adjoint d'une forme hermitienne  $h_0$  sur un corps  $L$  déployant  $B$  telle que  $[h_0] \in \mathbf{Herm}_{K/F}^1(L)$ , on doit avoir  ${}^K_c e_1(h_0) = (\delta) = 0$ . Si ceci est vrai pour tout corps déployant  $L$ ,  $K$  n'est pas un corps et la chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  est triviale.  $\square$

Cette chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  hérite des propriétés de la chaîne d'invariants de Milnor pour les involutions unitaires.

**Proposition 1.2.19.** — [LT99, Proposition 3] *Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré 2,  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$ . Alors  $\tau$  est conjuguée à  $\tau_0$  si et seulement si  $e_2^{\tau_0}(\tau) = 0$ .*

### 1.3. Quelques rappels sur l'invariant de Rost

Dans [GMS03], on construit un invariant pour certains groupes algébriques nommé l'invariant de Rost. Le but de cette section n'est pas de rappeler sa (longue) construction, le lecteur intéressé pourra consulter [GMS03], mais d'énoncer brièvement ses propriétés. L'importance de l'invariant de Rost résulte du fait qu'il permet de construire des invariants relatifs de degré 3 pour les involutions symplectiques [BMT03], orthogonales [QMT] et unitaires, Proposition 2.2.3 ou Proposition 4.2.1.

Pour tout groupe algébrique  $G$ , on note  $\mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$  l'ensemble de toutes les transformations naturelles de  $H^1(*, G)$  vers  $H^d(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$ , où  $H^1(*, G)$  et  $H^d(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$  sont vus comme des foncteurs  $\mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathbf{Sets}^*$ . Comme  $H^d(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$  peut être vu comme un foncteur de  $\mathfrak{Fields}_F \rightarrow \mathbf{AbelianGroups}$ , l'ensemble  $\mathrm{Inv}^d(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$  est naturellement muni d'une structure de groupes abéliens. De plus

**Théorème 1.3.1.** — [GMS03, Théorème 9.11] *Pour tout groupe absolument simple simplement connexe  $G$ , il existe un générateur canonique du groupe  $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  appelé l'invariant de Rost. En outre, l'ordre du groupe est fini.*

Soit noté  $R_G$  l'invariant de Rost de  $H^1(*, G)$  et  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ . Tout morphisme de groupes algébriques  $\alpha : G \rightarrow G'$  induit une transformation naturelle  $\alpha^*(R_G)(L) : H^1(L, G') \rightarrow H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ . Par le Théorème précédent, il existe un entier  $n_\alpha(L)$  tel que  $\alpha^*(R_{G'})(L) = n_\alpha(L) \cdot R_G(L)$ . On a alors le résultat suivant [GMS03, Proposition 7.9]

**Proposition 1.3.2.** — *L'entier  $n_\alpha(L)$  est indépendant du corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ .*

Cet entier  $n_\alpha$  est alors appelé le *multiplicateur de Rost de  $\alpha$* .

**Remarque.** — Pour toute forme quadratique  $q_0$ , le groupe algébrique  $\text{Spin}_{q_0}$  est absolument simple simplement connexe et l'on notera  $R_{q_0}$  l'invariant de Rost de  $\text{Spin}_{q_0}$ .

Pour toute involution orthogonale  $\sigma_0$  sur une  $F$ -algèbre simple centrale  $A$ , le groupe algébrique  $\text{Spin}(A, \sigma_0)$  est absolument simple simplement connexe et l'on notera  $R_{\sigma_0}$  l'invariant de Rost de  $\text{Spin}(A, \sigma_0)$ .

Pour toute involution symplectique  $\gamma_0$  sur une  $F$ -algèbre simple centrale  $A$ , le groupe algébrique  $\text{Sp}(A, \gamma_0)$  est absolument simple simplement connexe et l'on notera  $R_{\gamma_0}$  l'invariant de Rost de  $\text{Sp}(A, \gamma_0)$ .

Pour toute involution  $K/F$ -unitaire  $\tau_0$  sur une  $K$ -algèbre simple centrale  $B$ , le groupe algébrique  $\text{SU}(B, \tau_0)$  est absolument simple simplement connexe et l'on notera  $R_{\tau_0}$  l'invariant de Rost de  $\text{SU}(B, \tau_0)$ .

**Proposition 1.3.3.** — Pour toute  $F$ -forme quadratique  $q_0$ ,  $R_{q_0} = {}_c e_3^{q_0}$ .

On a aussi les résultats suivants concernant l'ordre des invariants de Rost  $R_{\sigma_0}$ ,  $R_{\gamma_0}$  et  $R_{\tau_0}$  en fonction des algèbres simples centrales  $A$  et  $B$  [GMS03, Appendice B].

**Proposition 1.3.4.** — Pour  $\sigma_0$  représentant un élément de  $\mathbf{Orth}_A^2(F)$ , l'ordre de  $R_{\sigma_0}$  est

- 2 si  $A$  est déployée ;
- 2 si  $\deg(A) = 8$  et  $e_2(\sigma_0) = 0$  ;
- 4 dans les autres cas.

**Proposition 1.3.5.** — Pour  $\gamma_0$  représentant un élément de  $\mathbf{Symp}_A^1(F)$ , l'ordre de  $R_{\gamma_0}$  est

- 1 si  $A$  est déployée ;
- 2 dans les autres cas.

**Proposition 1.3.6.** — Pour  $\tau_0$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^2(F)$ , l'ordre de  $R_{\tau_0}$  est

- $\exp(B)$  si  $\exp(B) = \deg(B) = 2^n$  ;
- $\exp(B)$  si  $2\exp(B) = \deg(B) = 2^n$  et  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$  ;
- $2\exp(B)$  dans les autres cas.

#### 1.4. Chaîne d'invariants de Milnor faiblement relatifs pour les algèbres à involution unitaire de degré impair

Dans le cadre des algèbres de degré impair, il n'existe pas de chaîne d'invariants de Milnor relatifs car la forme hermitienne associée à une involution

unitaire dans le cas déployé n'est en général pas dans  $I^2F$ . Par contre, on peut construire une chaîne d'invariants de Milnor *faiblement relatifs*. On entend par *faiblement relatifs*, une chaîne d'invariants cohomologiques relatifs qui coïncide dans le cas déployé avec la chaîne d'invariants de Milnor relatifs canoniques sur  $\mathbf{Herm}_{h_0}^i$  pour un certain  $i \geq 1$  et certaine forme hermitienne  $h_0$ .

**1.4.1. Chaîne d'invariants de Milnor *faiblement relatifs* issue de l'invariant de Rost.** — [KMRT98, Exemple 31.45] L'invariant de Rost sur  $\mathrm{PGU}(D, \theta_0)$  permet de construire une chaîne d'invariants de Milnor de degré  $2m + 1$  *faiblement relatifs* à  $\theta_0$  de la façon suivante.

Soit fixée une involution  $K/F$ -unitaire  $\theta_0$  sur  $D$ , une  $K$ -algèbre de degré  $2m + 1$ . On pose  ${}^Rf_0^{\theta_0}$ ,  ${}^Rf_1^{\theta_0}$  et  ${}^Rf_2^{\theta_0}$  les invariants triviaux sur  $\mathbf{Unit}_{\theta_0}$ . Pour le troisième invariant, soit  $\theta$  une involution unitaire sur  $D$ . Il existe  $s \in \mathrm{Sym}(D, \theta_0)$  et  $\lambda \in F^\times$  tels que  $\mathrm{Int}(s) \circ \theta_0 = \theta$  et  $\mathrm{Nrd}_D(s) = \lambda$ . Alors  $\mathrm{Nrd}_D(\lambda s) = \lambda^{2m+1} \mathrm{Nrd}_D(s) = \lambda^{2m+2}$ . Donc  $(\mathrm{Nrd}_D(s)s, \mathrm{Nrd}_D^{m+1}(s))$  représente un élément  $\xi_\theta$  de  $H^1(F, \mathrm{SU}(D, \theta_0))$  tel que l'image de  $\xi_\theta$  par le morphisme

$$H^1(F, \mathrm{SU}(D, \theta_0)) \rightarrow H^1(F, \mathrm{PGU}(D, \theta_0))$$

soit la classe représentée par  $\theta$ . Alors en posant

$${}^Rf_3^{\theta_0}(\theta) = R_{\theta_0}(\xi_\theta) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D])$$

on obtient un invariant relatif de degré 3, indépendant du choix de  $\xi_\theta$  (pour des raisons similaires à celles mentionnées dans la démonstration de la Proposition 2.2.3).

La chaîne d'invariants cohomologiques relatifs ainsi construite coïncide sur tout corps  $L$  déployant  $D$  avec la chaîne d'invariants relatifs de Minor canoniques sur  $\mathbf{Herm}_{h_0}^3$  avec  $h_0$  la seule  $(L_K, \iota)$ -forme hermitienne telle que  $\theta_{0_L} = \mathrm{ad}_{h_0}$  représentant un élément de  $\mathbf{Herm}_{2m+1, K/F}^3(L)$  (cette forme est unique car elle est de dimension impaire et de second invariant trivial).

**1.4.2. Chaîne d'invariants de Milnor *faiblement relatifs* pour les algèbres à involution unitaire de degré 3.** — Voici une autre chaîne d'invariants de Milnor *faiblement relatifs* de degré 3 digne d'être mentionnée qui classe les involutions unitaires sur les algèbres de degré 3 et qui peut aussi se déduire de l'invariant de Rost.

**Définition 1.4.1.** — Soit  $D$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré 3 et  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $D$ . La forme quadratique  $Q_\tau$  sur  $\mathrm{Sym}(D, \tau)$  est définie par

$$Q_\tau(x) = \mathrm{Trd}(x^2) \text{ pour } x \in \mathrm{Sym}(D, \tau).$$

Par [KMRT98, Proposition 11.22]

$$Q_\tau = \langle 1, 1, 1 \rangle \perp \langle 2 \rangle \cdot \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q_\tau$$

où  $q_\tau$  est une  $F$ -forme quadratique de dimension 3 et de déterminant 1. La forme

$$\pi(\tau) = \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q_\tau \perp \langle\langle \delta \rangle\rangle$$

est uniquement définie par  $\tau$  et est une 3-forme de Pfister.

Si  $(D, \tau)$  une  $K$ -algèbre simple centrale déployée munie d'une involution  $K/F$ -unitaire, il existe  $h$  une  $(K, \iota)$ -forme hermitienne de dimension 3 telle que  $\text{Ad}_h = (D, \tau)$ . Soit  $a_1, a_2$  et  $a_3 \in F^\times$  tels que  $h = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_K$ . Par [KMRT98, Propositions 11.14 et 11.13]

$$Q_\tau = \langle 1, 1, 1 \rangle \perp 2 \cdot \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot \langle a_1 a_2, a_2 a_3, a_1 a_3 \rangle$$

et

$$\pi(\tau) = \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot \langle\langle -a_1 a_2, -a_1 a_3 \rangle\rangle.$$

Soit  $\tau'$  une autre involution  $K/F$ -unitaire sur  $D$  telle que  $\pi(\tau') = \pi(\tau)$ . Il existe donc  $a'_1, a'_2, a'_3 \in F^\times$  tels que pour  $h' = \langle a'_1, a'_2, a'_3 \rangle$ ,  $\text{ad}_{h'} = \tau'$ . Par le même calcul énoncé ci-dessus,

$$\pi(\tau') = \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot \langle\langle -a'_1 a'_2, -a'_1 a'_3 \rangle\rangle.$$

Donc

$$\langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot \langle\langle -a_1 a_2, -a_1 a_3 \rangle\rangle = \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot \langle\langle -a'_1 a'_2, -a'_1 a'_3 \rangle\rangle.$$

Ceci entraîne  $\langle\langle -a'_1 a'_2, -a'_1 a'_3 \rangle\rangle_K = \langle\langle -a_1 a_2, -a_1 a_3 \rangle\rangle_K$  et donc

$$a_1 a_2 a_3 \cdot h = \langle a_2 a_3, a_1 a_3, a_2 a_1 \rangle_K = \langle a'_2 a'_3, a'_1 a'_3, a'_2 a'_1 \rangle_K = a'_1 a'_2 a'_3 \cdot h'.$$

Autrement dit, les formes  $h$  et  $h'$  sont similaires et  $\tau = \text{ad}_h = \text{ad}_{h'} = \tau'$ .

Le  $\deg D$  étant impair, lorsque  $D$  n'est pas déployé, il est possible de se ramener au cas déployé et de redescendre sur  $D$  sans perdre d'informations. D'où

**Proposition 1.4.2.** — [KMRT98, Théorème 19.6] *Soit  $\tau$  et  $\tau_0$  deux involutions  $K/F$ -unitaires sur  $D$ , alors  $\tau = \tau_0$  si et seulement si  $\pi(\tau) = \pi(\tau_0)$ .*

**Corollaire 1.4.3.** — *Soit  $f_3^{\tau_0} : \text{Unit}_{\tau_0} \rightarrow \mathbf{M}_{D,K}^3$  l'invariant cohomologique relatif de degré 3 défini par*

$$f_3^{\tau_0}(\tau) = {}_c e_3(\pi(\tau) - \pi(\tau_0))$$

*pour tout corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  et toute involution  $K_L/L$ -unitaire  $\tau$  sur  $D_L$ . Les involutions  $\tau$  et  $\tau_0$  sont conjuguées si et seulement si  $f_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ . Si de plus  $D$  est déployée, pour toute forme hermitienne  $h$  et  $h_0$  représentant des éléments de  $\text{Herm}_{3,F}^3(F)$ ,  $f_3^{\text{ad}_{h_0}}(\text{ad}_h) = {}_c e_3^{h_0}(h)$ .*



*Démonstration.* — C'est une conséquence directe de la Proposition précédente et du Théorème 1.2.4.

Reste à vérifier l'égalité  $f_3^{\text{ad}_{h_0}}(\text{ad}_h) = {}^K_c e_3^{h_0}(h)$  dans le cas déployée. Soit  $\tau_0 = \text{ad}_{h_0}$  et  $\tau = \text{ad}_h$ . Si  $h = \langle a, b, c \rangle$  représente un élément de  $\mathbf{Herm}_{3,F}^3(F)$ , alors l'algèbre de  $F$ -quaternions  $(K, abc)_F$  est déployée. Donc  $abc = \iota(l)l$ , avec  $l \in L^\times$ . D'où  $h = \langle a, b, ab \rangle$  (de même  $h_0 = \langle a_0, b_0, a_0 b_0 \rangle$ ) et

$$\begin{aligned} f_3(\text{ad}_h) &= (\delta, -ab, -b) - (\delta, -a_0 b_0, -b_0) \\ &= {}_c e_3(\langle \delta \rangle \cdot \langle ab, b, a, -a_0 b_0, -b_0, -a_0 \rangle) \\ &= {}_c e_3(\langle \delta \rangle \cdot (\langle a, b, ab \rangle - \langle a_0, b_0, a_0 b_0 \rangle)) \\ &= {}^K_c e_3^{h_0}(h). \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.4.4.** — La démonstration montre que l'égalité  $f_3^{\text{ad}_{h_0}}(\text{ad}_h) = {}^K_c e_3^{h_0}(h)$  n'est plus vraie en général si on ne travaille pas sur  $\mathbf{Herm}_{h_0}^3$ . En d'autres termes,  $f_3^{\tau_0}$  est un invariant de Milnor *faiblement relatif* (en remplaçant  $\mathbf{Herm}_{h_0}$  par  $\mathbf{Herm}_{h_0}^3$  dans la Définition 1.2.15) qui classe toutes les involutions unitaires sur  $D$ .

Cet invariant peut aussi se reconstruire à partir de l'invariant de Rost.

**Proposition 1.4.5.** — [KMRT98, Exemple 31.45] *Soit  $\tau$  et  $\tau_0$  deux involutions  $K/F$ -unitaires sur  $D$ . On a l'égalité suivante*

$${}^R f_3^{\tau_0}(\xi_\tau) = f_3^{\tau_0}(\tau) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]).$$



## CHAPITRE 2

### UN INVARIANT COHOMOLOGIQUE RELATIF DE DEGRÉ 3 POUR LES INVOLUTIONS UNITAIRES

**Résumé.** — La section 2.1 montre tout d’abord l’incapacité d’avoir un invariant de Milnor *absolu* de degré 3 pour les involutions unitaires pour certaines algèbres. La section 2.2 décrit la création d’un invariant de Milnor relatif à une involution unitaire  $\tau_0$  de degré 3 à partir de l’invariant de Rost de  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  et détaille certaines propriétés générales relativement indépendantes du degré de  $B$ , telles que l’ordre de l’invariant, sa propriété de Chasles. Enfin, dans la section 2.3, on y trouve une mise en relation des invariants de Milnor relatifs pour les involutions unitaires, symplectiques ou orthogonales liées entre elles, soit par extension quadratique, soit par descente.

#### Notations

Dans ce chapitre,  $F$  est un corps commutatif fixé de caractéristique ne divisant pas le degré de  $B$ ,  $\delta$  un élément non nul de  $F - F^2$  et  $K$  est l’extension quadratique de  $F$  définie par  $K = F[X]/(X^2 - \delta)$ .

Pour toute involution orthogonale  $\sigma_0$ , on notera par  $e_3^R(\cdot/\sigma_0)$  l’invariant de Milnor relatif à  $\sigma_0$  de degré 3 construit dans [QMT]. Pour toute involution symplectique  $\gamma_0$ , on notera par  $\Delta_{\gamma_0}$  l’invariant de Milnor relatif à  $\gamma_0$  de degré 3 construit dans [BMT03] et par  $\Delta$  l’invariant de Milnor de degré 3 construit dans [GPT09].

#### 2.1. Invariant cohomologique absolu d’algèbres à involution unitaire

Pour construire un système d’invariants de Milnor de degré 3, il faut prolonger le système de degré 2 précédent en créant une transformation naturelle  $e_3$  définie sur  $\mathbf{Unit}_B^3$  à valeurs dans  $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/M$  pour un certain sous-groupe  $M$ . Cela n’est cependant pas toujours possible.

**Proposition 2.1.1.** — *Il n'existe pas de chaîne d'invariants de Milnor de degré 3 pour les involutions  $K/F$ -unitaires sur une  $K$ -algèbre simple centrale  $B$  telle  $\deg(B) = 4 \bmod 8$  et  $\text{ind}(B) = 4$ .*

La démonstration suit celle du [QMT, Théorème 1.2] concernant les chaînes d'invariants de Milnor de degré 3 pour les involutions orthogonales. La principale difficulté est d'adapter les arguments portant sur  $F$  en arguments sur  $K$ .

*Démonstration.* — Pour démontrer ce résultat, on suppose qu'il existe

$$e_3 : \mathbf{Unit}_B^3 \rightarrow \mathbf{Coeff}_F^3.$$

Soit  $Q_1$  et  $Q_2$  deux algèbres de quaternions sur  $F$  telles que

$$D = Q_1 \otimes_F Q_2 \otimes_F K$$

soit à division et  $B = M_{2n+1}(D)$ . Soit alors  $\theta$  l'involution  $K/F$ -unitaire (non hyperbolique)  $(D, \theta) = (Q_1, \text{can}) \otimes_F (Q_2, \text{can}) \otimes_F (K, \iota)$ . La Proposition 1.1.40, donne

$$e_2(\theta) = 0.$$

L'involution  $\theta$  représente donc un élément de  $\mathbf{Unit}_D^3(F)$  et il est possible de calculer  $e_3(\theta)$ . Soit  $\tau$  l'involution sur  $B$  adjointe à la  $(D, \theta)$ -forme hermitienne  $h$  d'écriture diagonale  $\langle 1, -1, \dots, 1, -1, 1 \rangle$ . Comme la dimension de  $h$  est impaire,  $e_2(\tau) = e_2(\theta) = 0$  [BFT07, Lemme 3.8].

Dans un premier temps, on construit un corps sur lequel l'invariant s'annule et sur lequel l'involution  $\tau$  reste non-hyperbolique. On suit la procédure de Merkurjev dans la démonstration du [Mer91, Théorème 4].

Soit  $e_3(\tau) = \sum_{i=1}^l (a_i) \cdot (b_i) \cdot (c_i) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$  et pour tout  $i = 1, \dots, l$ ,  $\varphi_i = \langle 1, -a_i, -b_i, a_i b_i, -c_i \rangle$ . Si  $L$  est la composition des corps de fonctions  $F_{\varphi_i}$  pour  $i = 1, \dots, l$ , alors  $e_3(\tau_L) = 0$ .

De l'autre côté,  $D \otimes_F L$  est à division. En effet,  $D \otimes_F L = D \otimes_K (K \otimes_F L)$  et le corps  $K \otimes_F L$  est la composition des  $F_{\varphi_i} \otimes K = K_{\varphi_i}$ . Comme  $D$  est à division, par le Corollaire 3 de [Mer92],  $D \otimes_K (L \otimes_F K)$  est encore à division.

Enfin, on étend  $(D, \tau)_L$  à  $M$ , où  $M$  est le corps des fonctions sur  $L$  du transfert de Weil  $R_{K_L/L}(SB(D_L))$  de la variété de Severi-Brauer de  $D_L$ . On sait par le [KT10, Théorème A.2] que  $\theta_M$  est non-hyperbolique car  $D_L$  est à division.

De l'autre côté,  $e_i(\tau_M) = \text{res}_{M/L}(e_i(\tau_L)) = 0$  pour tout  $i$  de 1 à 3 par fonctorialité. Comme  $D_M$  est déployée, il existe  $h_\theta$  une  $M_K$ -forme hermitienne telle que  $\text{ad}_{h_\theta} = \theta_M$ . En posant

$$h_\tau = h_\theta \perp -h_\theta \perp \dots \perp h_\theta \perp -h_\theta \perp h_\theta$$

on a  $\text{ad}_{h_\tau} = \tau_M$ . Comme  $e_3(\tau_M) = 0$ ,  $q_{h_\tau} \in I^4 M$ . Or  $0 = e_3(q_{h_\tau}) = e_3(q_{h_\theta})$  et la dimension de  $q_{h_\theta}$  est 8, donc  $q_{h_\theta}$  est hyperbolique. L'involution  $\theta_M$  devrait être hyperbolique. Ceci amène une contradiction.  $\square$

## 2.2. Invariant cohomologique relatif d'algèbres à involution unitaire

Il n'est dès lors pas possible de compléter la chaîne d'invariants de Milnor de degré 2 en général. Néanmoins, la chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 2, définie dans le chapitre précédent, peut être complétée par une transformation naturelle déduite de l'invariant de Rost

$$R_{\tau_0} : H^1(F, \text{SU}(B, \tau_0)) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Pour cela, soit une involution  $K/F$ -unitaire  $\tau_0$  sur  $B$ .

**Proposition 2.2.1.** — *Si  $\tau_0$  est telle que pour tout corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  déployant  $A$  et toute  $K_L$ -forme hermitienne  $h_0$  telle que  $(B, \tau_0)_L = \text{Ad}_{h_0, (K, \iota)}$ , on a  $[h_0] \in \mathbf{Herm}_{n, K/F}^3(L)$ . Alors  $\tau_0$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ .*

*Démonstration.* — En effet, soit  $L$  le corps des fonctions de la restriction  $K/F$  de la variété de Severi-Brauer associée à  $B$ , alors par [MT], l'application

$$\text{res}_{L/F} : \mathbf{M}_{B, K}^2(F) \rightarrow \mathbf{M}_{B, K}^2(L)$$

est injective. De l'autre côté,  $B_L$  est déployée. Donc  $e_2(\tau_{0_L}) = 0$  par hypothèse. Par l'injectivité de la restriction,  $e_2(\tau_0) = 0$  et  $\tau_0$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ .  $\square$

En conséquence, on supposera par la suite que  $[\tau_0]$  est dans  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ , autrement dit que son algèbre discriminante est triviale.

**2.2.1. Constuction de  ${}^R e_3^{\tau_0}$ .** — La méthode pour créer la transformation naturelle

$${}^R e_3^{\tau_0} : \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3 \rightarrow \mathbf{M}_B^3,$$

pour les involutions sur une algèbre simple centrale donnée  $B$  est similaire à celle de [Gar09].

A cette fin, on considère la suite exacte suivante

$$1 \rightarrow \mu_{n, K} \rightarrow \text{SU}(B, \tau_0) \rightarrow \text{PGU}(B, \tau_0) \rightarrow 1$$

dont on déduit la suite exacte de cohomologie

$$H^1(L, \mu_{n, K}) \rightarrow H^1(L, \text{SU}(B, \tau_0)) \rightarrow H^1(L, \text{PGU}(B, \tau_0)) \xrightarrow{\delta} H^2(L, \mu_{n, K}).$$

Pour rappel, le second invariant  $e_2^{\tau_0}$  est construit à partir de l'application  $\delta$ .

**Proposition 2.2.2.** — *L'action de  $H^1(L, \mu_{n,K})$  sur  $H^1(L, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  induit une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les orbites de } H^1(L, \mathrm{SU}(B, \tau_0)) \\ \text{sous l'action de } H^1(L, \mu_{n,K}) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(L).$$

*Démonstration.* — Par fonctorialité, on peut supposer  $L = F$  sans perdre de généralité. L'action de  $H^1(F, \mu_{n,K})$  sur  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  induit une injection

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les orbites de } H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0)) \\ \text{sous l'action de } H^1(F, \mu_{n,K}) \end{array} \right\} \rightarrow H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0)).$$

De l'autre côté, il existe une correspondance 1 – 1 entre

$$H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0)) \leftrightarrow \coprod_{B'} \mathbf{Unit}_{B'}(F)$$

où  $B'$  parcourt l'ensemble des algèbres simples centrales de degré  $n$  à isomorphisme près. Donc tout élément de  $H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0))$  peut s'interpréter comme la classe de  $F$ -isomorphisme d'une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution  $K/F$ -unitaire  $(B', \tau')$ .

Le groupe  $H^2(F, \mu_{n,K})$  s'injecte dans  $H^2(K, \mu_n) \times H^2(F, \mu_2)$  en envoyant  $\Delta(B', \tau')$  sur  $([B'] - [B], [D(B', \tau')] - [D(B, \tau_0)])$  [CTGP04, Proposition 2.10]. La suite étant exacte, les éléments de l'image de

$$H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0)) \rightarrow H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0))$$

forment exactement le noyau de  $\delta$ . Ces éléments sont des classes représentées par des involutions sur  $B$ . De plus, la seconde transformation naturelle  $e_2^{\tau_0}$  est définie par

$$e_2^{\tau_0}(\tau) = [\Delta(B, \tau)] - [\Delta(B, \tau_0)].$$

Par déduction, le noyau de  $\delta$  est en bijection avec les éléments de  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3$ .

Il reste à voir si ces éléments sont en bijection avec les orbites de l'action de  $H^1(F, \mu_{n,K})$  sur  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$ . Soit  $\xi_\tau^0$  un élément de  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  antécédent de la classe de  $[\tau]$ . L'action de  $H^1(F, \mu_{n,K})$  sur  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  étant stable par twist [KMRT98, Proposition 27.10], on peut regarder cette action sur

$$H^1(L, \mathrm{SU}(B, \tau_0))_{\xi_\tau^0} = H^1(L, \mathrm{SU}(B, \tau)).$$

L'antécédent de  $[\tau]$  devient alors l'élément pointé.

Ceci permet de se ramener au cas où l'antécédent de  $\xi_\tau^0$  est l'élément pointé de  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$ . L'orbite de l'élément pointé  $\xi_{\tau_0}^0$  forme exactement l'ensemble des antécédents de la classe  $[\tau_0] \in H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0))$  car la suite est exacte. D'où la bijection.  $\square$

**Proposition 2.2.3.** — *L'application*

$${}^R e_3^{\tau_0} : \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(L) \rightarrow \mathbf{M}_{B,K}^3(L)$$

définie par

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) := R_{\tau_0}(\xi) + \text{cor}_{K_L/K}(K_L^\times \cdot [B_L])$$

est un invariant relatif pour les involutions unitaires sur  $B$ .

*Démonstration.* — Si  $L_K = L \times L$ , alors  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau)$  doit être nul car  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(L)$  est un singleton. Mais dans ce cas,  $(B, \tau_0)_L = (A \times A^{op}, \epsilon)$  et  $SU(B, \tau_0)_L = SL_1(A)$ . L'invariant de Rost d'un couple  $(s, z)$  représentant un élément de  $H^1(F, SU(B, \tau_0))$  devient alors  $R_{\tau_0}(s, z) = (z) \cdot [A]$  [KMRT98, p. 438]. Par la formule de projection,

$$\text{cor}_{K_L/L}(K_L^\times \cdot [B_L]) = (N_{K_L/L}(K_L^\times)) \cdot [A] = L^\times \cdot [A].$$

Et donc  $R_{\tau_0}(\xi) + \text{cor}_{K_L/K}(K_L^\times \cdot [B_L]) = 0$ .

Sans perdre de généralité, par fonctorialité, on peut donc se restreindre au cas où  $L = F$  et  $K$  est un corps.

L'image de  $H^1(F, \mu_{n,K})$  sous l'invariant de Rost est  $\text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) + F^\times \cdot [D(B, \tau_0)]$  [MPT02, Théorème 1.11]. Or, le second invariant de  $[\tau_0]$  est nul si et seulement si  $[D(B, \tau_0)]$  est nul. De plus, l'invariant de Rost est compatible avec l'action du centre de la façon suivante, pour  $\xi$  dans  $H^1(F, SU(B, \tau))$  et  $\zeta$  dans  $H^1(F, \mu_{n,K})$  [Gar09],

$$R_{\tau_0}(\zeta\xi) = R_{\tau_0}(\zeta) + R_{\tau_0}(\xi).$$

Comme deux éléments  $\xi$  et  $\xi'$  de  $H^1(F, SU(B, \tau_0))$  dont l'image est  $[(B, \tau)]$  diffèrent par un élément central, la transformation naturelle proposée tantôt est bien définie car elle ne dépend pas du choix de  $\xi$ .  $\square$

**Proposition 2.2.4.** — *L'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$  complète la chaîne d'invariants de Milnor relatifs pour les involutions unitaires.*

*Démonstration.* — Il suffit de considérer le cas où  $B$  est déployée, ceci est vérifié dans [KMRT98, Exemple 31.44].  $\square$

**2.2.2. Relation de Chasles.** — L'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$  possède les bonnes propriétés lorsque l'on souhaite modifier l'involution  $\tau_0$ .

**Proposition 2.2.5.** — *Pour toute extension  $L$  de  $F$  et toute involution  $\tau_0, \tau_1$  et  $\tau$  représentant des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(L)$*

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^R e_3^{\tau_1}(\tau) + {}^R e_3^{\tau_0}(\tau_1).$$

*Démonstration.* — Par fonctorialité, on peut supposer  $L = F$ . Soit  $[\tau_1]$  dans  $\mathbf{Unit}_B$  vu comme un élément de  $H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0))$  et un 1-cocycle  $\xi_{\tau_1}^0$  dans  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  antécédent de  $[\tau_1]$ . Alors la multiplication à droite par  $\xi_{\tau_1}^0$

$$H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_1)) \xrightarrow{\cdot \xi_{\tau_1}^0} H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$$

définit une bijection qui envoie l'élément pointé de  $H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_1))$  sur  $\xi_{\tau_1}^0$ . Soit  $\xi_\tau^0 \in H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$  (resp.  $\xi_\tau^1 \in H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_1))$ ) un antécédent de la classe de  $\tau$  dans  $H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_0))$  (resp. un antécédent de la classe de  $\tau$  dans  $H^1(F, \mathrm{PGU}(B, \tau_1))$ ). De l'égalité  $\omega \cdot \xi_\tau^0 = \xi_\tau^1$  il suit que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0)) & \xrightarrow{\cdot \xi_{\tau_1}^0} & H^1(F, (B, \tau_1)) \\ \downarrow R_{\mathrm{SU}(B, \tau_0)} & & \downarrow R_{\mathrm{SU}(B, \tau_1)} \\ H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{f} & H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \end{array}$$

est commutatif [Gil00, Lemme 7], où  $f$  est l'addition par  $R_{\mathrm{SU}(B, \tau_0)}(\xi_{\tau_1}^0)$ . Autrement dit

$$R_{\mathrm{SU}(B, \tau_0)}(\xi_\tau^0) = R_{\mathrm{SU}(B, \tau_1)}(\xi_\tau^1) + R_{\mathrm{SU}(B, \tau_0)}(\xi_{\tau_1}^0).$$

Or

$${}^R e_3^{\tau_i}(\tau) = R_{\mathrm{SU}(B, \tau_i)}(\xi_\tau^1) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot B)$$

pour tout  $i = 0, 1$  et toute involution  $\tau$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B(F)$ . L'égalité  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^R e_3^{\tau_1}(\tau) + {}^R e_3^{\tau_0}(\tau_1)$  en est une simple réécriture.  $\square$

**2.2.3. Ordre de  ${}^R e_3^{\tau_0}$ .** — Une autre propriété importante à dégager est l'indépendance de l'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$  vis-à-vis du choix du générateur du groupe  $\mathrm{Inv}^3(\mathrm{SU}(B, \tau_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ . En effet, ce groupe est engendré par l'invariant de Rost  $R_{\tau_0}$ , mais il peut exister d'autres générateurs. On va montrer que l'on aurait pu tout à fait définir l'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$  à partir d'un générateur quelconque. Pour cela, on va donner une définition alternative de  ${}^R e_3^{\tau_0}$ .

Soit  $\tau_0$  (resp.  $\tau$ ) une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  (resp. de  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$ ). On va former une involution unitaire  $\rho_\lambda$  sur l'algèbre de matrices  $M_2(B)$  de la manière suivante. Comme il existe  $u \in \mathrm{Sym}(B, \tau_0)$  tel que  $\mathrm{Int}(u) \circ \tau_0 = \tau$ , pour tout  $\lambda \in F^\times$ , on définit l'involution  $\rho_\lambda$  sur  $M_2(B)$

$$\rho_\lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_0(x) & -\lambda^{-1} \tau_0(z) u^{-1} \\ -\lambda u \tau_0(y) & u \tau_0(t) u^{-1} \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, l'involution  $\rho_\lambda$  est dépendante du choix de  $u$ .



**Proposition 2.2.6.** — Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré pair,  $\tau_0$  (resp.  $\tau$ ) une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  (resp. de  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$ ). Pour tout  $\lambda \in F$ , l'involution  $\rho_\lambda$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_{M_2(B)}^3(F)$  et

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\rho_\lambda).$$

**Remarque.** — Ce résultat est le pendant unitaire de [QMT, Proposition 1.10].

*Démonstration.* — On considère l'involution sur  $M_2(B)$  :

$$\rho \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_0(x) & -\tau_0(z) \\ -\tau_0(y) & \tau_0(t) \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice  $e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est idempotente et que  $\rho(e) = 1 - e$ , l'involution  $\rho$  est hyperbolique et représente un élément de  $\mathbf{Unit}_{M_2(B)}^3(F)$ . On constate aussi que  $\rho_\lambda = \text{Int}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda u \end{pmatrix}) \circ \rho$ . Puisque  $\tau$  et  $\tau_0$  représentent des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ ,  $\text{Nrd}_B(u) = N_{K/F}(l)$  pour un certain  $l \in K^\times$ . Ceci entraîne  $\text{Nrd}_B(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda u \end{pmatrix}) = N_{K/F}(\lambda^{\deg(B)/2} l)$  et donc  $[\rho_\lambda] \in \mathbf{Unit}_{M_2(B)}^3(F)$ .

A présent, on considère l'inclusion standard

$$i : \text{SU}(B, \tau_0) \rightarrow \text{SU}(M_2(B), \rho), u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

qui induit une application  $i_* : H^1(F, \text{SU}(B, \tau_0)) \rightarrow H^1(F, \text{SU}(M_2(B), \rho))$  rendant le diagramme suivant commutatif [GMS03, Exemple §7.10] :

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, \text{SU}(B, \tau_0)) & \xrightarrow{i_*} & H^1(F, \text{SU}(M_2(B), \rho)) \\ & \searrow R_{\tau_0} & \swarrow R_\rho \\ & H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) & \end{array}$$

De l'autre côté, soit la classe de  $\tau$  dans  $H^1(F, \text{PGU}(B, \tau_0))$  et un antécédent  $\xi_\tau$  dans  $H^1(F, \text{SU}(B, \tau_0))$ . Puisque  $\xi_\tau$  peut être représenté par  $(\lambda u, \lambda^{\deg(B)/2} l)$ ,  $i_*(\xi_\tau)$  est représenté par  $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda u \end{pmatrix}, \lambda^{\deg(B)/2} l)$  et donc  $i_*(\xi_\tau) = \xi_{\rho_\lambda}$ . De  $\rho = \text{hyp}$ , on déduit

$$\begin{aligned} {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) &= R_{\tau_0}(\xi_\tau) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= R_{\text{hyp}} \circ i_*(\xi_\tau) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= R_{\text{hyp}}(\xi_{\rho_\lambda}) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [M_2(B)]) \\ &= {}^R e_3^{\text{hyp}}(\rho_\lambda). \end{aligned}$$

□

**Remarque.** — Il est important de souligner que pour différentes valeurs  $\lambda$  les involutions  $\rho_\lambda$  ne sont pas nécessairement isomorphes mais ont le même invariant  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$ .

Si l'on échange les rôles de  $\tau$  et  $\tau_0$ , on peut définir  $\rho'_\lambda$  pour tout  $\lambda \in F^\times$ ,

$$\rho'_\lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(x) & -\lambda^{-1}\tau(z)u \\ -\lambda u^{-1}\tau(y) & u^{-1}\tau(t)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\tau_0(x)u^{-1} & -\lambda^{-1}u\tau_0(z) \\ -\lambda\tau_0(y)u^{-1} & \tau_0(t) \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme d'algèbres  $\text{Int}((\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}))$  de  $M_2(B)$  donne un isomorphisme

$$(M_2(B), \rho'_\lambda) \xrightarrow{\sim} (M_2(B), \rho_{\lambda^{-1}}).$$

Ceci entraîne le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.7.** — *Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré pair. Pour toutes involutions  $K/F$ -unitaires  $\tau_0$  et  $\tau$  sur  $B$  représentant des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ ,*

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^R e_3^\tau(\tau_0) \text{ et } 2{}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0 \text{ dans } \mathbf{M}_{B,K}^3(F).$$

*Démonstration.* — La première égalité est une conséquence de la symétrie de la construction de  $\rho_\lambda$ . La seconde se déduit de la relation de Chasles,

$$2{}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) + {}^R e_3^\tau(\tau_0) = {}^R e_3^{\tau_0}(\tau_0) = 0.$$

□

### 2.3. Comparaison des invariants cohomologiques

Il existe plusieurs constructions permettant d'obtenir une involution unitaire  $\tau$  à partir d'une involution de première espèce  $\sigma$  sur une  $F$ -algèbre simple centrale  $A$ .

En effet, l'involution  $\sigma \otimes \iota$  sur  $A \otimes K$  est une involution  $K/F$ -unitaire. On dit que l'involution unitaire a une *descente* (orthogonale ou symplectique).

Un autre procédé, développé dans [GQM09], consiste à supposer que  $A$  contienne  $K$ . Si  $K$  est stable par  $\sigma$  et  $\sigma|_K$  est l'automorphisme non trivial, on munit la  $K$ -algèbre simple centrale  $B = C_K A$  de l'involution  $\tau$  qui est la restriction de  $\sigma$  à  $C_K A$ . On dit alors que  $\sigma$  est une *extension quadratique* de  $\tau$ .

Cela amène naturellement la question suivante .

*Quel est le lien entre les invariants de Milnor relatifs associés dans ces deux constructions ?*

**2.3.1. Extension quadratique d'une involution unitaire.** — Soit une  $F$ -algèbre simple centrale à involution de première espèce  $(A, \sigma)$  contenant  $K$  une extension quadratique de  $F$  stable sous  $\sigma$  telle que  $\sigma|_K$  ne soit pas l'identité. On munit la  $K$ -algèbre simple centrale  $B = C_K A$  de l'involution  $\tau$  qui est la restriction de  $\sigma$  à  $C_K A$ .

On peut comparer les chaînes d'invariants de Milnor relatifs respectives dans le cas où l'involution  $\sigma$  est orthogonale ou symplectique.

*2.3.1.1. Cas orthogonal.* — Pour appréhender le problème, voici ce qu'il se passe dans le cas où  $A$  est déployée.

**Proposition 2.3.1.** — [Tig10, Lemme 6] *Soit  $(B, \tau_0)$  (resp.  $(B, \tau)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution  $K/F$ -unitaire telle que  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$  (resp.  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$ ). Soit  $(A, \sigma_0)$  (resp.  $(A, \sigma)$ ) une extension quadratique orthogonale déployée de  $(B, \tau_0)$  (resp. de  $(B, \tau)$ ) alors  $[\sigma_0] \in \mathbf{Orth}_A(F)$  (resp.  $[\sigma] \in \mathbf{Orth}_{\sigma_0}(F)$ ) et*

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = e_3^R(\sigma/\sigma_0).$$

Afin d'établir le cas général, on peut utiliser l'inclusion suivante

$$\mathbf{U}(B, \tau_0) \hookrightarrow \mathbf{O}^+(A, \sigma_0),$$

qui entraîne une application

$$\mathbf{SU}(B, \tau_0) \rightarrow \mathbf{O}^+(A, \sigma_0).$$

La suite exacte de groupes algébriques

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbf{Spin}(A, \sigma_0) \rightarrow \mathbf{O}^+(A, \sigma_0) \rightarrow 1$$

permet l'existence d'une application

$$\alpha : \mathbf{SU}(B, \tau_0) \rightarrow \mathbf{Spin}(A, \sigma_0)$$

par [BT65] car  $\mathbf{SU}(B, \tau_0)$  est simplement connexe. Ceci donne une application

$$\alpha_* : H^1(F, \mathbf{SU}(B, \tau_0)) \rightarrow H^1(F, \mathbf{Spin}(A, \sigma_0)).$$

qui induit un homomorphisme

$$\mathrm{Inv}^3(\mathbf{Spin}(A, \sigma_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathrm{Inv}^3(\mathbf{SU}(B, \tau_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

**Proposition 2.3.2.** — *Soit un corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ ,  $(B, \tau_0)$  (resp.  $(B_L, \tau)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale à involution  $K/F$ -unitaire et  $(A, \sigma_0)$  (resp.  $(A_L, \sigma)$ ) une extension quadratique orthogonale de  $(B, \tau_0)$  (resp. de  $(B_L, \tau)$ ). On suppose en outre que  $[\sigma_0] \in \mathbf{Orth}_A^3(F)$ ,  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$  et  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(L)$ . Alors*

$$e_3^R(\sigma/\sigma_0) = {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) + L^\times \cdot [A_L].$$

**Remarque.** — La proposition indique que l'invariant  $e_3$  de l'involution orthogonale est uniquement déterminé par l'invariant de  $\tau$ . Ce résultat est naturel en raison de l'existence d'une unique extension quadratique de  $\tau$  sur  $A$  qui soit orthogonale [QGM09, Lemme 1.6].

*Démonstration.* — Par fonctorialité, on peut supposer  $L = F$ . Les formules ont un sens car  $\text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$  est inclus dans  $F^\times \cdot [A]$ . En effet,  $[A_K]$  est isomorphe à  $[B]$  [GQM09, 1.1]. Soit  $l \in K^\times$ , la formule de projection donne

$$\begin{aligned} \text{cor}_{K/F}((l) \cdot [B]) &= \text{cor}_{K/F}((l) \cdot [A_K]) \\ &= \text{cor}_{K/F}(l) \cdot [A]. \end{aligned}$$

Donc  $\text{cor}_{K/F}((l) \cdot [B])$  se trouve dans  $F^\times \cdot [A]$  et l'on peut passer au quotient

$$\mathbf{M}_{B,K}^3 \rightarrow \mathbf{M}_A^3.$$

Il reste à établir la relation entre les invariants de Rost. Les groupes d'invariants cohomologiques  $\text{Inv}^3(\text{Spin}(A, \sigma_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  et  $\text{Inv}^3(\text{SU}(B, \tau_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  sont engendrés par leur invariant de Rost respectif  $R_{\sigma_0}$  et  $R_{\tau_0}$ . L'ordre de l'invariant de Rost  $R_{\sigma_0}$  est 2 si  $A$  est déployée ou si  $A$  est de degré 8 et  $e_2(\sigma_0) = 0$ . Sinon il vaut 4. De l'autre côté, l'ordre de l'invariant de Rost  $R_{\tau_0}$  est 2 si  $B$  est de degré 2, 4 ou si  $B$  est déployée. Dans les autres cas, il vaut 4 par les Propositions 1.3.6 et 1.3.4.

L'application induite par  $\alpha$  étant un morphisme de groupes, il existe un entier  $n_\alpha$  qui est invariant quelque soit l'extension de corps  $L$  sur  $F$  par la Proposition 1.3.2 tel que  $R_{\sigma_0} \circ \alpha_* = n_\alpha R_{\tau_0}$ . Soit  $L$  un corps déployant  $B$  et  $A$ , la Proposition 2.3.1 dit

$$R_{\sigma_0} \circ \alpha_* = R_{\tau_0}.$$

En d'autres termes,  $n_\alpha$  peut uniquement valoir 1 ou 3 et  $R_{\sigma_0} \circ \alpha_* = \pm R_{\tau_0}$ . Par conséquent,

$$e_3^R(\sigma/\sigma_0) = \pm {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) + F^\times \cdot [A].$$

Mais  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$  implique que  $\deg(B) = 2k$  et donc par le Corollaire 2.2.7

$$e_3^R(\sigma/\sigma_0) = {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) + F^\times \cdot [A].$$

□

*2.3.1.2. Cas symplectique.* — Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré  $2m$  munie d'une involution symplectique contenant une sous-algèbre  $(K, \iota)$  de dimension 2 munie d'une involution non triviale. Si l'on considère  $(B, \tau)$  le centralisateur de  $K$  muni de la restriction de l'involution  $\gamma$ , qui est degré  $m$  sur  $K$ , il est possible de comparer les invariants respectifs.

**Proposition 2.3.3.** — *Il existe  $(B, \tau)$  une  $F$ -algèbre simple centrale déployée munie d'une involution  $K/F$ -unitaire et  $(A, \gamma)$  une extension quadratique symplectique de  $(B, \tau)$  tels que*

$$\Delta_{\text{hyp}}(\gamma) = 0 \text{ tandis que } {}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) \neq 0.$$

*Démonstration.* — Il suffit de considérer une  $(K, \iota)$ -forme hermitienne  $h \in \mathbf{Herm}_{K,n}^3$  telle que  ${}_c e_3(q_h)$  est non nul et de poser  $(B, \tau) = \text{Ad}_h$ . Dans ce cas  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau)$  est non nul.

De l'autre côté, l'algèbre simple centrale munie d'une involution orthogonale  $(A, \sigma) = \text{Ad}_{q_h}$  est une extension quadratique orthogonale de  $(B, \tau)$ . D'où  $(A, \text{int}(\sqrt{\delta}) \circ \sigma)$  est une extension quadratique symplectique de  $(B, \tau)$ . L'algèbre  $A$  étant déployée,  $\text{int}(\sqrt{\delta}) \circ \sigma$  est une involution hyperbolique et l'invariant  $\Delta_{\text{hyp}}(\text{int}(\sqrt{\delta}) \circ \sigma) = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.3.4.** — Soit  $(B, \tau_0)$  (resp.  $(B, \tau)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale à involution  $K/F$ -unitaire et  $(A, \gamma_0)$  (resp.  $(A, \gamma)$ ) une extension quadratique symplectique de  $(B, \tau_0)$  (resp.  $(B, \tau)$ ) telles que  $[\tau_0]$  et  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Alors

$$\Delta_{\gamma_0}(\gamma) \in \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

**Remarque.** — Contrairement à la Proposition 2.3.2, l'absence de lien explicite entre les deux invariants est surprenant car, toujours par [GQM09, Lemme 1.6], l'involution  $\tau$  définit totalement l'involution  $\gamma$  sur  $A$ .

*Démonstration.* — Soit l'application naturelle suivante,

$$\alpha : \text{SU}(B, \tau) \rightarrow \text{Sp}(A, \gamma),$$

qui induit un morphisme

$$\text{Inv}^3(\text{Sp}(A, \gamma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Inv}^3(\text{SU}(B, \tau), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

L'invariant de Rost  $R_{\gamma_0}$  de  $H^1(F, \text{Sp}(A, \gamma_0))$  engendre  $\text{Inv}^3(\text{Sp}(A, \gamma_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  et est d'ordre 2 par la Proposition 1.3.4. L'image de cette application étant nulle dans le cas déployé, alors que  $R_{\tau_0}$  peut être non nul, le multiplicateur de Rost  $n_\alpha = 4$  soit 2. Or  $n_\alpha$  est invariant sous une extension de corps, ce qui donne

$$R_{\gamma_0} \circ \alpha = 0 \text{ ou } 2R_{\tau_0}$$

Si  $n_\alpha = 4$ , alors  $\Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) = 0$ . Si  $n_\alpha = 2$ , alors

$$\Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) = 2R_{\tau_0}(\xi_\tau) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) = 2^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$$

car  $\deg(B)$  est pair.  $\square$

**2.3.2. Descente orthogonale et symplectique d'une involution unitaire.** — Dans cette section,  $(B, \tau_0)$  (resp.  $(B, \tau)$ ) est une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution  $K/F$ -unitaire d'algèbre discriminante triviale (i.e. représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ ),  $(A, \sigma_0)$  (resp.  $(A, \sigma)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution orthogonale et  $(A, \gamma_0)$  (resp.

$(A, \gamma)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution symplectique telles que

$$(B, \tau_0) = (A, \sigma_0) \otimes (K, \iota) \text{ et } (B, \tau) = (A, \sigma) \otimes (K, \iota)$$

ou

$$(B, \tau_0) = (A, \gamma_0) \otimes (K, \iota) \text{ et } (B, \tau) = (A, \gamma) \otimes (K, \iota).$$

*2.3.2.1. Cas orthogonal.* — Dans cette section, on considère le cas où  $\sigma$  et  $\sigma_0$  sont des involutions orthogonales.

**Proposition 2.3.5.** — *Soit  $A$  et  $B$  déployées. Si  $\sigma_0$  et  $\sigma$  représentent des éléments de  $\mathbf{Orth}_A^2(F)$ , alors  $\tau$  et  $\tau_0$  représentent des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  et*

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = (\delta) \cdot e_2^{\sigma_0}(\sigma).$$

*Démonstration.* — Il existe  $q_0$  et  $q$  deux  $F$ -formes quadratiques représentant des éléments de  $\mathbf{Quad}_{F, \deg(A)}^2$  tels que  $\sigma_0 = \text{ad}_{q_0}$  et  $\sigma = \text{ad}_q$ . On vérifie alors si  $\tau = \text{ad}_{h_q}$  et  $\tau_0 = \text{ad}_{h_{q_0}}$  où  $h_q$  et  $h_{q_0}$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} h_q : (V \otimes K) \times (V \otimes K) &\rightarrow K \\ (v \otimes k, v' \otimes k') &\mapsto kb_q(v, v')\iota(k'). \end{aligned}$$

On constate ensuite l'égalité  $q_{h_q} = \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q$ . En effet,

$$\begin{aligned} h_q(v \otimes 1 + v' \otimes \sqrt{\delta}, v \otimes 1 + v' \otimes \sqrt{\delta}) &= b_q(v, v) - \delta b_q(v', v') \\ &= q_{h_q}(v \otimes 1) \perp \langle -\delta \rangle q(v' \otimes \delta). \end{aligned}$$

Ceci permet de dire que

$$\begin{aligned} {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) &= {}^c e_3^{h_{q_0}}(h_q) \\ &= {}^c e_3^{\langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q_0}(\langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q) \\ &= {}^c e_3(\langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q - \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot q_0) \\ &= {}^c e_3(\langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot (q - q_0)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^c e_3(\langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot (q - q_0)) = (\delta) \cdot {}^c e_2(q - q_0) = (\delta) \cdot {}^c e_2^{q_0}(q) = (\delta) \cdot e_2^{\sigma_0}(\sigma).$$

□

On suppose à présent  $A$  quelconque,  $\sigma$  et  $\sigma_0$  deux involutions orthogonales sur  $A$  représentant des éléments de  $\mathbf{Orth}_A^2(F)$  et telles que  $\tau = \sigma \otimes \iota$  et  $\tau_0 = \sigma_0 \otimes \iota$  sont deux involutions  $K/F$ -unitaires sur  $B = A_K$  représentant des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ .

**Proposition 2.3.6.** — Si le degré de  $B$  est un multiple de 4 et si  $\sigma_0$  et  $\sigma$  représentent des éléments de  $\mathbf{Orth}_A^2(F)$ , alors  $\tau$  et  $\tau_0$  représentent des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  et

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) + F^\times \cdot [A] = (\delta) \cdot e_2^{\sigma_0}(\sigma) + F^\times \cdot [A].$$

**Remarque.** — Le Théorème 4.3.8 montre qu'il est nécessaire de quotienter par  $F^\times \cdot [A]$  pour conserver l'égalité.

**Démonstration.** — Par la [KMRT98, Proposition 10.33], l'algèbre discriminante de  $\tau_0$  est Brauer équivalente à

$$\lambda^{\frac{\deg B}{2}} A \otimes (K, \text{disc} \sigma_0).$$

Or,  $\sigma_0$  représente un élément de  $\mathbf{Orth}_A^2(F)$ , donc son discriminant est trivial. De plus,  $\deg B$  est un multiple de 4 donc  $\lambda^{\frac{\deg B}{2}} A \sim 0$ . D'où  $[D(B, \tau_0)] = 0$  et  $\tau_0$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ . De même,  $\tau$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ .

Par [QMT, Proposition 1.10], on sait

$$(\delta) \cdot e_2(\sigma_0) + F^\times \cdot [A] = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma_0)})$$

et

$$(\delta) \cdot e_2(\sigma) + F^\times \cdot [A] = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma)}).$$

Donc

$$(\delta) \cdot e_2^{\sigma_0}(\sigma) + F^\times \cdot [A] = {}^R e_3^{\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma_0)}}(\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma)}).$$

De l'autre côté [GQM09, Exemple 1.13], comme  $(B, \tau_0) = (A, \sigma_0) \otimes (K, \iota)$  (resp.  $(B, \tau) = (A, \sigma) \otimes (K, \iota)$ ), l'involution orthogonale  $\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma_0)}$  (resp.  $\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma)}$ ) sur  $M_2(A)$  est une extension quadratique de  $\tau_0$  (resp.  $\tau$ ). Par la Proposition 2.3.2,

$$\begin{aligned} {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) + F^\times \cdot [A] &= {}^R e_3^{\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma_0)}}(\text{ad}_{\langle\langle\delta\rangle\rangle, (A, \sigma)}) \\ &= (\delta) \cdot e_2^{\sigma_0}(\sigma) + F^\times \cdot [A]. \end{aligned}$$

□

**2.3.2.2. Cas symplectique.** — Dans cette sous-section, on considère le cas où il existe une involution symplectique  $\gamma$  sur  $A$  telle que  $(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes (K, \iota)$ .

**Proposition 2.3.7.** — Soit  $(B, \tau)$  une  $K$ -algèbre simple centrale déployée de degré au moins 4 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire telle que

$$(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes_F (K, \iota)$$

où il existe  $\lambda \in F^\times$  tel que  $A$  est Brauer-équivalent à une  $F$ -algèbre de quaternions  $(K, \lambda)$  et  $\gamma$  soit une involution symplectique sur  $A$ . Alors

$${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = \Delta_{\text{hyp}}(\gamma).$$

*Démonstration.* — On peut représenter  $A$  comme

$$A = \text{End}_{(K, \lambda)} V$$

pour un  $(K, \lambda)$ -espace vectoriel à droite  $V$  avec  $\dim_{(K, \lambda)} V = \deg A/2$ . Toute involution symplectique sur  $A$  est alors adjointe à une forme hermitienne  $h$  sur  $V$  par rapport à l'involution canonique sur  $(K, \lambda)$ . De l'autre côté, soit l'involution  $K/F$ -unitaire  $\tau = \text{ad}_h \otimes \iota$  sur  $B = A_K$ . On note que  $(B, \tau) = (\text{End}_K V, \text{ad}_{h^\kappa})$  avec  $h^K$  qui est la forme hermitienne  $h$  sur  $V$  vu comme  $K$ -espace vectoriel par rapport à  $(K, \iota)$ . Si  $h = \langle a_1, \dots, a_{n/2} \rangle$ , on a  $h^K = \langle \langle \lambda \rangle \cdot \langle a_1, \dots, a_{n/2} \rangle \rangle$  et le troisième invariant s'écrit

$${}^{(K, \lambda)} e_3^{\text{hyp}}(h) = {}_c e_3 \left( \langle \langle \lambda, \delta \rangle \rangle \cdot \langle a_1, \dots, a_{n/2} \rangle \right) = {}^K e_3^{\text{hyp}}(h^K).$$

Ce qui entraîne

$${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{h^\kappa}) = \Delta_{\text{hyp}}(\text{ad}_h) = \Delta_{\text{hyp}}(\gamma).$$

□

A présent, on considère le cas plus général des involutions symplectiques sur une algèbre  $A$  pour laquelle il existe une extension  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  telle que  $(L_K, \lambda) \sim A$  pour un certain  $\lambda \in L^\times$ .

On a l'inclusion suivante

$$\alpha : \text{Sp}(A, \gamma_0) \rightarrow \text{SU}((A, \gamma_0) \otimes (K, \iota))$$

Ceci donne une application

$$\alpha_* : H^1(F, \text{Sp}(A, \gamma_0)) \rightarrow H^1(F, \text{SU}((A, \gamma_0) \otimes (K, \iota))).$$

A la vue du comportement dans le cas précédent, on va établir la relation suivante entre les différentes transformations naturelles,

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

L'application  $\alpha_*$  induit un morphisme de groupes

$$\text{Inv}^3(\text{SU}((A, \gamma_0) \otimes (K, \iota)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Inv}^3(\text{Sp}(A, \gamma_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Comme le groupe  $\text{Inv}^3(\text{Sp}(A, \gamma_0), \mu_2)$  est d'ordre 2 par la Proposition 1.3.5, l'invariant de Rost de  $H^1(F, \text{SU}((A, \gamma_0) \otimes (K, \iota)))$  est envoyé soit sur l'invariant trivial, soit sur l'invariant de Rost de  $H^1(F, \text{Sp}(A, \gamma_0))$ . On a vu dans le cas précédent que l'image par  $\alpha$  est non triviale et l'invariant de Rost est fonctoriel par extension de corps. D'où la

**Proposition 2.3.8.** — *Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale telle qu'il existe une extension de corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  et  $\lambda \in L^\times$  tels que  $(K_L, \lambda) \sim A_L$  soit d'indice 2. Soit  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma$ ) une involution symplectique sur  $A$  et  $(B, \tau_0) =$*



$(A, \gamma_0) \otimes (K, \iota)$  (resp  $(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes (K, \iota)$ ) une  $F$ -algèbre munie d'une involution  $K/F$ -unitaire telle que  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Alors  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$  et

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

*Démonstration.* — Il reste à vérifier si  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$ . Comme il existe  $s \in \text{Sym}(A, \gamma_0)$  tel que  $\gamma = \text{Int}(s) \circ \gamma_0$  et  $\text{Nrd}_A(s) \in F^{\times 2}$ , alors  $\text{Int}(s \otimes 1) \circ \tau_0 = \tau$  et  $\text{Nrd}_B(s \otimes 1) = \text{Nrd}_A(s) \in F^{\times 2} \subset N_{K/F}(K^\times)$ . On en déduit que  $\tau$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$ .  $\square$

L'hypothèse de l'existence d'un corps  $L$  tel que  $(K_L, \lambda) \sim A_L$  soit d'indice 2 de la proposition précédente peut sembler restrictive. Elle est néanmoins toujours vérifiée.

**Proposition 2.3.9.** — *Pour toute  $F$ -algèbre simple centrale  $A$  non déployée, il existe un corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$  tel que  $(K_L, \lambda) \sim A_L$  soit d'indice 2.*

*Démonstration.* — Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale non déployée. On considère  $t$  une indéterminée sur  $F$  et on pose

$$A' = A_{F(t)} \otimes (K, t)_{F(t)}.$$

Soit  $L$  le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de  $A'$  sur  $F(t)$ . Dès lors  $A'_L$  est déployée et  $A_L \sim (K, t)_L$ . Comme le noyau de l'application  $\text{res}_{L/F(t)} : \text{Br}(F(t)) \rightarrow \text{Br}(L)$  est  $\{0, [A']\}$ , si  $(K, t)_L$  est déployée alors soit  $(K, t)_{F(t)}$  est déployée, ce qui est impossible ; soit  $(K, t)_{F(t)} \sim A'$  et  $A_{F(t)} \sim 0$  ce qui est impossible car  $A$  n'est pas déployée et l'application  $\text{res}_{F(t)/F} : \text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(F(t))$  est injective. Donc  $(K, t)_L \sim A_L$  est d'indice 2.  $\square$

On peut donc en conclure le

**Corollaire 2.3.10.** — *Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale,  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma$ ) une involution symplectique sur  $A$  et  $(B, \tau_0) = (A, \gamma_0) \otimes (K, \iota)$  (resp  $(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes (K, \iota)$ ) une  $F$ -algèbre munie d'une involution  $K/F$ -unitaire telle que  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Alors  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$  et*

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$



## CHAPITRE 3

### SUR L'INVARIANT COHOMOLOGIQUE DE DEGRÉ 3 POUR LES INVOLUTIONS UNITAIRES DE DEGRÉ $2(2m + 1)$

**Résumé.** — L'invariant de Milnor relatif à une involution unitaire créé dans le Chapitre II est ici étudié dans le cas où le degré de l'algèbre  $B$  est  $2 \pmod{4}$ . On démontre l'existence d'un invariant de Milnor *absolu* de degré 3 dans la section 3.1 ainsi qu'une nouvelle écriture de  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$  à l'aide de l'invariant de Milnor relativement faible de degré 3 durant la section 3.2. L'équivalence entre hyperbolicité et décomposabilité lorsqu'une involution unitaire à une algèbre discriminante triviale est établie lors de la section 3.3. Les sections 3.4 et 3.5 concernent le cas particulier où l'algèbre est de degré 6. Dans la section 3.4, il est mis en évidence le lien entre la nullité de l'invariant de Milnor  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$  d'une involution unitaire et la décomposabilité totale de cette dernière. Enfin la section 3.5 voit l'amorce d'un travail concernant un critère d'isomorphisme.

#### Notations

Dans ce chapitre,  $F$  est un corps commutatif fixé de caractéristique ne divisant pas le degré de  $B$ ,  $\delta$  un élément non nul de  $F - F^2$  et  $K$  est l'extension quadratique de  $F$  définie par  $K = F[X]/(X^2 - \delta)$ .

Pour  $(D, \theta_0)$  une  $F$ -algèbre à involution unitaire de degré 3, on notera  $f_3^{\theta_0}$  l'invariant de Milnor faiblement relatif à  $\theta_0$  décrit dans le Corollaire 1.4.3.

Pour  $(D, \theta_0)$  une  $F$ -algèbre à involution unitaire de degré  $(2m + 1)$ , on notera  ${}^R f_3^{\theta_0}$  l'invariant de Milnor faiblement relatif à  $\tau_0$  déduit de l'invariant de Rost, décrit dans la sous-section 1.4.1.

#### 3.1. Invariant absolu en degré $2(2m + 1)$

Dans le cadre d'une  $K$ -algèbre simple centrale de degré  $2(2m + 1)$ , on peut construire un invariant de Milnor absolu.

**Proposition 3.1.1.** — *Si  $B$  est une  $K$ -algèbre simple centrale de degré 2 modulo 4 telle que  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  est non vide, alors  $\text{ind}(B)$  divise  $2m+1$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(B, \tau)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré  $2(2m+1)$  munie d'une involution  $K/F$ -unitaire représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ , autrement dit l'algèbre discriminante  $D(B, \tau)$  est déployée. Il existe  $D$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré  $2m+1$  et  $Q$  une  $K$ -algèbre de degré 2 telles que  $B = D \otimes_K Q$ . Comme l'invariant  $e_2(\tau)$  est nul, cela signifie que la classe de Brauer de  $D(B, \tau)$  est nulle. Par [KMRT98, Proposition 10.33], on obtient  $[D(B, \tau)_K] = [B^{\otimes 2m+1}] = [Q^{\otimes 2m+1}] + [D^{\otimes 2m+1}] = [Q]$ . Sachant que  $[D(B, \tau)_K] = 0$ ,  $Q$  est déployée.  $\square$

Comme  $\text{ind}(B)$  divise  $\frac{1}{2}\deg(B)$ , il existe une involution hyperbolique que l'on notera hyp. On a alors le

**Corollaire 3.1.2.** — *Pour  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré  $2(2m+1)$  avec  $m \geq 1$ , telle que  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  est non vide, il existe une chaîne d'invariants de Milnor de degré 3 non triviale.*

*Démonstration.* — Ceci découle de la Proposition précédente et de la correspondance dans le cas déployé entre l'invariant de Rost  $R_{\text{adh}}$  et l'invariant de Rost  $R_{q_h}$  sur  $\text{Spin}(q_h)$ . La non-trivialité vient du fait qu'il existe une forme hermitienne de dimension  $2(2m+1)$  telle que  $q_h \in I^3 F$  mais  $e_3(q_h) \neq 0$ .  $\square$

### 3.2. Réinterprétation de l'invariant ${}^{R_e}_{c_3}{}^{\text{hyp}}$

Comme  $\tau$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_{M_2(D)}^3(F)$ , il existe  $D$  une algèbre simple centrale de degré  $(2m+1)$ , une involution  $K/F$ -unitaire  $\theta'$  sur  $D$  et  $h' = \langle a, b \rangle$  une  $(D, \theta')$ -forme hermitienne tels que

$$(B, \tau) = \text{Ad}_{h'}.$$

On définit alors  $\theta = \text{Int}(a^{-1} \circ \theta')$  et, par un simple calcul, on constate que

$$(B, \tau) = \text{Ad}_h$$

avec  $h$  une forme hermitienne sur  $(D, \theta)$  telle que  $h = \langle\langle s \rangle\rangle$  pour un élément  $s$  inversible et symétrique dans  $(D, \theta)$ .

Dans la sous-section 1.4.1, on présente un invariant cohomologique de degré 3 pour les algèbres de degré  $2m+1$  munie d'une involution unitaire. Il est possible d'interpréter cet invariant en termes de l'invariant  ${}^{R_e}_{c_3}{}^{\text{hyp}}$  de la façon suivante. Soit  $D$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré  $2m+1$ ,  $\theta_0$  et  $\theta$  deux

involutions  $K/F$ -unitaires sur  $D$ . Soit  $s \in \text{Sym}(D, \theta_0)$  tel que  $\text{Int}(s) \circ \theta_0 = \theta$ . Soit les involutions sur  $M_2(D)$

$$\tau_0 \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0(x) & -\theta_0(z) \\ -\theta_0(y) & \theta_0(t) \end{pmatrix}.$$

et

$$\tau \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0(x) & -\theta_0(z)s \\ -s^{-1}\theta_0(y) & s^{-1}\theta_0(t)s \end{pmatrix}.$$

De façon analogue à la démonstration de la Proposition 2.2.6,  $\tau_0$  est hyperbolique et  $\tau = \text{Int}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}) \circ \tau_0$ .

Ceci étant, on peut interpréter l'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$  sur  $\mathbf{Unit}_{M_2(D)}^3$  comme un invariant cohomologique relatif de degré 3 sur  $\mathbf{Unit}_D$ .

**Proposition 3.2.1.** — Soit  $\tau$ ,  $\tau_0$ ,  $\theta_0$  et  $\theta$  comme ci-dessus. On suppose de plus que  $\tau$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_{M_2(D)}^3(F)$ . Alors

$$e_3^{\text{hyp}}(\tau) = {}^R f_3^{\theta_0}(\theta) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

*Démonstration.* — Comme  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{M_2(D)}^3(F)$ ,  $\text{Nrd}_{M_2(D)}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}) = N_{K/F}(l)$  pour un certain  $l \in K^\times$  et  $\text{Nrd}_{M_2(D)}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}) = \text{Nrd}_D(s)$ , le couple  $(s, l)$  représente un élément de  $H^1(F, \text{SU}(D, \theta_0))$ .

De l'autre côté, l'injection standard  $i : \text{SU}(D, \theta_0) \rightarrow \text{SU}(M_2(D), \text{hyp})$ , définie par  $s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$  induit une application

$$i_* : H^1(F, \text{SU}(D, \theta_0)) \rightarrow H^1(F, \text{SU}(M_2(D), \tau_0)).$$

Soit  $\xi_\theta = [(s, l)]$  un antécédent de la classe de  $\theta$  dans  $H^1(F, \text{SU}(D, \theta_0))$  alors  $\xi_\tau = i_*(\xi_\theta) = [(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, l)]$  est un antécédent de  $\tau$  et  $i_*$  induit de plus un morphisme de groupes

$$\text{Inv}^3(\text{SU}(M_2(D), \text{hyp}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Inv}^3(\text{SU}(D, \theta_0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Sachant que l'invariant de Rost  $R_{\theta_0}$  (resp.  $R_{\text{hyp}}$ ) engendre  $\text{Inv}^3(F, \text{SU}(D, \theta_0))$  (resp. engendre  $\text{Inv}^3(F, \text{SU}(M_2, \text{hyp}))$ ), il existe  $n_{i_*}$  tel que  $R_{\text{hyp}} \circ i_* = n_{i_*} R_{\theta_0}$ , invariant par extension de corps par la Proposition 1.3.2. Dans ce cas, l'ordre des invariants de Rost vaut  $2e$  où  $e$  est l'exposant de  $D$ , il est d'ordre  $2(2m+1)$ . En injectant  $H^3(F, \mu_{2(2m+1), [K]}) \hookrightarrow H^3(F, \mu_2) \times H^3(F, \mu_{2m+1, [K]}^{\otimes 2})$ , on obtient l'écriture suivante de  $R_{\theta_0}$

$$R_{\theta_0}([(s, z)]) = ({}_c e_3(\pi(\text{Int}(s) \circ \theta) - \pi(\theta)), \frac{1}{2} \text{cor}_{K/F}(K \cdot [D])).$$

Dans le cas où  $D$  est déployée, on sait que  $R_{\text{hyp}}$  coïncide avec l'invariant de Milnor canonique pour les formes hermitiennes  ${}_c e_3^{\text{hyp}} = {}^K e_3$  sur  $\mathbf{Herm}_{2(2m+1), K/F}^3$  qui est non nul en général. La composante dans  $H^3(F, \mu_2)$  est alors non nulle,

donc  $n_{i_*}$  doit être impair et il existe  $k_{i_*}$  tel que  $R_{\text{hyp}} \circ i_* = k_{i_*}(2R_{\theta_0}) + R_{\theta_0}$ .  
Le calcul suivant

$$\begin{aligned} 2R_{\theta_0}([(s, z)]) &= (2ce_3^{\pi(\theta)}(\pi(\text{Int}(s) \circ \theta)), \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D])) \\ &= (0, \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D])) \end{aligned}$$

indique que  $k_{i_*}(2R_{\theta_0}) \in \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D])$  et par conséquent

$$\begin{aligned} R_{\text{hyp}} \circ i_* + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]) &= (2k_{i_*} + 1)R_{\theta_0} + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]) \\ &= R_{\theta_0} + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} {}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) &= R_{\text{hyp}}(\xi_\tau) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]) \\ &= R_{\text{hyp}} \circ i_*(\xi_\theta) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]) \\ &= R_{\theta_0}(\xi_\theta) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D]) \\ &= {}^R f_3^{\theta_0}(\theta). \end{aligned}$$

□

L'invariant  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$  peut être vu comme une transformation naturelle à valeurs dans  $H^3(*, \mu_2)$ .

### 3.3. Décomposabilité et hyperbolicité

L'objet de cette section est de démontrer le caractère nécessairement hyperbolique de toute involution  $K/F$ -unitaire d'algèbre discriminante triviale sur une  $K$ -algèbre simple centrale de degré  $2(2m+1)$ .

**Proposition 3.3.1.** — *Soit une  $F$ -algèbre simple centrale à involution  $K/F$ -unitaire  $(D, \theta)$  de degré  $2(2m+1)$  et  $\lambda \in F^\times$ . Si l'involution  $\theta \otimes \text{ad}_{\langle\lambda\rangle}$  a une algèbre discriminante triviale, elle est hyperbolique.*

*Démonstration.* — Soit  $\lambda \in F^\times$  et  $(D, \theta)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré  $2m+1$  munie d'une involution  $K/F$ -unitaire et  $(B, \tau) = \text{Ad}_{\langle\lambda\rangle} \otimes (D, \theta)$ . En posant  $\text{hyp} = \text{ad}_{\langle 1 \rangle} \otimes \theta$  et  $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_2(K)$ ,

$$\text{Int}(s \otimes 1) \circ \text{hyp} = \text{ad}_{\langle\lambda\rangle} \otimes \theta.$$

Comme  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ ,  $\text{Nrd}_B(s \otimes 1) = N_{K/F}(l)$  pour un certain  $l \in K^\times$ . Le degré de  $D$  étant  $2m+1$ ,  $\text{Nrd}_B(s \otimes 1) = \text{Nrd}_{M_2(K)}(s)^{2m+1} = \lambda^{2m+1}$ , on en déduit  $\lambda = N_{K/F}(l') = \iota(l')l'$  pour  $l' = l\lambda^{-1}$ . En posant  $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l' \end{pmatrix} \otimes 1$  on

obtient l'égalité

$$\begin{aligned} s \otimes 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \iota(l') \end{pmatrix} \otimes 1 \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l' \end{pmatrix} \otimes 1 \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \iota(l') \end{pmatrix} \otimes 1 \right) \\ &= b \cdot (\text{ad}_{\langle 1 \rangle} \otimes \theta)(b). \end{aligned}$$

On en conclut

$$\tau = \text{Int}(b) \circ (\text{ad}_{\langle 1 \rangle} \otimes \theta) \circ \text{Int}(b^{-1}) = \text{ad}_{\langle 1 \rangle} \otimes \theta = \text{hyp.}$$

□

### 3.4. Décomposabilité en degré 6

On se donne  $(Q, \gamma)$  (resp.  $(D, \theta)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale munie d'une involution  $K/F$ -unitaire de degré 2 (resp. de degré 3). Pour les involutions unitaires sur des  $F$ -algèbres simples centrales de degré 3, l'invariant de Milnor faiblement relatif  $f_3^{\theta_0}$  classe les involutions. De même, l'invariant de Milnor  $e_2^{\sigma_0}$  relatif à une involution orthogonale de degré 2 sur  $A$  une  $F$ -algèbre de degré 4 classe les involutions orthogonales sur  $A$ . Lorsque  $(A, \sigma)$  est une  $F$ -algèbre de degré 8 munie d'une involution orthogonale, ce même invariant  $e_2^{\sigma_0}$  détermine s'il existe  $(D', \sigma')$  une involution orthogonale sur une algèbre de biquaternions sur  $F$  et  $\lambda \in F^\times$  tels que  $(A, \sigma) = \text{Ad}_{\langle \lambda \rangle} \otimes (D', \sigma')$ . D'où la question suivante,

*A-t-on  $R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$  si et seulement si  $(B, \tau) = \text{Ad}_{\langle \lambda \rangle} \otimes (D, \theta)$  ?*

Par conséquent, l'invariant de Milnor de degré 3 pour les involutions unitaires sur des  $K$ -algèbres de degré 6 possède la propriété suivante.

**Théorème 3.4.1.** — *Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré 6 et d'indice 3 et  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$  représentant un élément de  $\text{Unit}_B^3(F)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe une  $F$ -algèbre simple centrale à involution  $K/F$ -unitaire  $(D, \theta)$  et  $\lambda \in F^\times$  tels que*

$$(B, \tau) = (D, \theta) \otimes_K (\text{Ad}_{\langle \lambda \rangle} \otimes_F (K, \iota));$$

2. *L'involution  $\tau$  est hyperbolique ;*
3.  *$R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ .*

**Remarque.** — Cette démonstration reprend un raisonnement similaire à celui développé dans la démonstration du Théorème 6.1.1.

*Démonstration.* — La preuve est décomposée en trois étapes.

Par la Proposition 3.3.1, on a l'implication  $1) \Rightarrow 2)$ .

L'implication  $2) \Rightarrow 3)$  est relativement triviale car toutes les involutions unitaires hyperboliques sur une même algèbre simple centrale sont conjuguées.

Enfin, il reste l'implication  $3) \Rightarrow 1)$ . Soit  $\theta$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $D$ ,  $s \in \text{Sym}(D, \theta)$  et  $h = \langle\langle s \rangle\rangle$  une  $(D, \theta_0)$ -forme hermitienne tels que  $(B, \tau) = \text{Ad}_h$ . Par hypothèse et par la Proposition 3.2.1,

$${}^R f_3^{\theta_0}(\text{Int}(s) \circ \theta_0) = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0.$$

Par le Corollaire 1.4.3, les involutions unitaires  $\text{Int}(s) \circ \theta$  et  $\theta$  sont conjuguées. Il existe dès lors  $u \in B^\times$  tel que  $\theta = \text{Int}(u) \circ \text{Int}(s) \circ \theta \circ \text{Int}(u^{-1})$ . Cela implique  $\theta = \text{Int}(us) \circ \theta \circ \text{Int}(u^{-1}) = \theta \circ \text{Int}(\theta(u)^{-1}s^{-1}u^{-1})$ . Par conséquent, il existe  $\lambda \in K$  tel que  $\theta(u)^{-1}s^{-1}u^{-1} = \lambda$ , donc  $a = \lambda\theta(u)u$ . D'où la forme hermitienne  $h = \langle\langle s \rangle\rangle$  est isométrique à  $\langle\langle \lambda \rangle\rangle$  et  $(B, \tau) = \text{Ad}_{\langle\langle \lambda \rangle\rangle} \otimes (D, \theta)$  est totalement décomposable.  $\square$

### 3.5. Vers une classification en degré 6

Le troisième invariant permet aussi de classer certaines algèbres simples centrales munies d'une involution unitaire de degré 6. En effet, dans le cas où  $B$  est déployée on a la Proposition suivante.

**Proposition 3.5.1.** — *Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale déployée de degré 6,  $\tau$  et  $\tau_0$  deux involutions  $K/F$ -unitaires sur  $B$  représentant des éléments de  $\text{Unit}_B^3(F)$ . Alors  $\tau_0$  et  $\tau$  sont conjuguées si et seulement si  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ .*

*Démonstration.* — En effet, comme  $B$  est déployée, il existe deux  $(K, \iota)$ -formes hermitiennes  $h$  et  $h_0$  telles que  $[h], [h_0] \in \mathbf{Herm}_{6,K}^3(F)$ ,  $\text{ad}_h = \tau$  et  $\text{ad}_{h_0} = \tau_0$ . Etant donné que  ${}^R e_3^{\tau_0}$  est un invariant de Milnor,  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = {}^H e_3^{h_0}(h) = {}^H e_3(h - h_0)$ . Si  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ ,  $0 = {}^H e_3(h - h_0) = {}^H e_3(q_h - q_{h_0})$ .

Les  $K$ -formes hermitiennes  $h$  et  $h_0$  peuvent s'écrire  $h = \langle -a, -b, ab \rangle - \langle N_{K/F}(l) \rangle \cdot \langle -c, -d, cd \rangle$  et  $\langle -a_0, -b_0, a_0 b_0 \rangle - \langle N_{K/F}(l_0) \rangle \cdot \langle -c_0, -d_0, c_0 d_0 \rangle$ . En effet, comme  $[h] \in \mathbf{Herm}_{6,K/F}^2$ , il existe  $a, b, c, d, e \in F$  et  $l \in K^\times$  tels que

$$\begin{aligned} h &= \langle a, b, c, d, e, abcde N_{K/F}(l) \rangle \\ &= \langle abc \rangle \cdot \langle bc, ac, ab, abcd, abce, de N_{K/F}(l) \rangle \end{aligned}$$

En posant  $a' = -bc$ ,  $a'' = -ca$ ,  $c' N_{K/F}(l) = -abcd$  et  $d' N_{K/F}(l) = -abce$ ,

$$h = \langle abc \rangle \langle -a', -b', a'b', -c' N_{K/F}(l), -d' N_{K/F}(l), c'd' N_{K/F}(l) \rangle.$$

On calcule à présent

$$\begin{aligned} q_h &= \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot (\langle -a, -b, ab \rangle - \langle -N_{K/F}(l) \rangle \cdot \langle -c, -d, cd \rangle) \\ &= \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot (\langle\langle a, b \rangle\rangle - \langle\langle c, d \rangle\rangle). \end{aligned}$$



De même,

$$q_{h_0} = \langle\langle \delta \rangle\rangle \cdot (\langle\langle a_0, b_0 \rangle\rangle - \langle\langle c_0, d_0 \rangle\rangle).$$

Comme  ${}_ce_3(q_h - q_{h_0}) = 0$ , on a  $q_h = q_{h_0} \bmod I^4 F$ , et par [Hof99] les deux formes sont similaires. Donc  $h \sim h_0$  et  $\tau_0 = \text{ad}_{h_0} = \text{ad}_h = \tau$ .  $\square$

Il reste maintenant à établir le résultat dans le cas général. On a déjà montré que toute involution qui annule  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$  est conjuguée à l'involution hyperbolique. On constate aussi la

**Proposition 3.5.2.** — *Soit  $(D, \theta)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 6 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire et  $s, s_0 \in \text{Sym}(D, \theta)$ . On pose les  $(D, \theta)$ -formes hermitiennes  $h = \langle\langle s \rangle\rangle$  et  $h_0 = \langle\langle s_0 \rangle\rangle$  et les  $F$ -algèbres à involution  $K/F$ -unitaire  $(B, \tau_0) = \text{Ad}_{h_0, (D, \theta)}$  et  $(B, \tau) = \text{Ad}_{h, (D, \theta)}$ . On suppose de plus que  $\tau$  et  $\tau_0$  représentent des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Alors  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$  si et seulement si  $\tau$  et  $\tau_0$  sont conjuguées.*

*Démonstration.* — La condition suffisante est évidente. Il reste donc à montrer la condition nécessaire. Soit  $\tau$  et  $\tau_0$  comme dans l'énoncé et telles que  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ . Par le Theorème 3.2.1,

$$\begin{aligned} 0 &= {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) \\ &= {}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) + {}^R e_3^{\tau_0}(\text{hyp}) \\ &= f_3^\theta(\text{Int}(s) \circ \theta) - f_3^\theta(\text{Int}(s_0) \circ \theta) \\ &= f_3^{\text{Int}(s_0) \circ \theta}(\text{Int}(s) \circ \theta). \end{aligned}$$

Par le Corollaire 1.4.3,  $\text{Int}(s_0) \circ \theta$  et  $\text{Int}(s) \circ \theta$  sont conjuguées. Il existe  $\lambda \in K^\times$  et  $u \in \text{Sym}(D, \text{Int}(s) \circ \theta)$  tels que  $s_0 s^{-1} = \lambda u (\text{Int}(s) \circ \theta)(u)$ . En prenant la norme réduite de part et d'autre de l'égalité on obtient

$$\text{Nrd}(s_0 s^{-1}) = \lambda^3 \text{Nrd}_D(u) \iota(\text{Nrd}_D(u)).$$

Comme  $\tau$  et  $\tau_0$  représentent des éléments de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ , il existe  $l$  et  $l_0 \in K^\times$  tels que  $\text{Nrd}_D(s) = N_{K/F}(l)$  et  $\text{Nrd}_D(s_0) = N_{K/F}(l_0)$ . D'où

$$\lambda = (\lambda^{-1} l^{-1} l_0 \text{Nrd}_D(u)^{-1}) \iota(\lambda^{-1} l^{-1} l_0 \text{Nrd}_D(u)^{-1}).$$

Et en posant  $v = \lambda^{-1} l^{-1} l_0 \text{Nrd}_D(u)^{-1}$ , on a  $s_0 s^{-1} = v (\text{Int}(s) \circ \theta)(v)$  et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_0 s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v (\text{Int}(s) \circ \theta)(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \cdot \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

d'où l'involution  $\tau_0 = \text{Int} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_0 s^{-1} \end{pmatrix} \circ \tau$  est conjuguée à  $\tau$ .  $\square$

*Question :* Deux involutions  $\text{ad}_{\langle\langle s \rangle\rangle, (D, \theta)}$  et  $\text{ad}_{\langle\langle s_0 \rangle\rangle, (D, \theta_0)}$  telles que  $\theta_0$  et  $\theta$  ne sont pas conjuguées vérifient-elles  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{\langle\langle s_0 \rangle\rangle, (D, \theta_0)}) = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{\langle\langle s \rangle\rangle, (D, \theta)})$  si et seulement si elles sont conjuguées ?



## CHAPITRE 4

### SUR L'INVARIANT COHOMOLOGIQUE DE DEGRÉ 3 POUR LES INVOLUTIONS UNITAIRES DE DEGRÉ 4

**Résumé.** — La section 4.1 vise à démontrer l'unicité de l'invariant de Milnor relatif de degré 3 dans le cas où le degré de  $B$  est 4. Ce résultat permet de donner une nouvelle écriture de l'invariant de Milnor relatif  ${}^R e_3^{\tau_0}$  en termes de formes quadratiques liées aux involutions unitaires via leurs algèbres de Clifford par le Théorème 4.2.1. Cette écriture, plus explicite, permet de donner un critère d'isomorphisme pour les involutions unitaires d'algèbre discriminante triviale dans le Théorème 4.2.5. Ce sera l'objet de la section\*\*\*. Dans la section 4.3, on établit ensuite une autre expression de l'invariant, dans le cadre des involutions unitaires ayant une descente orthogonale. Pour cela, on précise un résultat de Jacobson (Proposition 4.3.5) puis l'image du morphisme

$$\partial : H^1(F, O^+(A, \sigma)) \rightarrow H^2(F, \mu_2)$$

lorsque  $A$  est une algèbre de biquaternions (Proposition 4.3.7). Tout cela permet de préciser le lien entre les invariants de Milnor relatifs lors d'une descente orthogonale via le Théorème 4.3.8. Enfin, la section 4.4 donne une démonstration élémentaire du lien entre l'invariant de Milnor relatif pour les involutions unitaires et l'invariant de Milnor relatif pour les involutions symplectiques, lors d'une descente symplectique.

#### Notations

Dans ce chapitre,  $F$  est un corps commutatif fixé de caractéristique différent de 2,  $\delta$  un élément non nul de  $F - F^2$  et  $K$  est l'extension quadratique de  $F$  définie par  $K = F[X]/(X^2 - \delta)$ .

Pour toute involution orthogonale  $\sigma_0$ , on notera par  $e_3^R(\cdot/\sigma_0)$  l'invariant de Milnor relatif à  $\sigma_0$  de degré 3 construit dans [QMT]. Pour toute involution symplectique  $\gamma_0$ , on notera par  $\Delta_{\gamma_0}$  l'invariant de Milnor relatif à  $\gamma_0$  de degré

3 construit dans [BMT03] et par  $\Delta$  l'invariant de Milnor de degré 3 construit dans [GPT09].

#### 4.1. Unicité de l'invariant de Milnor relatif de degré 3

Soit  $(B, \tau_0)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Par la Proposition 1.1.40, il existe  $Q_1$  et  $Q_2$  deux  $F$ -algèbres de quaternions telles que  $B = Q_1 \otimes Q_2 \otimes K$ . On pose  $A = Q_1 \otimes Q_2 \otimes (K, t)_{F((t))}$  une  $F((t))$ -algèbre simple centrale de degré 8 totalement décomposable. Par [GS06, Théorème 4.1], en posant  $L$  le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer associée à l'algèbre  $A$ , le noyau de l'application

$$\text{res}_{L/F((t))} : H^3(F((t)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est  $F((t))^\times \cdot [A]$  car  $A$  est totalement décomposable. On va montrer la

**Proposition 4.1.1 (Tignol).** — *Avec les notations ci-dessus, soit*

$$\text{res}_{F((t))/F} : H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(F((t)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

*et on suppose de plus que  $B$  n'est pas déployée. Alors*

$$\ker(\text{res}_{L/F((t))} \circ \text{res}_{F((t))/F}) = \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

*Démonstration.* — Soit  $\xi \in \ker(\text{res}_{L/F((t))} \circ \text{res}_{F((t))/F})$ . Par ce qui est dit précédemment,  $\text{res}_{F((t))/F}(\xi) = \lambda \cdot [A]$  pour  $\lambda \in F((t))^\times$ . Comme [Lam05],

$$F((t))^\times / F((t))^\times{}^2 = \left\{ \mu F((t))^\times{}^2, \mu t F((t))^\times{}^2 \mid \mu \in F^\times / F^{\times 2} \right\}$$

deux cas se présentent.

Si  $\lambda \in F^\times$ , alors

$$\text{res}_{F((t))/F}(\xi) = \lambda \cdot [A] = \lambda \cdot ([Q_1] + [Q_2] + [(\delta, t)]).$$

En appliquant  $\partial_t$  l'application résiduelle pour la valuation  $t$ -adique à l'égalité précédente, on obtient [GMS03, p.19]

$$0 = \partial_t(\text{res}_{F((t))/F}(\xi)) = (\lambda, \delta).$$

Ceci entraîne l'existence de  $l \in K^\times$  tel que  $\lambda = N_{K/F}(l)$ . De l'autre côté, si on applique l'évaluation en  $t = 0$  [GMS03, p.19]

$$\partial_0(\text{res}_{F((t))/F}(\xi)) = \xi = \lambda \cdot ([Q_1] + [Q_2]).$$

D'où  $\xi = N_{K/F}(l) \cdot [A]$  qui vit dans  $\text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$ .

Si  $\lambda = \mu t$  pour  $\mu \in F^\times$ , alors  $\lambda \cdot [A] = (\mu t) \cdot ([Q_1] + [Q_2]) + (\mu t, \delta, t)$ . Comme  $(\mu t, \delta, t) = (-\mu, \delta, t)$ , la valuation  $\partial_t$  donne

$$0 = \partial_t(\text{res}_{F((t))/F}(\xi)) = [Q_1] + [Q_2] + (-\mu, \delta).$$

Donc  $B = Q_1 \otimes Q_2 \otimes K \sim (-\mu, \delta)_F \otimes K$  et est donc déployée. Contradiction.  $\square$

Ceci entraîne le

**Corollaire 4.1.2.** — Soit  $(B, \tau_0)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Il existe une unique chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 3.

*Démonstration.* — En effet, si  $B$  est déployée, le résultat est évident. Sinon, soit  $e_3$  et  $f_3$  deux invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 3. Comme  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ , par la Proposition 1.1.40 il existe  $A$  une  $F$ -algèbre de biquaternions telle que  $B = A_0 \otimes K$ . En posant  $A = A_0 \otimes (\delta, t)$  et  $L$  le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de  $A_{F((t))}$ , l'algèbre  $B_L$  est déployée donc  $f_3 = e_3$  sur  $\mathbf{Unit}_B^3(L)$ . Or,  $\ker(\text{res}_{L/F}) = \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$  par la Proposition 4.1.1. En conséquence,  $f_3 \equiv e_3 \pmod{\text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])}$ . Or, les chaînes d'invariants considérées sont à coefficients dans  $\mathbf{M}_{B,K}^i$ . En particulier, les invariants  $e_3$  et  $f_3$  sont dans  $\mathbf{M}_{B,K}^3 = H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/\text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$  et donc  $f_3 = e_3$ . En conclusion,  ${}^R e_3^{\tau_0}$  est l'unique invariant de Milnor relatif de degré 3.  $\square$

#### 4.2. Interprétation de l'invariant en termes de formes quadratiques

Soit fixée une  $K$ -algèbre simple centrale  $B$  de degré 4 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire  $\tau_0$  telle que  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Cette section a pour but de donner une expression concrète de l'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$  en termes de formes quadratiques.

D'après la Proposition 1.1.40, comme l'involution  $K/F$ -unitaire  $\tau_0$  représente un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ , elle peut se réécrire sous la forme

$$(B, \tau_0) = (((a_0, b_0)_F, \text{can}) \otimes_F ((c_0, d_0)_F, \text{can})) \otimes (K, \iota).$$

Soit la  $F$ -forme quadratique  $q_{\tau_0} = \langle -c_0, -d_0, c_0 d_0, \delta a_0, \delta b_0, -\delta a_0 b_0 \rangle$ , alors

$$(B, \tau_0) = (C_0(q_{\tau_0}), \text{can}).$$

**Remarque.** — La notation  $q_{\tau_0}$  est abusive car la forme dépend d'un choix de l'écriture de  $(B, \tau_0)$ . Mais toutes les formes  $q_{\tau_0}$  construites selon ce procédé sont similaires. En effet, soit une autre forme  $q'_{\tau_0}$  telle que  $(C_0(q'_{\tau_0}), \text{can})$  est isomorphe à  $(B, \tau_0)$ . Par le [KMRT98, Théorème 15.24], on sait que

$$D(B, \tau_0), \text{can}) = \text{Ad}_{q'_{\tau_0}} = \text{Ad}_{q_{\tau_0}}.$$

Ceci permet de dire que  $q_{\tau_0}$  est similaire à  $q'_{\tau_0}$  et donc que  $q_{\tau_0}$  est bien définie à similitude près.

Soit l'égalité suivante

$$\mathbf{SQuad}_{q_{\tau_0}}^2(F) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Les } F\text{-formes quadratiques de dimension 6} \\ \text{et de discriminant } \delta \text{ à similitude près} \end{array} \right\},$$

il existe une correspondance 1 – 1

$$\coprod_{B'} \mathbf{Unit}_{B'}^3(F) \leftrightarrow \mathbf{SQuad}_{q_{\tau_0}}^2(F)$$

où  $B'$  parcourt les  $K$ -algèbres simples centrales de degré 4 à isomorphisme près. D'après [Kar-QM], elle est définie par les applications

$$\begin{aligned} \mathbf{SQuad}_{q_{\tau_0}}^2(F) &\rightarrow \coprod_{B'} \mathbf{Unit}_{B'}^3(F) \\ [q] &\mapsto [(C_0(q), \text{can})]; \\ \coprod_{B'} \mathbf{Unit}_{B'}^3(F) &\rightarrow \mathbf{Quad}_{q_{\tau_0}}^2(F) \\ [\tau] &\mapsto [q_{\tau}]. \end{aligned}$$

De cette correspondance découle le résultat suivant.

**Théorème 4.2.1.** — Soit  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ ,  $\tau$  une involution  $K_L/L$ -unitaire sur  $B_L$  telle que  $[\tau_L] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(L)$ ,  $q_0$  une  $F$ -forme quadratique et  $q$  une  $L$ -forme quadratique, telle que  $[q] \in \mathbf{Quad}_{q_0}^2(L)$ , telles que  $(C_0(q_0), \text{can}) = (B, \tau_0)$  et  $(C_0(q), \text{can}) = (B_L, \tau)$ . Alors il existe  $x \in L$  tel que  $[C(q)] = [C(q_0)_L] + (\delta, x)$  dans  $\text{Br}(L)$ . De plus, la transformation naturelle suivante

$$\mathcal{Q}_{e_3^{\tau_0}} : \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3 \rightarrow \mathbf{M}_{B,K}^3$$

définie par  $\mathcal{Q}_{e_3^{\tau_0}}(\tau) = {}_c e_3(\langle x \rangle q_{0_L} - q)$  est un invariant relatif à  $\tau_0$  qui complète la chaîne d'invariants cohomologiques relatifs de degré 3.

*Démonstration.* — Sans perdre de généralité, on peut supposer  $L = F$ . Les classes des involutions  $\tau$  et  $\tau_0$  ayant un second invariant trivial, on pose  $a, b, c, d, a_0, b_0, c_0$  et  $d_0$  des éléments de  $F$  tels que

$$\begin{aligned} (B, \tau) &= ((a, b)_F, \text{can}) \otimes ((c, d)_F, \text{can}) \otimes (K, \iota) \\ \text{et } (B, \tau_0) &= ((a_0, b_0)_F, \text{can}) \otimes ((c_0, d_0)_F, \text{can}) \otimes (K, \iota). \end{aligned}$$

Soit  $q = \langle -a, -b, ab, \delta c, \delta d, -\delta cd \rangle$  et  $q_0 = \langle -a_0, -b_0, a_0 b_0, \delta c_0, \delta d_0, -\delta c_0 d_0 \rangle$ , alors  $(B, \tau) = (C_0(q), \text{can})$  et  $(B, \tau_0) = (C_0(q_0), \text{can})$ . Comme  $C_0(q) \simeq C_0(q_0)$  et  $\text{disc}(q) = \text{disc}(q_0) = \delta \cdot F^{\times 2}$ , on a  $K = F(\sqrt{\text{disc}(q)})$  et  $C(q)_K = C(q_0)_K$ . D'où  $C(q) \sim C(q_0) \otimes (\text{disc}(q), x)_F$  pour un certain  $x$  dans  $F$ . Comme  $\text{disc}(q) = \text{disc}(q_0)$ , on a  $[C(q)] + [C(q_0)] = [C(q - q_0)]$  dans  $\text{Br}(F)$  par [Lam05, (3.13) et (3.16)] et

$$[(\delta, x)_F] = [C(q - q_0)] = {}_c e_2(q - q_0) \in H^2(F, \mu_2).$$

De l'autre côté [Lam05, (3.13) et (3.16)], on sait que  $C(\langle x \rangle q)$  et  $(\text{disc}(q), x)_F$  ( $= (\delta, x)_F$ ) sont Brauer-équivalents, donc

$$\begin{aligned} {}_c e_2(\langle x \rangle q - q_0) &= {}_c e_2(\langle x \rangle q - q + q - q_0) \\ &= {}_c e_2(-\langle x \rangle q + q) + {}_c e_2(q - q_0) \\ &= [C(\langle x \rangle q)] + [(\delta, x)_F] \\ &= [(\delta, x)_F] + [(\delta, x)_F] \\ &= 0 \in H^2(F, \mu_2). \end{aligned}$$

**Lemme 4.2.2.** — *La valeur de  ${}_c e_3(\langle x \rangle q - q_0)$  est indépendante du choix de  $x$  tel que  $[C(q)] = [C(q_0)_L] + (\delta, x)$ .*

*Démonstration.* — Par fonctorialité, il est suffisant de le faire pour  $L = F$ . Soit  $x'$  tel que  ${}_c e_2(\langle x' \rangle q - q_0) = 0$ . Comme  $[\langle x \rangle q - \langle x' \rangle q]$  est dans  $\mathbf{Quad}_{12,F}^1(F)$ , il est possible de calculer  ${}_c e_2(\langle x \rangle q - \langle x' \rangle q)$ . D'où

$$\begin{aligned} {}_c e_2(\langle x \rangle q - \langle x' \rangle q) &= {}_c e_2(\langle x \rangle q - q_0 + q_0 - \langle x' \rangle q) \\ &= {}_c e_2(\langle x \rangle q - q_0) - {}_c e_2(\langle x' \rangle q - q_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne  $[\langle x' \rangle q - \langle x \rangle q] \in \mathbf{Quad}_{12,F}^3(F)$ . De l'autre côté,

$${}_c e_2(\langle x \rangle q - \langle x' \rangle q) = [C(\langle xx' \rangle q)] = [(xx', \delta)_F].$$

Donc  $[\langle xx', \delta \rangle] \in \mathbf{Quad}_{4,F}^3(F)$ . Par [Lam05, Hauptsatz 1.5], la forme quadratique  $\langle xx', \delta \rangle$  est hyperbolique. D'où le calcul suivant

$${}_c e_3(\langle x' \rangle q - q_0) = {}_c e_3(\langle x' \rangle q - \langle x \rangle q) + {}_c e_3(\langle x \rangle q - q_0)$$

Reste alors à calculer  ${}_c e_3(\langle x' \rangle q - \langle x \rangle q)$ .

$$\begin{aligned} {}_c e_3(\langle x' \rangle q - \langle x \rangle q) &= {}_c e_3(\langle xx' \rangle q) \\ &= (xx') \cdot {}_c e_2(q) \\ &= (xx') \cdot [C(q)] \end{aligned}$$

D'où

$${}_c e_3(\langle x' \rangle q - q_0) = {}_c e_3(\langle x \rangle q - q_0) + (xx') \cdot [C(q)]$$

où  $[C(q)]$  est telle que  $[C(q)_K] = [B]$ . Sachant que  $\langle xx', \delta \rangle = 0$ ,  $\delta = N_{K/F}(l)$  pour un certain  $l \in K^\times$ , on obtient

$$\begin{aligned} {}_c e_3(\langle x' \rangle q - q_0) &= {}_c e_3(\langle x \rangle q - q_0) + (N_{K/F}(l)) \cdot [C(q)] \\ &= {}_c e_3(\langle x \rangle q - q_0) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]). \end{aligned}$$

□

*Suite de la démonstration du Théorème 4.2.1.* — Pour finir la démonstration, il reste à vérifier si l'écriture est indépendante du choix de  $q$  et  $q_0$ . On a  $(C_0(q), \text{can}) = (C_0(q'), \text{can})$  si et seulement si  $q$  et  $q'$  sont similaires. Il suffit donc de vérifier si

$${}_ce_3(\langle x \rangle \lambda q - \lambda_0 q_0) = {}_ce_3(\langle x \rangle q - q_0) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$$

pour tout  $\lambda, \lambda_0$  tels que  ${}_ce_2(\langle x \rangle \lambda q - \lambda_0 q_0) = 0$ . Or

$${}_ce_3(\langle x \rangle \lambda q - \lambda_0 q_0) = {}_ce_3(\langle x \lambda \lambda_0 \rangle q - q_0)$$

et  ${}_ce_2(\langle x \lambda \lambda_0 \rangle q - q_0) = 0$ , donc par le lemme 4.2.2

$${}_ce_3(\langle x \lambda \lambda_0 \rangle q - q_0) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) = {}_ce_3(\langle x \rangle q - q_0) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

Ceci permet de conclure que l'invariant est bien défini.  $\square$

**Proposition 4.2.3.** — *L'invariant  $Qe_3^{\tau_0}$  est un invariant de Milnor relatif à  $\tau_0$  et complète la chaîne d'invariants de Milnor relatifs à  $\tau_0$  de degré 3.*

*Démonstration.* — Pour montrer cela, il suffit de considérer le cas où  $B$  est déployée. Alors  $\tau_0$  et  $\tau$  sont adjointes à des  $(K, \iota)$ -formes hermitiennes  $h_0$  et  $h$  représentant des éléments de  $\mathbf{Herm}_{4,K}^3(F)$ .

En supposant premièrement que  $\tau_0$  est l'involution hyperbolique,  $h_0$  est similaire à  $\langle 1, 1 \rangle$ . Comme  $[h] \in \mathbf{Herm}_{4,K}^3(F)$ ,  $h \sim \langle a, b \rangle$  avec  $a$  et  $b$  dans  $F^\times$ . D'où

$$(B, \tau) = \text{Ad}_{\langle a, b \rangle, (K\iota)} = \text{Ad}_{\langle a \rangle, (K\iota)} \otimes \text{Ad}_{\langle b \rangle, (K\iota)}.$$

Pour trouver l'algèbre  $Q_\lambda$  telle que  $(Q_\lambda, \text{can}) \otimes (K, \iota) = \text{Ad}_{\langle \lambda \rangle, (K\iota)}$ , on va reprendre la démonstration de la [KMRT98, Proposition 2.22].

On peut voir que  $\text{ad}_{\langle \lambda \rangle, (K, \iota)} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota(x) & -\iota(z)\lambda^{-1} \\ -\lambda\iota(y) & \lambda\iota(t)\lambda^{-1} \end{pmatrix}$ . Soit l'involution symplectique canonique sur  $M_2(K)$ . Elle est définie par  $\text{can} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$ . D'où la composition

$$\text{ad}_{\langle \lambda \rangle, (K, \iota)} \circ \text{can} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota(t) & \iota(z)\lambda^{-1} \\ \lambda\iota(y) & \lambda\iota(x)\lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Soit alors  $Q_\lambda = \text{Sym}(M_2(K), \text{ad}_{\langle \lambda \rangle, (K, \iota)} \circ \text{can})$ . On a

$$Q_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\delta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\delta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\delta} \\ \sqrt{\delta}\lambda & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (\lambda, \delta)_F$$

La  $F$ -algèbre de quaternions  $Q_\lambda$  est stable par  $\tau$  et est l'algèbre recherchée.

Donc  $(B, \tau) = ((a, \delta)_F, \text{can}) \otimes ((b, \delta)_F, \text{can}) \otimes (K, \iota)$ . Les deux algèbres  $(a, \delta)_F \otimes (b, \delta)_F$  et  $(ab, \delta)_F$  étant Brauer équivalentes, l'invariant vaut

$$Qe_3^{\text{hyp}}(\tau) = {}_ce_3(\langle ab \rangle \cdot (\langle -a, -\delta, a\delta, \delta b, 1, -b \rangle) - \langle -1, -\delta, \delta, \delta, 1, -1 \rangle).$$



On en déduit

$$\begin{aligned}
Q_{e_3^{\text{hyp}}}(\tau) &= {}_c e_3(\langle ab \rangle \cdot (\langle \langle a, \delta \rangle \rangle - \langle \delta \rangle \cdot \langle \langle b, \delta \rangle \rangle - \langle \langle \delta \rangle \rangle) + \langle \langle \delta \rangle \rangle) \\
&= {}_c e_3(\langle ab, -b, -ab\delta, b\delta, ab, -a, -ab\delta, a\delta, -ab, ab\delta, 1, -\delta \rangle) \\
&= {}_c e_3(\langle 1, -a, -b, ab \rangle + \langle -\delta \rangle \cdot \langle 1, -a, -b, ab \rangle) \\
&= (\delta, a, b) = {}_c e_3^{\langle \langle h_0 \rangle \rangle}(h).
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $\tau_0$  n'est pas hyperbolique. On pose  $q$  et  $q_0$  deux formes quadratiques telles que  $(C_0(q_0), \text{can}) = (B, \tau_0)$  et  $(C_0(q), \text{can}) = (B, \tau)$ . A l'instar du cas précédent,  $h_0 = \langle \langle a_0, b_0 \rangle \rangle$  et  $(B, \tau_0) = ((a_0, \delta)_F, \text{can}) \otimes ((b_0, \delta)_F, \text{can}) \otimes (K, \iota)$ . Comme

$$(a, \delta) \otimes (b, \delta) \otimes (a_0, \delta) \otimes (b_0, \delta) = (aba_0b_0, \delta),$$

il s'ensuit l'égalité souhaitée

$$\begin{aligned}
Q_{e_3^{\tau_0}}(\tau) &= {}_c e_3(\langle aba_0b_0 \rangle \cdot q - q_0) \\
&= {}_c e_3(\langle aba_0b_0 \rangle \cdot q - \langle a_0b_0 \rangle \cdot \langle \langle \delta \rangle \rangle + \langle a_0b_0 \rangle \cdot \langle \langle \delta \rangle \rangle - q_0) \\
&= {}_c e_3(\langle aba_0b_0 \rangle \cdot q - \langle a_0b_0 \rangle \cdot \langle \langle \delta \rangle \rangle) + {}_c e_3(\langle a_0b_0 \rangle \cdot \langle \langle \delta \rangle \rangle - q_0) \\
&= {}_c e_3(\langle ab \rangle \cdot q - \langle \langle \delta \rangle \rangle) - {}_c e_3(\langle a_0b_0 \rangle \cdot q_0 - \langle \langle \delta \rangle \rangle) \\
&= Q_{e_3^{\text{hyp}}}(\tau) + Q_{e_3^{\text{hyp}}}(\tau_0) \\
&= {}_c e_3^{\langle \langle 1, 1 \rangle \rangle}(h) - {}_c e_3^{\langle \langle 1, 1 \rangle \rangle}(h_0) = {}_c e_3^{h_0}(h).
\end{aligned}$$

□

Par le Corollaire 4.1.2, l'invariant explicité ici est l'invariant déduit de l'invariant de Rost. Et donc on a la

**Proposition 4.2.4.** — *Pour toute algèbre simple centrale de degré 4 à involution unitaire totalement décomposable  $(B, \tau_0)$ ,*

$${}^R e_3^{\tau_0} = Q_{e_3^{\tau_0}}.$$

Cette description de l'invariant relatif  ${}^R e_3^{\tau_0}$  permet de montrer un critère d'isomorphisme pour toutes les involutions unitaires totalement décomposables sur  $B$ .

**Théorème 4.2.5.** — *Soit  $B$  une algèbre simple centrale sur  $K$  de degré 4,  $\tau$  une involution  $K_L/L$ -unitaire telle que  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(L)$  pour un certain corps  $L \in \mathfrak{Fields}_F$ . Alors  $\tau$  est conjuguée à  $\tau_{0_L}$  si et seulement si  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de le prouver pour  $L = F$ . Soit  $q$  et  $q_0$  deux formes de dimension 6 et de discriminant  $\delta$  telles que  $(C_0(q), \text{can}) = (B, \tau)$

et  $(C_0(q_0), \text{can}) = (B, \tau_0)$ . L'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau)$  vaut  ${}^c e_3(q - \langle x \rangle q_0)$  pour un certain  $x$  tel que  $q - \langle x \rangle q_0 \in I^3 F$ . Si  $(B, \tau) = ((a, b)_F, \text{can}) \otimes ((c, d)_F, \text{can}) \otimes (K, \iota)$  et  $(B, \tau_0) = ((a_0, b_0)_F, \text{can}) \otimes ((c_0, d_0)_F, \text{can}) \otimes (K, \iota)$ , on peut prendre

$$q = \langle -a, -b, ab, \delta c, \delta d, -\delta cd \rangle$$

$$\text{et } q_0 = \langle -a_0, -b_0, a_0 b_0, \delta c_0, \delta d_0, -\delta c_0 d_0 \rangle$$

Comme  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$ , il existe  $l \in K$  tel que  ${}^c e_3(q - \langle x \rangle q_0) = (N_{K/F}(l)) \cdot [A]$ . Or

$$\begin{aligned} [A] &= {}^c e_2(\langle\langle a, b \rangle\rangle + \langle\langle c, d \rangle\rangle) \\ &= {}^c e_2(\langle\langle a, b \rangle\rangle + \langle -\delta \rangle \langle\langle c, d \rangle\rangle) \\ &= {}^c e_2(q + \langle\langle \delta \rangle\rangle). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} {}^c e_3(q - \langle x \rangle q_0) &= {}^c e_3(\langle\langle N_{K/F}(l) \rangle\rangle \cdot (q + \langle\langle \delta \rangle\rangle)) \\ &= {}^c e_3(\langle\langle N_{K/F}(l) \rangle\rangle \cdot q) \end{aligned}$$

Ceci permet de dire que  $\langle N_{K/F}(l) \rangle q - \langle x \rangle q_0 \in I^4 F$ . Mais la dimension de cette forme quadratique est 12, la forme est donc hyperbolique et  $\langle N_{K/F}(l) \rangle q = \langle x \rangle q_0$  [Lam05, Hauptsatz]. Les formes  $q$  et  $q_0$  étant similaires,  $(C_0(q), \text{can}) = (C_0(q_0), \text{can})$  et  $\tau$  est conjuguée à  $\tau_0$ .  $\square$

### 4.3. Cas d'une descente orthogonale sur une algèbre $A$

**Définition 4.3.1.** — Une  $F$ -algèbre simple centrale à involution  $K/F$ -unitaire  $(B, \tau)$  a une *descente orthogonale* (resp. *une descente symplectique*) s'il existe une  $F$ -algèbre à involution  $(A, \sigma)$  munie d'une involution orthogonale  $\sigma$  telle que  $\sigma \otimes \iota = \tau$  (resp. symplectique  $\gamma$  telle que  $\gamma \otimes \iota = \tau$ ). On dit que *l'involution  $\tau$  descend sur  $A$* .

Dans cette section, on étudie le comportement de l'invariant relatif  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau)$  lorsque  $\tau$  et  $\tau_{0_L}$  descendent sur une même  $L$ -algèbre simple centrale  $A$ .

**4.3.1. Théorème de Jacobson.** — Pour obtenir une écriture particulière de l'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}$ , on va préciser un résultat de Jacobson.

**Théorème 4.3.2 (Jacobson).** — Soit  $Q_1, Q_2, Q_3$  et  $Q_4$  quatre algèbres de quaternions sur  $F$  telles que  $Q_1 \otimes Q_2 = Q_3 \otimes Q_4$ . Alors il existe  $\lambda$  dans  $F$  tel que

$$\text{Nrd}_{Q_1} - \text{Nrd}_{Q_2} = \lambda(\text{Nrd}_{Q_3} - \text{Nrd}_{Q_4}) \text{ dans } W(F).$$

La précision porte sur la valeur de  $\lambda$  qui lie les deux formes quadratiques (Witt-équivalentes à des formes de Albert). Pour cela, on va utiliser une méthode pour retrouver toutes les formes de Albert de  $A$  à partir d'une involution orthogonale totalement décomposable  $\sigma$ .

Soit  $(A, \sigma_0)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une involution orthogonale totalement décomposable. Il existe  $Q_1$  et  $Q_2$  deux  $F$ -algèbres de quaternions telles que

$$(A, \sigma_0) = (Q_1, \text{can}) \otimes (Q_2, \text{can}).$$

Avec ces notations,  $\text{Skew}(A, \sigma_0)$  peut s'écrire  $Q_1^0 \otimes 1 + 1 \otimes Q_2^0$ . Soit alors l'application

$$\begin{aligned} p_0 : \text{Skew}(A, \sigma_0) &\rightarrow \text{Skew}(A, \sigma_0) \\ x \otimes 1 + 1 \otimes y &\mapsto x \otimes 1 - 1 \otimes y. \end{aligned}$$

On constate que l'application

$$\begin{aligned} q_0 : \text{Skew}(A, \sigma_0) &\rightarrow F^\times \\ a &\mapsto ap_0(a) (= p_0(a)a) \end{aligned}$$

est une forme quadratique de dimension 6, Witt-équivalente à  $\text{Nrd}_{Q_2} - \text{Nrd}_{Q_1}$ . On retrouve ainsi une forme de Albert qui "correspond" à la décomposition de l'involution  $\sigma_0$ .

Soit  $\sigma$  une seconde involution orthogonale totalement décomposable sur  $A$  et  $Q_3$  et  $Q_4$  deux  $F$ -algèbres de quaternions telles que

$$(A, \sigma) = (Q_3, \text{can}) \otimes (Q_4, \text{can}).$$

On sait qu'il existe  $(s, \lambda) \in \text{Sym}(A, \sigma_0) \times F^\times$  tel que  $\sigma = \text{Int}(s) \circ \sigma_0$  et  $\text{Nrd}_A(s) = \lambda^2$ . Le but est de montrer que l'on peut retrouver la décomposition de  $\sigma$  par la seule connaissance de  $(s, \lambda)$ .

Pour cela on pose l'application linéaire suivante

$$\begin{aligned} p_{(s, \lambda)} : \text{Skew}(A, \sigma) &\rightarrow \text{Skew}(A, \sigma) \\ a &\mapsto \lambda p_0(s^{-1}a)s^{-1}. \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions de la

**Proposition 4.3.3.** — [KMRT98, Proposition 16.22] *Soit  $(A, \sigma)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une involution orthogonale totalement décomposable. Il existe une application linéaire*

$$p_\sigma : \text{Skew}(A, \sigma) \rightarrow \text{Skew}(A, \sigma)$$

*telle que*

1.  $ap_\sigma(a) = p_\sigma(a)a \in F$  pour tout  $a \in \text{Skew}(A, \sigma)$
2.  $a \in \text{Skew}(A, \sigma)$  est inversible si et seulement si  $ap_\sigma(a) \neq 0$ .

*L'application linéaire est définie de manière unique à scalaire près.*

En remplaçant dans la construction précédente  $\sigma_0$  par  $\sigma$ , la proposition indique que  $p_{(s,\lambda)}(x \otimes 1 + 1 \otimes y) = \mu(x \otimes 1 - 1 \otimes y)$  pour  $x \in Q_3$ ,  $y \in Q_4$  et  $\mu \in F^\times$ . Or, on peut vérifier si  $p_{(s,\lambda)}^2 = \text{Id}$ . En effet,  $(s^{-1}a)p_0(s^{-1}a) \in F$  et

$$\begin{aligned} ap_{(s,\lambda)}(a) &= a\lambda p_0(s^{-1}a)s^{-1} \\ &= \lambda s(s^{-1}a)p_0(s^{-1}a)s^{-1}. \end{aligned}$$

Par [KMRT98, Proposition 16.22], on a

$$\begin{aligned} p_{(s,\lambda)}^2(a) &= \lambda p_0(s^{-1}\lambda p_0(s^{-1}a)s^{-1})s^{-1} \\ &= \lambda^2 p_0(s^{-1}p_0(s^{-1}a)s^{-1})s^{-1} \\ &= \lambda^2 \text{Nrd}(s^{-1})\sigma(s^{-1})^{-1}p_0(p_0(s^{-1}a))(s^{-1})^{-1}s^{-1} \\ &= \lambda^2 \lambda^{-2} s p_0^2(s^{-1}a). \end{aligned}$$

Or,  $p_0^2 = \text{Id}$ , d'où  $p_{(s,\lambda)}^2(a) = ss^{-1}a = a$ . De l'autre côté, en utilisant cette expression  $p_{(s,\lambda)}(x \otimes 1 + 1 \otimes y) = \mu(x \otimes 1 - 1 \otimes y)$ , on obtient l'égalité  $p_{(s,\lambda)}^2(a) = \mu^2 a$ . Ceci permet de dire que  $\mu = \pm 1$ .

Pour remettre la main sur les algèbres de quaternions décomposant  $\sigma$ , on remarque que dans la construction de  $p_0$ ,  $Q_1$  est l'algèbre engendrée par les éléments symétriques de  $p_0$  et  $Q_2$  est celle engendrée par les éléments anti-symétriques de  $p_0$ . Ainsi, on pose  $Q_1 = Q^+$ ,  $Q_2 = Q^-$  et

$$\begin{aligned} Q_{(s,\lambda)}^+ &= \begin{array}{l} \text{L'algèbre de quaternions engendrée par } a \in \text{Skew}(A, \sigma) \\ \text{tels que } p_{(s,\lambda)}(a) = a \end{array} \\ Q_{(s,\lambda)}^- &= \begin{array}{l} \text{L'algèbre de quaternions engendrée par } a \in \text{Skew}(A, \sigma) \\ \text{tels que } p_{(s,\lambda)}(a) = -a \end{array}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $p_0$  lorsque l'on remplace  $\sigma_0$  par  $\sigma$  et l'égalité  $p_{(s,\lambda)}(x \otimes 1 + 1 \otimes y) = \pm(x \otimes 1 - 1 \otimes y)$ , on obtient l'égalité suivante d'ensembles

$$\{Q_3, Q_4\} = \{Q_{(s,\lambda)}^+, Q_{(s,\lambda)}^-\}.$$

D'où la

**Proposition 4.3.4.** — *Pour toute involution orthogonale totalement décomposable  $\sigma$  et  $\sigma_0$  sur une  $F$ -algèbre  $A$  de degré 4, soit  $(s, \lambda) \in \text{Sym}(A, \sigma) \times F^\times$  tel que  $\text{Int}(s) \circ \sigma_0 = \sigma$  et  $\text{Nrd}_A(s) = \lambda^2$ . Alors*

$$(A, \sigma) = (Q_{(s,\lambda)}^+, \text{can}) \otimes (Q_{(s,\lambda)}^-, \text{can}).$$

On obtient également

$$\begin{aligned} p_{(s,\lambda)} : Q_{(s,\lambda)}^+ \otimes 1 + 1 \otimes Q_{(s,\lambda)}^- &\rightarrow Q_{(s,\lambda)}^+ \otimes 1 + 1 \otimes Q_{(s,\lambda)}^- \\ x \otimes 1 + 1 \otimes y &\mapsto x \otimes 1 - 1 \otimes y. \end{aligned}$$

En conséquence, pour  $a = x \otimes 1 + 1 \otimes y$ , on a

$$q_{(s,\lambda)}(a) = p_{(s,\lambda)}(a)a = \text{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-}(y) - \text{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+}(x).$$

Tout ceci permet la réécriture suivante

**Proposition 4.3.5.** — *Soit une involution totalement décomposable  $\sigma_0$  sur  $A$  telle que  $(A, \sigma_0) = (Q^+, \text{can}) \otimes (Q^-, \text{can})$  et un couple  $(s, \lambda) \in \text{Sym}(A, \sigma_0) \times F^\times$  tel que  $\text{Nrd}_A(s) = \lambda^2$ , alors*

$$\lambda(\text{Nrd}_{Q^+} - \text{Nrd}_{Q^-}) = \text{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+} - \text{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-}.$$

*Démonstration.* — Comme  $p_{(s,\lambda)}(a) = \lambda p_0(s^{-1}a)s^{-1}$  et, pour  $a = x \otimes 1 + 1 \otimes y$ ,

$$p_0(s^{-1}a)s^{-1}a = \text{Nrd}_{Q^-}(s^{-1}y) - \text{Nrd}_{Q^+}(s^{-1}x),$$

on obtient  $p_{(s,\lambda)}(a)a = \lambda p_0(s^{-1}a)s^{-1}a = \lambda(\text{Nrd}_{Q^-}(s^{-1}y) - \text{Nrd}_{Q^+}(s^{-1}x))$ . De l'autre côté,  $p_{(s,\lambda)}(a)a = (\text{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-}(y) - \text{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+}(x))$ .  $\square$

**4.3.2. L'homomorphisme de connexion  $\partial : H^1(F, O^+(A, \sigma_0)) \rightarrow H^2(F, \mu_2)$  pour  $\deg(A) = 4$ ,  $\text{disc}(\sigma_0) = 1$ .** — En gardant les notations de la section 4.3.1, on sait [Tao95, Théorème 4.12] que  $C(A, \sigma_0) \simeq Q_1 \times Q_2$  et  $\sigma_0$  est hyperbolique si et seulement si  $Q_1$  ou  $Q_2$  est déployée.

Pour  $(A, \sigma) = (Q_3, \text{can}) \otimes (Q_4, \text{can})$  avec  $\sigma = \text{Int}(s) \circ \sigma_0$  et  $\text{Nrd}(s) = \lambda^2$ , alors d'après [Dej98, 3.1] et [GTW07, Théorème M1] on a

$$\{\partial(s, \lambda), \partial(s, -\lambda)\} = \{[Q_1 \otimes Q_3], [Q_1 \otimes Q_4]\} = \{[Q_2 \otimes Q_3], [Q_2 \otimes Q_4]\}.$$

On va préciser quel élément est  $\partial(s, \lambda)$ .

**Proposition 4.3.6.** — *Soit  $(A, \sigma_0)$  et  $(s, \lambda) \in \text{Sym}(A, \sigma_0) \times F$  comme ci-dessus tels que  $(A, \sigma) = (A, \sigma_0)$ , alors*

$$\partial(s, \lambda) \simeq [Q_{(s,\lambda)}^+ \otimes Q^+] \left( = [Q_{(s,\lambda)}^- \otimes Q^-] \right).$$

*Démonstration.* — Si  $A$  est déployée, il n'y a rien à faire car  $[(s, \lambda)] = [(s, -\lambda)]$  dans  $H^1(F, O^+(A, \sigma_0))$ . On peut donc supposer que  $[A]$  est non nulle. Comme  $\sigma$  et  $\sigma_0$  sont conjugués, la classe de  $(s, \lambda)$  dans  $H^1(F, O^+(A, \sigma_0))$  est soit la classe représentée par  $(1, -1)$  soit par  $(1, 1)$ . Par définition,  $p_{(1,1)} = \lambda p_0 = p_0$  et  $p_{(1,-1)} = -p_0$ . Donc  $Q_{(1,1)}^+ = Q^+ = Q_1$  et  $Q_{(1,-1)}^+ = Q^- = Q_2$  et on a l'égalité suivante d'ensembles

$$\{\partial(s, \lambda), \partial(s, -\lambda)\} = \{0, [A]\}$$

De l'autre côté, l'application  $\partial$  étant un morphisme d'ensemble pointé, la classe de  $(1, 1)$  est dès lors envoyée sur 0 dans  $H^2(F, \mu_2)$  et la classe de  $(1, -1)$  sur  $[A]$ . Ceci permet de conclure la démonstration.  $\square$

A présent, on va montrer cette égalité dans le cas général.

**Proposition 4.3.7.** — Soit  $(A, \sigma_0)$ ,  $(A, \sigma)$  et  $(s, \lambda)$  tels que  $\text{Nrd}(s) = \lambda^2$  et  $\text{Int}(s) \circ \sigma_0 = \sigma$ . Alors

$$\partial(s, \lambda) = [Q_{(s, \lambda)}^+ \otimes Q^+] \left( = [Q_{(s, \lambda)}^- \otimes Q^-] \right).$$

*Démonstration.* — Par l'absurde, on suppose

$$(s, \lambda) = [Q_{(s, \lambda)}^- \otimes Q^+] \neq [Q_{(s, \lambda)}^+ \otimes Q^+].$$

Alors l'algèbre  $A$  n'est pas déployée et  $\sigma$  n'est pas conjuguée à  $\sigma_0$  par la Proposition 4.3.6.

Si  $Q_{(s, \lambda)}^+$  est déployée, alors  $Q^+$  et  $Q^-$  ne sont pas déployées, sinon  $\sigma$  et  $\sigma_0$  seraient toutes deux hyperboliques et donc conjuguées. Soit  $L$  un corps de déploiement de  $Q^+$ , alors  $\sigma$  et  $\sigma_0$  sont conjugués sur  $L$ . Autrement dit  $\partial(s, \lambda)_L = [Q_{(s, \lambda)_L}^+ \otimes Q_L^+] = 0$ . De l'autre côté, par la fonctorialité de  $\partial$ ,  $\partial(s, \lambda)_L = [Q_{(s, \lambda)_L}^- \otimes Q_L^+]$  et  $Q_{(s, \lambda)}^- \otimes Q^+$  est déployée sur  $L$ . Or,  $Q^+$  est déployée sur  $L$  donc  $Q_{(s, \lambda)}^-$  est déployée sur  $L$ . Comme  $Q_{(s, \lambda)}^+$  est déployée et  $A = Q_{(s, \lambda)}^+ \otimes Q_{(s, \lambda)}^-$ , on a  $A$  déployée sur  $L$ . Donc  $Q^-$  est aussi déployée sur  $L$ . Si  $Q^- = Q^+$ ,  $A$  est déployée, contradiction. Si  $Q^-$  est déployée,  $\sigma$  et  $\sigma_0$  sont conjuguées, contradiction. Donc  $Q_{(s, \lambda)}^+$  n'est pas déployée. Par un raisonnement identique  $Q_{(s, \lambda)}^-$  n'est pas déployée.

Reste alors à considérer le cas où  $Q_{(s, \lambda)}^-$  et  $Q_{(s, \lambda)}^+$  ne sont pas déployées. Soit  $L$  un corps de déploiement de  $Q_{(s, \lambda)}^+$ , par ce qui est fait au-dessus,  $\partial(s, \lambda)_L = [(Q_{(s, \lambda)}^+ \otimes Q^+)_L]$ . De l'autre côté, par fonctorialité  $\partial(s, \lambda)_L = [(Q_{(s, \lambda)}^- \otimes Q^+)_L]$ . Ceci entraîne que  $Q_{(s, \lambda)}^-$  est déployée sur  $L$ . Comme  $Q_{(s, \lambda)}^-$  n'est pas déployée,  $Q_{(s, \lambda)}^- = Q_{(s, \lambda)}^+$ . Mais alors  $A$  est déployée, contradiction.  $\square$

**4.3.3. Relation entre  $\partial$  et  ${}^R e_3^{\tau_0}$ .** — Soit fixée  $\tau_0$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$  telle que  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Il existe donc  $Q_1$  et  $Q_2$  deux algèbres de quaternions sur  $F$  telles que  $(B, \tau_0) = (Q_1, \text{can}) \otimes (Q_2, \text{can}) \otimes (K, \iota)$ . On pose  $(A, \sigma_0) = (Q_1, \text{can}) \otimes (Q_2, \text{can})$  et soit fixé  $(s, \lambda) \in \text{Sym}(A, \sigma_0) \times F$ ,  $\text{Nrd}(s) = \lambda^2 \in F^\times$  et  $\sigma = \text{Int}(s) \circ \sigma_0$ . Comme mentionné dans la Proposition 4.3.4,

$$(A, \sigma) = (Q_{(s, \lambda)}^+, \text{can}) \otimes (Q_{(s, \lambda)}^-, \text{can})$$

et on note  $\tau$  l'involution  $\sigma \otimes \iota$  qui, par construction, vit dans  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3(F)$ .

Par ce qui est fait précédemment, il est possible d'avoir une nouvelle écriture de l'invariant qui dépend uniquement d'une classe  $(s, \lambda)$  représentant  $\sigma$  dans  $H^1(F, O^+(A, \sigma_0))$ .

**Théorème 4.3.8.** — Pour  $(B, \tau_0)$  (resp  $(B, \tau)$ ) une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire avec une descente orthogonale

$\sigma_0$  (resp  $\text{Int}(s) \circ \sigma_0$ ) sur  $A$  telle que  $\text{Nrd}_A(s) = \lambda^2$ ,

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = [A] \cdot (\lambda) + \partial(s, \lambda) \cdot (\delta) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

*Démonstration.* — Si  $K = F \times F$ , alors l'invariant  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = 0$  car  $\tau$  et  $\tau_0$  sont conjuguées. De l'autre côté, Convention 1.1.33, il existe  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 telle que  $(B, \tau) = (A \times A^{op}, \epsilon)$ . Comme  $A$  est de degré 4, il existe  $Q_1$  et  $Q_2$  deux  $F$ -algèbres de quaternions telles que  $A = Q_1 \otimes Q_2$ .

Soit  $1, i_l, j_l$  dans  $Q_l$  tels que  $i_l^2, j_l^2 \in F^\times$  et  $i_l j_l = -j_l i_l$ . Alors l'application qui envoie  $i_l^{op}$  sur  $i_l$ ,  $j_l^{op}$  sur  $j_l$  et  $j_l i_l^{op}$  sur  $i_l j_l$  est un isomorphisme. Soit  $\varphi_1 : Q_1 \rightarrow Q_1^{op}$  et  $\varphi_2 : Q_2 \rightarrow Q_2^{op}$  ces isomorphismes. Par conséquent,

$$\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2 : A \rightarrow A^{op}$$

est un isomorphisme. De plus, si on considère l'anti-isomorphisme trivial  ${}^{op} : Q_l \rightarrow Q_l^{op}$ ,  $x \mapsto x^{op}$ , l'application  $\varphi_l \circ {}^{op} : Q_l \rightarrow Q_l$  est une involution orthogonale sur  $Q_l$  que l'on notera  $\sigma_l$  (il suffit de vérifier cela sur les générateurs  $i_l, j_l$  et  $i_l j_l$ ). Ceci permet de dire que  $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 (= \varphi \circ {}^{op})$  est une involution orthogonale sur  $A$ .

On constate alors que l'application

$$\begin{aligned} \phi : A \times A^{op} &\rightarrow A \otimes (F \times F) \\ (x, y^{op}) &\mapsto x \otimes (1, 0) + \varphi(y^{op}) \otimes (0, 1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres. De plus

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon(x, y^{op})) &= \phi(y, x^{op}) \\ &= y \otimes (1, 0) + \varphi(x^{op}) \otimes (0, 1) \\ &= \sigma \otimes \iota(\sigma(y) \otimes (0, 1)) + \sigma(x) \otimes (0, 1) \\ &= \sigma \otimes \iota(\varphi(y^{op}) \otimes (0, 1)) + \sigma \otimes \iota(x \otimes (1, 0)) \\ &= \sigma \otimes \iota(\phi(x, y^{op})). \end{aligned}$$

Donc  $(B, \tau) = (A, \sigma) \otimes (K, \iota)$  avec  $\sigma$  une involution orthogonale décomposable. D'où  $\text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) = F^\times \cdot [A]$ . Comme  $\partial(s, \lambda) \cdot (\delta) = \partial(s, \lambda) \cdot (1) = 0$ , la formule donne

$$[A] \cdot (\lambda) + \partial(s, \lambda) \cdot (\delta) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) = \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$$

qui est bien trivial dans  $\mathbf{M}_{B,K}^3$  et l'on a bien l'égalité souhaitée.

On se place à présent dans le cas où  $K$  est un corps. Comme  $\tau$  et  $\tau_0$  descendent sur la même algèbre  $A$ , alors

$$[Q_1] + [Q_2] + [Q_{(s,\lambda)}^+] + [Q_{(s,\lambda)}^-] = 0.$$

En reprenant la démonstration de la proposition 4.2.1, on constate que  ${}_c e_2(q - q_0) = 0$  où  $q$  et  $q_0$  sont telles que  $(C_0(q), \text{can}) = (B, \tau)$  et  $(C_0(q_0), \text{can}) = (B, \tau_0)$

et par 4.3.5,

$$\mathrm{Nrd}_{Q_1} - \mathrm{Nrd}_{Q_2} = \lambda(\mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+} - \mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-}).$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) &= {}_c e_3(q - q_0) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= {}_c e_3(\mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+} - \langle \delta \rangle \mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-} - \mathrm{Nrd}_{Q_1} + \langle \delta \rangle \mathrm{Nrd}_{Q_2}) \\ &\quad + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= {}_c e_3(\mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+} - \langle \delta \rangle \mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-} - \langle \lambda \rangle (\mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^+} - \mathrm{Nrd}_{Q_{(s,\lambda)}^-}) \\ &\quad - \mathrm{Nrd}_{Q_2} + \langle \delta \rangle \mathrm{Nrd}_{Q_2}) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= [Q_{(s,\lambda)}^+] \cdot (\lambda) + [Q_{(s,\lambda)}^-] \cdot (\lambda \delta) + [Q_2] \cdot (\delta) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= [Q_{(s,\lambda)}^+] \cdot (\lambda) + [Q_{(s,\lambda)}^-] \cdot (\lambda) + [Q_{(s,\lambda)}^-] \cdot (\delta) + [Q_2] \cdot (\delta) \\ &\quad + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= [A] \cdot (\lambda) + ([Q_{(s,\lambda)}^-] \otimes Q_2) \cdot (\delta) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]). \end{aligned}$$

Or la Proposition 4.3.7, donne  $[Q_{(s,\lambda)}^-] \otimes Q_2 = \partial(s, \lambda)$ .  $\square$

**Remarque.** — Le résultat du Théorème 4.3.8 peut se réécrire autrement. Le morphisme de groupes algébriques  $\iota : \mathrm{O}^+(A, \sigma_0) \rightarrow \mathrm{SL}_1(A)$  induit un morphisme d'ensembles de cohomologie

$$\begin{aligned} i_1 : H^1(F, \mathrm{O}^+(A, \sigma_0)) &\rightarrow H^1(F, \mathrm{SL}_1(A)) \simeq F^\times / \mathrm{Nrd}_A(F^\times) \\ (s, \lambda) &\mapsto \lambda. \end{aligned}$$

Soit  $R_A$  l'invariant de Rost de  $\mathrm{SL}_1(A)$ , on a  $R_A \circ i_1(s, \lambda) = \lambda \cdot [A]$ . D'où

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = R_A \circ i_1(s, \lambda) + (\delta) \cdot \partial(s, \lambda) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

D'où les questions suivantes :

*Question 1 :* La formule  ${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = R_A \circ i_1(s, \lambda) + (\delta) \cdot \partial(s, \lambda) + \mathrm{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$  est-elle vraie pour des  $K$ -algèbres simples centrales  $B$  de degré  $2^n$  ?

*Question 2 :* En notant  $i_2 : H^1(F, \mathrm{O}^+(A, \sigma_0)) \rightarrow H^1(F, \mathrm{SU}(B, \tau_0))$ , a-t-on  $R_{\tau_0} \circ i_2(s, \lambda) = R_A \circ i_1(s, \lambda) + (\delta) \cdot \partial(s, \lambda)$  pour des  $K$ -algèbres simples centrales  $B$  de degré  $2^n$  ?

#### 4.4. Cas d'une descente symplectique sur une algèbre $A$

On considère à présent le cas d'une descente symplectique. Soit  $\tau$  et  $\tau_0$  deux involutions  $K/F$ -unitaires fixées sur  $B$  telles que  $[\tau]$  et  $[\tau_0]$  appartiennent à  $\mathrm{Unit}_B^3(F)$  et  $\gamma, \gamma_0$  deux involutions symplectiques sur  $A$  telles que  $\tau$  descende sur  $\gamma$  et  $\tau_0$  descende sur  $\gamma_0$ .

On peut établir une relation via la nouvelle description de l'invariant unitaire et la relation  $B_2 \equiv C_2$ . En effet, si  $(A, \gamma)$  est une  $F$ -algèbre de biquaternions



munie d'une involution symplectique, il existe  $q$  une forme quadratique de dimension 5 et de discriminant trivial telle que  $(C_0(q), \text{can}) = (A, \gamma)$ . Dans ce cas, si  $q_0$  et  $q$  sont deux formes quadratiques définissant  $(A, \gamma_0)$  et  $(A, \gamma)$  l'invariant relatif associé

$$\Delta_{\gamma_0}(\gamma) = e_3^{q_0}(q).$$

Ceci est une conséquence de l'unicité de l'invariant de Milnor et de [KMRT98, Exemple 16.15 et Proposition 16.18]. Or

**Proposition 4.4.1.** — *Si  $(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes (K, \iota)$  et  $(A, \gamma) = (C_0(q), \text{can})$  pour une forme quadratique  $q$  de dimension 5 et de discriminant trivial,*

$$(B, \tau) = (C_0(q \perp \langle -\delta \rangle), \text{can}).$$

*Démonstration.* — Soit  $\{e_1, \dots, e_5\}$  une base orthogonale de  $q$  et  $\{e'_1, \dots, e'_6\}$  une base orthogonale de  $q \perp -\delta$ . On construit le morphisme d'algèbres

$$\phi : C_0(q \perp -\delta), \text{can} \rightarrow (C_0(q), \text{can}) \otimes (K, \iota)$$

défini par  $\phi(e'_i e'_j) = e_i e_j \otimes 1$  pour tout  $i, j \leq 5$  et  $\phi(e'_1 \dots e'_6) = 1 \otimes \sqrt{\delta}$ . L'algèbre engendrée par  $\phi(e'_i e'_j)$  pour tout  $i, j \leq 5$  est  $C_0(q)$ . De plus, l'image est stable pour l'involution canonique induite par  $(C_0(q \perp -\delta), \text{can})$ , qui coïncide avec l'involution sur  $(C_0(q), \text{can})$ . De l'autre côté, l'algèbre engendrée par  $\phi(e_1 \dots e_6)$  est le centre de  $C_0(q) \otimes K$  qui vaut  $K$ , et est stable pour l'involution induite qui coïncide avec  $\iota$ . L'image de  $\phi$  contient  $C_0(q) \otimes K$ , c'est une surjection. Par raison de dimension, c'est une bijection. Comme les involutions correspondent sous  $\phi$ , on obtient un isomorphisme d'algèbre à involutions, d'où la proposition.  $\square$

**Proposition 4.4.2.** — *Soit  $(B, \tau_0)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 4 munie d'une involution  $K/F$ -unitaire telle que  $[\tau_0] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Soit  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire telle que  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$  et soit  $\gamma_0$  et  $\gamma$  deux involutions symplectiques sur une  $F$ -algèbre simple centrale  $A$  telle que  $\tau_0$  descende sur  $\sigma_0$  et  $\tau$  descende sur  $\sigma$ . Alors*

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$

*Démonstration.* — Ceci découle de

$$\begin{aligned} {}^R e_3^{\tau_0}(\tau) &= {}_c e_3(q - \langle \delta \rangle - q_0 + \langle \delta \rangle) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= {}_c e_3(q - q_0) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]). \end{aligned}$$

$\square$

**Exemple 4.4.3.** — Soit  $s \in \text{Sym}(A, \gamma_0)$  tel que  $\text{Int}(s) \circ \gamma_0 = \gamma$  alors

$${}^R e_3^{\tau_0}(\tau) = (\text{Nrp}_{\gamma_0}(s)) \cdot [A] + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]).$$



## CHAPITRE 5

### SUR L'INVARIANT COHOMOLOGIQUE DE DEGRÉ 3 POUR LES INVOLUTIONS UNITAIRES DE DEGRÉ 8

**Résumé.** — Lorsque l'algèbre  $B$  est de degré 8 et d'indice divisant 4, il est possible de créer un invariant de Milnor absolu de degré 3 pour les involutions unitaires d'algèbre discriminante triviale en considérant l'invariant de Milnor relatif à l'involution hyperbolique. Dans la section 5.1, on montre que cet invariant  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$ , lorsque l'involution est totalement décomposable, détecte l'écriture de  $B$  sous la forme  $D_K$  pour  $D$  une  $F$ -algèbre de biquaternions. En se restreignant à une algèbre ayant cette écriture dans la section 5.2, on entame un critère de décomposabilité totale, dans le cas déployé par la Proposition 5.2.2 et pour certaines involutions dans le cas où l'indice de  $B$  vaut 4 par la Proposition 5.2.3. Enfin, dans la section 5.3, on élabore une involution unitaire d'algèbre discriminante triviale, totalement décomposable ayant un invariant de Milnor de degré 3 non trivial.

#### Notations

Dans ce chapitre,  $F$  est un corps commutatif fixé de caractéristique différente de 2,  $\delta$  un élément non nul de  $F - F^2$  et  $K$  est l'extension quadratique de  $F$  définie par  $K = F[X]/(X^2 - \delta)$ .

On dira que  $(B, \tau)$  est totalement décomposable si  $(B, \tau) = \bigotimes_{i=1}^3 (Q_i, \gamma_i)$ , où  $(Q_i, \gamma_i)$  sont des algèbres de quaternions munie d'involution unitaire.

Pour toute involution symplectique  $\gamma_0$ , on notera par  $\Delta_{\gamma_0}$  l'invariant de Milnor relatif à  $\gamma_0$  de degré 3 construit dans [BMT03] et par  $\Delta$  l'invariant de Milnor de degré 3 construit dans [GPT09].

### 5.1. Condition nécessaire telle que ${}^R e_3^{\text{hyp}} = 0$

Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale de degré 8 et d'indice divisant 4. À la vue du comportement des invariants pour les involutions orthogonales (Théorème 4.3.4) ou symplectiques (Théorème 1.1.30), il était naturel d'espérer que l'invariant  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$  détecte la décomposition des involutions unitaires. Mais ce n'est pas le cas.

**Théorème 5.1.1.** — *Soit  $(B, \tau)$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 8 et d'indice divisant 4 à involution  $K/F$ -unitaire totalement décomposable. Alors  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$  si et seulement si  $B \sim D_K$  pour une certaine  $F$ -algèbre de biquaternions  $D$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\tau$  un involution  $K/F$ -unitaire totalement décomposable sur  $B$ . Donc il existe  $(Q_i, \tau_i)$  des  $K$ -algèbres de quaternions munies d'une involution  $K/F$ -unitaire pour  $i = 1, \dots, 3$  telles que  $(B, \tau) = \bigotimes_{i=1}^3 (Q_i, \tau_i)$ . Comme toute involution  $K/F$ -unitaire sur une  $K$ -algèbre de quaternions peut s'écrire  $(Q^F, \text{can}) \otimes (K, \iota)$ , il existe des  $F$ -algèbres de quaternions  $Q_i^F$  telles que

$$(B, \tau) = \left( \bigotimes_{i=1}^3 (Q_i^F, \text{can}) \right) \otimes (K, \iota).$$

D'où, en posant  $(A, \gamma) = \bigotimes_{i=1}^3 (Q_i^F, \text{can})$ , qui est une  $F$ -algèbre à involution symplectique totalement décomposable,  $(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes_F (K, \iota)$ .

En posant  $(Q'_1, \sigma_1)$  une  $F$ -algèbre de quaternions munie d'une involution orthogonale telle que  $(Q_1, \text{can}) \otimes (K, \iota) = (Q'_1, \sigma_1) \otimes (K, \iota)$  et en appelant  $(A', \sigma) = (Q'_1, \sigma) \otimes (Q_2, \text{can}) \otimes (Q_3, \text{can})$ , on a  $(B, \tau) = (A', \sigma) \otimes (K, \iota)$ . Puisque  $\sigma$  est décomposable, son discriminant est nul et par la [KMRT98, Proposition 10.33],

$$[D(B, \tau)] = [\lambda^4 A] + [(K, \text{disc}\sigma)] = 0.$$

L'involution  $\tau$  représente donc bien un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ .

On suppose à présent que  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ . Si  $A$  n'est pas à division,  $A \simeq D \otimes_F M_2(F)$  pour  $D$  une algèbre de biquaternions sur  $F$  et le résultat est évident. On peut donc supposer que  $A$  est d'indice 8.

Comme  $A_K = B$  est d'indice 4,  $K$  est un sous-corps de  $A$ . Il existe dès lors un élément  $u \in A$  tel que  $u^2 = \delta$ . On sait par [KMRT98, Théorème 4.14], que l'on peut trouver une involution symplectique  $\gamma_0$  telle que  $\gamma_0(u) = u$ . Soit l'involution  $K/F$ -unitaire  $\gamma_0 \otimes \iota$  sur  $B$ . On constate que l'élément  $e =$

$\frac{1}{2}(1 + \delta^{-2}u \otimes \sqrt{\delta})$  est un idempotent et de plus

$$\begin{aligned} \tau(e) &= \frac{1}{2}(1 + \delta^{-1}\gamma_0(u) \otimes \iota(\sqrt{\delta})) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \delta^{-1}u \otimes \sqrt{\delta}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1 + \delta^{-1}u \otimes \sqrt{\delta}) \\ &= 1 - e \end{aligned}$$

L'involution  $\gamma_0 \otimes \iota$  est alors hyperbolique.

Par le Corollaire 2.3.10,  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$ . Comme  $\gamma$  est totalement décomposable sur une algèbre de degré 8 par construction,  $\Delta(\gamma) = 0$ . De plus  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ , on a donc  $\Delta_{\gamma_0}(\gamma) = \Delta(\gamma) - \Delta(\gamma_0) = -\Delta(\gamma_0) \in \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B])$  et il existe  $\mu \in K^\times$  tel que  $\Delta(\gamma_0) = (N_{K/F}(\mu)) \cdot [A]$ .

Par la [GPT09, Section §7],  $\Delta_{\gamma_0} = e_3(s_*(\varphi))$  où  $\varphi$  est une forme d'Albert telle que  $e_2(\varphi) = [C_A K] = [A_K]$ . La [Bar1, Proposition 3.1] démontre que  $e_3(s_*(\varphi) = (N_{K/F}(\mu)) \cdot [A]$  implique que  $A = (K, \lambda) \otimes D$  avec  $D$  une  $F$ -algèbre de biquaternions et  $B = A_K \sim D_K$ .

On montre à présent la réciproque en supposant que  $B \sim D_K$  avec  $D$  une  $F$ -algèbre de biquaternions et  $(B, \tau) = (A, \gamma) \otimes_F (K, \iota)$  où  $\gamma$  est une involution symplectique totalement décomposable. Alors  $[A_K] = [D_K]$  dans  $\text{Br}_2(K)$  d'où  $A \simeq D \otimes_F (K, \lambda)$  pour un certain  $\lambda \in F$ . Soit  $D = Q_1^F \otimes Q_2^F$ ,  $\sigma_1$  une involution orthogonale sur  $Q_1^F$ ,  $\gamma_2$  l'involution symplectique sur  $Q_2^F$  et  $\sigma_3$  une involution orthogonale sur  $(K, \lambda)$  telle que  $\sigma_{3|_K} = \text{Id}_K$ . On pose

$$(A, \gamma_0) = (Q_1^F, \sigma_1) \otimes_F (Q_2^F, \gamma_2) \otimes_F ((K, \lambda)_F, \sigma_3),$$

qui devient hyperbolique  $(A, \gamma_0) \otimes_F (K, \iota) = (B, \text{hyp})$ . L'involution orthogonale  $\sigma_1 \otimes_F \sigma_3$  sur  $Q_1^F \otimes (K, \lambda)_F$  peut se réécrire  $\gamma_1 \otimes \gamma_3$  où les  $\gamma_i$  sont des involutions symplectiques sur  $Q_1'^F$  et  $Q_3'^F$  telles que  $Q_1 \otimes_F (K, \lambda)_F \simeq Q_1'^F \otimes_F Q_3'^F$ . L'involution symplectique  $\gamma_0$  est donc  $\gamma_1 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_3$ , son troisième invariant est nul. D'où

$$\begin{aligned} e_3^{\text{hyp}}(\tau) &= \Delta_{\gamma_0}(\gamma) + \text{cor}_{K/F}([B] \cdot K^\times) \\ &= \Delta(\gamma) - \Delta(\gamma_0) + \text{cor}_{K/F}([B] \cdot K^\times) \\ &= \text{cor}_{K/F}([B] \cdot K^\times). \end{aligned}$$

□

## 5.2. Cas où $[B] = [D_K]$

On se place dans le cas où  $B$  est Brauer-équivalent à  $D_K$ , où  $D$  est une  $F$ -algèbre de biquaternions.

**Corollaire 5.2.1.** — Soit  $\tau$  une involution  $K/F$ -unitaire totalement décomposable sur  $B$ , alors  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$

*Démonstration.* — Ceci est une conséquence du Théorème 5.1.1. □

Dans le cadre choisi, on peut se poser la question suivante.

*Question :* Une involution unitaire  $\tau$  est-elle totalement décomposable si et seulement si  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$  ?

Je n'ai pour le moment qu'une réponse positive partielle à cette question.

**Proposition 5.2.2.** — Si  $B$  est déployée, une involution  $K/F$ -unitaire  $\tau$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$  est totalement décomposable si et seulement si  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ .

*Démonstration.* — La condition suffisante est l'objet du Corollaire précédent. Reste la condition nécessaire.

Soit  $B$  déployée et une involution sur  $B$  adjointe à une forme hermitienne  $h$  telle que  $[\text{ad}_h] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ , autrement dit  $[h] \in \mathbf{Herm}_{8,K}^3(F)$ . Comme  $0 = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_h) = {}^c e_3(q_h)$  et que  $q_h$  est de dimension 16,  $q_h$  est similaire à 4-forme de Pfister  $\varphi$ . De plus,  $q_h$  contient la sous-forme  $\langle\langle \delta \rangle\rangle$ ,  $\varphi_K$  est isotrope. Etant une forme de Pfister,  $\varphi_K$  est hyperbolique et, par [Lam05, Théorème 4.5], la partie pure de  $\varphi$  représente  $-\delta$ . Ceci permet de dire que  $\varphi$  est une 4-forme de Pfister de la forme  $\langle\langle \delta, a, b, c \rangle\rangle$  pour  $a, b$  et  $c$  dans  $F$  [Lam05, Théorème 1.5]. Par conséquent,  $h \sim \langle\langle a, b, c \rangle\rangle$  et

$$\text{Ad}_h = \text{Ad}_{\langle\langle a, b, c \rangle\rangle} = \text{Ad}_{\langle\langle a \rangle\rangle} \otimes \text{Ad}_{\langle\langle b \rangle\rangle} \otimes \text{Ad}_{\langle\langle c \rangle\rangle}$$

qui est bien totalement décomposable. □

On remarque ensuite la

**Proposition 5.2.3.** — Soit  $B = M_2(D_K)$  où  $D$  est une  $F$ -algèbre de biquaternions et  $\text{ind} B = 4$ . Soit  $\theta$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $D_K$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_{D_K}^3(F)$  et  $s \in \text{Sym}(D_K, \theta)$ . Alors l'involution  $\text{ad}_{\langle\langle s \rangle\rangle, (D_K, \theta)}$  sur  $B$  est totalement décomposable si et seulement si  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{\langle\langle s \rangle\rangle, (D_K, \theta)}) = 0$ .

*Démonstration.* — Il reste à montrer la réciproque. Par la Proposition 2.2.6, on a

$${}^R e_3^{\theta}(\text{Int}(s) \circ \theta) = {}^R e_3^{\text{hyp}}(\text{ad}_{s, (D_K, \theta)}) = 0.$$

Par le Théorème 4.2.5, les involutions  $\theta$  et  $\text{Int}(s) \circ \theta$  sont conjuguées et, par un raisonnement similaire à celui de la démonstration du Théorème 6.1.1 ou de la démonstration de la Théorème 3.4.1, pour un certain  $\lambda \in F^\times$ , l'involution  $\text{ad}_{s, (D, \theta)} = \text{ad}_{\langle\langle \lambda \rangle\rangle} \otimes (D, \theta)$ . Etant donné que  $\theta$  représente un élément

de  $\mathbf{Unit}_{D_K}^3(F)$ , il existe deux  $K$ -algèbres de quaternions munies d'involutions  $K/F$ -unitaires  $(Q_i, \tau_i)$  telles que  $(D_K, \theta) = (Q_1, \tau_1) \otimes (Q_2, \tau_2)$  par la Proposition 1.1.40. En conséquence

$$(B, \tau) = \text{Ad}_{\langle\langle \lambda \rangle\rangle} \otimes (Q_1, \tau_1) \otimes (Q_2, \tau_2)$$

est totalement décomposable.  $\square$

*Question :* Le résultat est-il vrai lorsque  $\theta$  ne représente pas un élément de  $\mathbf{Unit}_D^3(F)$  ou lorsque  $\text{ind} D_K = 2$  ?

En attendant, voici une dernière proposition dans le cas considéré.

**Proposition 5.2.4.** — Soit  $B$  une  $K$ -algèbre simple centrale telle que  $[B] = [D_K]$  pour  $D$  une  $F$ -algèbre de biquaternions et  $\tau_0$  une involution  $K/F$ -unitaire sur  $B$  représentant un élément de  $\mathbf{Unit}_B^3(F)$ . Alors l'invariant de Milnor relatif à  $\tau_0$  de degré 3 est unique.

**Remarque.** — La démonstration de ce résultat est une généralisation de la Proposition 4.1.1.

*Démonstration.* — Soit  $e_3$  et  $f_3$  deux invariants de Milnor relatifs sur  $\mathbf{Unit}_{\tau_0}^3$ . Soit  $A = D \otimes (K, t)_{F((t))}$  et  $L$  le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de la  $F((t))$ -algèbre  $A$ . On constate

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{B,K}^3(F) &= H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) / \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [B]) \\ &= H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) / \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D_K]). \end{aligned}$$

Par la Proposition 4.1.1, l'application

$$\text{res}_{L/F} : H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) / \text{cor}_{K/F}(K^\times \cdot [D_K]) \rightarrow H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est injective, ceci entraîne l'injectivité de l'application

$$\text{res}_{L/F} : \mathbf{M}_{B,K}^3(F) \rightarrow H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Les invariants  $e_3$  et  $f_3$  étant des invariants de Milnor relatifs, ils coïncident sur tout corps déployant  $B$  et  $\text{res}_{L/F} \circ e_3 = \text{res}_{L/F} \circ f_3$ . Par l'injectivité de  $\text{res}_{L/F}$ , on démontre  $e_3 = f_3$ .  $\square$

Ce résultat permet de montrer l'unicité de l'invariant de Milnor relatif de degré 3 dans le cas considéré dans cette section. Ceci, je l'espère, permettra de donner une nouvelle expression de l'invariant...

### 5.3. Exemple d'involution unitaire totalement décomposable d'invariant ${}^R e_3^{\text{hyp}}$ non nul

Pour la présente section, la majorité des résultats se trouve dans [Bar2, §2.4]. Pour que le texte se suffise à lui-même, ces résultats, de même que leurs démonstrations, sont donnés ici bas.

On construit un exemple d'algèbre simple centrale de degré 8 munie d'une involution unitaire totalement décomposable et de troisième invariant  ${}^R e_3^{\text{hyp}}$  non nul. Comme l'annonce la Proposition 5.1.1, il suffit de construire une  $F$ -algèbre  $A$  d'indice 8 contenant  $K$  mais telle que  $[A_K] \neq [D_K]$  pour toute algèbre  $D$  de biquaternions sur  $F$ . Pour cela on se base sur un résultat de Tignol et de Merkurjev.

**Proposition 5.3.1.** — *Il existe  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 8 totalement décomposable, qui ne contient aucune sous algèbre de quaternions contenant  $K$  et telle que  $K \subset A$ .*

*Démonstration.* — Soit  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 8 et d'indice 8 indécomposable. Un résultat de Rowen permet de dire qu'il existe trois extensions quadratiques  $E_i$  de  $F$  telles que  $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 = E_1 E_2 E_3 \subset A$ . On pose  $E_1 = K$ . La démonstration du [Jac96, Théorème 5.6.38] permet de dire qu'il existe  $Q_i$  pour  $i = 1, \dots, 4$  des  $F$ -algèbres de quaternions telles que  $M_2(A) = Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3 \otimes Q_4$  et que  $K \subset Q_4$ . On pose  $A_0 = Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3$ . C'est une  $F$ -algèbre à division. Sinon  $[A_0] = [Q'_1 \otimes Q'_2]$  et  $[A_K] = [(Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3 \otimes Q_4)_K] = [A_{0_K}] = [(Q'_1 \otimes Q'_2)_K]$  et donc il existe  $\mu \in F^\times$  tel que  $[A] = [Q'_1 \otimes Q'_2 \otimes (K, \mu)]$ . Comme  $A$  et  $Q'_1 \otimes Q'_2 \otimes (K, \mu)$  sont de même degré et sont Brauer-équivalents, ils sont isomorphes et l'algèbre  $A$  est totalement décomposable ce qui n'est pas le cas. Donc  $A_0$  est d'indice 8.

Comme  $K \subset A$ ,  $[A_K]$  est d'indice 4. Ceci étant, l'égalité  $[A_{0_K}] = [A_K]$  assure que  $A_{0_K}$  est d'indice 4 et  $K \subset A_0$ . S'il existe  $\lambda \in F^\times$  tel que  $(K, \lambda) \subset A_0$ , alors il existe  $Q'_1$  et  $Q'_2$  deux  $F$ -algèbres de quaternions telles que  $A_0 = Q'_1 \otimes Q'_2 \otimes (K, \lambda)$ . Dès lors,  $[A_{0_K}] = [(Q'_1 \otimes Q'_2)_K] = [A_K]$ . Autrement dit, il existe  $\mu \in F^\times$  tel que  $[A] = [Q'_1 \otimes Q'_2 \otimes (K, \mu)]$  et  $A$  est totalement décomposable, ce qui n'est pas le cas. Ceci démontre que  $(K, \lambda)$  n'est pas inclus dans  $A_0$  pour tout  $\lambda \in K^\times$ .  $\square$

Soit  $A_0 = Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3$  une telle algèbre munie de l'involution symplectique  $\gamma = \text{can} \otimes \text{can} \otimes \text{can}$  et  $(B, \tau) = (A_0, \gamma) \otimes (K, \iota)$ . Alors on a le

**Corollaire 5.3.2.** — *L'involution  $\tau$  est totalement décomposable et  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau)$  est non nul.*

*Démonstration.* — Soit l'involution  $\gamma_0$  sur  $A$  telle que  $\tau_0 = \gamma_0 \otimes \iota$  soit hyperbolique sur  $B$  comme dans la démonstration du Théorème 5.1.1. Alors il



existe  $s \in \text{Sym}(A, \gamma_0)$  tel que  $\gamma = \text{Int}(s) \circ \gamma_0$ . Par [KMRT98, Proposition 2.9],  $\text{Nrd}_A(s) \in F^{\times^2}$ . Donc  $\tau = \text{Int}(s \otimes 1) \circ \tau_0$  et  $\text{Nrd}_B(s \otimes 1) \in F^{\times^2}$ . Ceci démontre que  $[\tau] \in \mathbf{Unit}_B^3(F)$ .

On suppose par l'absurde que  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ . Alors l'involution vérifie les conditions du Théorème 5.1.1 et  $[B] = [D_K]$  pour  $D$  une  $F$ -algèbre de bi-quaternions. Ceci contredit la construction de  $B$ .  $\square$

**Corollaire 5.3.3.** — *Soit  $F$  un corps tel que  $\mathbf{H}_F^3(F) = 0$ , alors toute  $F$ -algèbre simple centrale de degré 8 et d'exposant 2 est totalement décomposable.*

**Remarque.** — Ce résultat est à rapprocher du théorème de Merkurjev qui établit que sur un corps de dimension cohomologique au plus 2, toute algèbre à division d'exposant 2 est totalement décomposable.

*Démonstration.* — S'il existe  $A$  une  $F$ -algèbre simple centrale de degré 8 indécomposable, on peut construire  $A_0$ ,  $B$  et une involution  $K/F$ -unitaire  $\tau$  sur  $B$  comme ci-dessus. Sachant que  $\mathbf{H}_F^3(F) = 0$ ,  ${}^R e_3^{\text{hyp}}(\tau) = 0$ . Il existe par conséquent  $D$  une algèbre de biquaternions sur  $F$  telle que  $[B] = [D_K]$ . D'où,  $[D_K] = [A_{0_K}] = [A_K]$  et il existe  $\lambda \in F^\times$  tel que  $[D \otimes (K, \lambda)] = [A]$ . L'algèbre  $A$  devient totalement décomposable, contradiction.  $\square$



## CHAPITRE 6

### ON QUADRATIC FORMS OF DIMENSION 8, WITH CLIFFORD ALGEBRAS OF INDEX 4

**Résumé.** — Ce chapitre est le fruit d'un travail en collaboration avec Quéguiner-Mathieu et Tignol, qui a fait l'objet de la publication [MQMT09]. On y donne un critère de décomposabilité pour les involutions orthogonales dans la section 6.3 ainsi qu'une description concrète de l'algèbre de Clifford d'un transfert de forme quadratique dans la section 6.2. Enfin une démonstration plus élémentaire, jouant sur le lien entre les formes quadratiques et les algèbres à involution via les algèbres de Clifford, d'un résultat de Izhboldin et Karpenko concernant l'écriture d'une forme quadratique de dimension 8, de discriminant trivial et dont l'algèbre de Clifford est d'indice 4 [IK00, Théorème 16.10], est présentée dans la section 6.4.

Izhboldin and Karpenko proved in [IK00, Thm 16.10] that any quadratic form of dimension 8 with trivial discriminant and Clifford algebra of index 4 is isometric to the transfer, with respect to some quadratic étale extension, of a quadratic form similar to a two-fold Pfister form. We give a new proof of this result, based on a theorem of decomposability for degree 8 and index 4 algebras with orthogonal involution.

Let  $WF$  denote the Witt ring of a field  $F$  of characteristic different from 2. As explained in [Lam05, X.5 and XII.2], one would like to describe those quadratic forms whose Witt class belongs to the  $n$ th power  $I^n F$  of the fundamental ideal  $IF$  of  $WF$ . By the Arason-Pfister Hauptsatz, such a form is hyperbolic if it has dimension  $< 2^n$  and similar to a Pfister form if it has dimension  $2^n$ . More generally, Vishik's Gap Theorem gives the possible dimensions of anisotropic forms in  $I^n F$ .

In addition, one may describe explicitly, for some small values of  $n$ , low dimensional anisotropic quadratic forms in  $I^n F$ . This is the case, in particular, for  $n = 2$ , that is for even-dimensional quadratic forms with trivial discriminant.

In dimension 6, it is well known that such a form is similar to an Albert form, and uniquely determined up to similarity by its Clifford invariant. In dimension 8, if the index of the Clifford algebra is  $\leq 4$ , Izhboldin and Karpenko proved in [IK00, Thm 16.10] that it is isometric to the transfer, with respect to some quadratic étale extension, of a quadratic form similar to a two-fold Pfister form.

The purpose of this paper is to give a new proof of Izhboldin and Karpenko's result. Our proof is in the framework of algebras with involution, and does not use Rost's description of 14-dimensional forms in  $I^3 F$  (see [IK00, Rmk 16.11.2]). More precisely, we use triality [KMRT98, (42.3)] to translate the question into a question on algebras of degree 8 and index 4 with orthogonal involution. Our main tool then is a decomposability theorem (Thm. 6.1.1), proven in § 6.3. We also use a refinement of a statement of Arason [Ara75, 4.18] describing the even part of the Clifford algebra of a transfer (see Prop. 6.2.1 below).

### 6.1. Notations and statement of the theorem

Throughout the paper, we work over a base field  $F$  of characteristic different from 2. We refer the reader to [KMRT98] and [Lam05] for background information on algebras with involution and on quadratic forms. However, we depart from the notation in [Lam05] by using  $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$  to denote the  $n$ -fold Pfister form  $\otimes_{i=1}^n \langle 1, -a_i \rangle$ . For any quadratic space  $(V, \phi)$  over  $F$ , we let  $\text{Ad}_\phi$  be the algebra with involution  $(\text{End}_F(V), \text{ad}_\phi)$ , where  $\text{ad}_\phi$  is the adjoint involution with respect to  $\phi$ , denoted by  $\sigma_\phi$  in [KMRT98].

For any field extension  $L/F$ , we denote by  $GP_n(L)$  the set of quadratic forms that are similar to  $n$ -fold Pfister forms. This notation extends to the quadratic étale extension  $F \times F$  by  $GP_n(F \times F) = GP_n(F) \times GP_n(F)$ . For any quadratic form  $\psi$  over  $L$ , let  $\mathcal{C}(\psi)$  be its full Clifford algebra, with even part  $\mathcal{C}_0(\psi)$ . Both  $\mathcal{C}(\psi)$  and  $\mathcal{C}_0(\psi)$  are endowed with a canonical involution, which is the identity on the underlying vector space, denoted by  $\gamma$  (see [KMRT98, p.89]). If  $\psi$  has even dimension and trivial discriminant, then its even Clifford algebra splits as a direct product  $\mathcal{C}_+(\psi) \times \mathcal{C}_-(\psi)$ , for some isomorphic central simple algebras  $\mathcal{C}_+(\psi)$  and  $\mathcal{C}_-(\psi)$  over  $F$  (see [Lam05, V, Thm 2.5]). Those algebras are Brauer-equivalent to the full Clifford algebra of  $\psi$  and their Brauer class is the Clifford invariant of  $\psi$ . Assume moreover that  $\dim(\psi) \equiv 0 \pmod{4}$ . As explained in [KMRT98, (8.4)], the involution  $\gamma$  then induces an involution on each factor of  $\mathcal{C}_0(\psi)$ , and one may easily check that the isomorphism between the two factors described in the proof of [Lam05, V, Thm 2.5] preserves the involution, so that we actually get a decomposition  $(\mathcal{C}_0(\psi), \gamma) \simeq (\mathcal{C}_+(\psi), \gamma_+) \times (\mathcal{C}_-(\psi), \gamma_-)$ , with  $(\mathcal{C}_+(\psi), \gamma_+) \simeq (\mathcal{C}_-(\psi), \gamma_-)$ .

Let  $L/F$  be a quadratic field extension. For any quadratic form  $\psi$  over  $L$ , we let  $\text{tr}_*(\psi)$  be the transfer of  $\psi$ , associated to the trace map  $\text{tr} : L \rightarrow F$ , as defined in [Lam05, VII.1.2]. This definition extends to the split étale case  $L = F \times F$  and leads to  $\text{tr}_*(\psi, \psi') = \psi + \psi'$ . On the other hand, for any algebra  $A$  over  $L$ , we let  $N_{L/F}(A)$  be its norm, as defined in [KMRT98, §3.B]. Recall that the Brauer class of  $N_{L/F}(A)$  is the corestriction of the Brauer class of  $A$ . Moreover, if  $A$  is endowed with an involution of the first kind  $\sigma$ , then the tensor product  $\sigma \otimes \sigma$  restricts to an involution  $N_{L/F}(\sigma)$  on  $N_{L/F}(A)$ . We use the following notation :  $N_{L/F}(A, \sigma) = (N_{L/F}(A), N_{L/F}(\sigma))$ . In the split étale case, we get  $N_{F \times F/F}((A, \sigma), (A', \sigma')) = (A, \sigma) \otimes (A', \sigma')$  (see [KMRT98, §15.B]).

Let  $(A, \sigma)$  be a degree 8 algebra with orthogonal involution. We assume that  $(A, \sigma)$  is *totally decomposable*, that is, isomorphic to a tensor product of three quaternion algebras with involution,

$$(A, \sigma) = \otimes_{i=1}^3 (Q_i, \sigma_i).$$

If  $A$  is split (resp. has index 2), then  $(A, \sigma)$  admits a decomposition as above in which each quaternion algebra (resp. each but one) is split (see [Bec08]). Our main result is the following theorem :

**Theorem 6.1.1.** — *Let  $(A, \sigma)$  be a degree 8 totally decomposable algebra with orthogonal involution. If the index of  $A$  is  $\leq 4$ , then there exists  $\lambda \in F^\times$  and a biquaternion algebra with orthogonal involution  $(D, \theta)$  such that*

$$(A, \sigma) \simeq (D, \theta) \otimes \text{Ad}_{\langle\langle \lambda \rangle\rangle}.$$

The theorem readily follows from Becher's results mentioned above if  $A$  has index 1 or 2 ; it is proven in § 6.3 for algebras of index 4. For algebras of index  $\leq 2$ , we may even assume that  $(D, \theta)$  decomposes as a tensor product of two quaternion algebras with involution ; this is not the case anymore if  $A$  has index 4, as was shown by Sivatski [Siv05, Prop. 5].

Using triality, we easily deduce the following from Theorem 6.1.1 :

**Theorem 6.1.2 (Izhboldin-Karpenko).** — *Let  $\phi$  be an 8-dimensional quadratic form over  $F$ . The following are equivalent :*

- (i)  $\phi$  has trivial discriminant and Clifford invariant of index  $\leq 4$  ;
- (ii) there exists a quadratic étale extension  $L/F$  and a form  $\psi \in GP_2(L)$  such that  $\phi = \text{tr}_*(\psi)$ .

If  $\phi = \text{tr}_*(\psi)$  for some  $\psi \in GP_2(L)$ , it follows from some direct computation made in [IK00, §16] that  $\phi$  has trivial discriminant and Clifford invariant of index  $\leq 4$ .

Assume conversely that  $\phi$  has trivial discriminant. By the Arason-Pfister Hauptsatz,  $\phi$  is in  $GP_3(F)$  if and only if it has trivial Clifford invariant. More generally, it is well-known that  $\phi$  decomposes as  $\phi = \langle\langle a \rangle\rangle q$  for some  $a \in F^\times$  and some 4-dimensional quadratic form  $q$  over  $F$  if and only if its Clifford invariant has index  $\leq 2$  (see for instance [Kne77, Ex 9.12]). Hence, in both cases,  $\phi$  decomposes as a sum  $\phi = \pi_1 + \pi_2$  of two forms  $\pi_1, \pi_2 \in GP_2(F)$ . This proves that condition (ii) holds with  $L = F \times F$ .

In section 6.4 below, we finish this proof by treating the index 4 case. This part of the proof differs from the argument given in [IK00]. In particular, we do not use Rost's description of 14-dimensional forms in  $I^3 F$ .

## 6.2. Clifford algebra of the transfer of a quadratic form

Let  $L/F$  be a quadratic field extension. By Arason [Ara75, 4.18], for any quadratic form  $\psi \in GP_2(L)$ , the Clifford invariant of the transfer  $\text{tr}_*(\psi)$  coincides with the corestriction of the Clifford invariant of  $\psi$ . In this section, we extend this result, taking into account the algebras with involution rather than just the Brauer classes. More precisely, we prove :

**Proposition 6.2.1.** — *Let  $L = F[X]/(X^2 - d)$  be a quadratic étale extension of  $F$ . Consider a quadratic form  $\psi$  over  $L$  with  $\dim(\psi) \equiv 0 \pmod{4}$  and  $d_\pm(\psi) = 1$ , so that its even Clifford algebra decomposes as*

$$(\mathcal{C}_0(\psi), \gamma) \simeq (\mathcal{C}_+(\psi), \gamma_+) \times (\mathcal{C}_-(\psi), \gamma_-), \text{ with } (\mathcal{C}_+(\psi), \gamma_+) \simeq (\mathcal{C}_-(\psi), \gamma_-).$$

*For any  $\lambda \in L^\times$  represented by  $\psi$ , the two components of the even Clifford algebra of the transfer of  $\psi$  are both isomorphic to*

$$(\mathcal{C}_+(\text{tr}_*(\psi)), \gamma_+) \simeq \text{Ad}_{\langle\langle -dN_{L/F}(\lambda) \rangle\rangle} \otimes_{N_{L/F}} (\mathcal{C}_+(\psi), \gamma_+).$$

*Proof.* — In the split étale case  $L = F \times F$ , the quadratic form  $\psi$  is a couple  $(\phi, \phi')$  of two quadratic forms over  $F$  with

$$\dim(\phi) = \dim(\phi') \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{and} \quad d_\pm(\phi) = d_\pm(\phi') = 1 \in F^\times / F^{\times 2}.$$

Pick  $\lambda$  and  $\lambda'$  in  $F$  respectively represented by  $\phi$  and  $\phi'$ ; the norm  $N_{F \times F/F}(\lambda, \lambda')$  is  $\lambda\lambda'$ . So the following lemma proves the proposition in that case :

**Lemma 6.2.2.** — *Let  $\phi$  and  $\phi'$  be two quadratic forms over  $F$  of the same dimension  $n \equiv 0 \pmod{4}$  and trivial discriminant. For any  $\lambda$  and  $\lambda' \in F^\times$ , respectively represented by  $\phi$  and  $\phi'$ , the components of the even Clifford algebra of the orthogonal sum  $\phi + \phi'$  are isomorphic to*

$$(\mathcal{C}_+(\phi + \phi'), \gamma_+) \simeq \text{Ad}_{\langle\langle -\lambda\lambda' \rangle\rangle} \otimes (\mathcal{C}_+(\phi), \gamma_+) \otimes (\mathcal{C}_+(\phi'), \gamma_+).$$

*Proof of Lemma 6.2.2.* — Denote by  $V$  and  $V'$  the underlying quadratic spaces. The natural embeddings  $V \hookrightarrow V \oplus V'$  and  $V' \hookrightarrow V \oplus V'$  induce  $F$ -algebra homomorphisms

$$\mathcal{C}(\phi) \rightarrow \mathcal{C}(\phi + \phi') \text{ and } \mathcal{C}(\phi') \rightarrow \mathcal{C}(\phi + \phi').$$

One may easily check that the images of the even parts centralize each other, so that we get an  $F$ -algebra homomorphism

$$(\mathcal{C}_0(\phi), \gamma) \otimes (\mathcal{C}_0(\phi'), \gamma) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\phi + \phi'), \gamma).$$

Pick orthogonal bases  $(e_1, \dots, e_n)$  of  $(V, \phi)$  and  $(e'_1, \dots, e'_n)$  of  $(V', \phi')$ . The basis of  $\mathcal{C}_0(\phi + \phi')$  consisting of products of an even number of vectors of the set  $\{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n\}$  as described in [Lam05, V, cor 1.9] clearly contains the image of a basis of  $\mathcal{C}_0(\phi) \otimes \mathcal{C}_0(\phi')$ , so that the homomorphism above is injective. In the sequel, we will identify  $\mathcal{C}_0(\phi)$  and  $\mathcal{C}_0(\phi')$  with their images in  $\mathcal{C}_0(\phi + \phi')$ .

Consider the element  $z = e_1 \dots e_n \in \mathcal{C}_0(\phi)$ . As explained in [Lam05, V, Thm2.2], for any  $v \in V$ , one has  $zv = -vz \in \mathcal{C}(\phi)$  and  $z$  generates the center of  $\mathcal{C}_0(\phi)$ . Since  $\phi$  has dimension 0 mod 4 and trivial discriminant, this element  $z$  is  $\gamma$ -symmetric, and multiplying  $e_1$  by a scalar if necessary, we may assume  $z^2 = 1$ . The two components of  $\mathcal{C}_0(\phi)$  are  $\mathcal{C}_+(\phi) = \mathcal{C}_0(\phi)^{\frac{1+z}{2}}$  and  $\mathcal{C}_-(\phi) = \mathcal{C}_0(\phi)^{\frac{1-z}{2}}$ . Consider similarly  $z' = e'_1 \dots e'_n$ , with  $\gamma(z') = z'$  and assume  $z'^2 = 1$ . The product  $zz'$  also has square 1 and generates the center of  $\mathcal{C}_0(\phi + \phi')$ . We denote by  $\varepsilon$  the idempotent  $\varepsilon = \frac{1+zz'}{2}$ , so that  $\mathcal{C}_+(\phi + \phi') = \mathcal{C}_0(\phi + \phi')\varepsilon$  and  $\mathcal{C}_-(\phi + \phi') = \mathcal{C}_0(\phi + \phi')(1 - \varepsilon)$ .

Let us now fix two vectors  $v \in V$  and  $v' \in V'$  such that  $\phi(v) = \lambda$  and  $\phi'(v') = \lambda'$ . Since  $\frac{1+z}{2}v^{-1} = v^{-1}\frac{1-z}{2}$ , we have  $vzv^{-1} \in \mathcal{C}_-(\phi)$  for any  $x \in \mathcal{C}_+(\phi)$ . Using this identification between the two components, we may diagonally embed  $\mathcal{C}_+(\phi)$  in  $\mathcal{C}_0(\phi)$  by considering  $x \in \mathcal{C}_+(\phi) \mapsto x + vxv^{-1} \in \mathcal{C}_0(\phi)$ . Similarly, we may embed  $\mathcal{C}_+(\phi')$  in  $\mathcal{C}_0(\phi')$  by  $x' \in \mathcal{C}_+(\phi') \mapsto x' + v'x'v'^{-1} \in \mathcal{C}_0(\phi')$ . Combining those two maps with the morphism

$$\mathcal{C}_0(\phi) \otimes \mathcal{C}_0(\phi') \rightarrow \mathcal{C}_0(\phi + \phi'),$$

and the projection

$$y \in \mathcal{C}_0(\phi + \phi') \mapsto y\varepsilon \in \mathcal{C}_+(\phi + \phi'),$$

we get an algebra homomorphism

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_+(\phi) \otimes \mathcal{C}_+(\phi') &\rightarrow \mathcal{C}_+(\phi + \phi'), \\ x \otimes x' &\mapsto (x + vxv^{-1})(x' + v'x'v'^{-1})\varepsilon. \end{aligned}$$

One may easily check on generators that this map is not trivial; hence it is injective. To conclude the proof, it only remains to identify the centralizer of the image, which by dimension count has degree 2. It clearly contains  $\frac{z+z'}{2}\varepsilon$  and

$vv'\varepsilon$ . Moreover, these two elements anticommute, have square  $\varepsilon$  and  $-\lambda\lambda'\varepsilon$ , and are respectively symmetric and skew-symmetric under  $\gamma$ . Hence they generate a split quaternion algebra, with orthogonal involution of discriminant  $-\lambda\lambda'$ , which is isomorphic to  $\text{Ad}_{\langle\langle-\lambda\lambda'\rangle\rangle}$ .  $\square$

This concludes the proof in the split étale case. Until the end of this section, we assume  $L$  is a quadratic field extension of  $F$ , with non-trivial  $F$ -automorphism denoted by  $\iota$ . To prove the proposition in this case, we will use the following description of the transfer of a quadratic form and its Clifford algebra.

Let  $\psi$  be any quadratic form over  $L$ , defined on the vector space  $V$ . We consider its conjugate  ${}^{\iota}V = \{{}^{\iota}v, v \in V\}$  with the following operations  ${}^{\iota}v_1 + {}^{\iota}v_2 = {}^{\iota}(v_1 + v_2)$  and  $\lambda \cdot {}^{\iota}v = {}^{\iota}(\iota(\lambda) \cdot v)$ , for any  $v_1, v_2$  and  $v$  in  $V$  and  $\lambda \in L$ . Clearly,  ${}^{\iota}\psi({}^{\iota}v) = \iota(\psi(v))$  is a quadratic form on  ${}^{\iota}V$ . One may easily check from the definition given in [Lam05, VII §1] that the quadratic form  $\text{tr}_{\star}(\psi)$  is nothing but the restriction of  $\psi + {}^{\iota}\psi$  to the  $F$ -vector space of fixed points  $(V \oplus {}^{\iota}V)^s$ , where  $s$  is the switch semi-linear automorphism defined on the direct sum  $V \oplus {}^{\iota}V$  by  $s(v_1 + {}^{\iota}v_2) = v_2 + {}^{\iota}v_1$ .

Moreover,  $s$  induces a semi-linear automorphism of order 2 of the tensor algebra  $T(V \oplus {}^{\iota}V)$  which preserves the ideal generated by the elements

$$(v_1 + {}^{\iota}v_2) \otimes (v_1 + {}^{\iota}v_2) - (\psi(v_1) + {}^{\iota}\psi({}^{\iota}v_2)).$$

Hence, we get a semi-linear automorphism  $s$  of order 2 on the Clifford algebra  $\mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi)$ , which commutes with the canonical involution. The set of fixed points  $(\mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi))^s$  is an  $F$ -algebra; the involution  $\gamma$  restricts to an  $F$ -linear involution which we denote by  $\gamma_s$ . We then have :

**Lemma 6.2.3.** — *The natural embedding  $(V \oplus {}^{\iota}V) \hookrightarrow \mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi)$ , restricted to  $(V + {}^{\iota}V)^s$ , induces an isomorphism of graded algebras*

$$(\mathcal{C}(\text{tr}_{\star}(\psi)), \gamma) \xrightarrow{\sim} ((\mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi))^s, \gamma_s).$$

*Proof of Lemma 6.2.3.* — The natural embedding  $(V \oplus {}^{\iota}V) \hookrightarrow \mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi)$  restricts to an injective map  $i : (V + {}^{\iota}V)^s \hookrightarrow \mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi)^s$ , which clearly satisfies

$$i(w)^2 = (\psi + {}^{\iota}\psi)(w) \quad \text{for any } w \in (V \oplus {}^{\iota}V)^s.$$

By the universal property of Clifford algebras, it extends to a non-trivial algebra homomorphism  $\mathcal{C}(\text{tr}_{\star}(\psi)) \mapsto \mathcal{C}(\psi + {}^{\iota}\psi)^s$ , which clearly preserves the grading. Since  $\mathcal{C}(\text{tr}_{\star}(\psi))$  is simple, and both algebras have the same dimension, it is an isomorphism. Clearly,  $\gamma$  coincides with  $\gamma_s$  under this isomorphism.  $\square$

Hence, we want to describe one component of  $\mathcal{C}_0(\text{tr}_{\star}(\psi)) \simeq (\mathcal{C}_0(\psi + {}^{\iota}\psi))^s$ . We proceed as in the split étale case. Fix an orthogonal basis  $e_1, \dots, e_n$  of  $V$



over  $L$  such that  $\psi(e_n) = \lambda$ . The elements  ${}^t e_1, \dots, {}^t e_n$  are an orthogonal basis of  ${}^t V$  and  ${}^t \psi({}^t e_n) = \iota(\lambda)$ . We may moreover assume that  $z = e_1 \dots e_n$  and  ${}^t z = {}^t e_1 \dots {}^t e_n$  have square 1. Since the idempotent  $\varepsilon = \frac{1+z}{2} \in C_0(\psi + {}^t \psi)$  satisfies  $s(\varepsilon) = \varepsilon$ , the semilinear automorphism  $s$  preserves each factor  $\mathcal{C}_+(\psi + {}^t \psi)$  and  $\mathcal{C}_-(\psi + {}^t \psi)$ . Hence, the components of  $\mathcal{C}_0(\text{tr}_*(\psi))$  are

$$\mathcal{C}_0(\text{tr}_*(\psi)) = (\mathcal{C}_+(\psi + {}^t \psi))^s \times (\mathcal{C}_-(\psi + {}^t \psi))^s.$$

Moreover, by Lemma 6.2.2, we have

$$\mathcal{C}_+(\psi + {}^t \psi) \simeq \text{Ad}_{\langle -\lambda \iota(\lambda) \rangle} \otimes (\mathcal{C}_+(\psi), \gamma) \otimes (\mathcal{C}_+({}^t \psi), \gamma),$$

and it remains to understand the action of the switch automorphism on this tensor product. First, one may identify  $\mathcal{C}_+({}^t \psi)$  with the algebra  ${}^t \mathcal{C}_+(\psi)$  defined by

$${}^t \mathcal{C}_+(\psi) = \{{}^t x, x \in \mathcal{C}_+(\psi)\},$$

with the operations

$${}^t x + {}^t y = {}^t(x + y), \quad {}^t x {}^t y = {}^t(xy) \text{ and } {}^t(\lambda x) = \iota(\lambda) {}^t x,$$

for all  $x, y \in \mathcal{C}_+(\psi)$  and  $\lambda \in L$ . Clearly, the switch automorphism acts on the tensor product

$$\mathcal{C}_+(\psi) \otimes \mathcal{C}_+({}^t \psi) \simeq \mathcal{C}_+(\psi) \otimes {}^t \mathcal{C}_+(\psi),$$

by

$$s(x \otimes {}^t y) = y \otimes {}^t x,$$

and by definition of the corestriction (see [KMRT98, 3.B]), the  $F$ -subalgebra of fixed points is

$$((\mathcal{C}_+(\psi), \gamma) \otimes ({}^t \mathcal{C}_+(\psi), \gamma))^s = N_{L/F}(\mathcal{C}_+(\psi), \gamma).$$

It remains to understand the action of the switch on the centralizer, which is the split quaternion algebra over  $L$  generated by  $x = \frac{z+{}^t z}{2}\varepsilon$  and  $y = e_n {}^t e_n \varepsilon$ . The element  $x$  clearly is  $s$ -symmetric, while  $y$  satisfies  $s(y) = -y$ . Let  $\delta$  be a generator of the quadratic extension  $L/F$ , so that  $\iota(\delta) = -\delta$  and  $\delta^2 = d$ . Since the switch map  $s$  is  $L/F$  semi-linear, we may replace  $y$  by  $\delta y$  which now satisfies  $s(\delta y) = \delta y$ . Hence, the set of fixed points under  $s$  is the split quaternion algebra over  $F$  generated by  $x$  and  $\delta y$ . Since  $(\delta y)^2 = -dN_{L/F}(\lambda)$ , it is isomorphic to  $\text{Ad}_{\langle -dN_{L/F}(\lambda) \rangle}$ .  $\square$

### 6.3. Proof of the decomposability theorem

In this section, we finish the proof of Theorem 6.1.1. Let  $(A, \sigma) = \otimes_{i=1}^3 (Q_i, \sigma_i)$  be a product of three quaternion algebras with orthogonal involution. We assume that  $A$  has index 4, so that it is Brauer-equivalent to a

biquaternion division algebra  $D$ . We have to prove that  $(A, \sigma)$  is isomorphic to  $(D, \theta) \otimes \text{Ad}_{\langle\langle \lambda \rangle\rangle}$  for a well chosen involution  $\theta$  on  $D$  and some  $\lambda \in F^\times$ .

The algebra  $D$  is endowed with an orthogonal involution  $\tau$ , and we may represent

$$(A, \sigma) = (\text{End}_D(M), \text{ad}_h),$$

for some 2-dimensional hermitian module  $(M, h)$  over  $(D, \tau)$ . Let us consider a diagonalisation  $\langle a_1, a_2 \rangle$  of  $h$ , and define

$$\theta = \text{Int}(a_1^{-1}) \circ \tau.$$

With respect to this new involution, we get another representation

$$(A, \sigma) = (\text{End}_D(M), \text{ad}_{h'}),$$

where  $h'$  is a hermitian form over  $(D, \theta)$  which diagonalises as  $h' = \langle 1, -a \rangle$  for some  $\theta$ -symmetric element  $a \in D^\times$ . The theorem now follows from the following lemma :

**Lemma 6.3.1.** — *The involutions  $\theta$  and  $\theta' = \text{Int}(a^{-1}) \circ \theta$  of the biquaternion algebra  $D$  are conjugate.*

Indeed, assume there exists  $u \in A^\times$  such that  $\theta = \text{Int}(u) \circ \theta' \circ \text{Int}(u^{-1})$ . We then have  $\theta = \text{Int}(ua^{-1}) \circ \theta \circ \text{Int}(u^{-1}) = \theta \circ \text{Int}(\theta(u)^{-1}au^{-1})$ . Hence, there exists  $\lambda \in F^\times$  such that  $\theta(u)^{-1}au^{-1} = \lambda$ , that is  $a = \lambda\theta(u)u$ . This implies that the hermitian form  $h' = \langle 1, -a \rangle$  over  $(D, \theta)$  is isometric to  $\langle 1, -\lambda \rangle$ . Since  $\lambda \in F^\times$ , we get  $(A, \sigma) = (\text{End}_D(M), \text{ad}_{\langle 1, -\lambda \rangle}) = (D, \theta) \otimes \text{Ad}_{\langle\langle \lambda \rangle\rangle}$ , and it only remains to prove the lemma.

*Proof of Lemma 6.3.1.* — We want to compare the orthogonal involutions  $\theta$  and  $\theta'$  of the biquaternion algebra  $D$ . By [LT99, Prop. 2], they are conjugate if and only if their Clifford algebras  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}'$  are isomorphic as  $F$ -algebras. This can be proven as follows.

Since  $(A, \sigma)$  is a product of three quaternion algebras with involution, we know from [KMRT98, (42.11)] that the discriminant of  $\sigma$  is 1 and its Clifford algebra has one split component.

On the other hand, the representation  $(A, \sigma) = (\text{End}_D(M), \text{ad}_{\langle 1, -a \rangle})$  tells us that  $(A, \sigma)$  is an orthogonal sum, as in [Dej98], of  $(D, \theta)$  and  $(D, \theta')$ . Hence its invariants can be computed in terms of those of  $(D, \theta)$  and  $(D, \theta')$ . By [Dej98, Prop. 2.3.3], the discriminant of  $\sigma$  is the product of the discriminants of  $\theta$  and  $\theta'$ . So  $\theta$  and  $\theta'$  have the same discriminant, and we may identify the centers  $Z$  and  $Z'$  of their Clifford algebras in two different ways. We are in the situation described in [LT99, p. 265], where the Clifford algebra of such an orthogonal

sum is computed. In particular, since one component of the Clifford algebra of  $(A, \sigma)$  is split, it follows from [LT99, Lem 1] that

$$\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}' \quad \text{or} \quad \mathcal{C} \simeq {}^t\mathcal{C}',$$

depending on the chosen identification between  $Z$  and  $Z'$ . In both cases,  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}'$  are isomorphic as  $F$ -algebras, and this concludes the proof.  $\square$

#### 6.4. A new proof of Izhboldin and Karpenko's theorem

Let  $\phi$  be an 8-dimensional quadratic form over  $F$  with trivial discriminant and Clifford invariant of index 4. We denote by  $(A, \sigma)$  one component of its even Clifford algebra, so that

$$(\mathcal{C}_0(\phi), \gamma) \simeq (A, \sigma) \times (A, \sigma),$$

where  $A$  is an index 4 central simple algebra over  $F$ , with orthogonal involution  $\sigma$ .

By triality [KMRT98, (42.3)], the involution  $\sigma$  has trivial discriminant and its Clifford algebra is

$$\mathcal{C}(A, \sigma) = \text{Ad}_\phi \times (A, \sigma).$$

In particular, it has a split component, so that the algebra with involution  $(A, \sigma)$  is isomorphic to a tensor product of three quaternion algebras with involution (see [KMRT98, (42.11)]). Hence we can apply our decomposability theorem 6.1.1, and write  $(A, \sigma) = (D, \theta) \otimes \text{Ad}_{\langle\langle\lambda\rangle\rangle}$  for some biquaternion division algebra with orthogonal involution  $(D, \theta)$  and some  $\lambda \in F^\times$ .

Let us denote by  $d$  the discriminant of  $\theta$ , and let  $L = F[X]/(X^2 - d)$  be the corresponding quadratic étale extension. Consider the image  $\delta$  of  $X$  in  $L$ . By Tao's computation of the Clifford algebra of a tensor product [Tao95, Thm. 4.12], the components of  $\mathcal{C}(A, \sigma)$  are Brauer-equivalent to the quaternion algebra  $(d, \lambda)$  over  $F$  and the tensor product  $(d, \lambda) \otimes A$ . Since  $A$  has index 4, the split component has to be  $(d, \lambda)$ , so that  $\lambda$  is a norm of  $L/F$ , say  $\lambda = N_{L/F}(\mu)$ .

Consider now the Clifford algebra of  $(D, \theta)$ . It is a quaternion algebra  $Q$  over  $L$ , endowed with its canonical (symplectic) involution  $\gamma$ . Denote by  $n_Q$  the norm form of  $Q$ , that is  $n_Q = \langle\langle\alpha, \beta\rangle\rangle$  if  $Q = (\alpha, \beta)_L$ . It is a 2-fold Pfister form and for any  $\ell \in L^\star$ ,  $(\mathcal{C}_+(\langle\ell\rangle n_Q), \gamma_+) \simeq (Q, \gamma)$ . Moreover, by the equivalence of categories  $A_1^2 \equiv D_2$  described in [KMRT98, (15.7)], the algebra with involution  $(D, \theta)$  is canonically isomorphic to  $N_{L/F}(Q, \gamma)$ .

Hence we get that  $(A, \sigma) = N_{L/F}(Q, \gamma) \otimes \text{Ad}_{\langle\langle -dN_{L/F}(\delta\mu) \rangle\rangle}$ . By Proposition 6.2.1, this implies that

$$(A, \sigma) \times (A, \sigma) \simeq (\mathcal{C}_0(\text{tr}_\star(\psi)), \gamma),$$

where  $\psi = \langle \delta\mu \rangle n_Q$ . Applying again triality [KMRT98, (42.3)], we get that the split component  $\text{Ad}_\phi$  of the Clifford algebra of  $(A, \sigma)$  also is isomorphic to  $\text{Ad}_{\text{tr}_*(\psi)}$ , so that the quadratic forms  $\phi$  and  $\text{tr}_*(\psi)$  are similar. This concludes the proof since  $\psi$  belongs to  $GP_2(L)$ .

**Remark.** — Let  $\phi$  and  $(A, \sigma)$  be as above, and let  $L = F[X]/(X^2 - d)$  be a fixed quadratic étale extension of  $F$ . It follows from the proof that the quadratic form  $\phi$  is isometric to the transfer of a form  $\psi \in GP_2(L)$  if and only if  $(A, \sigma)$  admits a decomposition  $(A, \sigma) = \text{Ad}_{\langle\langle\lambda\rangle\rangle} \otimes (D, \theta)$ , with  $d_\pm(\theta) = d$ . In particular, the quadratic form  $\phi$  is a sum of two forms similar to 2-fold Pfister forms exactly when the algebra with involution  $(A, \sigma)$  admits a decomposition as  $(D, \theta) \otimes \text{Ad}_{\langle\langle\lambda\rangle\rangle}$  with  $\theta$  of discriminant 1, that is when it decomposes as a tensor product of three quaternion algebras with involution, with one split factor.

Such a decomposition does not always exist, as was shown by Sivatski [Siv05, Prop 5]. This reflects the fact that 8-dimensional quadratic forms  $\phi$  with trivial discriminant and Clifford algebra of index  $\leq 4$  do not always decompose as a sum of two forms similar to two-fold Pfister forms (see [IK00, §16] and [HT98] for explicit examples).

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ami55] S. A. AMITSUR – Generic Splitting Fields of Central Simple Algebras, *Annals of Math., Second Series* **62** (1955), no. 1, p.8–43
- [Ara75] J. K. ARASON – Cohomologische Invarianten quadratischer Formen, *J. Alg.* **36** (1975), p. 448–491.
- [Bar1] D. BARRY – Adapted decomposition and indecomposable algebras of degree 8 and exponent 2, With an appendix by S. Merkurjev, *à paraître*.
- [Bar2] D. BARRY – Square-central elements in tensor products of quaternion algebras, *à paraître*.
- [Bec08] K. J. BECHER – A proof of the Pfister factor conjecture, *Invent. Math.* **173** (2008), no. 1, p. 1–6.
- [Ber06] G. BERTHUY – Cohomological invariants of quaternionic skew-hermitian forms, *Arch. der Math. (Basel)* **88** (2007), no. 5, p 434–447.
- [BFT07] G. BERTHUY, C. FRINGS, J.P. TIGNOL – Galois cohomology of the classical groups over imperfect fields, *Journal of Pure and Applied Algebra* **211** (2007), p. 307–341.
- [BMT03] G. BERTHUY, M. MONSURRO, J.P. TIGNOL – The discriminant of a symplectic involution, *Pacific J. Math.* **209** (2003), p. 201–218.
- [BT65] A. BOREL, J. TITS – Groupes réductifs, *Pub. Math. IHES* **27** (1965), p. 55–150.
- [CTGP04] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, P. GILLE, AND R. PARIMALA – Arithmetic of linear algebraic groups over 2–dimensional geometric fields, *Duke Math. J.* **121**(2) (2004), p. 285–341.

- [Dej98] I. DEJAIFFE – Somme orthogonale d’algèbres à involution et algèbre de Clifford, *Commun. algebra* **26** (1998), p. 1589–1612.
- [EKM03] R. ELMAN, N. KARPENKO, S. MERKURJEV – *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, Colloquium Pub. **56** (2003), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [Gar09] S. GARIBALDI – Orthogonal involutions on algebras of degree 16 and the Killing form of  $E_8$ , *Quadratic forms–algebra, arithmetic, and geometry*, Contemp. Math. **493** (2009), p. 131–162, With an appendix by K. Zainouline.
- [GMS03] S. GARIBALDI, A. MERKURJEV, J.P. SERRE – *Cohomological invariants in Galois cohomology*, Univ. Lect. Series **28** (2003), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [GPT09] S. GARIBALDI, R. PARIMALA, J.P. TIGNOL – Discriminant of symplectic involutions, *Pure App. Math. Quart.* **5** (2009), p. 349–374.
- [GQM09] S. GARIBALDI, A. QUÉGUINER-MATHIEU – Pfister’s theorem for orthogonal involutions of degree 12, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **137** (2009), p. 1215–1222.
- [GTW07] S. GARIBALDI, J.P. TIGNOL, A. R. WADSWORTH – Galois cohomology of special orthogonal groups, *Manuscripta mathematica* **93** (2007), p. 247–266.
- [Gil00] P. GILLE – Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive, *K-Theory* **21** (2000), no. 1, p. 57–100.
- [GS06] P. GILLE, T. SZAMUELY – *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Ad. Math. (2006), no. 101.
- [Hof99] D. W. HOFFMANN – On a conjecture of Izhboldin on similarity of quadratic forms, *Doc. Math.* (1999), no. 4, p. 61–64.
- [HT98] D. W. HOFFMANN & J.-P. TIGNOL – On 14-dimensional quadratic forms in  $I^3$ , 8-dimensional forms in  $I^2$ , and the common value property, *Doc. Math.* **3** (1998), p. 189–214 (electronic).
- [IK00] O. T. IZHBOLDIN & N. A. KARPENKO – Some new examples in the theory of quadratic forms, *Math. Z.* **234** (2000), no. 4, p. 647–695.
- [Jac96] N. JACOBSON – *Finite-dimensional division algebras over fields.*, Springer-Verlag (1996), Berlin.

- [KQM00] N. KARPENKO, A. QUÉGUINER-MATHIEU – A criterion of decomposability for degree 4 algebras with unitary involution, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **147** (2000), p. 1215–1222.
- [KT10] J.P. TIGNOL – Hyperbolicity of symplectic and unitary involutions. Appendix to a paper of N. Karpenko, *Documenta Mathematica*, Vol. Extra Volume : Andrei A. Suslin’s Sixtieth Birthday (2010), p. 389–392.
- [Kne77] M. KNEBUSCH – Generic splitting of quadratic forms. II, *Proc. London Math. Soc. (3)* **34** (1977), no. 1, p. 1–31.
- [KMRT98] M. A. KNUS, S. MERKURJEV, M. ROST, J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, Colloquium Publ. (1998), vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [KPS91] M.A. KNUS, R. PARIMALA, AND R. SRIDHARAN – Pfaffians, central simple algebras and similitudes, *Math. Z.* **206(4)** (1991), p. 589–604.
- [Lam05] T.-Y. LAM – *Introduction to quadratic forms over fields*, Grad. Studies in Math. (2005), vol. 67, Amer. Math. Soc.
- [LT99] D.W. LEWIS, J.P. TIGNOL – Classification theorems for central simple algebras with involution, *Manuscripta mathematica*, **10** (1999), p. 259–276, with an appendix by R. Parimala
- [MQMT09] A. MASQUELEIN, A. QUÉGUINER-MATHIEU, J.P. TIGNOL – Quadratic forms of dimension 8 with trivial discriminant and Clifford algebra of index 4, *Arch. Math. (Basel)* **93** (2009), no. 2, p. 129–138.
- [Mer91] S. MERKURJEV – Simple algebras and quadratic forms, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **55(1)** (1991), p. 218–224.
- [MPT02] S. MERKURJEV, R. PARIMALA, J.P. TIGNOL – Invariants of quasitrivial tori and the Rost invariant, *Algebra i Analiz* (2002), vol. 15, p. 110–151
- [MT] S. MERKURJEV, J.P. TIGNOL – The multipliers of similitudes and the Brauer group of homogeneous varieties, *J. reine angew. Math.* **461** (1995), p. 13–47.
- [OVV00] D. ORLOV, A. VISHIK, V. VOVOEDSKY – An exact sequence for  $K_*^M/2$  with applications to quadratic forms, *Ann. Math.(2)* **165(1)** (2007), p. 1–13.

- [QMT10] A. QUÉGUINER-MATHIEU, J.P. TIGNOL – Algebras with involution that become hyperbolic over the function field of a conic, *Israel J. Math.* **180** (2010), p. 317–344.
- [QMT12] A. QUÉGUINER-MATHIEU, J.P. TIGNOL – Cohomological invariants for orthogonal involutions on degree 8 algebras, *Journal of K-theory* **9**, p. 333–358.
- [QMT] A. QUÉGUINER-MATHIEU, J.P. TIGNOL – The Arason invariant of orthogonal involutions on central simple algebras, *A paraître*
- [Siv05] A. S. SIVATSKI – Applications of Clifford algebras to involutions and quadratic forms, *Comm. Algebra* **33** (2005), no. 3, p. 937–951.
- [Tao95] D. TAO – The generalized even Clifford algebra, *J. Algebra* **172** (1995), no. 1, p. 184–204.
- [Tig10] J.P. TIGNOL – Cohomological invariants of central simple algebras with involution, *Quadratic Forms, Linear Algebraic Groups, and Cohomology*, Dev. Math. **18** (2010), p. 137–171, Springer, New York.
- [Wei62] A. WEIL – *Foundations of Algebraic Geometry*, Colloquium Publ., vol. 29, Amer. Math. Soc. (1946), New York ; second edition, Amer. Math. Soc. (1962), Providence.



# INDEX

- $R_{\gamma_0}$ , 38
- $R_{\sigma_0}$ , 38
- $R_{\tau_0}$ , 38
- $R_{q_0}$ , 38
- $\Delta(A, \gamma)$ , 20
- $\Delta_{\gamma_0}$ , 34
- $\mathbf{H}_F^i$ , 7
- $\mathbf{Herm}_{h_0}$ , 28
- $\mathbf{Herm}_{n,K/F}$ , 10
- $\mathbf{Herm}_{n,Q/F}$ , 9
- $\mathbf{M}_A^i$ , 14
- $\mathbf{M}_{B,K}^i$ , 23
- $\mathbf{Orth}_A$ , 13
- $\mathbf{Orth}_{\sigma_0}$ , 29
- $\mathbf{Quad}_{n,F}$ , 8
- $\mathbf{Quad}_{q_0}$ , 28
- $\mathbf{Symp}_A$ , 17
- $\mathbf{Symp}_{\gamma_0}$ , 33
- $\mathbf{Unit}_B$ , 22
- $\mathbf{Unit}_{\tau_0}$ , 35
- $\mathrm{SU}_{n,K}$ , 25
- $\mathrm{Sp}(A, \gamma_0)$ , 34
- $\mu_{n,K}$ , 25
- ${}^R e_3^{\tau_0}$ , 46
- $e_3(\sigma/\sigma_0)$ , 31
- $f_i^{\sigma_0}$ , 32
- $f_3^{\tau_0}$ , 40
- ${}^K e_i^{h_0}$ , 28
- ${}^Q e$ , 9
- ${}^R f_3^{\theta_0}$ , 39
- ${}^Q e_3^{\tau_0}$ , 70
- ${}^K e_i$ , 13
- ${}^c e_i$ , 8
- ${}^c e_i^{q_0}$ , 28