



UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES



INSTITUT VON KARMAN DE DYNAMIQUE DES FLUIDES

ETUDE DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL DANS
UN ETAGE DE TURBINE TRANSSONIQUE

ANTOINE ARTS
INGÉNIEUR CIVIL MÉCANICIEN

DISSERTATION PRESENTÉE POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR EN SCIENCES APPLIQUÉES DE
L'UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

JUILLET 1982

SIGLE

B 223 693 L



UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES



INSTITUT VON KARMAN DE DYNAMIQUE DES FLUIDES



ETUDE DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL DANS
UN ETAGE DE TURBINE TRANSSONIQUE

Bibliothèque des
Sciences Exactes

ANTOINE ARTS
INGÉNIEUR CIVIL MÉCANICIEN

DISSERTATION PRESENTÉE POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR EN SCIENCES APPLIQUEES DE
L'UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

JUILLET 1982

*Je dédie cette thèse à la mémoire de
Mademoiselle J. Vandamme, en souvenir
de la confiance inébranlable qu'elle
avait en sa réalisation*

AVANT-PROPOS

En terminant ce travail, je tiens à remercier Monsieur P. Wauters, professeur à l'Université Catholique de Louvain, d'avoir bien voulu promouvoir cette thèse de doctorat. Ses nombreux conseils et critiques, ainsi que la confiance qu'il m'a témoignée, ont été d'une grande aide dans son accomplissement.

Je voudrais également remercier Monsieur F.A.E. Breugelmans, professeur à l'Institut von Karman, de m'avoir accueilli dans le département "turbomachines" dont il a la responsabilité. L'atmosphère qui y règne et le bagage scientifique que j'y ai acquis sont deux facteurs importants qui ont influencé la réalisation de ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur C.H. Sieverding, professeur à l'Institut von Karman, pour m'avoir orienté et conseillé de la manière la plus fructueuse depuis le début de mes recherches. Il m'a proposé le sujet de cette thèse, a suivi pas à pas son développement et m'a prodigué de nombreux conseils avec toute sa compétence et toute son amabilité. La patience et la compréhension dont il a fait preuve à mon égard ont constitué pour moi un soutien et un stimulant constants.

Mes remerciements vont également à Monsieur W. Van Hove, assistant à la Rijksuniversiteit te Gent. Il a fortement influencé ma manière d'aborder les problèmes numériques et a contribué largement à la réussite de ce travail. Les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui, ainsi qu'avec Monsieur J. Snoeck, chercheur à l'Institut von Karman, ont été déterminantes dans la concrétisation de cette étude. Je remercie également Messieurs J.-A. Essers, professeur à l'Institut von Karman, M. Deville, professeur à l'Université Catholique de Louvain et C. Hirsch, professeur à la Vrije Universiteit te Brussel, de m'avoir fait part de leurs critiques dans l'évaluation de cette thèse.

Je suis particulièrement sensible à l'aide pratique que m'a apportée Madame N. Toubeau; elle a réalisé une dactylographie impeccable d'un manuscrit difficile. Je suis également reconnaissant à l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture pour le support financier qu'il m'a accordé au cours de ces trois années.

Je tiens enfin à remercier de tout coeur mes parents pour les sacrifices qu'ils ont consentis pendant mes études et pour les encouragements constants qu'ils m'ont prodigués. En dernier lieu, je veux exprimer ma plus profonde gratitude à mon épouse Christine et à notre fille Caroline pour l'appui moral qu'elles m'ont accordé à chaque instant et pour la compréhension dont elles ont su faire preuve lorsque, trop souvent, ce travail a pris le pas sur notre vie familiale.

*Antoine Arts
juillet 1982*

TABLE DES MATIERES

Avant-propos	i
Table des matières	iii
Liste des symboles	ix
Liste des tableaux	xiv
Liste des figures	xvi
Introduction	1
CHAPITRE 1 - PRINCIPES GENERAUX -	
CHOIX D'UNE METHODE DE RESOLUTION	
1.1 Définition du problème	8
1.1.1 Problèmes liés au calcul de l'écoulement dans une turbomachine	8
1.1.2 Problèmes liés au calcul de l'écoulement dans un étage de turbine	10
1.1.3 Problèmes liés au calcul d'écoulements transsoniques	11
1.1.3.1 Existence des écoulements transsoniques .	11
1.1.3.2 Traitement des ondes de choc	13
1.2 Aperçu des méthodes utilisées pour le calcul de l'écoulement dans une turbomachine	15
1.2.1 Revue de quelques méthodes classiques de résolution en grille d'aubes	15
1.2.2 Revue de quelques méthodes de résolution d'écoulements tridimensionnels	17
1.2.3 Aperçu des méthodes de résolution de l'écoule- ment dans un étage de turbomachine	20
1.3 Exposé de la méthode de résolution choisie	24
1.3.1 Méthode de résolution par voie instationnaire	24
1.3.2 Résolution par la méthode des volumes finis .	26
1.4 Définitions importantes liées à la notion de schéma numérique de discrétisation	29
CHAPITRE 2 - ECOULEMENT UNIDIMENSIONNEL DANS UNE	
TUYÈRE CONVERGENTE-DIVERGENTE	
2.1 Introduction	30
2.2 Définition du système d'équations aux dérivées partielles	31
2.3 Définition des conditions aux limites	35

2.4	Conditions de stabilité	38
2.4.1	Critère de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (critère CFL)	38
2.4.2	Analyse de stabilité de von Neumann	40
2.5	Elaboration pratique de la discrétisation des équations aux dérivées partielles	43
2.6	Etude de quelques schémas numériques de discrétisation	45
2.6.1	Schéma d'Euler	45
2.6.2	Schéma de Lax	46
2.6.3	Schéma de Lax-Wendroff à deux pas	48
2.6.4	Schéma à viscosité corrigée	54
2.6.5	Schéma à amortissement corrigé	60
2.7	Influence du choix des conditions initiales	64
2.8	Choix d'un pas temporel variable	67
2.9	Influence du raffinement du maillage	68
2.10	Influence des conditions additionnelles purement numériques sur la stabilité	70
2.11	Comparaison des différents schémas numériques - Choix d'un schéma numérique de résolution	72

CHAPITRE 3 - ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL

3.1	Ecoulement bidimensionnel en grille d'aubes rectiligne	75
3.1.1	Introduction - Hypothèses de travail	75
3.1.2	Définition du système d'équations aux dérivées partielles	75
3.1.3	Discrétisation du domaine physique de l'écoulement	80
3.1.3.1	Description du domaine physique de l'écoulement	80
3.1.3.2	Description du domaine numérique de l'écoulement	82
3.1.3.3	Elément hexagonal de discrétisation (McDonald-Couston)	83
3.1.3.4	Elément trapézoïdal de discrétisation (Denton)	87
3.1.3.5	Elément bitrapézoïdal de discrétisation (Van Hove-Arts)	93
3.1.3.6	Elément quadrangulaire de discrétisation (Essers-Kafyeke)	97
3.1.3.7	Autres possibilités de maillage	101
3.1.3.8	Choix d'un élément de discrétisation	101

3.1.4	Description du schéma numérique à viscosité corrigée	104
3.1.5	Définition des conditions aux frontières	109
3.1.5.1	Conditions aux frontières physiques	109
3.1.5.2	Conditions aux frontières numériques	114
3.1.6	Description des conditions initiales	117
3.1.7	Condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy	117
3.1.8	Description de quelques résultats pratiques - Comparaison avec des résultats expérimentaux et ceux obtenus par d'autres méthodes numériques	120
3.2	Ecoulement bidimensionnel dans un étage de turbine	125
3.2.1	Introduction - hypothèses de travail	125
3.2.2	Principe général de la méthode de résolution	126
3.2.3	Discrétisation du domaine physique de l'écoulement	127
3.2.4	Définition du système d'équations aux dérivées partielles	128
3.2.5	Détermination des conditions aux frontières	131
3.2.6	Mise en oeuvre pratique de la méthode de résolution	135
3.2.6.1	Choix des conditions initiales	135
3.2.6.2	Nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires	136
3.2.6.3	Amortissement des conditions aux limites physiques intermédiaires	138
3.2.6.4	Expressions numériques des conditions aux limites physiques intermédiaires	138
3.2.6.5	Influence du choix des conditions aux frontières purement numériques	140
3.2.7	Description de quelques résultats pratiques - Comparaison avec des résultats expérimentaux	143
3.3	Ecoulement quasi-tridimensionnel	150
3.3.1	Introduction - hypothèses de travail	150
3.3.2	Définition du système d'équations aux dérivées partielles	152
3.3.3	Mise en oeuvre pratique de la discrétisation	153
3.3.4	Description de quelques résultats pratiques - Comparaison avec des résultats expérimentaux et ceux obtenus par d'autres méthodes numériques	154
3.3.5	Ecoulement quasi-tridimensionnel en étage de turbine	156

CHAPITRE 4 - ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL

4.1 Ecoulement tridimensionnel en grille d'aubes annulaire	158
4.1.1 Introduction	158
4.1.2 Définition du système d'équations aux dérivées partielles	159
4.1.3 Discrétisation du domaine physique de l'écoulement	164
4.1.3.1 Description du domaine physique de l'écoulement	164
4.1.3.2 Description du domaine numérique de l'écoulement	165
4.1.3.3 Description des volumes de contrôle	166
4.1.4 Description du schéma numérique à viscosité corrigée	168
4.1.4.1 Discrétisation des termes spatiaux	168
4.1.4.2 Discrétisation des termes temporels	170
4.1.4.3 Calcul du volume des éléments de contrôle	173
4.1.4.4 Calcul de la surface extérieure des éléments de contrôle	177
a. Face avant	180
b. Face inférieure	181
c. Face latérale	181
4.1.5 Description des conditions aux limites	183
4.1.5.1 Conditions aux limites physiques	183
4.1.5.2 Conditions aux limites numériques	188
4.1.6 Description des conditions initiales	191
4.1.7 Condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy	191
4.1.8 Mise en oeuvre pratique - Description de quelques résultats numériques	192
4.2 Ecoulement tridimensionnel en étage de turbine	201
4.2.1 Introduction	201
4.2.2 Principe général de la méthode de résolution	201
4.2.3 Discrétisation du domaine physique de l'écoulement	202
4.2.4 Définition du système d'équations aux dérivées partielles	203
4.2.5 Détermination des conditions aux frontières	206
4.2.6 Mise en oeuvre pratique de la méthode de résolution	209

4.2.6.1	Choix des conditions initiales	209
4.2.6.2	Expressions numériques des conditions aux limites physiques intermédiaires	210
4.2.6.3	Nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires	213
4.2.6.4	Choix des conditions aux limites purement numériques	214
4.2.7	Description de quelques résultats numériques . .	215
Conclusions		220
Références		223
Annexes :		
1-	Description de la méthode utilisée par Erdos et Alzner (Réf. 36) pour résoudre l'écoulement bidimensionnel instationnaire dans un étage de turbomachine	229
2.1	Analyse de consistance de l'élément hexagonal	236
2.2	Analyse de consistance de l'élément trapézoïdal	239
2.3	Analyse de consistance de l'élément bitrapézoïdal	240
2.4	Analyse de consistance de l'élément quadrangulaire	241
3 -	Analyse de la consistance et de l'ordre de précision de la discrétisation obtenue au moyen du demi-élément utilisé le long d'une paroi imperméable	242
Tableaux		245
Figures		

LISTE DES SYMBOLES

a	vitesse locale du son ($a^2 = \gamma RT$)
A	section locale d'une tuyère
$A(\vec{\sigma})$	matrice du système d'équations d'Euler (forme quasi-linéaire)
AVDR	variation de l'épaisseur d'un tube de courant entre les plans d'entrée et de sortie d'une grille d'aubes ou d'une turbomachine
$\vec{b}(\vec{\sigma})$	vecteur des termes indépendants du système d'équations d'Euler
$B(\vec{\sigma})$	matrice du système d'équations d'Euler (forme quasi-linéaire)
c	corde
c_p	chaleur spécifique à pression constante
c_v	chaleur spécifique à volume constant
C_a	coefficient d'amortissement des conditions aux limites intermédiaires dans le calcul d'un étage de turbine
C.F.L.	coefficient de sécurité sur le pas temporel
CI	condition initiale
CL	condition aux limites
CPU	temps de calcul réel (central processor unit)
e	énergie interne ($e = c_v T$)
E	énergie totale ($E = E + V^2/2$)
$\exp(x)$	e^x
$\vec{f}(\vec{\sigma})$	vecteur des termes convectifs du système d'équations d'Euler (forme quasi-conservative)
g	pas
ou	valeur propre de la matrice G
$\vec{g}(\vec{\sigma})$	vecteur des termes convectifs du système d'équations d'Euler (forme quasi-conservative)
G	matrice d'amplification de von Neumann
$\vec{h}(\vec{\sigma})$	vecteur des termes convectifs du système d'équations d'Euler (forme quasi-conservative)
H	enthalpie totale
i	constante imaginaire ($i^2 = -1$)
I	matrice unité
IM	nombre de noeuds de discrétisation dans la direction axiale (problèmes bi- et tridimensionnels)
J	jacobien d'une transformation de coordonnées

k		coefficient d'amortissement du schéma numérique à amortissement corrigé
KM		nombre de noeuds de discrétisation dans la direction tangentielle (problèmes bi- et tridimensionnels)
L	ou	longueur caractéristique portance
LM		nombre de noeuds de discrétisation dans la direction radiale (problèmes tridimensionnels)
M		nombre de Mach
MRS		rapport entre les nombres de Mach en amont et en aval d'un choc droit
$\vec{n}$		normale sortante à une surface
N		nombre de noeuds du maillage unidimensionnel
N_b		nombre d'aubes dans une grille d'aubes annulaire
Nd		nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes d'amortissement du schéma numérique à amortissement corrigé
NI		nombre d'itérations
Nr		vitesse de rotation du rotor (tr/min)
Nv		nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes visqueux du schéma numérique à viscosité corrigée
Nv ₁		nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires dans le calcul d'un étage de turbine
o		col
O(m)		précision d'ordre m
p		pression
r	ou	rayon coordonnée radiale dans un système de coordonnées cylindriques
r ₁		rayon spectral de la matrice G
R		constante des gaz parfaits
Re		nombre de Reynolds
s		coordonnée curviligne le long d'une courbe caractéristique
S		surface
t		variable temporelle
T		température
u		composante axiale de vitesse dans un système d'axes cartésien
U		vitesse circonférentielle des aubes rotoriques

v		composante tangentielle de vitesse dans un système d'axes cartésien
V		volume
	ou	vitesse absolue
V_c		vitesse de convergence
VC		coefficient de viscosité numérique du schéma numérique à viscosité corrigée
w		composante de vitesse relative
	ou	valeur propre de la matrice W
W		vitesse relative
	ou	matrice permettant de déterminer la nature mathématique du système d'équations d'Euler
x		coordonnée axiale dans un système d'axes cartésien
y		coordonnée tangentielle dans un système d'axes cartésien
z		coordonnée axiale dans un système de coordonnées cylindriques
$\vec{i}_r$		vecteur unitaire dans la direction radiale
$\vec{i}_\theta$		vecteur unitaire dans la direction tangentielle
$\vec{i}_z$		vecteur unitaire dans la direction axiale
α		coefficient de viscosité du schéma numérique à viscosité corrigée
	ou	angle de l'écoulement absolu dans le plan inter-aubes
β		angle de l'écoulement relatif dans le plan inter-aubes
γ		rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
	ou	angle de l'écoulement dans le plan méridien
Γ		circulation
∂V		frontière du volume V
∂S		contour de la surface S
Δx		incrément spatial dans la direction axiale
Δy		incrément spatial dans la direction tangentielle
Δt		incrément temporel
Δl		distance la plus courte entre le noeud central et les différentes faces d'un élément de contrôle
ε		erreur de convergence
ζ		coordonnée du système transformé permettant de calculer le volume d'un élément de contrôle
η		coordonnée du système transformé permettant de calculer le volume d'un élément de contrôle

θ	coordonnée tangentielle dans un système de coordonnées cylindriques
λ	valeur propre de la matrice $A(\vec{\sigma})$
$\vec{\lambda}$	vecteur propre correspondant à la valeur propre λ
μ_1, μ_2	cosinus directeurs du vecteur d'onde $\vec{\omega}$ (problèmes bidimensionnels)
ξ	coordonnée du système transformé permettant de calculer le volume d'un élément de contrôle
ρ	masse volumique
$\vec{\sigma}$	vecteur des inconnues du système d'équations d'Euler
ω	nombre d'onde de Fourier
$\vec{\omega}$	vecteur d'onde, de composantes ω_x et ω_y (problèmes bidimensionnels)
Ω	vitesse de rotation du rotor (s^{-1})

Notations indicielles inférieures

a	concerne l'écoulement absolu
ax	axial
c	au col
$corr$	valeur corrigée (3 ^{me} pas de viscosité du schéma de Lax-Wendroff)
cr	valeur critique
i	indice spatial de discrétisation dans la direction axiale
is	isentropique
k	indice spatial de discrétisation dans la direction tangentielle
ℓ	indice spatial de discrétisation dans la direction radiale
r	concerne l'écoulement relatif
ou	relatif au rotor
ou	coordonnée radiale (système de coordonnées cylindriques)
ref	valeur au rayon de référence (problèmes tridimensionnels)
s	relatif au stator
x	coordonnée axiale (système d'axes cartésien)
y	coordonnée tangentielle (système d'axes cartésien)
z	coordonnée axiale (système de coordonnées cylindriques)
θ	coordonnée tangentielle (système de coordonnées cylindriques)

- 0 grandeur totale absolue ou relative
- 1 plan d'entrée d'une grille d'aubes ou d'un étage
- 2 plan de sortie d'une grille d'aubes, plan d'entrée
du rotor d'un étage, plan de sortie du stator
d'un étage
- 3 plan de sortie du rotor d'un étage

Notations indicielles supérieures

- n indice temporel de discrétisation
- * mis à jour toutes les N_v itérations
- ** mis à jour toutes les N_d itérations
- valeur dimensionnelle
- == valeur moyenne (moyenne massique sur un pas)
- grandeur vectorielle

LISTE DES TABLEAUXChapitre 2 : Ecoulement unidimensionnel dans
une tuyère convergente-divergente

- 1 Géométrie de la tuyère 1
- 2 Géométrie de la tuyère 2
- 3 Coefficient de viscosité numérique dans le schéma à viscosité corrigée
- 4a Schéma à viscosité corrigée explicite : analyse de stabilité de von Neumann
- 4b Schéma à viscosité corrigée explicite : analyse de stabilité de von Neumann
- 4c Schéma à viscosité corrigée explicite : analyse de stabilité de von Neumann
- 4d Schéma à viscosité corrigée explicite : analyse de stabilité de von Neumann
- 5 Comparaison entre les schémas à viscosité corrigée explicite et semi-implicite
- 6 Schéma à amortissement corrigé : analyse de stabilité de von Neumann
- 7 Schéma à amortissement corrigé : application numérique
- 8 Schéma à amortissement corrigé : influence de la discrétisation
- 9 Influence des conditions additionnelles purement numériques sur la stabilité

Chapitre 3 : Ecoulement bidimensionnel

- 10 Influence des conditions additionnelles purement numériques sur la stabilité
- 11 Section de tête d'un aubage rotorique de dernier étage d'une turbine à vapeur de grande puissance : coordonnées du profil (Réf. 59, 60)
- 12 Section moyenne d'un aubage rotorique de turbine à gaz transsonique : coordonnées du profil (Réf. 61)
- 13 Approximation initiale des conditions aux limites intermédiaires dans le calcul d'un étage de turbine
- 14 Etage 2 de turbine : coordonnées des profils statoriques et rotoriques (Réf. 65)
- 15 Comparaison des triangles de vitesses en aval du stator et du rotor (Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.225$)
- 16 Aube statorique de turbine à gaz : coordonnées du profil (Réf. 19)

- 17 Aube statorique de turbine à gaz : géométrie des
 parois contournées (Réf. 19)

Chapitre 4 : Ecoulement tridimensionnel

- 18 Influence des conditions additionnelles purement
 numériques sur la stabilité
- 19 Grille d'aubes annulaire T1 : coordonnées du
 profil statorique
- 20 Grille d'aubes annulaire T1 : géométrie des
 parois contournées du carter

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1 : Principes généraux -

Choix d'une méthode de résolution

- 1 Exemple de surfaces S_1 et S_2
- 2 Etage de turbine pour une géométrie bidimensionnelle
- 3 Surfaces de courant réelles et approchées
- 4 Géométrie d'un étage de compresseur (méthode de Kemp et Sears, Réf. 34)

Chapitre 2 : Ecoulement unidimensionnel dans une tuyère convergente-divergente

- 5 Définition des directions caractéristiques dans les plans d'entrée et de sortie de la tuyère
- 6 Critère de stabilité C.F.L.
- 7 Définition des modes de Fourier corrects et numériques
- 8 Géométrie des tuyères TU1 et TU2
- 9 Molécule de base de la discrétisation
- 10 Schéma de Lax : application numérique
- 11 Schéma de Lax-Wendroff à deux pas : application numérique
- 12 Schéma de Lax-Wendroff à deux pas : application numérique
- 13 Schéma de Lax-Wendroff à deux pas : application numérique
- 14 Stabilité du schéma à viscosité corrigée semi-implicite
- 15 Schéma à viscosité corrigée : application numérique
- 16 Schéma à viscosité corrigée : application numérique
- 17 Influence des conditions initiales (échelles linéaires)
- 18 Influence des conditions initiales (échelles semi-logarithmiques)
- 19 Influence d'un pas temporel variable sur l'évolution de l'erreur de convergence
- 20 Influence de la taille du maillage sur l'évolution de l'erreur de convergence
- 21 Influence du raffinement du maillage sur l'évolution de l'erreur de convergence
- 22 Influence de la taille du maillage sur la précision des résultats

Chapitre 3 : Ecoulement bidimensionnel

- 23 Domaine physique de l'écoulement
- 24 Systèmes d'ondes de choc en aval d'une grille d'aubes
 (strioscopies)
- 25 Domaine numérique de l'écoulement
- 26a Elément hexagonal (McDonald-Couston)
- 26b Elément trapézoïdal (Denton)
- 26c Elément bitrapézoïdal (Van Hove-Arts)
- 26d Elément quadrangulaire (Essers-Kafyeke)
- 27 Elément hexagonal (McDonald-Couston) : analyse de
 consistance de la discrétisation
- 28 Elément trapézoïdal (Denton) : analyse de consistance
 de la discrétisation
- 29 Maillage utilisé par Denton (Réf. 24, 53)
- 30 Elément bitrapézoïdal (Van Hove-Arts) : analyse de
 consistance de la discrétisation
- 31 Elément quadrangulaire (Essers-Kafyeke) : analyse de
 consistance de la discrétisation
- 32 Maillage curvilinéaire de discrétisation (Réf. 55)
- 33 Choix d'un élément de discrétisation
- 34a Schéma à viscosité corrigée : cas général
- 34b Schéma à viscosité corrigée : traitement des
 frontières périodiques
- 34c Schéma à viscosité corrigée : traitement des
 frontières imperméables
- 34d Schéma à viscosité corrigée : traitement du bord
 d'attaque
- 34e Schéma à viscosité corrigée : traitement du bord
 de fuite
- 35 Directions caractéristiques dans les plans d'entrée
 et de sortie d'une grille d'aubes
- 36 Critère de stabilité C.F.L. pour un problème
 d'écoulement bidimensionnel
- 37 Facteur de correction du pas temporel pour le système
 à enthalpie totale constante
- 38 Influence de la direction du vecteur vitesse sur le
 pas temporel limite de stabilité
- 39 Influence de l'orientation du maillage sur le pas
 temporel limite de stabilité (élément hexagonal)
- 40 Section de tête d'un aubage rotorique de dernier étage
 d'une turbine à vapeur de grande puissance :
 Aube 1 (Réf. 59, 60)

- 41 Section moyenne d'un aubage rotorique de turbine à gaz transsonique : Aube 2 (Réf. 61)
- 42 Comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique (Aube 1 - $M_{2is} = 1.$)
- 43 Comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique (Aube 1 - $M_{2is} = 1.4$)
- 44 Comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique (Aube 1 - $M_{2is} = 1.58$)
- 45 Evolution de l'erreur de convergence et de l'angle de sortie (Aube 1 - $M_{2is} = 1.58$)
- 46a Distribution du nombre de Mach isentropique : solutions intermédiaires (Aube 1 - $M_{2is} = 1.58$)
- 46b Distribution du nombre de Mach isentropique : solutions intermédiaires (Aube 1 - $M_{2is} = 1.58$)
- 46c Distribution du nombre de Mach isentropique : solutions intermédiaires (Aube 1 - $M_{2is} = 1.58$)
- 47 Comparaison des valeurs de l'angle aérodynamique de sortie (Aube 1)
- 48 Distribution du nombre de Mach isentropique : influence de la taille du maillage (Aube 1 - $M_{2is} = 1.$)
- 49 Distribution du nombre de Mach isentropique : influence de la taille du maillage (Aube 1 - $M_{2is} = 1.4$)
- 50 Distribution du nombre de Mach isentropique : influence de la taille du maillage (Aube 1 - $M_{2is} = 1.58$)
- 51 Comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique (Aube 2 - $M_{2is} = 1.$)
- 52 Comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique (Aube 2 - $M_{2is} = 1.41$)
- 53 Evolution de l'erreur de convergence et de l'angle de sortie (Aube 2 - $M_{2is} = 1.$)
- 54 Principe de calcul des conditions aux frontières intermédiaires d'un étage de turbine
- 55 Mise à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires
- 56 Amortissement des conditions aux limites physiques intermédiaires
- 57 Géométrie de l'étage 1 (A.C.E.C.)
- 58 Géométrie de l'étage 2 (N.A.S.A.)
- 59 Distribution de la pression statique (Etage 1 - $p_3/p_{01} = 0.7$)
- 60 Distribution du nombre de Mach isentropique (Etage 1 - $p_3/p_{01} = 0.7$)
- 61a Evolution de l'angle absolu de sortie du stator (Etage 1 - $p_3/p_{01} = 0.7$ - $Nr = 9000$ tr/min)

- 61b Evolution de l'angle relatif de sortie du rotor
(Etage 1 - $p_3/p_{01} = 0.7$ - $Nr = 9000$ tr/min)
- 62 Evolution des conditions intermédiaires en fonction
de la contrepression (Etage 1)
- 63 Distribution de la pression statique
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.225$)
- 64 Distribution du nombre de Mach isentropique
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.225$)
- 65 Distribution de la pression statique
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.358$)
- 66 Distribution du nombre de Mach isentropique
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.358$)
- 67 Distribution de la pression statique
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.462$)
- 68 Distribution du nombre de Mach isentropique
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.462$)
- 69 Distribution du nombre de Mach isentropique (Etage 2)
- 70 Evolution des triangles de vitesses en aval du stator
et du rotor en fonction de la contrepression (Etage 2)
- 71 Comparaison des distributions de vitesse dans le
stator (Etage 2)
- 72a Evolution de l'angle absolu de sortie du stator
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.225$ - $Nr = 8081$ tr/min)
- 72b Evolution de l'angle relatif de sortie du rotor
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.225$ - $Nr = 8081$ tr/min)
- 73 Evolution de la pression statique intermédiaire
(Etage 2 - $p_3/p_{01} = 0.225$ - $Nr = 8081$ tr/min)
- 74 Forces exercées sur les parois (écoulement quasi-
tridimensionnel)
- 75 Ecoulement quasi-tridimensionnel : définition des
"volumes" de contrôle
- 76a Aube statorique de turbine à gaz (Aube 3)
- 76b Profil des parois contournées (Aube 3)
- 77 Ecoulement quasi-tridimensionnel : comparaison des
distributions du nombre de Mach isentropique
(Aube 3 - $M_{2is} = 0.73$)
- 78 Ecoulement quasi-tridimensionnel : comparaison des
distributions du nombre de Mach isentropique
(Aube 3 - $M_{2is} = 0.9$)
- 79a Influence de la présence de parois contournées sur
la distribution du nombre de Mach isentropique
- 79b Influence de la présence de parois contournées sur
l'angle de sortie

Chapitre 4 : Ecoulement tridimensionnel

- 80 Domaine physique de l'écoulement
- 81 Domaine numérique de l'écoulement
- 82 Différentes projections du volume de contrôle
- 83 Exemple de volume de contrôle
- 84 Transformation de coordonnées permettant le calcul
 du volume des éléments de contrôle
- 85 Définition d'une face du volume de contrôle
- 86 Projections de la face avant du volume de contrôle
- 87 Projections de la demi-face inférieure du
 volume de contrôle
- 88 Projections d'une demi-face latérale du volume
 de contrôle
- 89 Critère de stabilité C.F.L.: domaine de dépendance
 numérique
- 90 Soufflerie basse vitesse T1
- 91 Grille d'aubes annulaire T1 : géométrie des
 aubages statoriques
- 92 Grille d'aubes annulaire T1 : géométrie des
 parois contournées
- 93 Evolution de l'erreur de convergence et de l'angle
 de sortie (paroi extérieure contournée)
- 94 Evolution de l'erreur de convergence et de l'angle
 de sortie (paroi extérieure cylindrique)
- 95 Comparaison des distributions du nombre de Mach
 isentropique (paroi extérieure contournée)
- 96 Distribution radiale de la pression statique ($z/c_{ax} = 0.407$)
- 97 Distribution radiale de la déflexion angulaire
 dans le plan (θ, z) ($z/c_{ax} = 0.407$)
- 98 Distribution radiale de la pression statique
 ($z/c_{ax} = 0.912$)
- 99 Distribution radiale de la déflexion angulaire
 dans le plan (θ, z) ($z/c_{ax} = 0.912$)
- 100 Comparaison des distributions radiales de la pression
 statique (paroi extérieure cylindrique)
- 101 Comparaison des distributions radiales de la pression
 statique (paroi extérieure contournée)
- 102 Comparaison des distributions radiales de la déflexion
 angulaire dans le plan (θ, z)
- 103 Evolution de la pression statique intermédiaire au
 rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)
- 104 Evolution de l'angle absolu de sortie du stator au
 rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)

- 105 Evolution de l'angle absolu de sortie du rotor au rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)
- 106 Evolution de la pression statique intermédiaire au rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)
- 107 Evolution de l'angle absolu de sortie du stator au rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)
- 108 Evolution de l'angle absolu de sortie du rotor au rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)
- 109 Evolution de la pression statique intermédiaire au rayon moyen ($p_3/p_{01a,ref} = 0.7$)
- 110 Distribution radiale de la pression statique en amont, au droit du plan intermédiaire et en aval de l'étage (Etage 3)
- 111 Distribution radiale de l'angle de l'écoulement absolu au droit du plan de sortie du stator (Etage 3)
- 112 Distribution radiale de l'angle de l'écoulement relatif au droit du plan d'entrée du rotor (Etage 3)
- 113 Distribution radiale de l'angle de l'écoulement relatif au droit du plan de sortie du rotor (Etage 3)
- 114 Distribution radiale de l'angle de l'écoulement absolu au droit du plan de sortie du rotor (Etage 3)
- 115a Comparaison des triangles de vitesses dans le plan inter-aubes en aval du stator (Etage 3)
- 115b Comparaison des triangles de vitesses dans le plan inter-aubes en aval du rotor (Etage 3)
- 116 Comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique dans le stator et le rotor (Etage 3)

INTRODUCTION

Au cours des deux dernières décades, les améliorations les plus marquantes dans la conception d'étages de turbine ont été réalisées grâce à la mise au point de méthodes numériques de plus en plus sophistiquées de résolution de l'écoulement méridien. Les approches actuellement les plus répandues sont basées sur les méthodes de courbure des lignes de courant et sur les méthodes par différences finies ou par éléments finis. Aucune de celles-ci ne possède un réel avantage sur les autres et la qualité des résultats obtenus est principalement fonction du choix des corrélations expérimentales de pertes et de déflexion introduites dans le modèle mathématique.

La grande majorité de ces approches possède un caractère quasi-tridimensionnel : les paramètres de l'écoulement sont en effet déterminés alternativement dans le plan méridien et dans le plan inter-aubes au cours d'un processus itératif. Le résultat du calcul dans le plan méridien fournit les conditions aux limites à appliquer pour le calcul dans le plan inter-aubes et vice-versa. Dans le plan méridien, l'écoulement se développe le long d'un ensemble de canaux, empilés radialement; dans chacun de ceux-ci, l'écoulement est totalement indépendant de celui qui se développe dans le canal adjacent. On comprend dès lors aisément que cette approche ne peut pas prendre en compte les effets aérodynamiques tridimensionnels tels que le blocage sonique, les ondes de choc, les phénomènes de séparation, les écoulements de paroi et de coin, etc.

L'usage d'une approche réellement tridimensionnelle permet de se libérer d'une partie de ces contraintes. Deux possibilités sont offertes : le calcul d'écoulements visqueux ou non visqueux. L'accès à la première possibilité est extrêmement limité et le restera encore quelques années; la résolution tridimensionnelle des équations de Navier-Stokes nécessite en effet d'énormes moyens de calcul aussi bien au point de vue du temps d'exécution que de la capacité en mémoire; elle est bien entendu inabordable dans le cas d'une application indus-

trielle. En ce qui concerne la deuxième possibilité, on choisit de traiter un écoulement non visqueux, mais dont le caractère rotationnel existant dans le plan d'entrée peut éventuellement être conservé au moyen d'un gradient de pression totale imposé au droit de ce plan.

Une approche tridimensionnelle non visqueuse est beaucoup plus abordable du point de vue pratique et possède des avantages certains. En effet, la validité des hypothèses à la base des méthodes quasi-tridimensionnelles n'est pas totalement établie; de plus, ces hypothèses sont difficiles à respecter lors de comparaisons avec des résultats de mesures effectuées en soufflerie. Contrairement à ces approches, la démarche tridimensionnelle n'impose absolument aucune contrainte de symétrie à l'ensemble du problème. Elle est également pleine d'enseignements : les effets tridimensionnels en écoulements transsoniques sont aujourd'hui encore mal compris. On connaît en effet peu de choses au sujet des ondes de choc tridimensionnelles et la condition d'établissement du débit critique ne semble pas être clairement définie dans le cas d'une grille d'aubes annulaire. L'approche est également intéressante en ce sens que ces phénomènes peuvent être étudiés par voie théorique plutôt qu'expérimentale.

Lors de la conception d'un étage de turbine, les constructeurs ignorent généralement dans leur démarche les influences relatives à l'interaction de deux rangées d'aubes entre elles (stator et rotor). Un exemple typique de cette interaction est l'écoulement dans les derniers étages d'une turbine à vapeur; le blocage sonique partiel existant dans le rotor en régime à charge partielle introduit des écoulements radiaux intenses et influence l'écoulement dans le stator correspondant de manière non négligeable.

Bien que la capacité requise en mémoire d'ordinateur et le temps de calcul total nécessaire restent fort importants, ne permettant pas encore une utilisation intensive de cette méthode tridimensionnelle de calcul, cette démarche peut être con-

sidérée comme la phase finale de la mise au point aérodynamique d'un profil d'aube ou d'un étage de turbomachine. La conception et l'optimisation des différentes sections des aubages sont réalisées au moyen de méthodes bidimensionnelles relativement rapides; la vérification finale est effectuée grâce à l'approche tridimensionnelle. Au vu des résultats obtenus, la géométrie de certaines sections est éventuellement corrigée puis réoptimisée au moyen de méthodes bidimensionnelles avant de refaire une vérification globale au moyen du calcul tridimensionnel.

Ayant ainsi présenté le cadre général de notre travail de recherche, nous allons décrire les étapes principales de notre démarche.

Dans le premier chapitre nous établirons les principes généraux de notre travail en décrivant les différents problèmes liés au calcul de l'écoulement transsonique adiabatique d'un fluide parfait non visqueux dans une turbine, un de ses étages ou une de ses rangées d'aubes et en recherchant dans la littérature technique différentes méthodes disponibles pour les résoudre. Cette analyse nous permettra de choisir l'approche que nous croyons être la plus apte à traiter notre problème d'écoulement; nous la décrirons de manière détaillée. Nous terminerons le chapitre par le rappel de quelques définitions importantes liées à la notion de schéma numérique de discrétisation.

Afin d'effectuer une démarche aussi complète que possible, nous traiterons ensuite successivement les trois points suivants :

- les écoulements unidimensionnels en tuyère convergente-divergente non adaptée (Chapitre 2);
- les écoulements bidimensionnels et quasi-tridimensionnels en grille d'aubes et en étage de turbine (Chapitre 3);
- les écoulements tridimensionnels en grille d'aubes annulaire et en étage de turbine (Chapitre 4).

La résolution d'écoulements unidimensionnels en tuyère (Chapitre 2) nous permettra d'établir et de développer les différents concepts théoriques utilisés tout au long de ce travail. Nous étudierons la mise en équation du problème ainsi que les différentes conditions aux limites, tant physiques que numériques, à appliquer le long des frontières du domaine de l'écoulement afin d'obtenir un problème bien posé. La notion de stabilité mathématique d'un schéma numérique sera établie et une démarche classique (analyse de von Neumann) permettant de définir les conditions d'existence de cette stabilité sera présentée. Nous considérerons ensuite différents schémas numériques explicites aux différences finies : nous les comparerons au point de vue de leur stabilité, de leur vitesse de convergence asymptotique et de leur précision. Pour chaque schéma, nous proposerons une ou plusieurs applications numériques en comparant la solution obtenue à la solution analytique, facilement déterminable. Nous étudierons différentes manières d'augmenter la vitesse de convergence asymptotique du processus numérique et de diminuer le temps total de calcul : choix des conditions initiales, influence d'un pas temporel variable et utilisation d'une technique de raffinement du maillage. Cette démarche nous permettra de choisir un schéma numérique de résolution que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

Les différentes conclusions qualitatives tirées de la démarche réalisée au chapitre 2, nous permettront d'entreprendre l'étude des écoulements bidimensionnels (Chapitre 3). L'écoulement dans une grille d'aubes retiendra d'abord notre attention. Après avoir établi correctement le système d'équations aux dérivées partielles à résoudre, nous étudierons de manière approfondie différentes possibilités de discrétisation du domaine physique de l'écoulement afin de pouvoir appliquer la méthode des volumes finis (ou des aires finies pour les problèmes bidimensionnels); les éventuelles conditions de consistance de la discrétisation devant être vérifiées pour chacune des surfaces de contrôle considérées, seront établies. Cette analyse nous conduira à la définition de la surface élémentaire de

contrôle que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Nous décrirons ensuite de manière détaillée la mise en oeuvre pratique du schéma numérique à viscosité corrigée dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle; tous les cas particuliers (paroi imperméable, frontière périodique, bords d'attaque et de fuite) seront considérés. Nous consacrerons également une partie de ce chapitre au choix de la nature des différentes conditions aux limites numériques à appliquer au droit des plans d'entrée et de sortie de la grille d'aubes et à leur influence sur la stabilité du processus de résolution. Plusieurs applications numériques seront enfin proposées : les résultats obtenus au moyen de notre méthode seront comparés à ceux obtenus par des mesures en soufflerie ainsi que par d'autres méthodes numériques. Cette comparaison portera tant sur la qualité du résultat final que, du moins en ce qui concerne les approches théoriques, sur le temps total de calcul nécessaire.

A partir de la démarche effectuée pour résoudre l'écoulement en grille d'aubes, nous étudierons l'écoulement bidimensionnel dans un étage de turbine (stator + rotor). Après avoir examiné les différentes possibilités d'aborder le problème et eu égard aux limitations de temps de calcul dictées par le désir de conserver un caractère industriel au programme de calcul, nous résoudrons ce problème en admettant l'hypothèse d'écoulement stationnaire dans l'étage étudié. La méthode proposée consiste à résoudre cet écoulement à partir de deux calculs en grille d'aubes (grille statorique et grille rotorique) couplés par leurs conditions aux limites. La manière dont ce couplage est réalisé ainsi que sa mise en oeuvre pratique seront décrites de manière détaillée. L'influence des différents paramètres numériques de ce couplage sera également étudiée. Nous considérerons ensuite deux géométries d'étages en guise d'application numérique. La géométrie du premier d'entre eux, dans lequel l'écoulement est subsonique, nous a été fournie par les A.C.E.C. (Division de Gand); celle du second, dans lequel l'écoulement est transsonique, provient de la N.A.S.A. et nous permettra de comparer certains de nos résultats à des mesures effectuées en soufflerie.

Nous terminerons ce troisième chapitre par l'extension de la démarche aux problèmes d'écoulements quasi-tridimensionnels, c'est-à-dire tenant compte de l'existence d'une variation de l'épaisseur du tube de courant dans la direction axiale mais ne considérant que deux composantes de vitesse : axiale et tangentielle. Après avoir apporté les modifications nécessaires au système d'équations aux dérivées partielles et à la mise en oeuvre pratique de la discrétisation, nous présenterons deux applications numériques relatives à une aube statorique de turbine à gaz. Une comparaison sera effectuée avec les résultats de mesures en soufflerie et ceux obtenus par une autre méthode numérique. Nous montrerons également comment la présence de parois contournées modifie complètement l'écoulement et dans quelle mesure la démarche quasi-tridimensionnelle parvient à en tenir compte.

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons la démarche tridimensionnelle. Le calcul en grille d'aubes annulaire sera traité dans la première partie de ce chapitre. Après avoir défini, dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) l'ensemble des équations aux dérivées partielles à résoudre, nous nous attacherons aux problèmes liés à la discrétisation du domaine physique de l'écoulement. Les éléments de contrôle, nécessités par l'application de la méthode des volumes finis, résultent d'une généralisation à trois dimensions de l'élément utilisé dans la résolution des problèmes bidimensionnels. Leur définition sera effectuée de manière très rigoureuse et nous décrirons, à partir d'un simple changement de coordonnées, la manière de calculer l'aire des différentes faces et le volume de chaque élément. Les expressions algébriques discrétisant le système d'équations aux dérivées partielles seront également établies pas à pas. De manière analogue à ce qui a été fait pour les problèmes uni- et bidimensionnels, nous consacrerons une partie de ce chapitre au choix de la nature des conditions aux limites physiques et numériques à appliquer au droit des plans d'entrée et de sortie; la manière d'établir ces conditions et leur influence sur la stabilité du processus de résolution

seront discutées. En guise d'application numérique, nous résoudrons l'écoulement dans le stator de la soufflerie annulaire basse vitesse T1 de l'Institut von Karman, et ce pour les deux configurations géométriques de la paroi extérieure : contournée et cylindrique. Les résultats obtenus seront comparés afin d'étudier l'effet du changement de configuration.

A ce stade de notre démarche, nous serons en possession de tous les éléments nécessaires à la réalisation de la phase finale de notre travail : la mise au point d'un programme de calcul permettant de résoudre l'écoulement tridimensionnel, adiabatique d'un fluide parfait, non visqueux dans un étage de turbine. Le principe du couplage, exposé pour les problèmes d'écoulements bidimensionnels en étage, sera généralisé à trois dimensions. La démarche sera décrite de manière détaillée. Les temps importants de calcul qu'elle nécessite, nous amèneront à ne présenter qu'un nombre restreint d'applications numériques.

CHAPITRE 1 PRINCIPES GENERAUX

CHOIX D'UNE METHODE DE RESOLUTION

1.1 DEFINITION DU PROBLEME

1.1.1 Problèmes liés au calcul de l'écoulement dans une turbomachine

L'écoulement réel existant au sein d'une turbomachine est très complexe. Il est par définition tridimensionnel et instationnaire, faisant intervenir des phénomènes visqueux tels que couches limites, sillages et décollements. Il est soumis à des gradients dans trois directions : axiale, circonférentielle et radiale. La modélisation par voie numérique exige de ce fait l'établissement d'une série d'hypothèses simplificatrices dont l'importance est fonction du temps de calcul et de la complexité des algorithmes de résolution admissibles pour cette modélisation. Le calcul exact exige en effet la résolution des équations de Navier-Stokes pour une géométrie tridimensionnelle. Considérant le niveau des vitesses atteintes dans les turbo-machines actuelles, le nombre de Reynolds est le plus souvent bien supérieur à 10^5 dans la majeure partie de l'écoulement. Pour de tels nombres de Reynolds, la résolution des équations de Navier-Stokes avec une précision raisonnable, dans le cas d'une géométrie aussi complexe que celle d'une turbomachine, pose encore actuellement d'énormes problèmes : elle nécessite l'emploi d'ordinateurs dont la capacité de mémoire est de loin supérieure à celle généralement offerte dans les centres de calcul auxquels nous avons accès et dont la vitesse d'exécution devrait être beaucoup plus rapide.

Lorsque le nombre de Reynolds est tellement élevé, on peut envisager de considérer le fluide comme non visqueux et l'écoulement comme adiabatique dans la plus grande partie du domaine étudié : les termes de "tensions visqueuses" et de transfert de chaleur apparaissant dans les équations de Navier-Stokes sont en effet plus petits, négligeables vis-à-vis des

termes convectifs (ou de flux) de ces mêmes équations. Nous ferons donc l'hypothèse dans ce travail que le fluide obéit à la loi des gaz parfaits et que les équations décrivant l'écoulement sont les équations d'Euler. Dans le cas des aubages de turbomachines, les zones visqueuses se réduisent pratiquement aux couches limites, sillages et décollements. Comme toute convection disparaît dans ces zones, le modèle proposé n'y est plus représentatif de la réalité. Le calcul de l'écoulement y est effectué séparément par une autre méthode, puis couplé avec le calcul non visqueux de la partie principale de l'écoulement.

Jusqu'il y a peu de temps encore, la description d'un écoulement tridimensionnel se faisait au moyen des surfaces de courant dans les plans méridiens et inter-aubes (surfaces S1 et S2 (Fig. 1) introduits par Wu (Réf. 1). Cette méthode permettait de scinder le problème tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels ou quasi-tridimensionnels (par écoulement quasi-tridimensionnel, nous désignons un écoulement inter-aubes prenant en compte une variation, dans la direction axiale, de l'épaisseur du tube de courant), à savoir celui de l'écoulement relatif à la surface S1 (écoulement inter-aubes) et celui de l'écoulement relatif à la surface S2 (écoulement méridien). L'écoulement tridimensionnel réel était approché par une succession de surfaces S1 à différents rayons : le couplage était obtenu au travers d'un processus itératif entre les calculs de l'écoulement méridien et de l'écoulement inter-aubes.

Comme nous le verrons plus loin, la validité des hypothèses à la base de ces méthodes quasi-tridimensionnelles n'est cependant pas totalement établie; de plus, ces hypothèses sont difficiles à respecter lors de comparaisons avec des résultats de mesures effectuées en soufflerie. Contrairement à cette approche qui impose notamment la limitation de considérer les surfaces de courant dans le plan inter-aubes comme étant axisymétriques, la démarche tridimensionnelle que nous proposons n'impose absolument aucune contrainte de symétrie à l'ensemble

du problème. Elle est de plus pleine d'enseignements : les effets tridimensionnels en écoulements transsoniques sont actuellement encore mal compris. On connaît en effet peu de choses au sujet des ondes de choc tridimensionnelles et dans le cas d'une grille d'aubes annulaire, la condition d'établissement du débit critique ne semble pas être clairement définie.

1.1.2 Problèmes liés au calcul de l'écoulement dans un étage de turbine

L'objet de ce travail est le calcul de l'écoulement tridimensionnel complet dans un étage de turbine transsonique. Le calcul aérodynamique d'un étage de turbine permet d'étudier l'influence entre deux rangées d'aubes dont l'une est fixe et l'autre mobile. La géométrie du problème, simplifiée au cas d'un espace bidimensionnel dans un plan inter-aubes, est présentée à la figure 2. La difficulté principale du problème de l'interaction entre le stator et le rotor correspondant réside au niveau de l'espace situé entre ces deux rangées d'aubes. L'écoulement réel, vu par un observateur fixe par rapport au stator, est fondamentalement instationnaire : c'est d'ailleurs la raison pour laquelle la turbine fournit du travail moteur. Le caractère instationnaire du problème découle du fait que, en un point fixe de l'espace en amont du rotor, les valeurs des paramètres décrivant l'écoulement changent à chaque instant suite au mouvement des aubes rotoriques.

La grande majorité des méthodes qui calculent l'écoulement dans une turbomachine font cependant l'hypothèse que l'écoulement absolu dans le stator et l'écoulement relatif dans le rotor sont stationnaires. A cet effet, les conditions thermodynamiques régnant en amont des deux rangées d'aubes et particulièrement en amont du rotor doivent être stationnaires. Pour pouvoir faire cette hypothèse, deux possibilités sont offertes.

La première consiste à considérer que les positions relatives dans l'espace des deux rangées d'aubes sont figées

pour toute valeur du temps. Dans ce cas, un champ de conditions thermodynamiques non uniforme dans la direction tangentielle peut exister en amont du rotor. L'inconvénient majeur de cette approche est que la solution ainsi obtenue n'est valable que pour la configuration géométrique imposée. Pour avoir une idée globale de l'écoulement, il faudra répéter le calcul pour plusieurs positions relatives du rotor par rapport au stator. Ce processus exige un temps de calcul fort important.

La seconde hypothèse que l'on peut faire pour rendre le problème stationnaire est d'imposer l'existence d'une distribution des conditions thermodynamiques uniforme dans la direction tangentielle en amont du rotor. Quelles que soient les positions relatives des deux rangées d'aubes l'une par rapport à l'autre, celles-ci n'influencent alors pas la distribution des paramètres décrivant l'écoulement. Il faut donc définir quelque part entre les deux rangées d'aubes un plan fictif dans lequel les pressions, vitesses, températures, etc. obtenues en aval du stator sont moyennées le long du pas. Pour des raisons facilement compréhensibles de limitation du temps de calcul, surtout dans le cas d'une géométrie tridimensionnelle, nous avons choisi la seconde approche.

1.1.3 Problèmes liés au calcul d'écoulements transsoniques

1.1.3.1 Existence des écoulements transsoniques

Un écoulement transsonique est caractérisé par la présence simultanée de zones où l'écoulement est subsonique et de régions supersoniques. La vitesse périphérique des turbomachines actuelles est de plus en plus élevée pour permettre des transferts d'énergie de plus en plus importants. Cette situation conduit les machines tournantes à opérer localement ou totalement dans le domaine transsonique. La définition que nous en avons donnée a un sens beaucoup plus large que celui généralement admis d'un point de vue mathématique et correspondant à

un nombre de Mach proche de l'unité. Un aubage transsonique peut présenter simultanément des zones à nombre de Mach très faible (0.2 ... 0.3) et des zones à nombre de Mach très élevé (1.7 ... 1.8); des exemples typiques en sont les aubages des derniers étages d'une grande turbine à vapeur, de turbo-soufflantes à double flux ou de turbines à gaz récentes.

Dans le cas des écoulements sub- et supersoniques, l'existence d'analogies physiques facilite l'interprétation des phénomènes observés (analogies rhéoelectriques, table à eau, ...). D'autre part, l'analogie mathématique étroite entre les équations différentielles décrivant un écoulement subsonique (équations de nature elliptique) et l'équation de Laplace, de même que celle qui existe entre les équations d'un écoulement supersonique (équations de nature hyperbolique) et l'équation des ondes, est d'une aide précieuse pour le traitement numérique. De telles analogies physiques ou mathématiques n'existent plus dans le cas des écoulements transsoniques et la résolution des équations les décrivant (équations elliptico-hyperboliques ou hybrides) nécessite le plus souvent une approche plus rigoureuse du point de vue mathématique (Réf. 2).

Des corrélations expérimentales permettent d'obtenir les performances (déflexions, pertes, ...) de "familles" d'aubages qu'on qualifie de subsoniques, et cela parfois même sans connaître la forme exacte du profil étudié (exemples aux références 3 et 4). Au contraire, dans le cas d'écoulements transsoniques, nous sommes confrontés aux problèmes liés à la présence d'ondes de choc, des pertes par choc et des interactions choc - couche limite. La conception d'une aube est critique pour l'obtention de la performance souhaitée : des profils tout à fait satisfaisants en régime subsonique peuvent s'avérer très mauvais lorsque l'écoulement devient transsonique; l'apparition d'ondes de choc de forte intensité ou de décollements importants fait chuter leur rendement. Nous avons donc dû tenir compte de l'existence de ces discontinuités lors de l'élaboration d'une méthode de calcul : le paragraphe suivant synthétise les deux grandes approches classiques du traitement des ondes de choc.

1.1.3.2 Traitement des ondes de choc

Deux approches sont généralement proposées afin de résoudre numériquement un écoulement aux alentours d'une onde de choc (Réf. 5). Dans la première (méthode d'ajustement des chocs ou "shock fitting"), on considère le choc comme une véritable discontinuité : le système d'équations aux dérivées partielles décrivant l'écoulement est appliqué de chaque côté de l'onde de choc et l'unicité de la solution est forcée par l'application d'une condition "limite" au droit de la discontinuité. Les équations exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont appliquées au travers du choc : on obtient les relations de Rankine-Hugoniot. Elles permettent de déterminer la valeur des inconnues de part et d'autre de la discontinuité et, indirectement, de définir par un processus itératif la position de cette discontinuité. Cette méthode présente l'avantage de permettre une excellente précision dans le calcul du choc. La position et la forme de l'onde ne sont cependant pas toujours facilement prévisibles et doivent alors être déterminées itérativement. C'est la raison pour laquelle cette approche n'est que rarement employée dans la résolution de problèmes d'écoulements en turbomachines.

Pour résoudre ces derniers problèmes, on préfère utiliser une méthode dite de capture ("shock capturing") : le choc n'apparaît plus comme une discontinuité mais comme la limite d'un écoulement continu. La transition s'effectue au travers d'une structure numérique artificielle qui s'étale sur une distance finie, elle est obtenue en introduisant une viscosité numérique importante dans les équations décrivant l'écoulement dans la zone autour du choc. Le système est alors résolu comme si le choc n'existait pas mais ce dernier apparaît spontanément lors du calcul. La précision des résultats est par contre un peu moins bonne, fonction du contrôle de l'effet dissipatif introduit dans le schéma numérique. L'utilisation d'une forme conservative du système d'équations décrivant l'écoulement est indispensable (Réf. 6). Considérons, par exemple, l'équation de conservation de la masse, à une dimension spatiale :

Forme conservative : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$ (1.1)

Forme quasi-linéaire: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ (1.2)

A l'état stationnaire, seule l'équation (1.1) conduit en régime permanent à la relation :

$\rho u = \text{cte}$ (1.3)

c'est-à-dire, à une des relations de Rankine-Hugoniot. L'emploi d'une représentation conservative conduit de plus à une erreur sur ces relations et sur la position du choc qui est d'un ordre équivalent à celui de la précision du schéma numérique de résolution employé.

Une dernière remarque s'impose au sujet des relations de passage au travers d'une discontinuité. Il est bien connu que les relations de Rankine-Hugoniot sont compatibles avec l'existence de chocs de compression et d'expansion. Ces derniers sont accompagnés d'une diminution d'entropie qui viole le deuxième principe de la thermodynamique et doivent donc être rejetés. Cette distinction n'apparaît pas dans les équations stationnaires de l'écoulement d'un fluide parfait et on peut se demander comment un calcul d'écoulement non visqueux permettrait d'effectuer cette discrimination. Toutefois, lorsque le calcul est basé sur une approche instationnaire naturelle, comme nous le proposons au paragraphe (1.3), ce problème ne se pose pas. En effet, les équations instationnaires d'Euler montrent qu'un paquet d'ondes de compression tend à se regrouper pour former une onde de choc tandis qu'un paquet d'ondes d'expansion ne peut que se disperser.

1.2 APERCU DES METHODES UTILISEES POUR LE CALCUL DE L'ECOULEMENT DANS UNE TURBOMACHINE

1.2.1 Revue de quelques méthodes classiques de résolution en grille d'aubes

Les analyses d'écoulements en grille d'aubes ont été développées en premier lieu pour des écoulements subsoniques dans les années 1950-1960 : ce furent les méthodes de singularités utilisées pour les écoulements potentiels incompressibles et compressibles (Martensen, Schlichting, transformation conforme, etc.) (Réf. 7,8), les méthodes basées sur l'emploi de la fonction de courant (méthode de relaxation) (Réf. 9) et les méthodes de courbure des lignes de courant (Réf. 10). Aucune d'elles n'est cependant applicable de façon générale en régime transsonique.

Dans le cas d'écoulements supersoniques potentiels ou tourbillonnaires, les équations de l'écoulement stationnaire (équation du potentiel ou équations d'Euler), de par leur caractère hyperbolique, sont résolues par des méthodes de caractéristiques ou par des techniques rapides de différences finies (Réf. 11,12). Ces méthodes sont relativement rapides et bien au point et l'approche par différences finies permet un calcul relativement simple et systématique.

Pour résoudre les problèmes transsoniques, on dispose principalement de trois grandes familles d'approches. La première consiste à traiter séparément les différentes zones de l'écoulement par des méthodes classiques, adaptées à chaque régime. Une application concrète est proposée par Decuypere (Réf. 13) (méthode de courbure des lignes de courant, de développement en séries de Sauer et de caractéristiques), mais n'est applicable qu'à des aubages supercritiques dont le canal est bien défini. Cette approche ne convient que pour des écoulements accélérés et n'est pas apte à traiter le cas d'une décélération brutale au travers d'une onde de choc par exemple.

Une deuxième approche, basée sur les travaux de Murman et Cole (Réf. 14), consiste à résoudre l'équation du potentiel par une technique de relaxation. Cette méthode permet de se libérer de l'ambiguïté sur la double solution, subsonique et supersonique, obtenue lorsqu'on emploie la fonction de courant pour résoudre un écoulement transsonique. Des discrétisations différentes de l'équation du potentiel par une technique de différences finies sont utilisées dans les zones sub- et supersoniques. Une application en grille d'aubes est proposée par Dodge (Réf. 15). Elle n'est cependant applicable qu'aux écoulements ne possédant qu'une poche supersonique; les résultats sont nettement moins bons dans les cas où apparaissent de larges zones supersoniques. La méthode est limitée aux écoulements isentropiques, au traitement de chocs droits et nécessite un réseau quasi-orthogonal de pseudo-lignes de courant; de plus, elle n'est pas conservative. Cependant, dans la limite de ses hypothèses de validité, elle est rapide et relativement précise.

La troisième approche consiste à employer une méthode instationnaire ou dépendante du temps; l'emploi d'un système d'équations faisant intervenir la variable temporelle supprime le double caractère elliptico-hyperbolique de celui-ci pour les écoulements sub- et supersoniques : il demeure de nature hyperbolique par rapport au temps quel que soit le régime. Pour les écoulements en grilles d'aubes, cette méthode a d'abord été appliquée par Gopalakrishnan et Bozzola (Réf. 16) dans le cas d'une discrétisation par différences finies. Elle ne fait cependant preuve que d'une précision relative : les flux de masse et de quantité de mouvement ne sont pas complètement conservés, ce qui peut avoir de larges effets aux alentours d'une frontière sonique. De plus, elle nécessite un changement de coordonnées, transformant le domaine physique en un domaine numérique rectangulaire. Parallèlement, McDonald (Réf. 17) proposa sa méthode des "aires finies" dont le principal avantage est de ne pas nécessiter de transformation de coordonnées mais d'appliquer les équations de conservation sous forme intégrale à un ensemble de petites surfaces élémentaires discrétisant le domaine physique de l'écoulement. Cette méthode a été améliorée par Couston

et al. (Réf. 18,19), notamment par la suppression de l'hypothèse d'écoulement isentropique, une analyse de stabilité du schéma numérique et la prise en compte d'effets dus à la rotation. Une autre approche instationnaire est celle de Delaney et Kavanagh (Réf. 20) qui, se basant sur la nature hyperbolique des équations, proposent une méthode de caractéristiques dans le temps. Son avantage est d'effectuer un traitement rigoureux du domaine différentiel de dépendance d'un noeud du maillage de discrétisation ainsi qu'un traitement numérique précis des conditions aux limites. En contrepartie, elle a le désavantage de nécessiter un traitement des chocs par une méthode d'ajustement : pour des chocs de forme complexe, comme ceux rencontrés en grilles d'aubes ou enturbomachines, cette contrainte nous semble difficilement justifiable. La dernière approche instationnaire que nous mentionnerons est due à Essers (Réf. 21); elle est basée sur la résolution, par la méthode des aires finies, d'un écoulement potentiel isentropique au moyen d'équations instationnaires artificielles créées de toutes pièces et établies dans le but d'accélérer l'élimination des ondes de perturbation par interaction avec les frontières du domaine de l'écoulement. Son avantage est d'être plus rapide que la plupart des autres méthodes disponibles pour calculer un écoulement transsonique dans une grille d'aubes de turbine mais elle n'est actuellement capable de traiter avec précision que des chocs de faible intensité du fait de son caractère isentropique.

Considérant les avantages et inconvénients des différentes méthodes que nous venons de présenter, notre choix s'est porté sur la méthode des aires finies (groupe des méthodes dépendantes du temps) développée par McDonald. Nous la décrirons de manière détaillée dans les paragraphes 1.3.1 et 1.3.2.

1.2.2 Revue de quelques méthodes de résolution d'écoulements tridimensionnels

La modélisation bidimensionnelle ou quasi-tridimensionnelle dans un plan inter-aubes des écoulements rencontrés en turbomachines est, dans de nombreux cas, insuffisante pour

décrire correctement les phénomènes physiques observés. Pour ces méthodes, on admet en effet que les surfaces de courant demeurent des surfaces de révolution. Leur distorsion, qui apparaît dans la plupart des aubes tridimensionnelles, est négligée. Nous avons représenté schématiquement à la figure 3, une surface de courant réelle dans un passage inter-aubes et nous l'avons comparée à la surface de courant employée dans la méthode de Wu. Cette hypothèse sur les surfaces de courant induit deux approximations dans le calcul : en premier lieu on néglige, dans le bilan de masse, la variation circonférentielle de l'épaisseur du tube de courant que l'on observe généralement près des parois et en second lieu, on ne tient pas compte de l'accélération convective circonférentielle provenant des vitesses normales aux surfaces de courant choisies. Ces approximations peuvent provoquer des erreurs non négligeables et nécessiter un véritable calcul tridimensionnel. De plus, comme nous l'avons déjà mentionné, les effets tridimensionnels en écoulements transsoniques (ondes de choc, condition de blocage sonique, ...) sont encore mal connus à l'heure actuelle.

Les méthodes de résolution par singularités sont d'abord apparues (Réf. 22) pour le calcul d'écoulements tridimensionnels en turbomachines. Basées sur une simulation de l'écoulement au moyen de sources et de tourbillons, elles ne sont cependant valables que pour des écoulements incompressibles de fluides non visqueux. Leur grosse limitation est de devoir résoudre des systèmes de plusieurs centaines d'équations (300 à 400 typiquement). Se basant sur la nature hyperbolique des équations d'Euler en régime supersonique, Martinon (Réf. 23) propose une méthode tridimensionnelle de caractéristiques. Les équations sont combinées de manière à construire les relations de compatibilité qui sont résolues par différences finies. Cette méthode n'a été appliquée qu'à des aubages de compresseurs; comme elle ne permet pas le traitement d'ondes de choc, elle n'est valable que pour des écoulements complètement supersoniques. Si l'on désire calculer un écoulement transsonique, il faudra la coupler avec une autre approche numérique. La partie

supersonique de l'écoulement est calculée par cette méthode des caractéristiques, tandis que le reste du domaine doit être calculé par l'autre méthode.

Les méthodes actuellement les plus utilisées pour le calcul d'écoulements tridimensionnels, et plus particulièrement en régime transsonique, sont basées sur la résolution du système d'équations d'Euler écrit sous forme instationnaire. Denton (Réf. 24,25) propose une approche instationnaire et par "volumes finis" en généralisant les principes qu'il avait appliqués au cas bidimensionnel; semblables à ceux utilisés dans la méthode proposée par McDonald, Couston, ... La méthode ne semble cependant pas encore avoir été appliquée à la résolution d'écoulements fortement tridimensionnels (aubages très vrillés par exemple) mais est capable de traiter un écoulement transsonique. Bosman et Highton (Réf. 26) proposent un calcul tridimensionnel limité au cas de l'écoulement subsonique d'un fluide non visqueux au moyen d'une approche instationnaire de résolution des équations d'Euler. Afin d'éviter les difficultés dans l'évaluation des intégrales de surface intervenant dans son calcul, un système de coordonnées cartésiennes est employé; l'application au cas d'un rotor de turbine radiale est présentée. Brochet (Réf. 27), se basant sur les travaux effectués à l'ONERA, propose également une méthode pseudo-instationnaire pour la résolution des équations d'Euler en écoulements tridimensionnels transsoniques; il développe également une méthode générale de traitement des conditions aux frontières, basée sur l'utilisation de relations de compatibilité.

L'approche que nous comptons appliquer fait suite aux travaux entrepris à l'Institut von Karman dans ce domaine (Réf. 28,29) : elle consiste en une approche instationnaire dans la résolution par une méthode de "volumes finis" des équations d'Euler. Elle nous semble être la manière la plus correcte, à ce niveau, de simuler l'écoulement existant dans une turbomachine. Ses avantages et inconvénients sont décrits dans les paragraphes suivants.

1.2.3 Aperçu des méthodes de résolution de l'écoulement dans un étage de turbomachine

La grande majorité des méthodes utilisées pour étudier l'écoulement dans une turbomachine complète (compresseur ou turbine) ou dans un de ses étages, se limitent généralement à la considération d'une géométrie bidimensionnelle dans un plan méridien ou dans un plan inter-aubes. Nous donnerons dans ce paragraphe un bref aperçu des méthodes disponibles ou des principes généraux à leur base pour les deux grandes catégories que nous avons mentionnées.

Dans le groupe des méthodes effectuant l'analyse dans le plan méridien de l'écoulement dans une machine ou dans un de ses étages, la manière de résoudre le problème est basée sur une méthode numérique (méthode de courbure des lignes de courant, méthodes matricielles, ...) combinée à certaines corrélations expérimentales (Réf. 4,30,31); cet ensemble permet de définir les triangles de vitesses et les paramètres thermodynamiques en amont du stator, entre stator et rotor et en aval du rotor d'une turbine par exemple. Ces méthodes sont encore largement utilisées aujourd'hui. Hirsch (Réf. 32) propose une méthode de résolution d'écoulement méridien dans une machine complète par éléments finis, sujette selon lui à moins de problèmes mathématiques que les deux méthodes numériques mentionnées ci-dessus. La précision de la méthode est cependant encore toujours fonction du choix des corrélations de pertes. Couplée itérativement à un calcul de grille dans le plan inter-aubes, elle permet de définir un écoulement quasi-tridimensionnel dans un étage de turbomachine (compresseur ou turbine). Le désavantage de la plupart de ces méthodes est de ne pas fournir de représentation détaillée de l'écoulement à l'intérieur du stator ou du rotor. En vue de pallier cet inconvénient, les constructeurs de turbomachines ont abordé le problème de manière différente, soit par la résolution des équations d'Euler, soit par résolution de l'équation instationnaire des petites perturbations.

Ceci nous amène à la deuxième grande famille de résolution d'écoulements en étage de turbomachine : celle qui consiste à étudier le problème dans le plan inter-aubes. Pendant une longue période, les constructeurs se sont principalement intéressés aux forces exercées sur les aubes par suite des interactions existant entre deux ou plusieurs rangées de profils, l'aspect aérodynamique du profil ayant à ce moment beaucoup moins d'importance.

Les premières tentatives de résolution du problème de l'interaction entre deux rangées d'aubes furent basées sur la théorie des écoulements bidimensionnels instationnaires autour d'ailes minces (Réf. 33). Les principes à la base de la résolution de l'interaction stator-rotor par la méthode des petites perturbations furent développés par Kemp et Sears (Réf. 34), qui généralisèrent la théorie qu'ils avaient établie pour résoudre l'écoulement autour d'une aile mince en régime incompressible. Les approximations introduites dans leur modèle sont les suivantes : le fluide est non visqueux, l'écoulement est bidimensionnel et incompressible, la cambrure des profils (et donc leur charge) est très faible. La géométrie de l'étage considéré est présentée à la figure 4. Les équations décrivant un écoulement non visqueux sont utilisées; les effets visqueux ne sont cependant pas totalement négligés en ce sens que le sillage des aubes est modélisé par des lignes de cisaillement. L'hypothèse principale de la démarche est la suivante :

$$\Gamma_{\text{total}} = \Gamma_{\text{stationnaire}} + \Gamma(t) \quad (1.4)$$

$$|\Gamma(t)| \ll |\Gamma_{\text{stationnaire}}| \quad (1.5)$$

On considère que chaque profil est soumis à un champ de vitesses créé par son propre sillage, les tourbillons originaux des aubes de la même rangée ainsi que leur sillage, les tourbillons originaux des aubes de l'autre rangée et leur sillage. Cette approche conduisant à une formulation mathématique très complexe du problème, les auteurs ont préféré l'abor-

der par une méthode itérative. On admet, en première approximation, que pour calculer les effets instationnaires sur une aube statorique, soit $\Gamma^S(t)$, la seule contribution significative vient de la composante stationnaire de la circulation autour des aubes rotoriques; autrement dit, on néglige les composantes instationnaires de la circulation autour de tous les autres profils. Le même raisonnement est appliqué pour une aube rotorique à la seule exception que l'on considère en outre leur passage au travers des tourbillons de sillages issus du stator. Ce principe peut servir de base à une méthode d'approximations successives : la deuxième approximation de $\Gamma^S(t)$ tient compte de la composante stationnaire $\Gamma_{stationnaire}^r$ mais aussi de la première approximation $\Gamma^S(t)$ et ainsi de suite. Remarquons cependant que la complexité de la formulation mathématique croît avec le nombre d'itérations.

Connaissant la valeur de la circulation "instationnaire", on peut calculer les forces et pressions exercées sur l'aube : les expressions ne sont plus les mêmes que dans le cas d'un écoulement stationnaire; le théorème de Joukowski :

$$L = \rho V \Gamma \quad (1.6)$$

n'est plus valable. La portance et le moment sont donnés par des expressions plus complexes qui sont généralement composées de trois termes :

- un terme quasi-stationnaire, fonction de l'état instantané de l'écoulement et négligeant l'influence des tourbillons du sillage;
- un terme qui tient compte de la variation de la masse apparente de l'aube (fonction du temps);
- un terme qui tient compte des effets de sillages (fonction du temps); celui-ci nécessite la connaissance de leur configuration et donc de l'histoire de l'écoulement.

Les deux dernières contributions peuvent être exprimées sous la forme de fonctions spéciales (Theodorsen et Bessel). De la valeur de la circulation on déduit le champ de vitesses

et les forces exercées sur les aubes. Osborne (Réf. 35) a étendu la méthode de Kemp et Sears au cas d'un écoulement compressible en régime subsonique. Des résultats valables ont été obtenus pour des nombres de Mach allant jusqu'à 0.8. Remarquons enfin que suite à l'hypothèse de faible cambrure des profils, la méthode que nous venons de décrire n'est principalement applicable qu'aux étages de compresseurs.

Au cours des dernières années, les constructeurs ont attaché de plus en plus d'importance à l'aspect aérodynamique des profils utilisés dans leurs machines. Ce fait a provoqué le développement de la deuxième approche de résolution de l'écoulement dans un étage de turbomachine à savoir, celle qui utilise le système complet des équations d'Euler. Cette méthode est la seule qui, pour un fluide non visqueux, permet de simuler correctement l'écoulement au travers d'ondes de choc ou de lignes de cisaillement (ou de glissement). Denton (Réf. 24) suggère, sans entrer dans les détails, une méthode stationnaire de résolution dans un étage complet. Comme c'est une méthode semblable que nous avons choisi d'utiliser et d'étendre à trois dimensions, nous la décrirons de manière détaillée lorsque nous entamerons de façon concrète le calcul de cet écoulement (Chapitres 3 et 4). Ses principes de base ont déjà été établis au paragraphe 1.1.2.

Erdoş et Alzner (Réf. 36) proposent une méthode de résolution de l'écoulement instationnaire bidimensionnel dans un étage de turbomachine. La complexité et le temps de calcul nécessaire rendent la méthode inapplicable à une géométrie tridimensionnelle, ce qui est notre but final. Pour mémoire, cette méthode a cependant été décrite à l'Annexe 1.

Considérant d'une part toutes les approches numériques que nous avons décrites et d'autre part les problèmes de temps de calcul et de capacité de mémoire d'ordinateur liés à la résolution d'écoulements tridimensionnels, nous avons choisi de modéliser le problème de l'écoulement transsonique dans un étage de turbine au moyen du système d'équations d'Euler. Pour une

géométrie tridimensionnelle, celles-ci sont exprimées dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . L'hypothèse de base est d'admettre que l'écoulement est stationnaire, ce qui revient à imposer, comme nous l'avons montré, des distributions uniformes des grandeurs thermodynamiques de base dans la direction tangentielle en des plans fictifs situés à différentes hauteurs entre les aubages statoriques et rotoriques. Les équations, écrites sous forme instationnaire, sont résolues par une approche de type "volumes finis" au moyen d'une méthode de calcul dépendante du temps.

1.3 EXPOSE DE LA METHODE DE RESOLUTION CHOISIE

1.3.1 Méthode de résolution par voie instationnaire

Le principe de base d'une méthode de résolution par voie instationnaire est de considérer la solution d'un problème d'écoulement stationnaire comme la solution asymptotique, après un temps suffisamment long de calcul, des équations instationnaires le décrivant, les conditions aux limites restant invariables dans le temps. Ceci revient mathématiquement à résoudre un problème de Cauchy, c'est-à-dire, à rechercher la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles obéissant aux conditions aux limites suivantes :

- au temps $(t=0)$, on se donne un champ initial, arbitraire ou non, des inconnues (conditions initiales);
- pour chaque temps $(t>0)$, la solution doit satisfaire à certaines conditions le long des frontières physiques contenant le domaine étudié. La nature de ces conditions est un des facteurs primordiaux influençant la stabilité du processus numérique de résolution.

L'interprétation physique de la méthode peut s'énoncer de la manière suivante : on commence le calcul à partir d'une approximation plus ou moins bonne de l'écoulement; celle-ci est considérée comme une perturbation relativement importante de la solution finale. On laisse alors évoluer le processus dans le

temps sous certaines conditions aux frontières jusqu'à sa stabilisation. Cette stabilisation est réalisée au moment où toutes les ondes de perturbation créées lors du choix du champ initial des inconnues ont quitté le domaine physique étudié.

Le grand avantage de cette approche instationnaire est qu'elle conserve le caractère hyperbolique (que nous définirons rigoureusement au chapitre suivant) par rapport au temps des équations instationnaires décrivant l'écoulement (équations d'Euler) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{v} (\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = -\vec{v} p \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \vec{v} \cdot (\rho E \vec{V}) = -p \vec{v} \cdot \vec{V}$$

pour les régimes subsoniques et supersoniques par opposition au cas de ces équations écrites sous forme stationnaire, elliptiques en régime subsonique et hyperboliques en régime supersonique. Comme les méthodes numériques permettant de résoudre les systèmes hyperboliques et elliptiques sont fort différentes, le problème doit alors être traité en deux parties distinctes. Dans le cas de l'approche instationnaire, il ne faut développer qu'un seul algorithme de résolution, quelle que soit la valeur locale du nombre de Mach, ce qui présente un grand avantage lorsque la position de la ligne sonique n'est pas connue a priori ou lorsque cette ligne a une géométrie complexe.

Le désavantage de cette méthode est de nécessiter un long temps de calcul avant de voir converger la solution, surtout si l'on désire représenter correctement le comportement instationnaire réel de l'écoulement. Dans ce cas, le seul amortissement des perturbations admissible dans le processus

numérique est celui introduit lors de la discrétisation des équations. Si par contre on n'est intéressé que par la solution finale, on essayera d'augmenter artificiellement le plus possible la vitesse de convergence du processus par l'introduction de termes d'amortissement purement numériques. Il est important de se rendre compte que les équations d'Euler que nous utiliserons dans la suite, ne contiennent en elles-mêmes aucun effet dissipatif. C'est donc uniquement la discrétisation des équations, la nature des conditions aux frontières et l'introduction éventuelle de termes additionnels qui permettent d'amortir les différentes perturbations présentes dans le domaine de calcul.

Nous avons mentionné au début de ce paragraphe que l'écoulement à résoudre devait être stationnaire. Cette condition n'est cependant pas restrictive. La démarche instationnaire décrite ci-dessus peut en effet être appliquée également à des écoulements soumis à des conditions aux limites instationnaires, périodiques par exemple (Réf. 24, 37). Des temps de calcul beaucoup plus longs sont cependant nécessaires avant d'obtenir une solution périodique. La possibilité de résolution de tels problèmes d'écoulements est donc fortement liée à la disponibilité de moyens de calcul les plus performants tant au point de vue de capacité en mémoire que de vitesse d'exécution.

1.3.2 Résolution par la méthode des volumes finis

La méthode des aires finies (étendue à des volumes dans le cas d'une géométrie tridimensionnelle) développée par McDonald (Réf. 17) et améliorée par Couston et al. (Réf. 18 et 19) consiste en une représentation numérique des équations transitaires de conservation écrites sous forme intégrale. La portion de l'espace dans laquelle l'écoulement est étudié est partagée en une série de petits éléments de surface (de volume) plus ou moins réguliers qui échangent de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Une formulation intégrale est utilisée : comme on le verra ci-dessous, des intégrales de ligne (de surface) sont calculées en lieu et place d'intégrales de

surface (de volume), ce qui permet d'éviter le calcul de termes dérivés. Les équations sont écrites sous forme conservative, condition nécessaire à la capture correcte des ondes de choc de même qu'au maintien d'une précision suffisante : de faibles variations de débit, négligeables en régime subsonique, peuvent en effet influencer fortement la nature d'un écoulement aux alentours d'une frontière sonique.

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} = 0 \quad (1.8)$$

que nous allons intégrer sur l'espace et le temps; cette équation est représentative du système d'équations d'Euler que nous aurons à résoudre par la suite. Nous appellerons V un des volumes élémentaires définis ci-dessus, ∂V la frontière de ce volume et $\vec{n}$ la normale sortante à cette frontière. L'intégration de (1.8) sur le volume et sur le temps fournit les résultats suivants :

$$\int_{Vt}^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} \right) dt dV = 0 \quad (1.9)$$

$$\int_{Vt}^{t+\Delta t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt dV = - \int_t^{t+\Delta t} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} dV dt \quad (1.10)$$

Cette dernière égalité est justifiée par le théorème de Schwarz. L'intégration sur le temps dans le membre de gauche et l'application du théorème de la divergence au membre de droite permettent d'écrire, en admettant que σ a une valeur uniforme dans V :

$$\int_V (\sigma^{t+\Delta t} - \sigma^t) dV = - \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{\partial V} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} dS \right] dt \quad (1.11)$$

L'emploi d'un algorithme explicite permet d'approximer le membre

de droite de (1.11) par :

$$\int_V (\sigma^{t+\Delta t} - \sigma^t) dV = - \left[\int_{\partial V} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} dS \right]_t \Delta t \quad (1.12)$$

ou encore, puisque nous faisons l'hypothèse de la constance de σ dans un volume V :

$$(\sigma^{t+\Delta t} - \sigma^t) V = - \left[\int_{\partial V} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} dS \right]_t \Delta t \quad (1.13)$$

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t - \frac{\Delta t}{V} \left[\int_{\partial V} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} dS \right]_t \quad (1.14)$$

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \frac{\Delta t}{V} \Sigma \text{ (termes de transport)} \quad (1.15)$$

Cette dernière équation exprime la loi de conservation suivante : l'accroissement de σ dans V est égal à la somme des flux $\vec{\Sigma}$ (c'est-à-dire des flux convectifs ou transports par convection de σ) au travers de la surface ∂V , frontière de V , les flux étant positifs lorsqu'ils entrent dans le volume élémentaire et négatifs lorsqu'ils en sortent. Le flux sortant d'un élément entre automatiquement dans un des éléments adjacents de telle manière qu'aucun terme de source ou de puits n'est créé : la procédure est conservative. Remarquons également que la démarche est explicite, nécessitant de ce fait un minimum de place en mémoire d'ordinateur et simplifiant un peu le travail de programmation.

L'avantage de cette représentation sous forme de volumes finis réside dans le fait que la géométrie du problème (des aubages de turbomachines) peut être représentée assez facilement contrairement à une méthode de différences finies qui nécessite une transformation, devenant extrêmement lourde pour

une application tridimensionnelle, de l'espace physique en un domaine de calcul orthogonal. De plus, on reste très proche de la physique du problème, contrairement à une méthode d'éléments finis dont le traitement, plus élaboré, s'éloigne un peu de celle-ci.

1.4 DEFINITIONS IMPORTANTES LIEES A LA NOTION DE SCHEMA NUMERIQUE DE DISCRETISATION

La discrétisation d'une équation est consistante lorsque l'erreur qu'elle induit sur la solution exacte, évaluée par un développement en série de Taylor en un noeud du maillage, tend vers zéro lorsque le maillage est raffiné indéfiniment.

La convergence est la propriété de la solution numérique de tendre vers la solution exacte lorsque le maillage est raffiné indéfiniment. La consistance de la discrétisation est bien entendu une condition nécessaire mais non suffisante de sa convergence.

La précision de la solution numérique obtenue est fonction de la discrétisation et du processus numérique employés. Elle est définie comme l'écart entre la solution exacte et la solution obtenue.

Un processus de résolution par une méthode d'évolution dans le temps est stable au sens de Lax et Richtmyer s'il existe une limite à la manière dont peut être amplifiée toute composante d'une approximation initiale de la solution.

CHAPITRE 2 ECOULEMENT UNIDIMENSIONNEL DANS UNE TUYERE CONVERGENTE-DIVERGENTE

2.1 INTRODUCTION

Dans le but de nous familiariser aux différentes techniques de résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles par une méthode instationnaire explicite basée sur l'approche par volumes finis, nous avons choisi comme exemple type l'écoulement unidimensionnel et adiabatique d'un fluide parfait non visqueux dans une tuyère convergente-divergente.

Cette application, purement académique, présente cependant l'avantage de pouvoir comparer les résultats obtenus au moyen de différentes méthodes numériques avec la solution analytique connue du problème de manière à répondre à une première série de questions sur les points suivants:

- la manière de discrétiser correctement le système d'équations aux dérivées partielles,
- les schémas numériques à utiliser pour résoudre le système discret, leur stabilité, la comparaison des vitesses de convergence pour une précision finale du résultat demandée,
- les moyens d'augmenter la vitesse de convergence du processus numérique,
- les différentes conditions aux limites à appliquer sur les frontières du domaine de calcul de façon à ce que le problème soit posé correctement au sens d'Hadamard (la solution existe, est unique et varie continûment avec les conditions initiales et aux limites).

Nous décrirons également de façon complète dans ce chapitre les différents concepts théoriques que nous avons été amenés à utiliser. C'est dans le cas unidimensionnel que cet exposé se fait de la façon la plus claire. L'extension à deux et trois dimensions ne fait appel à aucun principe nouveau, mais la mise en oeuvre est beaucoup plus lourde.

2.2 DEFINITION DU SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Les équations que nous nous proposons de résoudre sont les équations d'Euler écrites sous forme instationnaire. Elles décrivent l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait non visqueux et résument les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour justifier l'emploi de ces équations, on peut dire que les effets dus à la viscosité et à la conductivité thermique sont limités à une couche mince le long des parois de la veine fluide et des profils. Appliquées au cas de l'écoulement unidimensionnel dans une tuyère de section $\bar{A}$, ces équations s'écrivent sous forme dimensionnelle de la manière suivante :

équation de conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{\rho} \bar{A}) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\rho} \bar{u} \bar{A}) = 0 \quad (2.1a)$$

équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{\rho} \bar{A} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[(\bar{p} + \bar{\rho} \bar{u}^2) \bar{A} \right] = \bar{p} \frac{d\bar{A}}{d\bar{x}} \quad (2.1b)$$

équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{\rho} \bar{E} \bar{A}) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{u} (\bar{p} + \bar{\rho} \bar{E}) \bar{A} \right] = 0 \quad (2.1c)$$

Le système est complété par les équations constitutives d'un gaz parfait :

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= \bar{\rho} R \bar{T} \\ \bar{e} &= c_v \bar{T} \\ \bar{E} &= \bar{e} + \frac{\bar{u}^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

la vitesse locale du son étant égale à :

$$\bar{a} = \sqrt{\gamma R \bar{T}} \quad (2.3)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Ces équations sont adimensionnalisées par les grandeurs thermodynamiques totales ($\bar{p}_{01}$, $\bar{T}_{01}$ et $\bar{\rho}_{01}$) régnant à l'entrée de la tuyère, par sa longueur $\bar{L}$ et la section $\bar{A}_c$ mesurée au col :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{\bar{L}} & A &= \frac{\bar{A}}{\bar{A}_c} & t &= \frac{\bar{t}}{\bar{L}} \sqrt{R \bar{T}_{01}} \\ p &= \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{01}} & \rho &= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{01}} & T &= \frac{\bar{T}}{\bar{T}_{01}} \\ u &= \frac{\bar{u}}{\sqrt{R \bar{T}_{01}}} & a &= \frac{\bar{a}}{\sqrt{R \bar{T}_{01}}} \\ e &= \frac{\bar{e}}{R \bar{T}_{01}} & E &= \frac{\bar{E}}{R \bar{T}_{01}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nous en déduisons le système adimensionnel suivant, présenté sous forme quasi-conservative :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial \bar{x}} = \vec{b}(\vec{\sigma}) \quad (2.5)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho A u \\ \rho A E \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho A u \\ (p + \rho u^2) A \\ (p + \rho E) A u \end{pmatrix} \quad \vec{b}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dA}{d\bar{x}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que les équations d'état :

$$p = \rho T \quad E = \frac{T}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} \quad (2.6)$$

la vitesse locale du son étant exprimée par :

$$a = \sqrt{\gamma T} \quad (2.7)$$

Le système d'équations (2.5) peut également s'écrire sous forme quasi-linéaire (c'est-à-dire une formulation où les dérivées d'ordre le plus élevé interviennent sous forme linéaire mais où les coefficients de ces dérivées dépendent des inconnues), plus adéquate aux développements théoriques :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + A(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = \vec{b}(\vec{\sigma}) \quad (2.8)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ T \end{pmatrix} \quad A(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 1 \\ 0 & (\gamma-1)T & u \end{pmatrix} \quad \vec{b}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} \\ 0 \\ -(\gamma-1)\frac{uT}{A} \frac{dA}{dx} \end{pmatrix}$$

Le type des équations décrivant un phénomène n'est pas seulement une notion mathématique fondamentale; il est également en relation profonde avec le comportement du phénomène physique. Sa détermination préalable est indispensable au choix d'une méthode numérique de résolution. Afin de déterminer le type du système d'équations que nous désirons résoudre, nous allons nous servir de la forme quasi-linéaire (2.8). Remarquons que n'entrent en considération dans cette détermination que les dérivées d'ordre le plus élevé : aucune influence ne vient donc du terme indépendant $\vec{b}(\vec{\sigma})$. Soient λ_j les valeurs propres de la matrice $A(\vec{\sigma})$ de (2.8). Si nous nous rapportons à la classification des équations aux dérivées partielles selon la nature des valeurs propres de la matrice du système quasi-linéaire (Réf. 38), nous apprenons que :

- si tous les λ_j sont réels et différents, le système est strictement et complètement hyperbolique. Si certains des λ_j sont égaux, on aura, suivant le nombre de relations caractéristiques indépendantes, divers types de dégénérescence dont un exemple particulier fort connu est le type parabolique;
- si tous les λ_j sont complexes (ce qui implique un nombre pair d'équations), le système est du type elliptique;
- si certains λ_j sont réels et d'autres complexes, le système est dit hybride.

Dans le cas du système (2.8), nous obtenons les valeurs propres suivantes pour $A(\vec{\sigma})$:

$$\lambda_1 = u$$

$$\lambda_2 = u + \sqrt{\gamma T} = u + a \quad (2.9)$$

$$\lambda_3 = u - \sqrt{\gamma T} = u - a$$

Nous sommes donc bien en présence d'un système hyperbolique par rapport au temps, quel que soit le régime de l'écoulement : subsonique ou supersonique. Nous pouvons définir dans le plan (x,t) trois familles de courbes, appelées caractéristiques, de pente locale :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.10)$$

Ces pentes représentent les vitesses de propagation des ondes de perturbation présentes dans l'espace étudié. Une des propriétés essentielles des courbes caractéristiques est que le long de celles-ci le système d'équations aux dérivées partielles se ramène à une équation différentielle ordinaire appelée relation caractéristique, dont la variable indépendante est la coordonnée curviligne s mesurée le long de la caractéristique. Une méthode permettant de déterminer l'équation de ces courbes caractéristiques est décrite à la référence 39 et fournit les résultats suivants :

$$\lambda_1 = u \quad \Rightarrow \quad -(\gamma-1) T \frac{dp}{ds} + \rho \frac{dT}{ds} = 0 \quad (2.11)$$

$$\lambda_2 = u + \sqrt{\gamma T} \quad \Rightarrow \quad T \frac{dp}{ds} + \rho \frac{dT}{ds} + \rho \sqrt{\gamma T} \frac{du}{ds} + \left(\frac{\gamma \rho u T}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{dt}{ds} = 0 \quad (2.12)$$

$$\lambda_3 = u - \sqrt{\gamma T} \quad \Rightarrow \quad T \frac{dp}{ds} + \rho \frac{dT}{ds} - \rho \sqrt{\gamma T} \frac{du}{ds} + \left(\frac{\gamma \rho u T}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{dt}{ds} = 0 \quad (2.13)$$

2.3 DEFINITION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Afin d'obtenir un problème "bien posé" au sens d'Hadamard, il faut adjoindre au système d'équations aux dérivées partielles que nous venons de définir une série de conditions aux limites. Rappelons que le caractère bien posé d'un problème implique les conditions suivantes :

- une solution existe,
- cette solution est unique,
- toute perturbation bornée des conditions initiales et aux frontières doit conduire à une perturbation bornée de la solution en tout point du domaine situé à distance finie (condition de continuité de Hadamard).

Les conditions aux frontières influencent le plus souvent de façon prépondérante la stabilité d'un calcul. Leur effet peut être étudié analytiquement au moyen du théorème de Kreiss (Réf. 40) qui n'est pratiquement exploitable que dans des cas très simples car il conduit rapidement à des développements mathématiques très lourds.

A l'instant initial ($t = 0$), un champ initial des inconnues doit être défini. Cette détermination donne naissance à des ondes de perturbation qui se propagent dans le domaine étudié. L'influence du choix de cette première approximation sera décrite dans un des paragraphes suivants.

Pour chaque temps ($t > 0$) des conditions doivent également être imposées le long des frontières physiques de l'espace étudié, c'est-à-dire à l'entrée et à la sortie de la tuyère. Le long des parois, c'est bien sûr la condition d'imperméabilité qui est appliquée. Ces conditions d'entrée et de sortie se divisent en deux catégories : les conditions aux frontières physiques ou naturelles et les conditions aux frontières additionnelles purement numériques. Les conditions aux frontières physiques sont celles qu'il faut adjoindre au système d'équations aux dérivées partielles pour que le problème soit bien posé.

Afin de connaître le nombre de conditions aux frontières naturelles, nous faisons usage de la théorie des caractéristiques. Les trois directions caractéristiques de notre problème ont été données en (2.9). Si le régime de l'écoulement est subsonique dans le plan d'entrée ($u < a$), deux des caractéristiques passant par cette frontière ont une pente positive (u et $u+a$) (Fig. 5a); l'information qu'elles transportent vient de l'extérieur du domaine étudié : il faut donc imposer deux conditions aux frontières. Si l'écoulement est supersonique dans le plan d'entrée ($u > a$), la caractéristique 3 (Fig. 5a) présente également une pente positive; trois conditions aux frontières doivent être imposées. A la sortie de la tuyère, un raisonnement analogue peut être tenu: la présence de caractéristiques de pente négative, transportant une information issue de l'extérieur du domaine étudié, nécessite l'imposition d'autant de conditions aux frontières. Dans le cas d'une vitesse de sortie subsonique (Fig. 5b) ($u < a$), une condition doit être imposée tandis que pour un régime supersonique ($u > a$) aucune condition aux frontières ne doit être spécifiée. Le tableau suivant résume le nombre de conditions naturelles à appliquer le long des frontières pour différents régimes d'écoulement afin que les problèmes (2.5) ou (2.8) soient correctement posés.

Régime	Plan d'entrée	Plan de sortie
Subsonique	2	1
Supersonique	3	0

Les considérations précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la nature de ces conditions. Le problème est trivial lorsque l'écoulement est supersonique au droit des frontières : les 3 inconnues (masse volumique, vitesse, énergie) sont fixées à l'entrée de la tuyère tandis qu'elles restent libres dans le plan de sortie. La vitesse de convergence (que nous définirons exactement plus loin) du processus numérique de résolution est avantageuse dans cette situation : comme aucune condition n'est imposée dans le plan de sortie, les ondes de perturbation peuvent quitter librement le domaine de calcul. Ceci n'est plus le cas pour un régime subsonique : toutes les frontières sont forcées. Elles réfléchissent les ondes de perturbation; cette réflexion pouvant avoir un effet amortissant, neutre ou amplificateur. Essers (Réf. 41) a étudié de façon extensive l'interaction entre une frontière et une onde de perturbation : le choix le plus favorable selon lui est de fixer la pression totale et la température totale dans le plan d'entrée et d'imposer la pression statique dans le plan de sortie; il remarque cependant que même pour ces conditions optimales l'amortissement des ondes de perturbation reste faible.

Les conditions aux limites physiques sont le plus souvent en nombre insuffisant pour résoudre numériquement le système d'équations proposé : il faut en effet disposer d'un nombre d'équations égal à celui d'inconnues. Il faut donc imposer en plus des conditions aux limites physiques un certain nombre de conditions additionnelles purement numériques afin de pouvoir déterminer algébriquement toutes les inconnues sur la frontière considérée. Le choix de ces conditions aura une influence prépondérante sur la stabilité du processus numérique de résolution; il fera pour cette raison l'objet d'un paragraphe spécial en fin de chapitre.

2.4 CONDITIONS DE STABILITE

Une détermination correcte des conditions aux frontières d'un problème aux dérivées partielles n'est pas une condition suffisante de stabilité d'un processus de résolution. En effet, pour résoudre numériquement un système aux dérivées partielles, on recherche d'abord une valeur approchée des inconnues en une série de points, appelés noeuds, du domaine de calcul. En chacun de ceux-ci, les équations sont approximées par des relations algébriques : c'est la discrétisation. Les diverses méthodes numériques se différencient par le type de discrétisation utilisé. Le choix d'une mauvaise discrétisation peut conduire à une divergence explosive de la solution. La relation existant entre convergence et stabilité est donnée par le théorème d'équivalence de Lax (Réf. 6) :

"Pour un problème d'évolution linéaire bien posé et discrétisé de manière consistante, la stabilité numérique est la condition nécessaire et suffisante de convergence".

Autrement dit, seule l'instabilité numérique conduit à une divergence du processus de résolution. Bien que le théorème ne s'applique en toute rigueur qu'aux problèmes linéaires, la plupart des auteurs le généralisent aux problèmes non linéaires. C'est dans cette optique que nous allons décrire brièvement les deux méthodes les plus répandues d'analyse de stabilité d'un système discret.

2.4.1 Critère de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (condition CFL)(Réf. 42)

Le critère CFL est une condition nécessaire mais non suffisante de stabilité d'une discrétisation explicite d'un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles. Considérons (Fig. 6) dans le plan espace-temps (x,t) le point Q à l'instant $(t+\Delta t)$ et traçons par ce point les différentes caractéristiques du système hyperbolique, soient les droites a, b et c. Repérons les intersections de celles-ci avec la droite

MN joignant les noeuds correspondant à l'étape temporelle précédente. Les droites QA' et QC' représentent respectivement la vitesse de propagation physique la plus élevée et la plus faible en valeur algébrique d'une perturbation. De par les propriétés des caractéristiques, le point Q ne peut être influencé physiquement que par la région située entre les droites QA' et QC', appelée pour cette raison le domaine de dépendance physique.

Soit un schéma numérique de discrétisation du système d'équations tel que le calcul des inconnues en Q fasse intervenir leur valeur aux noeuds situés entre A et C. Les pentes QA et QC représentent alors la plus petite et la plus grande vitesse de propagation numérique d'une perturbation; la région située entre QA et QC est appelée domaine de dépendance numérique.

Il est facile de comprendre que la discrétisation ne sera convergente, et donc stable en vertu du théorème d'équivalence, que pour autant que toute perturbation qui influence Q physiquement l'influence également mathématiquement, ou autrement dit que le domaine de dépendance physique soit contenu dans le domaine de dépendance numérique. Mathématiquement, le critère s'exprime sous la forme suivante :

$$|\lambda_j|_{\max} \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.14)$$

où $|\lambda_j|_{\max}$ est la valeur propre maximale de la matrice $A(\vec{\sigma})$ de (2.8), c'est-à-dire la vitesse la plus élevée de propagation physique d'une perturbation et $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est la valeur de la vitesse de propagation numérique, Δx et Δt étant respectivement les pas spatiaux et temporels de discrétisation.

Comme le système (2.8) n'est pas linéaire, ce critère ne pourra être appliqué que localement : il devra être vérifié en chaque noeud du maillage. En pratique, on utilise le pas temporel le plus restrictif. Pour notre problème, le critère

de stabilité CFL prend la forme bien connue :

$$(u+a)_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.15)$$

2.4.2 Analyse de stabilité de von Neumann

Ce critère de stabilité permet d'obtenir la condition nécessaire, et souvent suffisante, de stabilité interne d'un schéma de discrétisation par différences finies, à pas spatial uniforme, d'un système linéaire à coefficients constants, pour un domaine de calcul spatialement illimité ou périodique. Il est basé sur le développement en séries finies de Fourier d'une solution périodique sur l'espace du problème discret :

$$\vec{\zeta}^n(x) = \sum_{\omega} \vec{\zeta}^n(\omega) e^{i\omega x} \quad \text{où } \omega \text{ est le nombre d'onde (2.16)} \\ \text{du mode de Fourier correspondant}$$

$$\vec{\zeta}^{n+1}(x) = \sum_{\omega} \vec{\zeta}^{n+1}(\omega) e^{i\omega x} \quad (2.17)$$

Si nous introduisons ces expressions dans les équations discrétisées de l'écoulement, nous obtenons après simplification des facteurs communs :

$$\vec{\zeta}^{n+1}(\omega) = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\zeta}^n(\omega) \quad (2.18)$$

$G(\Delta x, \Delta t, \omega)$ est appelée matrice d'amplification de Fourier et dépend du réseau de discrétisation, du pas temporel, du pas spatial et de l'ensemble des nombres d'onde. L'équation (2.18) étant une formule de récurrence, nous pouvons écrire la relation :

$$\vec{\zeta}^{n+1}(\omega) = \left[G(\Delta x, \Delta t, \omega) \right]^n \vec{\zeta}^0 \quad (2.19)$$

Appelons g_j les différentes valeurs propres de G ; le rayon spectral de G est défini comme suit :

$$r_1(\Delta t, \Delta x, \omega) = \max_j |g_j| \quad (2.20)$$

et sa valeur maximale pour tout nombre d'onde ω est égale à :

$$R_1(\Delta t, \Delta x) = \max_{\omega} r_1(\Delta t, \Delta x, \omega) \quad (2.21)$$

La condition nécessaire de stabilité interne de von Neumann s'énonce de la façon suivante :

$$R_1(\Delta t) \leq 1 + O(\Delta t) \quad (2.22)$$

avec $O(\Delta t)$ demeurant une valeur finie lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et $\Delta x = g(\Delta t) \rightarrow 0$.

Il est à noter (Réf. 43) que le terme $O(\Delta t)$ représente la possibilité qu'a le système d'équations aux dérivées partielles d'avoir une solution croissant exponentiellement dans le temps, ce qui équivaut à dire que la "divergence" du calcul peut être due à un phénomène physique. Nous retiendrons donc comme condition nécessaire de stabilité :

$$R_1(\Delta t) \leq 1 \quad (2.23)$$

On dit qu'il y a stabilité asymptotique ou stabilité marginale selon que $R_1(\Delta t) < 1$ ou $R_1(\Delta t) = 1$. Si G est une matrice normale ($G \cdot \bar{G} = \bar{G} \cdot G$), la condition est nécessaire et suffisante. Dans l'application que nous traitons, les coefficients de la matrice $A(\vec{\sigma})$ de (2.8) ne sont pas constants et le domaine n'est pas illimité ou périodique. Le critère n'est plus que local et n'est ni nécessaire, ni suffisant; l'expérience pratique montre cependant qu'il fournit des conditions très satisfaisantes. Remarquons enfin que ce critère ne donne aucune information sur l'influence qu'ont les conditions aux frontières sur la stabilité du processus numérique.

Dans une application pratique; il est impossible de discrétiser un domaine R infiniment grand. Considérons un intervalle $R = [x_0, x_N]$: nous pouvons distribuer uniformément un maillage en employant un pas spatial Δx tel que :

$$\Delta x = \frac{x_N - x_0}{N} \quad (2.24)$$

Toute fonction discrète satisfaisant les conditions de périodicité sur les limites de R peut être développée sous forme d'une combinaison linéaire de N modes de Fourier. La gamme des nombres d'ondes :

$$\omega = \frac{2\pi v}{N\Delta x} \quad v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \frac{N}{2} \quad (2.25)$$

possibles pour ce maillage est maximisée dans ce cas par $\frac{\pi}{\Delta x}$ (Fig. 7). Le spectre de Fourier à considérer est donc fini, limité par les valeurs suivantes :

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta x} \quad (2.26)$$

conduisant à deux genres de modes :

- les modes corrects : $\omega\Delta x \ll 1$. Ce sont les modes de longueur d'onde beaucoup plus grande que Δx (Fig. 7), dont l'évolution instationnaire est calculée correctement à une faible erreur de discrétisation près, tendant vers zéro lorsqu'on raffine le maillage. Ils ne provoquent pas d'instabilités numériques et représentent correctement la solution du problème.

- les modes numériques : $\omega\Delta x \cong \pi$. Ce sont les modes dont les longueurs caractéristiques de variation sont de l'ordre de Δx (Fig. 7) et qui provoquent les instabilités numériques. Ils sont introduits par les équations discrétisées et leur évolution instationnaire ne peut pas être prédite à partir des équations aux dérivées partielles. Si le problème satisfait les critères de stabilité, ces modes disparaîtront plus rapidement

que les modes corrects. Cette dernière propriété nous permet de définir ce qui est appelé effet dissipatif d'une discrétisation.

Si $\omega \Delta x \ll 1$ et si le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ est maintenu constant, on peut montrer (Réf. 41) que les valeurs propres de la matrice d'amplification G sont strictement inférieures à 1 et peuvent s'écrire :

$$g_j = 1 - O(\Delta x)^n + O(\Delta x)^{n+1} \quad (2.27)$$

où θ est fonction de ω et $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. On dit que la discrétisation est dissipative au $n^{\text{ème}}$ ordre. Les ondes de perturbation seront amorties d'autant plus énergiquement que n sera faible et la méthode numérique convergera vers une solution stationnaire. La relation (2.27) montre enfin que dans le cas de la stabilité marginale ($g_j=1$), la discrétisation proposée n'est pas dissipative; elle est donc inacceptable car elle ne présente pas de garanties suffisantes de sécurité vis-à-vis de l'apparition d'instabilités non linéaires.

2.5 ELABORATION PRATIQUE DE LA DISCRETISATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Nous allons étudier maintenant quelques-uns des schémas numériques de discrétisation les plus employés. Les différents résultats obtenus sont décrits et comparés du point de vue de leur stabilité, de leur précision et de leur vitesse de convergence. Les tests numériques sont effectués sur les tuyères de la figure 8. La première est dessinée de manière à présenter une variation linéaire du nombre de Mach en amont du choc aérodynamique, la seconde est composée de deux parties rectilignes (Réf. 44). Les deux tuyères sont discrétisées de manière uniforme ($\Delta x = \text{constante}$) en 46 noeuds (Tableaux 1 et 2). La "molécule" de base est représentée à la figure 9. Les inconnues sont calculées au noeud i , les différents flux entrant et sortant sont calculés respectivement aux noeuds $(i-1)$ et $(i+1)$, la pression statique régnant sur les parois de la tuyère est calculée au noeud i .

La pression totale et la température totale sont données comme conditions aux limites physiques dans le plan d'entrée tandis que la pression statique est imposée dans le plan de sortie. Un grand nombre de conditions additionnelles purement numériques ont été essayées dans les plans d'entrée et de sortie de la tuyère. Ceci a été fait dans le but d'obtenir la meilleure connaissance possible des effets de différentes sortes de conditions ainsi que de leurs combinaisons. Ces conditions sont généralement basées sur des principes de conservation, d'applications de schémas excentrés, de discrétisation des relations caractéristiques venant de l'intérieur du domaine de calcul, etc. Elles feront l'objet du paragraphe (2.10).

Les conditions initiales sont basées sur une évolution parabolique de la pression le long de l'axe de la tuyère, les autres inconnues étant calculées au moyen des relations caractérisant la transformation isentropique. Il est à remarquer que ces conditions ne satisfont pas le système d'équations de départ : les solutions transitoires n'ont donc rien de physique. Le calcul numérique est arrêté au moment où l'erreur de convergence est inférieure à 0.2%. Nous définissons cette erreur de convergence de la manière suivante :

$$\epsilon = \max_{i=1,N} \left(\frac{\frac{\rho_{i}^{n+1} - \rho_i^n}{\rho_i^n}}{\rho_i}, \frac{\frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{(\rho u)_i^n}}{(\rho u)_i}, \frac{\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{p_i^n}}{p_i} \right) \quad (2.28)$$

Notons enfin que les différents schémas numériques sont présentés sous forme quasi-linéaire et sous forme quasi-conservative. Dans les applications pratiques, seule la deuxième forme est employée car elle assure une capture correcte des chocs. La première forme nous permet d'étudier théoriquement les propriétés du schéma numérique utilisé.

2.6 ETUDE DE QUELQUES SCHEMAS NUMERIQUES DE DISCRETISATION

2.6.1 Schéma d'Euler

La façon la plus directe de discrétiser les systèmes (2.8) et (2.5) est probablement la suivante :

forme quasi-linéaire :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.29)$$

forme quasi-conservative :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.30)$$

Une discrétisation excentrée est appliquée à la dérivée temporelle et une discrétisation à différences centrées à la dérivée spatiale. Si nous appliquons l'analyse de stabilité de von Neumann au schéma (2.29) (en ne considérant que les termes dérivés puisque ce sont eux qui conditionnent cette stabilité), la relation suivante est obtenue entre les inconnues pour deux pas temporels consécutifs :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}_i^n \quad (2.31)$$

où la matrice d'amplification G est égale à (I étant la matrice unité) :

$$G(\Delta x, \Delta t, \omega) = I - iA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.32)$$

et dont les valeurs propres g_j et leur norme s'écrivent sous la forme suivante :

$$g_j = 1 - i \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.33)$$

$$|g_j|_{\max}^2 = 1 + |\lambda_j|_{\max}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(\omega \Delta x) \quad (2.34)$$

Comme (2.34) est toujours strictement supérieur à 1, le critère de stabilité de von Neumann n'est jamais satisfait, quelles que soient les valeurs du triplet $(\omega, \Delta x, \Delta t)$: le schéma d'Euler est donc inconditionnellement instable.

2.6.2 Schéma de Lax

Une façon simple de stabiliser le schéma d'Euler est de remplacer le premier terme du membre de droite des expressions (2.29) et (2.30) par une moyenne sur les noeuds environnants. Les équations discrètes suivantes sont obtenues :

forme quasi-linéaire :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \frac{\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n}{2} - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.35)$$

forme quasi-conservative :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \frac{\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.36)$$

L'application de l'analyse de stabilité de von Neumann aux termes dérivés de degré le plus élevé de (2.35) conduit à la relation suivante :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}_i^n \quad (2.37)$$

La matrice d'amplification G est égale à :

$$G(\Delta x, \Delta t, \omega) = I \cos(\omega \Delta x) - iA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.38)$$

dont les valeurs propres g_j et leur norme sont données ci-après :

$$g_j = \cos(\omega \Delta x) - i \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.39)$$

$$|g_j|_{\max}^2 = \cos^2(\omega \Delta x) + \lambda_{j\max}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(\omega \Delta x) \quad (2.40)$$

Le critère de stabilité de von Neumann se réduit ainsi au critère CFL (2.14). Nous pouvons également rechercher la valeur du facteur d'amplification g_j pour les modes corrects ($\omega \Delta x \ll 1$) :

$$|g_j|^2 = \left[1 - \sin^2(\omega \Delta x) \right] + \lambda_{j\max}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(\omega \Delta x) \quad (2.41)$$

En développant cette expression en séries pour des valeurs petites de $(\omega \Delta x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |g_j| &= 1 - \frac{1 - \lambda_{j\max}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{2} (\omega \Delta x)^2 + O(\Delta x^4) \\ &= 1 - O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

ce qui nous indique que, pour autant que la condition CFL soit satisfaite, le schéma de Lax est dissipatif au deuxième ordre. Il est cependant à noter que les systèmes discrets (2.35) et (2.36) ne sont pas consistants avec les équations de départ (2.8) et (2.5) qu'ils sont censés représenter. L'équation (2.35) peut en effet s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i^{n+1} &= \vec{\sigma}_i^n - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{\vec{\sigma}_{i+1}^n - 2\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n}{2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Lorsque le processus numérique a convergé, $\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n$; si nous remplaçons les autres termes ($\vec{\sigma}_{i+1}^n, \vec{\sigma}_{i-1}^n, \vec{b}_{i+1}^n, \vec{b}_{i-1}^n$) par des séries de Taylor jusqu'à l'ordre 2, nous remarquons que le système discret tend vers le système stationnaire suivant :

$$A \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = \vec{b} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.44)$$

Nous savons d'après la condition CFL (2.14) que Δx et Δt sont du même ordre de grandeur. La discrétisation des équations d'Euler par le schéma de Lax engendre donc un terme de dérivée seconde des inconnues d'ordre Δx : le schéma n'est précis qu'au premier ordre dans l'espace. Par analogie avec les équations de Navier-Stokes, cette dérivée seconde est considérée comme une viscosité numérique. L'influence prépondérante de cette viscosité est très bien montrée dans une application numérique (Fig. 10). Par comparaison avec la solution exacte, l'onde de choc est complètement amortie dans le cas d'une résolution par le schéma de Lax.

Remarquons enfin que le terme indépendant des équations (3.35) et (3.36) est approximé par une moyenne sur les noeuds environnants. Essers (Réf. 41) a montré que cette manière d'agir prévient l'apparition d'instabilités non linéaires et garantit la stabilité du processus numérique.

2.6.3 Schéma de Lax-Wendroff à deux pas

Le principal inconvénient du schéma de Lax réside dans le fait qu'il n'est précis qu'au premier ordre. Afin d'obtenir une précision du second ordre sur le temps et l'espace, on pourrait utiliser le schéma suivant :

forme quasi-linéaire :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A(\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \Delta t(\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.45)$$

forme quasi-conservative :

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \Delta t(\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.46)$$

Une analyse de stabilité appliquée à (2.45) fournit les résultats suivants :

$$\vec{\sigma}^{n+1} = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}^n + \vec{\sigma}^{n-1} \quad (2.47)$$

$$G(\Delta x, \Delta t, \omega) = -2iA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.48)$$

Afin d'étudier la stabilité du schéma complet, (2.47) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma}^{n+1} \\ \vec{\sigma}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2iA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}^n \\ \vec{\sigma}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Suivant la théorie de von Neumann, la discrétisation proposée est stable pour autant que la norme de toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification soit inférieure à 1. Pour le système (2.49), ces valeurs propres sont égales à :

$$g_j = \pm \left\{ -i\lambda_{j_{\max}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \pm \sqrt{1 - \lambda_{j_{\max}}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(\omega \Delta x)} \right\} \quad (2.50)$$

Si la condition CFL (2.14) est satisfaite (assurant un radicant positif dans (2.50)), la condition se réduit à :

$$|g_j|^2 = 1 \quad (2.51)$$

indiquant que la stabilité de ce schéma n'est que marginale. D'après (2.27), une telle discrétisation n'est pas dissipative: elle est donc inacceptable pour être appliquée au système d'équations que nous voulons résoudre car elle ne présente pas de sécurités suffisantes face à l'apparition d'instabilités non linéaires.

Les auteurs ont alors été amenés à développer d'autres schémas précis au second ordre sur le temps et l'espace. Un des plus connus est le classique schéma de Lax-Wendroff à deux pas temporels. Une des versions de ce schéma est présentée par Richtmyer (Réf. 45). Les équations discrètes suivantes sont proposées :

forme quasi-linéaire :

$$\text{1er pas : } \vec{\sigma}_i^{n+1} = \frac{\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n}{2} - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.52)$$

$$\text{2me pas : } \vec{\sigma}_i^{n+2} = \vec{\sigma}_i^n - A \frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^{n+1} - \vec{\sigma}_{i-1}^{n+1}) + \Delta t (\vec{b}_{i+1}^{n+1} + \vec{b}_{i-1}^{n+1})$$

forme quasi-conservative :

$$\text{1er pas : } \vec{\sigma}_i^{n+1} = \frac{\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.53)$$

$$\text{2me pas : } \vec{\sigma}_i^{n+2} = \vec{\sigma}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^{n+1} - \vec{f}_{i-1}^{n+1}) + \Delta t (\vec{b}_{i+1}^{n+1} + \vec{b}_{i-1}^{n+1})$$

Le premier pas est une discrétisation suivant le schéma de Lax (2.35), (2.36), stable pour la condition CFL, le second pas,

décrit en (2.45) et (2.46) est marginalement stable pour la même condition. Une analyse de stabilité de von Neumann appliquée à l'ensemble des deux pas (uniquement pour les termes dérivés de degré le plus élevé) fournit les résultats suivants :

$$\vec{\sigma}^{n+2} = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}^n \quad (2.54)$$

$$G(\Delta x, \Delta t, \omega) = 1 - 2A^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(\omega \Delta x) - 2iA \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \sin(\omega \Delta x) \cos(\omega \Delta x) \quad (2.55)$$

$$g_j = 1 - 2\lambda_{j_{\max}}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(\omega \Delta x) - 2i\lambda_{j_{\max}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \sin(\omega \Delta x) \cos(\omega \Delta x) \quad (2.56)$$

$$|g_j|_{\max}^2 = 1 - 4\lambda_{j_{\max}}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^4(\omega \Delta x) \left[1 - \lambda_{j_{\max}}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] \quad (2.57)$$

Cette dernière égalité nous apprend que, à nouveau, le schéma complet est asymptotiquement stable pour la condition CFL (2.14). Pour les modes corrects ($\omega \Delta x \ll 1$), le facteur d'amplification devient :

$$g_j = 1 - \frac{1}{2} \left[4\lambda_{j_{\max}}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[1 - \lambda_{j_{\max}}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] \right] (\omega \Delta x)^4 + O(\Delta x^6) \quad (2.58)$$

Cette expression montre que, si la condition CFL est satisfaite, le schéma est dissipatif au quatrième ordre. Remarquons encore que le schéma perd son effet dissipatif et n'est donc plus que marginalement stable lorsqu'une des valeurs propres λ_j s'annule (par exemple sur une frontière sonique ou en un point de l'écoulement où la vitesse s'annule). Si dans cette région les inconnues subissent des variations importantes (gradients élevés, ondes de choc, ...) des instabilités non linéaires peuvent apparaître. Afin d'éviter ces problèmes, un terme de viscosité artificielle est introduit dans le schéma permettant de garder un effet dissipatif; il prend la forme d'un troisième pas (Réf. 18 et 46) :

$$\vec{\sigma}_i^{n+2} = \vec{\sigma}_i^{n+2} + \frac{1-\alpha}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^{n+2} - 2\vec{\sigma}_i^{n+2} + \vec{\sigma}_{i-1}^{n+2}) \quad (2.59)$$

Un développement en série de Taylor montre que le terme suivant est introduit dans le système discret à la limite de raffinement du maillage :

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad (2.60)$$

Afin de garder une précision du second ordre sur l'espace, il importe donc que $(1-\alpha)$ reste d'ordre Δx . Le coefficient de viscosité α sera généralement choisi comme fonction du gradient d'une des inconnues fondamentales de manière à ce que $(1-\alpha)$ reste de l'ordre de Δx dans les zones à faibles gradients et prenne une valeur d'autant plus grande (pouvant même atteindre l'ordre 1) au droit d'une discontinuité, que cette discontinuité est importante : ceci sous-entend que la précision du deuxième ordre peut éventuellement être perdue dans une telle région. Pratiquement, on adoptera pour α une forme du type :

$$\alpha = VC \left[1 - \frac{|\rho_{i-1}^{n+2} - 2\rho_i^{n+2} + \rho_{i+1}^{n+2}|}{2} \right] \quad (2.61)$$

où VC est un coefficient numérique déterminé empiriquement en fonction de l'importance du choc.

Une autre version de ce schéma à deux pas a été proposée par Rubin et Burstein (Réf. 45). Ces auteurs discrétisent le système d'équations de départ pour des demi-incréments spatiaux et temporels. Les équations discrètes suivantes sont obtenues :

forme quasi-linéaire :

$$\text{1er pas : } \vec{\sigma}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_i^n) - A \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_i^n) + \frac{\Delta t}{4}(\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_i^n)$$

$$\vec{\sigma}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{i-1}^n + \vec{\sigma}_i^n) - A \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\vec{\sigma}_i^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{4}(\vec{b}_i^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.62)$$

$$\text{2me pas : } \vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n - A \frac{\Delta t}{\Delta x}(\vec{\sigma}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{\sigma}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2}(\vec{b}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{b}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

forme quasi-conservative :

$$\text{1er pas : } \vec{\sigma}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_i^n) + \frac{\Delta t}{4}(\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_i^n)$$

$$\vec{\sigma}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\vec{f}_i^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{4}(\vec{b}_i^n + \vec{b}_{i-1}^n) \quad (2.63)$$

$$\text{2me pas : } \vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\vec{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2}(\vec{b}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{b}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

Une analyse de stabilité de von Neumann fournit les mêmes résultats que ceux que nous avons obtenus pour les schémas (2.52) et (2.53) : les schémas (2.62) et (2.63) sont stables pour la condition CFL et sont dissipatifs au quatrième ordre. Un troisième pas de viscosité est ajouté pour les mêmes raisons que celles expliquées ci-dessus; il garde la forme donnée en (2.59).

Nous avons appliqué le schéma de Lax-Wendroff à deux pas au cas des tuyères 1 et 2. Quelques exemples des résultats obtenus sont décrits aux figures 11, 12 et 13. A la figure 11, la distribution du nombre de Mach isentropique est représentée pour deux contrepressions de la tuyère TU1 ($P_2/P_{01} = 0.85$;

$P_2/P_{01} = 0.804$) et comparée à la solution analytique correspondante. Il est à noter que ce sont les valeurs obtenues après le premier pas temporel qui ont été prises en compte dans ce résultat. Nous avons en effet fait à la figure 12 la comparaison avec les valeurs obtenues après le pas visqueux pour $P_2/P_{01} = 0.85$. Si le même coefficient VC est employé (0.98 dans le cas présent), une bonne précision est observée à la figure 11 tandis que d'importantes oscillations apparaissent autour du choc à la figure 12. La seule manière de réduire ces oscillations est d'augmenter la viscosité numérique; une solution plus douce a été obtenue pour VC = 0.90 mais on observe que la résolution du choc est nettement moins bonne que pour le cas correspondant de la figure 11. Remarquons enfin que la distribution de vitesses obtenue ne change pas si on augmente encore le nombre d'étapes temporelles.

2.6.4 Schéma à viscosité corrigée

Nous avons vu au paragraphe 2.6.2 que dans le schéma de Lax apparaissait un terme important de viscosité numérique, dû à la discrétisation, et qui pénalisait fortement la précision des résultats. Afin d'améliorer cette précision, Couston, McDonald et Smolderen (Réf. 18) ont été amenés à proposer le schéma suivant :

forme quasi-linéaire

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i^{n+1} = & \vec{\sigma}_i^n - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - 2\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n) \\ & - \frac{\alpha}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^{*} - 2\vec{\sigma}_i^{*} + \vec{\sigma}_{i-1}^{*}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

forme quasi-conservative :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i^{n+1} = & \vec{\sigma}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - 2\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n) \\ & - \frac{\alpha}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^* - 2\vec{\sigma}_i^* + \vec{\sigma}_{i-1}^*) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Les termes surmontés d'un astérisque sont mis à jour toutes les N_v itérations puis tenus constants pendant les N_v itérations suivantes et ainsi de suite. Pendant N_v itérations, ce schéma a les caractéristiques d'un schéma de Lax : il est stable pour la condition CFL mais la précision obtenue est médiocre. Toutes les N_v itérations une correction importante du terme visqueux est introduite, permettant d'améliorer cette précision. Lorsque le processus numérique a convergé ($\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n = \vec{\sigma}_i^*$), chaque terme de (2.64) peut être développé en séries de Taylor jusqu'à l'ordre 2; le résultat suivant est obtenu à la limite de raffinement du maillage (c'est-à-dire lorsque $\Delta x \rightarrow 0$) :

$$A \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = \vec{b} + \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.66)$$

Le facteur α est un terme de viscosité artificielle que nous sommes amenés à introduire dans le schéma afin d'éviter les instabilités (si $\alpha = 1$, on revient au schéma d'Euler dont nous avons vu qu'il était inconditionnellement instable) et d'assurer une capture correcte des chocs. L'expression (2.66) nous montre que le schéma employé garantit une précision du second ordre dans l'espace pour autant que $(1-\alpha) = O(\Delta x)$ (nous savons en effet par (2.15) que Δt et Δx sont du même ordre). Le choix de α repose sur les mêmes critères que ceux que nous avons exposés dans le paragraphe (2.6.3). Pratiquement, sa valeur est calculée comme suit :

$$\alpha = VC \left[1 - \left| \frac{\rho_{i-1}^* - 2\rho_i^* + \rho_{i+1}^*}{2} \right| \right] \quad (2.67)$$

où VC est un coefficient numérique dont la valeur est choisie empiriquement d'après le tableau 3. La discrétisation de la dérivée temporelle (équation (2.64) ou (2.65)) est effectuée de telle manière qu'une précision du premier ordre est obtenue dans le temps.

La stabilité du schéma à viscosité corrigée est étudiée au moyen de l'analyse de stabilité de von Neumann. La relation suivante est obtenue entre les inconnues pour deux pas temporels consécutifs :

$$\vec{\sigma}^{n+1} = G_1(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}^n - d\vec{\sigma}^* \quad (2.68)$$

$$G_1(\Delta x, \Delta t, \omega) = I \cos(\omega \Delta x) - iA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.69)$$

$$d = \alpha(\cos(\omega \Delta x) - 1) \quad (2.70)$$

Si nous recherchons la relation existant entre les valeurs des inconnues au temps t et au temps $(t+Nv\Delta t)$, nous obtenons :

$$\vec{\sigma}^{n+Nv} = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}^n \quad (2.71)$$

$$G(\Delta x, \Delta t, \omega) = G_1^{Nv} - \frac{G_1^{Nv} - 1}{G_1 - 1} d \quad (2.72)$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification G sont données par :

$$g_j = g_{1j}^{Nv} - \frac{g_{1j}^{Nv} - 1}{g_{1j} - 1} d \quad (2.73)$$

$$g_{1j} = \cos(\omega \Delta x) - i\lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\omega \Delta x) \quad (2.74)$$

Couston (Réf. 19) et Lehthaus (Réf. 47) montrent que si toutes les valeurs de $(\omega \Delta x)$ sont considérées, le critère de von Neumann (2.23) n'est jamais satisfait. Les conclusions de Smolderen (Réf. 18) et de Couston (Réf. 19) sont que, premièrement, le critère CFL est une condition nécessaire de stabilité et, deuxièmement, le nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes de viscosité numérique doit être égal au moins au nombre de noeuds du maillage. Il est à noter que l'analyse effectuée par Smolderen ne prend en compte que les modes corrects $(\omega \Delta x \ll 1)$; rien n'est dit au sujet des modes numériques.

Nous avons donné à l'expression (2.25) les nombres d'onde devant être retenus pour réaliser une analyse de Fourier dans le cas d'un problème linéaire, d'un maillage uniforme et de frontières périodiques. Nous avons calculé, par (2.73), la norme maximale de g_j pour tous ces nombres d'onde en admettant un maillage uniforme de 41 noeuds de discrétisation; nous avons fait varier successivement le coefficient CFL, le nombre d'itérations effectuées entre deux mises à jour des termes visqueux et le coefficient de viscosité numérique α . Les résultats obtenus sont présentés aux tableaux 4a, 4b, 4c et 4d. Rappelons que le critère de von Neumann (2.23) impose pour garantir la stabilité d'un schéma numérique que :

$$R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left\{ \max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right\} \leq 1$$

Au vu des valeurs numériques de $R_1(\Delta t)$, et même dans la limite de validité des hypothèses de l'analyse de von Neumann, une condition de stabilité du schéma numérique proposé ne semble pas si aisée à définir. L'application du schéma (2.65) au problème unidimensionnel d'un écoulement en tuyère a de plus posé un certain nombre de problèmes de convergence et de stabilité.

En vue de faire face à ces problèmes, les équations (2.64) et (2.65) ont été légèrement modifiées. Cette nouvelle version était déjà utilisée par Couston lui-même mais il n'en a jamais fait état; on ne trouve aucune publication sur la grande

amélioration apportée par l'emploi de cette nouvelle version du point de vue de la stabilité. Toutes les analyses théoriques du schéma à viscosité corrigée ont toujours été appliquées à sa version explicite. Le schéma suivant est proposé :

forme quasi-linéaire :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i^{n+1} = & \vec{\sigma}_i^n - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - 2\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i-1}^{n+1}) - \frac{\alpha}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^* - 2\vec{\sigma}_i^* + \vec{\sigma}_{i-1}^*) \end{aligned} \quad (2.75)$$

forme quasi-conservative :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i^{n+1} = & \vec{\sigma}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{f}_{i+1}^n - \vec{f}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{b}_{i+1}^n + \vec{b}_{i-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - 2\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i-1}^{n+1}) - \frac{\alpha}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^* - 2\vec{\sigma}_i^* + \vec{\sigma}_{i-1}^*) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Nous appellerons dans la suite du texte cette version du schéma, la version semi-implicite (à cause du terme $\vec{\sigma}_{i-1}^{n+1}$) par opposition à la première version appelée, elle, explicite. Une analyse de consistance, semblable à celle que nous avons effectuée pour la version explicite, réalisée en développant chaque terme en séries de Taylor, permet de montrer que la version semi-implicite du schéma est également précise au deuxième ordre dans l'espace et au premier ordre dans le temps. L'algorithme de calcul n'est pas modifié en ce sens que, comme nous progressons d'amont en aval, les valeurs de $\vec{\sigma}$ au temps $(t+\Delta t)$ au noeud $(i-1)$ sont connues au moment où $\vec{\sigma}$ est calculé au noeud (i) . L'analyse de stabilité de von Neumann appliquée

à ce schéma (entre les temps (t) et $(t+Nv \cdot \Delta t)$) fournit les résultats suivants pour les valeurs propres de la matrice d'amplification :

$$g_j = g_{1j} - \frac{Nv}{g_{1j}-1} d \quad (2.77)$$

$$g_{1j} = \frac{\frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + i \left(\frac{1}{2} - \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \sin(\omega \Delta x)}{1 - \frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + \frac{i}{2} \sin(\omega \Delta x)} \quad (2.78)$$

$$d = \frac{\alpha \{ \cos(\omega \Delta x) - 1 \}}{1 - \frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + \frac{i}{2} \sin(\omega \Delta x)} \quad (2.79)$$

Les tests numériques effectués sur la norme maximale de (2.77) démontrent que la condition nécessaire et suffisante de stabilité de ce schéma est la condition CFL (2.14), quelle que soit la valeur de Nv et de α . Un exemple comparatif entre les deux versions du schéma est donné au tableau 5, montrant le net avantage de la seconde version sur le plan de la stabilité.

En fait, le problème de tuyère unidimensionnelle que nous avons choisi comme exemple n'est pas linéaire et le domaine de calcul n'est pas à frontières périodiques. La stabilité du schéma à viscosité corrigée semi-implicite dans le cas d'un problème quasi-linéaire a alors été étudiée empiriquement. Cette étude (Réf. 44) a conduit à l'établissement de la figure 14 et a permis de conclure que pour tous les cas que nous avons traités, une valeur de Nv égale à 20...30 était toujours acceptable. Enfin, les figures 15 et 16 donnent un aperçu de la précision obtenue au moyen de ce schéma.

2.6.5 Schéma à amortissement corrigé

Comme les équations d'Euler ne contiennent en elles-mêmes aucun effet amortissant, Smolderen et Essers (Réf. 41) ont été amenés à proposer une méthode dans laquelle un important amortissement artificiel est généré. Cette méthode consiste à introduire un terme non dérivé dans le système d'équations aux dérivées partielles puis à le corriger périodiquement de façon à ce que le système résolu soit consistant avec les équations de départ. Le système transformé suivant est proposé :

forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + k(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^{***}) + A(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = \vec{b}(\vec{\sigma}) \quad (2.80)$$

forme quasi-conservative :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + k(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^{***}) + \frac{\partial f(\vec{\sigma})}{\partial x} = \vec{b}(\vec{\sigma}) \quad (2.81)$$

Dans les expressions (2.80) et (2.81), le facteur $\vec{\sigma}^{***}$ est maintenu constant, égal au champ initial de $\vec{\sigma}$ pendant les Nd premières étapes du calcul. Il est ensuite modifié et égalé au champ de $\vec{\sigma}$ obtenu à la fin de ces Nd premières étapes et maintenu constant pendant les Nd itérations suivantes selon un processus analogue à celui du schéma à viscosité corrigée.

Il est clair que si les solutions de (2.80) et (2.81) convergent asymptotiquement vers un état stationnaire (c'est-à-dire où $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^{***}$), celui-ci sera bien solution des équations décrivant l'écoulement : le schéma proposé est consistant avec les équations stationnaires de départ.

Essers (Réf. 41) démontre l'existence d'un amortissement interne par la méthode des exposants de Cauchy. Dans les limites de validité des hypothèses de cette analyse, la condition d'existence de cet amortissement est de choisir une

valeur positive pour le facteur k . De manière à assurer une continuité avec les paragraphes précédents, nous avons effectué une analyse de stabilité de von Neumann pour l'équation-modèle suivante :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + k(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^{**}) + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = 0 \quad (2.82)$$

Nous savons en effet que la stabilité n'est pas affectée par la présence du terme $b(\vec{\sigma})$ de (2.80) et (2.81). Nous avons discrétisé l'équation (2.82) au moyen du schéma à viscosité corrigée (version semi-implicite (2.75) et (2.76)) dont nous savons qu'il garantit une précision du deuxième ordre dans l'espace, pour autant que α soit d'ordre $O(\Delta x)$, et une précision du premier ordre dans le temps :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_i^{n+1} = & \vec{\sigma}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{\sigma}_{i+1}^n - \vec{\sigma}_{i-1}^n) - \frac{k\Delta t}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^n + \vec{\sigma}_{i-1}^n) \\ & + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{i-1}^{n+1} + 2\vec{\sigma}_i^n + \vec{\sigma}_{i+1}^n) - \frac{\alpha}{2} (\vec{\sigma}_{i-1}^* - 2\vec{\sigma}_i^* + \vec{\sigma}_{i+1}^*) \\ & + \frac{k\Delta t}{2} (\vec{\sigma}_{i+1}^{**} + \vec{\sigma}_{i-1}^{**}) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Le terme non dérivé est discrétisé par une moyenne sur les deux noeuds adjacents au noeud calculé afin d'éviter l'apparition d'instabilités non-linéaires. Nous avons décidé d'étudier la stabilité de (2.83) entre les pas temporels (t) et $(t + \max(N_d, N_v)\Delta t)$. Dans le cas où N_d est supérieur à N_v , l'analyse de stabilité de von Neumann fournit les résultats suivants :

$$\vec{\sigma}^{n+N_d} = G(\Delta x, \Delta t, \omega) \vec{\sigma}^n \quad (2.84)$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification s'écrivent :

$$g(\Delta x, \Delta t, \omega) = g_2 \left[\begin{matrix} \ell' \\ g_1 - d \left(\frac{\ell' - 1}{g_1 - 1} \right) \end{matrix} \right] + f \left(\frac{\ell' - 1}{g_1 - 1} \right) \quad (2.85a)$$

$$g_1 = \frac{\frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + i \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \sin(\omega \Delta x) - k \Delta t \cos(\omega \Delta x)}{1 - \frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + \frac{i}{2} \sin(\omega \Delta x)} \quad (2.85b)$$

$$g_2 = \left[\begin{matrix} Nv \\ g_1 - d \left(\frac{Nv}{g_1 - 1} \right) \end{matrix} \right]^\ell + f \left(\frac{Nv}{g_1 - 1} \right) \frac{\left[\begin{matrix} Nv \\ g_1 - d \left(\frac{Nv}{g_1 - 1} \right) \end{matrix} \right]^\ell - 1}{\left[\begin{matrix} Nv \\ g_1 - d \left(\frac{Nv}{g_1 - 1} \right) \end{matrix} \right] - 1} \quad (2.85c)$$

$$d = \frac{\alpha (\cos(\omega \Delta x) - 1)}{1 - \frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + \frac{i}{2} \sin(\omega \Delta x)} \quad (2.85d)$$

$$f = \frac{k \Delta t \cos(\omega \Delta x)}{1 - \frac{1}{2} \cos(\omega \Delta x) + \frac{i}{2} \sin(\omega \Delta x)} \quad (2.85e)$$

ℓ = partie entière de Nd/Nv

$\ell' = Nd - \ell \cdot Nv$

Pour les fréquences définies en (2.25), nous avons calculé la norme maximale de (2.85a); nous avons à nouveau utilisé un maillage uniforme de 41 noeuds et fait varier cette fois les coefficients k et Nd . Les valeurs des paramètres α , Nv et CFL ont été figées ($\alpha = 1.$, $Nv = 15$, $CFL = 1.$), valeurs pour lesquelles nous savons que le schéma à viscosité corrigée (version semi-implicite) est stable. Les résultats obtenus sont présen-

tés au tableau 6. Rappelons encore une fois que la condition de stabilité de von Neumann implique que :

$$R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left[\max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right] \leq 1.$$

Au vu des valeurs numériques de $R_1(\Delta t)$ que nous avons obtenues, nous remarquons que, dans la limite des hypothèses de l'analyse de von Neumann, la stabilité du processus de résolution peut également être assurée pour certaines valeurs négatives de k ; d'autre part, comme nous nous y attendions, la stabilité est toujours garantie pour des valeurs positives de k . Nous avons également remarqué que lorsque la valeur de $R_1(\Delta t)$, calculée pour une valeur négative de k , devenait strictement plus grande que 1, c'était d'abord pour des $(\omega \Delta x)$ petits; ceci revient à dire que ce sont les modes corrects ($\omega \Delta x \ll 1$) qui conditionnent la stabilité du schéma numérique pour les valeurs de k les plus faibles.

Afin d'examiner si ces valeurs négatives de k pouvaient également être des valeurs optimales de ce paramètre, nous avons appliqué la méthode au calcul de l'écoulement dans une tuyère à section constante : une grosse perturbation est introduite au départ et la solution est obtenue au moment où l'écoulement redevient uniforme. Un exemple de résultat est présenté au tableau 7 où nous observons l'apparition de deux optima : le premier pour ($k = -0.6$) (8% de gain réalisé par rapport au nombre d'itérations effectuées au moyen du schéma à viscosité corrigée ($\equiv k = 0$)); le second pour ($k = 1.8$) (11% de gain). La combinaison entre les schémas à amortissement corrigé et à viscosité corrigée semi-implicite mène donc à des conclusions légèrement différentes de celles d'Essers. Nous avons voulu étudier également l'influence du schéma de discrétisation : le système d'équations a été discrétisé au moyen du schéma de Lax-Wendroff à deux pas. Les résultats obtenus sont résumés au tableau 8. Un gain de $\pm 30\%$ est obtenu par le schéma à viscosité corrigée tandis qu'un gain de $\pm 25\%$ est obtenu avec le schéma de Lax-Wendroff pour lequel plusieurs optima ont

été trouvés, conduisant également à certaines valeurs négatives de k .

Le gain en nombre d'itérations obtenu par l'utilisation du schéma à amortissement corrigé est malheureusement largement contrebalancé par le temps nécessaire à réaliser l'optimisation. De plus, pour son emploi en combinaison avec le schéma à viscosité corrigée, l'occupation en mémoire d'ordinateur devient trop importante.

2.7 INFLUENCE DU CHOIX DES CONDITIONS INITIALES

On pourrait penser intuitivement qu'une meilleure approximation des conditions initiales de l'écoulement permet d'obtenir plus rapidement la solution du problème. En fait, augmenter la précision des conditions initiales n'a pas un effet proportionnel sur le temps nécessaire pour obtenir une solution convergée et n'a aucune influence sur la vitesse de convergence asymptotique du processus numérique.

La méthode des modes propres permet en effet de montrer que sous certaines conditions, la solution du problème instationnaire homogénéisé peut s'écrire de la manière suivante (Réf. 41) :

$$\vec{\sigma}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \cdot s_j(x) \quad (2.86)$$

où les $r_j(t)$ s'expriment comme une superposition de modes du type :

$$p_{j,n}(t) e^{\operatorname{Re}(\zeta_{j,n})t} \cos(\operatorname{Im}(\zeta_{j,n})t) \quad (2.87a)$$

$$p_{j,n}(t) e^{\operatorname{Re}(\zeta_{j,n})t} \sin(\operatorname{Im}(\zeta_{j,n})t) \quad (2.87b)$$

les $(z_{j,n})$ étant des constantes complexes. La condition nécessaire et suffisante d'amortissement dans le temps s'énonce naturellement :

$$\operatorname{Re}(\zeta_0) < 0 \quad (2.88)$$

où ζ_0 désigne la valeur de $z_{j,n}$ dont la partie réelle est la plus grande en valeur algébrique. Nous pouvons alors définir la vitesse de convergence asymptotique V_c comme :

$$V_c = -\operatorname{Re}|\zeta_0| \Delta t \quad (2.89)$$

Elle est inversement proportionnelle au nombre d'étapes temporelles nécessaires pour gagner une décimale en précision dans l'évolution vers la solution stationnaire. A cause du caractère asymptotique de sa définition, elle est donc indépendante d'une excitation initiale des perturbations.

Le processus de convergence peut être divisé grossièrement en deux étapes. Au cours de la première, on assiste à l'élimination des grosses erreurs initiales; ce processus dépend fortement des conditions de départ. Au contraire, dans la seconde étape, lorsque l'écoulement est plus ou moins établi, la convergence est uniquement fonction de l'effet dissipatif du schéma, ce dernier effet devant être faible si l'on veut garder une bonne précision. Cette seconde étape est caractérisée par une décroissance exponentielle comme nous venons de le voir et dépend du schéma numérique employé et non pas des conditions initiales.

De façon à illustrer ces différentes notions, nous avons appliqué différentes conditions initiales au même problème : l'écoulement dans la tuyère TU1, $p_2/p_{01} = 0.85$, discrétisation des équations par le schéma à viscosité corrigée ($VC = .98$, $N_v = 20$). Les conditions initiales que nous avons choisies sont les suivantes :

- CI1 : solution subsonique exacte du problème.
- CI2 : distribution parabolique de la pression statique le long de l'axe de la tuyère et application des relations caractérisant la transformation isentropique pour les autres variables.
- CI3 : distribution constante du nombre de Mach le long de l'axe de la tuyère et application des relations caractérisant la transformation isentropique pour les autres variables.
- CI4 : solution de l'écoulement considéré comme incompressible.

Les résultats obtenus sont donnés aux figures 17 (échelles linéaires) et 18 (échelles semi-logarithmiques); nous y avons représenté l'évolution de l'erreur de convergence ϵ définie en (2.28) en fonction du nombre d'étapes temporelles. A la figure 18, les pentes des différentes courbes représentent la vitesse de convergence : on vérifie bien qu'après quelques centaines d'itérations, cette dernière n'est plus influencée par la nature des conditions initiales. Une mise au point s'impose à ce stade : nous venons de voir que la vitesse de convergence asymptotique n'est pas fonction de la nature des conditions initiales; il est évident qu'il n'en va pas de même du temps total de calcul. Si on commence le calcul avec un champ initial des inconnues proche de la solution finale, il est évident que le temps total de calcul nécessaire pour obtenir une solution d'une précision donnée sera plus faible que si le champ initial avait été quelconque. Si on ne dispose au départ d'aucun renseignement sur l'allure de l'écoulement à résoudre, il ne vaut pas la peine de perdre du temps à imaginer des conditions initiales sophistiquées, mais il est bien plus important d'imposer une évolution spatiale régulière de ces conditions : une variation brutale dans les conditions initiales est bien souvent génératrice d'instabilités.

Pour terminer ce paragraphe, nous rappellerons enfin que le choix de conditions initiales purement quelconques a pour effet de ne donner aucune signification physique à toutes les solutions intermédiaires obtenues avant convergence. Par contre,

dans le cas où les conditions initiales peuvent exister réellement, les solutions intermédiaires seront de véritables solutions transitoires du problème.

2.8 CHOIX D'UN PAS TEMPOREL VARIABLE

Les équations d'Euler (2.5) ou (2.8) sont des équations quasi-linéaires. Les conditions de stabilité découlant du critère CFL (2.14) ou de l'analyse de von Neumann (paragraphe 2.4.2) ne sont donc que locales et doivent être vérifiées en chaque noeud du maillage : la valeur du pas temporel de stabilité varie d'un noeud à l'autre et le calcul doit normalement être effectué en utilisant le plus petit de tous les pas temporels calculés. Ceci revient à dire qu'en de nombreux points, le pas temporel utilisé est le plus souvent de loin inférieur à sa valeur limite de stabilité en ce noeud : la vitesse de propagation des ondes de perturbation numériques est de ce fait réduite et la convergence du processus de résolution est ralentie.

Comme nous ne sommes intéressés que par la solution stationnaire du problème; nous pouvons éviter l'inconvénient que nous venons de décrire, en transformant le système d'équations à résoudre de la manière suivante (Réf. 44, 47, 48, 49) :

forme quasi-linéaire :

$$|\lambda_j|_{\max} \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + A(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = \vec{b}(\vec{\sigma}) \quad (2.90)$$

forme quasi-conservative :

$$|\lambda_j|_{\max} \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} = \vec{b}(\vec{\sigma}) \quad (2.91)$$

Seule l'évolution transitoire différencie ces systèmes de (2.5) et (2.8) : ils ont la même solution stationnaire. Le système (2.90) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + A'(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = \vec{b}'(\vec{\sigma}) \quad (2.92)$$

$$A'(\vec{\sigma}) = \frac{A(\vec{\sigma})}{|\lambda_j|_{\max}}$$

$$\vec{b}'(\vec{\sigma}) = \frac{\vec{b}(\vec{\sigma})}{|\lambda_j|_{\max}}$$

Pour ce dernier système, la valeur propre maximale de $A'(\vec{\sigma})$ est 1 et la condition de stabilité CFL (2.14) devient tout simplement :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2.93)$$

Pour autant que le maillage soit uniforme, le pas temporel est maximum en chaque point et ne dépend plus de la variable spatiale. Pratiquement, la relation (2.93) est utilisée lors des calculs numériques et un pas temporel variable est introduit dans les schémas que nous avons décrits auparavant. La figure 19 montre un exemple de l'amélioration obtenue dans la convergence du processus numérique : un gain de $\pm 20\%$ est réalisé grâce à l'utilisation d'un pas temporel variable.

2.9 INFLUENCE DU RAFFINEMENT DU MAILLAGE

Le temps nécessaire à l'obtention d'une solution convergée au moyen d'une méthode dépendante du temps est fonction du temps nécessaire à l'élimination des ondes de perturbation engendrées par le choix d'un champ initial des inconnues, considéré comme une grosse perturbation de la solution finale. Cette élimination se fait d'une part par les frontières du domaine selon la nature des équations et des conditions aux limites et d'autre part à l'intérieur du domaine par un effet

d'amortissement interne (effet dissipatif du schéma numérique ou viscosité numérique artificielle introduite dans le processus de résolution); pour autant que la stabilité numérique soit assurée, cette élimination ne dépend pas du pas temporel Δt . Le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une solution convergée est donc inversement proportionnel au pas temporel Δt ; de par (2.14) il est également inversement proportionnel au pas spatial Δx et donc directement proportionnel au nombre de noeuds du maillage. Le temps total de calcul varie donc avec le carré du nombre de points de discrétisation. Nous avons également vu que le niveau de précision que l'on peut obtenir est inversement proportionnel à la valeur de Δx et donc proportionnel au nombre de noeuds.

Ces considérations, de même que le désir d'obtenir un temps total de calcul minimum, suggèrent de scinder le processus numérique en plusieurs parties : un maillage grossier est d'abord utilisé permettant l'élimination de grosses perturbations. Le résultat obtenu au moyen du maillage grossier est alors utilisé comme champ initial pour un calcul plus précis dans un maillage plus fin (généralement avec un nombre de noeuds doublé). Ce processus peut être répété plusieurs fois si le niveau de précision demandé est très sévère, nécessitant un pas spatial Δx très faible. Remarquons cependant que pour une précision requise, il ne faut jamais utiliser un maillage plus fin que nécessaire si l'on ne veut pas augmenter inconsidérément le temps de calcul. Cette méthode est utilisée par Couston (Réf. 19), Lehthaus (Réf. 47) et Van Hove et Arts (Réf. 44). La figure 20 donne l'évolution de l'erreur de convergence pour deux calculs appliqués à la même tuyère (TU1), avec les mêmes conditions aux limites, mais dans un cas avec un réseau grossier et dans l'autre avec un réseau fin. La relation entre N et Δx est évidente. A la figure 21, l'évolution de l'erreur ϵ est donnée pour un changement du réseau grossier au réseau fin se faisant après 800, 1300 et 1800 itérations correspondant respectivement à une solution du réseau grossier non convergée, à peine convergée et complètement convergée (points A, B et C de la Fig. 21).

Le changement de maillage introduit clairement de nouvelles perturbations qui doivent s'éliminer. L'expérience montre également qu'il ne faut pas attendre que le calcul ait convergé avec le réseau grossier avant de passer au réseau fin. Cette procédure n'est en fait véritablement intéressante que pour les cas bi- et tridimensionnels, pour lesquels les temps de calcul sont très importants à cause du grand nombre de points du maillage : grâce à l'emploi d'un réseau grossier, on ne calcule respectivement que 1/4 et 1/8 des noeuds pendant la première partie du processus. Le gain sur le temps de calcul total est estimé à 20 ... 25%.

La figure 22 permet enfin de se faire une idée du niveau de précision que l'on peut obtenir grâce à l'introduction d'un maillage fin. Ce résultat est à comparer à ceux des figures 11 et 15, obtenus avec un réseau grossier.

2.10 INFLUENCE DES CONDITIONS ADDITIONNELLES PUREMENT NUMERIQUES SUR LA STABILITE

L'expérience nous a montré l'influence prépondérante que le choix de la nature des conditions aux limites additionnelles purement numériques amont et aval peut avoir sur la stabilité. Il est également un fait que toutes les publications traitant de problèmes de calcul d'écoulements restent généralement silencieuses sur la détermination et la stabilité de ces conditions additionnelles. Dans le but d'effectuer une mise au point à ce sujet, nous avons considéré un grand nombre de ces conditions, ainsi que leurs différentes combinaisons, et examiné leur comportement en vue de l'extension aux problèmes bi- et tridimensionnels. Les conditions physiques, en accord avec ce qui est généralement utilisé pour les applications en turbomachines, ont toujours été les suivantes :

- en amont : pression totale (p_{01})
 température totale (T_{01})
- en aval : pression statique (p_2)

CL3 : conservation de l'énergie dans le demi-élément de sortie

$$\left[(p+\rho E)u \right]_{N-1} \cdot A_{N-1} = \left[(p+\rho E)u \right]_N \cdot A_N$$

CL4 : application du schéma numérique de résolution pour l'équation de conservation de la masse au demi-élément d'entrée ou de sortie

CL5 : application du schéma numérique de résolution pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement au demi-élément d'entrée ou de sortie

CL6 : application du schéma numérique de résolution pour l'équation de conservation de l'énergie au demi-élément d'entrée ou de sortie

CL7 : discrétisation de la relation caractéristique (2.11)
entre (t) et (t+Δt)

CL8 : discrétisation de la relation caractéristique (2.12)
entre (t) et (t+Δt)

CL9 : discrétisation de la relation caractéristique (2.13)
entre (t) et (t+Δt)

La stabilité de ces conditions aux limites numériques a été étudiée dans le cas d'une tuyère à section constante avec écoulement uniforme ($M=0.8$ pour le cas choisi). De plus, le champ initial des inconnues a été choisi comme étant la solution exacte. Le schéma numérique que nous avons utilisé est le schéma à viscosité corrigée dans sa version semi-implicite. Une condition numérique doit être imposée sur la frontière amont et deux conditions sur la frontière aval. Le critère d'acceptation d'une combinaison de conditions aux limites est la conservation d'une erreur de convergence de l'ordre de l'erreur d'arrondi de l'ordinateur (DEC VAX 11/780) sur lequel les calculs ont été effectués, et cela quel que soit le nombre d'itérations (nous avons fixé 5000 itérations pour chaque test) pour un 'maillage' (unidimensionnel) composé de 46 noeuds de discrétisation. Le tableau 9 résume les résultats les plus importants que nous avons obtenus. Pour une combinaison stable de conditions aux limites, la précision du résultat final n'est pas influencée par le choix de ces conditions.

Le temps de calcul varie très légèrement selon la nature des conditions appliquées. Il est évident que l'utilisation des relations CL1, CL2 et CL3 permet de calculer très rapidement les inconnues dans les plans d'entrée et de sortie puisqu'il s'agit de résoudre de simples équations algébriques. Au contraire, les conditions CL4, CL5 et CL6 imposent l'application du schéma numérique de résolution pour le calcul de ces mêmes inconnues. Rappelons enfin que l'utilisateur intéressé par le calcul d'écoulements instationnaires devra utiliser les conditions CL7, CL8 et CL9 puisque ce sont les seules qui représentent physiquement l'évolution correcte de l'écoulement.

2.11 COMPARAISON DES DIFFERENTS SCHEMAS NUMERIQUES

CHOIX D'UN SCHEMA NUMERIQUE DE RESOLUTION

L'étude et la comparaison des différents schémas numériques que nous avons présentés dans ce chapitre a eu pour but principal de choisir un de ceux-ci sur base de critères

de stabilité, de convergence et de précision, afin de l'appliquer à des problèmes bi- et tridimensionnels d'écoulement en grille d'aubes et en étage de turbine .

Bien qu'il soit très simple à programmer, le schéma de Lax a été rejeté pour des problèmes évidents de consistance et de précision. Le schéma à amortissement corrigé proposé par Essers et Smolderen a été abandonné pour des raisons de difficulté d'optimisation des coefficients k et N_d : comme les optima varient d'une application à l'autre, le temps gagné en nombre d'itérations grâce à la méthode est largement contrebalancé par le temps nécessaire à réaliser l'optimisation. De plus, si cette méthode est combinée avec le schéma à viscosité corrigée, l'occupation en mémoire d'ordinateur devient prohibitive pour des applications bi- et tridimensionnelles.

De nombreuses comparaisons ont été effectuées entre le schéma de Lax-Wendroff à deux pas et le schéma à viscosité corrigée proposé par McDonald et al.. Couston (Réf. 18, 19) montre que les deux schémas donnent la même précision finale, ce qui ressort également des résultats que nous avons présentés, mais que le schéma de Lax-Wendroff converge plus lentement. Nous avons effectué de nombreux calculs avec les deux schémas : il en ressort que le nombre d'itérations à effectuer avec le schéma de Lax-Wendroff (une itération = deux pas temporels + un pas de viscosité) avant d'obtenir une solution convergée est inférieur à celui requis par le schéma à viscosité corrigée pour le même problème mais, du fait de sa complexité, on constate que le schéma de Lax-Wendroff exige un temps de calcul plus long : nous avons chiffré ces comparaisons à la référence 44.

C'est pour cette raison que le schéma à viscosité corrigée, dans sa version semi-implicite, a été sélectionné pour la résolution d'écoulements bi- et tridimensionnels. Il est aisé à programmer et moins de problèmes se posent lors de la capture des chocs; il faut en effet être beaucoup plus prudent dans le

cas du schéma de Lax-Wendroff lors de l'application du pas de viscosité artificielle afin d'éviter d'importantes oscillations de la solution dans la zone du choc. Remarquons cependant que le schéma à viscosité corrigée n'est précis qu'au premier ordre dans le temps alors que celui de Lax-Wendroff l'est au second ordre. Comme nous ne sommes intéressés a priori que par des solutions stationnaires, cette éventuelle limitation ne joue pas en défaveur du premier schéma. Rappelons enfin qu'il est précis au deuxième ordre dans l'espace.

En terminant ce chapitre, nous voulons insister sur le fait que les différentes conclusions quantitatives tirées de cette étude unidimensionnelle, ne sont pas automatiquement transposables à des problèmes bi- et tridimensionnels. Elles nous ont cependant permis d'acquérir suffisamment de connaissances de base pour aborder l'étude de ces problèmes d'écoulements plus complexes.

CHAPITRE 3 ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL

3.1 ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL EN

GRILLE D'AUBES RECTILIGNE

3.1.1 Introduction - Hypothèses de travail

Bibliothèque des
Sciences Exactes

Après avoir étudié de façon approfondie dans le chapitre 2, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique, différents schémas numériques permettant de résoudre un écoulement unidimensionnel décrit par les équations d'Euler, nous avons abordé l'étude de l'écoulement bidimensionnel dans une grille d'aubes rectiligne et dans un étage isolé de turbine tel que celui que nous avons représenté à la figure 2. L'écoulement que nous désirons résoudre est appelé écoulement inter-aubes et est lié à la surface S_1 du premier genre de Wu (Fig. 1). Les hypothèses à la base de cette approche sont de considérer les surfaces S_1 comme des surfaces axisymétriques, ce qui en fait n'est vrai que pour un écoulement incompressible dans des aubages radiaux (Réf. 30), de les considérer comme cylindriques, ce qui permet de négliger tous les effets des forces de Coriolis et centrifuge puisque ces forces ont alors une résultante perpendiculaire à S_1 , et de supposer que l'épaisseur des tubes de courant le long de S_1 est constante depuis l'entrée jusqu'à la sortie de la grille. De plus, nous n'étudions que les écoulements stationnaires : cette dernière hypothèse est généralement posée pour l'écoulement absolu dans un stator comme pour l'écoulement relatif dans un rotor lorsque la machine travaille en régime continu.

3.1.2 Définition du système d'équations aux dérivées partielles

Le système d'équations aux dérivées partielles modélisant l'écoulement inter-aubes que nous désirons résoudre par une méthode dépendante du temps et une approche par "aires finies" est le système d'équations d'Euler écrit sous forme instationnaire. Si nous adimensionnalisons ces équations au moyen des

relations (2.4) en utilisant cette fois la corde du profil étudié comme longueur caractéristique et les conditions totales régnant en amont de la grille comme grandeurs thermodynamiques de référence, nous obtenons le système adimensionnel suivant, écrit sous forme conservative :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}$$

Nous disposons de plus de l'équation d'état du fluide parfait et de l'équation définissant l'énergie totale, également écrites sous forme adimensionnelle :

$$p = \rho T \quad (3.2)$$

$$E = \frac{T}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2}$$

La vitesse locale du son est exprimée par la relation :

$$a = \sqrt{\gamma T} \quad (3.3)$$

Les équations (3.1) expriment sous forme différentielle les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement dans les directions axiale et tangentielle et de l'énergie. Si nous considérons le cas d'un écoulement absolu dans une grille statique ou celui d'un écoulement relatif dans une grille rotorique, une simplification non négligeable, permettant de réduire le nombre d'inconnues est possible : l'équation exprimant la conservation de l'énergie peut être remplacée par une relation exprimant que l'enthalpie totale (respectivement absolue et relative) est

constante dans l'écoulement étudié. Cette hypothèse n'est cependant valable que pour autant que l'on ne soit intéressé que par la solution asymptotique (ou stationnaire) du problème. Les solutions transitoires de ce système d'équations, obtenues au cours de la démarche instationnaire, n'ont en effet aucune réalité physique. Cette hypothèse n'est de plus valable que pour un écoulement suivant une surface de courant S1 cylindrique. Sous ces limitations, le système adimensionnel conservatif réduit suivant est défini :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{bmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{bmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{bmatrix}$$

L'équation exprimant que l'écoulement est homo-enthalpique et l'équation définissant la vitesse locale du son s'écrivent respectivement :

$$p = \rho - \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho \frac{u^2+v^2}{2} \quad (3.5)$$

$$a^2 = \gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{u^2+v^2}{2} \right) \quad (3.6)$$

Les formes quasi-linéaires (définies au paragraphe 2.2) des systèmes conservatifs (3.1) et (3.4) sont respectivement les suivantes :

Système (3.1)

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + A(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} + B(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ T \end{pmatrix} \quad A(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & (\gamma-1)T & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$B(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & (\gamma-1)T & v \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{valeurs propres de } A(\vec{\sigma}) : \lambda_{1,2,3,4} = u, u, u+a, u-a \\ \text{(B)} \\ \text{valeurs propres de } B(\vec{\sigma}) : \lambda_{1,2,3,4} = v, v, v+a, v-a \end{array} \right.$$

Système (3.4)

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + A(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} + B(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad A(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\gamma \rho} & \frac{u}{\gamma} & -\frac{\gamma-1}{\gamma} v \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$B(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho \\ 0 & v & 0 \\ \frac{a^2}{\gamma \rho} & -\frac{\gamma-1}{\gamma} u & \frac{v}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{valeurs propres de } A(\vec{\sigma}) : \lambda_{1,2,3} = u, \frac{\gamma+1}{2\gamma} u \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^2 u^2 + \frac{a^2}{\gamma}} \\ \text{(B)} \\ \text{valeurs propres de } B(\vec{\sigma}) : \lambda_{1,2,3} = v, \frac{\gamma+1}{2\gamma} v \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^2 v^2 + \frac{a^2}{\gamma}} \end{array} \right.$$

Afin de déterminer le type (cfr paragraphe 2.2) des systèmes d'équations (3.7) et (3.8), nous construisons dans le plan (x,y) de l'écoulement, un vecteur $\vec{\omega}$ réel, appelé vecteur d'onde, de composantes ω_x et ω_y , qui nous permet de définir la matrice $W(\vec{\sigma})$ suivante :

$$W(\vec{\sigma}) = \frac{A(\vec{\sigma}) \cdot \omega_x + B(\vec{\sigma}) \cdot \omega_y}{\|\vec{\omega}\|} \quad (3.9)$$

Les systèmes (3.1) et (3.4) [ou (3.7) et (3.8)] sont, par définition, hyperboliques par rapport au temps si pour tout vecteur $\vec{\omega}$, toutes les valeurs propres w_j de $W(\vec{\sigma})$ sont réelles et que la matrice $W(\vec{\sigma})$ possède un ensemble de vecteurs propres indépendants en nombre égal à la multiplicité des valeurs propres w_j (Réf. 41). Pour le système (3.7) nous obtenons :

$$W(\vec{\sigma}) = \frac{1}{\|\vec{\omega}\|} \begin{pmatrix} u\omega_x + v\omega_y & \rho\omega_x & \rho\omega_y & 0 \\ \frac{T}{\rho} \omega_x & u\omega_x + v\omega_y & 0 & \omega_x \\ \frac{T}{\rho} \omega_y & 0 & u\omega_x + v\omega_y & \omega_y \\ 0 & (\gamma-1)T\omega_x & (\gamma-1)T\omega_y & u\omega_x + v\omega_y \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Les quatre valeurs propres de cette matrice sont respectivement :

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= u\mu_1 + v\mu_2 \\ w_2 &= u\mu_1 + v\mu_2 \\ w_3 &= u\mu_1 + v\mu_2 + \sqrt{\gamma T(\mu_1^2 + \mu_2^2)} \\ w_4 &= u\mu_1 + v\mu_2 - \sqrt{\gamma T(\mu_1^2 + \mu_2^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

μ_1 et μ_2 sont les cosinus directeurs du vecteur d'onde $\vec{\omega}$. Nous avons vu au chapitre 2 que les normes de ces valeurs propres représentent les vitesses de phase de propagation d'ondes planes dans la direction du vecteur $\vec{\omega}$. Dans le cas du système à enthalpie totale constante (3.8), nous obtenons les résultats

suivants :

$$W(\vec{\sigma}) = \frac{1}{\|\vec{\omega}\|} \begin{pmatrix} u\omega_x + v\omega_y & \rho\omega_x & \rho\omega_y \\ \frac{a^2}{\gamma\rho} \omega_x & \frac{u}{\gamma} \omega_x + v\omega_y & -\frac{\gamma-1}{\gamma} v\omega_x \\ \frac{a^2}{\gamma\rho} \omega_y & -\frac{\gamma-1}{\gamma} u\omega_y & u\omega_x + \frac{v}{\gamma} \omega_y \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$w_1 = u\mu_1 + v\mu_2$$

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= \frac{\gamma+1}{2\gamma} (u\mu_1 + v\mu_2) + \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^2 (u\mu_1 + v\mu_2)^2 + \frac{a^2}{\gamma} (\mu_1^2 + \mu_2^2)} \\ w_3 &= \frac{\gamma+1}{2\gamma} (u\mu_1 + v\mu_2) - \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^2 (u\mu_1 + v\mu_2)^2 + \frac{a^2}{\gamma} (\mu_1^2 + \mu_2^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Nous vérifions donc bien grâce aux expressions (3.11) et (3.13) que toutes les valeurs propres sont réelles. Les systèmes (3.7) et (3.8) sont hyperboliques par rapport au temps. Dans la suite, nous ne nous servirons plus que des formulations (3.1) et (3.4) : l'utilisation d'un système conservatif assure en effet, comme nous l'avons montré au chapitre 1, une capture correcte des chocs.

3.1.3 Discrétisation du domaine physique de l'écoulement

3.1.3.1 Description du domaine physique de l'écoulement

Le domaine physique dans lequel nous désirons étudier l'écoulement inter-aubes est représenté à la figure 23. Il est constitué du canal formé par le passage entre deux aubes adjacentes et est étendu en amont et en aval de celui-ci, approximativement dans la direction de l'écoulement, de la longueur d'environ une corde ou un pas. Nous appellerons les frontières AB, EF, CD et GH des frontières périodiques; le long de celles-ci, la périodicité de l'écoulement doit être vérifiée. Les frontières BC et FG sont des parois imperméables : au travers d'elles

il n'y a ni transfert de masse, ni transfert d'énergie (l'écoulement est adiabatique) et le seul transfert de quantité de mouvement possible est dû à la pression statique régnant le long de cette paroi. Les frontières AE et DH sont appelées respectivement plans d'entrée et de sortie; les conditions à y appliquer feront l'objet du paragraphe 3.1.5. La convention de signe des angles de l'écoulement est également établie à la figure 23.

Ce domaine physique est généralement limité de manière assez arbitraire à plus ou moins la longueur d'une corde ou d'un pas en amont et en aval de la grille d'aubes. Au droit des plans d'entrée et de sortie ainsi définis, certaines conditions aux frontières physiques doivent être satisfaites afin de poser correctement le problème du point de vue mathématique. Ces conditions, qui font généralement appel à des hypothèses d'uniformité de l'écoulement le long du pas ne sont réalisées, en théorie, qu'à une distance infinie. Nous allons montrer que dans le cas d'une grille d'aubes, cette restriction n'est pas aussi forte.

En régime subsonique, une grille d'aubes peut être représentée par une rangée de tourbillons. La vitesse de perturbation qu'elle introduit dans l'écoulement non perturbé ne s'annule pas à l'infini comme c'est le cas pour un profil isolé (où elle varie de façon inversement proportionnelle à la distance). Pour la grille d'aubes, les vitesses à l'infini amont et aval diffèrent en direction et en intensité (Réf. 50) mais un écoulement quasi-uniforme y est cependant obtenu. En régime compressible, la vitesse de perturbation induite par ces tourbillons peut s'écrire (Réf. 19) :

$$V_p = 2V_\infty \exp\left(-\frac{2\pi x}{g\sqrt{1-M^2}}\right) \quad (3.14)$$

où x représente la direction axiale, g le pas de la grille d'aubes et M le nombre de Mach de l'écoulement de référence. La décroissance de la vitesse de perturbation est de caractère exponentiel; c'est ainsi que pour un nombre de Mach égal à 0.5, la perturbation sera de l'ordre de 1% à une distance axiale correspondant

à moins d'un pas.

Dans le cas d'un écoulement supersonique, comme on en rencontre fréquemment en aval d'aubages de turbine, cette analyse purement elliptique au moyen de singularités n'est plus applicable car les équations sont de nature hyperbolique. Plusieurs ondes de choc sont présentes dans la partie aval de l'écoulement. Pour s'en convaincre, nous présentons à la figure 24 deux visualisations (strioscopies) de l'écoulement dans une grille d'aubes en régime transsonique. La présence de ces discontinuités semble être en opposition avec le fait d'imposer une condition d'uniformité à l'écoulement en un plan situé à une courte distance axiale en aval de la grille d'aubes. Cette contradiction peut être levée de manière qualitative grâce au phénomène d'atténuation auquel sont soumises les ondes de choc. Supposons en effet que leur intensité soit constante et déplaçons-nous vers l'infini aval dans la direction axiale : un nombre infini d'ondes de choc, provenant des canaux adjacents, est rencontré et un niveau infini de pertes par chocs serait comptabilisé; cette situation est évidemment absurde. Il faut donc que les chocs aérodynamiques soient atténués : l'écoulement tend bien à s'uniformiser. Une justification quantitative de cette uniformisation est proposée à la référence 19.

3.1.3.2 Description du domaine numérique de l'écoulement

Le domaine numérique dans lequel nous appliquons le processus de résolution est représenté à la figure 25. Il est constitué par un ensemble de pseudo-lignes de courant et de lignes parallèles à la direction du pas. L'écartement des pseudo-lignes de courant est uniforme dans la direction tangentielle. L'espacement entre les lignes parallèles à la direction du pas décroît régulièrement entre le plan d'entrée et celui du bord d'attaque tandis qu'il croît régulièrement entre les plans du bord de fuite et de sortie dans le double but d'éviter la présence d'un trop grand nombre de ces lignes dans les domaines en amont et en aval de la grille d'aubes et de ne pas augmenter inconsidérément le temps total de calcul. Entre les

plans du bord d'attaque et du bord de fuite, l'écartement de ces lignes est variable en fonction de la résolution que l'on désire obtenir en un endroit donné ainsi que des gradients de vitesse que l'on s'attend à voir apparaître : un maillage plus serré est employé là où l'on exige une solution plus détaillée.

Afin de pouvoir appliquer la méthode des "aires finies" décrite de façon générale au chapitre 1, l'ensemble des surfaces de contrôle élémentaires doit être défini dans le maillage que nous venons de construire. Différentes possibilités sont présentées aux figures 26a, 26b, 26c et 26d.

3.1.3.3 Elément hexagonal de discrétisation (McDonald - Couston)

Un élément hexagonal (Fig. 26a) est utilisé par McDonald (Réf. 17), de même que par Couston (Réf. 19, 51) et Lehthaus (Réf. 47). Les sommets des hexagones (noeuds de la discrétisation) sont placés aux intersections des lignes définissant le maillage. Les trois auteurs font l'hypothèse d'une variation linéaire des paramètres décrivant l'écoulement entre deux noeuds adjacents afin de pouvoir calculer les composantes axiale et tangentielle des termes de transport de masse, de quantité de mouvement et d'énergie au travers des différentes frontières de la maille hexagonale. Ces surfaces élémentaires se chevauchent dans les directions axiale et tangentielle.

Afin d'étudier, d'une manière semblable à celle utilisée par Dick (Réf. 52), la consistance et l'ordre de précision de la discrétisation du domaine physique réalisée par cet élément, nous nous baserons sur le système stationnaire des équations à résoudre, soit :

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

où $\vec{f}(\vec{\sigma})$ et $\vec{g}(\vec{\sigma})$ ont été définis en (3.1) pour le système complet

et en (3.4) pour le système à enthalpie totale constante. Les différents paramètres géométriques nécessités par cette étude sont définis à la figure 27 où Δx_1 , Δx_2 , Δy_1 , Δy_2 et Δy_3 sont des valeurs absolues alors que Δy_4 et Δy_5 sont des valeurs algébriques, définies comme étant positives pour l'exemple de la surface de contrôle présentée à la figure 27. Les valeurs des inconnues au noeud d'indices (i,k) sont calculées en fonction des valeurs correspondantes aux noeuds A, B, C, D, E, et F qui définissent également la surface élémentaire de la discrétisation.

Afin de vérifier la relation (3.15), comme nous l'avons montré au paragraphe 1.3.2, la somme des flux entrant et sortant de l'élément hexagonal doit être nulle. En tenant compte de l'hypothèse de variation linéaire des valeurs des termes de transport entre deux noeuds adjacents, elle peut s'écrire sous la forme discrète suivante (la convention de signe choisie est de considérer un signe négatif pour un flux entrant et un signe positif pour un flux sortant) :

	FACE
$-\frac{1}{2} \left(f_{i-1,k-1} + f_{i-1,k} \right) \Delta y_1$	(AB)
$-\frac{1}{2} \left(f_{i-1,k} + f_{i,k+1} \right) \left(\Delta y_2 + \Delta y_4 \right) + \frac{1}{2} \left(g_{i-1,k} + g_{i,k+1} \right) \Delta x_1$	(BC)
$-\frac{1}{2} \left(f_{i,k+1} + f_{i+1,k+1} \right) \left(\Delta y_3 + \Delta y_5 - \Delta y_2 \right) + \frac{1}{2} \left(g_{i,k+1} + g_{i+1,k+1} \right) \Delta x_2$	(CD)
$+\frac{1}{2} \left(f_{i+1,k+1} + f_{i+1,k} \right) \Delta y_3$	(DE)
$+\frac{1}{2} \left(f_{i,k-1} + f_{i+1,k} \right) \left(\Delta y_2 + \Delta y_5 \right) - \frac{1}{2} \left(g_{i,k-1} + g_{i+1,k} \right) \Delta x_2$	(EF)
$+\frac{1}{2} \left(f_{i,k-1} + f_{i-1,k-1} \right) \left(\Delta y_1 + \Delta y_4 - \Delta y_2 \right) - \frac{1}{2} \left(g_{i,k-1} + g_{i-1,k-1} \right) \Delta x_1$	(FA)
$= 0$	(3.16)

Les différents termes de flux sont ensuite développés en séries de Taylor aux alentours du noeud d'indices (i,k); les expressions de ces séries sont données à l'annexe (2.1). Si nous introduisons ces développements en série dans (3.16), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left(\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_3 + 2 \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right) \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} (\Delta x_2^2 \Delta y_3 - \Delta x_1^2 \Delta y_1) + \Delta y_2 (\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2) \right) \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(2 \Delta y_2 (\Delta x_2 \Delta y_5 - \Delta x_1 \Delta y_4) + \Delta y_2 (\Delta x_2 \Delta y_3 - \Delta x_1 \Delta y_1) \right) \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} (\Delta y_1^2 \Delta y_4 - \Delta y_3^2 \Delta y_5) + \frac{1}{2} (\Delta y_4^2 \Delta y_1 - \Delta y_5^2 \Delta y_3) + \frac{1}{2} \Delta y_2^2 (\Delta y_1 - \Delta y_3) \right. \\
 & \quad \left. + \Delta y_2 (\Delta y_5^2 - \Delta y_4^2) + \frac{1}{2} \Delta y_2 (\Delta y_3^2 - \Delta y_1^2) + \Delta y_2 (\Delta y_3 \Delta y_5 - \Delta y_1 \Delta y_4) \right) \\
 & + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} (\Delta y_3^2 \Delta x_2 - \Delta y_1^2 \Delta x_1) + (\Delta x_2 \Delta y_3 \Delta y_5 - \Delta y_1 \Delta x_1 \Delta y_4) \right) \\
 & + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (\Delta x_2^2 \Delta y_3 - \Delta x_1^2 \Delta y_1) + 0 (\Delta^4) = 0 \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire de manière plus condensée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left(\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_3 + 2 \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right) \\
 & + 0(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes} + 0(\Delta^4) = 0 \tag{3.18a}
 \end{aligned}$$

L'examen de la relation (3.18a) nous indique que, au passage à la limite, lorsque les Δx_j et les Δy_j tendent uniformément vers zéro, la discrétisation obtenue au moyen d'une surface de contrôle hexagonale est inconditionnellement consistante avec (3.15). En effet, (3.18a) peut également s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{O(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes}}{O(\Delta^2)} + O(\Delta^2) = 0 \quad (3.18b)$$

Nous retrouvons l'équation (3.15), plus un terme du premier ordre; la discrétisation proposée est consistante avec (3.15) et est précise au premier ordre. Afin d'obtenir une précision du deuxième ordre, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \quad (3.19a)$$

$$\Delta y_4 = \Delta y_5$$

Cette condition revient à imposer un maillage régulier, sans aucune variation d'inclinaison des pseudo-lignes de courant et présentant un écartement constant entre les lignes parallèles à la direction du pas. Remarquons cependant que des variations du deuxième ordre dans (3.19a) peuvent être suffisantes pour obtenir une précision du deuxième ordre :

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = O(\Delta^2)$$

$$\Delta y_2 - \Delta y_3 = O(\Delta^2)$$

(3.19b)

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = O(\Delta^2)$$

$$\Delta y_4 - \Delta y_5 = O(\Delta^2)$$

3.1.3.4 Elément trapézoïdal de discrétisation (Denton)

Dans le but de réduire le nombre de noeuds par surface élémentaire et de diminuer ainsi le temps de calcul par élément, Denton (Réf. 24, 53) utilise des éléments trapézoïdaux (Fig. 26b). Ces éléments se chevauchent dans la direction tangentielle mais non dans la direction axiale; les noeuds de la discrétisation sont situés sur les pseudo-lignes de courant, à mi-distance entre deux lignes parallèles à la direction du pas.

Les différents paramètres géométriques nécessaires à l'étude de la consistance et de l'ordre de précision de la discrétisation obtenue au moyen de cette surface élémentaire sont définis à la figure 28 où Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 , Δy_1 , Δy_2 , Δy_3 et Δy_4 sont des valeurs absolues alors que Δy_5 , Δy_6 , Δy_7 et Δy_8 sont des valeurs algébriques, définies comme étant positives pour l'exemple de la figure 28. Les valeurs des inconnues au noeud d'indices (i,k) sont calculées en fonction des valeurs correspondantes aux noeuds d'indices $(i,k+1)$, $(i+1,k)$, $(i,k-1)$ et $(i-1,k)$; la surface de contrôle est définie par ses quatre sommets A, B, C et D. Nous admettons des valeurs uniformes des flux au travers des faces AB, BC, CD et DA. Sur les faces AB et CD, les valeurs des termes de transport sont calculées comme la moyenne entre leurs valeurs aux noeuds situés de part et d'autre de chacune de ces faces; sur les faces BC et AD, les valeurs des flux sont celles au noeud situé sur la face considérée.

Afin de vérifier la relation (3.15), la somme des flux entrant et sortant de l'élément doit être nulle; sous forme discrète, elle s'écrit de la manière suivante (en conservant les conventions de signe du paragraphe précédent) :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \left[f_{i-1,k} + f_{i,k} \right] \Delta y_2 & | & \text{(face AB)} \\
 & - f_{i,k+1} (\Delta y_3 - \Delta y_2 + \Delta y_7) + g_{i,k+1} \Delta x_2 & | & \text{(face BC)} \\
 & + \frac{1}{2} \left[f_{i,k} + f_{i+1,k} \right] \Delta y_3 & | & \text{(face CD)} \\
 & + f_{i,k-1} \Delta y_7 - g_{i,k-1} \Delta x_2 & | & \text{(face DA)} \\
 & = 0 & & (3.20)
 \end{aligned}$$

Les différents termes de flux sont ensuite développés en séries de Taylor aux alentours du noeud d'indices (i,k); les expressions de ces séries sont données à l'annexe (2.2). Si nous introduisons ces développements en série dans (3.20), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f}{\partial x} \left[\frac{1}{4} \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) + \frac{1}{4} \Delta y_3 (\Delta x_2 + \Delta x_3) \right] + \frac{\partial g}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \Delta x_2 (\Delta y_2 + \Delta y_3) \right] \\
 & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{1}{4} \Delta y_2 (2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{4} \Delta y_3 (2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[\frac{1}{16} \Delta y_3 (\Delta x_2 + \Delta x_3)^2 - \frac{1}{16} \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{2} \Delta y_3 \Delta y_6 (\Delta x_2 + \Delta x_3) - \frac{1}{2} \Delta y_2 \Delta y_5 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[- \frac{1}{4} (\Delta y_5^2 \Delta y_2 - \Delta y_6^2 \Delta y_3) + \frac{1}{32} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 (\Delta y_2 - \Delta y_3) \right] \\
 & + O(\Delta^4) = 0 & (3.21)
 \end{aligned}$$

Si la condition suivante, relativement sévère, est satisfaite:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3, \quad (3.22)$$

l'équation (3.21) peut s'écrire de manière plus condensée sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \Delta x_2 (\Delta y_2 + \Delta y_3) \right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{4} \Delta y_2 (2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{4} \Delta y_3 (2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8) \right) \\ & + O(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes} + O(\Delta^4) = 0 \end{aligned} \quad (3.23a)$$

L'examen de cette dernière équation nous indique que, au passage à la limite, lorsque les Δx_j et les Δy_j tendent uniformément vers zéro, la discrétisation obtenue au moyen d'une surface de contrôle trapézoïdale n'est que conditionnellement consistante avec (3.15). En effet, (3.23a) peut également s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{X}{O(\Delta^2)} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{O(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes}}{O(\Delta^2)} + O(\Delta^2) = 0$$

avec (3.23b)

$$X = \frac{1}{4} \Delta y_2 (2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{4} \Delta y_3 (2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8)$$

Nous ne retrouvons l'équation (3.15), plus un terme du premier ordre, que si X est au moins du troisième ordre, ce qui implique les conditions suivantes :

$$2\Delta y_5 = 2\Delta y_6 = \Delta y_7 + \Delta y_8 \quad (3.24a)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$$

ou encore

$$2\Delta y_5 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^2)$$

$$2\Delta y_6 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^2)$$

(3.24b)

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 0(\Delta^2)$$

$$\Delta x_2 - \Delta x_3 = 0(\Delta^2)$$

Dans ce cas, la discrétisation est consistante avec le système aux dérivées partielles (3.1) ou (3.4) et est précise au premier ordre. La condition (3.24) permettrait aussi d'expliquer théoriquement une des raisons pour lesquelles Denton (Réf. 24, 53), dans sa méthode de calcul d'un écoulement inter-aubes, utilise des triangles prolongeant la discrétisation du bord d'attaque et du bord de fuite (Fig. 29) afin d'obtenir une variation plus douce dans l'inclinaison du maillage, dans une zone où ces variations sont justement fort importantes. L'utilisation de cet élément de discrétisation est donc bien adaptée au calcul d'aubages tels que ceux d'une section de tête d'un rotor transsonique de turbine à vapeur comme celle de la figure 40 par exemple, du fait de la faible cambrure de ce profil.

Pour obtenir une discrétisation précise au deuxième ordre, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \Delta y_4$$

$$\Delta y_5 = \Delta y_6 = \Delta y_7 = \Delta y_8 \quad (3.25a)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$$

Cette condition implique à nouveau l'existence d'un maillage strictement régulier, sans aucune variation d'inclinaison des pseudo-lignes de courant et présentant un écartement constant entre les lignes parallèles à la direction du pas. Remarquons cependant que des variations du deuxième ou du troisième ordre dans (3.25a) peuvent être suffisantes pour obtenir une précision du second ordre :

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 0(\Delta^3)$$

$$\Delta x_2 - \Delta x_3 = 0(\Delta^3)$$

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = 0(\Delta^2)$$

$$\Delta y_2 - \Delta y_3 = 0(\Delta^2) \quad (3.25b)$$

$$\Delta y_3 - \Delta y_4 = 0(\Delta^2)$$

$$2\Delta y_5 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^3)$$

$$2\Delta y_6 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^3)$$

Pour calculer les termes de flux au travers des faces AB et CD (Fig. 28), nous avons utilisé une moyenne arithmétique de ces flux aux noeuds situés de part et d'autre de chacune de ces faces. Si nous utilisons une moyenne pondérée, les équations équivalentes à (3.20), (3.21) et (3.23) s'écrivent comme suit :

$$- \frac{f_{i-1,k} \Delta x_2 + f_{i,k} \Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \Delta y_2 + \frac{f_{i,k} \Delta x_3 + f_{i+1,k} \Delta x_2}{\Delta x_2 + \Delta x_3} \Delta y_3$$

$$+ g_{i,k+1} - g_{i,k-1} \Delta x_2 + f_{i,k-1} \Delta y_7$$

$$- f_{i,k+1} (\Delta y_3 - \Delta y_2 + \Delta y_7) = 0 \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{2} \Delta x_2 (\Delta y_2 + \Delta y_3) \right] \\
 & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\Delta y_2 \left(\frac{\Delta x_2 \Delta y_5}{\Delta x_1 + \Delta x_2} - \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} \right) + \Delta y_3 \left(\frac{\Delta x_2 \Delta y_6}{\Delta x_2 + \Delta x_3} - \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} \right) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[- \frac{1}{8} \Delta x_2 \left(\Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) - \Delta y_3 (\Delta x_2 + \Delta x_3) \right) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left[- \frac{1}{2} \Delta x_2 (\Delta y_2 \Delta y_5 - \Delta y_3 \Delta y_6) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[- \frac{1}{2} \Delta x_2 \left(\frac{\Delta y_2 \Delta y_5^2}{\Delta x_1 + \Delta x_2} - \frac{\Delta y_3 \Delta y_6^2}{\Delta x_2 + \Delta x_3} \right) - \frac{1}{32} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 (\Delta y_2 - \Delta y_3) \right] \\
 & + O(\Delta^4) = 0 \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{2} \Delta x_2 (\Delta y_2 + \Delta y_3) \right] \\
 & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\Delta y_2 \left(\frac{\Delta x_2 \Delta y_5}{\Delta x_1 + \Delta x_2} - \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} \right) + \Delta y_3 \left(\frac{\Delta x_2 \Delta y_6}{\Delta x_2 + \Delta x_3} - \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} \right) \right] \\
 & + O(\Delta^3) \text{ . dérivées secondes . } + O(\Delta^4) = 0 \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

La condition à remplir pour éviter l'erreur de consistance devient :

$$\frac{\Delta x_2 \Delta y_5}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{\Delta x_2 \Delta y_6}{\Delta x_2 + \Delta x_3} = \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} \tag{3.29a}$$

et est, en fait, équivalente aux conditions (3.24a). Dans ce cas, la discrétisation est consistante avec le système aux dérivées partielles (3.1) ou (3.4) et est précise au premier ordre. Remarquons que des variations du second ordre dans (3.29a) peuvent être suffisantes pour obtenir une précision du premier ordre :

$$\frac{\Delta x_2 \Delta y_5}{\Delta x_1 + \Delta x_2} - \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} = O(\Delta^2)$$

$$\frac{\Delta x_2 \Delta y_6}{\Delta x_2 + \Delta x_3} - \frac{\Delta y_7 + \Delta y_8}{4} = O(\Delta^2)$$
(3.29b)

Ces conditions sont équivalentes aux conditions (3.24b). Pour obtenir une discrétisation précise au deuxième ordre, les conditions (3.25a) ou (3.25b) doivent être satisfaites. Nous voyons que l'introduction d'une moyenne pondérée dans le calcul des termes de flux n'apporte aucune amélioration dans la discrétisation obtenue au moyen de cet élément trapézoïdal.

3.1.3.5 Elément bitrapézoïdal de discrétisation (Van Hove - Arts)

Pour les mêmes raisons d'optimisation du temps de calcul par noeud, Van Hove (Réf. 54) utilise un élément bitrapézoïdal (Fig. 26c). Les surfaces de contrôle se chevauchent cette fois dans la direction axiale mais non dans la direction tangentielle. Les noeuds de la discrétisation sont situés sur les lignes parallèles à la direction du pas à mi-distance entre deux pseudolignes de courant.

Les différents paramètres géométriques nécessaires à l'étude de la consistance et de l'ordre de précision de cet élément sont définis à la figure 30 où Δx_1 , Δx_2 , Δy_1 , Δy_2 et Δy_3 sont des valeurs absolues alors que Δy_4 et Δy_5 sont des valeurs algébriques, définies comme étant positives pour l'exemple de la figure 30. Les valeurs des inconnues au noeud d'indices (i,k) sont calculées en fonction des valeurs corres-

pondantes aux noeuds d'indices $(i,k+1)$, $(i+1,k)$, $(i,k-1)$ et $(i-1,k)$. La surface de contrôle est définie par ses sommets A, B, C, D, E et F. Nous décrirons au paragraphe 3.1.4 la manière de calculer les composantes des termes de flux au travers des différentes faces de la maille ABCDEF.

Afin de vérifier la relation (3.15), la somme des flux entrant et sortant de l'élément doit être nulle; sous forme discrète, celle-ci s'écrit de la manière suivante (en conservant les conventions de signe du paragraphe précédent) :

$$\begin{aligned}
 & -f_{i-1,k} \cdot \Delta y_1 && | \text{ (face AB)} \\
 & - \frac{1}{2} (f_{i,k} + f_{i,k+1}) \left(\frac{\Delta y_3}{2} + \Delta y_5 - \frac{\Delta y_1}{2} + \Delta y_4 \right) + \frac{1}{2} (g_{i,k} + g_{i,k+1}) (\Delta x_1 + \Delta x_2) && | \\
 & && | \text{ (face BCD)} \\
 & + f_{i+1,k} \cdot \Delta y_3 && | \text{ (face DE)} \\
 & + \frac{1}{2} (f_{i,k} + f_{i,k-1}) \left(\frac{\Delta y_1}{2} + \Delta y_4 - \frac{\Delta y_3}{2} + \Delta y_5 \right) - \frac{1}{2} (g_{i,k} + g_{i,k-1}) (\Delta x_1 + \Delta x_2) && | \\
 & && | \text{ (face EFA)} \\
 & = 0 && (3.30)
 \end{aligned}$$

Les termes de flux sont ensuite développés en séries de Taylor aux alentours du noeud d'indices (i,k) ; les expressions en sont données à l'annexe (2.3). Si nous introduisons ces développements en série dans (3.30), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f}{\partial x} (\Delta y_3 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta y_1) + \frac{\partial g}{\partial y} \left[\Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right] \\
 & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\Delta y_5 (\Delta y_3 - \Delta y_2) - \Delta y_4 (\Delta y_2 - \Delta y_1) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} (\Delta y_3 \Delta x_2^2 - \Delta y_1 \Delta x_1^2) \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[\frac{1}{2} (\Delta y_3 \Delta y_5^2 - \Delta y_1 \Delta y_4^2) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\Delta x_2 \Delta y_3 \Delta y_5 - \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta y_4) + O(\Delta^4) = 0 \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Si la condition suivante est satisfaite :

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 \quad (3.32a)$$

l'équation (3.31) peut s'écrire de manière un peu plus condensée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left[\Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right] \\
 & + O(\Delta^3) + \text{dérivées secondes} + O(\Delta^4) = 0 \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

L'examen de cette dernière équation nous indique que, au passage à la limite, lorsque les Δx_j et Δy_j tendent uniformément vers zéro, la discrétisation obtenue au moyen d'une sur-

deuxième ordre dans (3.32a) peuvent être suffisantes pour garantir la consistance et une précision du premier ordre :

$$\begin{aligned}\Delta y_1 - \Delta y_2 &= O(\Delta^2) \\ \Delta y_2 - \Delta y_3 &= O(\Delta^2)\end{aligned}\tag{3.32b}$$

La condition (3.32b) est généralement satisfaite dans la plupart des applications, surtout si, comme nous le verrons au paragraphe 3.1.3.8, les bords d'attaque et de fuite des aubes sont discrétisés de manière tronquée. Pour obtenir une discrétisation précise au deuxième ordre, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= \Delta y_2 = \Delta y_3 \\ \Delta y_4 &= \Delta y_5 \\ \Delta x_1 &= \Delta x_2\end{aligned}\tag{3.35a}$$

Cette condition implique à nouveau l'existence d'un maillage strictement régulier, sans aucune variation d'inclinaison des pseudo-lignes de courant et présentant un écartement constant entre les lignes parallèles et la direction du pas. Remarquons cependant que des variations du deuxième ou du troisième ordre dans (3.35a) peuvent être suffisantes pour obtenir une précision du deuxième ordre :

$$\begin{aligned}\Delta y_1 - \Delta y_2 &= O(\Delta^3) \\ \Delta y_2 - \Delta y_3 &= O(\Delta^3) \\ \Delta x_1 - \Delta x_2 &= O(\Delta^2) \\ \Delta y_4 - \Delta y_5 &= O(\Delta^2)\end{aligned}\tag{3.35b}$$

3.1.3.6 Elément quadrangulaire de discrétisation (Essers - Kafyeke)

Dans le maillage que nous avons construit, Essers et Kafyeke (Réf. 21, 48) ont imaginé une quatrième possibilité de surface de contrôle (Fig. 26d). Les éléments ne se chevauchent ni dans la direction axiale, ni dans la direction tangentielle. Les noeuds de la discrétisation sont situés au centre des diverses surfaces de contrôle.

Les différents paramètres géométriques nécessaires à l'étude de la consistance et de l'ordre de précision de la discrétisation obtenue au moyen de cet élément sont définis à la figure 31 où $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ et Δy_4 sont des valeurs absolues alors que $\Delta y_5, \Delta y_6, \Delta y_7$ et Δy_8 sont des valeurs algébriques, définies comme étant positives pour l'exemple de la figure 31. Les valeurs des inconnues au noeud d'indices (i,k) sont calculées en fonction des valeurs correspondantes aux noeuds d'indices $(i,k+1), (i+1,k), (i,k-1), (i-1,k)$. La surface de contrôle est définie par ses quatre sommets A, B, C, D. Au travers des faces AB, BC, CD et DA, les deux composantes des termes de flux sont calculées comme la moyenne arithmétique entre leurs valeurs aux noeuds situés de part et d'autre de chacune de ces faces; sur chacune d'elles, ces flux sont de plus supposés uniformes.

Afin de vérifier la relation (3.15), la somme des flux entrant et sortant de l'élément doit être nulle; sous forme discrète, elle s'écrit de la manière suivante (en conservant les conventions de signe du paragraphe précédent) :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} (f_{i-1,k} + f_{i,k}) \Delta y_2 & | \text{ (face AB)} \\
 & - \frac{1}{2} (f_{i,k+1} + f_{i,k}) \Delta y_7 + \frac{1}{2} (g_{i,k} + g_{i,k+1}) \Delta x_2 & | \text{ (face BC)} \\
 & + \frac{1}{2} (f_{i,k} + f_{i+1,k}) \Delta y_3 & | \text{ (face CD)} \\
 & + \frac{1}{2} (f_{i,k} + f_{i,k-1}) (\Delta y_2 - \Delta y_3 + \Delta y_7) - \frac{1}{2} (g_{i,k} + g_{i,k-1}) \Delta x_2 & | \text{ (face DA)} \\
 & = 0 & \text{ (3.36)}
 \end{aligned}$$

Les termes de flux sont ensuite développés en séries de Taylor aux alentours du noeud d'indices (i,k); les expressions de ces séries sont données à l'annexe (2.4). Si nous introduisons ces développements en série dans (3.36), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) + \Delta y_3 (\Delta x_2 + \Delta x_3) \right) \right] + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\Delta x_2 (\Delta y_2 + \Delta y_3) \right) \\
 & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \Delta y_2 (2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{2} \Delta y_3 (2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[\frac{1}{8} \left(\Delta y_3 (\Delta x_2 + \Delta x_3)^2 - \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 \right) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{2} \left(\Delta y_3 \Delta y_6 (\Delta x_2 + \Delta x_3) - \Delta y_2 \Delta y_5 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[\frac{1}{2} (\Delta y_3 \Delta y_6^2 - \Delta y_2 \Delta y_5^2) + \frac{1}{8} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 (\Delta y_2 - \Delta y_3) \right] \\
 & + O(\Delta^4) = 0 \quad \text{ (3.37)}
 \end{aligned}$$

Si la condition suivante, relativement sévère, est satisfaite :

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3, \quad (3.38)$$

l'équation (3.37) peut s'écrire de manière un peu plus condensée sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left(\Delta x_2 (\Delta y_2 + \Delta y_3) \right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \Delta y_2 (2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{2} \Delta y_3 (2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8) \right] \\ & + 0(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes} + 0(\Delta^4) = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

L'examen de cette dernière équation nous indique que, au passage à la limite, lorsque les Δx_j et Δy_j tendent uniformément vers zéro, la discrétisation obtenue au moyen d'une surface de contrôle quadrangulaire n'est que conditionnellement consistante avec (3.15). En effet, (3.39) peut également s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{X}{0(\Delta^2)} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{0(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes}}{0(\Delta^2)} + 0(\Delta^2) = 0$$

avec (3.40)

$$X = \frac{1}{2} \Delta y_2 (2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{2} \Delta y_3 (2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8)$$

Nous ne retrouvons l'équation (3.15), plus un terme du premier ordre, que si X est au moins du troisième ordre, ce qui implique les conditions suivantes :

$$2\Delta y_5 = 2\Delta y_6 = \Delta y_7 + \Delta y_8 \quad (3.41a)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$$

ou encore :

$$2\Delta y_5 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^2)$$

$$2\Delta y_6 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^2)$$

(3.41b)

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 0(\Delta^2)$$

$$\Delta x_2 - \Delta x_3 = 0(\Delta^2)$$

Dans ce cas la discrétisation est consistante avec le système aux dérivées partielles (3.1) ou (3.4) et est précise au premier ordre. Nous sommes face aux mêmes avantages et inconvénients que ceux qui ont été décrits dans le cas de l'élément trapézoïdal de Denton.

Pour obtenir une discrétisation précise au deuxième ordre, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \Delta y_4$$

$$\Delta y_5 = \Delta y_6 = \Delta y_7 = \Delta y_8$$

(3.42a)

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$$

Cette condition implique à nouveau l'existence d'un maillage strictement régulier, sans aucune variation d'inclinaison des pseudo-lignes de courant et présentant un écartement constant entre les lignes parallèles à la direction du pas. Remarquons cependant que des variations du deuxième ou du troisième ordre dans (3.42a) peuvent être suffisantes pour obtenir une précision du second ordre :

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 0(\Delta^3)$$

$$\Delta y_3 - \Delta y_4 = 0(\Delta^2)$$

$$\Delta x_2 - \Delta x_3 = 0(\Delta^3)$$

$$2\Delta y_5 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^3)$$

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = 0(\Delta^2)$$

$$2\Delta y_6 - (\Delta y_7 + \Delta y_8) = 0(\Delta^3)$$

$$\Delta y_2 - \Delta y_3 = 0(\Delta^2)$$

(3.42b)

3.1.3.7 Autres possibilités de maillage

Une approche différente de construction d'un maillage doit également être signalée. De manière à aligner le mieux possible les "aires finies" (ou les lignes du maillage) avec l'écoulement, ce qui conditionne en grande partie la précision de la solution, Younis et Camarero (Réf. 55) proposent un maillage curvilinéaire construit en fonction de la forme du profil étudié. Dans ce maillage, des surfaces de contrôle semblables à celles utilisées par Denton sont définies. Un avantage indéniable de cette approche concerne la discrétisation des bords d'attaque et de fuite; ces deux zones sont toujours parfaitement définies, indépendamment des dimensions du maillage. Une méthode semblable est utilisée par Deconinck et Hirsch (Réf. 56) qui calculent un écoulement transsonique inter-aubes au moyen d'une approche par éléments finis.

3.1.3.8 Choix d'un élément de discrétisation

Les différentes analyses que nous avons effectuées dans les paragraphes précédents nous ont permis d'évaluer la consistance et l'ordre de précision des discrétisations proposées par certains auteurs. L'élément hexagonal permet d'obtenir une discrétisation inconditionnellement consistante et précise au premier ordre. La consistance des discrétisations obtenues au moyen des trois autres éléments n'est que conditionnelle; nous avons en effet montré qu'une erreur de consistance non négligeable peut apparaître dans le cas d'aubages possédant une cambrure importante lorsque la discrétisation est effectuée au moyen de l'élément trapézoïdal de Denton ou de l'élément quadrangulaire de Essers et Kafyeke. La condition de consistance de la discrétisation obtenue au moyen de l'élément bitrapézoïdal proposé par Van Hove et Arts est moins sévère et est réalisée dans la grande majorité des applications; elle n'est de plus pas fonction de la cambrure du profil étudié. Pour chacun de ces trois derniers éléments, la discrétisation est précise au premier ordre; elle possède l'avantage sur l'élé-

ment hexagonal de ne nécessiter la connaissance des inconnues qu'en quatre noeuds au lieu de six pour appliquer le schéma numérique de résolution; cet avantage sera loin d'être négligeable lorsque nous traiterons les écoulements tridimensionnels.

Les surfaces de contrôle que nous avons employées (Fig. 33) sont semblables à celles utilisées par Van Hove; nous avons vu que pour cet élément bitrapézoïdal, les noeuds du réseau, où les valeurs des différentes inconnues sont calculées, se situent sur les lignes parallèles à la direction du pas à mi-distance entre deux pseudo-lignes de courant. La position de ces noeuds est telle que les valeurs des inconnues (vitesse, masse volumique, pression, température) sur l'intrados et l'extrados (qui sont aussi des pseudo-lignes de courant) de l'aubage sont obtenues par extrapolation parabolique ou linéaire le long d'une ligne parallèle au pas, des valeurs obtenues aux différents noeuds situés à l'intérieur du canal. Ce processus d'extrapolation conduit parfois au paradoxe d'obtenir sur la paroi, dans une région d'intenses gradients tangentiels, une pression statique locale supérieure à la pression totale d'entrée. Des imprécisions peuvent d'autre part apparaître lors du calcul de l'angle de l'écoulement à la paroi : cette grandeur est en effet également obtenue par extrapolation des valeurs calculées à l'intérieur du canal. Dans une région de forte cambrure de l'aube, l'expérience montre que des oscillations plus ou moins importantes autour de la valeur exacte apparaissent.

C'est principalement pour ces raisons que nous avons modifié la position des noeuds de la discrétisation : ils sont situés maintenant à l'intersection des lignes parallèles à la direction du pas et des pseudo-lignes de courant (Fig. 33). Cette configuration a été choisie de manière à obtenir directement par le schéma numérique et non plus par extrapolation, la valeur des différentes inconnues de l'écoulement sur l'intrados et l'extrados de l'aubage; cette façon de procéder nous a paru plus rigoureuse.

de turbomachine, est discrétisée de façon relativement simple sans utiliser de transformation de coordonnées. En cela, l'approche par "aires finies" possède la même flexibilité qu'une méthode par éléments finis mais préserve une démarche plus proche de la physique du problème que cette dernière.

Soit S la surface d'un des éléments bitrapézoïdaux de contrôle que nous avons définis au paragraphe précédent, ∂S le contour de cet élément et $\vec{n}$, de composantes n_x et n_y , le vecteur normal sortant à cette frontière ∂S . L'intégration sur la surface des systèmes d'équations (3.1) ou (3.4) selon le processus que nous avons décrit au paragraphe 1.3.2 et avec les mêmes hypothèses, fournit le résultat suivant :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} S = - \int_{\partial S} (\vec{f} \cdot n_x + \vec{g} \cdot n_y) d\vec{l} \quad (3.43)$$

Dans chaque élément de contrôle, les valeurs des inconnues ($\vec{\sigma}$) restent uniformes. Cette équation exprime mathématiquement l'égalité qui existe entre la variation de $\vec{\sigma}$ à l'intérieur de la surface élémentaire S et la résultante des différents transports par convection de $\vec{\sigma}$ au travers de la frontière ∂S de S . Puisque nous utilisons des éléments polygonaux plus ou moins réguliers, l'intégrale des flux sur le contour ∂S (membre de droite de (3.43)) peut être calculée par la somme de ces flux au travers des différents segments du contour polygonal entourant la surface de contrôle.

La dérivée temporelle intervenant dans (3.43) est discrétisée au moyen du schéma numérique à viscosité corrigée dans sa version que nous avons appelée semi-implicite. Nous avons décrit ce schéma au paragraphe 2.6.4 et avons montré qu'il possédait, pour une application à une géométrie unidimensionnelle, de très bonnes qualités de convergence et de stabilité. Appliqué au cas d'une géométrie bidimensionnelle, le schéma à viscosité corrigée nous permet de construire le système discret suivant où n est l'indice temporel de discrétisation, i et k sont les indices

Les surfaces élémentaires de la discrétisation, définies au moyen de ces noeuds, semblables à celles utilisées par Van Hove pour la partie intérieure du canal, sont décrites à la figure 33. Les conditions nécessaires à l'obtention d'une discrétisation consistante ont été établies au paragraphe 3.1.3.5. Dans le cas le plus général, cette discrétisation est précise au premier ordre. Comme l'indique la figure 33, des demi-éléments doivent être construits le long des frontières imperméables ainsi qu'aux bords d'attaque et de fuite. Ces derniers peuvent être discrétisés de manière pointue ou tronquée; si cette dernière option est choisie, une surface élémentaire un peu spéciale est définie.

Dans le souci de présenter une étude complète, nous avons également effectué une analyse de la consistance et de l'ordre de précision de la discrétisation obtenue au moyen des "demi-éléments" utilisés le long des parois imperméables. Les conclusions de cette étude sont présentées de manière détaillée à l'annexe 3. En bref, elles sont analogues à celles que nous avons obtenues au paragraphe 3.1.3.5.

Mentionnons enfin que l'usage de cette nouvelle discrétisation permet l'établissement de solutions doublement définies le long des frontières périodiques en amont et en aval de la grille d'aubes par l'utilisation du concept de ligne de glissement (définie comme une ligne au travers de laquelle la pression statique et la vitesse normale à cette ligne sont conservées tandis que les autres paramètres peuvent présenter des discontinuités) si l'on désire généraliser la méthode à un calcul d'écoulement réellement instationnaire selon une approche semblable à celle qui a été exposée à l'annexe 1.

3.1.4 Description du schéma numérique à viscosité corrigée

L'application à l'écoulement existant dans une grille d'aubes bidimensionnelle démontre clairement l'avantage que l'approche par "aires finies" possède sur une méthode de différences finies; une géométrie complexe, comme celle d'un aubage

de discrétisation spatiale dans les directions axiale et tangentielle :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{i,k}^{n+1} = \frac{\Delta t}{S} \sum (\text{termes de transport})^n + \frac{1}{4} (\vec{\sigma}_{i-1,k}^{n+1} + \vec{\sigma}_{i,k+1}^n + \vec{\sigma}_{i+1,k}^n + \vec{\sigma}_{i,k-1}^n) \\ - \frac{\alpha}{4} (\vec{\sigma}_{i-1,k}^* + \vec{\sigma}_{i,k+1}^* + \vec{\sigma}_{i+1,k}^* + \vec{\sigma}_{i,k-1}^* - 4\vec{\sigma}_{i,k}^*) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Les termes surmontés d'un astérisque sont mis à jour toutes les N_v itérations et maintenus constants pendant les N_v itérations suivantes selon le principe du schéma à viscosité corrigée; Δt est le pas temporel limite de stabilité dont nous parlerons dans le paragraphe 3.1.7 et α est un coefficient de viscosité purement numérique, fonction du gradient des inconnues, de façon à n'introduire une viscosité importante que dans les zones à gradients importants et à ne pas altérer la précision dans le reste du domaine de l'écoulement; sa valeur est déterminée classiquement par l'expression :

$$\alpha = VC \left\{ 1 - \frac{|\rho_{i-1,k}^* + \rho_{i,k+1}^* + \rho_{i+1,k}^* + \rho_{i,k-1}^* - 4\rho_{i,k}^*|}{4} \right\} \quad (3.45)$$

VC est un coefficient numérique, légèrement inférieur ou même égal à 1 ($VC = 1 - O(\Delta)$), choisi de manière empirique. Le caractère "semi-implicite" (cette dénomination vient de la présence du terme $\vec{\sigma}_{i-1,k}^{n+1}$ dans le membre de droite de (3.44)) du schéma numérique ne pose à nouveau aucun problème particulier : comme nous progressons d'amont en aval, toutes les valeurs de $\vec{\sigma}$ dans le plan $(i-1)$, au temps $(t+\Delta t)$, sont connues au moment où $\vec{\sigma}$ est calculé au noeud (i,k) . Les termes de transport sont définis positifs lorsqu'il s'agit de flux entrant dans l'élément de surface S et négatifs lorsqu'il s'agit de flux qui en sortent.

A la figure 34a est représentée une maille élémentaire, soit ACDEGHA, représentative de la discrétisation. Le noeud

d'indices (i,k) est situé au centre de cette maille et les valeurs des différentes inconnues y sont calculées en fonction de leurs valeurs au pas temporel précédent aux noeuds d'indices $(i-1,k)$, $(i,k+1)$, $(i,k-1)$ et $(i+1,k)$. De façon à expliciter les différents termes de transport, nous définissons les paramètres géométriques suivants dans cette maille :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{i-1} &= \overline{AC} & \Delta y_i &= \overline{DH} & \Delta y_{i+1} &= \overline{EG} \\ \Delta x_i &= \text{projection de } \overline{GA} \text{ (ou } \overline{CE}) \text{ sur l'axe } x \\ \Delta x_{i-1} &= \text{projection de } \overline{AH} \text{ (ou } \overline{CD}) \text{ sur l'axe } x \\ \Delta x_i &= \text{projection de } \overline{HG} \text{ (ou } \overline{DE}) \text{ sur l'axe } x \\ \Delta x_{y_{i,k-1}} &= \text{projection de } \overline{GA} \text{ sur l'axe } y \\ \Delta x_{y_{i,k}} &= \text{projection de } \overline{EC} \text{ sur l'axe } y \\ & \quad \text{(définis positifs sur la figure)} \end{aligned} \right\} (3.46)$$

Au travers de la face AC, seul un terme de transport dans la direction axiale doit être retenu; on convient d'admettre une valeur uniforme de ce flux (entrant) sur AC, égale à sa valeur au noeud d'indices $(i-1,k)$. Le raisonnement est analogue pour la face EG, sauf qu'il s'agit d'un flux sortant de l'élément: une valeur uniforme, égale à la valeur du flux au noeud d'indices $(i+1,k)$ est adoptée. Au travers des faces CE et AG, les deux composantes, axiale et tangentielle, des termes de transport doivent être prises en compte. En ce qui concerne la face CE, les termes de flux sont approximatés par la moyenne de leurs valeurs aux noeuds d'indices (i,k) et $(i,k+1)$; ils sont supposés uniformes le long de CE. Dans la direction axiale les flux entrent dans l'élément de surface; dans la direction tangentielle, des flux sortant sont observés. Pour la face AG, on considère les moyennes des valeurs des flux aux noeuds d'indices (i,k) et $(i,k-1)$; les flux sont également supposés uniformes sur

cette face. La composante axiale des termes de transport est un flux sortant tandis que la composante tangentielle est un flux rentrant. Mathématiquement, ces considérations permettent d'explicitier (3.44) de manière à obtenir l'expression discrète suivante :

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{i,k}^{n+1} = & \frac{1}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,k}^{n+1} + \vec{\sigma}_{i+1,k}^n + \vec{\sigma}_{i,k-1}^n + \vec{\sigma}_{i,k+1}^n \right] \\
 & - \frac{\alpha}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,k}^* + \vec{\sigma}_{i+1,k}^* + \vec{\sigma}_{i,k-1}^* + \vec{\sigma}_{i,k+1}^* - 4\vec{\sigma}_{i,k}^* \right] \\
 & + \frac{\Delta t}{S} \left[\vec{f}_{i-1,k}^n \cdot \Delta y_{i-1} - \vec{f}_{i+1,k}^n \cdot \Delta y_{i+1} + \frac{1}{2} \left(\vec{f}_{i,k}^n + \vec{f}_{i,k+1}^n \right) \Delta x_{i,k} \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left(\vec{f}_{i,k}^n + \vec{f}_{i,k-1}^n \right) \Delta x_{i,k-1} + \frac{1}{2} \left(\vec{g}_{i,k}^n + \vec{g}_{i,k-1}^n \right) \Delta x_i \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\vec{g}_{i,k}^n + \vec{g}_{i,k+1}^n \right) \Delta x_i \right] \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

La surface S est calculée par l'expression suivante :

$$S = \frac{1}{2} \left[\Delta x_{i-1} (\Delta y_{i-1} + \Delta y_i) + \Delta x_i (\Delta y_i + \Delta y_{i+1}) \right] \quad (3.48)$$

Si la pseudo-ligne de courant joignant les noeuds d'indice k est une des frontières périodiques inférieures amont ou aval (ligne k = 1), le même principe de calcul peut être appliqué grâce à la condition de périodicité de l'écoulement. En admettant que le maillage comporte (k = KM) pseudo-lignes de courant, la surface élémentaire est construite en décalant d'une distance égale à un pas la ligne (k = KM-1) (Fig. 34b). Le raisonnement est analogue s'il s'agit d'une des frontières périodiques supérieures, mais c'est la ligne (k = 2) qui est décalée d'un pas. On remarquera qu'ainsi les variables sur les lignes (k = 1) et (k = KM) sont calculées exactement de la même manière, vérifiant ainsi la condition de périodicité de l'écoulement.

Si la pseudo-ligne de courant sur laquelle se trouvent les noeuds pour lesquels on désire calculer les différentes inconnues de l'écoulement se confond avec l'intrados ou l'extrados de l'aubage étudié, la situation est celle de la figure 34c. Un demi-élément de surface est considéré. Le long de la face ABC, c'est la pression statique régnant en B qui détermine le seul terme de flux non nul. Au travers des autres faces de cet élément, les termes de transport sont calculés de la même manière que celle employée dans le cas d'un élément général. L'équation (3.47) devient :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{i,1}^{n+1} = & \frac{1}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,1}^{n+1} + \vec{\sigma}_{i+1,1}^n + 4\vec{\sigma}_{i,2}^n - 2\vec{\sigma}_{i,3}^n \right] \\ & - \frac{\alpha}{4} \left(\vec{\sigma}_{i-1,1}^* + \vec{\sigma}_{i+1,1}^* + 4\vec{\sigma}_{i,2}^* - 2\vec{\sigma}_{i,3}^* - 4\vec{\sigma}_{i,1}^* \right) \\ & + \frac{\Delta t}{S} \sum (\text{termes de transport})^n \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pour la ligne ($k = KM$), le raisonnement est identique, faisant cette fois intervenir les lignes ($k = KM-1$) et ($k = KM-2$). Sur une paroi solide, nous ne pouvons plus définir un domaine de dépendance numérique semblable à celui qui est utilisé au centre du passage inter-aubes (Fig. 34a). De manière à conserver un schéma numérique analogue au cas général, nous construisons intuitivement un domaine de dépendance excentré dans la direction tangentielle (Fig. 34c). Les coefficients (+4) et (-2) intervenant dans le membre de droite de (3.49) sont les coefficients de pondération, fonctions de la distance entre les différents noeuds du maillage. Ces valeurs numériques peuvent également être établies grâce à une analyse de consistance rigoureuse faisant intervenir les termes instationnaires.

L'élément décrit à la figure 34d est employé pour le traitement du bord d'attaque de l'aubage. Au travers de AD, les termes de transport sont calculés comme étant la moyenne entre

les valeurs des flux aux noeuds B et C. Sur la face AB, seul un terme de quantité de mouvement sous forme de pression statique (paroi imperméable) est considéré : la valeur de ce terme de transport est proportionnelle à une moyenne pondérée des valeurs de la pression statique aux noeuds B et C. De même, sur la face BE, il n'existe qu'un terme de transport de pression statique, calculé en B. Au travers des autres faces de ce demi-élément de surface, les termes de flux sont calculés de la même manière que dans le cas d'un élément général. L'équation (3.47) devient :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{i,1}^{n+1} = & \frac{1}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,1}^{n+1} + \vec{\sigma}_{i+1,1}^n + 4\vec{\sigma}_{i,2}^n - 2\vec{\sigma}_{i,3}^n \right] \\ & - \frac{\alpha}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,1}^{*} + \vec{\sigma}_{i+1,1}^{*} + 4\vec{\sigma}_{i,2}^{*} - 2\vec{\sigma}_{i,3}^{*} - 4\vec{\sigma}_{i,1}^{*} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{S} \sum (\text{termes de transport})^n \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le raisonnement est identique pour l'élément se trouvant sur la ligne ($k = KM$). Pour le traitement du bord de fuite, discrétisé de manière tronquée, il en va de même. L'élément de surface concerné est décrit à la figure 34e.

3.1.5 Définition des conditions aux frontières

3.1.5.1 Conditions aux frontières physiques

Afin de construire un problème aux dérivées partielles correctement posé au sens d'Hadamard, il nous faut adjoindre au système d'équations aux dérivées partielles que nous avons défini une série de conditions aux limites physiques le long des frontières du domaine étudié (Fig: 25). Nous avons vu que le long des frontières AB, EF, CD et GH (appelées frontières périodiques), une condition de périodicité doit être appliquée : les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie au travers de AB sont, en valeur absolue, égaux à ceux qui traversent EF; il en

va de même pour les frontières CD et GH. Le long des parois solides BC et FG, une condition d'imperméabilité doit être vérifiée. Comme la méthode que nous employons fait apparaître explicitement les termes de transport, la condition est remplie par la mise à zéro des flux de masse et d'énergie au travers de ces parois et par la présence d'un flux de quantité de mouvement réduit à un terme de pression statique exercée sur l'intrados et l'extrados. De cette façon, l'angle de l'écoulement le long du profil est obtenu comme un résultat du calcul et n'est pas une donnée à introduire. Le caractère globalement conservatif des équations est ainsi préservé et une accumulation d'erreurs sur les variables de base au travers de la grille est évitée, surtout dans les zones autour des bords d'attaque et de fuite, là où les différentes inconnues subissent d'importantes variations.

La détermination du nombre de conditions aux limites à appliquer au droit du plan d'entrée AE et du plan de sortie DH se fait de manière semblable à celle utilisée dans le cas unidimensionnel, à savoir par la méthode des caractéristiques. On convient généralement, dans le cas d'une grille d'aubes, de choisir des conditions d'entrée et de sortie uniformes le long du pas; comme nous l'avons montré, l'extension en amont et en aval du domaine de calcul est une conséquence de cette hypothèse. Une deuxième conséquence est que l'on peut négliger tous les gradients dans la direction tangentielle au droit des plans d'entrée et de sortie ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$). Dans le cas du système (3.1) (ou (3.7)), le problème à résoudre devient, au droit de ces plans, sous forme quasi-linéaire (Réf. 57) :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + A(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = 0 \quad (3.51)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ T \end{pmatrix} \quad A(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & (\gamma-1)T & 0 & u \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_j^A ($j = 1, 2, 3, 4$) de la matrice $A(\vec{\sigma})$ ont été calculées en (3.7). A ces valeurs propres correspondent les

vecteurs propres $\vec{\Lambda}_j^A$ ($j = 1, 2, 3, 4$) suivants $\left\{ A(\vec{\sigma}) \cdot \vec{\Lambda}_j^A = \lambda_j^A \vec{\Lambda}_j^A \right\}$:

$$[\lambda_1 = u]$$

$$[\lambda_2 = u]$$

$$[\lambda_3 = u+a]$$

$$[\lambda_4 = u-a]$$

$$\vec{\Lambda}_1^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{T}{\rho} \end{pmatrix} \quad \vec{\Lambda}_2^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{T}{\rho} \end{pmatrix} \quad \vec{\Lambda}_3^A = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a}{\rho} \\ 0 \\ \frac{T}{\rho}(\gamma-1) \end{pmatrix} \quad \vec{\Lambda}_4^A = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{\rho} \\ 0 \\ \frac{T}{\rho}(\gamma-1) \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Nous pouvons maintenant remplacer le système aux dérivées partielles (3.51) à résoudre dans les plans d'entrée et de sortie par le système des relations caractéristiques (relations différentielles ordinaires) tel que nous l'avons défini au chapitre 2. Les équations différentielles suivantes sont obtenues, s étant une coordonnée mesurée le long des courbes caractéristiques :

$$(\lambda_1=u) \Rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma\rho} \frac{d\rho}{ds} - \frac{dv}{ds} - \frac{1}{a^2} \frac{dT}{ds} = 0 \quad (3.53)$$

$$(\lambda_2=u) \Rightarrow \frac{dv}{ds} = 0 \quad (3.54)$$

$$(\lambda_3=u+a) \Rightarrow \frac{1}{\gamma\rho} \frac{d\rho}{ds} + \frac{1}{a} \frac{du}{ds} + \frac{1}{a^2} \frac{dT}{ds} = 0 \quad (3.55)$$

$$(\lambda_4=u-a) \Rightarrow \frac{1}{\gamma\rho} \frac{d\rho}{ds} - \frac{1}{a} \frac{du}{ds} + \frac{1}{a^2} \frac{dT}{ds} = 0 \quad (3.56)$$

$$\text{où } \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Géométriquement, nous sommes ramenés à la figure 35. Si la composante axiale de la vitesse de l'écoulement est subsonique dans le plan d'entrée ($u < a$), trois des caractéristiques passant par cette frontière ont une pente positive (u , u , $u+a$) (Fig. 35a); l'information qu'elles transportent vient de l'extérieur du domaine étudié : il faut donc imposer trois conditions aux frontières. Si l'écoulement axial est supersonique dans le plan d'entrée ($u > a$), la quatrième caractéristique aura également une pente positive : quatre conditions aux frontières doivent alors être imposées. Dans le plan de sortie, un raisonnement analogue peut être effectué : la présence de caractéristiques de pente négative, transportant une information issue de l'extérieur du domaine étudié, nécessite l'imposition d'autant de conditions aux frontières. Si l'écoulement axial est subsonique (Fig. 35b) ($u < a$), une seule condition doit être imposée tandis que dans le cas supersonique ($u > a$) aucune condition aux frontières ne doit être spécifiée.

Dans le cas du système simplifié (3.4) (ou (3.8)), le raisonnement est semblable. Le tableau suivant résume le nombre de conditions aux limites naturelles à appliquer le long des frontières pour différents régimes d'écoulement afin que le problème aux dérivées partielles avec ses conditions aux limites soit posé correctement (entre parenthèses est noté le nombre de conditions dans le cas du système d'équations à enthalpie totale constante).

Régime (axial)	Plan d'entrée	Plan de sortie
Subsonique	3 (2)	1 (1)
Supersonique	4 (3)	0 (0)

En ce qui concerne la nature de ces conditions, en accord avec l'analyse théorique d'Essers (Ref. 41) déjà mentionnée au paragraphe 2.3, le choix suivant a été effectué dans le

cas du système (3.1), en faisant l'hypothèse d'une composante axiale de vitesse inférieure à la vitesse du son (ce qui est pratiquement toujours vérifié dans une grille d'aubes de turbine).

Plan d'entrée :

pression totale p_{01} donnée (uniforme sur le pas) (3.57)

température totale T_{01} donnée (uniforme sur le pas) (3.58)

angle d'entrée β_1 donné (uniforme sur le pas) (3.59)

Plan de sortie :

pression statique p_2 donnée (uniforme sur le pas) (3.60).

Dans le cas d'une vitesse d'entrée supérieure à la vitesse du son, la composante axiale de l'écoulement restant cependant subsonique, le nombre de Mach d'entrée est imposé à la place de l'angle d'entrée. La condition d'incidence unique est alors obtenue comme partie de la solution. Cette condition d'incidence unique exprime la dépendance étroite qui existe entre le nombre de Mach supersonique d'entrée et l'angle de l'écoulement dans ce même plan; elle est le fait, pour ce régime, d'ondes de compression ou d'expansion se développant sur le bord d'attaque de la première aube d'une grille d'aubes semi-infinie. Si le système à enthalpie totale constante (3.4) est utilisé, seules les conditions (3.57) et (3.59) sont imposées dans le plan d'entrée.

Pour les rares applications dans lesquelles un écoulement axial supersonique est rencontré dans les plans d'entrée ou de sortie, le problème est évident : les quatre (trois) variables sont imposées dans le plan d'entrée tandis qu'aucune d'elles n'est spécifiée dans le plan de sortie.

Certaines conditions aux limites additionnelles doivent également être construites afin de pouvoir résoudre numériquement

le problème. Comme leur choix a également une influence déterminante sur la stabilité du processus de résolution, les différents essais que nous avons effectués dans ce domaine, ainsi que les résultats obtenus, seront décrits en détail dans le paragraphe suivant.

3.1.5.2 Conditions aux frontières numériques

Nous avons montré précédemment l'influence prépondérante que le choix des conditions aux limites purement numériques avait sur la stabilité du processus de résolution. Comme les différentes publications traitant du problème de calculs d'écoulements inter-aubes ne parlent généralement jamais du choix et de l'influence de ces conditions, nous avons, de manière analogue à ce qui a été entrepris au paragraphe 2.11, considéré un certain nombre de ces conditions nécessaires à la résolution numérique de l'écoulement dans les plans d'entrée et de sortie du passage inter-aubes :

- CL1 : égalité entre les débits massiques passant dans les plans ($i = 1$) et ($i = 2$)
- CL2 : égalité des termes de quantité de mouvement dans la direction axiale ($\rho u^2 + p$) entre les plans ($i = IM-1$) et ($i = IM$) (en supposant que le maillage comporte IM lignes parallèles à la direction du pas)
- CL3 : égalité des termes de quantité de mouvement dans la direction tangentielle (ρuv) entre les plans ($i = IM-1$) et ($i = IM$)
- CL4 : égalité des termes d'énergie $\left\{ \rho u \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right\}$ entre les plans ($i = IM-1$) et ($i = IM$)
- CL5 : discrétisation de la relation caractéristique (3.56) entre les temps (t) et ($t + \Delta t$) dans le plan d'entrée de la grille d'aubes
- CL6 : discrétisation de la relation caractéristique (3.53) entre les temps (t) et ($t + \Delta t$) dans le plan de sortie de la grille d'aubes

- CL7 : discrétisation de la relation caractéristique (3.54) entre les temps (t) et $(t+\Delta t)$ dans le plan de sortie de la grille d'aubes
- CL8 : discrétisation de la relation caractéristique (3.55) entre les temps (t) et $(t+\Delta t)$ dans le plan de sortie de la grille d'aubes
- CL9 : application du schéma numérique de résolution à un demi-élément à l'entrée ou à la sortie de la grille d'aubes pour l'équation de conservation de la masse
- CL10 : application du schéma numérique de résolution à un demi-élément à l'entrée ou à la sortie de la grille d'aubes pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale
- CL11 : application du schéma numérique de résolution à un demi-élément à l'entrée ou à la sortie de la grille d'aubes pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction tangentielle
- CL12 : application du schéma numérique de résolution à un demi-élément à l'entrée ou à la sortie de la grille d'aubes pour l'équation de conservation de l'énergie

La stabilité de ces conditions numériques a été étudiée pour la géométrie d'une grille d'aubes rectilignes sans épaisseur, dont l'angle de calage est nul. L'écoulement y est uniforme (nous avons choisi le cas $M = 0.8$). De plus, le champ initial des inconnues a été choisi comme étant la solution exacte. Les calculs ont été effectués à partir du système (3.1). Une condition numérique doit donc être imposée sur la frontière amont et trois conditions sur la frontière aval. Les différents paramètres du processus numérique de résolution étaient :

- VC = 1. (coefficient numérique de viscosité)
- Nv = 20 (nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes visqueux)
- CFL = 1. (coefficient de sécurité du pas temporel).

Le critère d'acceptation d'une combinaison de conditions aux limites est à nouveau la conservation d'une erreur de convergence de l'ordre de l'erreur d'arrondi de l'ordinateur (DEC VAX 11/780) sur lequel les calculs ont été effectués, et cela quel que soit le nombre d'itérations (nous avons fixé 6000 itérations pour chaque test) pour un maillage composé de (41x21 noeuds) de discrétisation. Le tableau 10 résume les résultats les plus importants que nous avons obtenus.

Considérons maintenant un calcul réel d'écoulement. Pour une combinaison stable de conditions aux limites, la précision du résultat final n'est pratiquement pas influencée par le choix de ces conditions. Par contre, le temps de calcul total change un peu suivant la nature des conditions appliquées. Il est évident que l'utilisation des conditions CL1, CL2, CL3 et CL4 permet de calculer très rapidement les valeurs des inconnues aux noeuds formant les plans d'entrée et de sortie puisqu'il suffit, en pratique, d'égaliser les valeurs des inconnues en chacun de ces noeuds à la moyenne massique de leurs valeurs en les noeuds formant le plan adjacent. Cette moyenne massique est définie numériquement par la relation suivante :

$$\bar{A} = \frac{\sum_{k=1}^{KM} A(k) \rho u(k)}{\sum_{k=1}^{KM} \rho u(k)} \quad \frac{1}{KM}$$

avec KM = nombre de noeuds dans la direction tangentielle.

Au contraire, les conditions CL9, CL10, CL11 et CL12 imposent l'application du schéma numérique de résolution pour le calcul des inconnues en chaque noeud, permettant de mieux conserver le caractère évolutif de la procédure. Rappelons enfin que l'utilisateur intéressé par le calcul d'écoulements stationnaires ne peut employer que les conditions CL5, CL6, CL7 et CL8 puisque ce sont les seules qui représentent correctement l'évolution physique de l'écoulement.

Dans la suite des calculs, nous nous sommes servis de la condition CL10 au droit du plan d'entrée et des conditions CL9, CL10 et CL11 au droit du plan de sortie. Ce choix n'est sûrement pas optimal au point de vue du temps total de calcul; il a été conditionné par les conclusions que nous avons tirées de l'étude de l'écoulement dans un étage de turbine et qui seront présentées dans la section suivante. Cet ensemble de conditions aux limites numériques est en effet le seul pour lequel nous avons pu assurer la stabilité du processus de résolution dans le cas du calcul de l'écoulement dans l'étage complet.

3.1.6 Description des conditions initiales

Afin d'obtenir un problème "correctement posé" au sens d'Hadamard, le champ des inconnues doit de plus être déterminé à l'instant initial ($t = 0$). A cette fin, nous faisons l'hypothèse d'une variation linéaire des paramètres décrivant l'écoulement entre l'intrados et l'extrados depuis les conditions d'entrée jusqu'aux conditions de sortie. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.7, la recherche de conditions initiales plus sophistiquées ne se justifie pas, surtout si un raffinement du maillage est introduit après un certain nombre d'itérations : le résultat obtenu avec un réseau grossier est utilisé comme champ initial des inconnues pour le calcul au moyen d'un réseau fin après un simple processus d'interpolation.

3.1.7 Condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy

La condition nécessaire de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (Réf. 42) (paragraphe 1.3.1) impose, pour garantir la stabilité d'un processus numérique explicite, que le domaine de dépendance physique d'un noeud de la discrétisation soit inclus dans le domaine de dépendance numérique de celui-ci afin que toute perturbation qui influence physiquement le noeud considéré l'influence également numériquement.

Nous avons montré au début de ce chapitre que le système d'équations aux dérivées partielles de trois variables indépendantes (x,y,t) à résoudre (système (3.1) ou système (3.4)) est un système hyperbolique par rapport au temps quel que soit le régime de l'écoulement. Le concept de courbes caractéristiques défini lors de l'étude d'un écoulement unidimensionnel est généralisé à celui de surfaces ou conoïdes caractéristiques pour un problème à deux dimensions spatiales. De manière générale, un système hyperbolique de m équations a m conoïdes caractéristiques (Réf. 58).

Considérons (Fig. 36) une perturbation prenant naissance au temps t_0 au point Q ; par définition des conoïdes caractéristiques, cette perturbation ne peut se faire sentir pour des temps $(t \geq t_0)$ qu'à l'intérieur d'un conoïde caractéristique de sommet Q . De même, pour des temps $(t < t_0)$, Q ne peut être influencé que par des perturbations ayant pris naissance à l'intérieur de cette même surface caractéristique; nous généralisons de cette manière les notions de domaine d'influence et de domaine de dépendance physique du point Q . L'intersection entre le cône caractéristique et le plan (x,y) au temps (t) est une courbe fermée qui limite la région influencée par Q ($t_0 < t$) ou qui peut influencer le point Q ($t < t_0$). Les valeurs des inconnues au point Q sont calculées en fonction des valeurs correspondantes aux quatre points A, B, C et D ; une perturbation apparue en Q au temps t_0 ne peut donc atteindre que les noeuds A, B, C et D au temps $(t_0 + \Delta t)$. Le quadrilatère $ABCD$ détermine le domaine qui est influencé numériquement après un pas temporel par la perturbation présente au point Q . Dans le cas des équations d'Euler, le conoïde caractéristique est un cône dont l'intersection avec le plan (x,y) à l'instant $(t_0 + \Delta t)$ est un cercle centré en Q' (Q' est l'extrémité du vecteur vitesse ayant son origine en Q) et de rayon $a\Delta t$. Le critère CFL revient donc à imposer que ce cercle soit contenu complètement à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$.

Dans le cas du système (3.1), la condition CFL s'exprime de la manière suivante :

$$(V+a) \frac{\Delta t}{\Delta \ell} \leq 1 \quad (3.61)$$

où $V (= \sqrt{u^2+v^2})$ est la norme du vecteur vitesse du fluide en Q et $\Delta \ell$ la plus courte distance entre le point Q et les côtés du quadrilatère ABCD. Si le maillage est orthogonal et si les pas de discrétisation Δx et Δy sont égaux, on retrouve la condition bien connue :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(V+a) \sqrt{2}} \quad (3.62)$$

Si le système (3.4) est utilisé, le critère CFL s'énonce :

$$\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} V + \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^2 V^2 + \frac{a^2}{\gamma}} \right] \frac{\Delta t}{\Delta \ell} \leq 1 \quad (3.63)$$

L'inéquation (3.63) peut s'écrire de manière simplifiée sous la forme suivante :

$$(V+a) f(M) \frac{\Delta t}{\Delta \ell} \leq 1$$

avec

$$f(M) = \frac{\frac{\gamma+1}{2\gamma} M + \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^2 M^2 + \frac{1}{\gamma}}}{M + 1} \quad (3.64)$$

La fonction $f(M)$ est représentée à la figure 37; elle peut être raisonnablement approximée par la valeur $(1/\sqrt{\gamma})$ pour les nombres de Mach qui sont généralement rencontrés en turbomachines.

Les conditions (3.61) et (3.64) supposent implicitement que la direction du vecteur $\vec{V}$ est quelconque. La façon dont

nous avons construit le maillage implique cependant que cette direction est toujours plus ou moins alignée avec les pseudo-lignes de courant; cette situation permet l'utilisation d'un pas temporel plus important comme nous le montrons à la figure 38.

L'utilisation d'un élément hexagonal aurait permis l'emploi d'un pas temporel encore supérieur mais uniquement à la condition que l'élément soit orienté de façon optimale (Fig. 39). La discrétisation du domaine de calcul au moyen d'un élément hexagonal est donc fonction de l'orientation de l'aubage étudié; cette limitation ne joue pas lorsqu'un élément bitrapézoïdal est utilisé.

3.1.8 Description de quelques résultats pratiques - Comparaison avec des résultats expérimentaux et ceux obtenus avec d'autres méthodes numériques

Afin de présenter quelques exemples d'applications numériques, nous avons considéré les profils des figures 40 et 41. L'aubage de la figure 40 est la section de tête d'une aube rotorique de dernier étage d'une turbine à vapeur de grande puissance (Aube 1). Les coordonnées de ce profil (Réf. 59, 60) sont rappelées au tableau 11. L'aubage de la figure 41 est la section moyenne d'une aube rotorique de turbine à gaz transsonique (Aube 2). Les coordonnées de cette section (Réf. 61) sont, quant à elles, rappelées au tableau 12. Tous nos calculs sont effectués sur un ordinateur DEC VAX 11/780.

Nous avons vu (paragraphe 1.3.1) que la solution d'un problème stationnaire traité par voie instationnaire est atteint après un temps suffisamment long de calcul. Afin de quantifier ce temps, un paramètre représentatif de l'évolution de la convergence a été établi : la variation maximale de la vitesse pour tous les noeuds du maillage entre deux niveaux temporels consécutifs est calculée (Réf. 62), c'est-à-dire :

$$\epsilon = \max_{(i,k)} \left[\Delta \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{a_{cr}} \right) \right] \quad (3.65)$$

Si cette erreur de convergence était calculée après chaque pas temporel, le temps de calcul total serait multiplié par un facteur 1.22. Dans le but de réduire un peu ce temps de calcul, la détermination de ϵ n'est effectuée que toutes les N_v itérations, entre deux cycles de mise à jour des termes de viscosité numérique. Si, par exemple, N_v est égal à 20, le temps de calcul total n'est multiplié que par un facteur 1.01. L'évolution de l'angle aérodynamique de sortie est également considérée toutes les N_v itérations; elle permet de se faire une idée plus précise des niveaux de convergence et de précision atteints au moyen de la procédure numérique.

Les résultats de calcul de l'écoulement d'un fluide parfait en grille d'aubes sont généralement représentés sous forme de l'évolution du nombre de Mach isentropique le long du profil en fonction de la coordonnée mesurée le long de la corde ou de sa projection dans la direction axiale. Le nombre de Mach isentropique est défini en fonction de la pression statique locale, de la pression totale d'entrée et de l'exposant isentropique par l'expression suivante :

$$M_{is} = \left[\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\left(\frac{p}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (3.66)$$

établie à partir des relations adimensionnelles suivantes :

$$T_{01} = T + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u^2+v^2) \quad M = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{\gamma T}}$$

$$\left(\frac{p}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T}{T_{01}}$$

Son emploi se justifie par le fait que nous calculons des écoulements non visqueux. Les pertes en pression totale ne proviennent dans ce cas que de phénomènes purement numériques qui, si la méthode est bonne, sont réduits à un minimum. D'autre part, l'utilisation d'un paramètre adimensionnel tel que le nombre de Mach isentropique permet de comparer entre elles plusieurs distributions obtenues dans des conditions pouvant être fort différentes.

Les figures 42, 43 et 44 présentent une comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique le long de l'intrados et de l'extrados de l'Aube 1 obtenues par mesures (Réf. 60), par le programme de calcul de Couston (Réf. 19) et par la présente méthode pour trois nombres de Mach isentropiques (correspondant à trois pressions statiques) de sortie. Le maillage de discrétisation consiste en 61 lignes parallèles à la direction du pas, dont 29 sont situées entre les bords d'attaque et de fuite, et en 15 pseudo-lignes de courant. Afin d'éliminer rapidement les erreurs importantes dues au choix des conditions initiales, le calcul de l'écoulement est commencé au moyen d'un maillage grossier constitué de (31×8) noeuds de discrétisation : 500 itérations sont effectuées. Le calcul est alors poursuivi au moyen du maillage fin constitué de (61×15) noeuds de discrétisation et pour lequel 2000 itérations sont effectuées. Le temps total de calcul nécessaire pour notre méthode est de 2400 s CPU, ce qui revient à un temps de $1.2 \cdot 10^{-3}$ s par pas temporel et par noeud. Pour le programme de calcul de Couston, 500 itérations sont effectuées dans le réseau grossier et 500 dans le réseau fin. Le temps total de calcul est de 1105 s CPU, ce qui revient à un temps de $1.9 \cdot 10^{-3}$ s par pas temporel et par noeud.

La figure 45 donne l'évolution de l'erreur de convergence (3.65) et de l'angle aérodynamique de sortie en fonction du nombre d'itérations pour le calcul correspondant à la figure 44 ($M_{2, is} = 1.58$), réalisé au moyen de notre méthode de calcul. De manière à se faire une meilleure idée du niveau de précision obtenu sur la distribution du nombre de Mach, nous avons représenté aux figures 46a, 46b, 46c, les résultats intermédiaires

obtenus respectivement après 500, 1000, 1500 pas temporels au moyen du réseau fin.

Après 500 itérations (CPU = 714 s) (Fig. 46a), la distribution du nombre de Mach obtenue est déjà satisfaisante, même si le deuxième choc aérodynamique est légèrement amorti. Par contre, l'évolution de l'angle aérodynamique de sortie est loin d'être stabilisée (Fig. 45b). Cette situation s'améliore un peu après 1000 itérations (CPU = 1276 s) (Fig. 46b). Après 1500 itérations (CPU = 1838 s) (Fig. 46c), l'évolution du nombre de Mach isentropique est pratiquement semblable à celle obtenue après 2000 itérations; de plus, l'évolution de l'angle de sortie est pratiquement stabilisée.

Les résultats présentés aux figures 42, 43 et 44 présentent généralement une bonne concordance entre les valeurs mesurées et calculées, indiquant le bon comportement de notre élément bitrapézoïdal par comparaison à l'élément hexagonal utilisé par Couston. La figure 47 présente enfin la comparaison des valeurs de l'angle aérodynamique de sortie obtenues par mesures ainsi que par différentes méthodes numériques.

Afin d'obtenir un résultat plus détaillé dans la région du premier choc aérodynamique, nous avons rendu le maillage de discrétisation plus dense; 71 lignes parallèles à la direction du pas, dont 43 entre les bords d'attaque et de fuite, et 25 pseudo-lignes de courant ont été utilisées. A nouveau, on commence le calcul au moyen d'un réseau grossier (36×13 noeuds de discrétisation) avant de passer au maillage final (71×25 noeuds de discrétisation). Les figures 48, 49 et 50 présentent les distributions du nombre de Mach isentropique le long de l'intrados et de l'extrados pour les pressions statiques de sortie correspondant respectivement aux figures 42, 43 et 44. Une meilleure définition du premier choc est manifestement réalisée. L'amélioration des résultats se fait naturellement au détriment du temps de calcul total.

Une application à l'aube 2 est également présentée. Le maillage de la discrétisation comporte 63 lignes parallèles à la direction du pas, dont 37 entre les bords d'attaque et de fuite, et 21 pseudo-lignes de courant. A nouveau, le calcul est débuté au moyen d'un maillage grossier (1000 itérations) avant de passer au maillage final (3000 itérations). Les figures 51 et 52 présentent la comparaison des distributions du nombre de Mach isentropique le long de l'intrados et de l'extrados de ce profil, obtenues par mesures en soufflerie (Réf. 61) et par notre programme de calcul pour deux pressions statiques de sortie. La figure 53 résume, pour l'exemple de la figure 51 ($M_{2,1s} = 1.$), l'évolution de l'erreur de convergence et de l'angle de sortie en fonction du nombre d'itérations.

Les oscillations observées dans les distributions du nombre de Mach isentropique le long de l'intrados jusqu'à ($x/c = 0.2$) proviennent des problèmes rencontrés lors de la résolution d'écoulements présentant des zones à très faibles nombres de Mach. Il est en effet important de remarquer que tous les systèmes d'équations de la dynamique des fluides écrits sous forme instationnaire (Navier-Stokes, Euler) sont du type évolutif sauf dans le cas incompressible. Pour un écoulement d'un tel type, la masse volumique, constante, disparaît de l'ensemble des inconnues : c'est la pression qui devient une inconnue fondamentale. Il n'existe cependant dans aucune des équations décrivant l'écoulement, un terme en $(\frac{\partial p}{\partial t})$. L'équation de conservation de la masse ne contient plus aucune dérivée temporelle : le caractère évolutif du problème n'existe plus. La méthode que nous proposons n'est donc pas adaptée au calcul d'écoulements incompressibles; ceci explique les phénomènes d'oscillations observés dans les résultats.

La netteté de la résolution du choc observé sur la distribution du nombre de Mach isentropique le long de l'extrados est fonction de la densité du maillage en cet endroit. Comme l'angle de sortie est assez élevé ($\cong 72^\circ$), les surfaces de contrôle sont fort allongées dans cette région. Une résolution plus fine serait obtenue en augmentant le nombre de lignes parallèles

à la direction du pas mais au détriment du temps de calcul total.

Nous terminons ce paragraphe en mentionnant qu'à la référence 63, une comparaison a été effectuée entre la méthode que nous proposons et d'autres approches numériques. Les conclusions de cette comparaison montrent à suffisance le bon comportement de notre démarche.

3.2 ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL DANS UN ETAGE DE TURBINE

3.2.1. Introduction - Hypothèses de travail

Après avoir résolu le problème de l'écoulement dans une grille d'aubes rectiligne, nous avons entrepris l'étude du calcul aérodynamique d'un étage complet de turbine (stator + rotor). Nous nous limitons pour l'instant au cas d'un écoulement bidimensionnel inter-aubes dont les différents paramètres sont exprimés dans un système d'axes cartésien (Fig. 2); de cette manière, les forces centrifuge et de Coriolis n'interviennent pas dans les équations du mouvement du fluide évoluant dans le stator et le rotor : la projection de leurs résultantes, perpendiculaires au plan inter-aubes considéré, est nulle dans ce plan.

Nous avons établi au chapitre 1, les raisons pour lesquelles nous avons choisi d'imposer une condition de solution stationnaire au problème de l'écoulement en étage. Nous avons montré que cette condition n'est réalisable que pour autant que soit défini entre le stator et le rotor un plan fictif dans lequel les inconnues de base (ρ , ρu , ρv , ρE) possèdent une distribution uniforme le long du pas. Le fait de satisfaire à cette hypothèse permet de découpler le problème général de l'écoulement dans un étage en deux problèmes d'écoulement en grille d'aubes liés par leurs conditions aux limites. Cette hypothèse fondamentale est à la base de notre démarche; la manière de l'appliquer fera l'objet principal des paragraphes suivants.

3.2.2 Principe général de la méthode de résolution

Eu égard aux hypothèses que nous avons posées, la manière qui nous semble être la plus directe de traiter le problème de l'écoulement dans un étage complet de turbine est de considérer séparément les écoulements dans chacune des deux rangées d'aubes constituant cet étage (écoulement absolu dans le stator et relatif dans le rotor) et de les résoudre tous les deux par la même méthode que celle qui a été employée au paragraphe 3.1 pour calculer l'écoulement dans une grille d'aubes rectiligne.

Il importe alors, afin de préserver l'interaction existant entre le stator et le rotor, de déterminer correctement les conditions aux frontières physiques (nature, nombre et valeur numérique) à appliquer au droit des plans d'entrée et de sortie de ces deux rangées d'aubes, en respectant la démarche générale suivante. Nous avons défini au paragraphe 1.3 la méthode numérique de calcul que nous employons comme une méthode où l'on part d'un écoulement fortement perturbé (champ initial des inconnues) par rapport à son état d'équilibre (ou solution du problème) et qu'on laisse évoluer dans le temps, sous certaines conditions aux limites, jusqu'à ce que toutes les ondes de perturbation générées par la première approximation disparaissent du domaine étudié. Il faut donc laisser à ces ondes de perturbation la possibilité de se propager dans toutes les directions, vers l'amont comme vers l'aval : une perturbation présente dans le rotor doit éventuellement pouvoir influencer l'écoulement dans le stator et vice-versa. Autrement dit, ces ondes de perturbation doivent pouvoir "passer" d'une rangée d'aubes à l'autre; ceci ne peut se faire que par l'entremise des conditions aux frontières.

Nous décrirons au paragraphe 3.2.5 comment nous avons construit les conditions aux frontières assurant ce "transfert" de l'information d'une grille à l'autre. La méthode que nous avons employée garantit l'existence de conditions uniformes le

long du pas dans le plan d'entrée du rotor et permet ainsi au problème de satisfaire à la condition d'écoulement stationnaire.

3.2.3 Discretisation du domaine physique de l'écoulement

La discrétisation du domaine physique de l'écoulement est effectuée de façon identique à celle qui a été exposée pour une grille d'aubes (paragraphe 3.1.3). Les éléments bitrapézoïdaux de surface décrits au paragraphe 3.1.3.8 sont conservés. Puisque nous effectuons le calcul de l'étage en considérant deux domaines de calcul distincts, les maillages relatifs au stator et au rotor peuvent être construits de manières totalement indépendantes. Comme dans le cas d'une grille d'aubes, ils sont étendus de la longueur d'une corde ou d'un pas environ, dans la direction approximative de l'écoulement (respectivement absolu et relatif), en amont et en aval de chaque rangée d'aubes afin de pouvoir imposer correctement des conditions naturelles d'entrée et de sortie uniformes le long du pas. Toutes les définitions et considérations des paragraphes 3.1.3.1 et 3.1.3.2 restent donc valables pour l'application présente.

Nous définissons de plus les trois plans particuliers suivants :

- plan 1 : plan d'entrée du stator
(= plan d'entrée de l'étage)
- plan 2 : plan de sortie du stator
(= plan d'entrée du rotor)
- plan 3 : plan de sortie du rotor
(= plan de sortie de l'étage).

Il est bien entendu que l'espace existant réellement entre le stator et le rotor d'un étage de turbine est le plus souvent inférieur à celui que nous obtenons par la construction des maillages de la discrétisation. Il est cependant important

de garder à l'esprit que l'extension de ces domaines numériques en amont et en aval de chaque grille d'aubes résulte du fait que l'on désire considérer des conditions aux limites uniformes le long du pas et que, dans le calcul d'un étage, on ne tient donc pas compte des effets instationnaires; la taille de l'espace physique situé entre le rotor et le stator n'a alors pas une grande importance.

3.2.4 Définition du système d'équations aux dérivées partielles

Après avoir énoncé le principe général à la base de la méthode de résolution, nous allons maintenant définir et adimensionnaliser correctement le système d'équations d'Euler modélisant l'écoulement qui nous est proposé. Dans la limite des hypothèses générales de ce travail, les écoulements dans les grilles d'aubes statorique et rotorique doivent satisfaire aux équations (3.1), (3.2) et (3.3), pour lesquelles u et v sont les composantes de la vitesse absolue et E l'énergie totale absolue dans le cas du stator, tandis que ces mêmes inconnues sont des grandeurs relatives dans le cas du rotor. Ces équations sont adimensionnalisées au moyen des relations (2.4) en utilisant, pour la grille fixe, la corde du profil statorique comme longueur de référence, et les conditions totales absolues (p_{01a} , T_{01a} , ρ_{01a}) régnant en amont de la grille comme grandeurs thermodynamiques de référence, tandis que dans le cas de la grille mobile, la corde du profil rotorique est utilisée comme longueur de référence et les conditions totales relatives (p_{02r} , T_{02r} , ρ_{02r}) régnant en amont de la grille sont utilisées comme grandeurs thermodynamiques de référence.

Ecrites sous forme conservative, ces équations prennent la forme suivante :

Ecoulement dans le stator :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.67)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E_a \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(E_a + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(E_a + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}$$

$$p = \rho T \quad (3.68)$$

$$E_a = \frac{T}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (3.69)$$

$$a = \sqrt{\gamma T} \quad (3.70)$$

Ecoulement dans le rotor.:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.71)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho w_x \\ \rho w_y \\ \rho E_r \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_x \\ \rho w_x^2 + p \\ \rho w_x w_y \\ \rho w_x(E_r + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_y \\ \rho w_x w_y \\ \rho w_y^2 + p \\ \rho w_y(E_r + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}$$

$$p = \rho T \quad (3.72)$$

$$E_r = \frac{T}{\gamma - 1} + \frac{w_x^2 + w_y^2}{2} \quad (3.73)$$

$$a = \sqrt{\gamma T} \quad (3.74)$$

Nous définirons dans la suite du texte, le système d'équations (3.67) comme étant le système complet. Dans le plan de sortie du stator (qui se confond avec le plan d'entrée du rotor), les relations suivantes, exprimant les égalités existant dans les triangles de vitesses sont également applicables (U étant la vitesse circonférentielle de la grille rotorique) :

$$\left. \begin{aligned} u &= w_x \\ v &= w_y + U \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

Une simplification non négligeable permettant de réduire le nombre d'inconnues est à nouveau possible. Pour une géométrie bidimensionnelle telle que nous la considérons ici, nous pouvons, pour l'écoulement dans la grille d'aubes statore, remplacer l'équation de conservation de l'énergie par une équation exprimant que l'enthalpie totale absolue est constante, tandis que pour l'écoulement dans la grille d'aubes rotorique, cette même équation peut être remplacée par une relation exprimant l'uniformité de la rothalpie, définie par la somme $c_p T + \frac{w^2}{2}$.

Ecrites sous forme conservative et adimensionnalisées d'une manière identique à celle qui a été utilisée dans le cas du système complet, ces équations prennent la forme ci-dessous, que nous définirons dans la suite du texte comme étant le système réduit :

Écoulement dans le stator :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.76a)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}$$

$$p = \rho \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (3.77)$$

$$a^2 = \gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (3.78)$$

Ecoulement dans le rotor :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.76b)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho w_x \\ \rho w_y \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_x \\ \rho w_x^2 + p \\ \rho w_x w_y \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_y \\ \rho w_x w_y \\ \rho w_y^2 + p \end{pmatrix}$$

$$p = \rho \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{w_x^2 + w_y^2}{2} \right) \quad (3.79)$$

$$a^2 = \gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{w_x^2 + w_y^2}{2} \right) \quad (3.80)$$

Dans le plan de sortie du stator (ou le plan d'entrée du rotor), les équations (3.75) restent bien entendu valables.

3.2.5 Détermination des conditions aux frontières

Le nombre et la nature des conditions aux frontières physiques à imposer au droit du plan d'entrée de la grille statorique et du plan de sortie de la grille rotorique se déterminent de la même manière que celle exposée au paragraphe 3.1.5.1. Suivant le système d'équations employé (système complet ou système réduit), il faudra fixer respectivement trois conditions (pression totale absolue p_{01a} , température totale absolue T_{01a} et direction de l'écoulement absolu β_{1a}) ou deux conditions (pression totale absolue p_{01a} et direction de l'écoulement ab-

solu β_{1a}) au droit du plan d'entrée de la grille d'aubes statore (c'est-à-dire également de l'étage étudié) si l'écoulement absolu est subsonique en cet endroit; ces conditions sont supposées être uniformes le long du pas. Si l'écoulement est supersonique (mais de composante axiale de vitesse inférieure à la vitesse du son), le nombre de Mach d'entrée est fixé plutôt que la direction de l'écoulement; la condition d'incidence unique est obtenue comme une partie de la solution. La pression statique p_3 , uniforme le long du pas, est imposée au droit du plan de sortie du rotor, ce qui revient à fixer la contrepression de l'étage.

La méthode que nous appliquons consiste à calculer l'écoulement dans l'étage à partir de deux écoulements en grille d'aubes. Il faut donc définir les conditions aux limites physiques à appliquer dans le plan de sortie du stator et dans le plan d'entrée du rotor. Ces conditions ne peuvent bien entendu pas être des données du problème, puisque l'état du fluide entre le stator et le rotor n'est pas connu de prime abord; leur valeur numérique doit être adaptée au fur et à mesure de l'évolution du calcul. Il faut évidemment veiller à imposer au droit de ces deux plans une distribution uniforme de ces conditions dans la direction tangentielle afin de garder au problème une solution stationnaire. Finalement, la façon de calculer ces conditions doit garantir la propagation des ondes de perturbation dans toutes les directions de l'espace dans lequel l'écoulement est étudié.

Nous avons montré à l'aide de la théorie des caractéristiques (paragraphe 3.1.5.1) que, pour autant que la composante axiale de la vitesse soit inférieure à la vitesse du son, une condition aux limites naturelle fournissant une information issue de l'extérieur du domaine de calcul, doit être imposée dans le plan de sortie d'une grille d'aubes (dans le cas présent : le stator) tandis que trois ou deux conditions naturelles (suivant qu'on utilise le système d'équations complet ou réduit), fournissant des informations venant également de l'extérieur

du domaine de calcul, sont fixées dans le plan d'entrée de la grille d'aubes (dans le cas présent : le rotor).

Il faut donc, en résumé, imposer ou calculer l'ensemble suivant des conditions aux limites physiques (les conditions données ci-après sont relatives au système d'équations complet) :

- plan d'entrée du stator :

$$\left. \begin{array}{l} p_{01a} \\ T_{01a} \\ \beta_{1a} \text{ (ou } M_{1a}) \end{array} \right\} \text{ données du problème} \quad (3.81a)$$

- plan de sortie du stator :

$$p_2 \quad \text{à calculer} \quad (3.81b)$$

- plan d'entrée du rotor :

$$\left. \begin{array}{l} p_{02r} \\ T_{02r} \\ \beta_{2r} \text{ (ou } M_{2r}) \end{array} \right\} \text{ à calculer} \quad (3.81c)$$

- plan de sortie du rotor

$$p_3 \quad \text{donnée du problème} \quad (3.81d)$$

Toutes ces conditions présentent une distribution uniforme dans la direction tangentielle. Si le système réduit est employé, la condition faisant intervenir la température totale n'est plus prise en considération.

La détermination de ces conditions est effectuée selon le processus suivant :

(I) Les conditions aux frontières naturelles à l'entrée (p_{01a} , T_{01a} , β_{1a} ou M_{1a}) et à la sortie (p_3) de l'étage étant imposées, on détermine à l'instant ($t = 0$) une première valeur approximative de la pression statique intermédiaire p_2 , comprise entre p_{01a} et p_3 . On peut alors déterminer une première approximation des différentes inconnues de l'écoulement et calculer une première valeur approchée de p_{02r} , T_{02r} et β_{2r} (ou M_{2r}). La mise en oeuvre pratique de ces principes sera décrite un peu plus loin dans le texte. Comme nous l'avons montré auparavant (paragraphe 2.7), la précision avec laquelle cette première approximation est effectuée, n'a pas d'influence sur la vitesse de convergence asymptotique du processus numérique.

(II) Deux calculs de grille peuvent alors être entrepris; dans la grille statorique, on calcule l'écoulement absolu, dont les conditions aux limites naturelles dans les plans d'entrée et de sortie sont p_{01a} , T_{01a} , β_{1a} (ou M_{1a}) et p_2 tandis que dans la grille rotorique, on résout l'écoulement relatif, soumis aux conditions aux frontières physiques p_{02r} , T_{02r} , β_{2r} (ou M_{2r}) et p_3 . Ces calculs sont menés parallèlement de la manière exposée dans la première partie de ce chapitre. Ils sont poursuivis pendant un certain nombre d'étapes temporelles, soit depuis le temps ($t = 0$) jusqu'au temps ($t = t^1$).

(III) Au temps ($t = t^1$), les inconnues de l'écoulement sont donc supposées connues en tous les noeuds du domaine de calcul. Cette connaissance permet de déterminer un nouvel ensemble de valeurs de p_2 , p_{02r} , T_{02r} et β_{2r} (ou M_{2r}). Comme ces informations doivent venir de l'extérieur du domaine de calcul du stator pour la condition p_2 et de l'extérieur du domaine de calcul du rotor pour les conditions p_{02r} , T_{02r} et β_{2r} (ou M_{2r}), nous les obtenons de la manière suivante : p_2 est déterminé à partir d'une moyenne des valeurs des inconnues aux noeuds situés dans le plan d'entrée du rotor tandis que p_{02r} , T_{02r} et β_{2r} (ou M_{2r})

sont obtenus à partir d'une moyenne des inconnues aux noeuds définissant le plan de sortie du stator. Le passage des ondes de perturbation et de l'information d'une grille à l'autre est ainsi assuré. Ce raisonnement est schématisé à la figure 54.

(IV) Ayant déterminé une nouvelle approximation numérique pour chacune des conditions aux frontières, le processus est repris au point (II), et ce jusqu'à stabilisation du calcul.

3.2.6 Mise en oeuvre pratique de la méthode de résolution

3.2.6.1 Choix des conditions initiales

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 3.2.5, une première valeur approchée de la pression statique régnant entre le stator et le rotor doit être déterminée au temps ($t = 0$) du calcul afin de pouvoir construire un champ initial des inconnues nécessaire à l'application de la démarche instationnaire de résolution. Nous avons essayé d'obtenir cette première valeur aussi proche que possible de la solution exacte afin de maintenir à notre méthode de résolution un caractère d'applicabilité industrielle.

Dans les premières versions du programme de calcul, nous nous contentions, comme première approximation de la pression intermédiaire, de la valeur moyenne entre les pressions d'entrée et de sortie de l'étage, ce qui revient à admettre, pour une hypothèse d'écoulement incompressible, un degré de réaction égal à 0.5. Afin d'améliorer un peu cette première approximation de la pression intermédiaire, nous appliquons, au début du calcul, une analyse unidimensionnelle simplifiée de l'écoulement en itérant sur cette pression intermédiaire de manière à obtenir, en négligeant les pertes, l'égalité entre les débits-masse spécifiques ($\rho u_2 = \rho u_3$) au droit des plans de sortie du stator et du rotor. Ces débits-masse spécifiques sont calculés à partir de la pression statique, de l'angle de sortie, fixé en première approximation par la règle du sinus, et des relations caracté-

risant la transformation isentropique qui sont appliquées entre les différentes grandeurs thermodynamiques. Cette démarche permet d'obtenir une bonne approximation de p_2 au prix d'un investissement négligeable en temps de calcul. Au contraire, le temps de calcul total est amélioré (gain de 10 ... 15%). Un exemple de l'amélioration obtenue est donné au tableau 13 pour le cas de l'étage 1 (étage A.C.E.C.- cfr paragraphe 3.2.7).

A partir de la valeur approchée de p_2 et en appliquant les relations (3.75) existant dans les triangles de vitesses lors du passage de la grille statorique à la grille rotorique, un champ initial complet des inconnues est déterminé à partir des mêmes principes que ceux exposés au paragraphe 3.1.6.

3.2.6.2 Nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires

Nous avons montré comment les conditions aux frontières physiques appliquées entre les rangées d'aubes statoriques et rotoriques devaient être adaptées après un certain nombre d'étapes temporelles, afin d'obtenir la solution du problème de l'écoulement dans un étage de turbine. Pour déterminer la fréquence optimale de cette mise à jour, nous avons appliqué le même raisonnement que Smolderen, Couston et McDonald ont utilisé pour leur schéma numérique à viscosité corrigée (Réf. 18). Pour autant que le processus numérique converge, chaque fois qu'une correction est apportée aux valeurs de p_2 , p_{02r} , T_{02r} et β_{2r} (ou M_{2r}), nous nous rapprochons en principe de la solution exacte du problème. Si un trop grand nombre d'itérations est effectué entre deux mises à jour de ces conditions aux frontières, le temps de calcul nécessaire avant d'obtenir la solution convergée va rapidement devenir incompatible avec une utilisation industrielle de cette méthode de calcul. Si, d'autre part, la mise à jour de ces conditions est trop fréquente (n'oublions pas que l'état de l'écoulement au début du

calcul est une grosse perturbation, le plus souvent non physique, de l'état final), les corrections introduites deviennent tellement importantes qu'elles peuvent conduire à l'instabilité numérique. De plus, la vitesse de convergence de la méthode numérique que nous employons est telle qu'une détermination trop fréquente de nouvelles conditions intermédiaires ne se justifie pas du point de vue du temps de calcul. Un optimum doit donc être déterminé entre ces deux cas extrêmes. L'expérience d'autres auteurs (Kreiss, Essers, ...) nous ayant appris qu'une analyse théorique de stabilité faisant intervenir l'influence des conditions aux frontières conduisait très rapidement à des formulations mathématiques lourdes et complexes, nous avons utilisé une méthode purement empirique pour essayer de déterminer cet optimum.

Cette analyse expérimentale nous a conduit à une observation importante : on a tout avantage à ce que le nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques soit un multiple entier du nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes visqueux intervenant dans le schéma numérique à viscosité corrigée que nous employons. Ceci revient à dire qu'il vaut mieux introduire au même moment une correction sur les termes visqueux et sur les conditions aux limites plutôt que de l'introduire à des pas temporels différents : le système converge alors de manière plus régulière entre deux mises à jour successives.

Afin d'illustrer les principes que nous venons d'énoncer, nous avons utilisé la géométrie de l'étage 1 comme exemple d'application. Soient N_v ($= 20$) le nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes de viscosité numérique et N_{v_1} ($= 20, 60$ et 100) le nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires. La figure 55 représente l'évolution de la pression statique intermédiaire adimensionnelle p_2 en fonction du nombre d'étapes temporelles pour ces trois fréquences de mise à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires. On remarquera que pour la fréquence la plus basse ($N_{v_1} = 100$), les oscillations ont l'amplitude la moins importante. Cette évolution plus douce

des conditions aux limites intermédiaires permet une convergence plus rapide des calculs de grille.

Au vu des nombreux résultats obtenus, nous avons fixé de manière générale à $3N_v$ le nombre d'itérations à effectuer entre deux mises à jour des conditions intermédiaires.

3.2.6.3 Amortissement des conditions aux limites physiques intermédiaires

L'allure de l'évolution des valeurs numériques des conditions aux limites intermédiaires au fur et à mesure de l'avancement du calcul montre qu'elles convergent de manière oscillante vers la solution asymptotique. Pour cette raison, nous avons essayé d'amortir un peu cette solution au moyen d'une relation classique de la forme générale suivante :

$$CLPI_{\text{nouveau}} = C_a \cdot CLPI_{\text{ancien}} + (1 - C_a) \cdot CLPI_{\text{nouveau}} \quad (3.82)$$

dans laquelle $CLPI$ désigne une des conditions aux limites physiques intermédiaires et C_a un coefficient d'amortissement compris entre 0 et 1. L'influence de ce facteur d'amortissement est bien montrée à la figure 56 pour laquelle nous avons à nouveau utilisé la géométrie de l'étage 1 comme exemple d'application.

Suite aux nombreux tests numériques effectués dans ce domaine, nous avons décidé d'adopter, de manière générale, une valeur de C_a égale à 0.6 pour les applications ultérieures.

3.2.6.4 Expressions numériques des conditions aux limites physiques intermédiaires

Nous donnerons dans ce paragraphe les équations permettant de calculer les valeurs numériques des conditions aux limites intermédiaires. Nous appellerons ρ_s , ρu_s , ρv_s et ρE_s les valeurs adimensionnelles moyennes des inconnues de base dans le plan de sortie du stator et ρ_r , ρw_{x_r} , ρw_{y_r} et ρE_r les

valeurs adimensionnelles moyennes des inconnues de base dans le plan d'entrée du rotor.

Pour le système réduit, nous obtenons les conditions suivantes à appliquer dans le plan d'entrée du rotor :

$$p = p_s - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{(\rho u_s)^2 + (\rho v_s)^2}{\rho_s}$$

$$p_{02r} = p \left\{ \frac{\frac{p}{\rho_s} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left[\frac{(\rho u_s)^2}{\rho_s^2} + \left(\frac{\rho v_s}{\rho_s} - U \right)^2 \right]}{\frac{p}{\rho_s}} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.83)$$

$$\beta_{2r} = \arctan \left[\frac{\left(\frac{\rho v_s}{\rho_s} - U \right)}{\left(\frac{\rho u_s}{\rho_s} \right)} \right] \quad (3.84)$$

On remarque bien que toutes ces valeurs sont calculées à partir des valeurs des inconnues aux noeuds formant le plan de sortie du stator. Dans ce plan, on peut écrire la relation :

$$\frac{p_2}{p_{02r}} = \rho_r - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{(\rho w_{x_r})^2 + (\rho w_{y_r})^2}{\rho_r} \quad (3.85)$$

Connaissant la valeur de p_{02r} , il est possible de calculer la valeur de la pression statique p_2 . A nouveau l'information qu'elle fournit vient de l'extérieur du domaine de calcul concerné, à savoir le stator.

Pour le système complet, les équations s'écrivent comme suit :

$$p = (\gamma-1) \rho E_s - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\rho u_s)^2 + (\rho v_s)^2}{\rho_s}$$

$$T_{02r} = \frac{p}{\rho_s} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left[\frac{(\rho u_s)^2}{\rho_s^2} + \left[\frac{\rho v_s}{\rho_s} - U \right]^2 \right] \quad (3.86)$$

$$p_{02r} = p \left(\frac{T_{02r}}{p/\rho_s} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.87)$$

$$\beta_{2r} = \arctan \left[\frac{\left[\frac{\rho v_s}{\rho_s} - U \right]}{\left[\frac{\rho u_s}{\rho_s} \right]} \right] \quad (3.88)$$

$$\frac{p_2}{p_{02r}} = (\gamma-1) \rho E_r - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\rho w_{xr})^2 + (\rho w_{yr})^2}{\rho_r} \quad (3.89)$$

3.2.6.5 Influence du choix des conditions aux frontières purement numériques

Le choix des conditions additionnelles purement numériques à appliquer au droit du plan d'entrée du rotor et du plan de sortie du stator, afin de préserver la stabilité numérique du processus de résolution, nous a posé un certain nombre de problèmes.

Nous basant sur les conclusions du paragraphe 3.1.5.2 au sujet de la stabilité d'une série de conditions aux limites numériques, nous avons commencé par utiliser, dans le cas du système réduit, la condition CL1 (égalité des débits massiques entre les deux premiers plans) au droit du plan d'entrée du rotor et les conditions CL2 et CL3 (égalité des composantes axiale et tangentielle de la quantité de mouvement entre les deux

derniers plans) au droit du plan de sortie du stator; si le système complet est utilisé, on ajoute au droit de ce dernier plan, la condition CL4 (égalité des termes d'énergie entre les deux derniers plans). L'application de cet ensemble de conditions, que nous avons reconnu être stable pour un calcul de grille d'aubes, garantit en effet l'obtention immédiate d'une distribution uniforme de toutes les inconnues de base dans la direction tangentielle.

Cet ensemble de conditions aux frontières (conditions physiques + conditions numériques) ne préserve malheureusement pas toujours la stabilité du processus de résolution dans le cas du calcul d'un étage. Afin de garantir cette stabilité, nous avons dû introduire un caractère semi-implicite dans le calcul des conditions aux limites physiques intermédiaires; il est à remarquer à quel point les deux genres de conditions, physiques et numériques, sont liés. Nous allons nous expliquer sur ce point.

La pression statique intermédiaire, condition aux limites pour le calcul de grille du stator, est déterminée à partir des valeurs des inconnues aux noeuds formant le plan d'entrée du rotor (équations (3.85) ou (3.89)). Deux possibilités sont offertes : utiliser ces inconnues soit au temps (t) soit au temps ($t + \Delta t$) (auquel se fait la mise à jour des conditions aux limites intermédiaires). La deuxième possibilité est réalisable si on effectue en premier lieu le calcul de grille du rotor. Le même raisonnement est applicable pour les conditions à appliquer au droit du plan d'entrée du rotor (équations (3.83) et (3.84) ou (3.86), (3.87) et (3.88)). Plusieurs possibilités nous sont donc offertes d'introduire un certain caractère implicite dans le calcul des conditions aux limites, le cas extrême étant, au cours d'un pas temporel, d'itérer sur les conditions aux frontières afin de n'employer que des valeurs au temps ($t + \Delta t$) et de rendre le calcul de ces conditions aux limites purement implicite. Les différentes possibilités ont été envisagées et la stabilité n'a été assurée que pour la combinaison suivante :

- calculer p_{02r} , T_{02r} et β_{2r} (ou M_{2r}) à partir des valeurs des inconnues au temps (t) et aux noeuds formant le plan de sortie du stator;
- calculer p_2 à partir des valeurs des inconnues au temps $(t + \Delta t)$ et aux noeuds formant le plan d'entrée du rotor.

Dans le but de construire un processus numérique de résolution un peu moins contraignant, nous avons alors essayé d'appliquer d'autres conditions aux limites numériques. Une solution stable a été obtenue dans le cas du système complet sans introduire aucun caractère semi-implicite ni aucun artifice pour la combinaison suivante :

- plan_d'entrée_du_stator :
 - ★ condition CL10 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale)
- plan_de_sortie_du_stator :
 - ★ condition CL9 (équation de conservation de la masse)
 - ★ condition CL10 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale)
 - ★ condition CL11 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction tangentielle)
- plan_d'entrée_du_rotor :
 - ★ condition CL10
- plan_de_sortie_du_rotor :
 - ★ condition CL9
 - ★ condition CL10
 - ★ condition CL11

Nous retiendrons dans la suite des applications cette manière de procéder. Dans le cas du système réduit, la condition CL9 n'est pas retenue. Comme ces différentes conditions sont appliquées demi-élément par demi-élément, les distributions des inconnues de base que nous obtenons dans les plans de sortie et

d'entrée ne sont pas nécessairement uniformes dans la direction tangentielle. Pour cette raison, les paramètres utilisés dans les équations (3.83) à (3.89) sont le résultat de moyennes massiques des valeurs des différentes inconnues aux noeuds formant le plan de sortie du stator et le plan d'entrée du rotor.

3.2.7 Description de quelques résultats pratiques Comparaison avec des résultats expérimentaux

Deux géométries d'étages de turbine ont été sélectionnées comme exemples d'application pratique de notre programme de calcul. La première de ces configurations (étage 1) nous a gracieusement été fournie par les Ateliers de Constructions Electriques de Charleroi (Division de Gand) (Réf. 64) dans le cadre de la justification de l'intérêt industriel de notre travail. L'allure des profils statoriques et rotoriques de cet étage est présentée à la figure 57. La deuxième configuration (étage 2) provient d'une des rares publications fournissant quelques résultats de mesure en étage complet (Réf. 65), permettant de vérifier la crédibilité de l'approche que nous avons proposée. L'allure des profils statoriques et rotoriques est présentée à la figure 58 et leurs coordonnées sont données au tableau 14.

Avant d'entamer la description des résultats numériques obtenus, nous commencerons par définir les différents paramètres utilisés pour résoudre numériquement les systèmes d'équations modélisant l'écoulement dans un étage complet de turbine. Ces paramètres peuvent être classés en deux catégories :

- paramètres liés au schéma à viscosité corrigée
(version semi-implicite) :

Nv : nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes visqueux

VC : coefficient numérique de viscosité

CFL : coefficient de sécurité du pas temporel

- paramètres liés au traitement des conditions aux frontières
physiques intermédiaires :

Nv_1 : nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux frontières

C_a : coefficient d'amortissement des conditions aux frontières

En vue de justifier l'intérêt industriel de ce travail, nous avons effectué la mise au point du programme de calcul en nous servant de la géométrie de l'étage 1. Nous avons présenté aux paragraphes 3.2.6.2 et 3.2.6.3 certains résultats partiels de calcul montrant l'évolution de la pression statique intermédiaire en fonction de différents paramètres de la méthode numérique. Avant de présenter d'autres résultats, nous nous attarderons brièvement sur la manière dont la géométrie des aubages statoriques et rotoriques a été discrétisée.

Les domaines physiques de l'écoulement dans le stator et le rotor ont été discrétisés au moyen des éléments bitrapézoïdaux (décrits au paragraphe 3.1.3.8) construits dans deux maillages formés chacun de 71 lignes parallèles à la direction du pas, dont 45 étaient situées entre les bords d'attaque et de fuite de l'aubage considéré, et de 15 pseudo-lignes de courant. Comme pour les calculs d'écoulement en grille d'aubes, on débute le processus numérique dans un maillage grossier (36×8 noeuds de discrétisation) avant de passer au maillage fin.

Les figures 55 et 56 permettent de mieux saisir l'évolution de la valeur numérique adimensionnelle de la pression statique intermédiaire p_2 lorsqu'on effectue le calcul uniquement au moyen du maillage grossier (36×8). Un grand nombre d'itérations a été effectué à dessein afin de vérifier l'évolution temporelle des conditions aux limites physiques intermédiaires. L'expérience numérique que nous avons acquise par de nombreux calculs d'écoulement en étage de turbine montre généralement que lorsque les valeurs des conditions aux limites intermédiaires se sont stabilisées pour le calcul dans le maillage grossier, elles ne varient plus que de 1 ... 2% lorsqu'on passe à la résolution dans un maillage fin. On remarquera, au vu des figures 55 et 56, qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer les 6000 itérations que nous nous étions imposées; un résultat

satisfaisant est déjà obtenu après ... 4000 ...étapes temporelles. Ce nombre d'itérations peut sembler élevé, mais il ne faut pas perdre de vue la difficulté du problème auquel nous sommes confrontés : à savoir un calcul d'écoulement dont on ne connaît a priori pas la valeur des conditions à appliquer sur une des ses frontières.

Les figures 59 et 60 présentent respectivement les distributions de pression statique et de nombre de Mach isentropique (absolu dans le stator et relatif dans le rotor) le long de l'intrados et de l'extrados des aubes du stator et du rotor de l'étage 1. Les calculs ont été effectués à partir du système complet (3.67) et (3.71). Les valeurs des paramètres numériques utilisés sont données ci-dessous pour le maillage grossier et le maillage fin. Le rapport de pression (p_3/p_{01a}) réalisé dans l'étage est de 0.7 et la vitesse de rotation est de 9000 tr/min.

	Maillage grossier (36x8)	Maillage fin (71x15)
Nv	20	20
VC	0.98	0.995
CFL	1.	1.
Nv ₁	60	60
C _a	0.6	0.6

La solution obtenue montre que le régime reste subsonique dans tout le domaine de l'écoulement. D'autre part, les distributions de pression et de vitesse observées sont bien représentatives d'aubages conçus à partir de différents arcs de cercle : la distribution de vitesse le long de l'extrados du stator aux alentours de ($X/C_{ax} = 0.65$) en est un exemple typique.

Les figures 61a et b présentent enfin l'évolution de l'angle absolu de sortie du stator et de l'angle relatif de sortie du rotor. Nous les avons données pour que le lecteur puisse vérifier, comme nous l'avons fait au paragraphe 3.1.8, la qualité du niveau de convergence atteint au moyen de la méthode numérique..

Nous avons également étudié le comportement de cet étage de turbine lorsqu'on fait varier la contrepression. Nous présentons à la figure 62 l'évolution de la pression statique intermédiaire et de l'angle relatif de l'écoulement dans le plan d'entrée du rotor pour six valeurs différentes du rapport p_3/p_{01a} ; la vitesse de rotation du rotor a été maintenue constante, égale à 9000 tr/min. On remarquera que dans la zone $p_3/p_{01a} > 0.6$, de faibles variations dans la pression de sortie de l'étage provoquent des variations importantes d'incidence à l'entrée du rotor. Ce phénomène a été confirmé par les rapports de certains essais effectués aux A.C.E.C. sur ces profils (Réf. 64).

Afin de vérifier la validité des résultats numériques obtenus par notre méthode de calcul, nous l'avons également appliquée à la géométrie de l'étage 2. Cet étage de turbine a été conçu pour être soumis à des écoulements à température élevée. Cependant, grâce aux lois de similitude de la mécanique des fluides, les essais ont pu être réalisés en air et à basse température. Dans cette dernière situation, les conditions nominales de fonctionnement de cet étage de turbine sont les suivantes :

$$\bar{p}_{01} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\bar{T}_{01} = 288.2 \text{ K}$$

$$\bar{p}_3/\bar{p}_{01} = 0.225$$

vitesse de rotation : 8081 tr/min.

Le calcul de l'écoulement a été effectué pour trois valeurs différentes de la contrepression ($p_3 = 0.225$ (condition nominale), 0.358 et 0.462); la vitesse de rotation a été maintenue constante (8081 tr/min).

Les domaines physiques de l'écoulement dans le stator et le rotor, ont été discrétisés au moyen des éléments bitrapézoïdaux (décrits au paragraphe 3.1.3.8) construits dans deux maillages constitués chacun de 67 lignes parallèles à la direction du pas, dont 37 étaient situées entre les bords d'attaque et de fuite, et de 17 pseudo-lignes de courant. Comme nous l'avons déjà mentionné lors des applications en grille d'aubes, on débute le calcul de l'écoulement dans un maillage grossier (34×9 noeuds de discrétisation) avant de passer au maillage fin.

Les figures 63, 64, 65, 66, 67 et 68 donnent les distributions respectives de pression statique et de nombre de Mach isentropique (absolu dans le stator et relatif dans le rotor) le long de l'intrados et de l'extrados des aubes du stator et du rotor de l'étage 2 pour les trois contrepressions mentionnées ci-dessus. Les valeurs des paramètres numériques utilisés sont données ci-dessous pour le maillage grossier et le maillage fin.

	Maillage grossier (34×9)	Maillage fin (67×17)
Nv	20	20
VC	0.98	0.99
CFL	1.	1.
Nv ₁	60	60
C _a	0.6	0.6

Les différents résultats obtenus sont résumés à la figure 69 sous forme de distributions du nombre de Mach isen-

tropique. On remarque le blocage sonique existant dans le stator ainsi que dans le rotor pour les contrepressions égales à 0.225 et 0.358. Lorsque la contrepression de l'étage augmente, en passant de 0.225 à 0.358, l'effet de cette augmentation ne se fait d'abord sentir que dans la partie aval du rotor; l'écoulement dans le stator n'est pratiquement pas influencé. Ceci se remarque également à la figure 70, où sont représentés les triangles de vitesses en aval du stator et du rotor; pour $p_3 = 0.358$, on observe une variation importante par rapport aux résultats obtenus pour les conditions nominales, de l'angle de l'écoulement absolu en aval du rotor, tandis qu'en aval du stator la valeur de cet angle est pratiquement inchangée. Si on augmente encore la contrepression, diminuant ainsi encore plus la charge de l'étage ($p_3 = 0.462$), l'influence de cette variation est ressentie dans le rotor tout entier ainsi que dans la partie aval du stator comme on le voit clairement à la figure 69. A la figure 70, on remarque l'importante variation de l'angle de l'écoulement absolu en aval du rotor ainsi qu'un changement non négligeable de cet angle en aval du stator.

Pour les conditions nominales de fonctionnement, certains résultats de mesure sont présentés à la référence 65. Nous avons d'abord comparé les valeurs calculées des triangles de vitesses avec les valeurs mesurées. Cette comparaison est faite sous forme numérique au tableau 15 et sous forme graphique à la figure 70. On observe généralement une bonne concordance entre les valeurs calculées et celles mesurées sauf peut-être en aval du rotor, ce qui peut résulter, soit d'une mauvaise définition de la contrepression de l'étage (nous n'avons pas directement accès à cette valeur mais avons dû l'interpoler sur une figure), soit éventuellement d'effets tridimensionnels. La comparaison reste néanmoins très acceptable.

Dans un deuxième temps, nous avons comparé les différentes distributions de vitesse le long de l'intrados et de l'extrados du stator pour les conditions nominales de fonctionnement. Nous disposons en effet des valeurs prévues lors

de la conception de ce profil, de celles mesurées lors d'essais en soufflerie ainsi que de celles résultant de l'application de notre méthode de calcul. Ces différents résultats sont comparés à la figure 71 pour laquelle nous avons cette fois utilisé le rapport de la vitesse à la vitesse critique comme paramètre représentatif de l'écoulement afin de présenter des distributions de vitesse compatibles avec celles de la référence 65.

Les figures 72a et b représentent enfin l'évolution de l'angle absolu de sortie du stator et de l'angle relatif de sortie du rotor afin de vérifier, comme nous l'avons fait au paragraphe 3.1.8, la qualité du niveau de convergence atteint au moyen de la méthode numérique, pour le cas où la contrepression p_3 est égale à 0.225 (conditions nominales de fonctionnement). Pour ces mêmes conditions, la figure 73 résume l'évolution de la pression statique intermédiaire. Des résultats analogues sont obtenus pour les deux autres applications numériques.

Nous terminerons ce paragraphe par quelques considérations au sujet des temps de calcul nécessaires avant de voir converger ce problème d'écoulement en étage. Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur DEC VAX 11/780 de l'Institut von Karman. Lorsque le système à enthalpie totale constante (3.76 a et b) est utilisé, le temps de calcul est de $0.9 \cdot 10^{-3}$ s par noeud et par pas temporel. Si nous résolvons également l'équation de conservation de l'énergie (3.67 et 3.71), ce temps de calcul s'élève à $2.25 \cdot 10^{-3}$ s par noeud et par pas temporel. Mentionnons cependant que cette dernière version du programme est prévue pour la résolution d'écoulements quasi-tridimensionnels. Ces écoulements, ainsi que l'approche utilisée pour les résoudre, seront décrits au paragraphe 3.3. Ajoutons également que nous disposons d'une capacité de 131 K-octets en mémoire centrale d'ordinateur. Ce paramètre influence le temps de calcul de manière non négligeable en ce sens que, lorsque l'exécution des programmes nécessite un espace plus important en mémoire centrale, par exemple lors de la résolution de l'écoulement

ment dans un maillage fin (650 ... 800 K-octets peuvent être requis), le temps de calcul est artificiellement augmenté par suite des nombreuses écritures et lectures intermédiaires sur disque.

Le nombre d'itérations à effectuer est fonction du problème à résoudre : nous ne pouvons pas, de manière générale, fixer un nombre d'étapes temporelles suffisant pour assurer la convergence de chaque application numérique. C'est pour cette raison que les programmes de calcul possèdent l'option suivante : tous les paramètres, tant géométriques que cinématiques et thermodynamiques sont conservés après une exécution du programme, ce qui permet, si l'utilisateur le juge nécessaire, d'éventuellement poursuivre la démarche numérique si le résultat n'a pas suffisamment convergé. Les différents résultats que nous avons présentés permettant, au vu des temps "élémentaires" cités ci-dessus, de se faire une idée de l'effort de calcul demandé en fonction de la précision finale requise.

3.3 ÉCOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL

3.3.1 Introduction - Hypothèses de travail

En posant les hypothèses à la base des calculs d'écoulements bidimensionnels en grille d'aubes ou en étage de turbine, nous avons admis que l'épaisseur des tubes de courant devait être constante dans la géométrie considérée. Ceci est loin d'être vérifié lorsque les machines sont quelque peu chargées (Réf. 31, 66). Afin d'améliorer un peu la modélisation de l'écoulement réel, nous allons introduire ce nouveau paramètre qu'est la variation axiale de l'épaisseur du tube de courant. Nous qualifions ces écoulements de quasi-tridimensionnels car, s'ils tiennent bien compte d'effets géométriques tridimensionnels, il ne considèrent que les composantes de vitesse dans les directions tangentielle et axiale; la composante radiale, ainsi que tous les gradients radiaux restant nuls, le calcul proprement dit est bidimensionnel.

Parmi les nombreuses contraintes aérodynamiques imposées lors de la conception d'une turbine ou d'un compresseur, il en est deux que nous pouvons introduire dans le calcul théorique au moyen de cette approche quasi-tridimensionnelle : le contrôle de la vitesse et la réduction des effets secondaires.

Dans le cas des machines où les phénomènes de compressibilité jouent un rôle important, le dessin d'un compresseur ou d'une turbine est fortement tributaire d'une convergence ou d'une divergence du canal dans lequel se produit l'écoulement. Ce paramètre permet de maintenir le niveau de la vitesse axiale à une valeur acceptable pour la charge de l'aubage. La variation de la section de passage entre l'entrée et la sortie d'une machine devient donc un paramètre important lors de sa conception. Dès lors, aussi bien dans les essais expérimentaux en grille d'aubes que dans les calculs théoriques, il est important de tenir compte de la variation de la section du tube de courant entre l'entrée et la sortie de la machine étudiée. Ce paramètre, appelé AVDR (axial velocity density ratio), est défini de la manière suivante :

$$AVDR = \frac{\rho_2 u_2}{\rho_1 u_1} \quad (3.90)$$

où les indices 1 et 2 représentent respectivement les plans d'entrée et de sortie de la machine. Il représente un degré de liberté supplémentaire, au même titre que l'incidence ou le nombre de Mach et est utilisé de manière systématique dans la conception d'une machine. D'autre part, l'utilisation de parois contournées afin de limiter les effets secondaires trouve de nombreuses applications dans les turbines à gaz et à vapeur (Réf. 66) : elle permet de réduire les gradients de pression transversal et radial, ce qui limite le transport des couches limites et diminue donc le niveau des pertes.

L'importance de ces écoulements quasi-tridimensionnels est donc indéniable, tant au point de vue de la conception

que de l'analyse d'une aube. Ce paragraphe présente une démarche permettant de résoudre ces écoulements de manière relativement rapide, sans passer par un calcul tridimensionnel complet. L'hypothèse de base reste cependant le fait d'admettre que ces écoulements se développent le long de surfaces axisymétriques.

3.3.2 Définition du système d'équations aux dérivées partielles

Le système d'équations (3.1) doit être modifié si l'on désire calculer un écoulement quasi-tridimensionnel. Un terme supplémentaire, provenant des forces de pression agissant sur les parois du tube de courant apparaît dans l'équation exprimant la conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale; les contributions dans la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement s'équilibrent mutuellement (Fig. 74). On tient également compte, dans le calcul des différents termes de flux, de la variable Δr représentant la hauteur locale du tube de courant. Insistons cependant sur le fait que la composante de vitesse dans la direction r est nulle : il n'y a aucun transport, mis à part un transport de pression statique, au travers de la paroi du tube de courant.

L'équation (3.43), résultant de l'intégration sur le "volume" de la relation (3.1), devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial S} (\rho u n_x + \rho v n_y) \Delta r d\ell = 0 \quad (3.91a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{\Delta V} \left[\int_{\partial S} \left[(\rho u^2 + p) n_x + \rho u v n_y \right] \Delta r d\ell + 2 \int_{S_c} p n_x dS \right] = 0 \quad (3.91b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial S} \left[\rho u v n_x + (\rho v^2 + p) n_y \right] \Delta r d\ell = 0 \quad (3.91c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial S} \left[\rho u \left(E + \frac{p}{\rho} \right) n_x + \rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) n_y \right] \Delta r d\ell = 0 \quad (3.91d)$$

où ΔV est le "volume" d'un élément de contrôle, ∂S la surface latérale de cet élément et S_c la surface supérieure (et inférieure) de cet élément. Notons que l'équation de conservation de l'énergie (3.91d) peut éventuellement être remplacée par une équation exprimant l'uniformité de l'enthalpie totale (absolue ou relative) pour autant que l'on ne soit intéressé que par la solution asymptotique du problème et par un écoulement à rayon constant.

3.3.3 Mise en oeuvre pratique de la discrétisation

Le domaine physique de l'écoulement est discrétisé au moyen des éléments bitrapézoïdaux décrits au paragraphe 3.1.3.8 qui définissent ce que l'on pourrait appeler une surface inter-aubes moyenne et auxquels on superpose une épaisseur de tube de courant. Nous obtenons ainsi des "volumes" de contrôle tels que celui de la figure 75, où nous avons représenté, en perspective, la position des différents noeuds intervenant dans le calcul des inconnues de l'écoulement à l'intérieur de l'un de ces volumes élémentaires.

Les équations (3.91a, b, c et d) sont discrétisées au moyen de la version semi-implicite du schéma à viscosité corrigée. Les différents cas décrits au paragraphe 3.1.4 restent bien entendu valables pour l'application présente. La seule modification provient du calcul des différentes faces que nous avons définies en (3.46) : il importe de tenir compte dans ce calcul de l'épaisseur locale Δr du tube de courant. Il en va de même pour le calcul du "volume" de l'élément de contrôle. A titre d'exemple, l'équation (3.48) devient :

$$S = \left[\left\{ (2\Delta r_{i-1} + \Delta r_i) \Delta y_{i-1} + (2\Delta r_i + \Delta r_{i-1}) \Delta y_i \right\} \Delta x x_i + \right. \\ \left. \left\{ (2\Delta r_i + \Delta r_{i+1}) \Delta y_i + (2\Delta r_{i+1} + \Delta r_i) \Delta y_{i+1} \right\} \Delta x x_{i+1} \right] / 6 \quad (3.92)$$

Les paramètres géométriques utilisés sont définis à la figure 75.

Le nombre et la nature des conditions physiques et numériques à appliquer le long des différentes frontières du domaine numérique de l'écoulement se déterminent selon les principes exposés au paragraphe 3.1.5. La démarche effectuée et les résultats obtenus sont intégralement transposables à l'application présente. Il en va de même pour le calcul du pas temporel limite de stabilité.

3.3.4 Description de quelques résultats pratiques- Comparaison avec des résultats expérimentaux et ceux obtenus par d'autres méthodes numériques

Quelques applications numériques ont été effectuées dans le cas d'une aube statorique de turbine à gaz transsonique (Fig. 76a et b). Les coordonnées du profil (Réf. 19) sont données aux tableaux 16 et 17. Le domaine physique de l'écoulement est discrétisé au moyen d'un maillage formé par 75 lignes parallèles à la direction du pas, dont 53 sont situées entre les plans des bords d'attaque et de fuite, et 21 pseudo-lignes de courant. On commence le calcul avec un réseau grossier (38×11 noeuds de discrétisation) avant de passer au maillage fin (75×21 noeuds).

Aux figures 77 et 78 sont représentées les distributions du nombre de Mach isentropique obtenues le long de l'intrados et de l'extrados de l'aubage par des mesures en soufflerie, l'application du programme quasi-tridimensionnel de calcul de Couston et enfin notre méthode. Pour un nombre de Mach isentropique de sortie égal à 0.73, les différentes courbes de la figure 77 donnent une idée de la bonne qualité des résultats obtenus au moyen de notre programme de calcul. On remarque toutefois la présence d'oscillations dans la distribution de vitesse le long de la première partie de l'intrados; nous avons montré au paragraphe 3.1.8 que ces oscillations étaient pratiquement inévitables lors du calcul d'écoulements à basse vitesse ($M = .1, \dots, .15$). Pour l'exemple relatif au nombre de Mach isentropique de sortie égal à 0.9 (Fig. 78), on observe, dans

le calcul, un pic de vitesse qui atteint un nombre de Mach local de l'ordre de 1.2 aux environs de 80% de la corde. Ce pic de vitesse est suivi d'une décélération brutale jusqu'à des valeurs subsoniques au travers d'un choc droit. Or, d'après les résultats expérimentaux (Réf. 19), ce pic n'existe pas. La décélération au travers de ce choc se caractérise par une valeur du rapport M_-/M_+ de l'ordre de 0.7 ce qui est inférieur au critère de séparation que l'on considère généralement, soit $M_-/M_+ \cong 0.78$ (Réf. 19). Nous sommes donc en droit de nous attendre à observer un décollement de la couche limite dans l'écoulement réel. L'existence de ce décollement a été mise en évidence expérimentalement (Réf. 19) et permet donc d'expliquer les écarts des valeurs mesurées avec le calcul théorique, essentiellement non visqueux. Il est également important de garder à l'esprit que le calcul tridimensionnel ne tient pas compte de l'existence possible de vitesses et de transferts radiaux, influençant aussi la qualité de la comparaison.

Dans le but de démontrer clairement, au moyen d'un calcul quasi-tridimensionnel, l'influence de la présence de parois contournées sur le comportement de l'écoulement, nous avons effectué la comparaison suivante : nous avons résolu d'une part l'écoulement purement bidimensionnel, présentant donc une épaisseur constante du tube de courant entre les plans d'entrée et de sortie de la grille d'aubes, et d'autre part l'écoulement quasi-tridimensionnel présentant la variation de l'épaisseur du tube de courant définie au tableau 17 et à la figure 76b. La comparaison entre les distributions du nombre de Mach isentropique, calculées le long de la projection axiale de la corde, est effectuée à la figure 79a. On remarque de quelle manière la présence de parois contournées modifie complètement la charge de l'aubage en diminuant notamment le gradient de vitesse transversal. Nous avons indiqué à la figure 79a l'importance et la position relative de la valeur maximale de ce gradient; dans le cas de la présence de parois contournées, il est moins important et déplacé vers l'aval tandis que la distribution de vitesse le long de l'aubage évolue de façon plus régulière que dans le cas de parois parallèles. Puisque la charge de l'aubage

est modifiée, la déflexion de l'écoulement doit également varier. Cette variation est représentée à la figure 79b où l'on compte, suivant la valeur du nombre de Mach isentropique de sortie, des différences de 2.5 à 3 degrés entre les valeurs de l'angle aérodynamique de sortie obtenues pour chacune des deux géométries.

Au vu de ces deux dernières figures, la raison d'être d'un calcul quasi-tridimensionnel ne fait, à notre avis, plus de doute. Cette démarche permet de prendre en compte un effet géométrique tridimensionnel tel que la variation axiale de la hauteur de l'aubage et d'obtenir; de manière beaucoup plus rapide que par un calcul tridimensionnel complet, des informations au sujet de l'influence de ce paramètre sur les caractéristiques aérodynamiques de la grille d'aubes (distribution de vitesse, angle de sortie, ...). Couplée à un calcul d'écoulement méridien, pouvant même se réduire à un simple calcul d'équilibre radial, cette approche quasi-tridimensionnelle est utilisée de façon systématique pour la conception de géométries nouvelles de turbomachines.

3.3.5 Ecoulement quasi-tridimensionnel en étage de turbine

Puisque nous avons développé un programme de calcul permettant le calcul d'un écoulement quasi-tridimensionnel en grille d'aubes, nous pouvons, en appliquant les principes généraux énoncés précédemment, compléter notre démarche par la mise au point d'un programme de calcul permettant d'étudier l'écoulement quasi-tridimensionnel dans un étage de turbine. Aucun concept nouveau n'intervient dans cette application; toutes les conclusions tirées au sujet de la discrétisation, des conditions aux limites et de leur traitement, des critères de stabilité, etc., restent valables.

En guise d'exemple numérique, nous avons choisi la géométrie de l'étage 1 pour laquelle une très légère convergence du canal est observée dans la grille statorique. Les différences observées par rapport aux résultats obtenus précédemment (Fig. 59 et 60) sont minimales et ne justifient pas une figure particulière. Les temps de calcul nécessaires ont été mentionnés au paragraphe 3.2.7.

CHAPITRE 4 ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL

4.1 ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL EN GRILLE D'AUBES ANNULAIRE

4.1.1 Introduction

Après avoir étudié de façon approfondie, tant du point de vue théorique que du point de vue pratique, les écoulements unidimensionnels en tuyère convergente-divergente et les écoulements bidimensionnels et quasi-tridimensionnels en grille d'aubes ainsi qu'en étage complet de turbine (ensemble stator+rotor), nous pouvons maintenant aborder l'étape finale de notre travail de recherche : le calcul aérodynamique tridimensionnel de l'écoulement dans un étage de turbine.

Nous avons montré au début de ce travail la nécessité de développer des programmes de calcul tridimensionnel d'écoulement en turbomachine. Bien que la capacité requise en mémoire d'ordinateur et le temps de calcul total nécessaire restent fort importants, ne permettant pas encore une utilisation intensive de cette méthode de calcul, cette démarche peut être considérée comme la phase finale de la mise au point aérodynamique d'un profil d'aube ou d'un étage de turbomachine. La conception et l'optimisation des différentes sections des profils sont réalisées au moyen de méthodes bidimensionnelles relativement rapides, telles que celles que nous avons développées au chapitre 3; la vérification finale est effectuée grâce à l'approche tridimensionnelle. Au vu des résultats obtenus, la géométrie de certaines sections est éventuellement corrigée puis réoptimisée au moyen de méthodes bidimensionnelles avant de refaire une vérification globale au moyen du calcul tridimensionnel.

Dans les chapitres précédents, nous avons traité les différents aspects des problèmes liés à l'application pratique de la méthode numérique de résolution. Les conclusions que

nous avons tirées de cette étude, tant au point de vue de la mise en oeuvre de la méthode des volumes finis que du choix des conditions aux limites physiques et numériques ou d'un critère de stabilité, permettent d'espérer raisonnablement que l'extension à une géométrie tridimensionnelle ne posera plus que des difficultés nouvelles propres au caractère tridimensionnel du problème proposé. L'écoulement est étudié dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) afin de nous rapprocher le plus possible de la situation existant dans une machine réelle. De plus, et contrairement aux applications bidimensionnelles, nous devons maintenant tenir compte dans les équations du mouvement de la présence des forces centrifuge et de Coriolis.

4.1.2 Définition du système d'équations aux dérivées partielles

Le système d'équations aux dérivées partielles modélisant l'écoulement que nous désirons étudier par une méthode dépendante du temps et une approche par volumes finis, est le système d'équations d'Euler écrit sous forme instationnaire. Comme nous l'avons montré au chapitre 1, une formulation conservative des équations doit être utilisée afin d'assurer une capture correcte des chocs. Exprimées dans un système d'axes relatif (c'est-à-dire immobile par rapport à la grille d'aubes étudiée), les équations d'Euler (1.7) s'écrivent de la manière suivante lorsqu'on tient compte de l'action des forces centrifuge et de Coriolis :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (4.1a)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho \vec{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) = \underbrace{-2\rho \vec{\Omega} \times \vec{W}}_{\text{(Coriolis)}} + \underbrace{\rho \Omega^2 r \vec{1}_r}_{\text{(Centrifuge)}} - \vec{\nabla} p \quad (4.1b)$$

Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \rho E_r}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho H_r \vec{W}) = 0 \quad (4.1c)$$

Ces équations sont adimensionnalisées d'une manière analogue à celle utilisée au paragraphe 3.1.2; on admet également que toutes les valeurs de référence sont définies pour une valeur fixée du rayon que nous appellerons rayon de référence. Les différentes inconnues des équations (4.1a, b et c) sont définies de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} \vec{W} &: \text{vitesse relative} \\ E_r &: \text{énergie totale relative } (\bar{E}_r = c_v \bar{T} + \frac{\bar{W}^2}{2} - \frac{\bar{\Omega}^2 \bar{r}^2}{2}) \\ H_r &: \text{enthalpie totale relative (rothalpie)} \\ &(\bar{H}_r = \bar{E}_r + \frac{\bar{p}}{\rho}) \\ \vec{\Omega} &: \text{vitesse angulaire du système d'axes de} \\ &\text{coordonnées } (\Omega = |\vec{\Omega}| = \frac{2\pi N r}{60}) \\ p &= \rho T \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Si on exprime les équations du système (4.1) dans un système relatif d'axes de coordonnées cylindriques (r, θ , z) correspondant à la géométrie annulaire de la grille d'aubes qu'on désire étudier, on obtient les cinq lois de conservation suivantes :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) = 0 \quad (4.3a)$$

Conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho w_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w_r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_r w_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_r w_z) - \frac{\hat{p} w_\theta^2}{r} \\ - \rho r \Omega^2 - 2 \rho \Omega w_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r p) - \frac{p}{r} = 0 \end{aligned} \quad (4.3b)$$

Conservation de la quantité de mouvement dans la direction tangentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho w_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w_r w_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_\theta w_z) \\ + \frac{\rho w_r w_\theta}{r} + 2 \rho \Omega w_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (4.3c)$$

Conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho w_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w_r w_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta w_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (4.3d)$$

Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w_r H_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta H_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z H_r) = 0 \end{aligned} \quad (4.3e)$$

Afin de pouvoir appliquer la méthode des volumes finis selon la démarche que nous avons décrite au paragraphe 1.3.2, il faut écrire l'ensemble des dérivées spatiales des équations (4.3a,b,c,d,e) sous forme de divergence. En utilisant un système de coordonnées cylindriques, nous obtenons l'expression suivante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\sigma) + b(\sigma) = 0 \quad (4.4)$$

$$\vec{F}(\sigma) = f(\sigma) \vec{1}_r + g(\sigma) \vec{1}_\theta + h(\sigma) \vec{1}_z$$

Le développement de l'équation (4.4) restitue bien le système d'équations (4.3). Ce dernier est synthétisé de la manière suivante :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{f}(\vec{\sigma})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}(\vec{\sigma})) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}(\vec{\sigma})) + \vec{b}(\sigma) = 0 \quad (4.5)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho w_r \\ \rho w_\theta \\ \rho w_z \\ \rho E_r \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_r \\ \rho w_r^2 + p \\ \rho w_r w_\theta \\ \rho w_r w_z \\ \rho w_r H_r \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_\theta \\ \rho w_r w_\theta \\ \rho w_\theta^2 + p \\ \rho w_\theta w_z \\ \rho w_\theta H_r \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho w_z \\ \rho w_r w_z \\ \rho w_\theta w_z \\ \rho w_z^2 + p \\ \rho w_z H_r \end{pmatrix} \quad \vec{b}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho w_\theta^2}{r} - r \rho \Omega^2 - 2 \rho \Omega w_\theta - \frac{p}{r} \\ \frac{\rho w_r w_\theta}{r} + 2 \rho \Omega w_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une deuxième possibilité est de ne considérer que les vitesses absolues, même si les aubages sont animés d'une vitesse de rotation, mais en exprimant les équations dans un système d'axes relatif à la grille d'aubes étudiée. Cette manière de travailler peut se justifier par le fait de vouloir résoudre l'écoulement absolu dans un étage complet (stator+rotor) de

turbine au lieu de résoudre l'écoulement absolu dans le stator et l'écoulement relatif dans le rotor de l'étage. Le système (4.5) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\vec{r} \vec{f}(\vec{\sigma})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}(\vec{\sigma})) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}(\vec{\sigma})) + \vec{b}(\vec{\sigma}) = 0 \quad (4.6)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V_r \\ \rho V_\theta \\ \rho V_z \\ \rho E_a \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_r \\ \rho V_r^2 + p \\ \rho V_r V_\theta \\ \rho V_r V_z \\ V_r (\rho E_a + p) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho (V_\theta - \Omega r) \\ \rho V_r (V_\theta - \Omega r) \\ \rho V_\theta (V_\theta - \Omega r) + p \\ \rho V_z (V_\theta - \Omega r) \\ (V_\theta - \Omega r) (\rho E_a + p) \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_z \\ \rho V_r V_z \\ \rho V_z V_\theta \\ \rho V_z^2 + p \\ V_z (\rho E_a + p) \end{pmatrix} \quad \vec{b}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho V_\theta^2}{r} - \frac{p}{r} \\ \frac{\rho V_r V_\theta}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} E_a &= \text{énergie totale absolue} & (\bar{E}_a = c_v \bar{T} + \frac{\bar{V}^2}{2}) \\ p &= \rho T \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

En généralisant les principes énoncés au paragraphe 3.1.2, on peut montrer que les systèmes (4.5) et (4.6) sont bien de nature hyperbolique par rapport à la variable temporelle quel que soit le régime de l'écoulement. Toutes les conditions sont donc réunies pour résoudre les systèmes (4.5) ou (4.6) par une méthode dépendante du temps et une approche par volumes finis.

4.1.3 Discrétisation du domaine physique de l'écoulement

4.1.3.1 Description du domaine physique de l'écoulement

Le domaine physique dans lequel nous désirons étudier l'écoulement est représenté à la figure 80. Il est constitué du canal formé par le passage entre deux aubes adjacentes et est étendu en amont et en aval de celui-ci de la longueur d'une dimension caractéristique de l'aubage (corde ou corde axiale) pour les raisons que nous avons déjà exposées au paragraphe 3.1.3.1 et qui concernent la définition de conditions aux limites physiques (naturelles) uniformes dans la direction tangentielle au droit des plans d'entrée et de sortie du canal étudié. La frontière ABCD suit la géométrie du carter de la machine ou de la grille d'aubes étudiée (Fig. 80a) tandis que la frontière HGFE suit le tracé de son moyeu. Ces deux frontières sont bien entendu considérées comme des parois solides le long desquelles une condition d'imperméabilité doit être imposée. Nous convenons de considérer que les plans d'entrée AH et de sortie DE soient construits perpendiculairement à la direction axiale. Dans le plan inter-aubes développé d'une section de l'aubage étudié (Fig. 80b), toutes les définitions restent identiques à celles que nous avons établies pour les problèmes d'écoulement dans une géométrie bidimensionnelle. Les frontières KL, MN, RQ et PO sont des frontières périodiques tandis que les frontières LM et PQ sont des parois solides. Les limites KR et NO sont respectivement les plans d'entrée et de sortie, construits parallèlement à la direction tangentielle pour une simple raison de périodicité géométrique. Les conventions d'angles et de signes sont également semblables à celles établies pour les problèmes d'écoulement dans une géométrie bidimensionnelle.

4.1.3.2 Description du domaine numérique de l'écoulement

Le domaine numérique, dans lequel on applique le processus de résolution, est décrit à la figure 81. Dans le plan inter-aubes (Fig. 81b), un ensemble de pseudo-lignes de courant et de lignes parallèles à la direction du pas est construit d'une manière analogue à celle qui a été présentée au paragraphe 3.1.3.2 pour les applications bidimensionnelles. L'écartement entre les pseudo-lignes de courant est uniforme dans la direction tangentielle tandis que l'espacement entre les lignes parallèles à la direction du pas est variable, fonction de la résolution que l'on désire obtenir en un endroit donné ainsi que des gradients de vitesse que l'on s'attend à y voir apparaître.

La discrétisation dans le plan (r,z) est présentée à la figure 81a. Un ensemble de pseudo-lignes de courant est construit pour différentes valeurs intermédiaires du rayon. Si l'utilisateur est intéressé par le calcul d'écoulements secondaires, il concentrera la plus grande partie de ces pseudo-lignes de courant près du carter et du moyeu. Dans le cas contraire, une distribution uniforme est généralement admise. Dans la direction axiale, le maillage est complété par une série de lignes que nous appellerons quasi-radiales dont la position est étroitement liée à la discrétisation effectuée dans le plan inter-aubes. Remarquons que les bords d'attaque et de fuite de l'aubage sont confondus avec deux quasi-radiales et que seuls les plans d'entrée et de sortie sont nécessairement de vraies lignes radiales.

Afin de pouvoir appliquer la méthode des volumes finis, décrite de façon générale au chapitre 1, l'ensemble des volumes de contrôle doit être défini dans le maillage tridimensionnel que nous venons de construire.

4.1.3.3 Description des volumes de contrôle

C'est sur la base des résultats obtenus lorsque nous avons effectué les analyses de consistance de différentes discrétisations spatiales d'un domaine bidimensionnel, que nous avons choisi la forme des volumes élémentaires à utiliser pour résoudre des problèmes d'écoulements tridimensionnels. Le volume de contrôle que nous utilisons découle directement de l'élément bitrapézoïdal décrit au paragraphe 3.1.3.5. Il est formé de deux polyèdres plus ou moins réguliers dont les différentes faces sont définies au moyen des lignes du maillage décrit dans le paragraphe précédent. Afin de simplifier le travail de programmation déjà fort lourd et de limiter au maximum le temps de calcul, nous avons choisi la position des noeuds de la discrétisation telle qu'elle est décrite aux figures 81a et 81b. Les valeurs des inconnues le long des différentes frontières imperméables et périodiques sont donc obtenues par extrapolation linéaire ou parabolique des valeurs correspondantes obtenues à l'intérieur du canal. Une démarche ultérieure pourrait être la construction de demi-éléments le long des différentes parois, d'une manière semblable à celle utilisée au paragraphe 3.1.3.8 pour les écoulements bidimensionnels. Cette modification n'implique aucun changement fondamental dans le processus numérique de base mais alourdit le travail de programmation ainsi que le temps de calcul.

Les différentes vues ou projections d'un volume de contrôle ainsi que la position des noeuds de la discrétisation intervenant dans le calcul des valeurs des inconnues au noeud situé au centre de ce volume élémentaire sont présentées aux figures 82a, b et c. Les valeurs des inconnues au noeud d'indices (i, k, ℓ) sont calculées en fonction de leurs valeurs correspondantes aux noeuds d'indices $(i+1, k, \ell)$, $(i-1, k, \ell)$, $(i, k+1, \ell)$, $(i, k-1, \ell)$, $(i, k, \ell+1)$ et $(i, k, \ell-1)$, les indices i , k et ℓ désignant respectivement les directions axiale (z), tangentielle (θ) et radiale (r). Le volume ayant ces six noeuds pour sommets, forme, à l'instant (t) , le domaine de dépendance numérique du noeud d'indices (i, k, ℓ) au temps $(t+\Delta t)$.

Au vu des figures 82a, b et c, nous pouvons définir trois catégories de faces qui délimitent le volume de contrôle:

- les faces avant (AV) et arrière (AR) (Fig. 82a)
- les faces supérieure (SUP) et inférieure (INF)
(Fig. 82a)
- les faces latérales gauche (LAT_G) et droite (LAT_D)
(Fig. 82b)

La face supérieure (SUP) et la face inférieure (INF) de l'élément sont formées de portions de surfaces coniques de révolution. Il en va de même des faces avant (AV) et arrière (AR). Au contraire, les faces latérales (LAT_G) et (LAT_D) sont absolument quelconques; les quatre points définissant une demi-surface latérale ne sont même pas nécessairement situés dans un même plan.

Afin de pouvoir calculer pratiquement les valeurs des flux convectifs des différentes inconnues au travers du volume élémentaire, nous admettons que les valeurs des différents termes de transport sont uniformes sur chaque face de l'élément de volume considéré. Ces termes de flux sont calculés de la manière suivante (Fig. 82) :

$$\begin{aligned}
 & \text{- face (AV) : } \vec{f}_{i-1,k,\ell} \\
 & \text{- face (AR) : } \vec{f}_{i+1,k,\ell} \\
 & \text{- face (LAT}_G\text{) : } \frac{1}{2} (\vec{f}_{i,k,\ell} + \vec{f}_{i,k-1,\ell}) \\
 & \text{- face (LAT}_D\text{) : } \frac{1}{2} (\vec{f}_{i,k,\ell} + \vec{f}_{i,k+1,\ell}) \\
 & \text{- face (SUP) : } \vec{f}_{i,k,\ell} + \frac{r_A - r_{i,k,\ell}}{r_{i,k,\ell+1} - r_{i,k,\ell}} (\vec{f}_{i,k,\ell+1} - \vec{f}_{i,k,\ell}) \\
 & \text{- face (INF) : } \vec{f}_{i,k,\ell} - \frac{r_{i,k,\ell} - r_B}{r_{i,k,\ell} - r_{i,k,\ell-1}} (\vec{f}_{i,k,\ell} - \vec{f}_{i,k,\ell-1})
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \text{- face (AV) : } \vec{f}_{i-1,k,\ell} \\ & \text{- face (AR) : } \vec{f}_{i+1,k,\ell} \\ & \text{- face (LAT}_G\text{) : } \frac{1}{2} (\vec{f}_{i,k,\ell} + \vec{f}_{i,k-1,\ell}) \\ & \text{- face (LAT}_D\text{) : } \frac{1}{2} (\vec{f}_{i,k,\ell} + \vec{f}_{i,k+1,\ell}) \end{aligned}} \right\} (4.8)$$

Nous n'avons repris ici que la seule expression de la composante $\vec{f}(\vec{\sigma})$ de (4.5) ou (4.6); des expressions semblables sont obtenues pour les composantes $\vec{g}(\vec{\sigma})$ et $\vec{h}(\vec{\sigma})$.

4.1.4 Description du schéma numérique à viscosité corrigée

4.1.4.1 Discrétisation des termes spatiaux

Considérons, dans le système d'axes (r, θ, z) un petit élément de volume V plus ou moins régulier, de surface extérieure S , sur lequel nous allons intégrer les termes spatiaux de l'équation (4.5) ou (4.6). Cette intégration conduit à la relation suivante :

$$T.S. = \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\vec{f}) dV + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}) dV + \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}) dV \quad (4.9)$$

dans laquelle T.S. désigne l'intégrale des termes spatiaux sur le volume. Le volume dV est exprimé sous la forme suivante :

$$dV = dr \, r d\theta \, dz \quad (4.10)$$

En substituant la valeur dV dans (4.9), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T.S. = & \iiint_V \frac{\partial}{\partial r} (r\vec{f}) dr d\theta dz + \iiint_V \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}) dr d\theta dz \\ & + \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}) r d\theta dr dz \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si nous appelons $\vec{n}$ ($= n_r \vec{i}_r + n_\theta \vec{i}_\theta + n_z \vec{i}_z$) (Fig. 83) la normale sortante à la frontière S de V , et si nous appliquons le théorème de la divergence à l'équation (4.11), nous obtenons la relation suivante :

$$T.S. = \iiint_S \vec{f} n_r r d\theta dz + \iiint_S \vec{g} n_\theta dr dz + \iiint_S \vec{h} n_z r d\theta dr \quad (4.12)$$

Dans le cas qui nous occupe, puisque les volumes élémentaires sont constitués par des polyèdres plus ou moins réguliers, cette équation peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$T.S. = \sum_{m=1}^6 \iint_{S_m} \vec{f} n_r dS + \sum_{m=1}^6 \iint_{S_m} \vec{g} n_\theta dS + \sum_{m=1}^6 \iint_{S_m} \vec{h} n_z dS \quad (4.13)$$

Dans cette expression, les surfaces S_m ($m=1,6$) représentent les six faces que nous avons définies précédemment :

$$\sum_{m=1}^6 S_m = S_{AV} + S_{AR} + S_{SUP} + S_{INF} + S_{LAT_G} + S_{LAT_D} \quad (4.14)$$

Comme nous avons admis que les valeurs des différents termes de transport sont uniformes sur chacune des faces S_m ($m=1,6$) constituant la frontière S du volume élémentaire, l'équation (4.13) est approximée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} T.S. \cong & \sum_{m=1}^6 \vec{f}_m \iint_{S_m} n_r dS + \sum_{m=1}^6 \vec{g}_m \iint_{S_m} n_\theta dS \\ & + \sum_{m=1}^6 \vec{h}_m \iint_{S_m} n_z dS \end{aligned} \quad (4.15)$$

ou encore, sous forme condensée, par la relation :

$$T.S. \cong \sum_{m=1}^6 \vec{f}_m S_{m_r} + \sum_{m=1}^6 \vec{g}_m S_{m_\theta} + \sum_{m=1}^6 \vec{h}_m S_{m_z} \quad (4.16)$$

Dans cette dernière équation, l'emploi des indices r , θ et z signifie que ce sont les surfaces des projections des différentes faces dans les directions radiale, tangentielle et axiale qui interviennent dans le calcul des intégrales de surface. L'équation (4.16) exprime le calcul du transport net

par convection au travers du volume V , des différentes inconnues fondamentales définies en (4.5) ou (4.6).

L'intégration sur le volume du terme temporel $(\frac{\partial \sigma}{\partial t})$ intervenant dans l'équation (4.5) ou (4.6) ne pose aucun problème particulier. Nous admettons en effet, dans les hypothèses générales d'application de la méthode des volumes finis (Chapitre 1), que les valeurs des inconnues de l'écoulement sont uniformes dans chaque volume de contrôle. Il suffit donc de multiplier le terme dérivé $(\frac{\partial \sigma}{\partial t})$ par le volume de l'élément considéré.

4.1.4.2 Discrétisation des termes temporels

La résolution du système d'équations au moyen d'une méthode instationnaire implique également l'intégration de ce système par rapport au temps. Comme nous nous limitons aux processus numériques purement explicites (du moins en ce qui concerne les termes spatiaux), l'intégration des termes spatiaux par rapport au temps est immédiate.

La dérivée temporelle intervenant dans les équations (4.5) ou (4.6) est, quant à elle, discrétisée au moyen du schéma numérique à viscosité corrigée, dans sa version que nous avons appelée semi-implicite. Nous avons utilisé fréquemment ce schéma auparavant et avons montré, théoriquement pour les applications unidimensionnelles et par l'usage pratique pour les applications bidimensionnelles, qu'il possédait de très bonnes qualités de convergence et de stabilité. Appliqué au cas d'une géométrie tridimensionnelle, le schéma à viscosité corrigée semi-implicite nous permet de construire le système discret suivant, dans lequel n est l'indice temporel de discrétisation tandis que i , k et λ sont les indices de discrétisation spatiale dans les directions axiale, tangentielle et radiale :

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{i,k,\ell}^{n+1} = & -\frac{\Delta t}{V} \left(\sum_{m=1}^6 \vec{f}_m S_{m_r} + \sum_{m=1}^6 \vec{g}_m S_{m_\theta} + \sum_{m=1}^6 \vec{h}_m S_{m_z} \right)^n \\
 & + \frac{1}{6} (\vec{\sigma}_{i-1,k,\ell}^{n+1} + \vec{\sigma}_{i+1,k,\ell}^n + \vec{\sigma}_{i,k-1,\ell}^n + \vec{\sigma}_{i,k+1,\ell}^n + \vec{\sigma}_{i,k,\ell+1}^n + \vec{\sigma}_{i,k,\ell-1}^n) \\
 & - \frac{\alpha}{6} (\vec{\sigma}_{i-1,k,\ell}^* + \vec{\sigma}_{i+1,k,\ell}^* + \vec{\sigma}_{i,k-1,\ell}^* + \vec{\sigma}_{i,k+1,\ell}^* + \vec{\sigma}_{i,k,\ell+1}^* + \vec{\sigma}_{i,k,\ell-1}^* - 6\vec{\sigma}_{i,k,\ell}^*) \\
 & - \Delta t \left\{ \left(\vec{b}_{i-1,k,\ell}^n \cdot \vec{r}_{i-1,k,\ell} + \vec{b}_{i+1,k,\ell}^n \cdot \vec{r}_{i+1,k,\ell} + \vec{b}_{i,k-1,\ell}^n \cdot \vec{r}_{i,k-1,\ell} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \vec{b}_{i,k+1,\ell}^n \cdot \vec{r}_{i,k+1,\ell} + \vec{b}_{i,k,\ell-1}^n \cdot \vec{r}_{i,k,\ell-1} + \vec{b}_{i,k,\ell+1}^n \cdot \vec{r}_{i,k,\ell+1} \right) / \right. \\
 & \quad \left. \left(\vec{r}_{i-1,k,\ell} + \vec{r}_{i+1,k,\ell} + \vec{r}_{i,k-1,\ell} + \vec{r}_{i,k+1,\ell} + \vec{r}_{i,k,\ell-1} + \vec{r}_{i,k,\ell+1} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Les termes surmontés d'un astérisque sont mis à jour toutes les N_v itérations et maintenus constants pendant les N_v itérations suivantes, selon le principe du schéma à viscosité corrigée; Δt est le pas temporel de stabilité dont nous parlerons dans un paragraphe ultérieur et α un coefficient de viscosité purement numérique calculé de manière classique au moyen de l'expression suivante (qui est une simple extension à trois dimensions de l'expression (3.45) utilisée pour les problèmes bidimensionnels) :

$$\alpha = VC \left[1 - \frac{|\rho_{i-1,k,\ell}^* + \rho_{i+1,k,\ell}^* + \rho_{i,k-1,\ell}^* + \rho_{i,k+1,\ell}^* + \rho_{i,k,\ell-1}^* + \rho_{i,k,\ell+1}^* - 6\rho_{i,k,\ell}^*|}{6} \right]
 \tag{4.18}$$

dans laquelle VC est un coefficient numérique ($VC = 1 - O(\Delta)$), choisi de manière empirique. Le caractère "sémi-implicite" du

schéma ne pose à nouveau aucun problème particulier; comme nous progressons d'amont en aval, toutes les valeurs de $\vec{\sigma}$ dans le "plan" (i-1) au temps (t+Δt) sont connues au moment où $\vec{\sigma}$ est calculé au noeud d'indices (i,k,l). Remarquons enfin que le terme indépendant $\vec{b}(\vec{\sigma})$ des équations (4.5) ou (4.6) est approximé par une moyenne pondérée sur les noeuds environnants. Essers (Réf. 41) a montré que cette manière d'agir prévient l'apparition d'instabilités non linéaires et garantit la stabilité du processus numérique de résolution. Néanmoins, dans le but de réduire un peu le temps de calcul, nous avons également essayé d'approximer le terme indépendant $\vec{b}(\vec{\sigma})$ par sa valeur au noeud d'indices (i,k,l) pour lequel les valeurs des inconnues sont calculées. Pour les applications numériques que nous avons traitées, nous n'avons jamais observé de divergence du processus de résolution. C'est pour cette raison que dans la version proposée du programme de calcul, cette dernière option a été choisie.

Lorsqu'on calcule les inconnues de l'écoulement en des noeuds situés au voisinage immédiat d'une paroi solide, la discrétisation de la dérivée temporelle doit être légèrement modifiée. Nous n'obtenons en effet plus un domaine de dépendance numérique du noeud considéré semblable à celui qui est observé au centre du passage, ou autrement dit, le noeud central du volume élémentaire n'est plus entouré de six noeuds comme au milieu du canal (Fig. 83). De manière à conserver le caractère général du schéma numérique, ce cas particulier est traité d'une manière analogue à celle utilisée au paragraphe 3.1.4 pour les problèmes d'écoulements bidimensionnels. On construit intuitivement un domaine de dépendance excentré vers l'intérieur du canal. Ceci se traduit par l'apparition dans l'équation (4.17) de coefficients de pondération des différents $\vec{\sigma}_{i,k,l}$ calculés en fonction de la distance entre les noeuds du maillage dans la direction où cet excentrement est effectué. On retrouve ainsi les coefficients (+4) et (-2) déjà mentionnés au paragraphe 3.1.4 [équations (3.49) et (3.50)]. Les valeurs de ces coefficients de pondération pourraient également

être déterminées au moyen d'une analyse de consistance de la discrétisation, semblable à celles que nous avons effectuées pour les problèmes d'écoulements bidimensionnels.

4.1.4.3 Calcul du volume des éléments de contrôle

Chacun des éléments de contrôle définis au paragraphe 4.1.3.3 est constitué de deux polyèdres plus ou moins réguliers. La détermination du volume de l'élément et de l'aire de ses différentes faces (sauf les faces AV et AR) sera donc chaque fois effectuée à partir d'une somme de deux termes, chacun de ceux-ci étant relatif à l'un de ces polyèdres. Nous ne connaissons de chaque polyèdre que les coordonnées (r_m, θ_m, z_m) de ses huit sommets; afin de pouvoir calculer de manière exacte son volume et donc, par la suite, le volume des éléments de contrôle, nous établissons la définition suivante :

nous définissons comme étant le volume du polyèdre considéré dans l'espace (r, θ, z) , le volume transformé dans l'espace (ξ, η, ζ) en un cube d'arête et donc de volume unitaire, par les relations suivantes (Fig. 84) :

$$r = \sum_{m=1}^8 K_m r_m \quad (4.19a)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^8 K_m \theta_m \quad (4.19b)$$

$$z = \sum_{m=1}^8 K_m z_m \quad (4.19c)$$

où les coefficients K_m ($m=1,8$) sont exprimés en fonction des coordonnées (ξ, η, ζ) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
 K_2 &= \xi(1-\eta)(1-\zeta) \\
 K_3 &= \xi\eta(1-\zeta) \\
 K_4 &= (1-\xi)\eta(1-\zeta) \\
 K_5 &= (1-\xi)(1-\eta)\zeta \\
 K_6 &= \xi(1-\eta)\zeta \\
 K_7 &= \xi\eta\zeta \\
 K_8 &= (1-\xi)\eta\zeta
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ K_8 \end{aligned}} \right\} \quad (4.20)$$

Si nous nous rapportons à la manière dont nous avons construit le maillage de discrétisation, nous savons que les coordonnées suivantes sont liées entre elles :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_4 & z_1 &= z_4 \\
 r_2 &= r_3 & z_2 &= z_3 \\
 r_6 &= r_7 & z_6 &= z_7 \\
 r_5 &= r_8 & z_5 &= z_8
 \end{aligned}
 \quad (4.21)$$

En introduisant les égalités (4.21) dans les équations (4.19a) et (4.19c), nous obtenons la forme simplifiée des équations de la transformation :

$$r = (1-\xi)(1-\zeta)r_1 + \xi(1-\zeta)r_2 + (1-\xi)\zeta r_5 + \xi\zeta r_6 \quad (4.22a)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^8 K_m \theta_m \quad (4.22b)$$

$$z = (1-\xi)(1-\zeta)z_1 + \xi(1-\zeta)z_2 + (1-\xi)\zeta z_5 + \xi\zeta z_6 \quad (4.22c)$$

Le volume du polyèdre dans l'espace (r, θ, z) est calculé au moyen de la relation suivante:

$$V = \iiint_{V(r, \theta, z)} r dr d\theta dz \quad (4.23)$$

Si nous écrivons cette équation en utilisant les coordonnées (ξ, η, ζ) du système transformé, nous pouvons calculer le volume du polyèdre par l'expression suivante :

$$V = \iiint_V r J d\xi d\eta d\zeta \quad (4.24)$$

dans laquelle J est le jacobien de la transformation de coordonnées, exprimé par le déterminant suivant :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

Nous savons, par les relations (4.22a) et (4.22c) que les variables r et z sont indépendantes de la variable η . Le volume du polyèdre est donc calculé par l'expression suivante, déduite de (4.24) et (4.25) :

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) d\eta d\zeta d\xi \quad (4.26)$$

dans laquelle les variables r , θ et z sont exprimées en fonction des variables ξ , η et ζ par les équations (4.22a), (4.22b) et (4.22c). Appliquée au cas du polyèdre (12345678) de la figure 84, cette dernière expression devient :

$$\begin{aligned}
 V = & \left(\frac{A}{12} + \frac{B}{12} + \frac{C}{9}\right)RG + \left(\frac{A}{6} + \frac{B}{4} + \frac{C}{3}\right)PF + \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{6} + \frac{C}{3}\right)NE \\
 & + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + C\right)MD + \left(\frac{A}{9} + \frac{B}{8} + \frac{C}{6}\right)(PG+RF) + \left(\frac{A}{8} + \frac{B}{9} + \frac{C}{6}\right)(NG+RE) \\
 & + \left(\frac{A}{3} + \frac{B}{4} + \frac{C}{2}\right)(ND+ME) + \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2}\right)(PD+MF) \\
 & + \left(\frac{A}{6} + \frac{B}{6} + \frac{C}{4}\right)(RD+PE+NF+MG)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

expression dans laquelle les différents coefficients (A,B,C,D, E,F,G,M,N,P,R) sont exprimés en fonction des coordonnées (r_m, θ_m, z_m) des huit sommets du polyèdre par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= (z_6 - z_5)(r_2 - r_1) - (r_6 - r_5)(z_2 - z_1) \\
 B &= (r_6 - r_2)(z_5 - z_1) - (z_6 - z_2)(r_5 - r_1) \\
 C &= (r_2 - r_1)(z_5 - z_1) - (z_2 - z_1)(r_5 - r_1) \\
 D &= (\theta_4 - \theta_1) \\
 E &= (\theta_3 - \theta_2) - (\theta_4 - \theta_1) \\
 F &= (\theta_8 - \theta_5) - (\theta_4 - \theta_1) \\
 G &= (\theta_4 - \theta_1) + (\theta_7 - \theta_6) - (\theta_3 - \theta_2) - (\theta_8 - \theta_5) \\
 M &= r_1 \\
 N &= r_2 - r_1 \\
 P &= r_5 - r_1 \\
 R &= r_1 - r_2 + r_6 - r_5
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.1.4.4 Calcul de la surface extérieure des éléments de contrôle

Si, dans l'espace transformé (ξ, η, ζ) défini au paragraphe précédent, on impose successivement une valeur 0 et 1 aux variables ξ , η et ζ , il est possible d'établir, à l'aide des équations de la transformation, les expressions des aires des différentes faces d'un demi-élément de contrôle sous forme paramétrique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r &= r(\alpha, \beta) \\ \theta &= \theta(\alpha, \beta) \\ z &= z(\alpha, \beta) \end{aligned} \tag{4.29}$$

dans lesquelles les paramètres α et β sont respectivement les couples (η, ζ) , (ζ, ξ) et (ξ, η) . Soit $\vec{p}$ un vecteur dont l'origine est confondue avec l'origine du système d'axes (r, θ, z) et dont l'extrémité aboutit en un point de coordonnées (r, θ, z) de la face considérée. Soit $\vec{n}$ le vecteur unité normal à cette face en ce point (Fig. 85). Le vecteur $\vec{n}$ est défini de manière analytique par l'équation suivante dans le système transformé ($\times$ désigne le produit vectoriel):

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} \right|} \tag{4.30}$$

tandis qu'un élément de surface dS de la face étudiée est défini, également dans le système transformé, de la manière suivante :

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} \right| d\alpha d\beta \tag{4.31}$$

Les équations (4.30) et (4.31) permettent d'effectuer le calcul des intégrales de surface contenues dans l'expression (4.15). Ces intégrales s'écrivent successivement :

$$\begin{aligned} \iint_{S_m} \vec{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} \right|} \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} \right| d\alpha \, d\beta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} \right) d\alpha \, d\beta \end{aligned} \quad (4.32)$$

Les termes dérivés intervenant dans le produit vectoriel effectué dans l'équation (4.32) peuvent être exprimés en fonction des variables r, θ et z . Nous obtenons l'expression suivante pour le premier de ces termes :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \quad (4.33)$$

Si, à ce stade, nous introduisons les composantes du vecteur $\vec{p}$, la relation (4.33) se ramène finalement à l'égalité suivante :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} = \frac{\partial r}{\partial \alpha} \vec{1}_r + r \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \vec{1}_\theta + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \vec{1}_z \quad (4.34a)$$

Le calcul du deuxième terme dérivé $\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} \right)$ est effectué de manière analogue et fournit le résultat suivant :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} = \frac{\partial r}{\partial \beta} \vec{1}_r + r \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \vec{1}_\theta + \frac{\partial z}{\partial \beta} \vec{1}_z \quad (4.34b)$$

Compte tenu des égalités (4.34a) et (4.34b), nous pouvons à présent effectuer le produit vectoriel de l'équation (4.32). Nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \beta} &= r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) \vec{1}_r + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} - \frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \vec{1}_\theta \\ &\quad + r \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} \right) \vec{1}_z \end{aligned} \quad (4.35)$$

qui nous permet d'écrire les équations conduisant au calcul des surfaces des projections des différentes faces d'un demi-élément de contrôle dans les directions radiale, tangentielle et axiale. En conservant les notations définies en (4.16), nous obtenons les trois relations suivantes :

$$S_{m_r} = \iint_{S_m} n_r dS = \int_0^1 \int_0^1 r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta \quad (4.36)$$

$$S_{m_\theta} = \iint_{S_m} n_\theta dS = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} - \frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta \quad (4.37)$$

$$S_{m_z} = \iint_{S_m} n_z dS = \int_0^1 \int_0^1 r \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta \quad (4.38)$$

Comme la surface extérieure d'un élément de contrôle est composée de 6 faces ($m = 6$), la résolution pour chaque élément des équations (4.36), (4.37) et (4.38) fournit 18 valeurs à conserver en mémoire d'ordinateur afin de calculer, au moyen de la relation (4.16) le transport net par convection des inconnues de base au travers du volume élémentaire. Nous savons cependant que les faces avant, arrière, supérieure et inférieure sont des surfaces coniques : la normale à ces surfaces n'a donc pas de composante dans la direction tangentielle. Ceci réduit un peu la place nécessaire en mémoire d'ordinateur en ce sens que seules les faces latérales présentent une projection non nulle dans la direction tangentielle. Les autres faces (AV, AR, SUP, INF) ne présentent des projections non nulles que dans les directions radiale et axiale.

Nous pouvons à présent développer les équations (4.36), (4.37) et (4.38) afin de calculer la surface des projections dans les directions radiale, tangentielle et axiale des diffé-

rentes faces du demi-élément de contrôle (12345678) défini à la figure 84.

a. Face_AV (1234) (Fig. 84, 86)

Les équations paramétriques de cette face sont les suivantes :

$$\begin{aligned} r &= (1-\alpha)(1-\beta)r_1 + \alpha(1-\beta)r_2 + \alpha\beta r_3 + (1-\alpha)\beta r_4 \\ \theta &= (1-\alpha)(1-\alpha)\theta_1 + \alpha(1-\beta)\theta_2 + \alpha\beta\theta_3 + (1-\alpha)\beta\theta_4 \\ z &= (1-\alpha)(1-\beta)z_1 + \alpha(1-\beta)z_2 + \alpha\beta z_3 + (1-\alpha)\beta z_4 \end{aligned} \quad (4.39a)$$

De par la construction du maillage, nous savons que les coordonnées suivantes sont liées entre elles par les relations ci-dessous :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_4 & z_1 &= z_4 \\ r_2 &= r_3 & z_2 &= z_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Si nous introduisons ces relations dans les équations (4.39a), celles-ci se simplifient sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} r &= r_1 + \alpha(r_2 - r_1) \\ \theta &= (1-\alpha)(1-\beta)\theta_1 + \alpha(1-\beta)\theta_2 + \alpha\beta\theta_3 + (1-\alpha)\beta\theta_4 \\ z &= z_1 + \alpha(z_2 - z_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.39b)$$

Le calcul des différentes projections est effectué en substituant dans les équations (4.36), (4.37) et (4.38) les valeurs de r , θ et z par les relations établies en (4.39b). Après intégration, on obtient successivement les résultats suivants :

$$S_{AV_r} = - (z_2 - z_1) \left[(\theta_4 - \theta_1) \frac{2r_1 + r_2}{6} + (\theta_3 - \theta_2) \frac{2r_2 + r_1}{6} \right] \quad (4.41a)$$

$$S_{AV_\theta} = 0 \quad (4.41b)$$

$$S_{AV_z} = (r_2 - r_1) \left[(\theta_4 - \theta_1) \frac{2r_1 + r_2}{6} + (\theta_3 - \theta_2) \frac{2r_2 + r_1}{6} \right] \quad (4.41c)$$

Un raisonnement identique est appliqué pour le calcul des projections radiale et axiale de la face AR (5678) (la projection tangentielle est nulle)(Fig. 84).

b. Face_INF_(1485) (Fig. 84, 87)

Le raisonnement est analogue à celui développé pour le calcul des faces AV et AR. Seules les valeurs des indices sont modifiées, conduisant aux expressions suivantes :

$$S_{INF_r} = -(z_5 - z_1) \left[(\theta_4 - \theta_1) \frac{2r_1 + r_5}{6} + (\theta_8 - \theta_5) \frac{2r_5 + r_1}{6} \right] \quad (4.42a)$$

$$S_{INF_\theta} = 0 \quad (4.42b)$$

$$S_{INF_z} = (r_5 - r_1) \left[(\theta_4 - \theta_1) \frac{2r_1 + r_5}{6} + (\theta_8 - \theta_5) \frac{2r_5 + r_1}{6} \right] \quad (4.42c)$$

Un calcul identique conduit à l'expression des projections radiale et axiale de la face SUP (2376) (la projection tangentielle est nulle) (Fig. 84).

c. Face_LAT_D (1562) (Fig. 84, 88)

Les faces latérales du demi-élément de contrôle sont absolument quelconques. Il nous faut donc considérer les équations paramétriques dans leur forme la plus générale, donnée en (4.39a). En substituant dans les équations (4.36), (4.37) et (4.38) les valeurs de r , θ et z par leurs expressions en fonction de α et β , données en (4.39a), on obtient l'expression générale des trois projections de cette face :

$$S_{LAT_r} = (r_1 - r_5 + r_6 - r_2) \left(\frac{2B + 2A + 3C}{12} \right) + (r_2 - r_1) \left(\frac{4B + 3A + 6C}{12} \right) \\ + (r_5 - r_1) \left(\frac{3B + 4A + 6C}{12} \right) + r_1 \left(\frac{A + B + 2C}{2} \right) \quad (4.43a)$$

Les coefficients A, B et C sont exprimés par les relations suivantes :

$$A = (\theta_6 - \theta_2)(z_5 - z_1) - (z_6 - z_2)(\theta_5 - \theta_1)$$

$$B = (z_6 - z_5)(\theta_2 - \theta_1) - (\theta_6 - \theta_5)(z_2 - z_1)$$

$$C = (\theta_2 - \theta_1)(z_5 - z_1) - (z_2 - z_1)(\theta_5 - \theta_1)$$

$$S_{LAT_\theta} = (z_2 - z_1) \left(\frac{r_5 + r_6 - 2r_1}{2} \right) - \frac{(z_6 - z_5)(r_2 - r_1)}{2} + \frac{(z_6 - z_2)(r_5 - r_1)}{2} \\ + (z_5 - z_1) \left(\frac{r_2 + r_6 - 2r_1}{2} \right) \quad (4.43b)$$

$$S_{LAT_z} = (r_1 + r_6 - r_5 - r_2) \left(\frac{2B + 2A + 3C}{12} \right) + (r_2 - r_1) \left(\frac{4B + 3A + 6C}{12} \right) \\ + (r_5 - r_1) \left(\frac{3B + 4A + 6C}{12} \right) + r_1 \left(\frac{B + A + 2C}{2} \right) \quad (4.43c)$$

Les coefficients A, B et C sont exprimés par les relations suivantes :

$$A = (r_6 - r_2)(\theta_5 - \theta_1) - (\theta_6 - \theta_2)(r_5 - r_1)$$

$$B = (\theta_6 - \theta_5)(r_2 - r_1) - (r_6 - r_5)(\theta_2 - \theta_1)$$

$$C = (r_2 - r_1)(\theta_5 - \theta_1) - (\theta_2 - \theta_1)(r_5 - r_1)$$

Un calcul identique conduit à l'expression des projections radiale, tangentielle et axiale de la face LAT_G (4378) (Fig. 84). Remarquons enfin que, selon la direction des différentes composantes de la normale $\vec{n}$, il faudra être très attentif à imposer le signe correct dans les expressions (4.41), (4.42) et (4.43).

4.1.5 Description des conditions aux limites

4.1.5.1 Conditions aux limites physiques

Afin d'obtenir un problème correctement posé au sens d'Hadamard (cfr paragraphe 2.3), nous devons adjoindre au système d'équations aux dérivées partielles défini au paragraphe 4.1.2, certaines conditions aux limites physiques le long des frontières du domaine de l'écoulement (Fig. 81). Le long des parois solides ABCD, HGFE, LM et QP, une condition d'imperméabilité doit être vérifiée; les flux de masse et d'énergie sont nuls au travers de ces frontières et le seul flux de quantité de mouvement provient de l'action des forces exercées sur ces parois par la pression statique du fluide. Le long des frontières KL, MN, RQ et PO (appelées frontières périodiques), une condition de périodicité doit être appliquée. Les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie au travers de la face KL sont, en valeur absolue, égaux à ceux qui traversent la face RQ; il en va de même des frontières MN et PO. Comme la méthode des volumes finis que nous utilisons, fait apparaître explicitement tous les termes de flux, ces différentes conditions sont relativement simples à imposer.

Considérons enfin les conditions aux limites physiques à appliquer au droit des plans d'entrée (AH-KR) et de sortie (DE-NO). La détermination de leur nombre se fait encore une fois par la méthode des caractéristiques. Cependant, contrairement à la démarche effectuée au paragraphe 3.1.5.1, nous ne pouvons plus réduire le système d'équations à une seule dimension spatiale au droit de ces deux plans. Si on convient toujours de considérer comme nuls tous les gradients dans la

direction tangentielle et d'imposer des conditions aux limites uniformes dans cette direction, il n'en va cependant pas de même dans la direction radiale où il faut tenir compte de l'existence possible de gradients de différentes variables d'état afin de conserver, par exemple, le caractère rotationnel d'un écoulement dans une grille d'aubes. Les relations caractéristiques sont dès lors loin d'être aisées à établir puisqu'elles sont à présent fonction de deux variables indépendantes s_1 et s_2 mesurées le long des différentes surfaces caractéristiques du système.

Pour chaque "niveau" KR du plan d'entrée ou NO du plan de sortie, les conclusions de la démarche sont cependant analogues à celles obtenues lors de l'étude des écoulements bidimensionnels. Si la composante axiale de la vitesse est inférieure à la vitesse du son, quatre conditions aux limites physiques doivent être imposées au droit de KR (Fig. 81) tandis qu'une seule condition est imposée au droit de NO. Si la composante axiale de la vitesse est supérieure à la vitesse du son, cinq conditions aux limites physiques doivent être imposées au droit de KR et aucune condition ne peut être imposée au droit de NO. Ce raisonnement n'est évidemment valable que pour une seule pseudo-ligne de courant dans le plan (r,z) . Afin d'obtenir le nombre total de conditions aux limites, il faut multiplier les valeurs obtenues ci-dessus par le nombre de noeuds de discrétisation dans la direction radiale. Pour un problème d'écoulement tridimensionnel on parlera donc plutôt de distributions radiales de conditions d'entrée et de sortie. En désignant par LM le nombre de noeuds de discrétisation dans la direction radiale, le tableau suivant donne le nombre de conditions à imposer au droit des plans d'entrée et de sortie en fonction du régime axial de l'écoulement :

Régime (composante axiale)	Plan d'entrée	Plan de sortie
Subsonique	4 LM	LM
Supersonique	5 LM	0

En ce qui concerne la nature de ces conditions, nous basant sur le choix effectué pour les problèmes d'écoulements bidimensionnels, nous avons résolu d'imposer les conditions suivantes dans le cas, le plus fréquent, d'un écoulement axial subsonique :

Plan d'entrée :

pour chaque niveau KR (Fig. 81), on donne les grandeurs suivantes :

- pression totale p_{01} (uniforme dans la direction tangentielle) (4.44)

- température totale T_{01} (uniforme dans la direction tangentielle) (4.45)

- angle β_1 formé entre les composantes tangentielle et axiale de la vitesse (uniforme dans la direction tangentielle) (4.46)

- angle γ_1 formé entre les composantes radiale et axiale de la vitesse (uniforme dans la direction tangentielle) (4.47)

Plan de sortie :

pour le niveau NO (Fig. 81) correspondant au rayon de référence (défini au paragraphe 4.1.2), on donne la grandeur suivante :

pression statique p_2 (uniforme dans la direction tangentielle) (4.48)

Comme nous désirons imposer la pression statique comme condition aux limites naturelle pour tous les niveaux du plan de sortie, deux possibilités s'offrent à nous : soit on impose la distribution radiale de pression en valeur absolue, soit on impose la loi de variation de cette distribution.

Dans le premier cas, il faut évidemment être sûr que la distribution choisie soit compatible avec le système d'équations modélisant l'écoulement, ce qui revient à imposer que cette distribution conduise à une solution physiquement possible (pour un écoulement non visqueux). Si ce n'est pas le cas, la solution obtenue n'a aucun sens bien que, numériquement, le programme de calcul mène à une solution stable et convergée.

Afin d'éviter cet écueil, nous préférons la deuxième possibilité : la distribution radiale de pression statique dans le plan de sortie est déterminée de façon à satisfaire l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale, exprimant l'équilibre radial qui doit être vérifié dans le plan de sortie. Connaissant la pression statique régnant au niveau de référence, il est dès lors possible de recalculer la distribution complète de pression. Puisque le calcul de l'écoulement est basé sur une approche instationnaire, cette distribution devra être recalculée périodiquement.

Comme nous admettons que tous les gradients tangentiels sont nuls au droit du plan de sortie, l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale s'écrit de la manière suivante sous forme stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\overline{\rho V_r^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_r V_z}) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{\overline{\rho V_r^2}}{r} - \frac{\overline{\rho V_\theta^2}}{r} = 0 \quad (4.49)$$

et est obtenue directement à partir de la relation (4.6).

Dans cette équation, les valeurs doublement surbarrées indiquent qu'elles ont été calculées comme moyennes sur le pas pour chaque valeur du rayon en utilisant une relation classique :

$$\overline{A} = \frac{N_b}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{N_b}} A \, d\theta \cong \frac{1}{KM} \sum_{k=1}^{KM} A_k \quad (4.50)$$

dans laquelle N_b désigne le nombre d'aubes de la grille et KM le nombre de noeuds dans la direction tangentielle.

Soit ℓ l'indice de discrétisation correspondant au rayon de référence; la valeur de la pression statique p_2 est calculée de manière progressive pour les autres niveaux ($\ell+1$, $\ell+2$, ..., $\ell-1$, $\ell-2$, ...) en intégrant l'équation (4.49) de la manière suivante :

$$\int_{r_\ell}^{r_{\ell+1}} \frac{\partial p}{\partial r} dr = \int_{r_\ell}^{r_{\ell+1}} \frac{\overline{\rho V_\theta^2}}{r} dr - \int_{r_\ell}^{r_{\ell+1}} \frac{\overline{\rho V_r^2}}{r} dr - \int_{r_\ell}^{r_{\ell+1}} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{\rho V_r^2}) dr - \int_{r_\ell}^{r_{\ell+1}} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_r V_z}) dr \quad (4.51)$$

Les différentes intégrales sont résolues de manière très simple et fournissent le résultat suivant :

$$p|_{\ell+1} = p|_\ell + \left[\overline{\rho V_\theta^2}|_{\ell+1} + \overline{\rho V_\theta^2}|_\ell \right] \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\ell+1}}{r_\ell} - \left[\overline{\rho V_r^2}|_{\ell+1} + \overline{\rho V_r^2}|_\ell \right] \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\ell+1}}{r_\ell} - \left[\overline{\rho V_r^2}|_{\ell+1} - \overline{\rho V_r^2}|_\ell \right] - \left[\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_r V_z})|_{\ell+1} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_r V_z})|_\ell \right] \frac{r_{\ell+1} - r_\ell}{2} \quad (4.52)$$

Les dérivées partielles par rapport à la variable z sont calculées en utilisant les valeurs des inconnues aux noeuds constituant les deux derniers "plans" de discrétisation dans la direction axiale.

Connaissant la pression au niveau $(\ell+1)$, on peut la calculer au moyen du même algorithme au niveau $(\ell+2)$, etc. On obtient ainsi, de proche en proche, la distribution de pression statique régnant dans le plan de sortie de la grille d'aubes. De manière à économiser le temps total de calcul, la détermination de cette distribution radiale n'est effectuée que toutes les N_v itérations, N_v étant le nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes visqueux intervenant dans le schéma numérique à viscosité corrigée.

Pour les rares applications dans lesquelles une vitesse axiale supérieure à la vitesse du son est rencontrée au droit des plans d'entrée ou de sortie, le problème est évident : l'ensemble des 5 LM variables est imposé dans le plan d'entrée tandis qu'aucune d'elles n'est spécifiée dans le plan de sortie.

Afin de pouvoir calculer numériquement les valeurs des différentes inconnues au droit des plans d'entrée et de sortie de la grille d'aubes étudiée, nous devons également construire un certain nombre de conditions aux limites additionnelles purement numériques. Elles feront l'objet du paragraphe suivant.

4.1.5.2 Conditions aux limites numériques

Les conclusions tirées de la démarche effectuée au paragraphe 3.1.5.2 concernant la stabilité des conditions aux limites additionnelles à appliquer aux calculs d'écoulements bidimensionnels, nous permettent de limiter un peu le nombre de possibilités applicables aux problèmes d'écoulements tridimensionnels. Une autre limitation vient du fait que nous ne pouvons plus réduire le système d'équations d'Euler à une seule dimension spatiale au droit des plans d'entrée et de sortie de la grille comme nous l'avons fait pour les problèmes bidimensionnels; nous admettons à présent l'existence de gradients dans les directions radiale et axiale. Les relations caractéristiques deviennent donc des équations de surfaces, fonctions de deux variables indépendantes, et sont fort lourdes et dif-

ficiles à établir. Nous ne nous servons donc plus de conditions aux limites basées sur la résolution des relations caractéristiques. L'existence de gradients radiaux nous empêche également d'utiliser des conditions aux limites numériques basées sur un processus d'uniformisation. Nous avons donc uniquement conservé les conditions basées sur la résolution d'une ou de plusieurs équations de conservation dans un demi-volume de contrôle adjacent au plan d'entrée ou de sortie. Les différentes possibilités sont les suivantes :

- CL1 : application du schéma numérique de résolution à tous les demi-éléments de volume compris entre les "plans" ($i=1$) et ($i=2$) ou ($i=IM-1$) et ($i=IM$) pour l'équation de conservation de la masse (IM est le nombre de "plans" de discrétisation dans la direction axiale).
- CL2 : application du schéma numérique de résolution à tous les demi-éléments de volume compris entre les "plans" ($i=1$) et ($i=2$) ou ($i=IM-1$) et ($i=IM$) pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale.
- CL3 : application du schéma numérique de résolution à tous les demi-éléments de volume compris entre les "plans" ($i=1$) et ($i=2$) ou ($i=IM-1$) et ($i=IM$) pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction tangentielle.
- CL4 : application du schéma numérique de résolution à tous les demi-éléments de volume compris entre les "plans" ($i=1$) et ($i=2$) ou ($i=IM-1$) et ($i=IM$) pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale.
- CL5 : application du schéma numérique de résolution à tous les demi-éléments de volume compris entre les "plans" ($i=1$) et ($i=2$) ou ($i=IM-1$) et ($i=IM$) pour l'équation de conservation de l'énergie.

Ainsi que nous l'avons fait pour les problèmes d'écoulements unidimensionnels et bidimensionnels, nous avons recherché quelles étaient les combinaisons de ces conditions aux frontières additionnelles assurant la stabilité numérique du processus de résolution. Nous avons considéré l'exemple de l'écoulement dans une grille d'aubes constituée de profils rectilignes d'épaisseur nulle, et dans laquelle l'écoulement est uniforme ($M=0.8$ pour le cas choisi). Le champ initial des inconnues est de plus choisi comme étant la solution exacte. Une condition additionnelle doit donc être imposée au droit de la frontière amont (plan d'entrée) et quatre conditions additionnelles doivent être imposées au droit de la frontière aval (plan de sortie). Les différents paramètres numériques du schéma à viscosité corrigée utilisés pour cette application ont été fixés comme suit :

- VC = 1. (coefficient numérique de viscosité)
Nv = 20 (nombre d'itérations entre deux mises à jour des termes visqueux)
CFL = 1. (coefficient de sécurité du pas temporel).

Le critère d'acceptation d'une combinaison de conditions aux limites est la conservation d'une erreur de convergence de l'ordre de l'erreur d'arrondi de l'ordinateur (DEC VAX 11/780) à l'aide duquel les calculs ont été effectués, et cela quel que soit le nombre d'itérations imposé (nous avons fixé une limite de 5000 itérations pour chaque test) pour un maillage uniforme composé de :

- 21 noeuds de discrétisation dans la direction axiale,
- 10 noeuds de discrétisation dans la direction radiale,
- 10 noeuds de discrétisation dans la direction tangentielle.

Le tableau 18 résume les résultats obtenus. Nous remarquons qu'une seule combinaison des conditions aux limites permet de garantir la stabilité du processus numérique de résolution, à savoir :

plan d'entrée : condition CL4 (4.53)

plan de sortie : conditions : CL1, CL2, CL3, CL4 (4.54)

C'est donc cette combinaison de conditions additionnelles qui, jointe aux conditions aux limites physiques définies dans le paragraphe précédent, forme l'ensemble des conditions aux frontières devant être imposé afin de garantir le caractère bien posé du problème aux dérivées partielles qui nous est proposé.

4.1.6 Description des conditions initiales

Afin d'obtenir un problème "correctement posé" au sens d'Hadamard, le champ des inconnues doit également être déterminé à l'instant initial ($t=0$). Pour ce faire, nous imposons, de manière identique à ce qui a été fait pour les problèmes bidimensionnels, une variation linéaire des paramètres décrivant l'écoulement entre l'intrados et l'extrados du profil étudié depuis les conditions d'entrée jusqu'aux conditions de sortie et cela, pour chacune des pseudo-lignes de courant définies dans le plan (r,z) (Fig. 81).

On débute généralement le calcul dans un maillage grossier, permettant d'éliminer plus ou moins rapidement les erreurs importantes dues au choix des conditions initiales. Le résultat obtenu est, après un processus d'interpolation, utilisé comme champ initial des inconnues pour le calcul de l'écoulement dans un maillage plus fin permettant d'obtenir un résultat plus détaillé.

4.1.7 Condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy

Nous avons montré au chapitre 2 que le schéma numérique à viscosité corrigée est stable pour autant que soit respecté le critère de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (C.F.L.). Dans le cas d'un problème d'écoulement dans une

géométrie tridimensionnelle, le domaine de dépendance numérique d'un noeud Q de la discrétisation est formé par le polyèdre construit à partir des six noeuds entourant le point Q (Fig. 89). Le critère CFL, condition nécessaire de stabilité, peut alors s'écrire mathématiquement sous la forme suivante :

$$(V+a) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.55)$$

où V est la norme du vecteur vitesse, calculée au point Q, a la vitesse locale du son, Δt le pas temporel de discrétisation et Δx la plus courte distance entre le point Q et les faces (126), (236), (346), (416), (125), (235), (345) et (415). L'équation (4.55) exprime mathématiquement le fait que le domaine de dépendance physique doit demeurer contenu à l'intérieur du domaine de dépendance numérique : toute perturbation naissant en Q ne peut pas se faire sentir au dehors du volume (123456) après un intervalle de temps Δt vérifiant la relation (4.55).

Comme ce critère n'exprime qu'une condition locale, il doit être vérifié en chaque noeud du maillage. De manière à ne pas occuper une place exagérée en mémoire de l'ordinateur, nous calculons le pas temporel limite de stabilité pour chaque noeud du maillage puis nous conservons la valeur minimale de tous ceux-ci comme valeur unique du pas temporel Δt . Afin de limiter un peu le temps total de calcul, la détermination de l'incrément temporel n'est effectuée que toutes les N_v itérations, N_v étant le nombre d'étapes de calcul entre deux mises à jour des termes de viscosité numérique du schéma à viscosité corrigée.

4.1.8 Mise en oeuvre pratique

Description de quelques résultats numériques

Nous possédons à présent toutes les indications théoriques nécessaires à la mise en oeuvre pratique du calcul tridimensionnel de l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait non visqueux dans une grille d'aubes annulaire. La géométrie

à laquelle nous avons choisi d'appliquer notre programme de calcul est celle du stator de la soufflerie annulaire basse vitesse T-1 de l'Institut von Karman de Dynamique des Fluides (Réf. 67). Une coupe de cette soufflerie est représentée à la figure 90. Dans la configuration actuellement utilisée, seul le stator est installé. La géométrie des aubages statoriques, provenant de la référence 68, est représentée à la figure 91; les coordonnées de ces aubages sont données au tableau 19. Dans ce tableau, un facteur multiplicatif de 0.00012 doit être appliqué pour transformer les coordonnées utilisées en mètres. La forme de l'aube ne varie pas en fonction du rayon et l'aubage n'est pas vrillé. Les coordonnées mentionnées au tableau 19 sont celles d'une section dans un plan perpendiculaire à la ligne radiale passant par le point A (Fig. 91). Nous avons résolu l'écoulement pour les deux configurations géométriques possibles de la paroi extérieure de la soufflerie. Dans la première configuration, la paroi cylindrique extérieure est remplacée par une paroi contournée dont l'allure est représentée à la figure 92 par le trait plein et dont les coordonnées sont résumées au tableau 20; les valeurs des rayons du moyeu et du carter y sont données en mètres tandis que la coordonnée axiale est exprimée dans les mêmes unités que celles utilisées au tableau 19. Dans la deuxième configuration, la paroi extérieure est cylindrique ($r = 355$ mm); elle est représentée par un trait interrompu à la figure 92.

L'emploi de l'erreur de convergence définie à la relation (3.65) fait intervenir le calcul d'une racine carrée, ce qui nécessite un temps de calcul relativement long sur l'ordinateur que nous utilisons; de plus, ce calcul est effectué chaque fois en tous les noeuds du maillage. C'est pour cette raison que nous avons préféré nous baser sur l'erreur de convergence définie à la relation (2.28) pour les problèmes d'écoulements unidimensionnels et dont le calcul ne fait intervenir que les opérations arithmétiques fondamentales, très rapidement exécutables par l'ordinateur. Nous avons donc adopté la définition suivante pour l'erreur de convergence du calcul d'écoulements tridimensionnels :

$$\epsilon = \max_{i,k,\ell} \left\{ \frac{\rho_{i,k,\ell}^{n+1} - \rho_{i,k,\ell}^n}{\rho_{i,k,\ell}^n} \right\} \quad (4.56)$$

D'autre part, nous avons considéré l'évolution de l'angle de sortie pour une valeur fixée du rayon en fonction du nombre d'étapes temporelles. Nous pouvons en effet conclure des résolutions de problèmes d'écoulements bidimensionnels que l'allure de cette évolution représente un test de convergence très acceptable. Afin de limiter un peu le temps de calcul, la détermination de ces deux paramètres n'est effectuée que toutes les N_v itérations, au moment de la mise à jour des termes visqueux du schéma numérique à viscosité corrigée.

Le domaine numérique de l'écoulement, défini au paragraphe 4.1.3.2, est constitué de 65 "plans" de discrétisation dans la direction axiale, dont 41 sont situés entre les bords d'attaque et de fuite, de 23 "plans" de discrétisation dans la direction radiale et de 21 "plans" de discrétisation dans la direction tangentielle. Dans les directions radiale et tangentielle nous avons admis un espacement uniforme entre les "plans" de discrétisation tandis que dans la direction axiale, cet espacement est variable, fonction de la précision souhaitée. Il est à noter que l'utilisateur intéressé par l'étude des écoulements secondaires devra utiliser un espacement variable dans la direction radiale afin de concentrer les "plans" de discrétisation près du moyeu et du carter, là où ces écoulements secondaires sont les plus intenses. Dans le maillage que nous avons construit, et que nous appellerons le maillage fin dans la suite du texte, les différents paramètres de l'écoulement sont donc définis en $(65 \times 22 \times 20 =)$ 28600 noeuds de discrétisation.

Comme nous l'avons fait pour les problèmes d'écoulements bidimensionnels, de manière à éliminer plus rapidement les erreurs importantes dues au choix des conditions initiales, on débute le calcul dans un réseau constitué d'un nombre de "plans" de discrétisation dans chacune des trois directions r , θ et z égal à la moitié, par excès, des valeurs données ci-dessus; les différents paramètres de l'écoulement sont alors définis en $(33 \times 11 \times 10 =) 3630$ noeuds de discrétisation. Après un certain nombre d'itérations (généralement 2000 ... 3000), lorsqu'une solution relativement bien convergée est obtenue au moyen du réseau grossier, le calcul est poursuivi dans le maillage fin. Dans ce maillage, les valeurs initiales des inconnues aux différents noeuds sont calculées à partir des valeurs obtenues dans le réseau grossier au moyen d'interpolations linéaires.

Nous avons choisi de résoudre un écoulement soumis à des conditions thermodynamiques et cinématiques d'entrée uniformes le long du rayon :

$$\frac{T_{01}(\ell)}{T_{01\text{réf}}} = 1. \quad (\ell = 1, LM-1) \quad (4.57a)$$

$$\frac{P_{01}(\ell)}{P_{01\text{réf}}} = 1. \quad (\ell = 1, LM-1) \quad (4.57b)$$

$$\beta_1(\ell) = 0^\circ \quad (\ell = 1, LM-1) \quad (4.57c)$$

$$\gamma_1(\ell) = 0^\circ \quad (\ell = 1, LM-1) \quad (4.57d)$$

Au droit du plan de sortie, on impose la pression statique au pied de l'aubage : elle correspond à un nombre de Mach isentropique égal à 0.5. La distribution radiale de la pression statique au droit du plan de sortie est déterminée de manière itérative au cours du processus numérique au moyen de l'équation (4.52).

Pour l'écoulement dans la première configuration géométrique (paroi extérieure contournée), le calcul a été effectué successivement dans le maillage grossier puis dans le maillage fin en utilisant les coefficients numériques du tableau suivant :

	Nombre d'itérations	Nv	VC	CFL
Maillage grossier (33×11×10)	0-1000	20	0.98	0.8
	1000-3000	20	0.99	0.8
Maillage fin (65×22×20)	0-1000	20	0.99	0.8
	1000-2500	20	0.995	0.8

Le choix de la valeur du coefficient de sécurité du pas temporel (CFL) provient du fait que l'on calcule la longueur Δx intervenant dans l'équation (4.55) de manière approximative. En utilisant un coefficient égal à 0.8, nous évitons tout risque d'obtenir un pas temporel instable. La figure 93a représente l'évolution de l'erreur de convergence (4.56) et de l'angle aérodynamique de sortie au rayon moyen en fonction du nombre d'itérations pour le calcul réalisé en utilisant le réseau grossier (3000 premières itérations) tandis que la figure 93b représente l'évolution de ces mêmes paramètres pour le calcul effectué dans le maillage fin (2500 itérations suivantes).

Pour l'écoulement dans la deuxième configuration géométrique (paroi extérieure cylindrique), nous n'avons, pour des raisons de limitation de temps de calcul, pris en compte que le maillage grossier en utilisant les coefficients numériques du tableau suivant :

Nombre d'itérations	Nv	VC	CFL
0-2000	20	0.98	0.8
2000-3000	20	0.99	0.8

La figure 94 représente l'évolution de l'erreur de convergence (4.56) et de l'angle aérodynamique de sortie au rayon moyen en fonction du nombre d'itérations.

Nous commencerons par décrire quelques résultats obtenus dans la première configuration géométrique (parois contournées). Nous avons représenté à la figure 95 la distribution du nombre de Mach isentropique le long de l'intrados et de l'extrados en fonction de la coordonnée mesurée le long de la projection axiale de la corde de l'aubage. Cette distribution est donnée pour trois hauteurs d'aubes différentes : près de la paroi intérieure, à mi-hauteur de l'aubage et près de la paroi extérieure. On remarque la variation de la distribution selon la hauteur d'aube considérée : des tendances analogues à celles observées dans le cas d'un calcul quasi-tridimensionnel (paragraphe 3.3) apparaissent. La charge aérodynamique en tête d'aube est inférieure à celle réalisée au pied. L'usage des parois contournées permet de modifier localement les gradients de pression, de vitesse et angulaires afin d'obtenir la configuration souhaitée de l'écoulement avant d'aborder la rangée d'aubes suivante.

Afin de montrer la modification de ces différents gradients en présence de parois extérieures contournées ou parallèles, nous allons comparer les distributions radiales de la pression statique et de l'angle β de l'écoulement dans le plan (z, θ) . Les valeurs numériques portées dans les différents graphiques sont obtenues à partir d'une moyenne massique sur un pas des valeurs de ces paramètres (équation (4.50)).

Nous avons représenté aux figures 96 et 97 les distributions radiales de la pression statique et de l'angle β dans le plan $z/C_{ax} = 0.407$, c'est-à-dire à l'endroit où débute la contraction dans le cas de la paroi extérieure contournée (Fig. 92). L'effet de la courbure se marque déjà de façon très nette en tête d'aube sous la forme d'une inversion de l'allure des deux distributions. La même comparaison est effectuée aux figures 98 et 99, dans le plan $z/C_{ax} = 0.912$, c'est-à-dire un peu en amont du bord de fuite de l'aubage (Fig. 92). L'effet dû à la présence des parois contournées est indéniable : une nette diminution du gradient de pression radial est observée à la figure 98 tandis qu'une diminution de la déflexion angulaire subie par l'écoulement est observée à la figure 99.

Nous avons ensuite considéré les valeurs obtenues en trois plans en aval du bord de fuite : $z/C_{ax} = 1.043$, $z/C_{ax} = 1.174$ et $z/C_{ax} = 1.702$. Dans le cas de la paroi extérieure cylindrique, la comparaison des gradients de pression radiaux en ces trois plans est effectuée à la figure 100 : la variation est pratiquement nulle. Au contraire, dans le cas de la paroi extérieure contournée, on remarque comment ce gradient de pression varie encore en aval du bord de fuite (Fig. 101). Ceci est dû à la disparition de toute courbure de la paroi extérieure dans le sens axial et également à la condition d'équilibre radial que l'on impose au droit du plan de sortie. On observe cependant encore dans le plan de sortie ($z/C_{ax} = 1.702$) la diminution du gradient de pression radial due à la présence de la paroi contournée. Les mêmes commentaires sont valables pour la distribution de l'angle β (Fig. 102). Dans le cas d'une paroi extérieure cylindrique, la variation entre les trois plans est limitée. Dans le cas d'une paroi extérieure contournée, le passage entre les plans $z/C_{ax} = 1.043$ et $z/C_{ax} = 1.174$ est représentatif de la disparition de la courbure dans le sens axial tandis que cette variation est beaucoup plus faible entre les plans $z/C_{ax} = 1.174$ et $z/C_{ax} = 1.702$. Il est également important de ne pas perdre de vue la différence de déflexion angulaire (près de 4°) qui existe au pied de l'aubage entre les deux configurations; elle montre bien l'influence

que la présence de parois contournées a sur le profil de vitesse au droit du plan de sortie de la grille d'aubes.

Eu égard aux résultats que nous venons de présenter, nous constatons que les différences observées entre les deux configurations (paroi extérieure contournée ou cylindrique) sont relativement réduites. Il est vrai que la variation de la hauteur de l'aubage entre les plans d'entrée et de sortie est faible pour le cas de la paroi extérieure contournée. Cette limitation est due uniquement à des contraintes technologiques. La variation de hauteur de l'aube est égale à :

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \frac{r_1 - r_2}{r_2} = 0.062 \quad (4.58)$$

où les indices 1 et 2 représentent respectivement les plans d'entrée et de sortie. Des chercheurs soviétiques (Réf. 66) ont montré expérimentalement qu'il faut atteindre des valeurs de ce paramètre de l'ordre de 0.5 pour que l'usage de parois contournées démontre une différence sensible dans l'écoulement ainsi qu'une nette amélioration de celui-ci par la diminution du coefficient de pertes, de la surdéflexion en tête et au pied de l'aube, des gradients de pression tangentiels et radiaux.

Les inconvénients majeurs de la démarche que nous venons de présenter sont bien entendu l'espace important requis en mémoire d'ordinateur et le temps de calcul nécessaire à l'obtention d'un résultat suffisamment convergé. Pour effectuer nos calculs, nous ne disposons en effet que d'un espace de 131 K-octets en mémoire centrale d'un DEC VAX 11/780 alors que l'exécution du programme dans le cas d'un maillage (65x22x20) nécessiterait un espace de 1675 K-octets. L'usage de la mémoire virtuelle est donc inévitable et entraîne une augmentation importante du temps de calcul par suite de lectures et écritures successives sur disque. Toutes ces considérations font que le temps de calcul est de $2.36 \cdot 10^{-3}$ s CPU par noeud et par pas temporel; ce temps résulte d'une moyenne observée pour l'ap-

plication décrite dans ce paragraphe. Le temps de calcul total nécessité par le calcul de l'écoulement tridimensionnel dans la grille annulaire se répartit donc de la manière suivante :

	Nombre d'itérations	Nombre de noeuds	Temps total CPU
Réseau grossier	3000	3630	25700 s = 7h 08m 20s
Réseau fin	2500	28600	168740 s = 46h 52m 20s
Total			194440 s = 54h 0m 40s

Eu égard à ce temps de calcul, le programme a été écrit de manière modulaire, comme pour le cas du calcul bidimensionnel de l'écoulement dans un étage de turbine. Tous les résultats, tant intermédiaires que finaux, sont conservés sur disque après une exécution, permettant de poursuivre la procédure numérique si l'utilisateur le juge nécessaire. Ceci permet, d'une part, de ne pas bloquer l'accès à l'ordinateur pendant une période trop longue et, d'autre part, de ne pas devoir imposer de prime abord un nombre d'itérations exagéré pour être sûr d'obtenir une solution convergée.

4.2 ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL EN ÉTAGE DE TURBINE

4.2.1 Introduction

Nous possédons à présent tous les éléments nécessaires à la réalisation de la dernière étape de notre démarche : le calcul de l'écoulement adiabatique tridimensionnel d'un fluide parfait non visqueux dans un étage de turbine. Nous avons établi précédemment (Chapitre 1) les raisons pour lesquelles nous avons choisi d'imposer une condition de solution stationnaire à ce problème. C'est dans le cas d'une géométrie tridimensionnelle que l'on comprend le mieux le bien-fondé de cette restriction : les temps de calcul élevés déjà nécessaires en grille d'aubes et mentionnés au paragraphe 4.1.8 ainsi que l'espace très important requis en mémoire d'ordinateur ne permettent pas, à notre niveau, la résolution d'un écoulement réellement instationnaire.

Comme nous l'avons montré au paragraphe 3.2.1 pour les problèmes d'écoulements bidimensionnels, nous devons donc, afin de vérifier mathématiquement cette hypothèse d'écoulement stationnaire, définir entre le stator et le rotor, le long de la direction radiale, une série de "plans" dans lesquels les différentes inconnues de base (ρ , ρV_r , ρV_θ , ρV_z et ρE) possèdent une distribution uniforme dans la direction tangentielle. De cette manière, nous pouvons à nouveau scinder le problème de l'écoulement dans un étage en deux problèmes d'écoulement en grille d'aubes, couplés par leurs conditions aux frontières.

4.2.2 Principe général de la méthode de résolution

Le principe général de la méthode de résolution découle de l'extension à une géométrie tridimensionnelle de la démarche réalisée au paragraphe 3.2 pour le calcul bidimensionnel de l'écoulement dans un étage de turbine : l'écoulement dans l'étage est déterminé à partir de deux calculs d'écoulement en grille d'aubes, couplés par leurs conditions aux limites.

Un couplage correct permet de tenir compte de l'interaction existant entre le stator et le rotor. Le nombre de conditions à imposer au droit de la frontière commune aux deux rangées d'aubes (plan de sortie du stator = plan d'entrée du rotor) ainsi que la manière utilisée pour les déterminer doit, non seulement garantir le caractère "bien posé" du problème mathématique, mais également assurer la possibilité d'un passage correct des ondes de perturbation d'une rangée d'aubes à l'autre afin de ne pas entraver le processus d'amortissement et d'élimination de ces ondes; leur entassement, au droit de la frontière commune doit être évité à tout prix car il finit par provoquer l'instabilité numérique.

Nous décrirons, aux paragraphes 4.2.5 et 4.2.6.2 comment nous avons construit ces différentes conditions aux limites afin d'assurer le passage correct de l'information d'une rangée d'aubes à l'autre.

4.2.3 Discrétisation du domaine physique de l'écoulement

La discrétisation du domaine physique de l'écoulement est effectuée de façon absolument semblable à celle qui a été exposée au paragraphe 4.1.3 pour les calculs tridimensionnels d'écoulement en grille d'aubes annulaire. La démarche générale de résolution que nous avons adoptée est telle que les maillages relatifs au stator et au rotor peuvent être construits de manières totalement indépendantes. La seule restriction est d'utiliser le même nombre de noeuds dans les deux rangées d'aubes. Les domaines statorique et rotorique sont étendus en amont et en aval; approximativement dans la direction de l'écoulement (absolu pour le stator et relatif pour le rotor), de la longueur d'une dimension caractéristique de l'aubage concerné, afin de permettre l'imposition de conditions aux limites physiques uniformes dans la direction tangentielle au droit des plans d'entrée et de sortie et de pouvoir vérifier ainsi la condition d'écoulement stationnaire. Nous avons discuté au paragraphe 3.2.3 l'influence de l'espace créé entre les

deux rangées d'aubes. Il ressort également des résultats numériques présentés au paragraphe 4.1.8 (Fig. 100, 101 et 102) que les valeurs des paramètres décrivant l'écoulement évoluent relativement peu en aval du bord de fuite, au-delà d'une distance égale à environ 20% de la corde axiale.

Dans le maillage tridimensionnel, les éléments de contrôle définis au paragraphe 4.1.3.1 ont été utilisés (Fig. 82 et 83). Le changement de coordonnées défini au paragraphe 4.1.4.3 (Fig. 84) est conservé pour calculer le volume et l'aire des projections dans les directions r , θ et z , des différentes faces de cet élément. Nous conservons également la notation suivante :

- plan 1 : plan d'entrée du stator
= plan d'entrée de l'étage
- plan 2 : plan de sortie du stator
= plan d'entrée du rotor
- plan 3 : plan de sortie du rotor
= plan de sortie de l'étage

4.2.4 Définition du système d'équations aux dérivées partielles

Le système d'équations aux dérivées partielles modélisant l'écoulement que nous désirons étudier est le système d'équations d'Euler, écrit sous forme instationnaire. Pour résoudre l'écoulement tridimensionnel dans un étage de turbine, nous avons procédé d'une manière un peu différente de celle utilisée pour résoudre les écoulements bidimensionnels; au lieu de traiter un écoulement absolu dans le stator et un écoulement relatif dans le rotor, nous avons décidé de considérer l'écoulement absolu dans le stator et le rotor. La principale raison de cette modification est d'ordre purement pratique : le même système d'équations peut être appliqué à l'écoulement dans les deux rangées d'aubes (avec $\Omega = 0$ dans le stator). Nous allégeons ainsi le travail de programmation et nous réduisons

également le risque d'erreur dans un programme déjà extrêmement complexe. D'autre part, les valeurs numériques des conditions aux frontières intermédiaires, dont nous parlerons dans la suite, sont immédiatement disponibles et n'exigent plus l'application des relations existant dans les triangles de vitesses.

Les équations à résoudre sont dérivées du système (4.6) et s'écrivent, dans un système d'axes (r, θ, z) relatif à chaque rangée d'aubes considérée, de la manière suivante :

Ecoulement dans le stator :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{f}(\vec{\sigma})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}(\vec{\sigma})) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}(\vec{\sigma})) + \vec{b}(\vec{\sigma}) = 0 \quad (4.59)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V_r \\ \rho V_\theta \\ \rho V_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_r \\ \rho V_r^2 + p \\ \rho V_r V_\theta \\ \rho V_r V_z \\ V_r (\rho E + p) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_\theta \\ \rho V_r V_\theta \\ \rho V_\theta^2 + p \\ \rho V_z V_\theta \\ V_\theta (\rho E + p) \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_z \\ \rho V_r V_z \\ \rho V_\theta V_z \\ \rho V_z^2 + p \\ V_z (\rho E + p) \end{pmatrix} \quad \vec{b}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho V_\theta^2}{r} - \frac{p}{r} \\ \frac{\rho V_r V_\theta}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecoulement dans le rotor :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{f}(\vec{\sigma})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}(\vec{\sigma})) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}(\vec{\sigma})) + \vec{b}(\vec{\sigma}) = 0 \quad (4.60)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V_r \\ \rho V_\theta \\ \rho V_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_r \\ \rho V_r^2 + p \\ \rho V_r V_\theta \\ \rho V_r V_z \\ V_r (\rho E + p) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho (V_\theta - \Omega r) \\ \rho V_r (V_\theta - \Omega r) \\ \rho V_\theta (V_\theta - \Omega r) + p \\ \rho V_z (V_\theta - \Omega r) \\ (\rho E + p) (V_\theta - \Omega r) \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \rho V_z \\ \rho V_r V_z \\ \rho V_\theta V_z \\ \rho V_z^2 + p \\ V_z (\rho E + p) \end{pmatrix} \quad \vec{b}(\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho V_\theta^2}{r} - \frac{p}{r} \\ \frac{\rho V_r V_\theta}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces systèmes sont complétés par l'équation d'état d'un gaz parfait et l'équation définissant l'énergie totale, également écrites sous forme adimensionnelle :

$$p = \rho T$$

$$E = \frac{T}{\gamma - 1} + \frac{V_r^2 + V_\theta^2 + V_z^2}{2} \quad (4.61)$$

Les systèmes d'équations (4.59) et (4.60) sont de nature hyperbolique par rapport à la variable temporelle, quel que soit le régime de l'écoulement. Toutes les conditions sont donc réunies pour les résoudre par une méthode dépendante du temps et une approche par volumes finis.

4.2.5 Détermination des conditions aux frontières

La méthode que nous avons choisi d'utiliser consiste à résoudre l'écoulement dans un étage à partir de deux calculs d'écoulement en grille d'aubes; nous devons donc déterminer correctement le nombre et la nature des conditions aux limites physiques à appliquer au droit des plans d'entrée et de sortie de ces deux rangées d'aubes. Pour chaque grille, ces conditions se déterminent selon la démarche exposée au paragraphe 4.1.5.1; nous allons brièvement la résumer. Si on désigne par LM le nombre de noeuds de discrétisation utilisés dans la direction radiale, un ensemble de 4LM conditions aux limites physiques doit être imposé au droit du plan d'entrée (distributions radiales de pression totale absolue, de température totale absolue et des deux angles de l'écoulement absolu) tandis qu'un ensemble de LM conditions doit être spécifié au droit du plan de sortie (pression statique au pied de l'aube et distribution radiale de cette pression établie de manière à vérifier l'équilibre radial, ou définition complète de la distribution radiale de pression statique); toutes ces conditions présentent une distribution uniforme dans la direction tangentielle. Elles ne sont, de plus, applicables que lorsque la composante axiale de la vitesse est inférieure à la vitesse du son, ce qui est le cas dans la majorité des turbines actuelles.

Si la composante axiale de l'écoulement est supersonique au droit des plans d'entrée et de sortie, 5LM conditions doivent être imposées en amont et aucune condition n'est spécifiée en aval.

En amont du stator et en aval du rotor, c'est-à-dire en amont et en aval de l'étage, la détermination des valeurs numériques à imposer aux conditions aux limites naturelles est triviale : elles proviennent des données du problème. En aval du rotor, la première option décrite ci-dessus est utilisée : la distribution radiale de pression statique est corrigée périodiquement au moyen de l'équation (4.52). Au droit du plan

intermédiaire (sortie du stator, entrée du rotor), les valeurs numériques à appliquer ne peuvent pas être des données du problème puisque l'écoulement n'y est pas connu a priori. Elles doivent donc être adaptées au fur et à mesure de l'évolution du calcul, jusqu'à stabilisation complète. Nous montrerons au paragraphe 4.2.6.2 comment procéder de manière pratique.

Il faut donc imposer ou calculer l'ensemble des conditions aux limites physiques suivant :

- Plan d'entrée du stator :

$$\left. \begin{array}{ll} p_{01a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \\ T_{01a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \\ \beta_{1a}(\ell) \text{ ou } M_{1a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \\ \gamma_{1a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{données du} \\ \text{problème} \end{array} \quad (4.62a)$$

- Plan de sortie du stator

$$p_2(\ell) \quad (\ell = 1, LM) \quad \text{à calculer} \quad (4.62b)$$

- Plan d'entrée du rotor

$$\left. \begin{array}{ll} p_{02a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \\ T_{02a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \\ \beta_{2a}(\ell) \text{ ou } M_{2a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \\ \gamma_{2a}(\ell) & (\ell = 1, LM) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{à calculer} \end{array} \quad (4.62c)$$

-Plan de sortie du rotor

$p_3(\ell)$ ($\ell = 1, LM$)

donnée du
problème

(4.62d)

Toutes ces conditions possèdent, pour chaque valeur intermédiaire du rayon, une distribution uniforme dans la direction tangentielle.

Le processus permettant la détermination de ces conditions aux limites physiques a été décrit de façon détaillée au paragraphe 3.2.5. Nous pouvons le résumer brièvement de la manière suivante :

(I) On détermine une approximation initiale des valeurs numériques des conditions aux limites intermédiaires ainsi que de toutes les inconnues de l'écoulement aux différents noeuds du maillage.

(II) Connaissant les conditions aux limites (provisoires) à appliquer au droit des plans d'entrée et de sortie du stator et du rotor, on entreprend deux calculs en grille d'aubes annulaire selon la méthode décrite au paragraphe 4.1 (schéma à viscosité corrigée).

(III) Après un certain nombre (que nous désignons par Nv_1) d'itérations, on détermine une nouvelle approximation des valeurs des conditions intermédiaires. Puisque les conditions aux limites naturelles représentent physiquement des informations issues de l'extérieur du domaine de calcul, la distribution radiale de pression statique en aval du stator est établie à partir des valeurs des inconnues aux noeuds formant le plan d'entrée du rotor tandis que les distributions radiales de pression et température totales et des angles de l'écoulement en amont du rotor sont déterminées à partir des valeurs des inconnues aux noeuds formant le plan de sortie du stator.

(IV). On reprend la démarche au point (II) jusqu'à stabilisation des conditions intermédiaires et convergence de la procédure numérique.

4.2.6 Mise en oeuvre pratique de la méthode de résolution

4.2.6.1 Choix des conditions initiales

Pour garantir l'existence d'un problème mathématiquement bien posé au sens d'Hadarnard (cfr paragraphe 2.3), un champ initial des inconnues doit encore être déterminé. Afin de pouvoir appliquer, pour chaque valeur intermédiaire du rayon, une démarche analogue à celle exposée au paragraphe 3.2.6.1 pour les écoulements bidimensionnels en étage, nous devons disposer de la distribution radiale de pression statique au droit du plan de sortie du rotor. Malheureusement, dans la majorité des applications traitées, nous ne possédons aucun renseignement au sujet de celle-ci. L'approche décrite au paragraphe 4.1.5.1, basée sur la vérification de l'équilibre radial au droit de ce plan, n'est pas applicable puisque le champ de vitesses n'est pas encore connu. Nous sommes donc forcés d'imposer une distribution initiale de manière arbitraire. La conséquence en est que la distribution radiale de pression obtenue au droit du plan intermédiaire (en aval du stator) est fort imprécise et n'a qu'une vague ressemblance avec la situation réelle. Si, par exemple, on impose une distribution radiale de pression uniforme en aval du rotor, ce qui est une bonne approximation de ce qui est généralement rencontré dans un étage de turbine, la distribution obtenue en aval du stator est également uniforme, ce qui n'a plus rien à voir avec la réalité. Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, cette situation a une influence déterminante sur la manière de calculer numériquement les valeurs des conditions aux limites en aval du stator.

A partir de la distribution radiale approchée de la pression statique intermédiaire, ainsi qu'en utilisant les relations caractérisant la transformation isentropique, un champ initial des inconnues est déterminé dans les deux rangées d'aubes d'une manière analogue à celle exposée au paragraphe 4.1.6.

4.2.6.2 Expressions numériques des conditions aux limites physiques intermédiaires

Nous avons montré au paragraphe 4.1.5.1 que deux options étaient disponibles pour définir la distribution de pression statique au droit du plan de sortie d'une grille d'aubes annulaire. La première option consiste à imposer la valeur de la pression statique au pied de l'aubage ainsi qu'une loi de variation de cette pression le long du rayon, établie de manière à vérifier l'équilibre radial; la deuxième consiste à imposer la pression statique pour toutes les valeurs intermédiaires du rayon. Au droit du plan de sortie du rotor (ou de l'étage), notre choix s'est porté sur la première possibilité. En effet, au stade de la conception d'un étage de turbine, la distribution radiale de pression statique régnant en aval de cet étage n'est généralement pas connue a priori; le fait d'imposer la vérification de l'équilibre radial au droit du plan de sortie de l'étage garantit l'existence d'une solution physiquement acceptable (... pour un écoulement non visqueux).

Lors des premières tentatives du calcul de l'écoulement dans un étage de turbine, nous avons voulu appliquer la deuxième option pour définir la distribution radiale de pression statique au droit du plan intermédiaire. Ceci revient à dire que, au droit du plan de sortie du stator, pour chaque valeur intermédiaire du rayon, la valeur de la pression statique était calculée à partir des valeurs des inconnues au rayon correspondant dans le plan d'entrée du rotor. Nous pensions, de cette manière, conserver la plus grande généralité possible au traitement de la frontière intermédiaire et assurer un passage maximum des ondes de perturbation d'une rangée d'aubes à l'autre. Nous avons appliqué ce raisonnement à l'étude de l'écoulement dans l'étage de turbine qui sera installé dans la soufflerie T1 (Fig. 90); la géométrie de cet étage sera décrite au paragraphe 4.2.7. Pour l'exemple proposé, un rapport de pression ($p_3/p_{01a,ref}$) égal à 0.7 a été imposé au moyeu. Nous avons représenté aux figures 103, 104 et 105 l'évolution de la pression

statique intermédiaire, de l'angle absolu de sortie du stator et de l'angle absolu de sortie du rotor en fonction du nombre d'itérations; les valeurs représentées sont celles obtenues au rayon moyen. La procédure numérique est stable mais la solution obtenue n'est manifestement pas convergée, même après un nombre aussi important d'itérations.

Ce comportement trouve, à notre avis, son origine dans la difficulté d'établir une première approximation de la distribution radiale de pression statique en aval du stator. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, cette première approximation n'a généralement rien de physique; des perturbations importantes apparaissent donc dans le domaine numérique de l'écoulement. Un examen attentif des résultats obtenus montre qu'elles se concentrent aux alentours du plan intermédiaire et qu'elles ne s'amortissent que très lentement. Le nombre d'itérations qu'il faudrait effectuer pour obtenir une solution acceptable est bien entendu beaucoup trop élevé.

Afin d'améliorer cette situation, nous avons modifié le principe du calcul de la distribution radiale de pression au droit du plan intermédiaire. La valeur de la pression régnant au moyeu est calculée à partir des valeurs des inconnues au rayon correspondant dans le plan d'entrée du rotor et le reste de la distribution est déterminé au moyen de la relation (4.52), de manière à vérifier l'équilibre radial au droit du plan de sortie du stator. Appliquée au même exemple numérique que ci-dessus, cette approche permet d'obtenir les résultats décrits aux figures 106, 107 et 108. Elles représentent l'évolution de la pression statique intermédiaire, de l'angle absolu de sortie du stator et de l'angle absolu de sortie du rotor en fonction du nombre d'itérations. Les valeurs portées dans ces graphiques sont celles obtenues au rayon moyen. On remarque que la stabilisation des valeurs intermédiaires nécessite beaucoup moins d'itérations que dans le cas précédent : elle est obtenue après 4000 ... 5000 itérations. Le problème posé par la première approximation de la distribution radiale de la pression intermédiaire disparaît donc puisque, dès les premières étapes tempo-

relles, on impose une loi de variation correcte de cette distribution, ce qui n'était pas le cas dans la démarche précédente.

Le calcul des valeurs des conditions aux limites physiques à appliquer au droit du plan d'entrée du rotor est effectué, pour chaque valeur intermédiaire du rayon, à partir des valeurs des inconnues au rayon correspondant dans le plan de sortie du stator.

Les équations algébriques permettant de calculer les valeurs numériques des conditions aux limites physiques intermédiaires s'écrivent de la manière suivante :

- Plan de sortie du stator :

$$p_2(\lambda) = (\gamma-1) \rho E(\lambda) - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\rho V_r(\lambda))^2 + (\rho V_\theta(\lambda))^2 + (\rho V_z(\lambda))^2}{\rho(\lambda)} \quad (4.63)$$

($\lambda = 1$)

Dans cette équation, les valeurs des paramètres intervenant dans le membre de droite résultent d'une moyenne massique sur un pas (équation (4.50)) des valeurs au rayon correspondant, c'est-à-dire la valeur la plus proche du rayon du moyeu, dans le plan d'entrée du rotor. Connaissant la pression statique au premier rayon ($\lambda = 1$), la distribution complète ($\lambda = 2, LM$) est calculée au moyen de l'équation (4.52).

- Plan d'entrée du rotor :

$$p(\lambda) = (\gamma-1) \rho E(\lambda) - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\rho V_r(\lambda))^2 + (\rho V_\theta(\lambda))^2 + (\rho V_z(\lambda))^2}{\rho(\lambda)} \quad (\lambda = 1, LM)$$

$$T_{02}(\lambda) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho E(\lambda) + p(\lambda)}{\rho(\lambda)} \quad (\lambda = 1, LM) \quad (4.64)$$

$$p_{02}(\lambda) = p(\lambda) \left(\frac{T_{02}(\lambda)}{p(\lambda)/\rho(\lambda)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\lambda = 1, LM) \quad (4.65)$$

$$\beta_2(\ell) = \text{arc tg } (\rho V_\theta(\ell) / \rho V_z(\ell)) \quad (\ell = 1, LM) \quad (4.66)$$

$$\gamma_2(\ell) = \text{arc tg } (\rho V_r(\ell) + \rho V_z(\ell)) \quad (\ell = 1, LM) \quad (4.67)$$

Les valeurs des inconnues intervenant dans le membre de droite résultent d'une moyenne massique sur un pas (équation (4.50)) des valeurs au rayon correspondant dans le plan de sortie du stator.

4.2.6.3 Nombre d'itérations entre deux mises à jour des conditions aux limites physiques intermédiaires

Au paragraphe 4.2.5, nous avons expliqué que les valeurs numériques des conditions aux limites physiques intermédiaires devaient être adaptées toutes les Nv_1 itérations afin d'obtenir, après un certain nombre de ces adaptations, des valeurs numériques stabilisées. Nous avons étudié l'influence du paramètre Nv_1 dans le cas de la résolution d'écoulements bidimensionnels en étage (paragraphe 3.2.6.2) et avons montré que, pour ceux-ci, la valeur optimale de ce paramètre était de l'ordre de $3Nv$, Nv étant le nombre d'itérations entre deux mises à jour successives des termes visqueux du schéma à viscosité corrigée. Nous avons voulu généraliser cette conclusion aux problèmes d'écoulements tridimensionnels en étage, mais, à notre grande surprise, de sérieux problèmes d'instabilité numérique se sont posés. Pour une valeur du rapport (Nv_1/Nv) égale à 3, une solution stable n'était obtenue que pour des valeurs relativement basses du coefficient de viscosité numérique VC , de l'ordre de 0.9, et du coefficient de sécurité du pas temporel, de l'ordre de 0.2 ... 0.3. Il en va de même pour des valeurs du rapport (Nv_1/Nv) égales à 2 et même 1. Il est évident que de telles limitations pénalisent fortement la précision du résultat obtenu et la vitesse de convergence du processus numérique.

La seule manière d'éviter ce problème et d'obtenir une solution stable pour des valeurs courantes des coefficients numériques VC et CFL est d'imposer une valeur du paramètre Nv_1

égale à 1. Nous ne prétendons pas qu'une valeur plus élevée ne puisse pas être acceptable dans certains cas particuliers; nous disons simplement que, de manière générale, une valeur égale à l'unité assure la stabilité du processus numérique, ce qui, à notre avis, est un argument suffisant lorsqu'on sait que la durée d'un calcul se chiffre en plusieurs dizaines d'heures et qu'une optimisation est donc impensable. Il est également important de noter qu'une valeur de Nv_1 égale à 1 n'introduit aucune instabilité et est parfaitement utilisable dans le cas de problèmes bidimensionnels.

4.2.6.4 Choix des conditions aux limites purement numériques

Le choix de la nature des conditions aux limites numériques préservant la stabilité du processus de résolution est basé sur les conclusions tirées des études réalisées aux paragraphes 3.2.6.5 (écoulement bidimensionnel en étage de turbine) et 4.1.5.2 (écoulement tridimensionnel en grille d'aubes). L'extension aux problèmes tridimensionnels des conditions additionnelles utilisées dans le cas d'écoulements bidimensionnels a pu être réalisée sans trop de difficultés. Nous avons construit des conditions aux frontières numériques basées sur la résolution, par le schéma à viscosité corrigée, des équations de conservation intégrées sur un demi-volume élémentaire adjacent au plan d'entrée ou de sortie. Si nous conservons la notation utilisée au paragraphe 4.1.5.2, la combinaison utilisée est la suivante :

- Plan d'entrée du stator :

★ condition CL4 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale)

- Plan de sortie du stator :

★ condition CL1 (équation de conservation de la masse)

★ condition CL2 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale)

- * condition CL3 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction tangentielle)
- * condition CL4 (équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale)

- Plan d'entrée du rotor :

- * condition CL4

- Plan de sortie du rotor :

- * condition CL1
- * condition CL2
- * condition CL3
- * condition CL4.

On remarque donc que, comme précédemment, l'équation de conservation de l'énergie n'est pas utilisée. Notre expérience est qu'elle provoque l'apparition d'instabilités dans la démarche numérique lorsqu'elle intervient dans la définition de conditions aux frontières.

L'application de ces différentes conditions, demi-élément par demi-élément, ne permet pas d'obtenir des distributions uniformes des différentes inconnues de base dans la direction tangentielle. C'est pour cette raison que les paramètres utilisés dans les équations (4.63) à (4.67) résultent, pour chaque rayon intermédiaire, d'une moyenne massique sur un pas des valeurs aux noeuds formant les plans de sortie du stator et d'entrée du rotor.

4.2.7 Description de quelques résultats numériques

Afin de mettre en pratique notre programme de calcul, nous avons étudié l'écoulement dans l'étage de turbine construit à partir des aubages installés dans la soufflerie T1 de l'Institut von Karman de Dynamique des Fluides (Fig. 90); nous le désignerons sous le nom d'étage 3. Les aubes statoriques et

rotoriques ont la même forme géométrique et le même angle de calage. Leurs caractéristiques sont décrites au tableau 19 et à la figure 91. Nous avons considéré le même nombre d'aubages, à savoir 21, dans le stator et le rotor et avons choisi d'utiliser la paroi cylindrique comme configuration géométrique du carter. La raison du choix de cette application provient du fait que cette configuration sera bientôt installée à l'Institut von Karman et que les résultats obtenus par notre méthode pourront être comparés, du moins qualitativement, à ceux provenant des mesures.

La discrétisation du domaine de l'écoulement a été réalisée au moyen des volumes de contrôle décrits au paragraphe 4.1.3.3. Ces éléments sont construits dans deux maillages (un pour chaque rangée d'aubes) constitués de 33 "plans" de discrétisation dans la direction axiale, dont 21 sont situés entre les bords d'attaque et de fuite et de 9 "plans" de discrétisation dans les directions tangentielle et radiale. Pour chacun de ces deux domaines numériques, les valeurs des différentes inconnues de l'écoulement sont donc définies en $(33 \times 8 \times 8 =) 2112$ noeuds de discrétisation. Nous avons choisi d'utiliser ce maillage relativement grossier pour des raisons de limitation du temps de calcul. Les conditions de fonctionnement de l'étage sont les suivantes :

$$p_3/p_{01} = 0.7 \quad \text{au rayon de pied}$$

$$N_r = 3000 \text{ tr/min}$$

$$T_{01} = 288 \text{ K}$$

$$p_{01} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

Pour cette application, nous avons choisi les valeurs suivantes des paramètres numériques du schéma à viscosité corrigée :

$$N_v = 20$$

$$V_C = 0.98$$

$$C.F.L. = 0.8$$

$$N_{v_1} = 1.$$

De manière analogue à ce qui a été fait au paragraphe 3.2.7 pour les problèmes d'écoulement bidimensionnel en étage, nous avons vérifié la qualité de la convergence de la procédure numérique en considérant l'évolution temporelle des trois paramètres suivants :

- la pression statique intermédiaire au rayon moyen
(p_2, r_{moyen})
- l'angle absolu de sortie du stator au rayon moyen
($\alpha_2, r_{\text{moyen}}$)
- l'angle absolu de sortie du rotor au rayon moyen
($\alpha_3, r_{\text{moyen}}$).

L'évolution des valeurs de ces trois paramètres en fonction du nombre d'itérations effectuées a été représentée aux figures 106, 107 et 108; on constate bien leur complète stabilisation. et nous avons montré, tout au long de ce travail, que l'évolution de la valeur de l'angle de sortie était une bonne mesure du niveau de convergence atteint. Un grand nombre d'itérations (8000) a été imposé à dessein afin de vérifier la stabilité de la procédure numérique. En réalité, il suffit d'effectuer 4000 ... 5000 itérations pour obtenir un résultat acceptable. Finalement; nous avons représenté, à la figure 109, une nouvelle fois l'évolution de la valeur de la pression statique intermédiaire, au rayon moyen, mais en utilisant une autre échelle temporelle, afin de mieux se rendre compte de l'évolution temporelle de ce paramètre.

Nous allons maintenant décrire quelques-uns des résultats obtenus. A la figure 110, nous avons représenté les distributions radiales de la pression statique en amont, au droit du plan intermédiaire et en aval de l'étage. Nous obtenons des distributions quasi-uniformes au droit des plans d'entrée et de sortie de l'étage, ce qui n'est plus le cas au droit du plan intermédiaire. Les distributions radiales de l'angle absolu de sortie du stator et de l'angle relatif d'entrée du rotor ont été représentées aux figures 111 et 112. Comme les aubages que nous étudions ne présentent aucun vrillage, nous devons nous attendre à observer de grandes variations d'incidence le long de leur hauteur, à l'entrée du rotor; l'existence de ces variations est bien mise en évidence à la figure 112. Nous avons également représenté les distributions radiales des angles absolu et relatif de sortie du rotor (Fig. 113 et 114). Une variation d'environ 15° est observée entre les valeurs de l'angle absolu de sortie au rayon de tête et au rayon de pied. Une comparaison des triangles de vitesses en aval du stator et du rotor a également été effectuée pour différentes valeurs intermédiaires du rayon (Fig. 115a et b); nous avons calculé ces triangles de vitesses aux rayons de pied, moyen et de tête. Ici encore on observe les importantes variations d'angles le long de la hauteur, dues à l'utilisation d'aubes droites. Finalement, nous avons comparé à la figure 116 les distributions du nombre de Mach isentropique, absolu dans le stator et relatif dans le rotor, obtenues pour les trois valeurs intermédiaires du rayon mentionnées ci-dessus. On remarque également de manière très nette l'importante incidence, particulièrement en tête d'aube, à laquelle sont soumis les aubages rotoriques.

Nous terminerons ce paragraphe par quelques considérations au sujet des temps de calcul nécessaires. Dans le cas de l'application présentée ci-dessus, le programme complet nécessite une place en mémoire de l'ordre de 570 K-octets. Comme nous ne disposons que de 131 K-octets en mémoire centrale d'un DEC VAX 11/780, nous devons à nouveau utiliser le principe de la mémoire virtuelle, ralentissant l'exécution du programme par des lectures et écritures intermédiaires sur disque. Le temps de calcul

observé est de $2.13 \cdot 10^{-3}$ s par noeud et par pas temporel ce qui, pour 8000 itérations et 4224 noeuds nous mène à un temps total de 71977 s, soit 19 h 59 m 37 s. Si seulement 5000 itérations sont effectuées, le temps total de calcul est de l'ordre d'une douzaine d'heures. Comme dans le cas des écoulements bidimensionnels en étage, le nombre d'itérations nécessaire est variable d'une application à l'autre. C'est pour cette raison, en plus de celles déjà mentionnées au paragraphe 4.1.8, que nous avons à nouveau écrit nos programmes de façon modulaire, permettant de réaliser le calcul complet en plusieurs étapes.

CONCLUSIONS

L'étude de l'écoulement adiabatique unidimensionnel d'un fluide parfait non visqueux dans une tuyère convergente-divergente nous a permis de comparer plusieurs schémas numériques explicites aux différences finies du point de vue de leur stabilité, de leur vitesse de convergence et de leur précision. Dans le cadre des applications qui nous étaient proposées, nous avons établi la supériorité du schéma numérique à viscosité corrigée développé par McDonald et al. et avons démontré la grande amélioration apportée, sur le plan de la stabilité, par l'introduction d'un caractère semi-implicite dans le terme de viscosité numérique. Nous avons également considéré différents moyens d'augmenter la vitesse de convergence.

L'expérience nous ayant montré l'influence importante des conditions aux limites additionnelles sur la stabilité du processus numérique de résolution, nous avons entrepris une étude systématique des différentes conditions applicables ainsi que de leurs combinaisons. Comme la plupart des publications restent silencieuses dans ce domaine, nous avons ainsi pu effectuer une mise au point à ce sujet.

L'étude de l'écoulement adiabatique bidimensionnel d'un fluide parfait non visqueux dans une grille d'aubes nous a donné l'occasion d'effectuer une comparaison originale détaillée de la consistance et de l'ordre de précision des discrétisations obtenues au moyen de différents éléments de contrôle. Après avoir établi les avantages et inconvénients de ces éléments, nous avons proposé une discrétisation basée sur l'emploi d'une surface de contrôle bitrapézoïdale, utilisée par Van Hove et al.

Comme dans le cas des problèmes unidimensionnels, une analyse approfondie de l'influence de la nature des conditions aux limites additionnelles sur la stabilité a été réalisée. Plusieurs applications numériques ont ensuite été présentées;

les résultats obtenus, comparés à ceux obtenus par des mesures en soufflerie et par d'autres méthodes numériques, démontrent clairement le bon comportement de notre démarche.

Une méthode de résolution de l'écoulement bidimensionnel dans un étage de turbine a été présentée; elle est basée sur une hypothèse d'écoulement stationnaire pour des raisons de limitation du temps de calcul en vue de l'extension à une géométrie tridimensionnelle. Elle consiste à résoudre l'écoulement dans l'étage à partir de deux calculs d'écoulement en grille d'aubes, couplés par leurs conditions aux limites. Après avoir étudié de façon approfondie la manière d'appliquer les conditions aux limites régnant entre le stator et le rotor, deux applications numériques ont été présentées et comparées à des résultats de mesure : une bonne concordance des résultats a été observée.

L'étude de l'écoulement adiabatique tridimensionnel d'un fluide parfait non visqueux dans une grille d'aubes annulaire nous a permis d'effectuer un traitement géométrique rigoureux de la discrétisation du domaine physique de l'écoulement. Une étude approfondie des conditions aux frontières a également été réalisée, démontrant notamment la nécessité de vérifier l'équilibre radial au droit du plan de sortie de la grille d'aubes. Les conditions additionnelles ont également été considérées; nous avons montré qu'une seule combinaison de ces conditions présentait des garanties suffisantes de stabilité. Le grand désavantage de la démarche demeure évidemment le temps de calcul nécessaire (plusieurs dizaines d'heures) et la place requise en mémoire d'ordinateur (plus de 1500 K-octets).

Finalement, la démarche utilisée pour calculer un écoulement bidimensionnel dans un étage de turbine a été étendue à une géométrie tridimensionnelle. Toutes les conclusions précédentes n'ont pas été retrouvées en ce sens que la mise à jour des conditions aux limites intermédiaires doit être effectuée après chaque itération. A cette condition, la procédure

numérique est stable. Une comparaison des résultats obtenus en utilisant divers types de conditions aux frontières physiques nous a amené à la conclusion d'imposer une loi vérifiant l'équilibre radial au droit du plan intermédiaire entre le stator et le rotor. Dans ce cas, la procédure numérique se stabilise après un nombre raisonnable d'itérations. L'inconvénient majeur de la méthode est à nouveau le temps de calcul et l'espace requis en mémoire.

REFERENCES

1. WU, C.H.: A general theory of three dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial-, radial- and mixed-flow types.
NACA TN 2604, 1952.
2. GUDERLEY, K.G.: *The Theory of Transonic Flow*.
Pergamon Press, 1962.
3. HORLOCK, J.H.: *Axial Flow Turbines*.
London, Butterworths, 1966.
4. CRAIG, H.R.M. & COX, H.J.A.: Performance estimation of axial flow turbines.
Proc. Inst. Mech. Engrs, Vol. 185, 32/71, pp 407-424.
5. RAJAN, S.: Evaluation of numerical viscosity effects in transonic flow calculations.
AIAA Paper 73-131, January 1973.
6. LAX, P. & WENDROFF, B.: Systems of conservation laws.
Comm. Pure & Appl. Math., Vol. XIII, 1960, pp 217-237.
7. McNALLY, W.D. & SOCKOL, P.M.: Computational methods for internal flows with emphasis on turbomachinery.
NASA TM 82764, November 1981.
8. GOSTELOW, J.P.: Review of compressible flow theories for airfoil cascades.
ASME Transact., Series A : J. Engrg for Power, Vol. 95, No 3, October 1973, pp 281-292.
9. KATSANIS, T.: Computer program for calculating velocities and streamlines on a blade to blade stream surface of a turbomachine.
NASA TN D 4525, April 1968.
10. WILKINSON, D.H.: Calculation of blade to blade flow in a turbomachine by streamline curvature.
ARC R&M 3704, December 1972.
11. MOFFATT, C.: Compressible flow and shock waves.
VKI Course Note 111, June 1979.
12. KUTLER, P.: Computation of three dimensional, inviscid supersonic flows. in
"Progress in Numerical Fluid Dynamics"
Berlin, Springer Verlag, 1975.
13. DECUYPERE, R.H.: Berekening van de bidimensionele, wrijvingsloze, schokgolfvrije stroming doorheen subkritische, kritische en superkritische turbineschoepenringen.
Bouw van een bidimensionele transsonische stoomtunnel.
Thèse de Doctorat, Université de Gand, août 1973.

14. MURMAN, E.M. & COLE, J.D.: Calculation of plane steady flow.
AIAA J., Vol. 9, No 1, January 1971, pp 114-121.
15. DODGE, P.: Transonic relaxation.
VKI Lecture Series 84 "Transonic Flows in Axial Turbomachinery", February 1976.
16. GOPALAKRISHNAN, S. & BOZZOLA, R.: Computation of shocked flows in compressor cascades.
ASME Paper 72 GT 31, 1972.
17. McDONALD, P.W.: The computation of transonic flow through two dimensional gas turbine cascades.
ASME Paper 71 GT 89, March 1971.
18. COUSTON, M.; McDONALD, P.W.; SMOLDEREN, J.J.: The damping surface technique for time dependent solutions to fluid dynamic problems.
VKI Technical Note 109, 1975.
19. COUSTON, M.: Méthode de calcul de l'écoulement inter-aubes pseudo-tridimensionnel en régime transsonique.
Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1976.
20. DELANEY, R.A. & KAVANAGH, P.: Transonic flow analysis in axial flow turbomachinery cascades by a time-dependent method of characteristics.
ASME Paper 75 GT 8, 1975.
21. ESSERS, J-A. & KAFYEKE, F.: Application of a fast pseudo-unsteady method to steady transonic flows in turbine cascades.
ASME Paper 81 GT 124, March 1981.
22. RIBAUT, M.: Three dimensional calculation of flow in turbo-machines with the aid of singularities.
ASME Transact., Series A : J. Engrg for Power, Vol. 90, No 3, July 1968, pp 258-264.
23. MARTINON, J.: Use of the characteristic method for the prediction of the three dimensional flow field in high transonic compressors.
ASME Transact., Series A : J. Engrg for Power, Vol. 102, No 1, January 1980, pp 96-103.
24. DENTON, J.D. & SINGH, U.K.: Time marching methods for turbomachinery calculations.
VKI Lecture Series 1979-07 "Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines", April 1979.
25. DENTON, J.D. & SIMPKIN, J.: A time marching program for fully three dimensional flow through fixed blade rows of complex geometry.
CEGB Memorandum TG 066; June 1977.

26. BOSMAN, C. & HIGHTON, J.: A calculation procedure for three dimensional, time-dependent, inviscid, compressible flow through turbomachine blades of any geometry. J. Mech. Engrg Sc., Vol. 21, No 1, 1979, pp 39-49.
27. BROCHET, J.: Calcul numérique d'écoulements internes tri-dimensionnels transsoniques. La Recherche Aérospatiale, N° 5, 1980, pp 301-315.
28. MARCHAL, P.: Etude des écoulements secondaires en grilles d'aubes de détente. Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1980.
29. VAN HOVE, W.: Thèse de Doctorat, (à paraître).
30. VAVRA, M.H.: *Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines*. New York, R.E. Krieger Pub. Comp., 1974.
31. TRAUPEL, W.: *Thermische Turbomaschinen I*. Berlin, Springer Verlag, 1977.
32. HIRSCH, Ch.: Finite element method for through-flow calculations. AGARD CP 195 "Through-Flow Calculations in Axial Turbomachinery", Paper 5, May 1976
33. SEARS, W.R.: Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application. J. Aero.Sc., Vol. 8, No 3, January 1941, pp 104-108.
34. KEMP, N.H. & SEARS, W.R.: Aerodynamic interference between moving blade rows. J. Aero.Sc., Vol. 20, No 9, September 1953, pp 585-597.
35. OSBORNE, C.: Compressible unsteady interaction between blade rows. AIAA J., Vol. 11, No 3, March 1973, pp 340-346.
36. ERDOS, J.I. & ALZNER, E.: Computation of unsteady transonic flows through rotating and stationary cascades. NASA CR 2900, December 1977.
37. MITCHELL, N.A.: A time marching method for unsteady two dimensional flow in a blade passage. U. of Cambridge, Dept. of Engineering, CUED/A - Turbo/TR 100, 1980.
38. SMOLDEREN, J.J.: Partial differential equations. VKI Course Note 102, 1978.
39. SMITH, G.D.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1978.
40. RICHTMYER, R.D. & MORTON, K.M.: *Difference Methods for Initial-Value Problems*. 2nd Edition. New York, Interscience Publ. Inc., 1967.

41. ESSERS, J.A.: Méthodes nouvelles pour le calcul numérique d'écoulements stationnaires de fluides parfaits compressibles.
Thèse de Doctorat, Université de Liège, 1977.
42. COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik.
Math. Annalen, Vol. 100, 1928, pp 32-74.
43. KOLLMANN, W.: Numerical solutions of partial differential equations.
VKI Course Note, 1979.
44. VAN HOVE, W. & ARTS, A.: Comparison of several finite difference schemes for time marching methods as applied to one-dimensional nozzle flow.
VKI Technical Note 132, June 1979.
45. ROACHE, P.J.: *Computational Fluid Dynamics*.
Albuquerque, Hermosa Publ., 1976.
46. HIRSCH, Ch.: De numerische behandeling van de vergelijkingen van stromingsmechanica.
Binnenlandse Francqui Leerstoel, 1978-1979.
47. LEHTHAUS, F.: Anwendung eines Zeit-Schritt-Verfahrens zur Berechnung der transsonischen Durchströmung ebener Turbinengitter und experimentelle Überprüfung.
DFVLR 251 77 A 01, February 1977.
48. ESSERS, J.A. & KAFYEKE, F.: A new fast artificial evolution numerical method for transonic flows in turbine cascades.
VKI Technical Note 136, December 1980.
49. ESSERS, J.A.: The numerical simulation of steady supercritical flows over a non-lifting airfoil using a fast artificial time-dependent technique.
BMVg-Vertrag T/RF 42/80001/81 400
T/RF 41/70035/71 434
Dornier GmbH, Friedrichshafen, October 1978.
50. WAUTERS, P.: Turbomachines - Turbogénéatrices.
U. Catholique de Louvain, F.S.A., 1977.
51. COUSTON, M.: Time marching finite area method.
VKI Lecture Series 84 "Transonic Flows in Axial Turbomachinery", February 1976.
52. DICK, E.: De numerische integratie van de Eulervergelijkingen bij de stationaire transsone stroming van een ideaal gas met een relaxatiemethode.
Proefschrift voorgelegd tot het verkrijgen van de graad van Geaggregeerde voor het Hoger Onderwijs, Rijksuniversiteit Gent, Juni 1980.

53. DENTON, J.D.: Extension of the finite area time marching method to three dimensions.
VKI Lecture Series 84 "Transonic Flows in Axial Turbomachinery", February 1976.
54. VAN HOVE, W.: Time marching methods for turbomachinery flow calculations : methods of improving convergence.
VKI Lecture Series 1979-07 "Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines", April 1979.
55. YOUNIS, M.E. & CAMARERO, R.: Finite volume method for blade to blade flows using a body fitted mesh.
AIAA J., Vol. 19, No 11, November 1981, pp 1500-1502.
56. DECONINCK, H. & HIRSCH, Ch.: Finite element methods for transonic blade to blade calculation in turbomachines.
ASME Transact., Series A : J. Engrg for Power, Vol. 103, No 4, October 1981, pp 665-677.
57. GOPALAKRISHNAN, S. & BOZZOLA, R.: Numerical representation of inlet and exit boundary conditions in transient cascade flows.
ASME Paper 73 GT 55, 1973.
58. VIVIAND, H. & VEUILLOT, J.P.: Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques.
ONERA Publication N° 1978-4.
59. SIEVERDING, C.H.: The turbine blade definition. Experimental data on two transonic turbine blade sections and comparison with various theoretical methods.
VKI Lecture Series 59 "Transonic Flows in Turbomachinery", May 1973.
60. SIEVERDING, C.H.; DECUYPERE, R.; HAUTOT, G.: Investigation of transonic steam turbine tip sections with various suction side blade curvatures.
London, The Institution of Mechanical Engineers, Design Conference 1979 on Steam Turbines for the 1980's.
also : VKI Preprint 1979-02.
61. SIEVERDING, C.H.: Base pressure measurements in transonic turbine cascades.
VKI Lecture Series 84 "Transonic Flows in Axial Turbomachinery", February 1976.
62. ARTS, A.: Cascade flow calculations using a finite volume method.
VKI Lecture Series 1982-07 "Numerical Methods for Flows in Turbomachinery Bladings", April 1982.
63. Workshop on two dimensional and three dimensional flow calculations in turbine blades.
VKI Lecture Series 1982-07 "Numerical Methods for Flows in Turbomachinery Bladings", April 1982.

64. DUPONT, R.: Communication privée.
65. MOFFITT, T.P.; SZANCA, E.M.; WHITNEY, W.J.; BEHNING, F.P.:
Design and cold-air test of single stage uncooled
core turbine with high work output.
NASA TP 1680, June 1980.
66. DEJC, M.E. & TROJANOVSKIJ, B.M.: Untersuchung und Berechnung axialer Turbinenstufen.
Berlin, VEB Verlag Technik, 1973.
67. SIEVERDING, C.H.: The VKI low speed turbine facility T-1.
non publié.
68. WHITNEY, W.J.; SZANCA, E.M.; MOFFITT, T.P.; MONROE, D.E.:
Cold-air investigation of a turbine for high-temperature-engine application. I. Turbine design and overall stator performance.
NASA TN D 3751, 1967.

ANNEXE 1 - DESCRIPTION DE LA METHODE UTILISEE PAR
ERDOS ET ALZNER (Réf. 36) POUR RESOUDRE
L'ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL INSTATION-
NAIRE DANS UN ETAGE DE TURBOMACHINE

La grande majorité des méthodes basées sur une technique de résolution dépendante du temps décrivent des écoulements stationnaires : les équations sont résolues sous forme instationnaire mais les conditions aux limites du problème sont invariables dans le temps. Cette technique peut également être utilisée pour résoudre des écoulements que nous qualifierons de périodiques. Si on admet en effet la présence d'un modèle de sillage ou d'un gradient élevé à la sortie du stator, on peut considérer la solution du problème de l'écoulement dans l'étage comme périodique : le rotor "voit" périodiquement les mêmes conditions d'entrée. La fréquence du phénomène dépend du nombre d'aubes de chaque roue. Les conditions aux frontières appliquées à l'entrée et à la sortie de l'étage sont, elles, uniformes et stationnaires.

Afin d'éviter des phénomènes de résonance, les constructeurs évitent de placer le même nombre d'aubes dans le stator et le rotor d'un étage de turbomachine : ceci signifie que le "pas" du sillage modélisé à la sortie du stator est différent du pas du rotor. Si ces pas étaient les mêmes (Fig.A1.a), les écoulements seraient identiques dans chacun des canaux. Les conditions le long des frontières périodiques des canaux XY et YZ sont alors identiques et appliquées comme dans un calcul en grille d'aubes (paragraphe 3.1.3). Dans le cas, plus réaliste, de pas différents (Fig. A1.b), on remarque que les conditions appliquées le long de la frontière périodique inférieure du canal YZ sont identiques à celles appliquées le long de la frontière périodique supérieure du canal XC; autrement dit, le canal XC reflète l'écoulement du canal YZ. Comme tous les canaux sont identiques au point de vue de leur géométrie, on peut également admettre que ces deux écoulements ont lieu dans le même passage

mais à des temps différents : au lieu de décrire l'écoulement dans un repère fixe, on reste attaché à un canal bien défini.

Selon le schéma numérique et la discrétisation utilisés, les inconnues au noeud A (Fig. A2), sur une frontière périodique, sont calculées en fonction des inconnues aux noeuds B, C, D et E où C, C' et C'' sont des noeuds de la pseudo-ligne de courant ($k = 2$). Dans le cas qui nous occupe, ce n'est plus tout à fait exact; les valeurs des inconnues en les noeuds C, C' et C'' sont bien celles de la pseudo-ligne de courant ($k = 2$), mais à un temps t différent de celui considéré aux lignes ($k = KM-1$) et ($k = KM$) comme nous l'avons montré intuitivement ci-dessus pour un cas simple : on applique donc une condition de périodicité mais elle est déphasée dans le temps.

Si on désire, par la suite, introduire un couplage de l'écoulement non visqueux avec un modèle de couche limite et de sillage, les frontières périodiques doivent être remplacées par des lignes de glissement en aval du stator et du rotor de manière à pouvoir modéliser de véritables sillages dans un stade ultérieur. Nous allons montrer comment obtenir l'équation de ces lignes de glissement.

Considérons à la figure A3, un système d'axes $(\bar{x}, \bar{y})$ lié à la ligne de glissement que nous étudions. Ce système d'axes est défini de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

$\bar{x}$ étant une coordonnée curvilinéaire le long de la ligne de glissement, $\bar{y}$ la distance normale à cette ligne et ϕ l'angle formé localement par les directions x et $\bar{x}$. Les composantes de vitesse, exprimées dans le repère $(\bar{x}, \bar{y})$ s'écrivent de la manière suivante :

$$u = \bar{u} \cos \phi - \bar{v} \sin \phi \quad (A.2)$$

$$v = \bar{u} \sin \phi + \bar{v} \cos \phi$$

En remplaçant les composantes de vitesse en fonction des grandeurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ dans le système d'équations d'Euler, nous obtenons successivement :

- conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial y} - \rho \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (A.3)$$

- conservation de la quantité de mouvement dans la direction axiale :

$$\begin{aligned} & \cos \phi \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \\ & \sin \phi \left(\bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (A.4)$$

- conservation de la quantité de mouvement dans la direction tangentielle :

$$\begin{aligned} & \cos \phi \left(\bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \\ & \sin \phi \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

- conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right] = 0 \quad (A.6)$$

$$p = k \rho^\gamma e \quad (S/c_v)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial S}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Les équations (A.4) et (A.5) doivent être vérifiées quelle que soit la valeur de ϕ . On peut donc les écrire également sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Si nous combinons les équations (A.3), (A.8) et (A.9), auxquelles nous ajoutons l'équation d'état des gaz parfaits et la définition de la vitesse locale du son, nous obtenons les relations de compatibilité suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\gamma p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + (\bar{v}+a) \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + (\bar{v}+a) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \\ -a \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right) + \left(-\bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} - \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{\gamma p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + (\bar{v}-a) \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + (\bar{v}-a) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \\ -a \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right) - \left(-\bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} - \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

En combinant (A.3) et (A.6) nous obtenons encore dans le système transformé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{p}{\rho} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(E + \frac{p}{\rho} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(E + \frac{p}{\rho} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.12})$$

Nous possédons maintenant un système de quatre équations aux dérivées partielles (A.7), (A.10), (A.11) et (A.12) que nous pouvons transformer en équations différentielles ordinaires le long de certaines directions privilégiées (directions caractéristiques). Nous obtenons :

$$S = \text{constante} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{v}} = dt \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{a}{\gamma p} \frac{dp}{dt} + \frac{d\bar{v}}{dt} = -a \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right) + \left(-\bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} - \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{v}+a} = dt \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{a}{\gamma p} \frac{dp}{dt} - \frac{d\bar{v}}{dt} = -a \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right) - \left(-\bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} - \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{v}-a} = dt \quad (\text{A.15})$$

$$E + \frac{p}{\rho} = \text{constante} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{v}} = dt \quad (\text{A.16})$$

Dans la suite des calculs nous appellerons :

$$Q_1 = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)$$

$$Q_2 = \left(-\bar{u}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} - \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} \right)$$

L'algorithme de solution le long d'une ligne de glissement se présente maintenant de la façon suivante. Nous supposerons connue la géométrie de la ligne de glissement au temps t , de même que tous les paramètres de l'écoulement aux différents

noeuds du maillage; celui-ci se présente comme indiqué à la figure A4. Par définition, on connaît les relations suivantes le long de la ligne de glissement :

$$v_{\ell} = v_u \quad (A.17)$$

$$p_{\ell} = p_u$$

Après intégration des relations (A.14) et (A.15), on obtient :

$$\log p_{\ell} = \log p_u = \log p = \frac{\left[a_A \log p_A + a_D \log p_D - \gamma(\bar{v}_A - \bar{v}_D) - \gamma \frac{(aQ_1 + Q_2)_A + (aQ_1 - Q_2)_D}{(a_A + a_D)} \Delta t \right]}{(A.18)}$$

Si on intègre les mêmes relations mais cette fois par rapport à la vitesse, on obtient :

$$\bar{v}_{\ell} = \bar{v}_u = \frac{1}{2} \left[\bar{v}_A + \bar{v}_D + \left(\frac{a_A - a_D}{\gamma} \right) \log p - \frac{a_A}{\gamma} \log p_A + \frac{a_D}{\gamma} \log p_D + \left[(aQ_1 + Q_2)_A - (aQ_1 - Q_2)_D \right] \Delta t \right] \quad (A.19)$$

En utilisant les relations (A.13) et (A.16), on peut écrire successivement :

$$S_{\ell} = S_B \quad \Leftrightarrow \quad p_{\ell} = p_B \left(\frac{p}{p_B} \right)^{1/\gamma} \quad (A.20)$$

$$S_u = S_E \quad \Leftrightarrow \quad p_u = p_E \left(\frac{p}{p_E} \right)^{1/\gamma} \quad (A.21)$$

$$\left(E + \frac{p}{\rho} \right)_x = \left(E + \frac{p}{\rho} \right)_B + \left[\frac{p_\ell}{\rho_\ell} \frac{t+\Delta t}{t+\Delta t} - \frac{p_\ell}{\rho_\ell} \frac{t}{t} \right] \cdot 2 \quad (A.22)$$

$$\left(E + \frac{p}{\rho} \right)_u = \left(E + \frac{p}{\rho} \right)_E + \left[\frac{p_u}{\rho_u} \frac{t+\Delta t}{t+\Delta t} - \frac{p_u}{\rho_u} \frac{t}{t} \right] \cdot 2 \quad (A.23)$$

On peut enfin déduire de ces grandeurs la norme q du vecteur vitesse ainsi que sa composante dans la direction $\bar{x}$:

$$\bar{q}_\ell = \left[2 \left(E + \frac{p}{\rho} \right)_\ell - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho_\ell} \right]^{1/2} \quad (A.24)$$

$$\bar{u}_\ell = \sqrt{\bar{q}_\ell^2 - \bar{v}_\ell^2} \quad (A.25)$$

$$\bar{q}_u = \left[2 \left(E + \frac{p}{\rho} \right)_u - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho_u} \right]^{1/2} \quad (A.26)$$

$$\bar{u}_u = \sqrt{\bar{q}_u^2 - \bar{v}_u^2} \quad (A.27)$$

Finalement, la nouvelle position des lignes de glissement est donnée par :

$$\begin{aligned} x^{t+\Delta t} &= x^t - (\bar{v} \sin \phi) \Delta t \\ y^{t+\Delta t} &= y^t - (\bar{v} \cos \phi) \Delta t \end{aligned} \quad (A.28)$$

Remarquons enfin que les paramètres de l'écoulement aux points A, B, E, D intervenant dans le calcul doivent bien entendu être choisis avec la relation de phase correcte; la notation indicielle (t) utilisée est donc un abus d'écriture.

ANNEXE 2

2.1 ANALYSE DE CONSISTANCE DE L'ELEMENT HEXAGONAL UTILISE PAR MCDONALD, COUSTON et LEHTHAUS POUR DISCRETISER LE DOMAINE DE CALCUL D'UN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL INTER-AUBES

Les différents paramètres géométriques sont définis à la figure 27. Les développements en série des différents termes de flux autour du noeud (i,k) nécessités par ce calcul de consistance sont les suivants :

$$f_{i-1,k-1} = f_{i,k} - \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x} - (\Delta y_1 + \Delta y_4) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y_1 + \Delta y_4)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta x_1 (\Delta y_1 + \Delta y_4) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i-1,k} = f_{i,k} - \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y_4 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta y_4^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta x_1 \Delta y_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k-1} = f_{i,k} - \Delta y_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k+1} = f_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$+ \Delta x^2 \Delta y^5 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 0(\Delta^3)$$

$$g_{i+1,k} = g_{i,k} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \Delta y^5 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^5}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^5}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

$$+ \Delta x^1 \Delta y^4 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 0(\Delta^3)$$

$$g_{i-1,k} = g_{i,k} - \Delta x^1 \frac{\partial g}{\partial x} - \Delta y^4 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta x^1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^4}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^4}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

$$g_{i,k-1} = g_{i,k} - \Delta y^2 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 0(\Delta^3)$$

$$g_{i,k+1} = g_{i,k} + \Delta y^2 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 0(\Delta^3)$$

$$+ \frac{2}{(\Delta y^5 + \Delta y^3)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta x^2 (\Delta y^3 + \Delta y^5) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 0(\Delta^3)$$

$$f_{i+1,k+1} = f_{i,k} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta y^5 + \Delta y^3) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$+ \Delta x^2 \Delta y^5 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 0(\Delta^3)$$

$$f_{i+1,k} = f_{i,k} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta y^5 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^5}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta y^5}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
 g_{i-1,k-1} = g_{i,k} & - \Delta x_1 \frac{\partial g}{\partial x} - (\Delta y_4 + \Delta y_1) \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\
 & + \frac{(\Delta y_4 + \Delta y_1)^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \Delta x_1 (\Delta y_1 + \Delta y_4) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{i+1,k+1} = g_{i,k} & + \Delta x_2 \frac{\partial g}{\partial x} + (\Delta y_3 + \Delta y_5) \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta x_2^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\
 & + \frac{(\Delta y_3 + \Delta y_5)^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \Delta x_2 (\Delta y_3 + \Delta y_5) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)
 \end{aligned}$$

2.2 ANALYSE DE CONSISTANCE DE L'ELEMENT TRAPEZOIDAL UTILISE PAR DENTON POUR DISCRETISER LE DOMAINE DE CALCUL D'UN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL INTER-AUBES

Les différents paramètres géométriques sont définis à la figure 28. Les développements en série des différents termes de flux autour du noeud (i;k) nécessités par ce calcul de consistance sont les suivants :

$$f_{i,k-1} = f_{i,k} - \frac{1}{4} (\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{32} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k+1} = f_{i,k} + \frac{1}{4} (\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{32} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\begin{aligned} f_{i-1,k} = f_{i,k} - \frac{1}{2} (\Delta x_1 + \Delta x_2) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{8} (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \Delta y_5 \frac{\partial f}{\partial y} \\ + \Delta y_5^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \Delta y_5 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{i+1,k} = f_{i,k} + \frac{1}{2} (\Delta x_2 + \Delta x_3) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{8} (\Delta x_2 + \Delta x_3)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta y_6 \frac{\partial f}{\partial y} \\ + \frac{\Delta y_6^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \Delta y_6 (\Delta x_2 + \Delta x_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3) \end{aligned}$$

$$g_{i,k-1} = g_{i,k} - \frac{1}{4} (\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{1}{32} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$g_{i,k+1} = g_{i,k} + \frac{1}{4} (\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{1}{32} (\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

2.3 ANALYSE DE CONSISTANCE DE L'ELEMENT BITRAPEZOIDAL UTILISE
PAR VAN HOVE ET ARTS POUR DISCRETISER LE DOMAINE DE CALCUL
D'UN ELEMENT BIDIMENSIONNEL INTER-AUBES

Les différents paramètres géométriques sont définis à la figure 30. Les développements en série des différents termes de flux autour du noeud (i,k) nécessités par ce calcul de consistance sont les suivants :

$$f_{i+1,k} = f_{i,k} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y_5 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta x_2 \Delta y_5 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta y_5^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i-1,k} = f_{i,k} - \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y_4 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta x_1 \Delta y_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta y_4^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k+1} = f_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k-1} = f_{i,k} - \Delta y_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$g_{i,k+1} = g_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$g_{i,k-1} = g_{i,k} - \Delta y_2 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

2.4 ANALYSE DE CONSISTANCE DE L'ELEMENT QUADRANGULAIRE UTILISE
PAR ESSERS ET KAFYEKE POUR DISCRETISER LE DOMAINE DE CALCUL
D'UN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL INTER-AUBES

Les différents paramètres géométriques sont définis à la figure 31. Les développements en série des différents termes de flux autour du noeud (i,k) nécessités par ce calcul de consistance sont les suivants :

$$f_{i-1,k} = f_{i,k} - \frac{1}{2} (\Delta x_1 + \Delta x_2) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \Delta y_5 \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta y_5^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta y_5 \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i+1,k} = f_{i,k} + \frac{1}{2} (\Delta x_2 + \Delta x_3) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x_2 + \Delta x_3)^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta y_6 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta y_6^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta y_6 \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k-1} = f_{i,k} - \frac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k+1} = f_{i,k} + \frac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$g_{i,k-1} = g_{i,k} - \frac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{2} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2}{8} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$g_{i,k+1} = g_{i,k} + \frac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{2} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2}{8} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

ANNEXE 3 - ANALYSE DE LA CONSISTANCE ET DE L'ORDRE DE
PRECISION DE LA DISCRETISATION OBTENUE AU
MOYEN DU DEMI-ELEMENT UTILISE LE LONG
D'UNE PAROI IMPERMEABLE

Les différents paramètres géométriques nécessaires à l'étude de la consistance et de l'ordre de précision de la discrétisation obtenue au moyen d'un demi-élément le long d'une paroi imperméable, sont définis à la figure A5 où Δx_1 , Δx_2 , Δy_1 , Δy_2 et Δy_3 sont des valeurs absolues tandis que Δy_4 et Δy_5 sont des valeurs algébriques, définies comme étant positives pour l'exemple de la figure A5. Les valeurs des inconnues au noeud d'indices (i,k) sont calculées en fonction de leurs valeurs aux noeuds d'indices $(i-1,k)$, $(i+1,k)$ et $(i,k+1)$ (ou $(i,k-1)$ si on considère l'autre paroi imperméable du canal). La surface de contrôle est définie par ses sommets A, B, C, D, E et F.

Afin de satisfaire l'équation (3.15), la somme des flux entrant et sortant de l'élément doit être nulle; sous forme discrète, elle s'écrit de la façon suivante :

$$-f_{i-1,k} \frac{\Delta y_1}{2} + f_{i+1,k} \frac{\Delta y_3}{2} \quad (\text{faces AB, DE})$$

$$+f_{i,k}(\Delta y_4 + \Delta y_5) - g_{i,k}(\Delta x_1 + \Delta x_2) \quad (\text{face AFE})$$

$$- \frac{1}{2} (f_{i,k} + f_{i,k+1}) \left(\frac{\Delta y_3}{2} + \Delta y_5 - \frac{\Delta y_1}{2} + \Delta y_4 \right) \quad (\text{face BCD})$$

$$+ \frac{1}{2} (g_{i,k} + g_{i,k+1}) (\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$= 0 \quad (\text{A.29})$$

Les termes de flux sont ensuite développées en séries de Taylor aux alentours du noeud d'indices (i,k) ; les expressions de ces séries sont respectivement :

$$f_{i-1,k} = f_{i,k} - \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y_4 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta y_4^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta x_1 \Delta y_4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i+1,k} = f_{i,k} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y_5 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta x_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta y_5^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta x_2 \Delta y_5 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3)$$

$$f_{i,k+1} = f_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$g_{i,k+1} = g_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

Si nous introduisons ces développements en série dans (A.29), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_3) \right] + \frac{\partial g}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right] \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \Delta y_4 (\Delta y_1 - \Delta y_2) + \frac{1}{2} \Delta y_5 (\Delta y_3 - \Delta y_2) + \frac{1}{2} \Delta y_2 (\Delta y_1 - \Delta y_3) \right] \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[\frac{1}{4} (\Delta y_3 \Delta x_2^2 - \Delta y_1 \Delta x_1^2) \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{2} (\Delta x_2 \Delta y_5 \Delta y_3 - \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta y_4) \right] \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[\frac{1}{4} (\Delta y_3 \Delta y_5^2 - \Delta y_1 \Delta y_4^2) + \frac{1}{8} \Delta y_2^2 (\Delta y_1 - \Delta y_3) + \frac{1}{4} \Delta y_2^2 (\Delta y_4 - \Delta y_5) \right] \\ & + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left[\frac{1}{4} \Delta y_2^2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right] + O(\Delta^4) = 0 \end{aligned} \quad (A.30)$$

Si la condition suivante est vérifiée :

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 \quad (A.31)$$

l'équation (A.30) peut s'écrire de manière un peu plus condensée sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \right) + O(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes} + O(\Delta^4) = 0 \quad (\text{A.32})$$

L'examen de cette dernière équation nous indique que, au passage à la limite, lorsque les Δx_j et Δy_j tendent uniformément vers zéro, la discrétisation obtenue au moyen de cette surface de contrôle n'est que conditionnellement consistante avec (3.15). En effet, pour autant que (A.31) soit satisfait, (A.32) peut également s'écrire :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{O(\Delta^3) \cdot \text{dérivées secondes}}{O(\Delta^2)} + O(\Delta^2) = 0 \quad (\text{A.33})$$

Nous retrouvons l'équation (3.25), plus un terme du premier ordre. La discrétisation proposée est consistante avec le système aux dérivées partielles (3.1) ou (3.4) et est précise au premier ordre. Remarquons cependant que des variations du deuxième ordre dans (A.31) peuvent être suffisantes pour garantir la consistance et une précision du premier ordre :

$$\begin{aligned} \Delta y_1 - \Delta y_2 &= O(\Delta^2) \\ \Delta y_2 - \Delta y_3 &= O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Nous retrouvons en fait les mêmes conditions que celles qui ont été établies au paragraphe 3.1.3.5.

TABLEAUX

GEOMETRIE DE LA TUYERE 1 (TU1)

I	X(I)	A(I)	I	X(I)	A(I)
1	0.	1.03823	24	0.511	1.07108
2	0.022	1.02966	25	0.533	1.08111
3	0.044	1.02232	26	0.556	1.09176
4	0.067	1.01613	27	0.578	1.10303
5	0.089	1.01103	28	0.6	1.11493
6	0.111	1.00695	29	0.622	1.12744
7	0.133	1.00385	30	0.644	1.14058
8	0.156	1.00169	31	0.667	1.15434
9	0.178	1.00042	32	0.689	1.16874
10	0.2	1.	33	0.711	1.18376
11	0.222	1.00041	34	0.733	1.19941
12	0.244	1.00161	35	0.756	1.21571
13	0.267	1.00358	36	0.778	1.23265
14	0.289	1.00629	37	0.8	1.25023
15	0.311	1.00974	38	0.822	1.26848
16	0.333	1.01389	39	0.844	1.28739
17	0.356	1.01873	40	0.867	1.30697
18	0.378	1.02425	41	0.889	1.32722
19	0.4	1.03044	42	0.911	1.34816
20	0.422	1.03729	43	0.933	1.36980
21	0.444	1.04478	44	0.956	1.39214
22	0.467	1.05291	45	0.978	1.41520
23	0.489	1.06168	46	1.0	1.43898

TABLEAU 1

GEOMETRIE DE LA TUYERE 2 (TU2)

I	X(I)	A(I)	I	X(I)	A(I)
1	0.	1.4	24	0.511	1.05333
2	0.022	1.37333	25	0.533	1.06
3	0.044	1.34667	26	0.556	1.06667
4	0.067	1.32	27	0.578	1.07333
5	0.089	1.29333	28	0.6	1.08
6	0.111	1.26667	29	0.622	1.08667
7	0.133	1.24	30	0.644	1.09333
8	0.156	1.21333	31	0.667	1.10
9	0.178	1.18667	32	0.689	1.10667
10	0.2	1.16	33	0.711	1.11333
11	0.222	1.13333	34	0.733	1.12
12	0.244	1.10667	35	0.756	1.12667
13	0.267	1.08	36	0.778	1.13333
14	0.289	1.05333	37	0.8	1.14
15	0.311	1.02667	38	0.822	1.14667
16	0.333	1.	39	0.844	1.15333
17	0.356	1.00667	40	0.867	1.16
18	0.378	1.01333	41	0.889	1.16667
19	0.4	1.02	42	0.911	1.17333
20	0.422	1.02667	43	0.933	1.18
21	0.444	1.03333	44	0.956	1.18667
22	0.467	1.04	45	0.978	1.19333
23	0.489	1.04667	46	1.	1.20

TABLEAU 2

COEFFICIENT DE VISCOSITE NUMERIQUE DANS
LE SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

MRS	Sans choc	1.5	1.8	1.95	2.10	2.40
VC	0.99	0.98	0.96	0.95	0.94	0.93

MRS : rapport des nombres de Mach en amont et en aval du choc

VC : coefficient numérique de viscosité (équation 2.67)

TABLEAU 3

SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE PUREMENT EXPLICITE
ANALYSE DE STABILITE DE VON NEUMANN

41 noeuds de discrétisation
 $\alpha = 1.$

CFL	Nv = 10	Nv = 15	Nv = 20	Nv = 30	Nv = 40	Nv = 50	Nv = 60	Nv = 70	Nv = 80
0.05	1.00016	1.00088	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.1	1.00065	1.00342	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.15	1.00146	1.00735	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.00004
0.2	1.00260	1.01226	1.	1.	1.	1.	1.00071	1.00058	1.00010
0.25	1.00408	1.01760	1.	1.	1.	1.00222	1.00156	1.00007	1.00003
0.3	1.00591	1.02272	1.	1.00056	1.00411	1.00371	1.00024	1.00172	1.00560
0.35	1.00808	1.02695	1.00085	1.00233	1.00792	1.00209	1.00231	1.00830	1.01072
0.4	1.01062	1.02958	1.00647	1.01019	1.00867	1.00009	1.00987	1.01412	1.01240
0.45	1.01354	1.02995	1.01168	1.01780	1.00423	1.00831	1.01711	1.01650	1.00843
0.5	1.01684	1.03102	1.01427	1.02260	1.00012	1.01729	1.02177	1.01337	1.
0.55	1.02054	1.03577	1.01379	1.02197	1.00953	1.02535	1.02177	1.00405	1.
0.6	1.02722	1.04034	1.02901	1.01386	1.02003	1.03067	1.01573	1.	1.
0.65	1.04348	1.04459	1.04470	1.	1.03046	1.03152	1.00349	1.	1.00333
0.7	1.05924	1.04837	1.059	1.00998	1.03949	1.02665	1.	1.	1.00619
0.75	1.07232	1.05156	1.06984	1.02707	1.04577	1.01697	1.	1.01574	1.00030
0.8	1.08020	1.06066	1.07504	1.03181	1.04798	1.	1.	1.02425	1.02559
0.85	1.10402	1.07812	1.07247	1.04467	1.06734	1.	1.01892	1.	1.04657
0.9	1.13799	1.08054	1.08123	1.06076	1.08133	1.	1.06983	1.02805	1.05311
0.95	1.19516	1.15193	1.06909	1.08068	1.08776	1.07357	1.07825	1.05658	1.08424
1.	1.40985	1.34500	1.(MS)*	1.40985	1.(MS)*	1.40985	1.(MS)*	1.40985	1.(MS)*

*(MS) : toutes les valeurs propres sont égales à 1
(stabilité marginale)

Condition de stabilité : $R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left\{ \max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right\} \leq 1.$

TABLEAU 4a

SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE PUREMENT EXPLICITE

ANALYSE DE STABILITE DE VON NEUMANN

41 noeuds de discrétisation

$\alpha = 0.95$

CFL	Nv = 10	Nv = 15	Nv = 20	Nv = 30	Nv = 40	Nv = 50	Nv = 60	Nv = 70	Nv = 80
0.05	1.	0.99157	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.1	1.	0.99170	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.15	1.	0.99194	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.2	1.	0.99229	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.25	1.	0.99278	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.3	1.00027	0.99344	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.35	1.00251	0.99430	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.4	1.00512	0.99540	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.45	1.00812	0.99679	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.5	1.01152	0.99853	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.55	1.01533	1.00066	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.6	1.01957	1.00327	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.65	1.02426	1.00641	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.7	1.02941	1.01017	1.00305	1.	1.	1.00270	1.	1.	1.
0.75	1.03506	1.01463	1.02274	1.	1.	1.00062	1.	1.	1.
0.8	1.04379	1.01989	1.03771	1.	1.01170	1.	1.	1.	1.
0.85	1.05129	1.03885	1.04531	1.	1.02060	1.	1.	1.	1.
0.9	1.07618	1.05195	1.04547	1.01439	1.04408	1.	1.01526	1.	1.01675
0.95	1.14808	1.09977	1.04895	1.05227	1.05935	1.03236	1.05093	1.	1.04705
1.	1.37776	1.32249	1.	1.37236	1.(MS)*	1.37777	1.	1.37236	1.(MS)*

*(MS) : toutes les valeurs propres sont égales à 1
(stabilité marginale)

Condition de stabilité : $R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left\{ \max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right\} \leq 1.$

TABEAU 4b

SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE PUREMENT EXPLICITE

ANALYSE DE STABILITE DE VON NEUMANN

41 noeuds de discrétisation

$\alpha = 0.9$

CFL	Nv = 10	Nv = 15	Nv = 20	Nv = 30	Nv = 40	Nv = 50	Nv = 60	Nv = 70	Nv = 80
0.05	1.	0.98310	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.1	1.	0.98329	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.15	1.	0.98360	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.2	1.	0.98407	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.25	1.	0.98470	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.3	1.	0.98553	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.35	1.	0.98659	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.4	1.	0.98792	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.45	1.00272	0.98957	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.5	1.00621	0.99159	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.55	1.01013	0.99403	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.6	1.01448	0.99697	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.65	1.01929	1.00046	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.7	1.02458	1.00460	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.75	1.03036	1.00945	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.8	1.03666	1.01511	1.00141	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.85	1.04351	1.02167	1.01893	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.9	1.05092	1.02921	1.02632	1.	1.00911	1.	1.	1.	1.
0.95	1.10191	1.04851	1.02896	1.02411	1.03139	1.00827	1.02435	1.	1.01078
1.	1.36648	1.30039	1.(MS)*	1.33598	1.(MS)*	1.34648	1.(MS)*	1.33598	1.(MS)*

★ (MS) : toutes les valeurs propres sont égales à 1
(stabilité marginale)

Condition de stabilité : $R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left\{ \max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right\} \leq 1.$

TABEAU 4c

SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE PUREMENT EXPLICITE

ANALYSE DE STABILITE DE VON NEUMANN

41 noeuds de discrétisation

$\alpha = 0.8$

CFL	Nv = 10	Nv = 15	Nv = 20	Nv = 30	Nv = 40	Nv = 50	Nv = 60	Nv = 70	Nv = 80
0.05	1.	0.96618	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.1	1.	0.96646	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.15	1.	0.96694	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.2	1.	0.96762	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.25	1.	0.96855	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.3	1.	0.96973	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.35	1.	0.97120	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.4	1.	0.97300	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.45	1.	0.97517	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.5	1.	0.97776	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.55	1.	0.98083	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.6	1.00432	0.98444	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.65	1.00938	0.98866	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.7	1.01493	0.99355	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.75	1.02099	0.99919	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.8	1.02759	1.00567	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.85	1.03474	1.01306	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.9	1.04248	1.02147	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.95	1.05082	1.03098	1.00581	1.	1.00057	1.00080	1.	1.	1.
1.	1.28654	1.25748	1.	1.27493	1.	1.28654	1.	1.27493	1.(MS)*

*(MS) : toutes les valeurs propres sont égales à 1
(stabilité marginale)

Condition de stabilité : $R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left\{ \max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right\} \leq 1.$

TABLEAU 4d

COMPARAISON ENTRE LES SCHEMAS A VISCOSITE CORRIGEE
EXPLICITE ET SEMI-IMPLICITE DU POINT DE VUE
DE LA STABILITE

Norme des différents $g_j(\omega, \Delta x, \Delta t)$ pour les modes de Fourier considérés dans le cas d'un maillage constitué de 41 noeuds.

$\alpha = 0.99$

$CFL = 1.$

$\omega \Delta \pm$	cas A	cas B	cas C	cas D
$\pi/20$	<u>1.05323</u>	0.61761	<u>1.07459</u>	0.32332
$\pi/10$	0.83282	0.35056	0.99952	0.14378
$3\pi/20$	<u>1.14782</u>	0.25943	0.74126	0.23102
$\pi/5$	0.99811	0.29856	1.	0.30593
$\pi/4$	0.71004	0.38004	<u>1.30274</u>	0.37886
$3\pi/10$	<u>1.34047</u>	0.44948	0.99591	0.44945
$7\pi/20$	0.60583	0.51717	0.33541	0.51727
$2\pi/5$	1.	0.58195	1.	0.58191
$9\pi/20$	<u>1.29505</u>	0.64295	<u>1.40338</u>	0.64295
$\pi/2$	0.01	0.70003	0.99005	0.70004
$11\pi/20$	<u>1.29926</u>	0.75280	0.10363	0.75280
$6\pi/10$	0.98696	0.80093	1.	0.80093
$13\pi/20$	0.60996	0.84411	<u>1.36664</u>	0.84411
$7\pi/10$	<u>1.33612</u>	0.88210	0.98415	0.88210
$3\pi/4$	0.69004	0.91464	0.53204	0.91464
$4\pi/5$	1.	0.94155	1.	0.94155
$17\pi/20$	<u>1.13395</u>	0.96265	<u>1.19613</u>	0.96265
$9\pi/10$	0.82144	0.97781	0.98049	0.97781
$19\pi/20$	<u>1.05059</u>	0.98695	0.90854	0.98695
π	0.98	0.99	1.	0.99

cas A : $N_v = 15$ (explicite)

cas C : $N_v = 50$ (explicite)

cas B : $N_v = 15$ (semi-implicite)

cas D : $N_v = 50$ (semi-implicite)

TABLEAU 5

SCHEMA A AMORTISSEMENT CORRIGE -
ANALYSE DE STABILITE DE VON NEUMANN

Les équations sont discrétisées par le schéma à viscosité corrigée semi-implicite

N=41
α=1.
CFL=1.
Nv=15

k	Nd = 20	Nd = 30	Nd = 40	Nd = 45	Nd = 60	Nd = 80
-1	1.56301	1.76486	2.21685	2.39964	3.55590	4.90945
-0.9	1.43583	1.52005	1.82600	1.90202	2.65139	3.35683
-0.8	1.31655	1.30782	1.50182	1.50317	1.97233	2.29197
-0.7	1.20467	1.12406	1.23340	1.18471	1.46311	1.56329
-0.6	1.09974	1.	1.01156	1.	1.08161	1.06550
-0.5	1.00133	↓	1.	↓	1.	1.
-0.4	1.	↓	↓	↓	↓	↓
-0.3	↓	↓	↓	↓	↓	↓
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	STABLE	STABLE	STABLE	STABLE	STABLE	STABLE

Condition de stabilité :

$$R_1(\Delta t) = \max_{\omega} \left[\max_j (g_j(\omega, \Delta t, \Delta x)) \right] \leq 1.$$

TABLEAU 6

SCHEMA A AMORTISSEMENT CORRIGE

APPLICATION NUMERIQUE

Nombre d'itérations nécessaire ayant d'arriver à convergence.

Tuyère de section uniforme $\bar{A} = 1.0382$

$M = 0.8$

$N_d = 30$

k	-1.	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.2	0.	0.2	0.4
NI	1219	929	875	<u>869</u>	871	877	909	942	967	951

k	0.6	0.8	1.	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
NI	947	927	951	926	870	868	<u>840</u>	868	867	869

k	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
NI	895	899	926	954	957	985	1013	1015

TABLEAU 7

SCHEMA A AMORTISSEMENT CORRIGE :
INFLUENCE DE LA DISCRETISATION

TUYERE 1

Résolution par le schéma à viscosité corrigée CFL = 1. Nv = 15

MRS = 1.58 VC = 0.97

Nd	k	0	0.4	0.8	1.2	1.6	1.8	2.	2.2	2.4
40							706	721	721	
50		871	796	736	691	721	646	646	676	691
60							661	661	661	
70									691	

Résolution par le schéma de Lax-Wendroff : valeurs optimales
obtenues

sans amortissement : 1288 itérations

k	Nd	NI
-5.4	10	1023
-2.6	20	1033
-0.8	50	1012

TABLEAU 8

INFLUENCE DES CONDITIONS ADDITIONNELLES PUREMENT
NUMERIQUES SUR LA STABILITE (problème unidimensionnel)

TEST	AMONT (1)	AVAL (1)	AVAL (2)	NATURE DE LA SOLUTION
1	CL1	CL2	CL3	STABLE
2	CL4	CL5	CL6	INSTABLE
3	CL5	CL4	CL6	INSTABLE
4	CL6	CL5	CL4	STABLE
5	CL6	CL7	CL8	STABLE
6	CL4	CL7	CL8	STABLE
7	CL9	CL7	CL8	STABLE

Remarque : chacune de ces combinaisons a également été essayée avec la version explicite du schéma à viscosité corrigée. Pour les mêmes coefficients numériques ($VC = 1.$, $CFL = 1.$, $N_V = 20$) tous les calculs se sont trouvés être instables.

TABLEAU 9

INFLUENCE DES CONDITIONS ADDITIONNELLES

PUREMENT NUMERIQUES SUR LA STABILITE

(problème bidimensionnel)

TEST	AMONT (1)	AVAL (1)	AVAL (2)	AVAL (3)	NATURE DE LA SOLUTION
1	CL1	CL2	CL3	CL4	STABLE
2	CL1	CL10	CL11	CL12	INSTABLE
3	CL12	CL9	CL10	CL11	STABLE
4	CL10	CL9	CL11	CL12	INSTABLE
5	CL9	CL10	CL11	CL12	INSTABLE
6	CL10	CL9	CL10	CL11	STABLE
7	CL5	CL6	CL7	CL8	STABLE

TABLEAU 10

AUBE 1

SECTION DE TETE D'UN AUBAGE ROTORIQUE DE DERNIER ETAGE

D'UNE TURBINE A VAPEUR DE GRANDE PUISSANCE :

COORDONNEES DU PROFIL (Réf. 59, 60)

<u>EXTRADOS</u>				<u>INTRADOS</u>			
<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>
0.	0.88	20.	1.350	0.	0.88	25.	0.
0.334	1.49	21.	1.306	0.4	0.482	26.	0.
0.534	1.623	22.	1.268	1.4	0.410	27.	0.004
0.934	1.874	23.	1.238	2.	0.300	28.	0.014
1.734	2.334	24.	1.218	3.	0.210	29.	0.030
2.534	2.578	25.	1.206	4.	0.134	30.	0.054
3.334	2.784	26.	1.200	5.	0.076	31.	0.084
4.134	2.896	27.	1.204	6.	0.034	32.	0.108
4.534	2.936	28.	1.212	7.	0.010	33.	0.162
4.934	2.946	29.	1.226	8.	0.	34.	0.214
5.334	2.936	30.	1.244	9.	0.	35.	0.270
5.734	2.896	31.	1.270	10.	0.	36.	0.334
6.194	2.846	32.	1.298	11.	0.	37.	0.404
7.	2.668	33.	1.336	12.	0.	38.	0.480
8.	2.536	34.	1.378	13.	0.	39.	0.564
9.	2.412	35.	1.426	14.	0.	40.	1.148
10.	2.274	36.	1.478	15.	0.		
11.	2.142	37.	1.536	16.	0.		
12.	2.020	38.	1.6	17.	0.		
13.	1.906	39.	1.668	18.	0.		
14.	1.8	39.4	1.698	19.	0.		
15.	1.708	40.	1.148	20.	0.		
16.	1.618			21.	0.		
17.	1.538			22.	0.		
18.	1.468			23.	0.		
19.	1.406			24.	0.		

TABLEAU 11

AUBE 2

SECTION MOYENNE D'UN AUBAGE ROTORIQUE DE TURBINE

A GAZ TRANSSONIQUE : COORDONNEES DU PROFIL (Réf. 61)

<u>INTRADOS</u>				<u>EXTRADOS</u>			
<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>
0.	0.	19.589	5.434	0.	0.	9.078	10.645
0.226	0.043	21.064	5.305	-0.473	0.165	10.370	10.636
0.530	0.178	22.590	5.143	-0.865	0.75	11.757	10.564
0.758	0.363	24.164	4.948	-0.927	1.133	13.244	10.427
0.984	0.550	25.782	4.725	-0.979	1.502	14.839	10.219
1.212	0.735	27.439	4.477	-1.019	1.863	16.548	9.937
1.443	0.919	29.132	4.205	-1.049	2.217	18.379	9.574
1.677	1.101	30.857	3.912	-1.067	2.564	20.339	9.128
1.913	1.281	32.610	3.600	-1.075	2.903	22.404	8.611
2.152	1.459	34.389	3.272	-1.071	3.236	24.547	8.045
2.393	1.635	36.190	2.929	-1.057	3.561	26.740	7.445
3.013	2.066	38.011	2.573	-1.032	3.880	28.967	6.823
3.653	2.484	39.850	2.205	-0.923	4.645	31.215	6.188
4.318	2.885	41.706	1.827	-0.747	5.366	33.478	5.542
5.011	3.268	43.575	1.439	-0.503	6.044	35.751	4.809
5.735	3.630	44.327	1.281	-0.193	6.677	38.032	4.233
6.494	3.970	45.080	1.123	0.183	7.267	40.318	3.572
7.290	4.285	45.835	0.963	0.629	7.812	41.233	3.308
8.130	4.572	46.593	0.801	1.143	8.312	42.150	3.042
9.015	4.829	47.352	0.639	1.726	8.767	43.066	2.777
9.952	5.052	48.112	0.476	2.380	9.175	43.984	2.510
10.944	5.240	48.440	0.405	3.105	9.537	44.901	2.244
11.993	5.389	48.874	0.311	3.904	9.850	45.819	1.977
13.103	5.483	49.134	0.260	4.778	10.114	46.738	1.710
14.276	5.567	49.638	0.146	5.730	10.328	47.657	1.443
15.512	5.595	50.057	0.063	6.762	10.489	48.539	1.176
16.810	5.581	50.336	0.	7.877	10.595	49.540	0.879
18.170	5.527						

TABLEAU 12

APPROXIMATION INITIALE DES CONDITIONS AUX LIMITES
INTERMEDIAIRES DANS LE CALCUL D'UN ETAGE DE TURBINE

p_3/p_{01a}	<u>Approximation initiale</u>	<u>Approximation corrigée</u>	$(p_2/p_{01})_{\text{exact}}$
	$(1 + \frac{p_3}{p_{01a}})/2$	$(p_2/p_{01a})_{\text{approché}}$	
0.55	0.775	0.553	0.583
0.60	0.8	0.624	0.632
0.65	0.825	0.687	0.680
0.70	0.850	0.744	0.727
0.75	0.875	0.797	0.780
0.80	0.9	0.844	0.831

Le calcul de l'écoulement est effectué au moyen du système réduit (à enthalpie totale constante) appliqué à la géométrie de l'étage 1

TABEAU 13

ETAGE 2 (N.A.S.A.)

COORDONNEES DES AUBAGES STATORIQUES ET ROTORIQUES (Réf. 65)

Aube statorique			Aube rotorique		
X	Y _{intr}	Y _{extr}	X	Y _{intr}	Y _{extr}
0.	0.254	0.254	0.	0.1880	0.1880
.127	.033	.925	.0254	.0838	.3505
.254	0.	1.171	.0508	.0483	.4470
.381	.033	1.336	.0762	.0254	.5283
.508	.127	1.455	.1016	.0127	.5944
.635	.208	1.542	.127	.0051	.6528
.762	.277	1.608	.1905	.0051	.7849
1.016	.384	1.684	.254	.0305	.8865
1.270	.462	1.717	.3175	.0762	.9779
1.524	.516	1.717	.381	.1397	1.0541
1.778	.551	1.692	.508	.2718	1.1938
2.032	.574	1.648	.635	.4623	1.3005
2.286	.582	1.593	.762	.4826	1.3868
2.540	.579	1.527	.889	.5613	1.4580
2.794	.566	1.321	1.016	.6274	1.5138
3.048	.549	1.369	1.143	.6833	1.5519
3.302	.521	1.278	1.270	.7239	1.5748
3.556	.488	1.181	1.397	.7518	1.5824
3.810	.447	1.080	1.524	.7696	1.5773
4.064	.404	.970	1.651	.7798	1.5621
4.318	.353	.856	1.778	.7772	1.5291
4.572	.300	.737	1.905	.7671	1.4859
4.826	.241	.615	2.032	.7442	1.4326
5.080	.178	.488	2.159	.7163	1.3665
5.334	.114	.358	2.286	.6782	1.2903
5.588	.043	.226	2.413	.6350	1.2040
5.715	.008	.157	2.540	.5817	1.1074
5.819	.064	.064	2.667	.5237	1.0033
			2.794	.9804	.8890
			2.921	.3861	.7947
			3.048	.3073	.6502
			3.175	.2235	.5207
			3.302	.1321	.3861
			3.429	.0330	.2438

TABEAU 14

COMPARAISON DES VALEURS PRÉVUES (REF. 65), MESURÉES EN SOUFFLERIE ET CALCULÉES PAR LE PROGRAMME DE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT DANS UN ÉTAGE DE TURBINE

	Valeur prévue	Valeur mesurée	Valeur calculée
V_{y_2}	311.2 m/s	310.1 m/s	310.2 m/s
V_{x_2}	94.8 m/s	99.3 m/s	101.7 m/s
V_2	325.3 m/s	325.6 m/s	326.5 m/s
W_2	147.0 m/s	149.1 m/s	149.8 m/s
W_3	320.6 m/s	330 m/s	316.6 m/s
α_2	73.05°	72.25°	71.83°
β_2	49.83°	48.26°	47.78°
β_3	-58.65°	-56.40°	-55.97°
α_3	-24.20°	-22.60°	-19.8°
V_{x_3}	166.8 m/s	182.6 m/s	177.1 m/s
V_3	182.9 m/s	197.8 m/s	188.2 m/s

$$p_3/p_{01a} = 0.225$$

$$Nr = 8081 \text{ tr/min}$$

Etage 2 (N.A.S.A)

TABLEAU 15

AUBE 3

SECTION MOYENNE D'UNE AUBE STATORIQUE DE TURBINE A

GAZ TRANSSONIQUE : COORDONNEES DU PROFIL (Réf. 19)

x/C	y_{int}/C	y_{ext}/C	x/C	y_{int}/C	y_{ext}/C
0.	0.064	0.064	0.520	0.096	0.239
0.010	0.031	0.103	0.540	0.094	0.232
0.018	0.022	0.118	0.560	0.092	0.225
0.020	0.019	0.122	0.580	0.090	0.218
0.040	0.005	0.153	0.600	0.087	0.211
0.060	0.	0.181	0.620	0.084	0.204
0.080	0.	0.206	0.640	0.081	0.196
0.100	0.006	0.226	0.660	0.078	0.187
0.120	0.013	0.243	0.680	0.075	0.179
0.140	0.024	0.257	0.700	0.071	0.170
0.160	0.033	0.268	0.720	0.066	0.162
0.180	0.042	0.276	0.740	0.062	0.153
0.200	0.050	0.283	0.760	0.057	0.144
0.220	0.058	0.288	0.780	0.053	0.135
0.240	0.065	0.291	0.800	0.048	0.125
0.260	0.071	0.292	0.820	0.043	0.115
0.280	0.076	0.292	0.840	0.038	0.105
0.300	0.081	0.291	0.860	0.032	0.094
0.320	0.085	0.288	0.880	0.027	0.084
0.340	0.089	0.285	0.900	0.022	0.073
0.360	0.092	0.281	0.920	0.016	0.062
0.380	0.094	0.277	0.940	0.011	0.051
0.400	0.096	0.273	0.960	0.006	0.039
0.420	0.097	0.268	0.980	0.001	0.028
0.440	0.098	0.263	0.990	0.	0.022
0.460	0.098	0.258	0.998	0.004	0.017
0.480	0.098	0.252	1.	0.011	0.011
0.500	0.097	0.245			

TABLEAU 16

AUBE 3

SECTION MOYENNE D'UNE AUBE STATORIQUE DE TURBINE A

GAZ TRANSSONIQUE : PROFIL DES PAROIS CONTOURNEES (Réf.19)

x	r	x	r
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
0.	20.	17.50	14.55
5.	20.	18.50	13.94
5.50	19.99	19.50	13.44
6.	19.96	20.50	12.63
6.50	19.91	21.50	12.13
7.	19.84	22.	11.82
7.50	19.75	22.50	11.53
8.	19.63	23.	11.27
8.50	19.50	23.50	11.04
9.	19.44	24.	10.84
9.50	19.16	24.50	10.66
10.	18.96	25.	10.50
10.50	18.72	25.50	10.36
11.	18.47	26.	10.25
11.50	18.18	26.50	10.16
12.	17.87	27.	10.09
13.	17.27	27.50	10.04
14.	16.76	28.	10.01
15.	16.06	28.50	10.
16.	15.45	29.	10.
16.75	15.		

N.B. : la coordonnée x est mesurée dans la direction axiale
la coordonnée r est une mesure de la demi-hauteur
du canal

TABLEAU 17

INFLUENCE DES CONDITIONS ADDITIONNELLES
PUREMENT NUMERIQUES SUR LA STABILITE
(problème tridimensionnel)

TEST	AMONT (1)	AVAL (1)	AVAL (2)	AVAL (3)	AVAL (4)	NATURE DE LA SOLUTION
1	CL1	CL2	CL3	CL4	CL5	INSTABLE
2	CL5	CL1	CL2	CL3	CL4	INSTABLE
3	CL4	CL1	CL2	CL3	CL5	INSTABLE
4	CL5	CL2	CL3	CL4	CL5	INSTABLE
5	CL4	CL1	CL2	CL3	CL4	STABLE

TABLEAU 18

GRILLE D'AUBES ANNULAIRE T1

COORDONNEES DU PROFIL STATORIQUE (Fig. 91)(Réf. 67)

x	y _{extr.}	y _{intr.}		y _{extr.}	y _{intr.}
0.	0.	0.	390.	10.5	-245.
9.	34.	-34.	405.	-4.	-259.5
20.	48.	-48.	423.5	-23.	-278.
35.	59.5	-59.5	440.	-42.5	-295.
55.	70.	-67.	460.	-68.5	-317.5
75.	78.	-72.	480.	-96.5	-341.
95.	85.	-78.	500.	-127.	-367
115.	90.	-84.	517.	-153.	-389.5
135.	93.5	-91	534.	-180.5	-413.5
158.5	96.5	-99.5	550.	-207.5	-436.
175.	97.5	-106.	565.	-234	-458.5
195.	97.5	-115.	600.	-302.	-512.
235.	93.	-134.5	620.	-345.	-543.
255.	88.	-146.	642.5	-397.5	-579.
275.	82.	-158.	660.	-441.	-608.
295.	74.	-171.	680.	-496.5	-641.
315	64.5	-185.	695.	-542.5	-667.
335.	53.	-199.5	710.	-595.5	-674.
355.	39.	-215.	724.	-658.	-658.
375.	24.	-232.			

TABLEAU 19

GRILLE D'AUBES ANNULAIRE T1

GEOMETRIE DES PAROIS CONTOURNEES DU CARTER (Réf. 67)

z	R _{moyeu} (m)	R _{carter} (m)
0.	0.283	0.377
275.52	-	0.377
300.57	-	0.37682
325.62	-	0.37632
350.67	-	0.37553
375.71	-	0.37449
400.76	-	0.37323
425.81	-	0.37180
450.86	-	0.37024
475.90	-	0.36858
500.95	-	0.36687
526.00	-	0.36513
551.05	-	0.36342
576.10	-	0.36176
601.14	-	0.36020
626.19	-	0.35877
651.24	-	0.35751
676.29	-	0.35647
701.33	-	0.35568
726.38	-	0.35518
751.43	0.283	0.355

TABLEAU 20

FIGURES

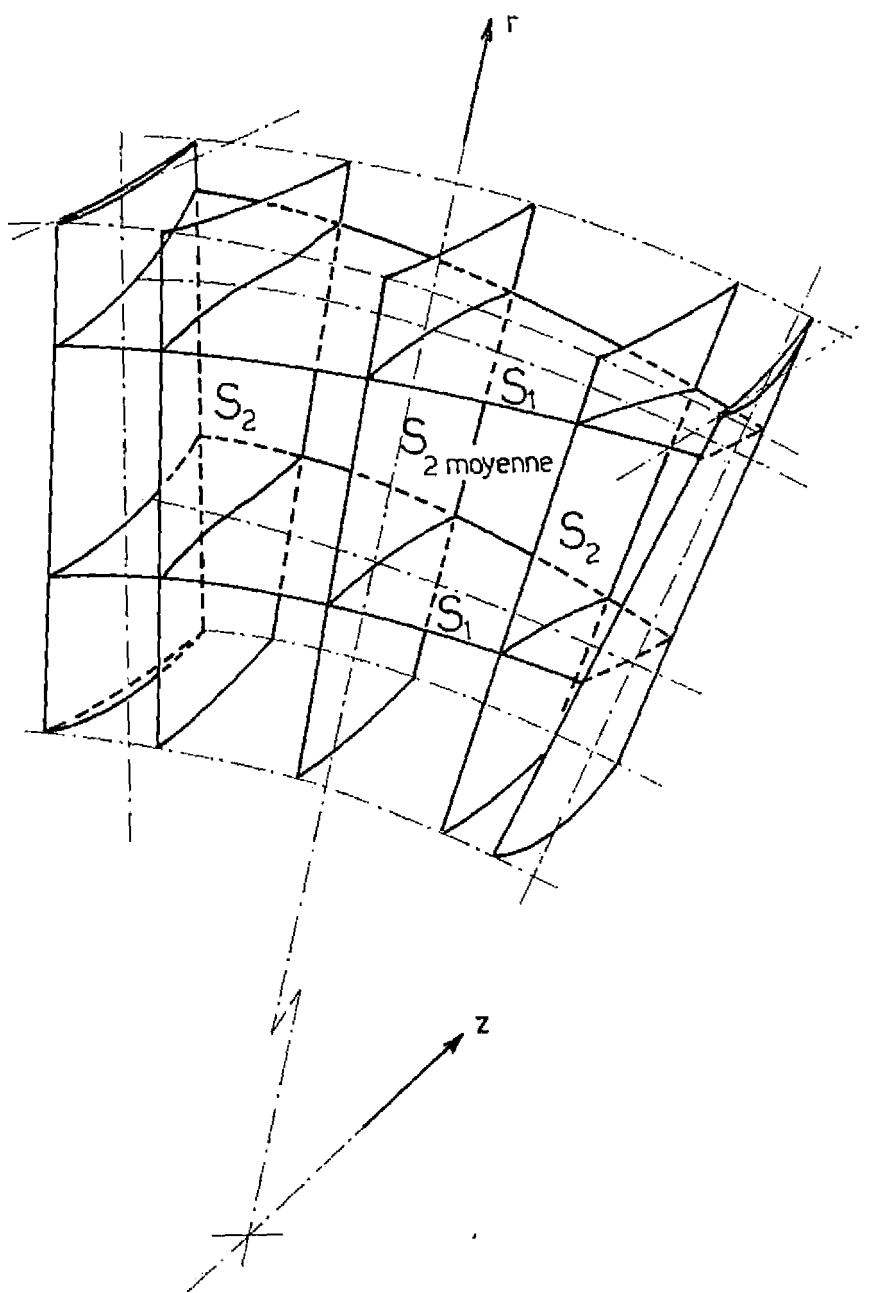


FIG.1 — EXEMPLE DE SURFACES S_1 ET S_2

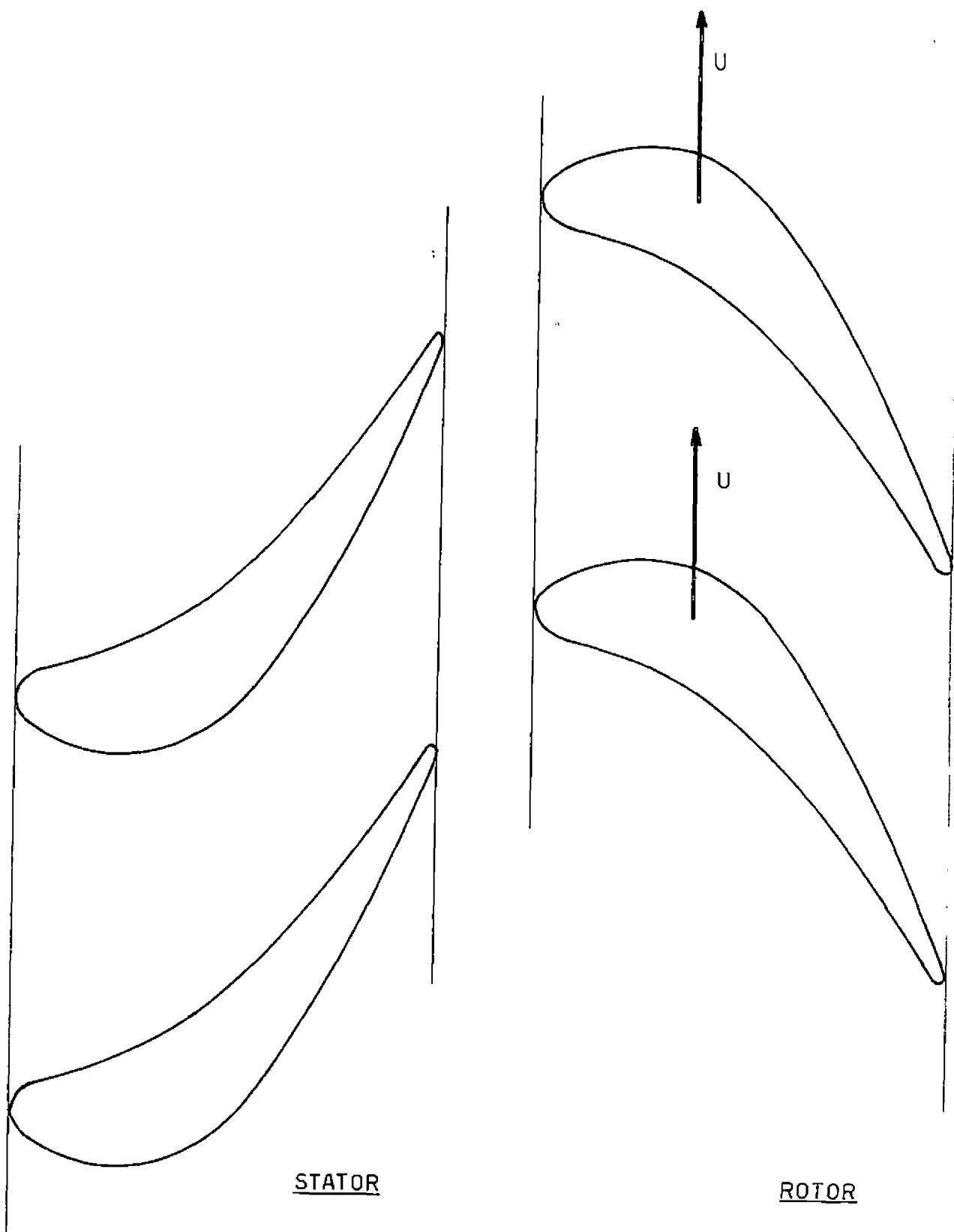


FIG. 2 — ETAGE DE TURBINE POUR UNE
GEOMETRIE BIDIMENSIONNELLE

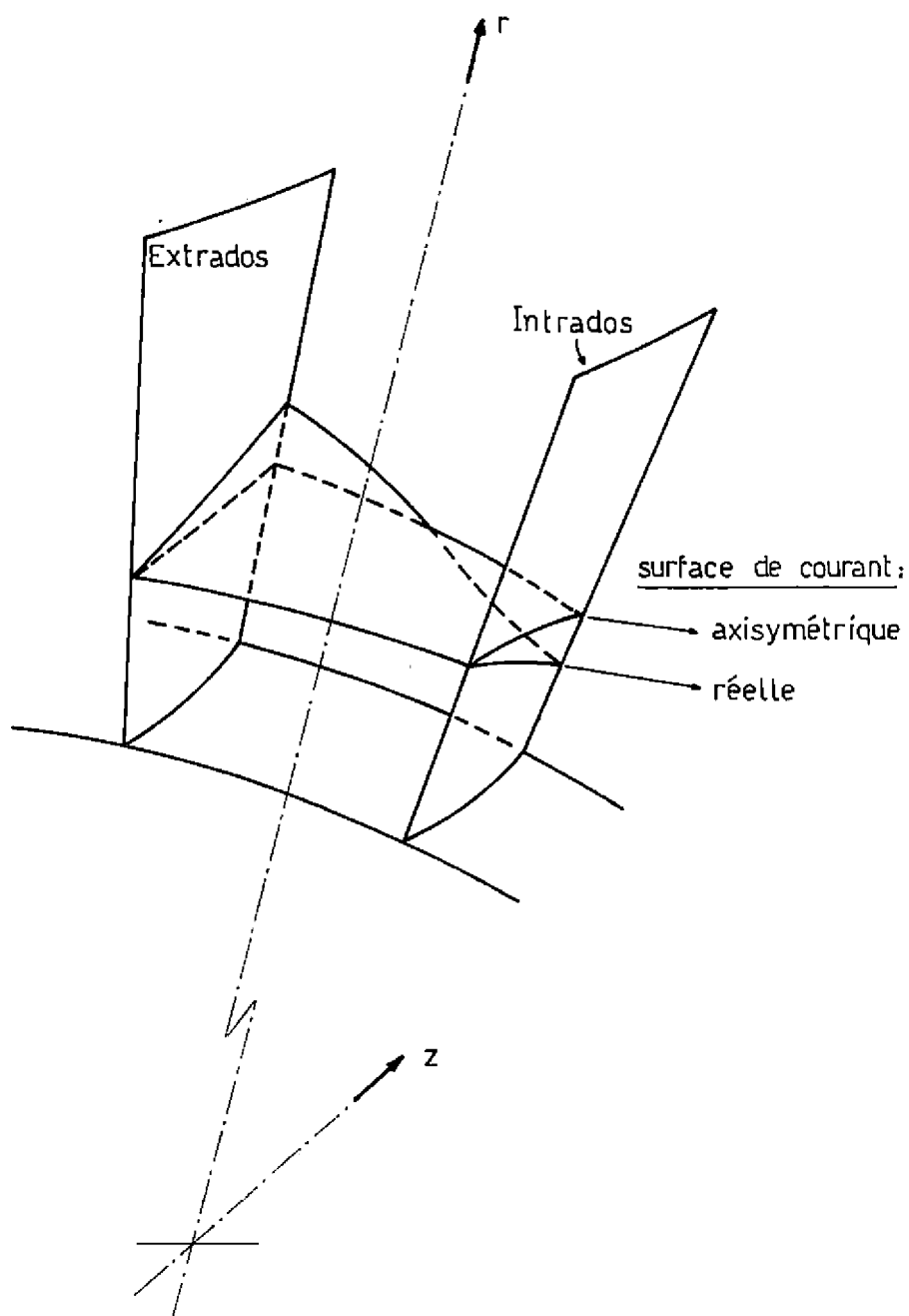


FIG. 3 — SURFACES DE COURANT REELLES
ET APPROCHEES

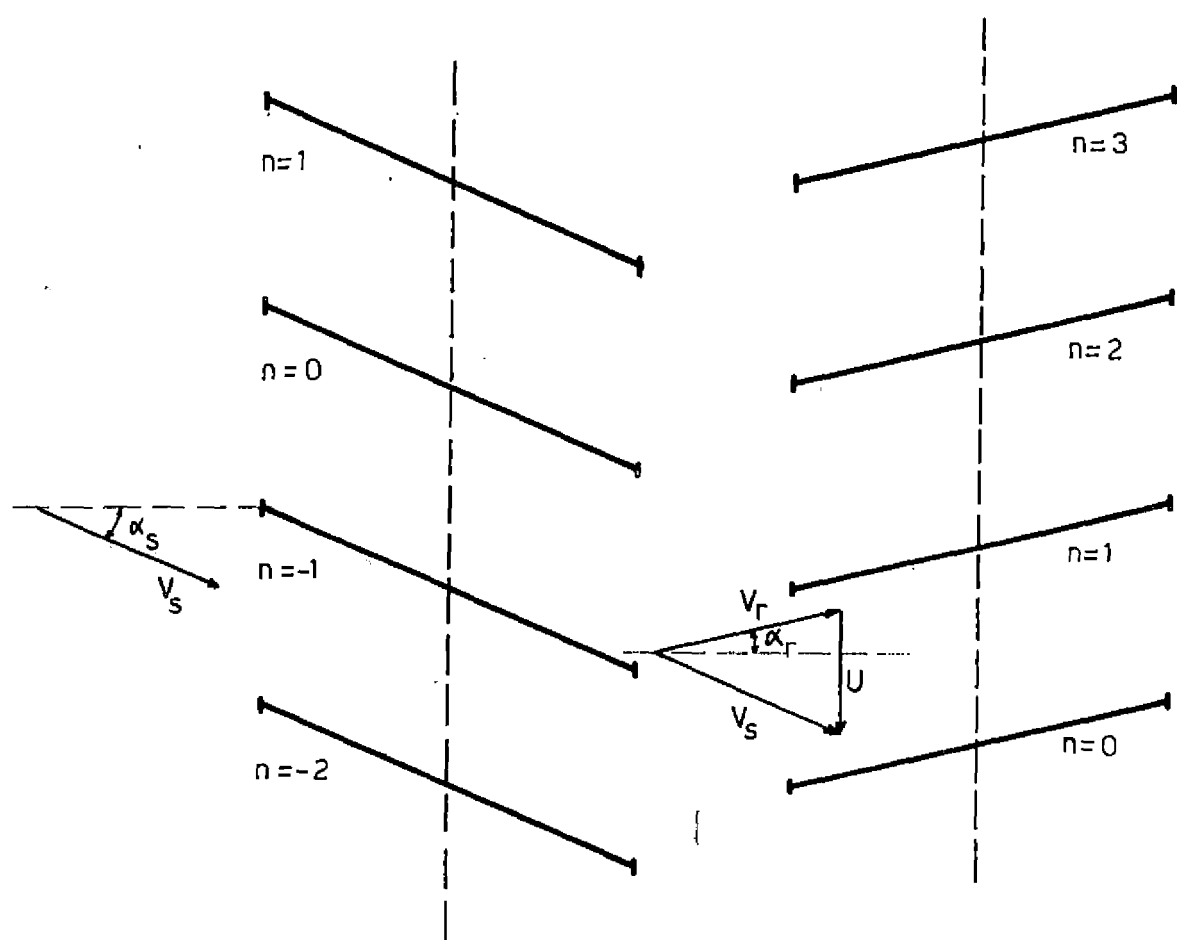


FIG. 4 — GEOMETRIE D'UN ETAGE DE COMPRESSEUR

(Méthode de KEMP et SEARS)

(Réf. 34)

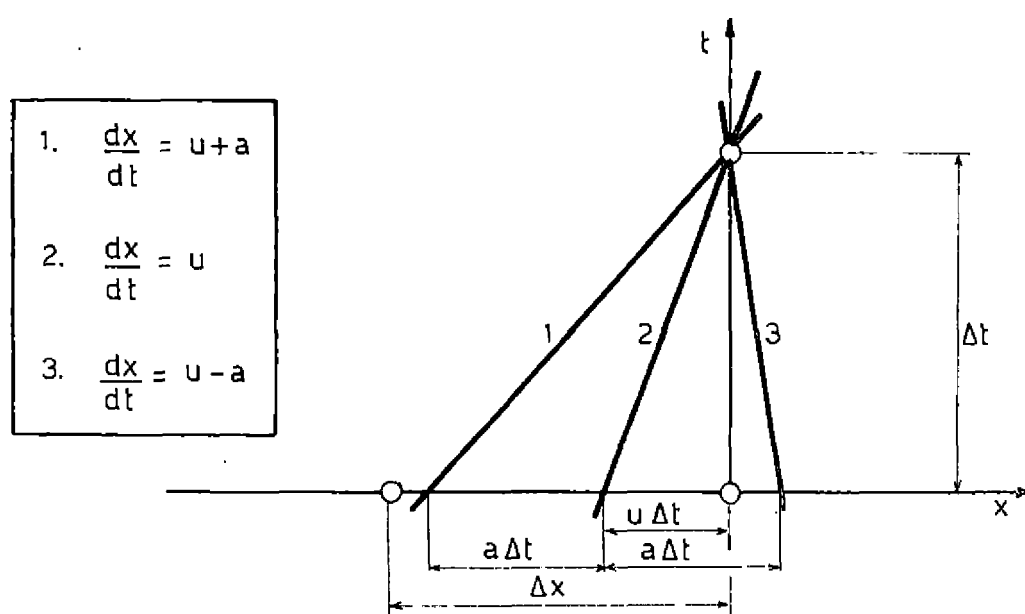
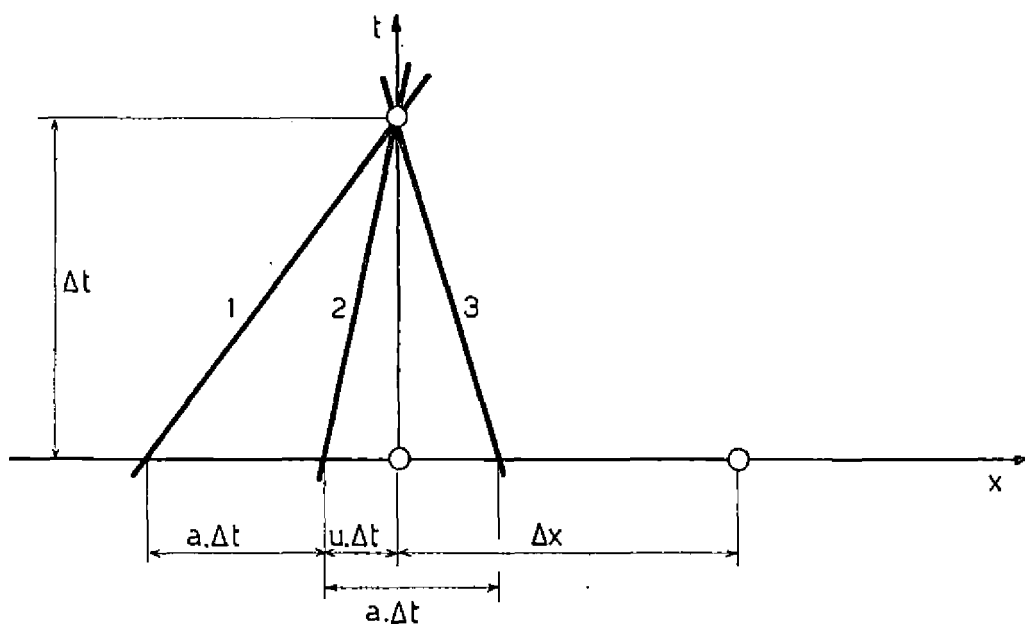


FIG. 5 — DEFINITION DES DIRECTIONS
CARACTERISTIQUES DANS LES PLANS
D'ENTREE ET DE SORTIE DE LA
TUYERE

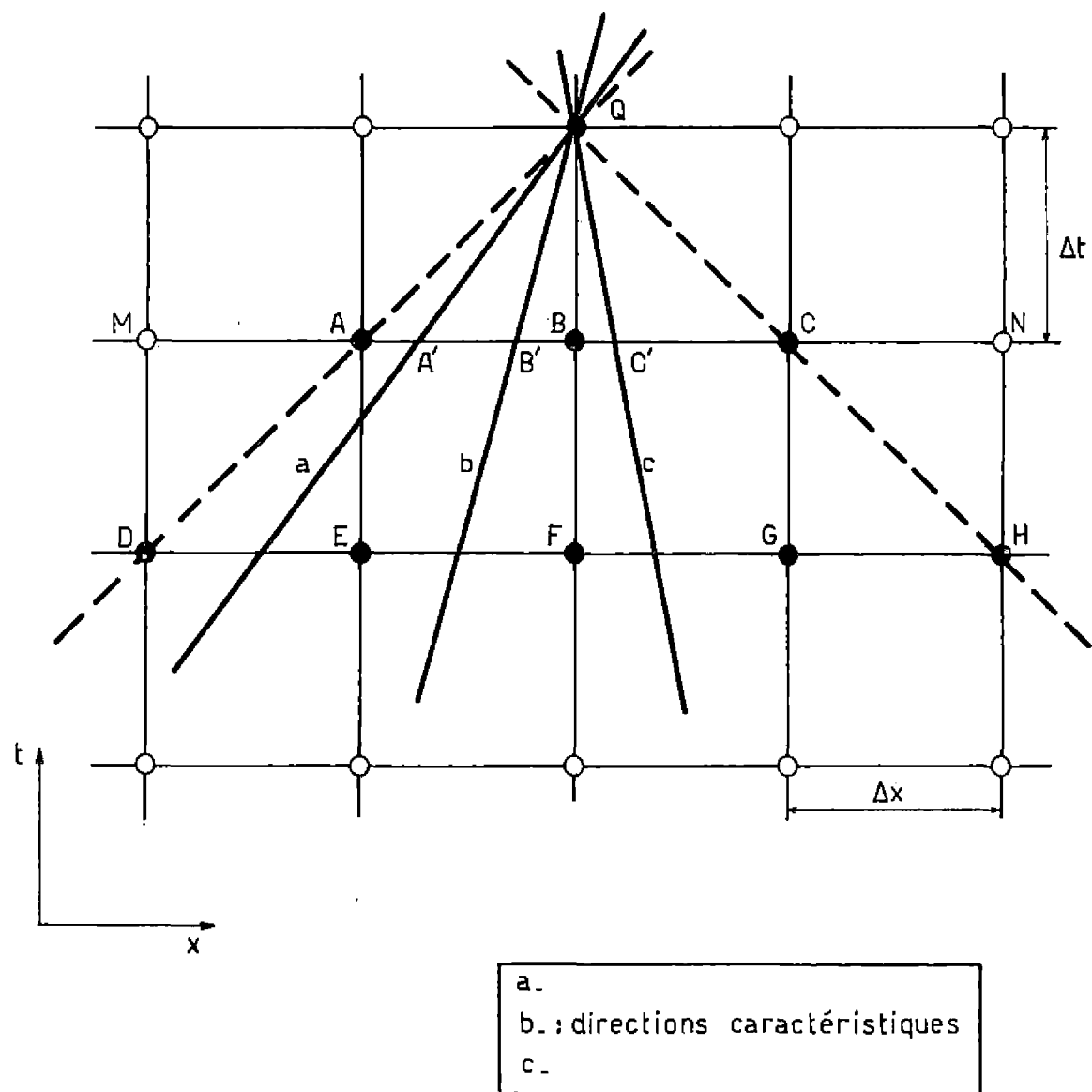


FIG. 6 — CRITERE DE STABILITE C.F.L.

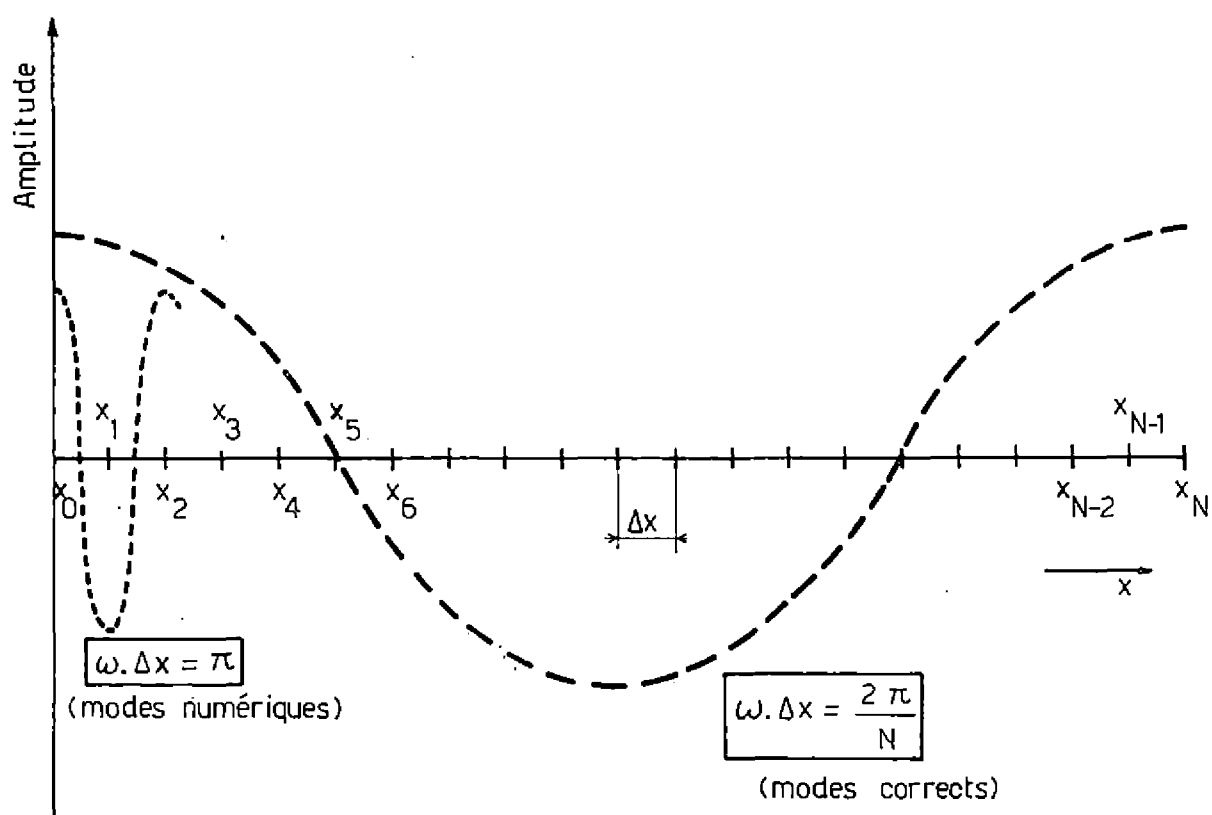
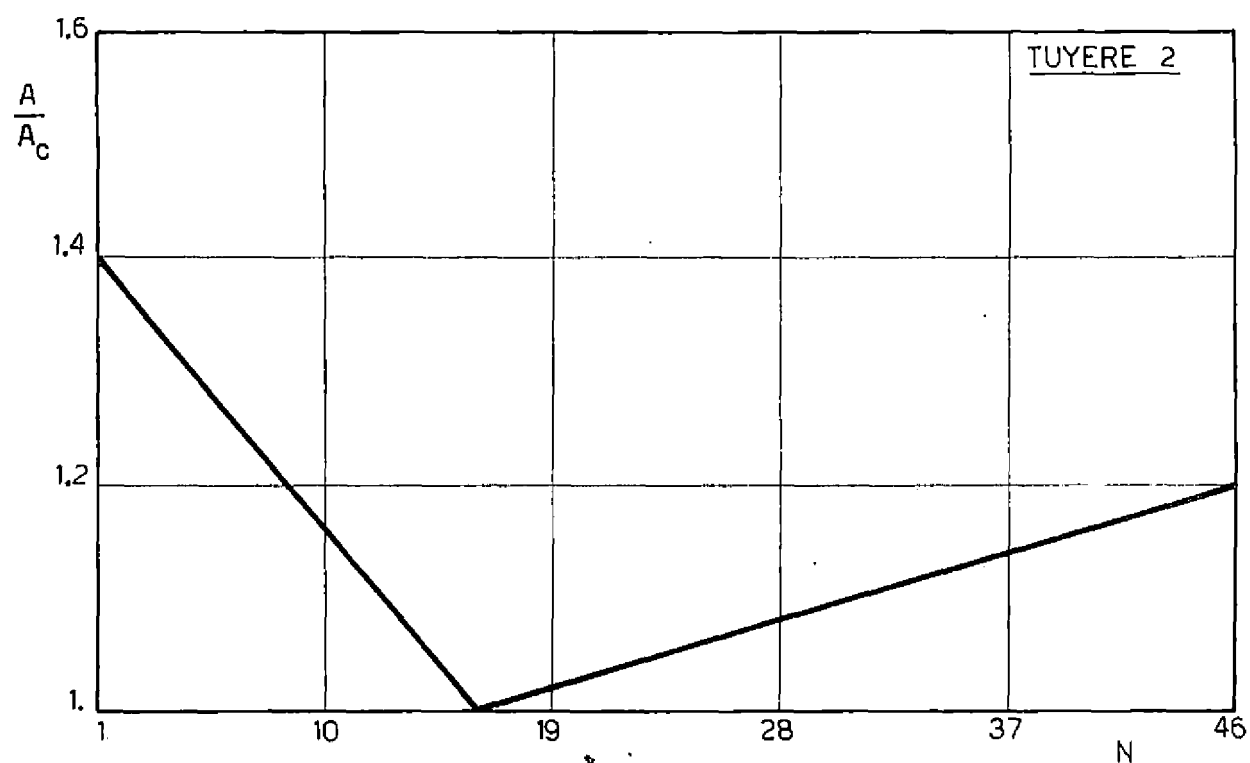
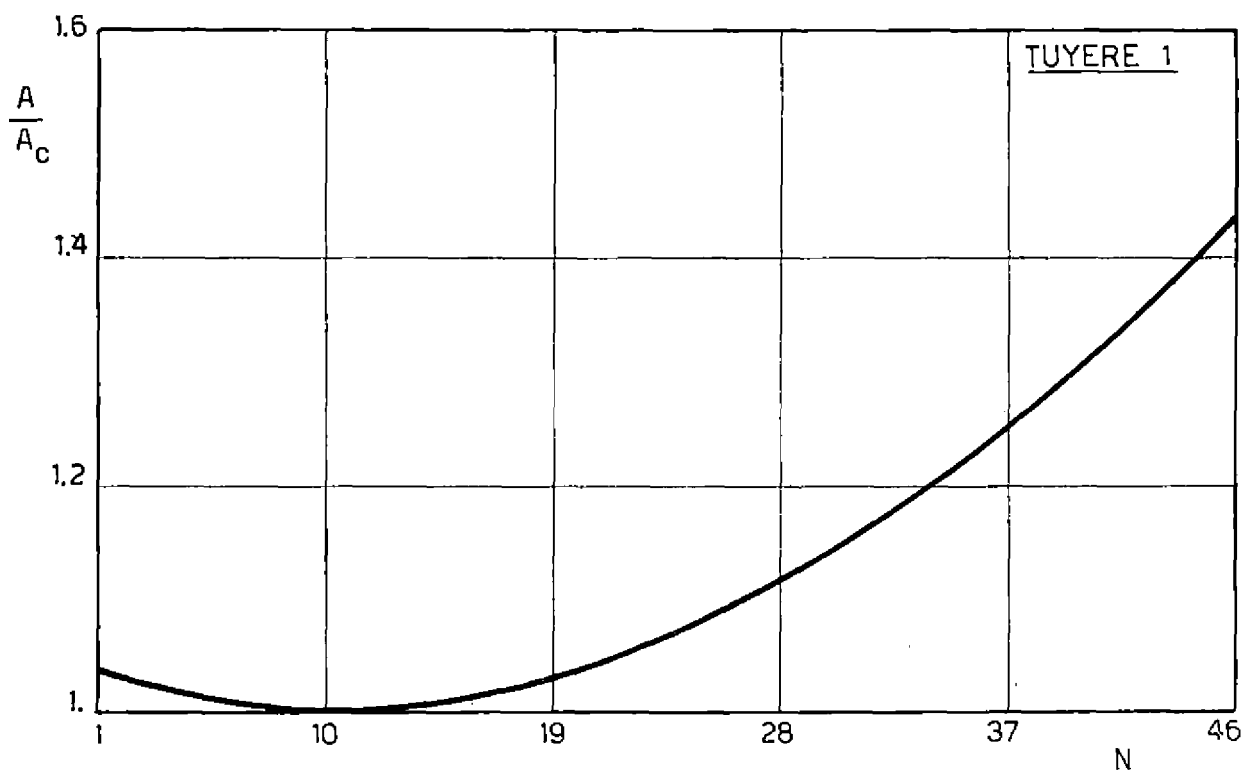


FIG. 7 — DEFINITION DES MODES DE FOURIER CORRECTS ET NUMERIQUES



N : Nombre de noeuds de la discrétisation

FIG. 8 — GEOMETRIE DES TUYERES TU1 ET TU2
(Analyse unidimensionnelle)

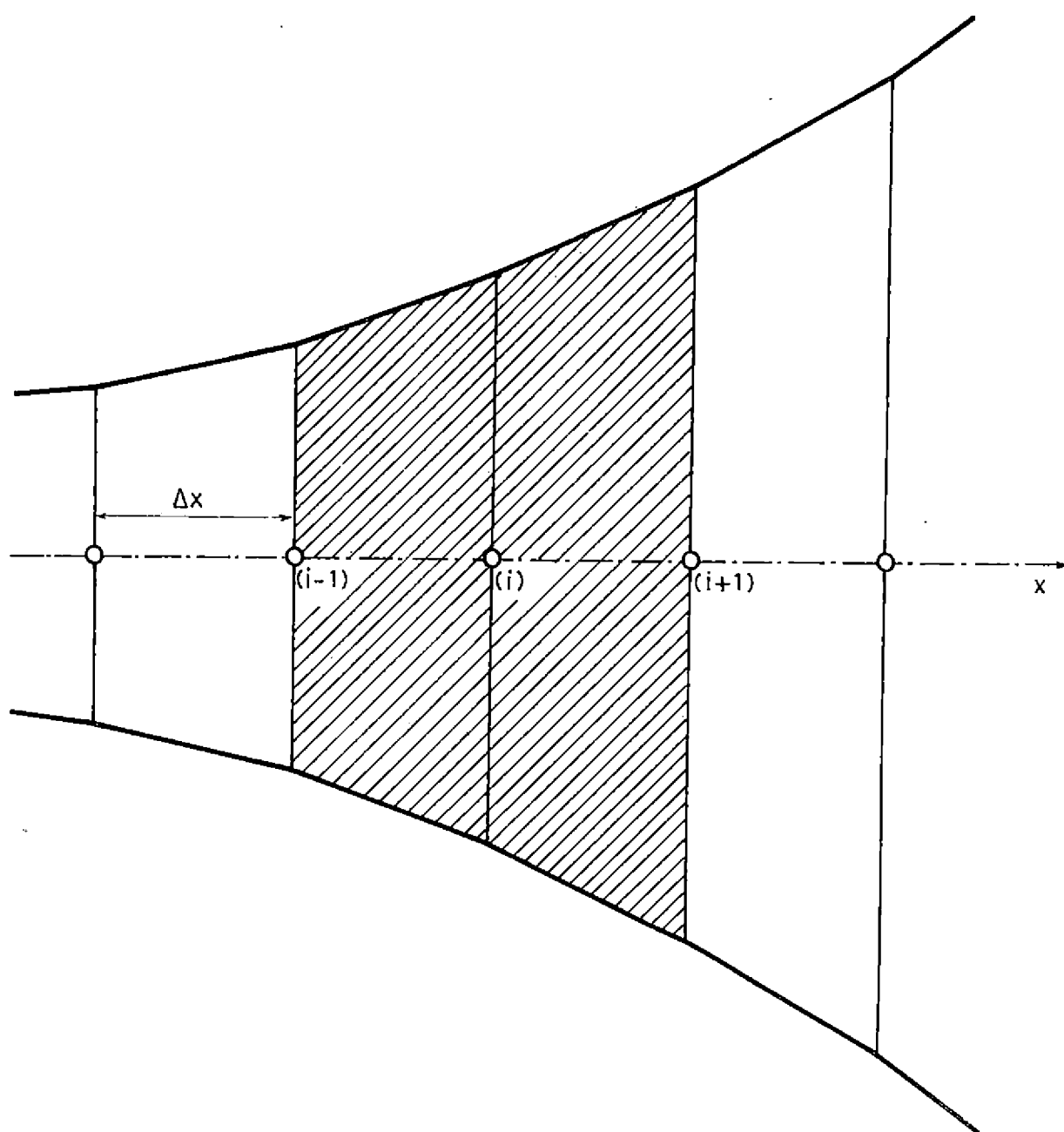
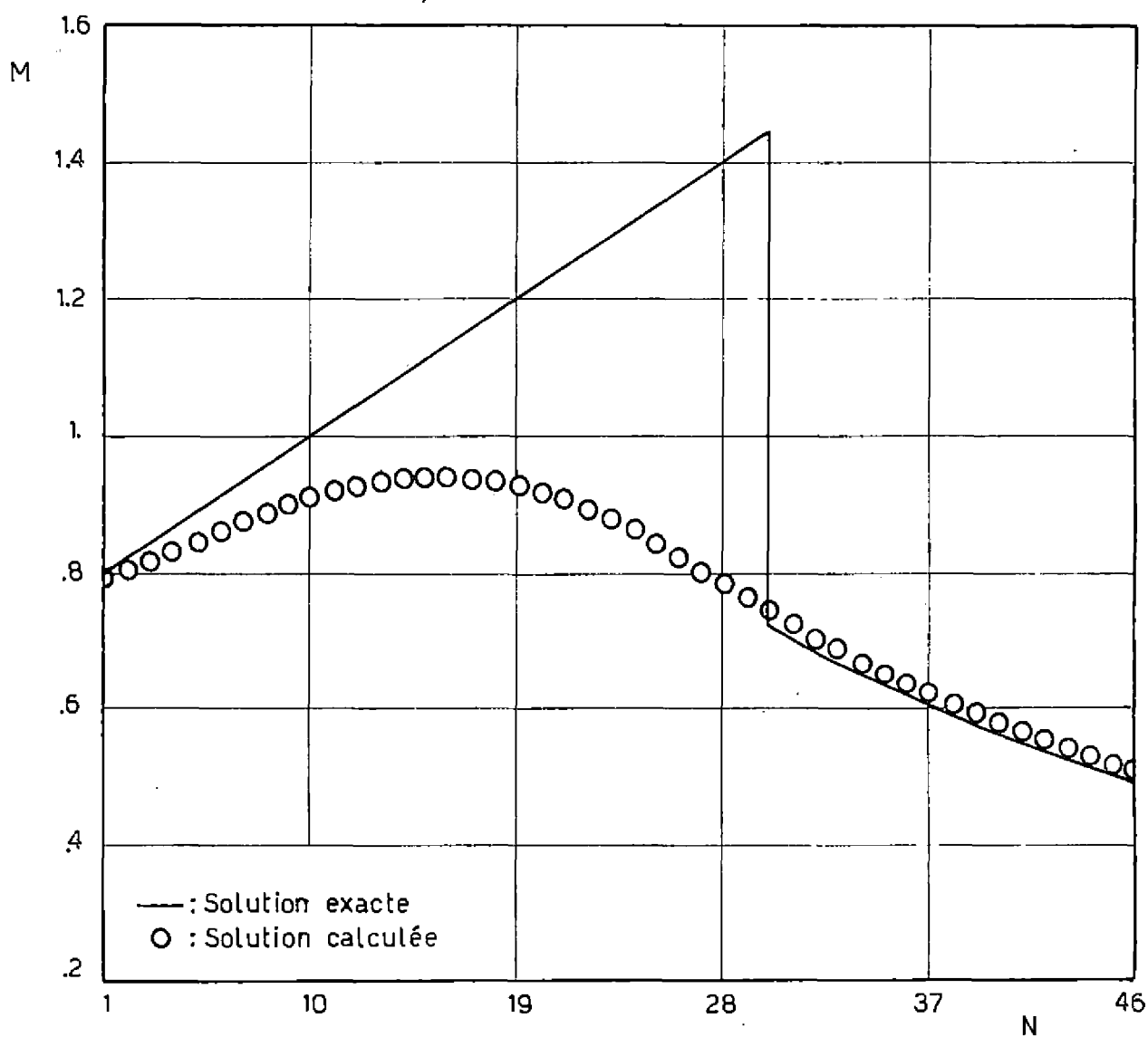


FIG. 9 — MOLECULE DE BASE DE LA
DISCRETISATION

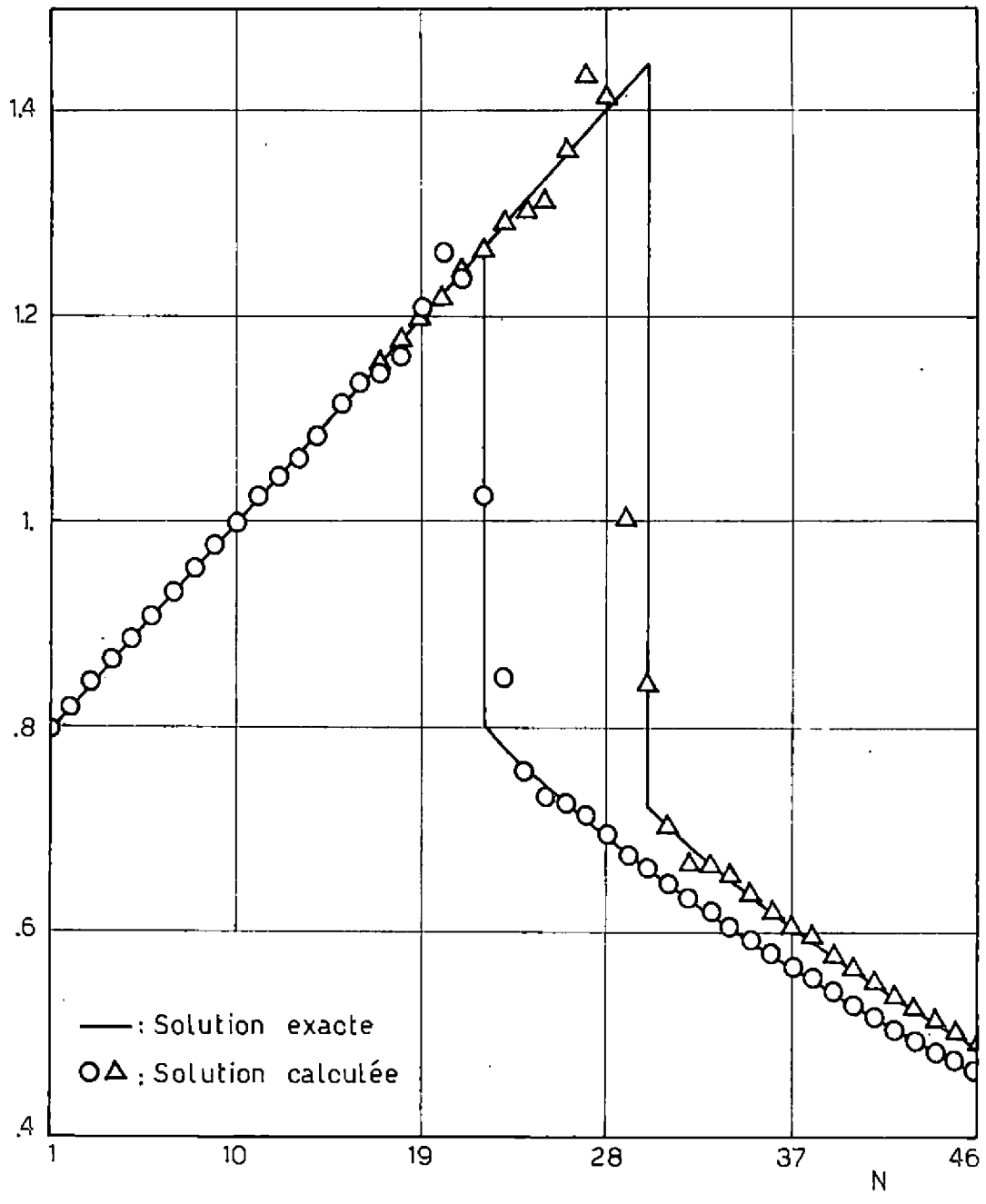


TUYERE 1

$$\left| \begin{array}{l} P_2/P_{01} = 0.804 \\ C.F.L. = 1. \end{array} \right.$$

FIG.10 — SCHEMA DE LAX :
APPLICATION NUMERIQUE

M

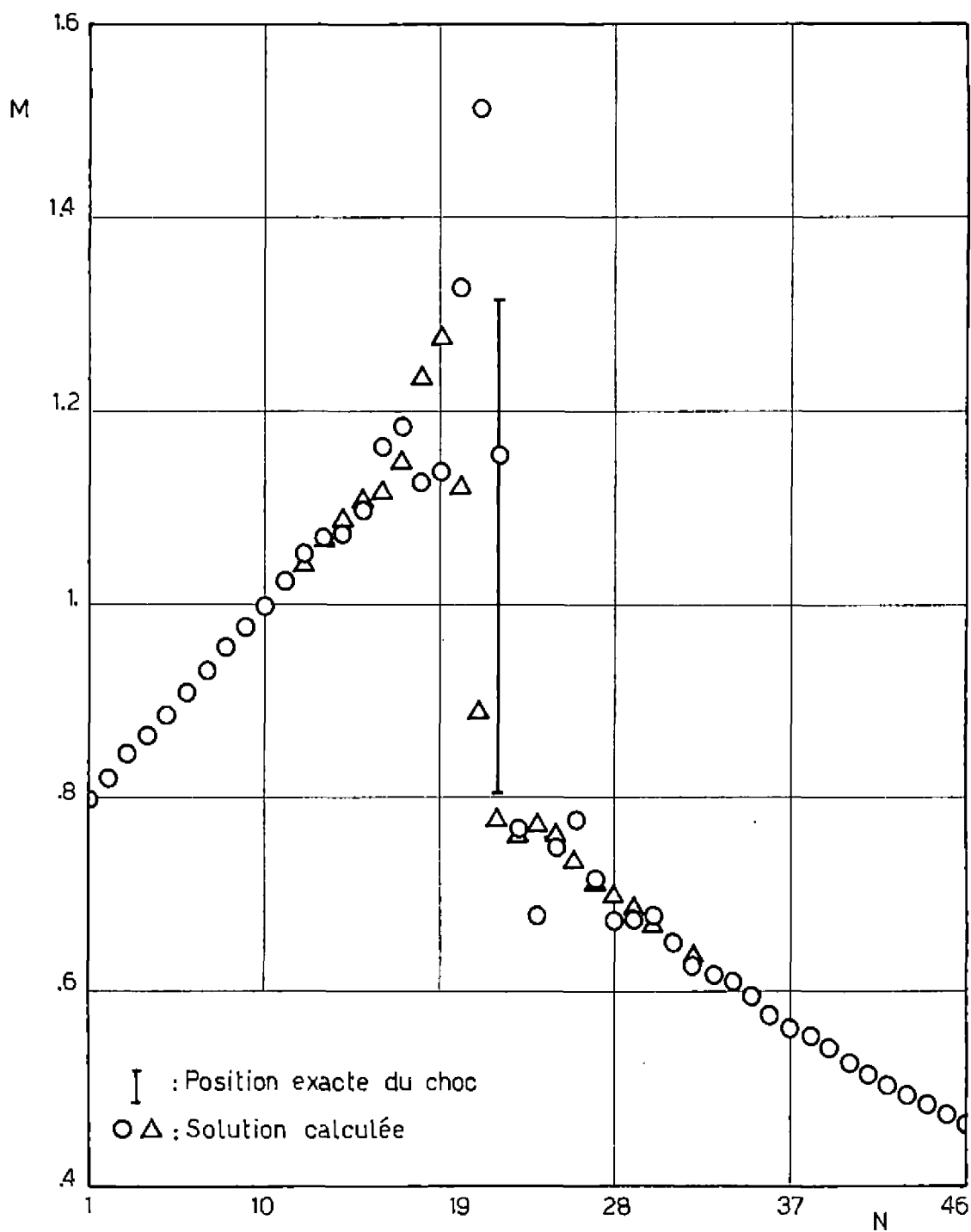


TUYERE 1

○ $\left| \begin{array}{l} P_2/P_{01} = 0.85 \\ C.F.L. = 1. \\ VC = 0.98 \end{array} \right.$

△ $\left| \begin{array}{l} P_2/P_{01} = 0.804 \\ C.F.L. = 1. \\ VC = 0.945 \end{array} \right.$

FIG.11 - SCHEMA DE LAX-WENDROFF A
DEUX PAS:
APPLICATION NUMERIQUE



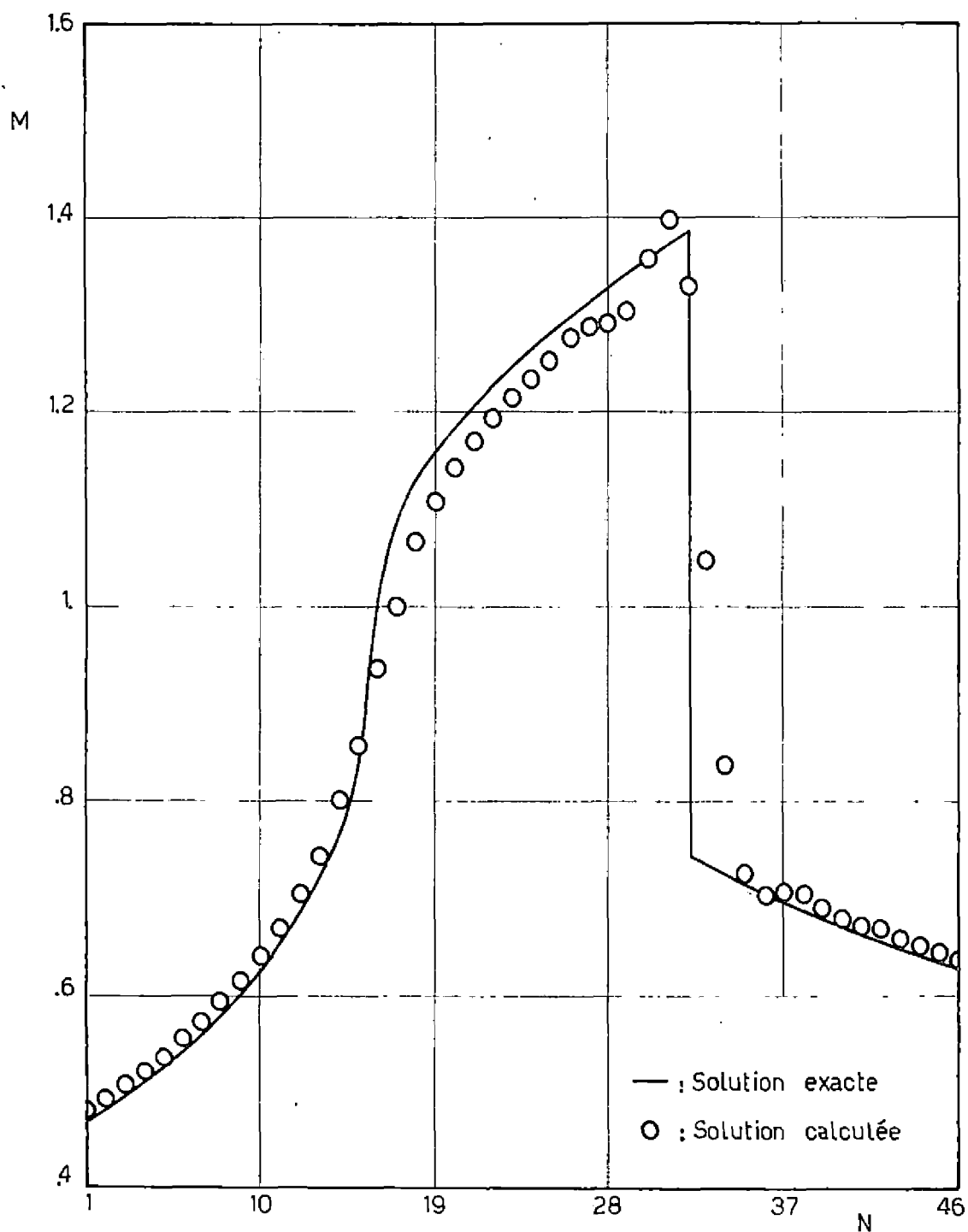
TUYERE 1

$$\left| \begin{array}{l} P_2/P_{01} = 0.85 \\ C.F.L. = 1. \end{array} \right.$$

$\bigcirc$: $VC = 0.98$

$\triangle$: $VC = 0.90$

FIG. 12 — SCHEMA DE LAX-WENDROFF A
DEUX PAS :
APPLICATION NUMERIQUE



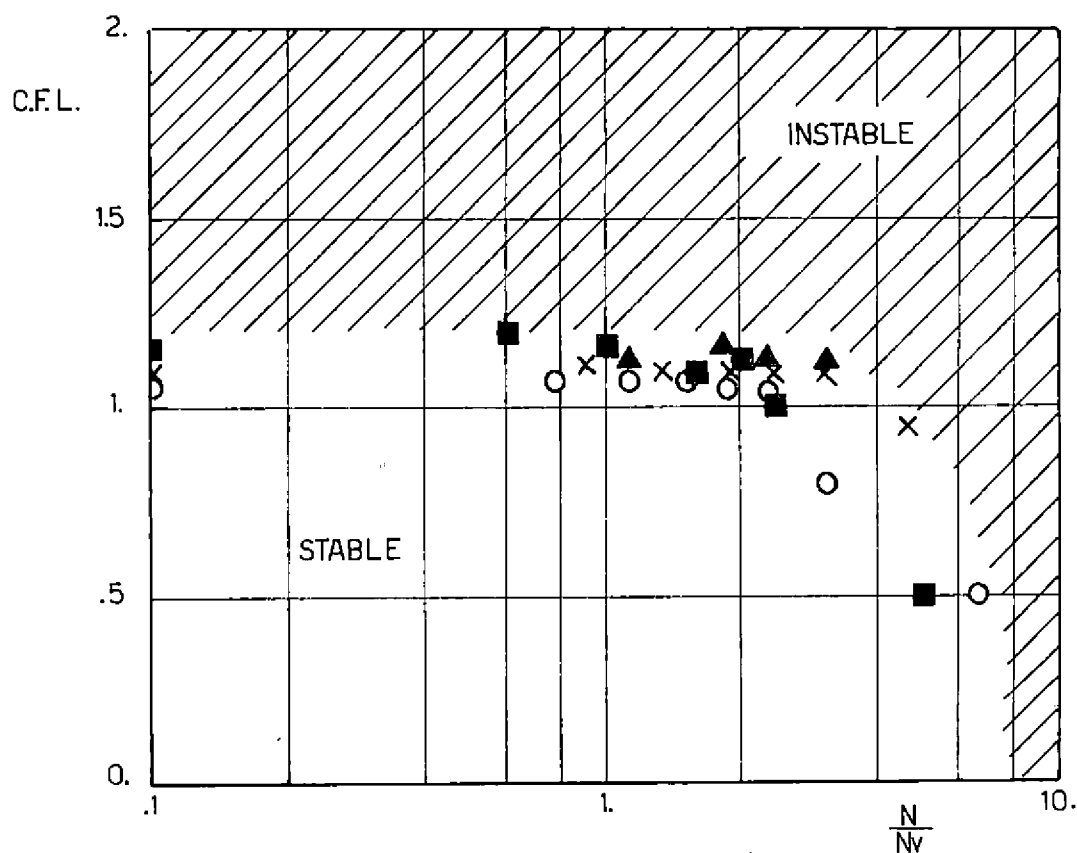
TUYERE 2

$$P_2/P_{01} = 0.736$$

$$C.F.L. = 1.$$

$$VC = 0.96$$

FIG. 13 — SCHEMA DE LAX-WENDROFF A
DEUX PAS :
APPLICATION NUMERIQUE

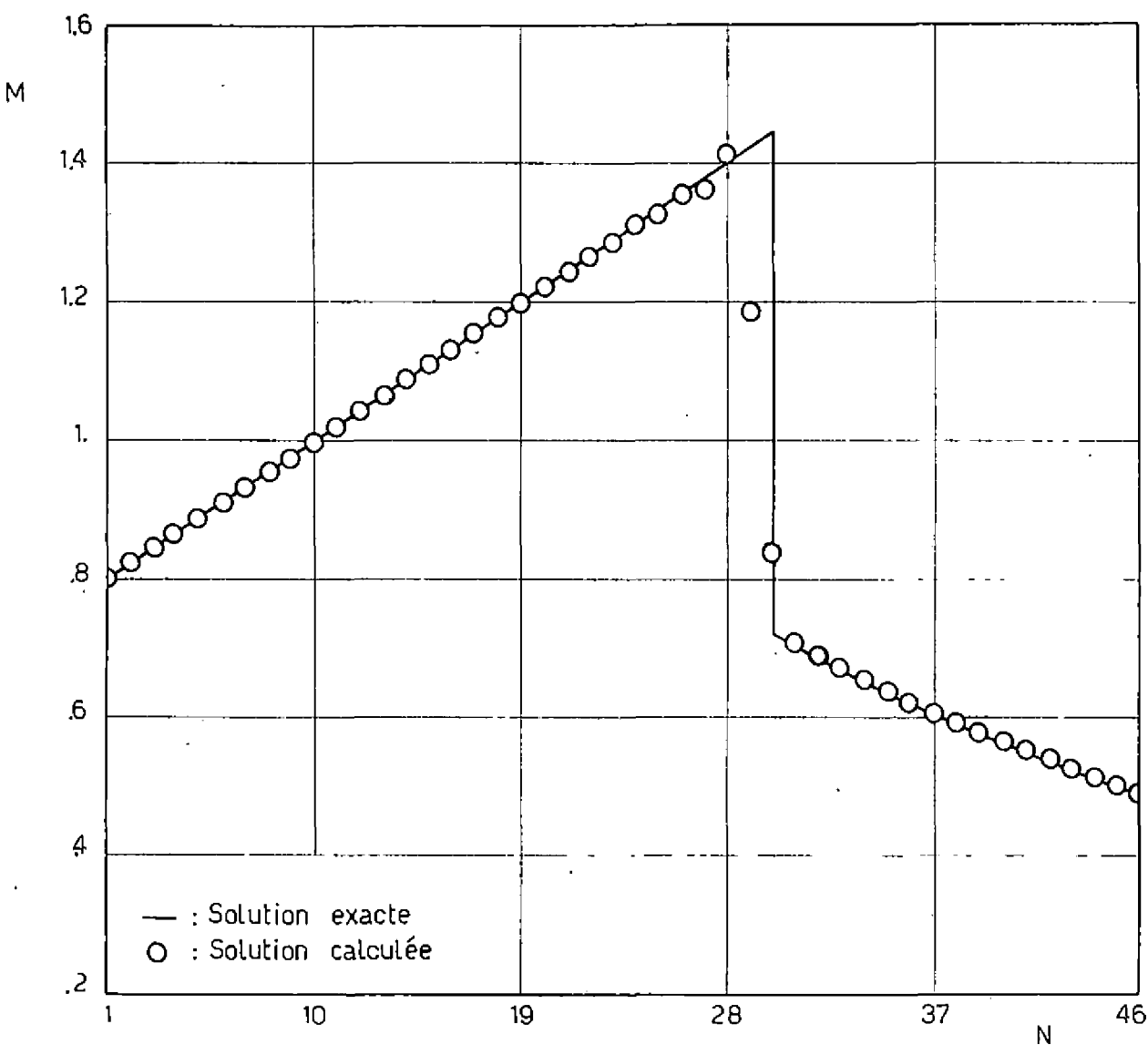


TUYERE 1

	MRS.	P_2	VC	N	Δt
○	pas de choc	0.868	1.	46	constant (*)
×	1.59	0.850	0.97	46	constant
■	pas de choc	0.790	0.99	31	constant
▲	2.0	0.800	0.94	46	variable

(*) conditions initiales = solution exacte

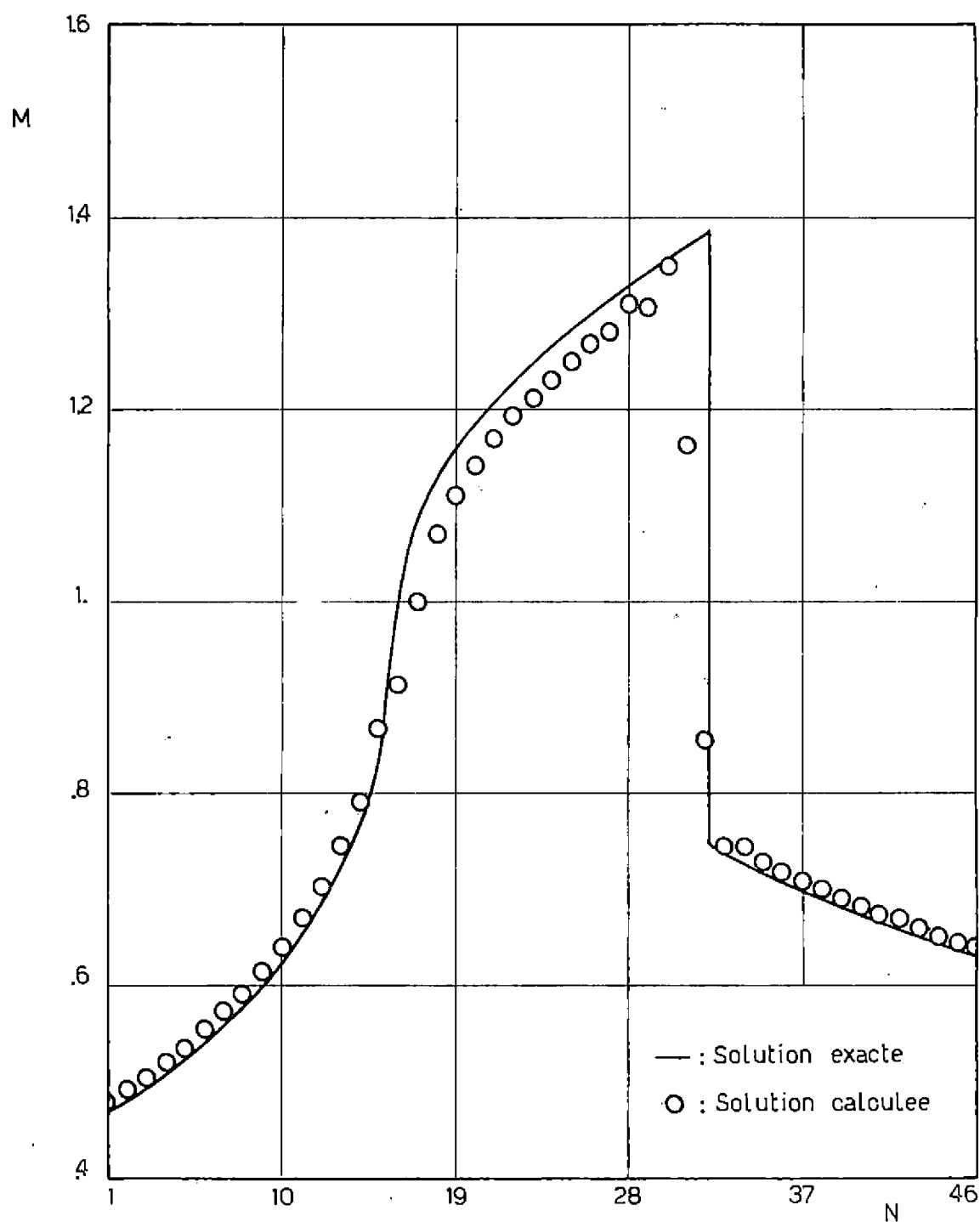
FIG. 14 — STABILITE DU SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE SEMI-IMPLICITE



TUYERE 1

- $P_2/P_{01} = 0.804$
- C.F.L. = 1.
- VC = 0.94
- $N_v = 25$

FIG.15 — SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
APPLICATION NUMERIQUE



TUYERE 2

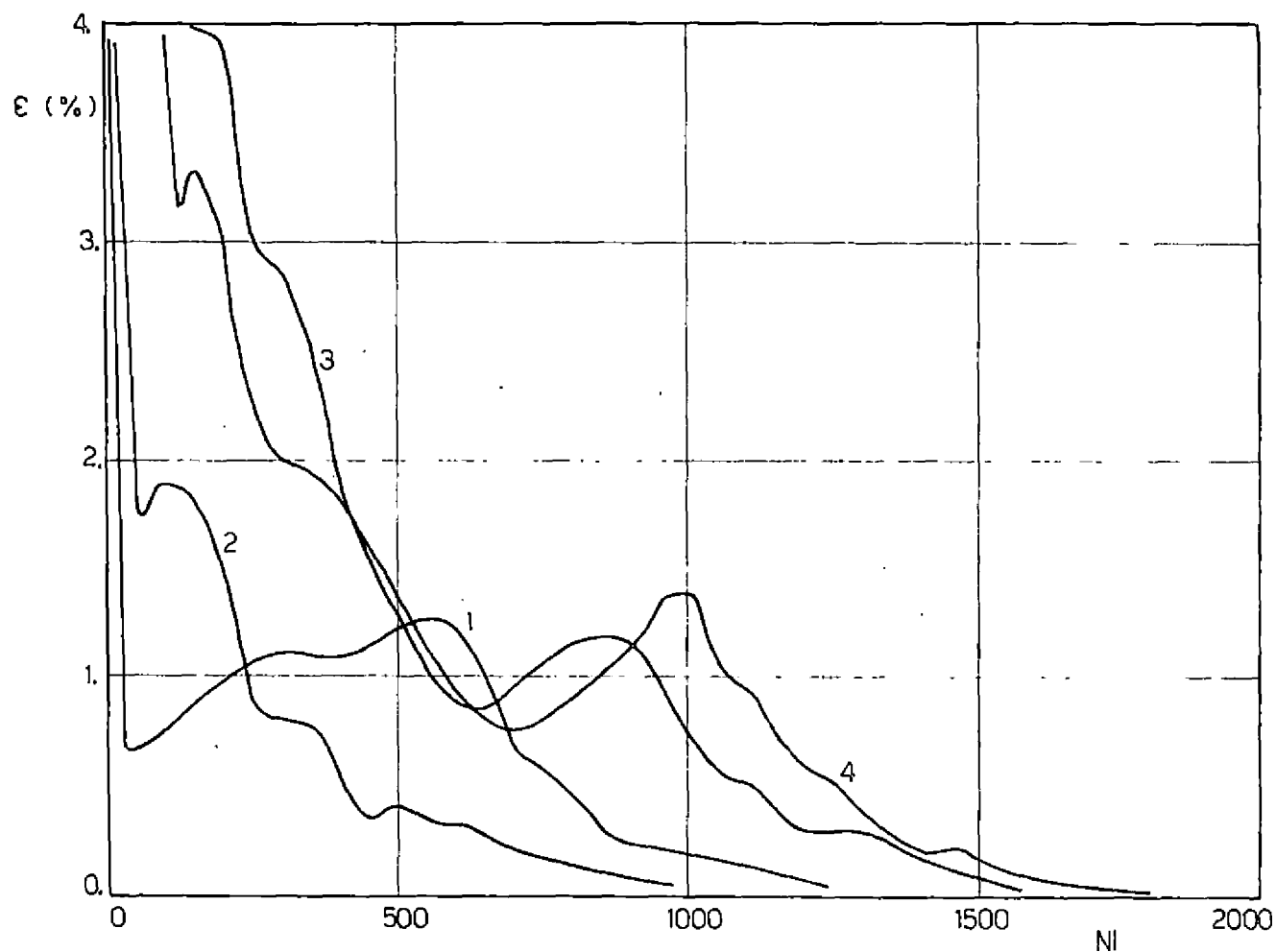
$$P_2/P_{01} = 0.736$$

$$C.F.L. = 1$$

$$VC = 0.96$$

$$Nv = 20$$

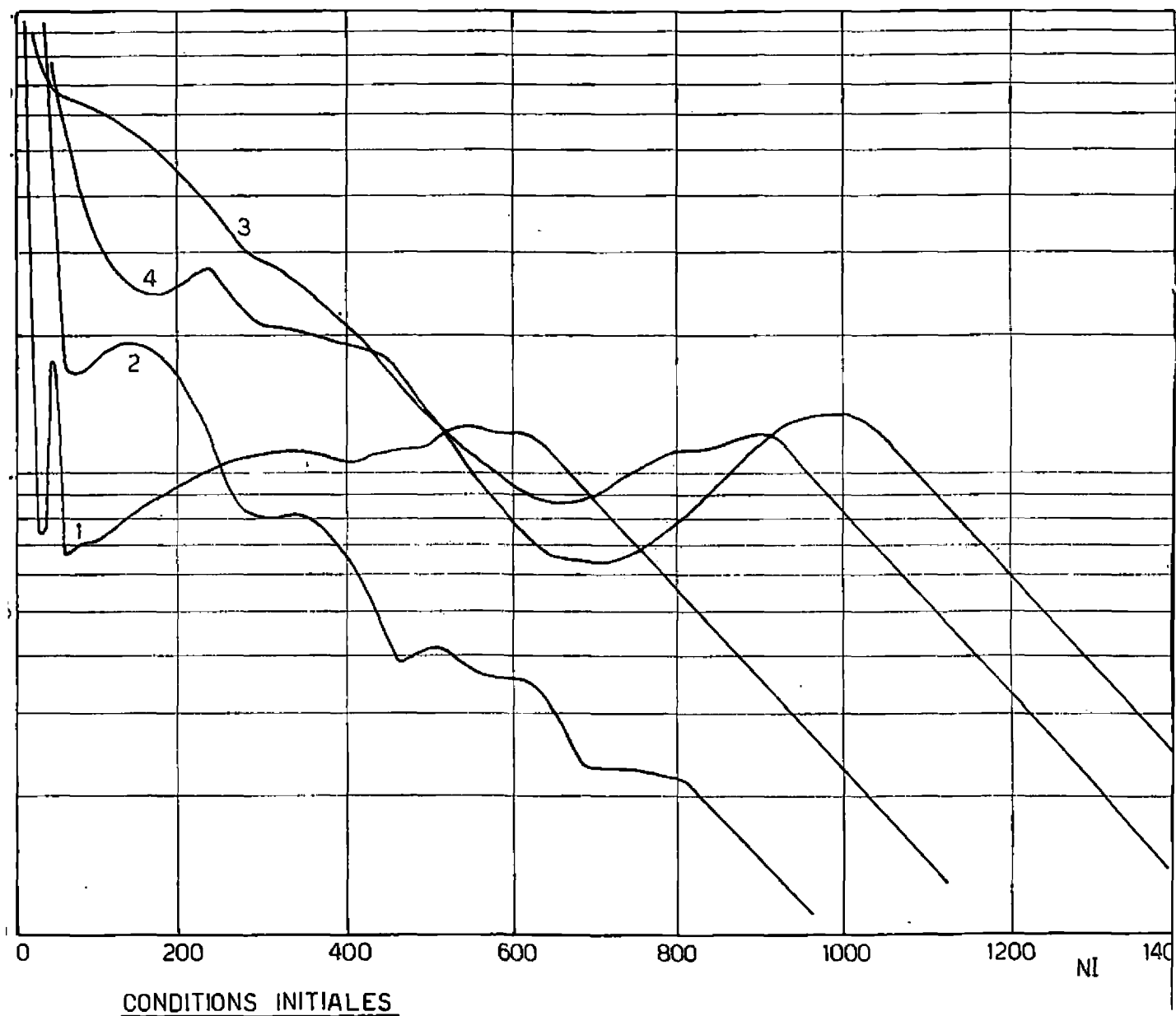
FIG. 16 — SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
APPLICATION NUMERIQUE



CONDITIONS INITIALES

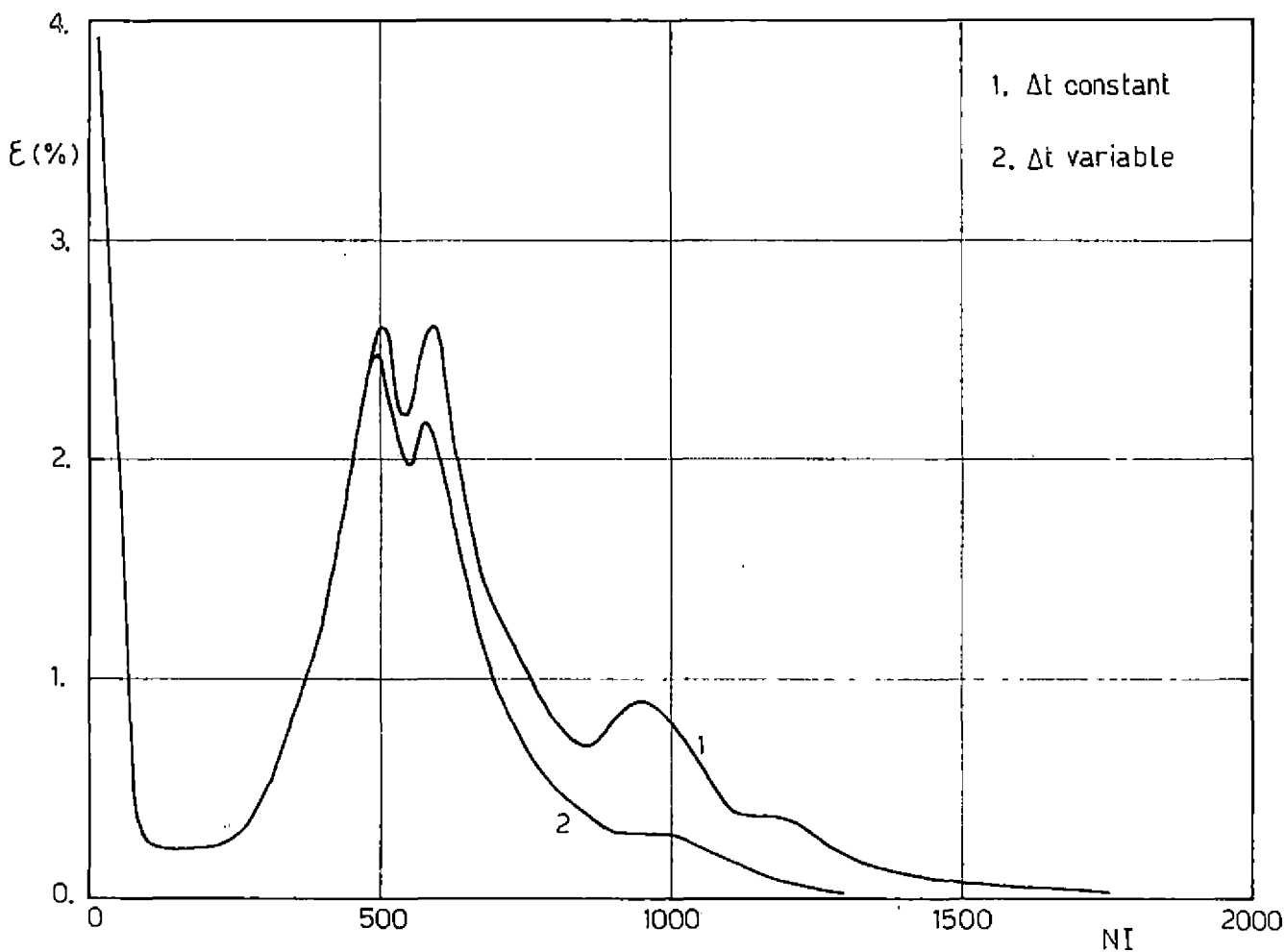
- 1 - Solution subsonique
- 2 - Distribution parabolique de la pression
- 3 - Distribution constante du nombre de Mach
- 4 - Solution incompressible

FIG. 17 — INFLUENCE DES CONDITIONS INITIALES
(échelles linéaires)



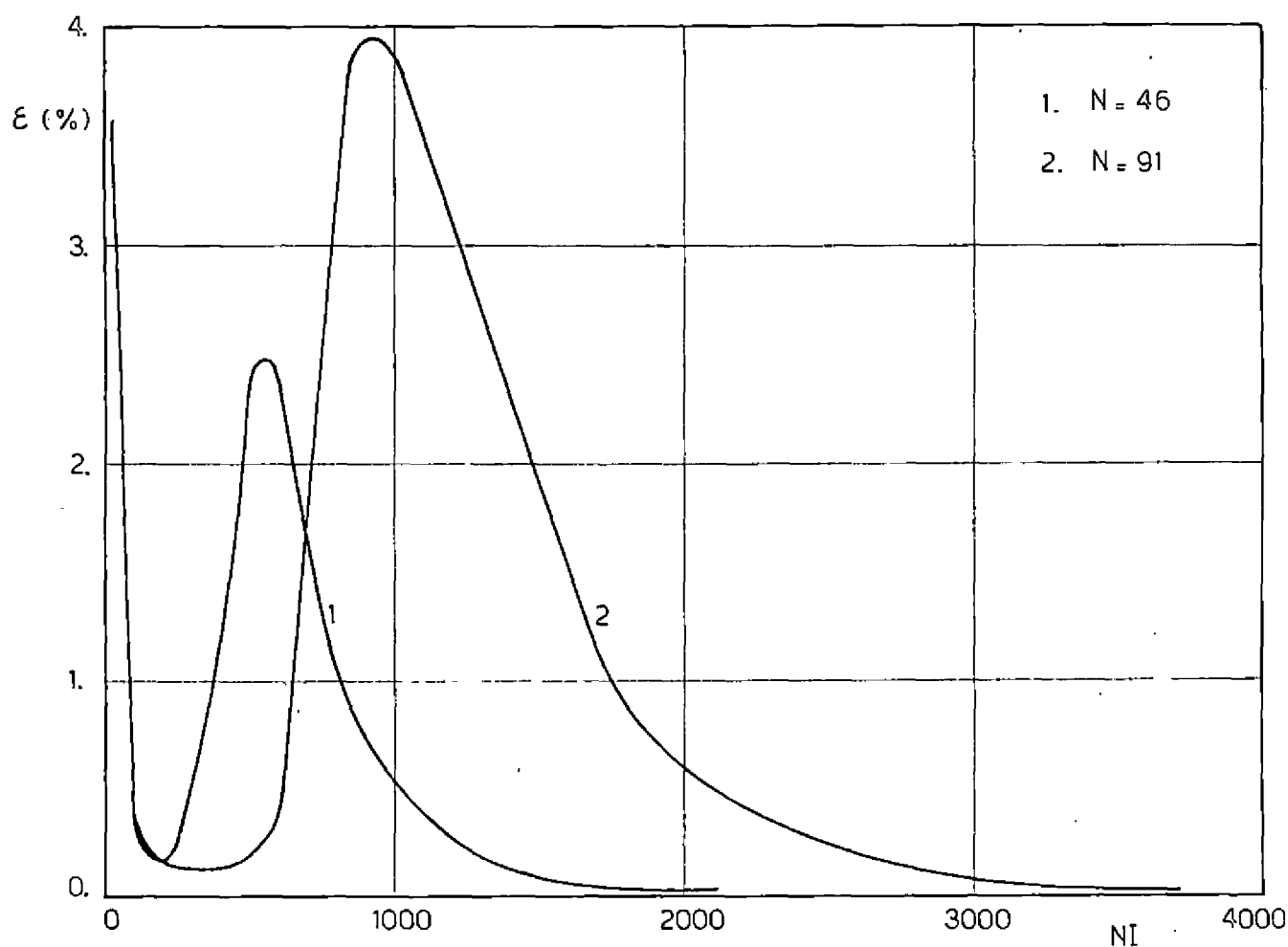
- 1 - Solution subsonique
- 2 -- Distribution parabolique de la pression
- 3 - Distribution constante du nombre de Mach
- 4 - Solution incompressible

FIG. 18 — INFLUENCE DES CONDITIONS INITIALES
(échelles semi-logarithmiques)



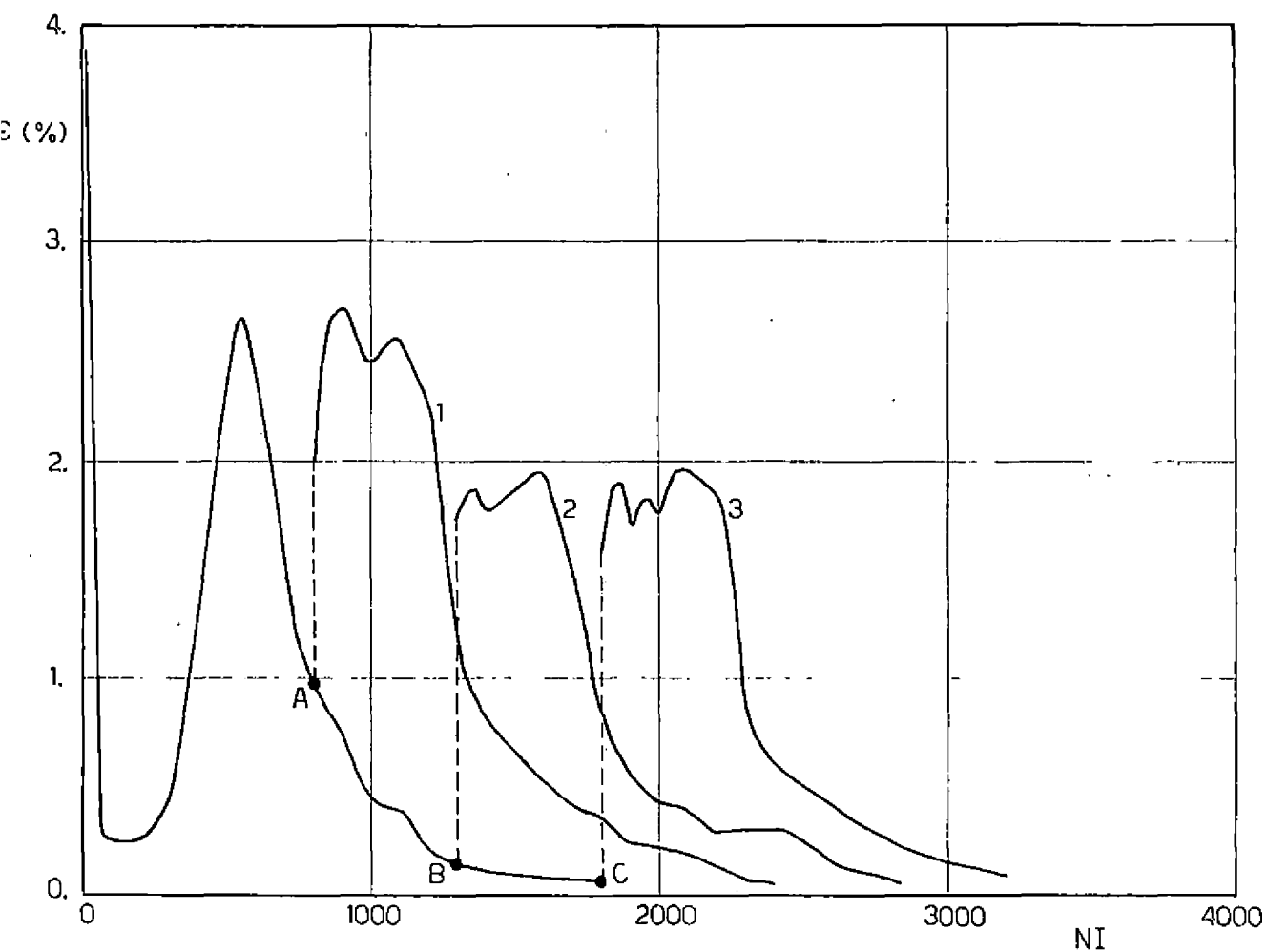
TUYERE 1 — SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

FIG. 19 — INFLUENCE D'UN PAS TEMPOREL
VARIABLE SUR L'EVOLUTION DE
L'ERREUR DE CONVERGENCE



TUYERE 1 — SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

FIG. 20 — INFLUENCE DE LA TAILLE DU MAILLAGE
SUR L'EVOLUTION DE L'ERREUR DE
CONVERGENCE

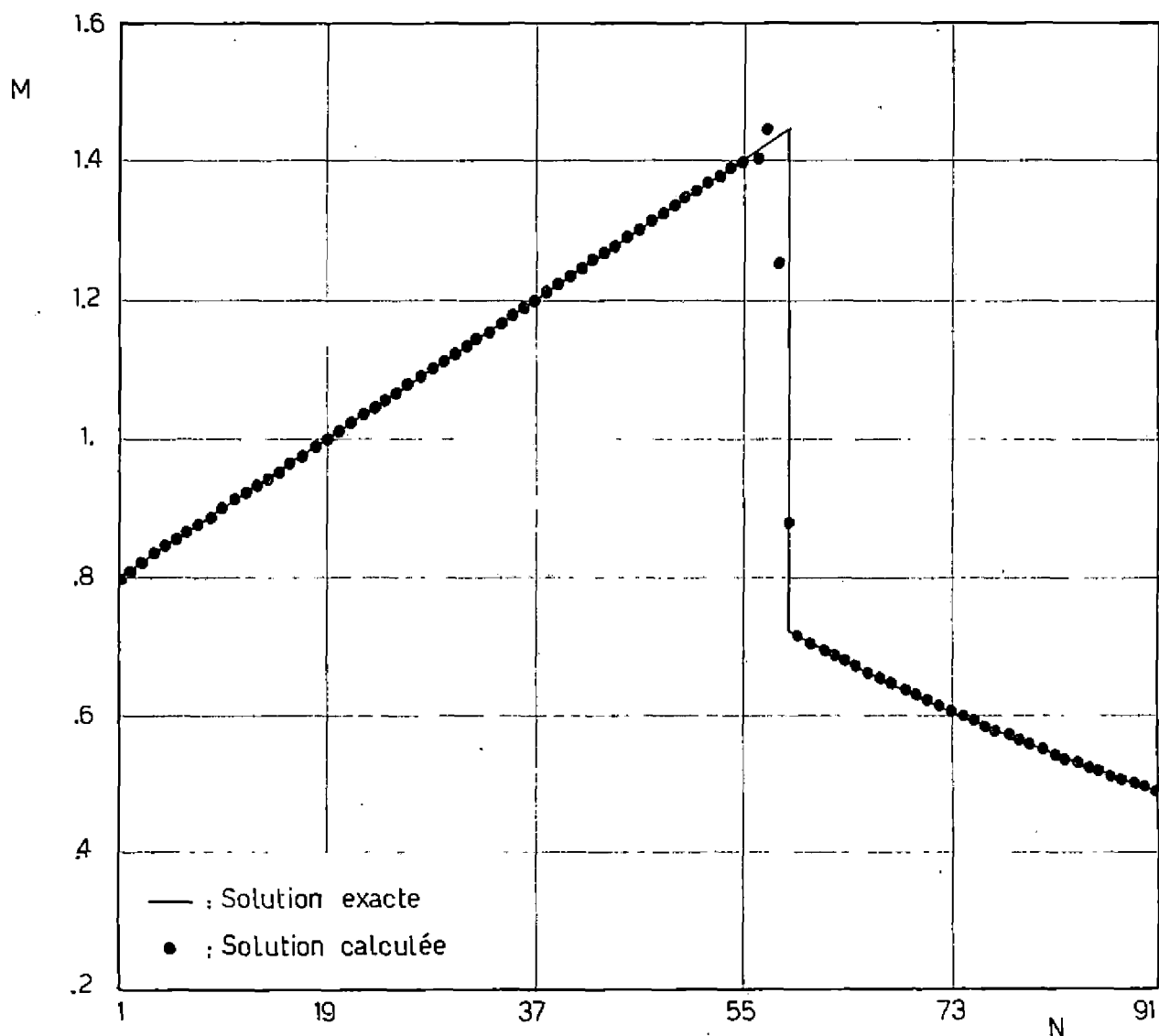


TUYERE 1 — SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

Raffinement du maillage effectué après

- 1. 800 itérations
- 2. 1300 itérations
- 3. 1800 itérations

FIG. 21 — INFLUENCE DU RAFFINEMENT DU MAILLAGE
SUR L'EVOLUTION DE L'ERREUR DE
CONVERGENCE



TUYERE 1 — SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

$P_2/P_{01} = 0.804$
 $C.F.L. = 1.$
 $VC = 0.96$
 $N_v = 50$

FIG. 22 — INFLUENCE DE LA TAILLE DU MAILLAGE
SUR LA PRECISION DES RESULTATS

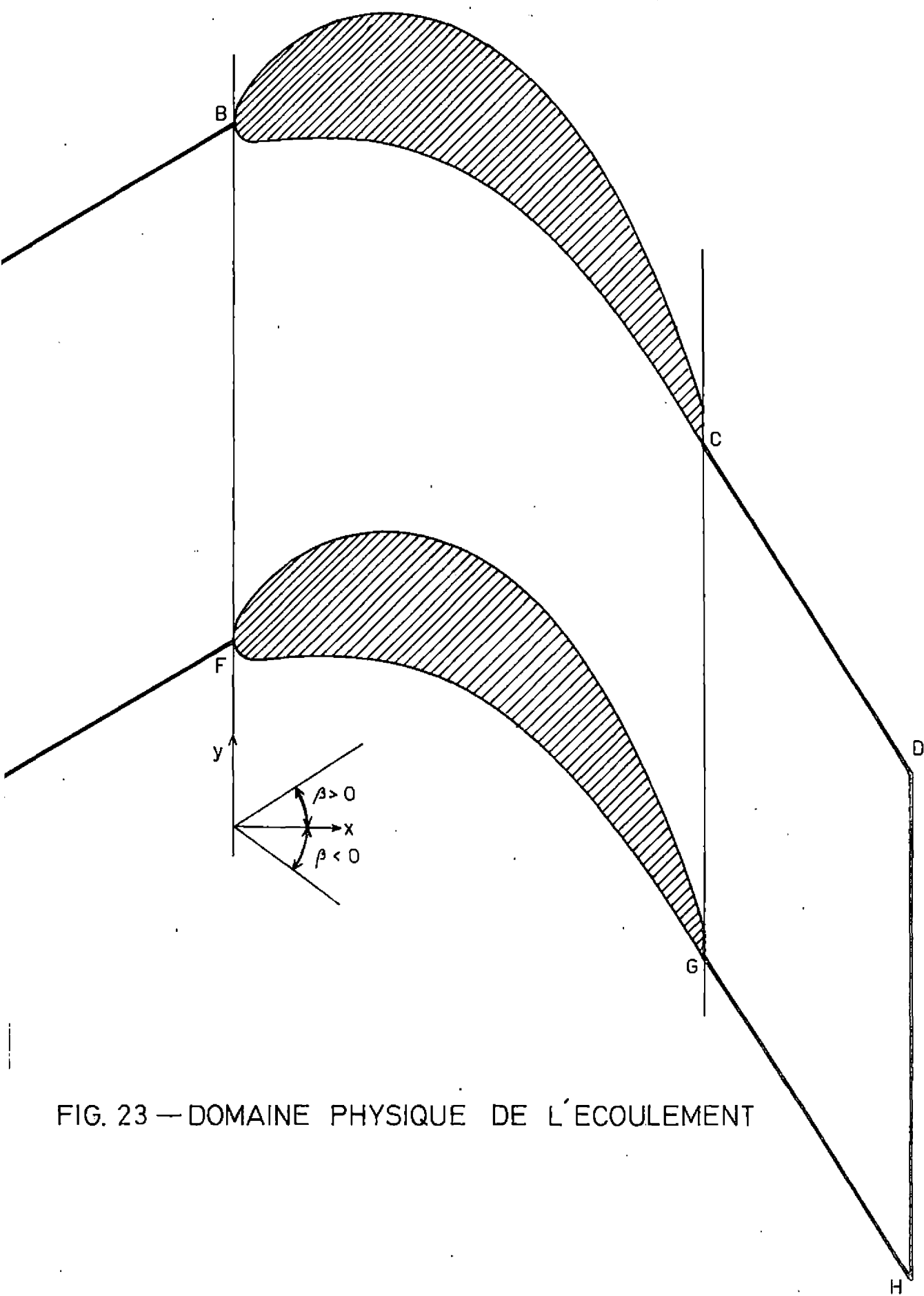


FIG. 23 — DOMAINE PHYSIQUE DE L'ÉCOULEMENT



FIG. 24 - SYSTEMES D'ONDES DE CHOC EN AVAL
D'UNE GRILLE D'AUBES
(Strioscopies)

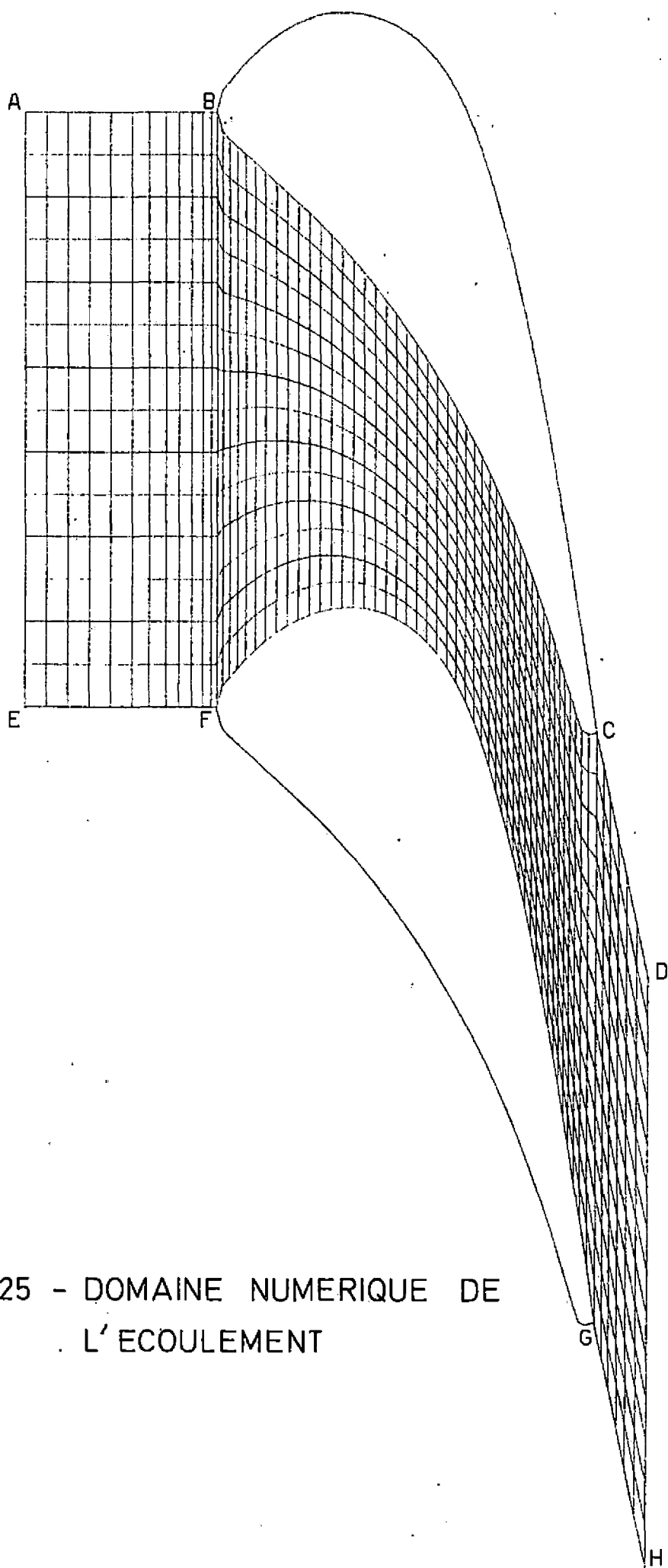


FIG. 25 - DOMAINE NUMERIQUE DE
L'ECOULEMENT

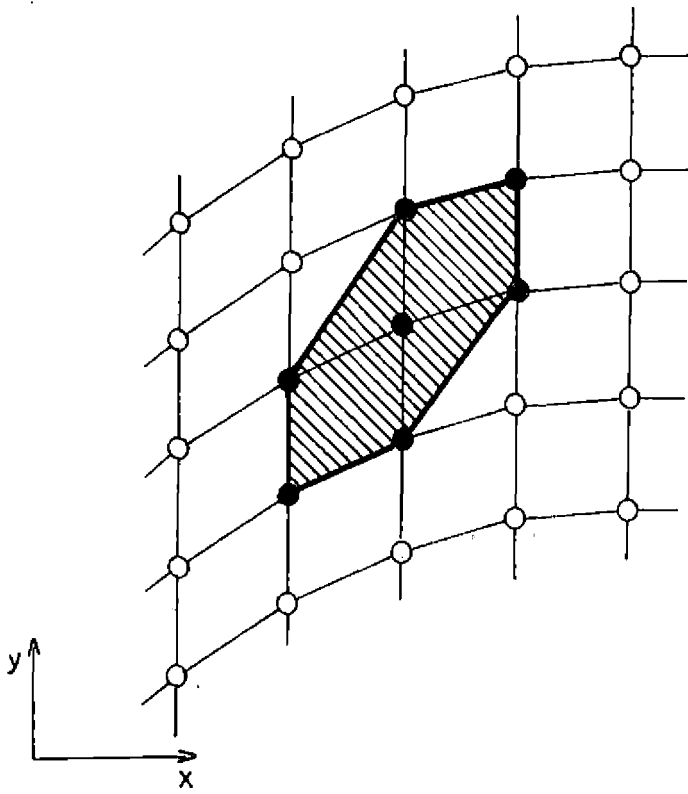


FIG.26a -ELEMENT HEXAGONAL
(Mc DONALD - COUSTON)

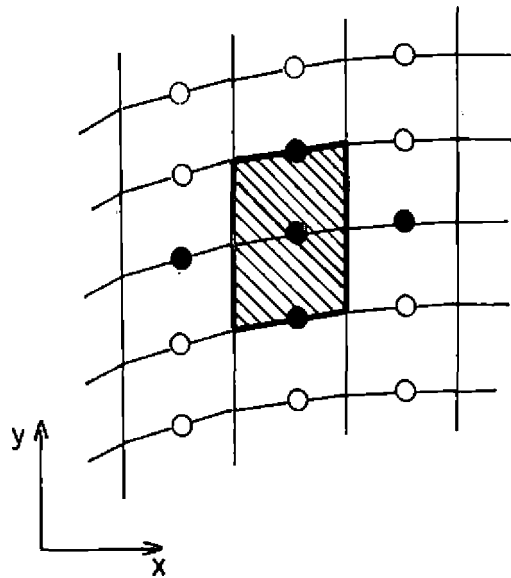


FIG.26b -ELEMENT TRAPEZOIDAL
(DENTON)

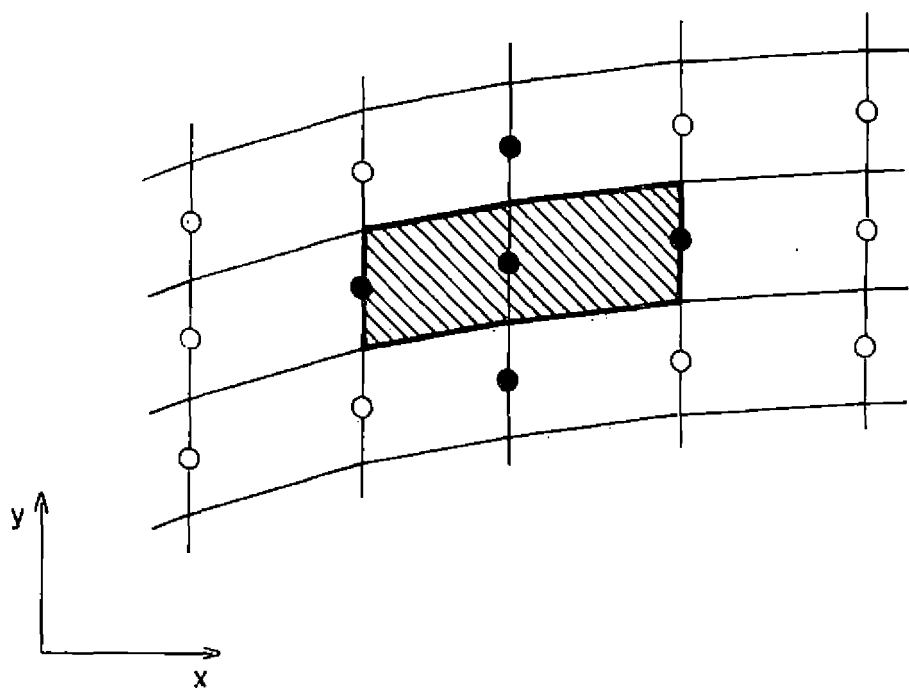


FIG. 26.c — ELEMENT BITRAPEZOIDAL
(VAN HOVE - ARTS)

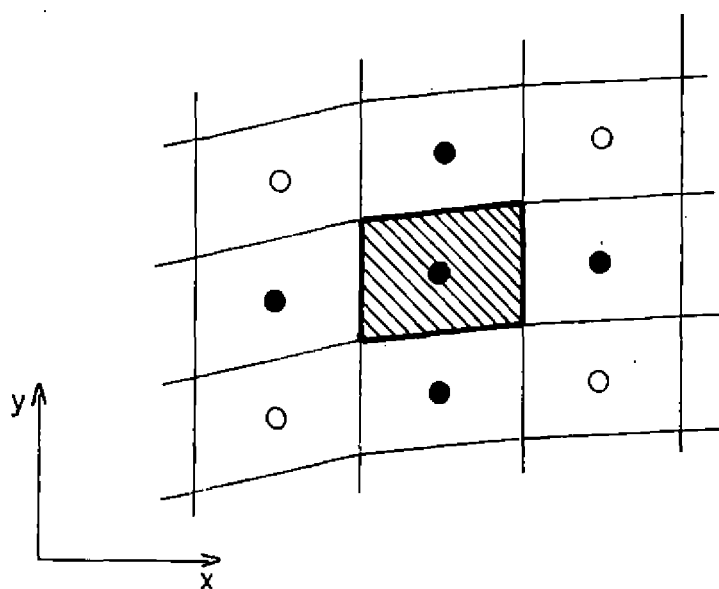


FIG. 26.d — ELEMENT QUADRANGULAIRE
(ESSERS - KAFYEKE)

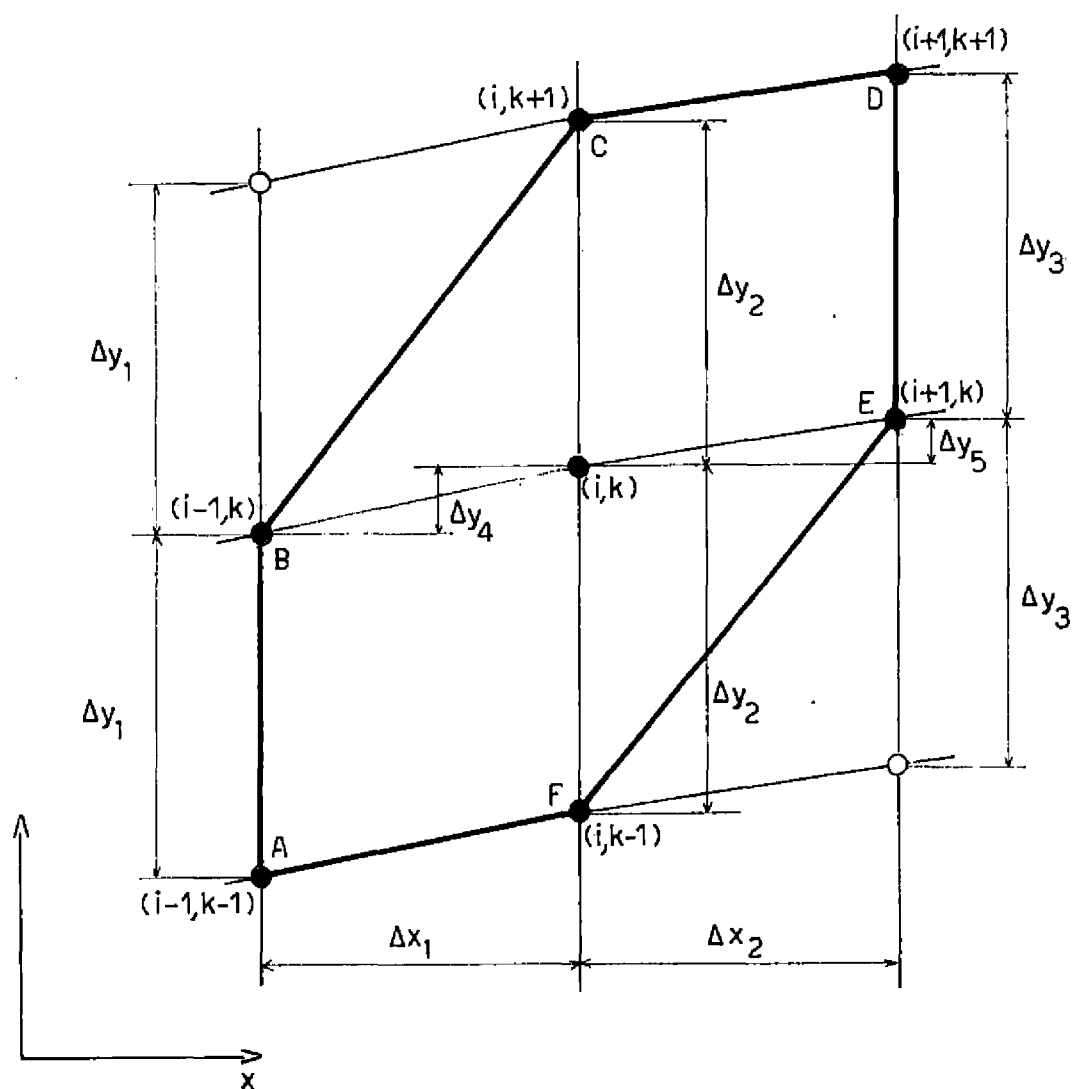
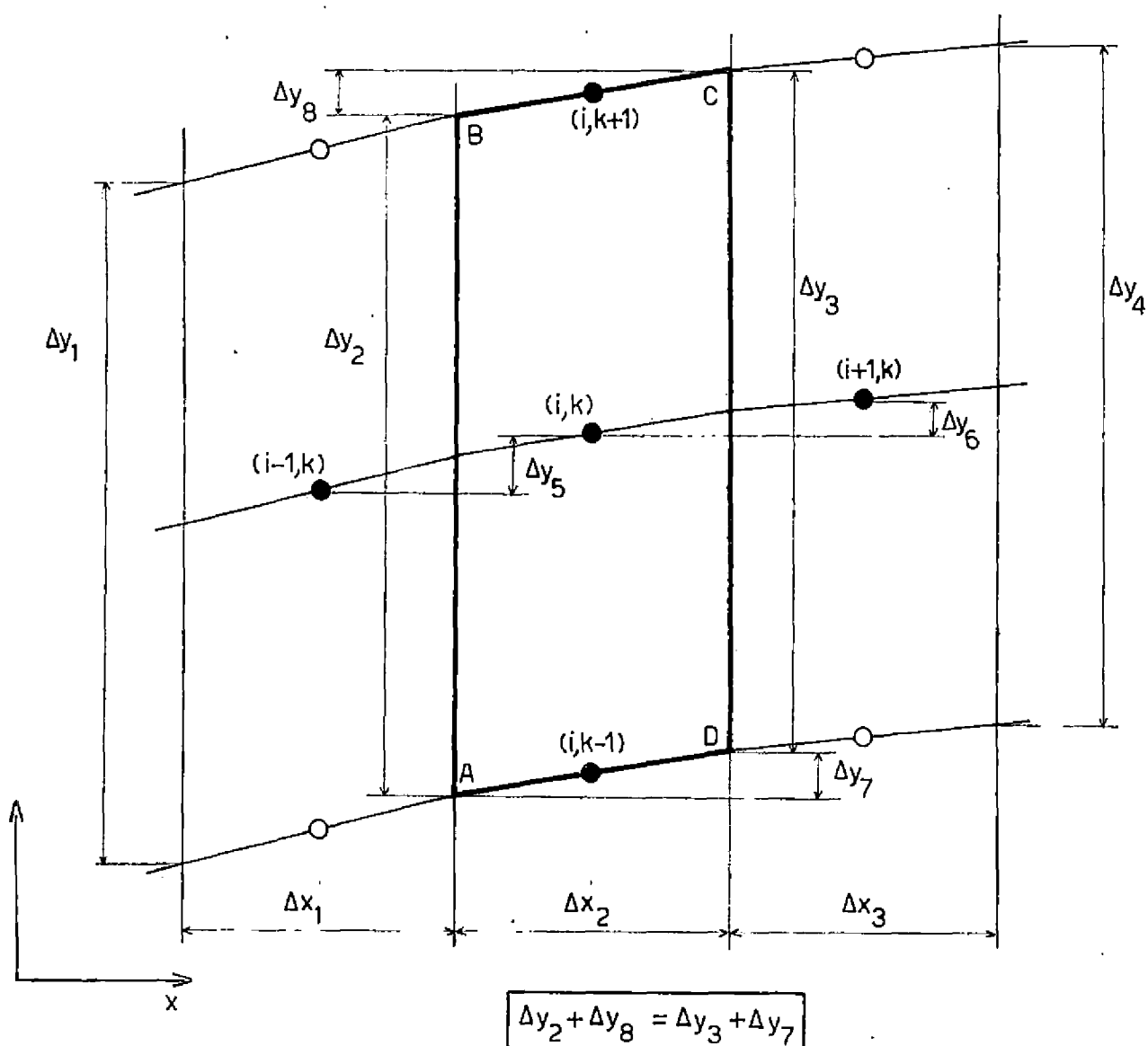


FIG. 27 – ELEMENT HEXAGONAL (Mc Donald - Couston) :
ANALYSE DE CONSISTANCE DE LA
DISCRETISATION



Conditions de consistance:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 \\ \Delta y_5 = \Delta y_6 = (\Delta y_7 + \Delta y_8)/2 \end{cases}$$

FIG. 28 – ELEMENT TRAPEZOIDAL (Denton):
ANALYSE DE CONSISTANCE DE LA
DISCRETISATION

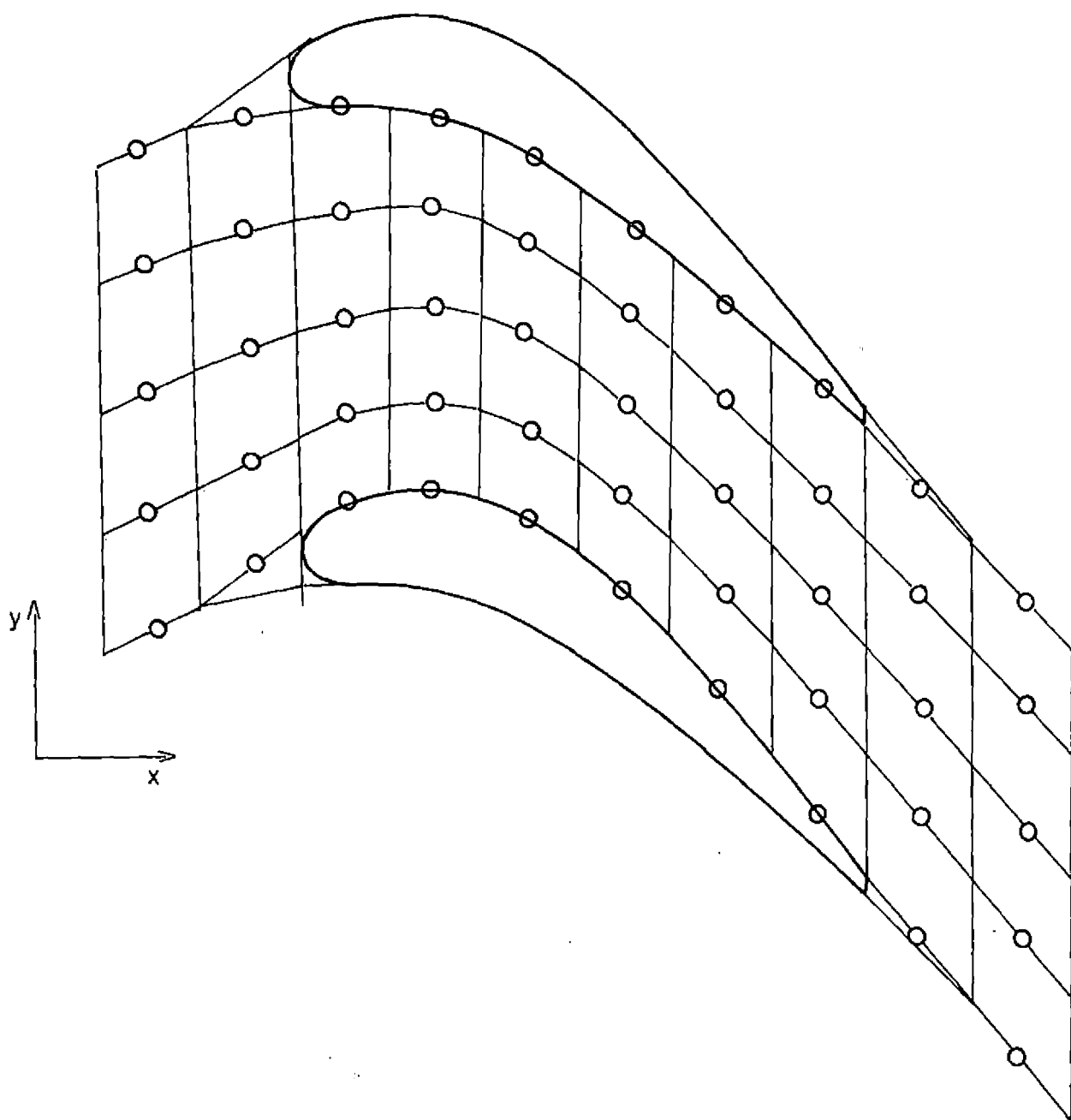
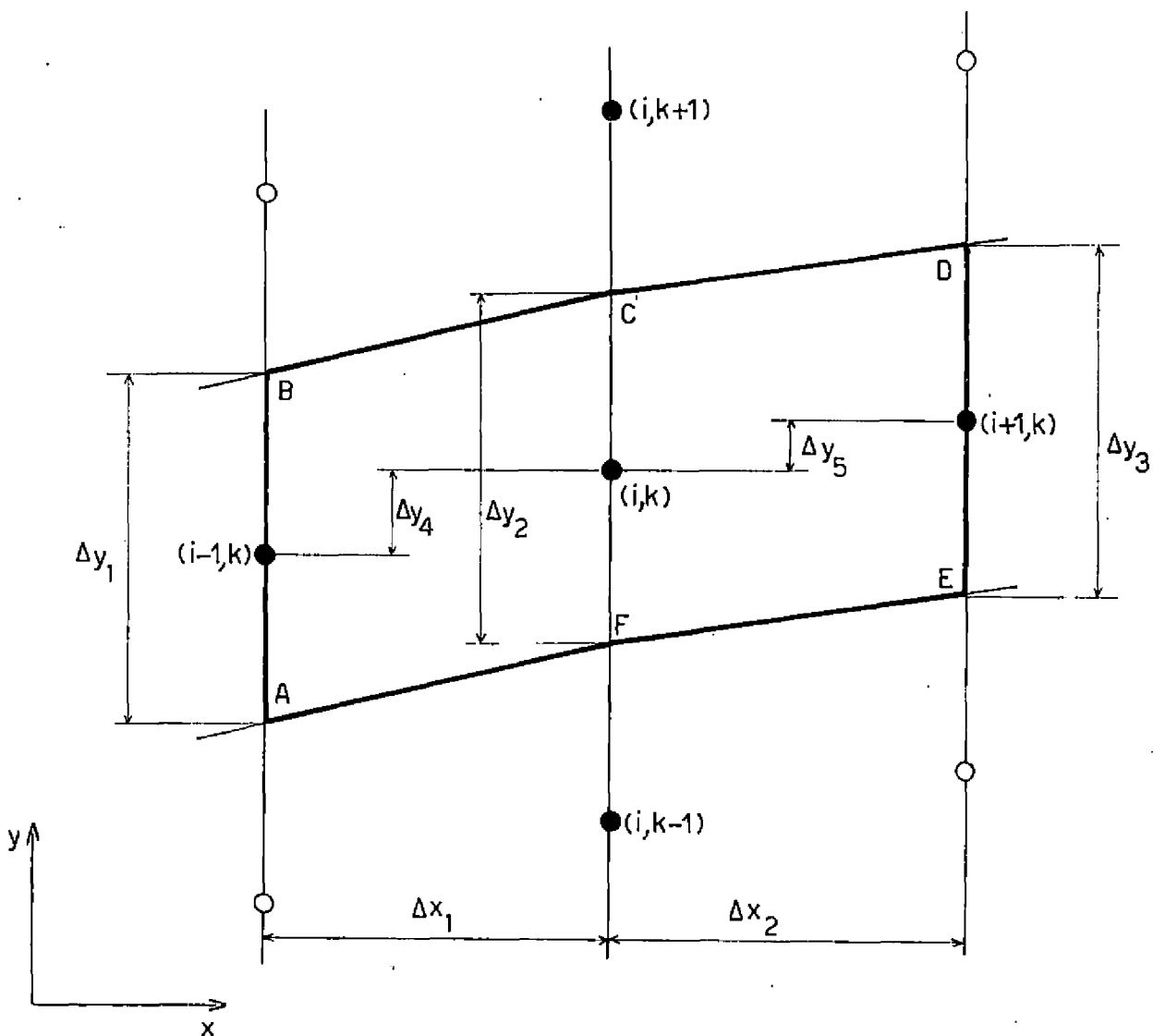


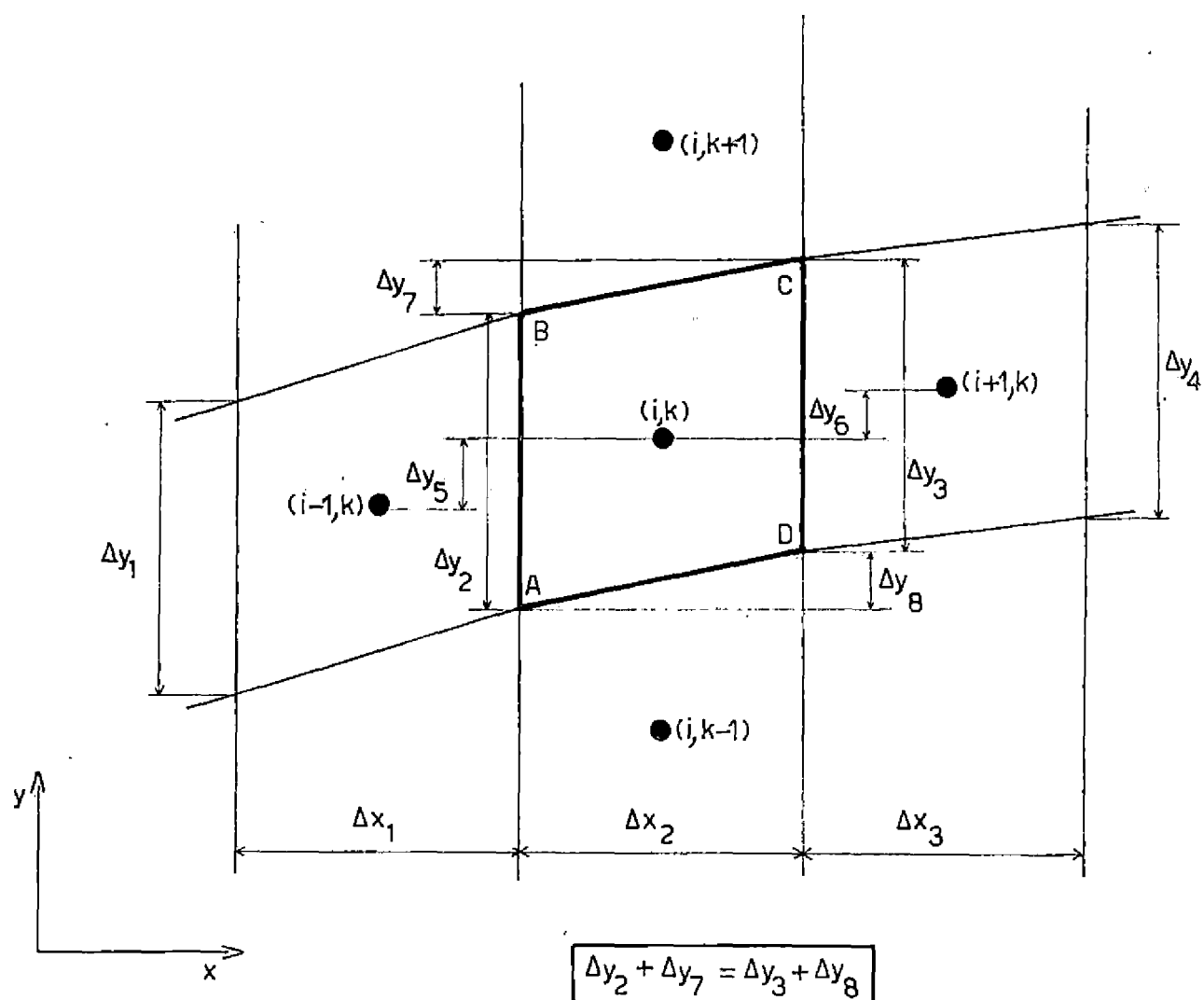
FIG. 29 – MAILLAGE UTILISE PAR DENTON
(Réf 24,53)



Condition de consistance:

$$\begin{cases} \Delta y_2 = \Delta y_3 \\ \Delta y_1 = \Delta y_2 \end{cases}$$

FIG. 30 - ELEMENT BITRAPEZOIDAL (Van Hove - Arts) :
ANALYSE DE CONSISTANCE DE LA
DISCRETISATION



Conditions de consistance :

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 \\ \Delta y_5 = \Delta y_6 = (\Delta y_7 + \Delta y_8) / 2 \end{cases}$$

FIG. 31 — ELEMENT QUADRANGULAIRE (Essers-Kafyeke):
ANALYSE DE CONSISTANCE DE LA
DISCRETISATION

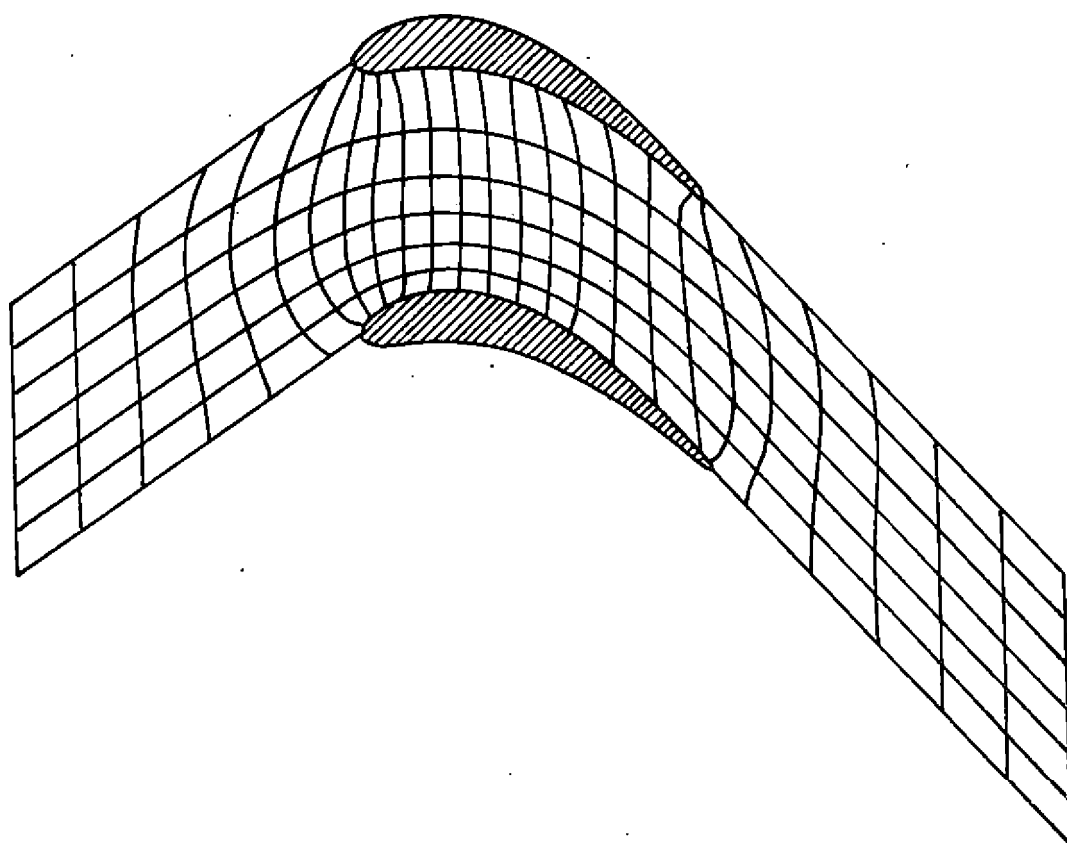


FIG. 32 - MAILLAGE CURVILINEAIRE DE DISCRETISATION
(Réf. 55)

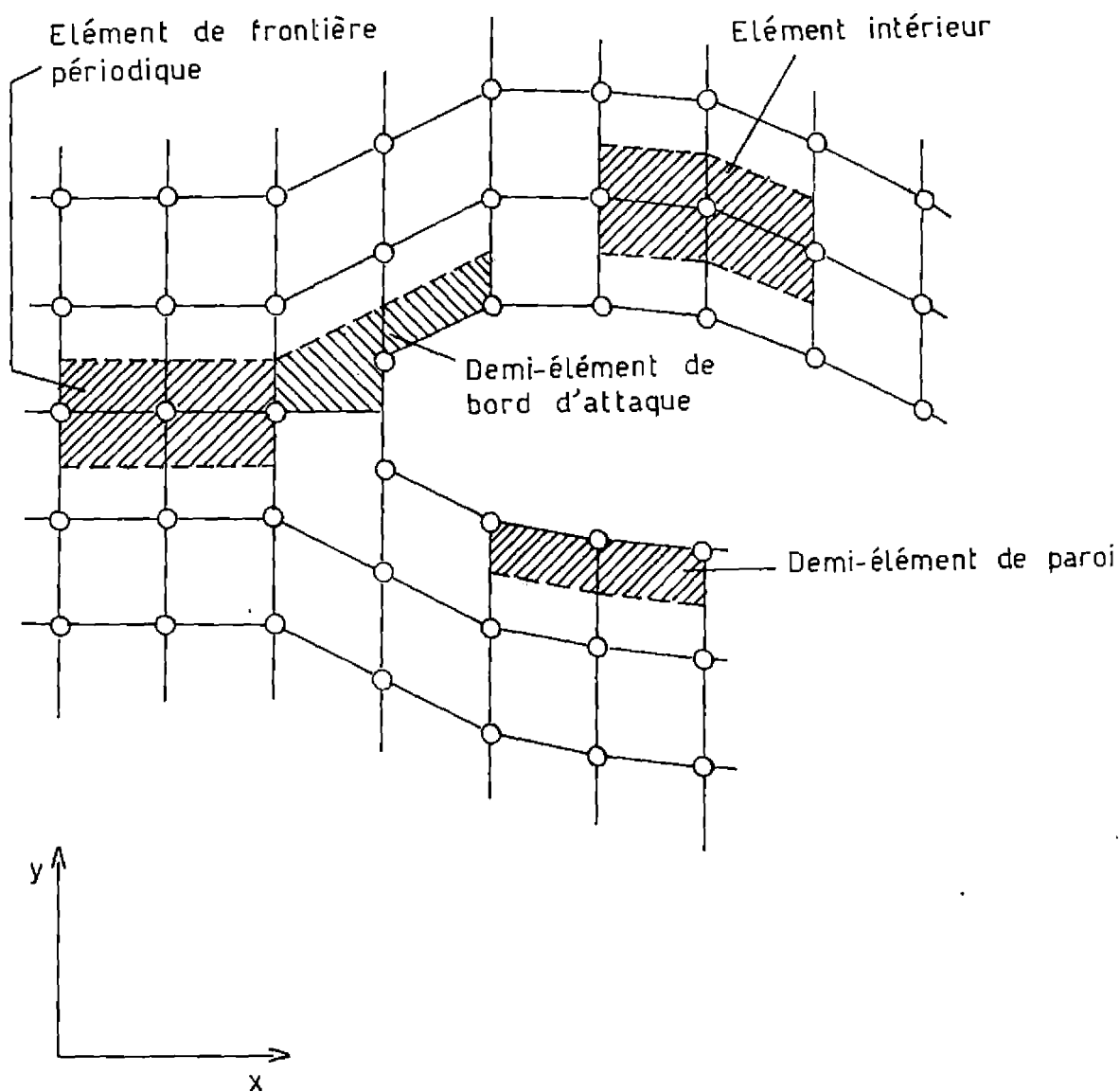


FIG. 33 – CHOIX D'UN ELEMENT DE DISCRETISATION

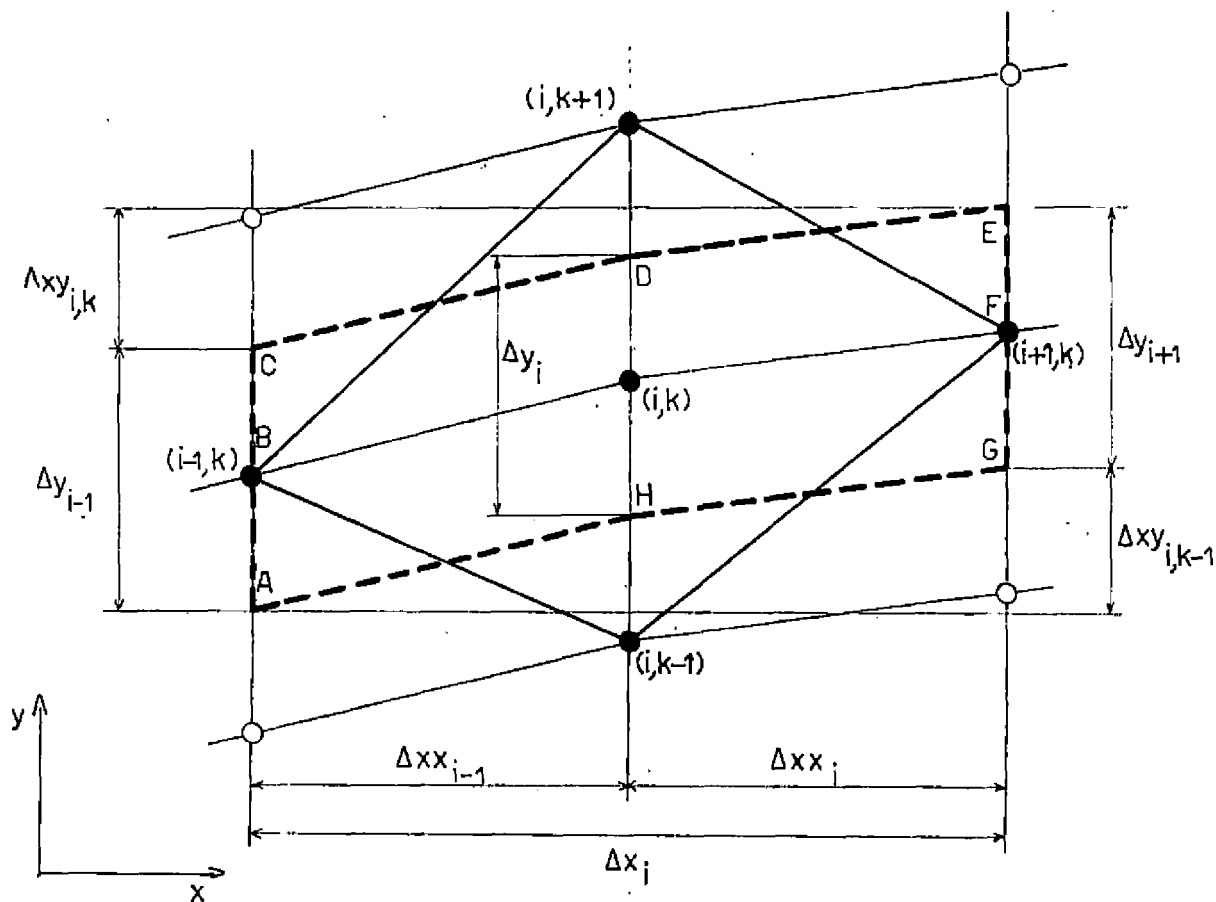


FIG. 34.a – SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
CAS GENERAL

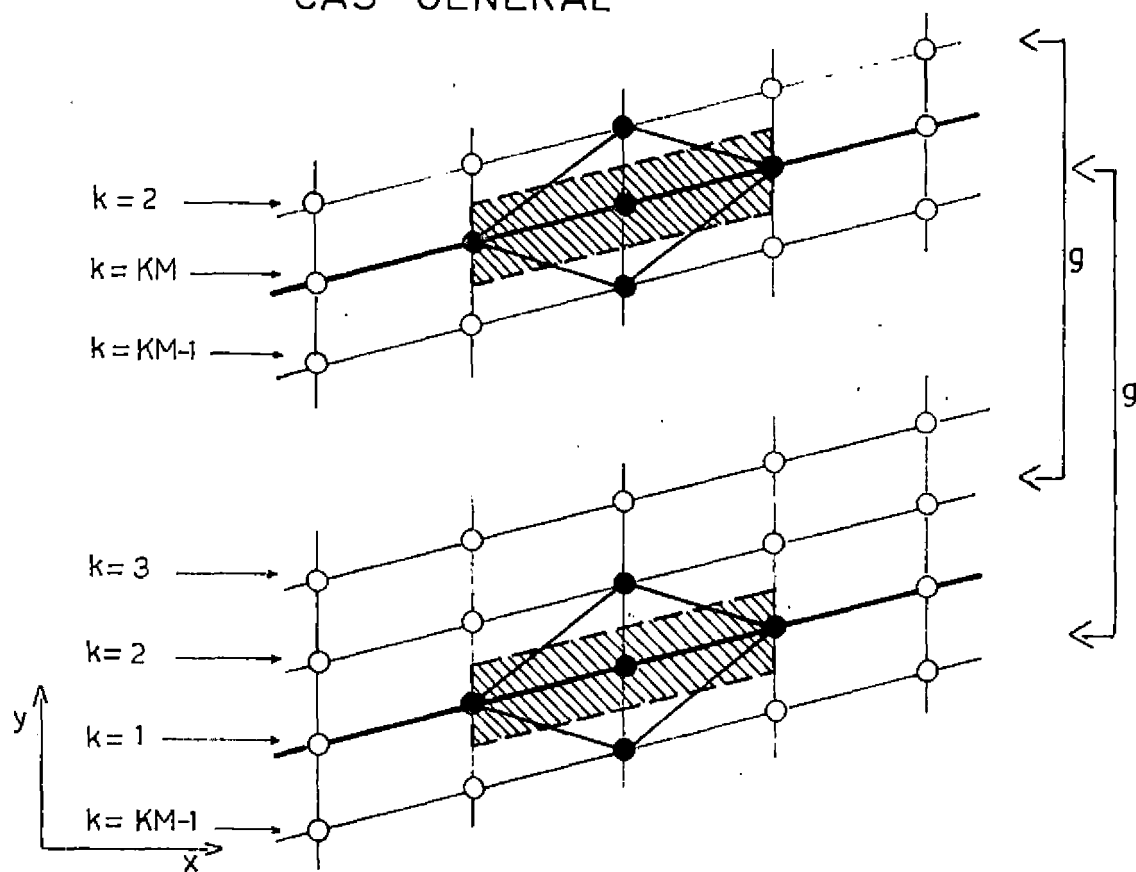


FIG. 34.b – SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
TRAITEMENT DES FRONTIERES PERIODIQUES

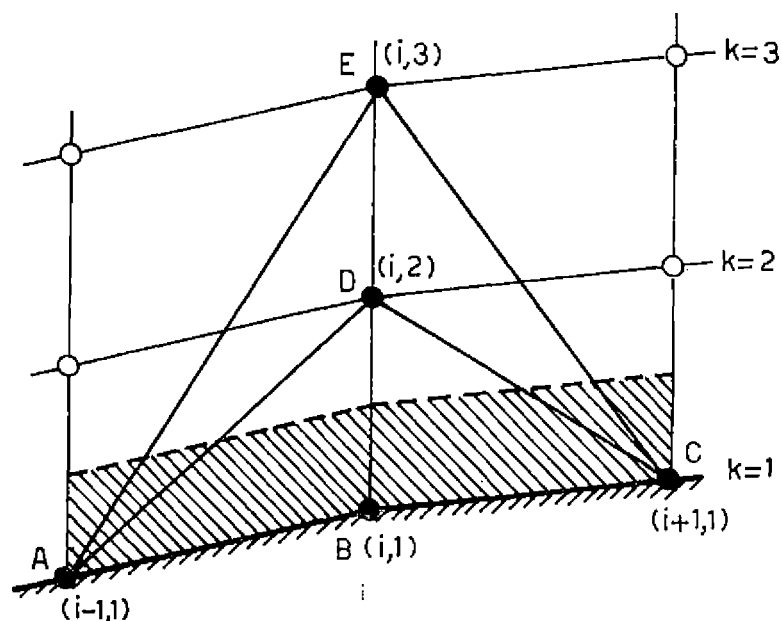


FIG.34.c – SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
TRAITEMENT DES FRONTIERES IMPERMEABLES

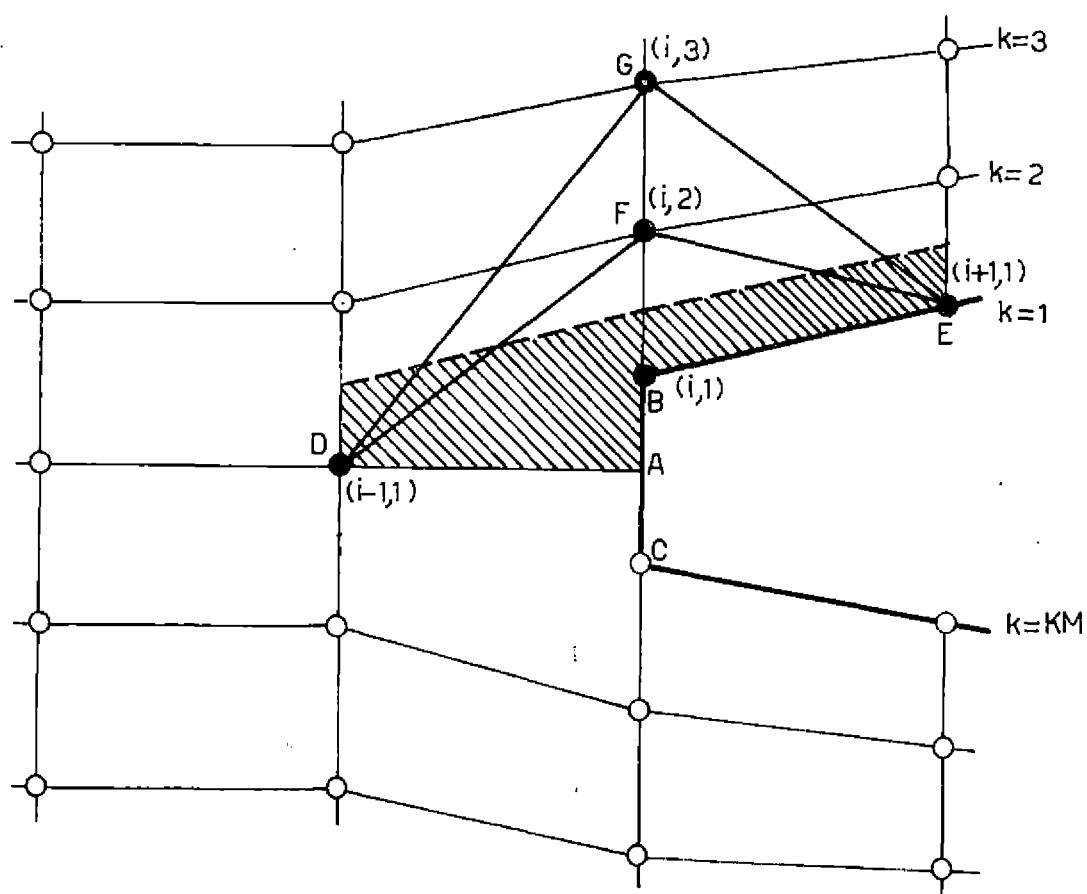


FIG.34.d – SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
TRAITEMENT DU BORD D'ATTAQUE

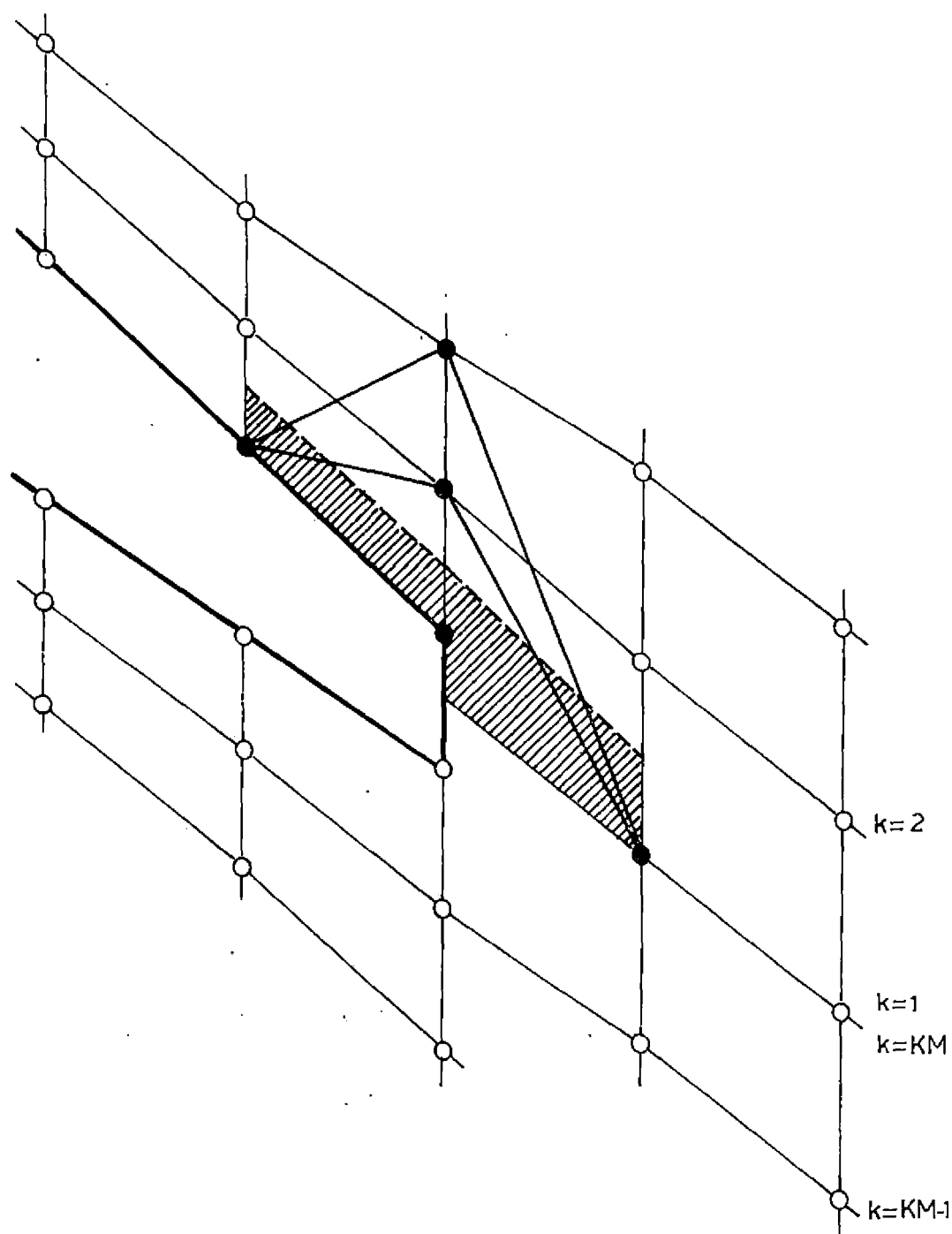
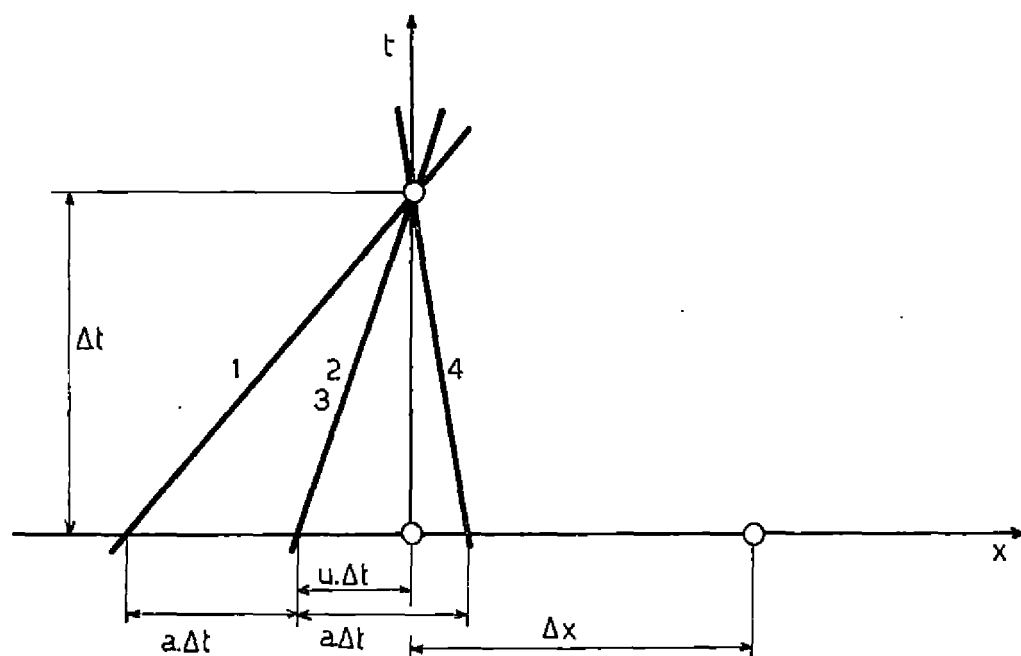
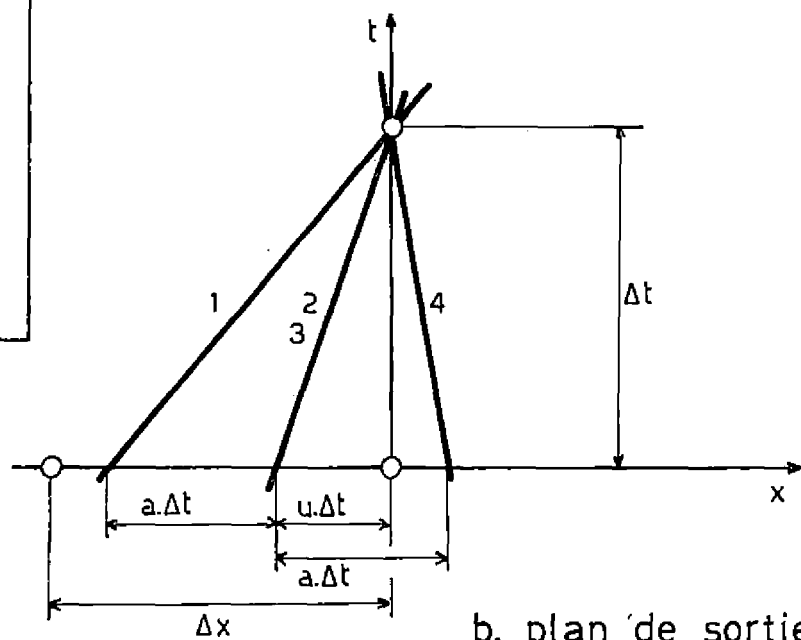


FIG. 34.e – SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE :
TRAITEMENT DU BORD DE FUITE



a. plan d'entrée

- | | |
|----|-------------------------|
| 1- | $\frac{dx}{dt} = u + a$ |
| 2- | $\frac{dx}{dt} = u$ |
| 3- | $\frac{dx}{dt} = u$ |
| 4- | $\frac{dx}{dt} = u - a$ |



b. plan de sortie

FIG. 35 – DIRECTIONS CARACTERISTIQUES DANS LES PLANS D'ENTREE ET DE SORTIE D'UNE GRILLE D'AUBES

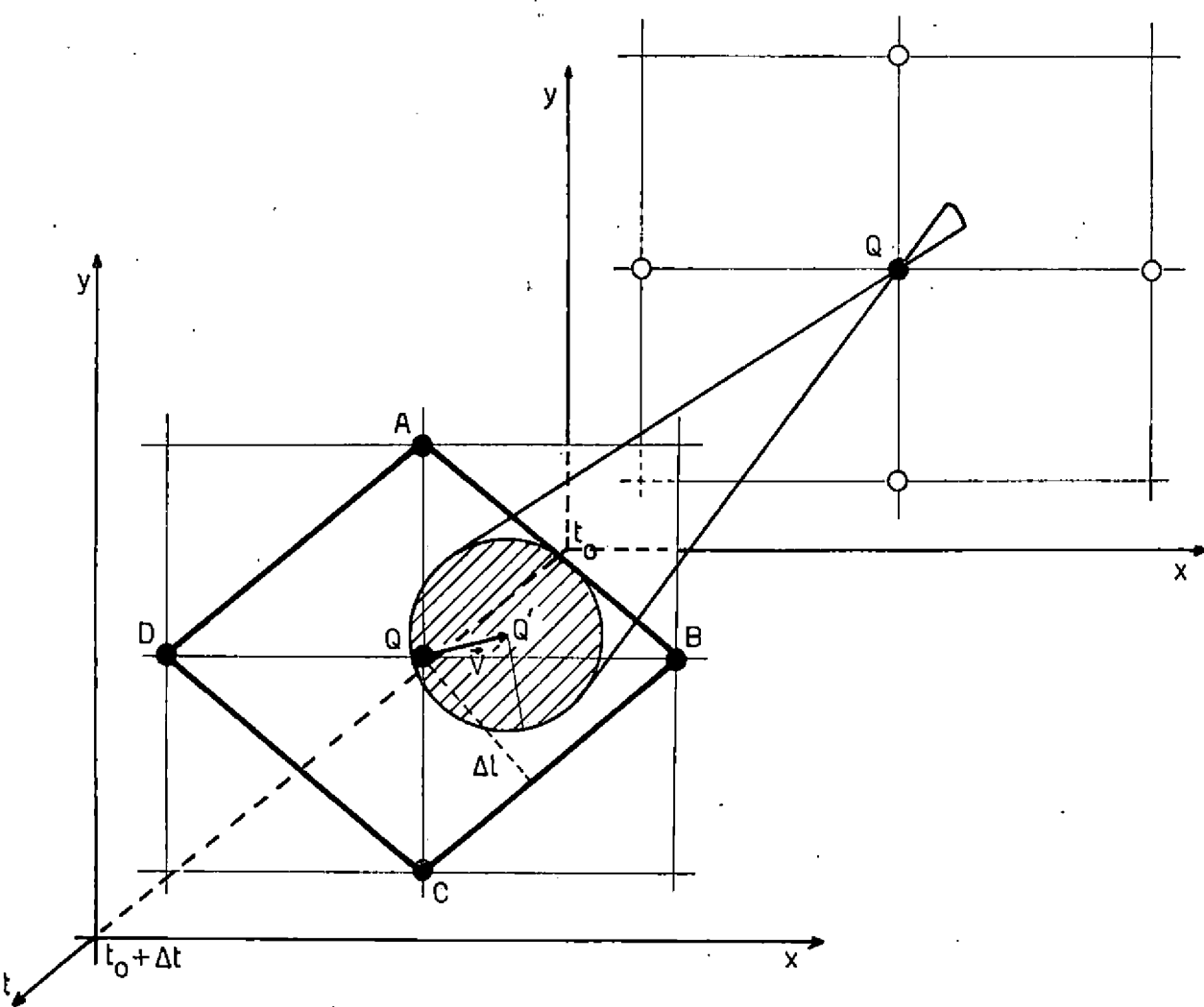


FIG.36 — CRITERE DE STABILITE C.F.L. POUR UN PROBLEME D'ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL

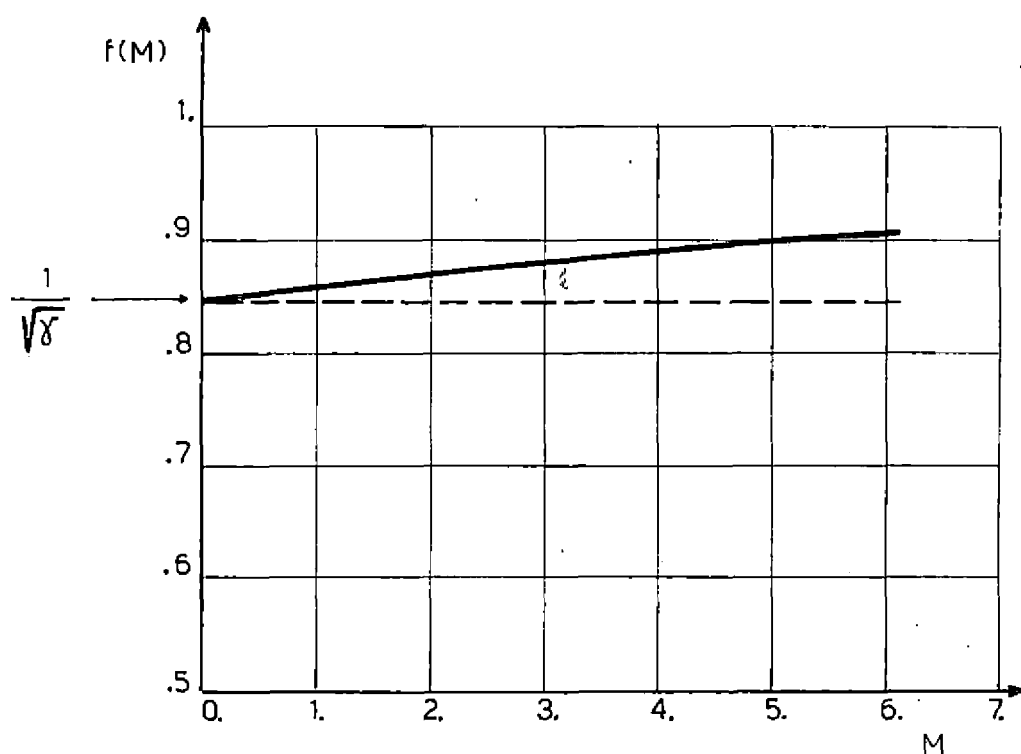
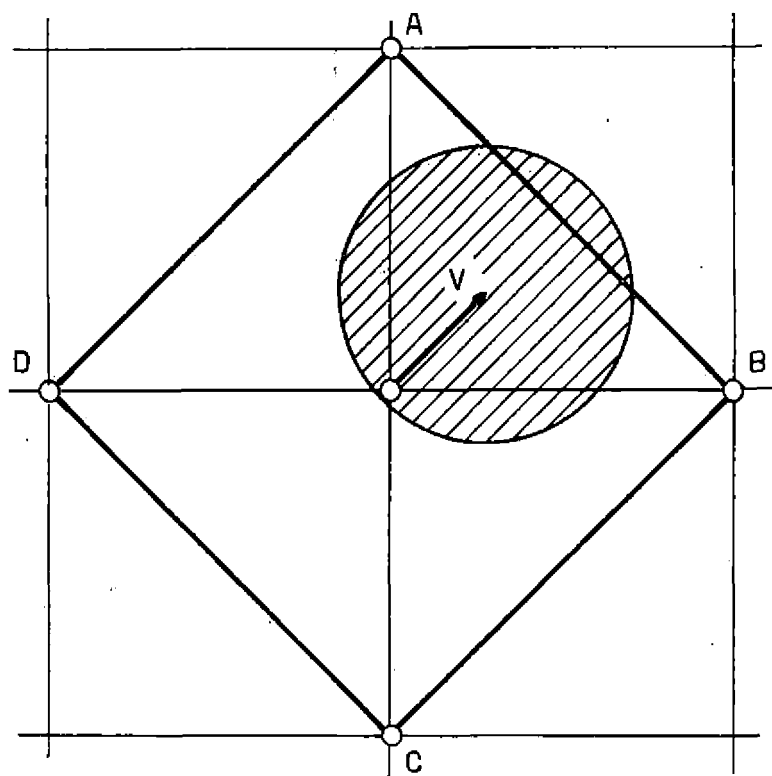
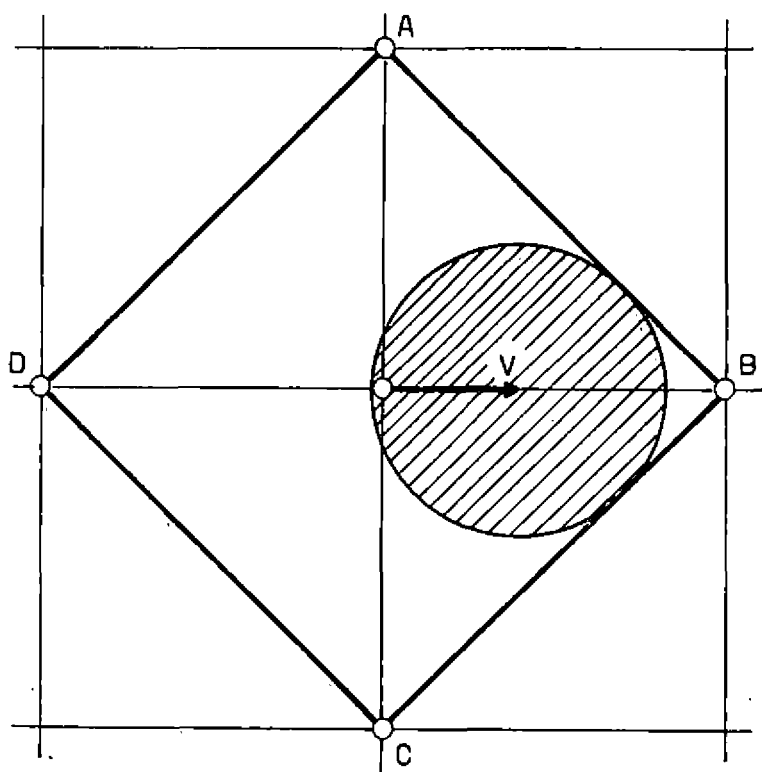


FIG. 37 — FACTEUR DE CORRECTION DU PAS TEMPOREL
POUR LE SYSTEME A ENTHALPIE TOTALE
CONSTANTE



a. réseau quelconque



b. réseau aligné avec le vecteur vitesse

FIG.38 — INFLUENCE DE LA DIRECTION DU VECTEUR VITESSE SUR LE PAS TEMPOREL LIMITE DE STABILITE

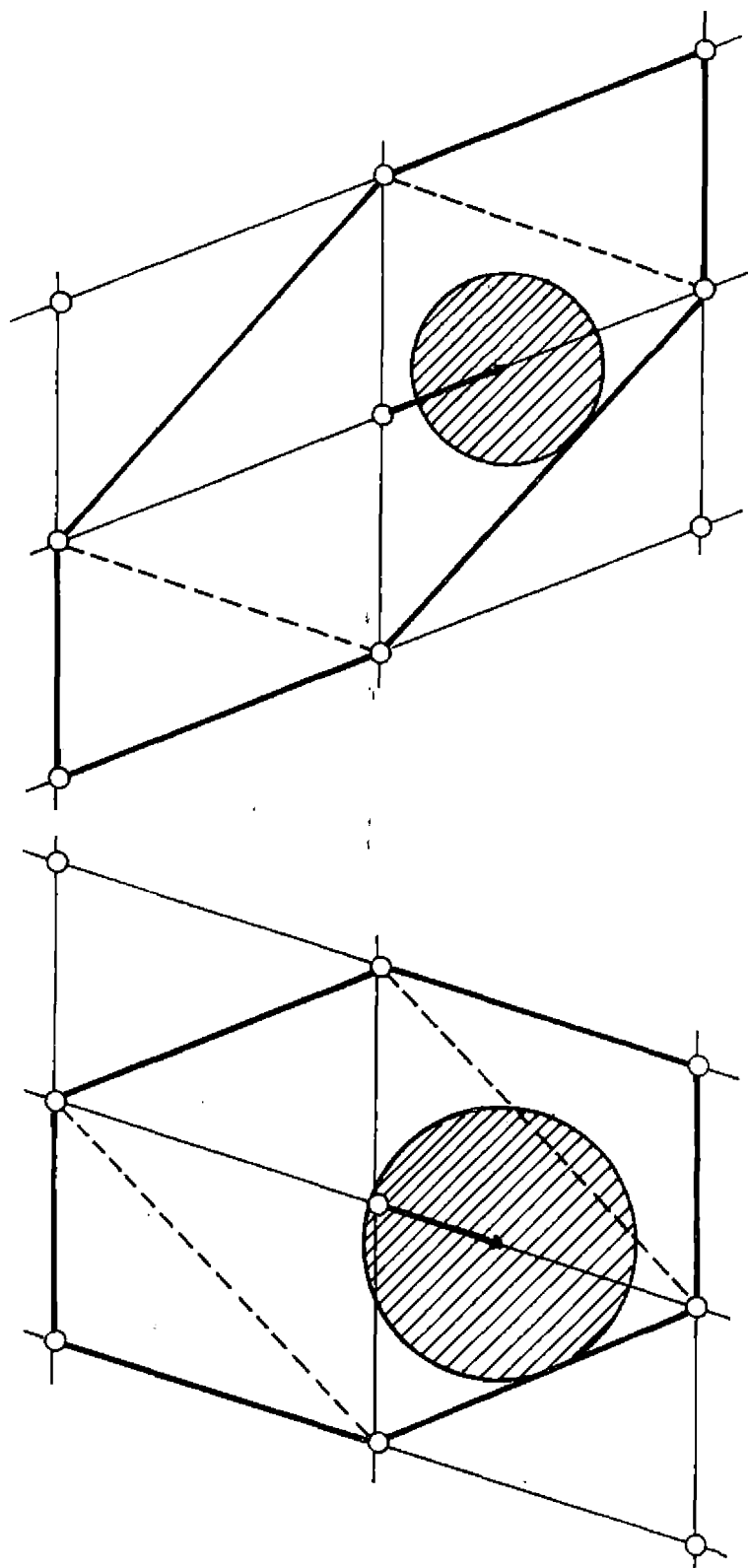
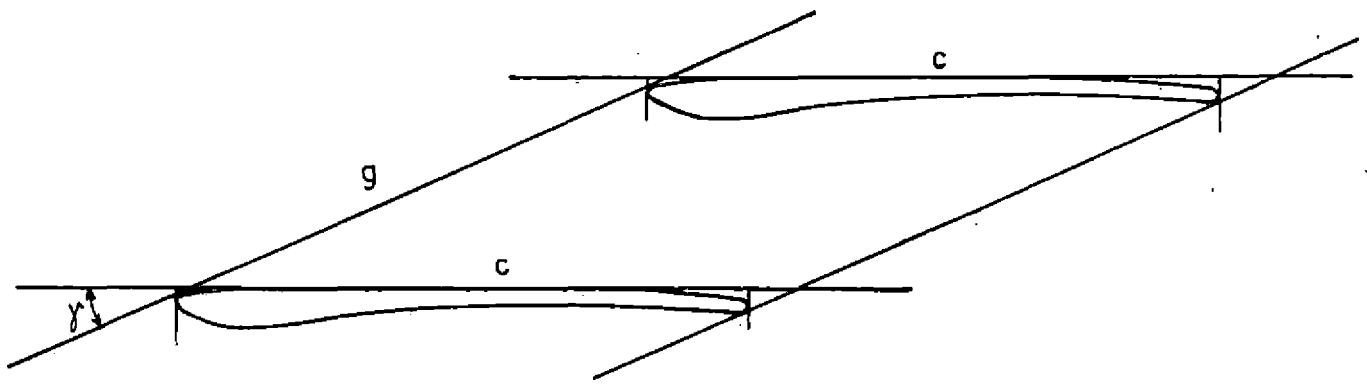


FIG.39 — INFLUENCE DE L'ORIENTATION DU MAILLAGE
SUR LE PAS TEMPOREL LIMITE DE STABILITE
(Elément hexagonal)



$$\left[\begin{array}{l} \beta_1 = 66^\circ \\ M_1 = 0.6 \\ g/c = 0.9 \\ \gamma = 24^\circ \end{array} \right.$$

FIG.40 – SECTION DE TETE D'UN AUBAGE ROTORIQUE
DE DERNIER ETAGE D'UNE TURBINE A
VAPEUR DE GRANDE PUISSANCE : AUBE 1
(Réf. 59,60)

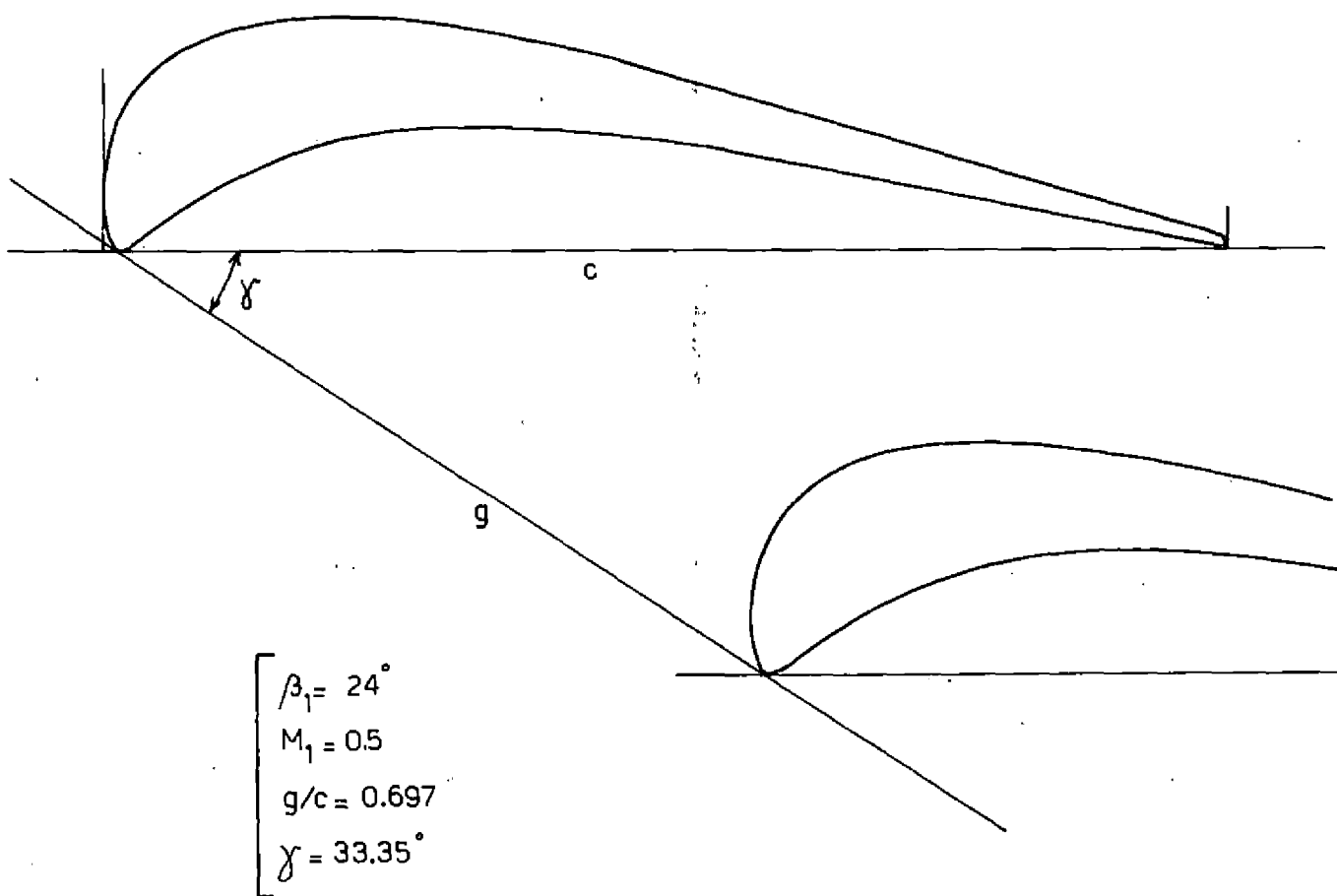
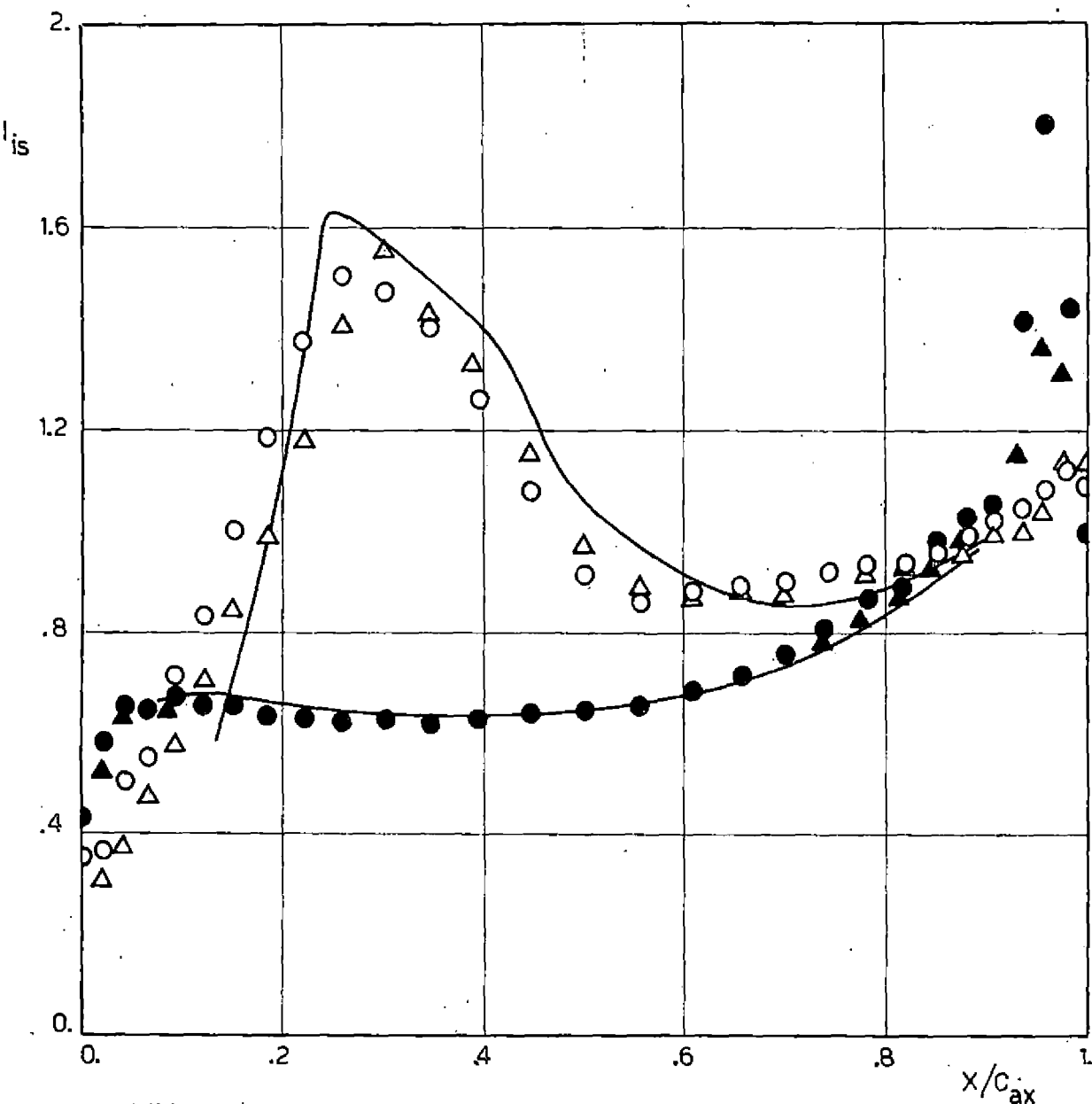


FIG. 41 — SECTION MOYENNE D'UN AUBAGE ROTORIQUE
 DE TURBINE A GAZ TRANSSONIQUE : AUBE 2
 (Réf. 61)



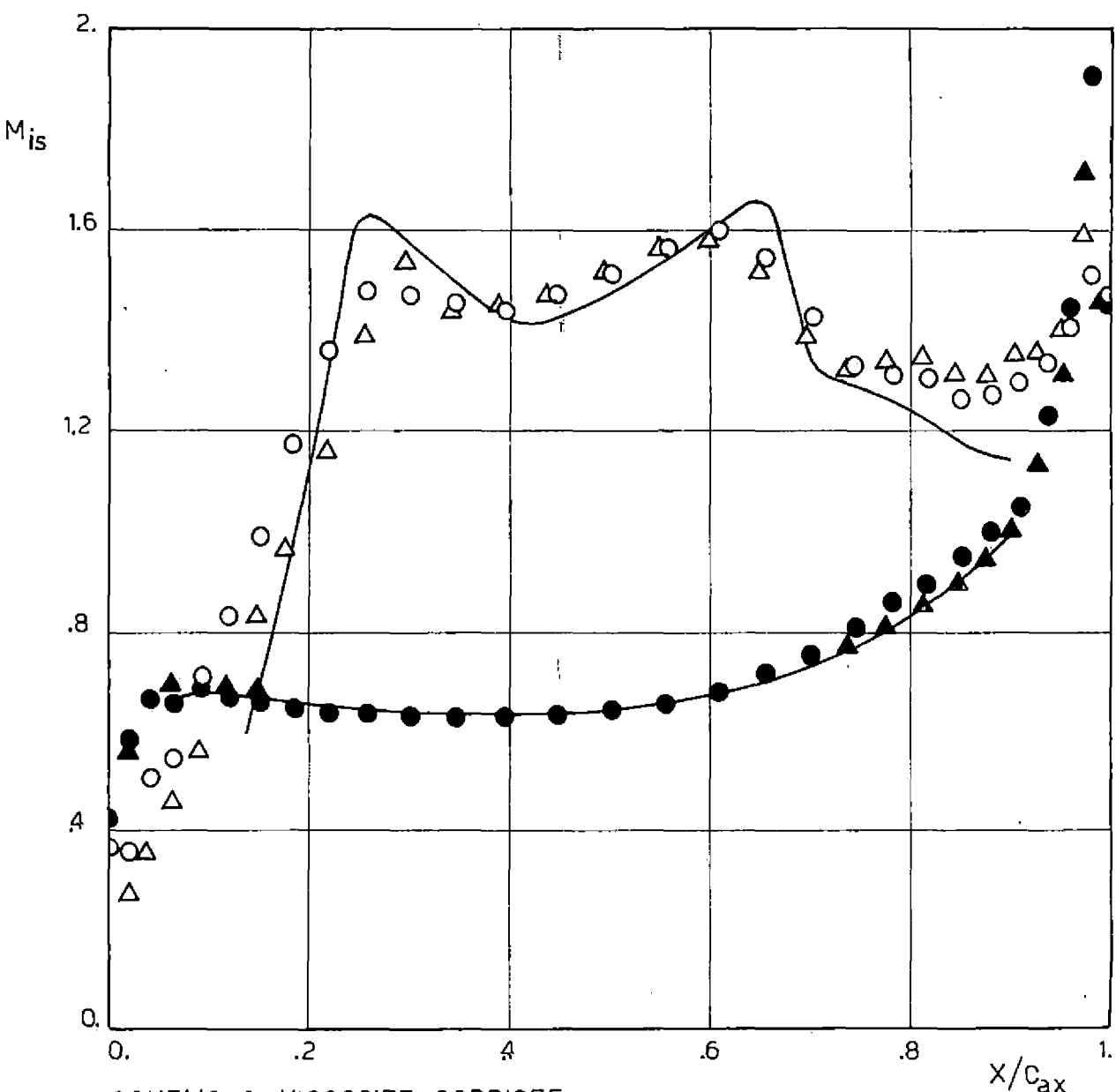
SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

— : Mesures (Réf. 59)
 ▲ : COUSTON (Réf. 19)
 ○ : ARTS

$M_{2is} = 1$
 $C.F.L. = 1$
 $VC = 0.995$
 $Nv = 20$

FIG. 42 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU
 NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE

(Aube 1 - $M_{2is} = 1$.)



— : Mesures (Réf. 59)
 ▲ : COUSTON (Réf. 19)
 ○ : ARTS

$M_{2is} = 1.4$
 C.F.L. = 1.
 VC = 0.995
 $N_v = 20$

FIG. 43 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU
 NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 (Aube 1 - $M_{2is} = 1.4$)

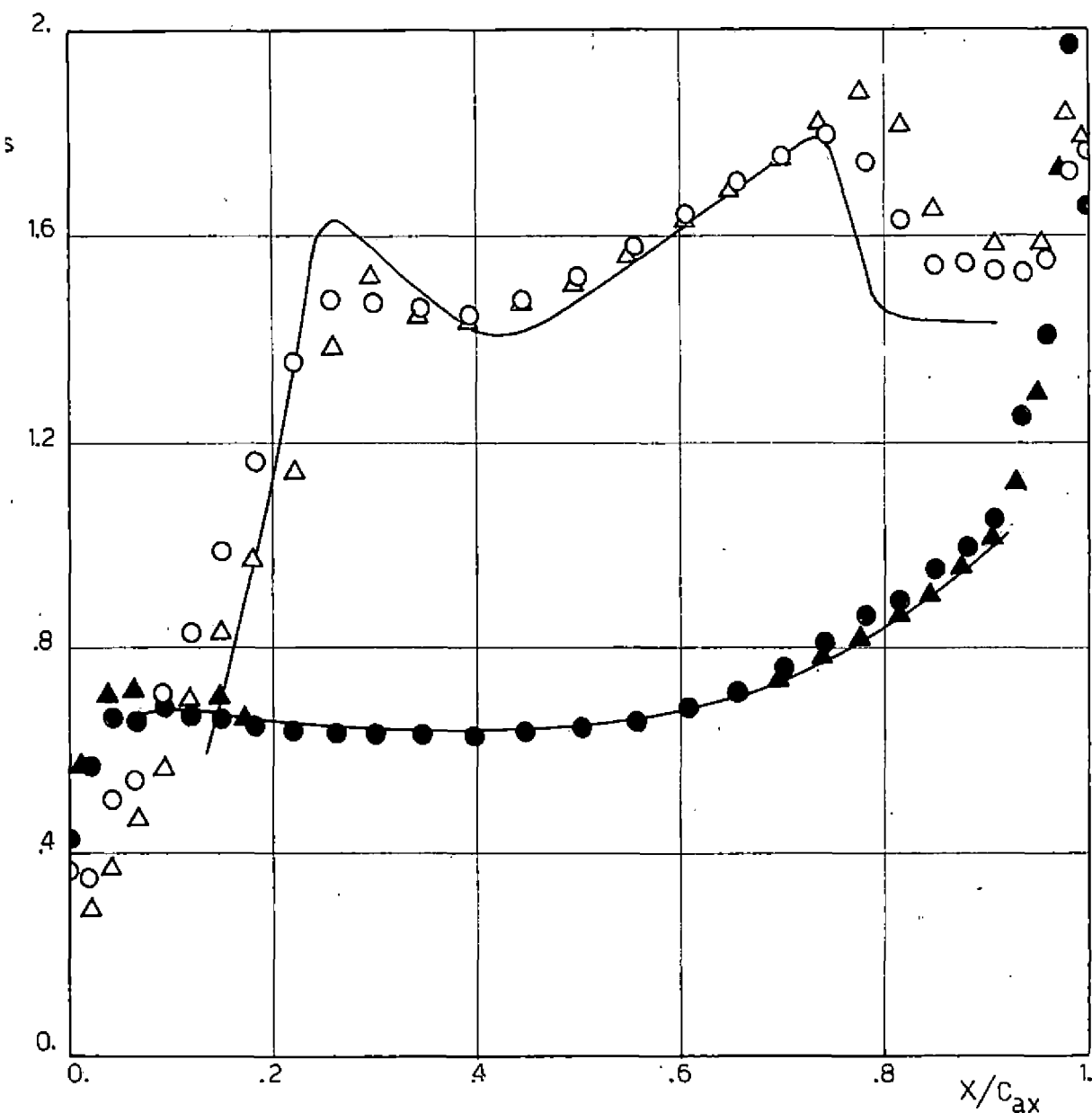
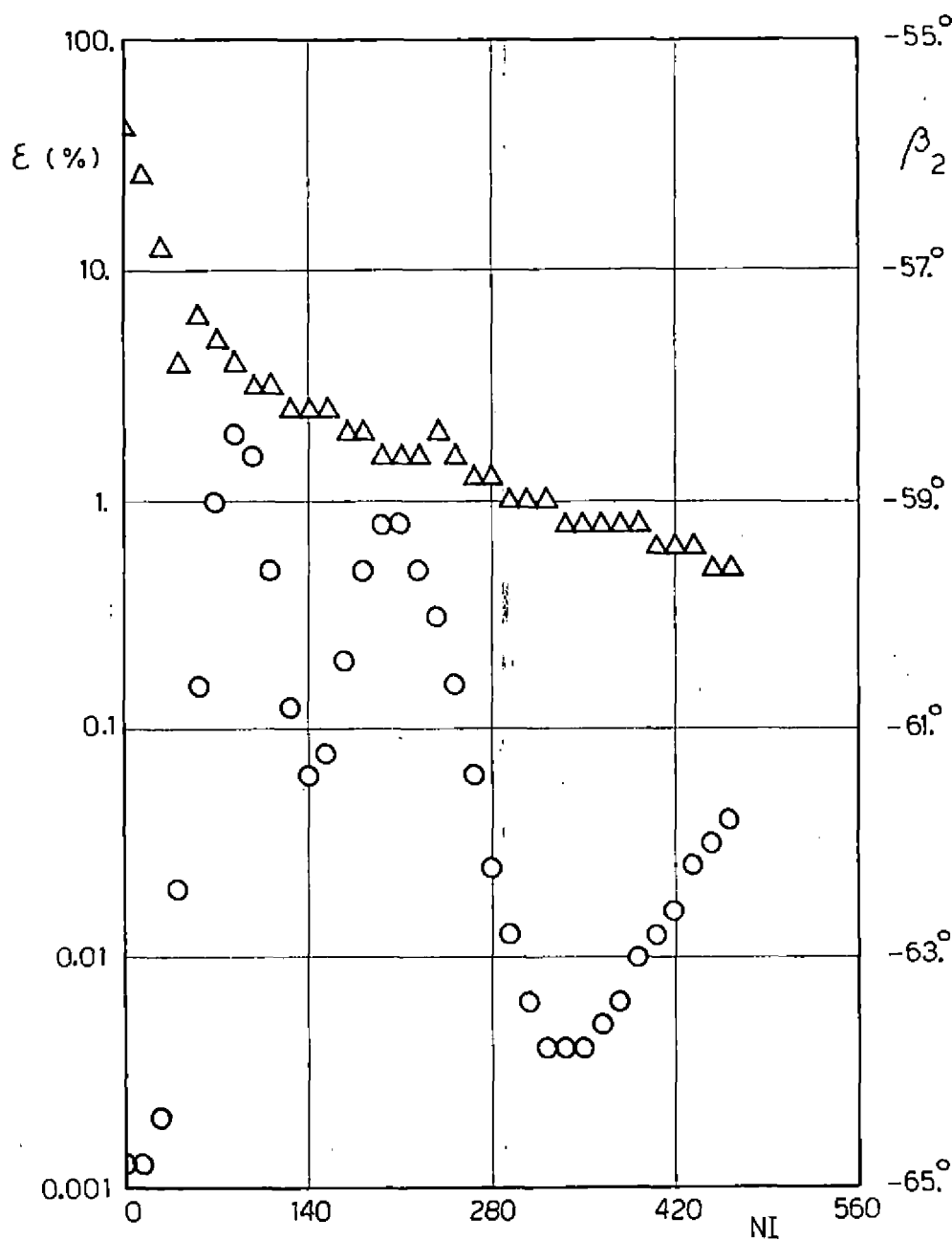


FIG. 44 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU
 NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 (Aube 1 - $M_{2, is} = 1.58$)



Δ : Erreur de convergence

O : Angle aérodynamique de sortie

FIG. 45a—EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE
ET DE L'ANGLE DE SORTIE

(Aube 1 — $M_{2, is} = 1.58$ — Maillage grossier)

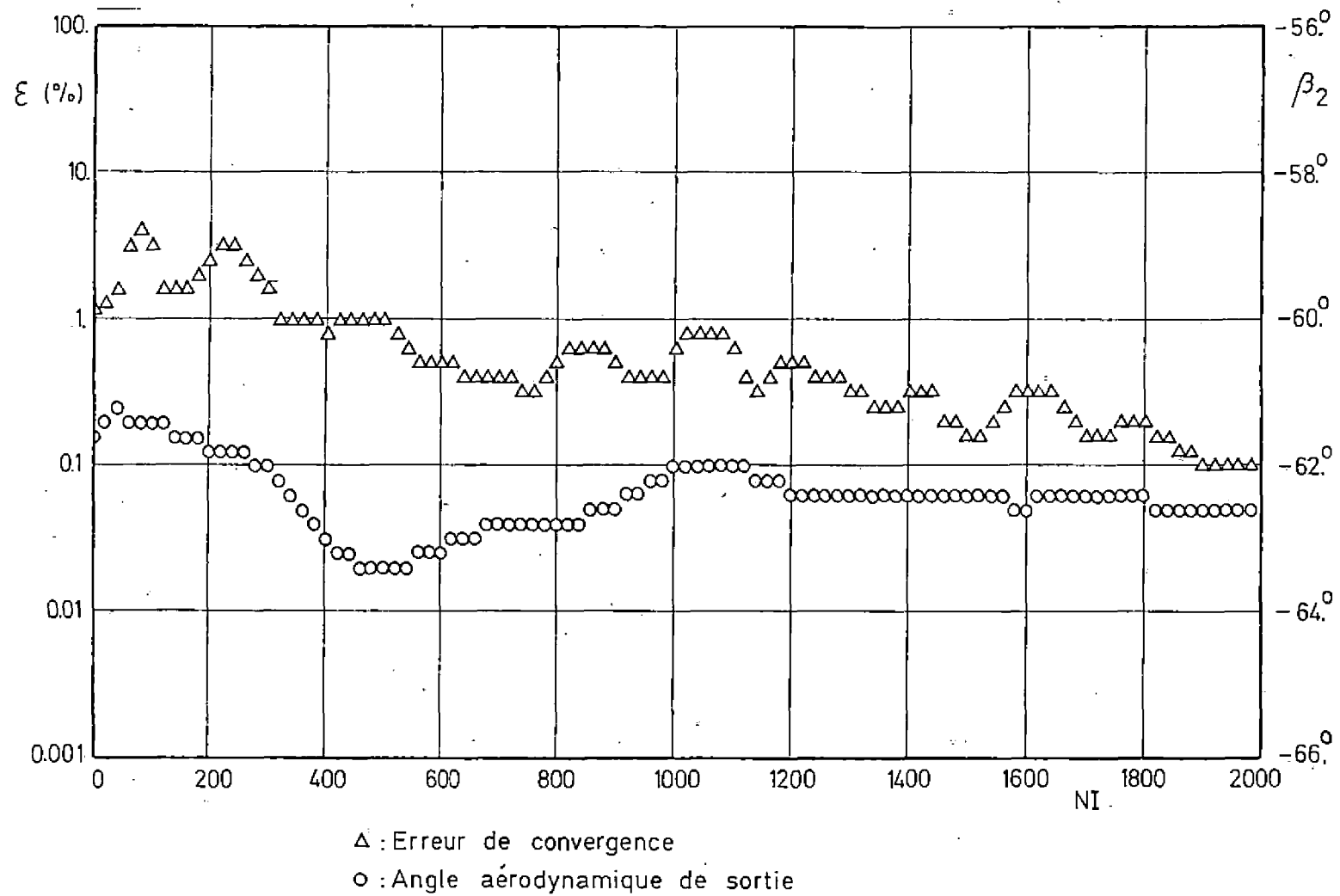
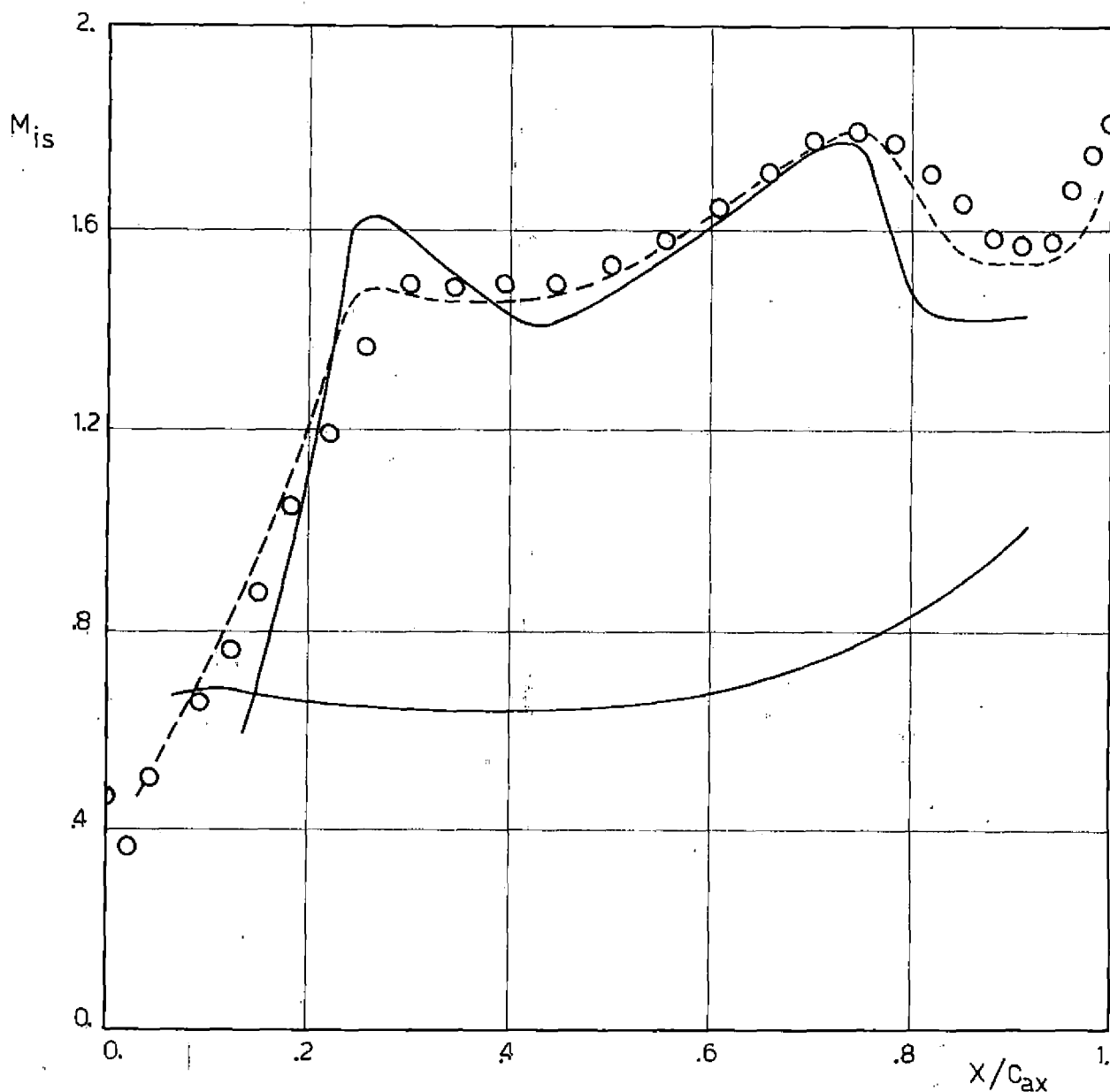


FIG.45 b — EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE ET DE L'ANGLE DE SORTIE

(Aube 1 - $M_{2,is} = 1.58$ - Maillage fin)



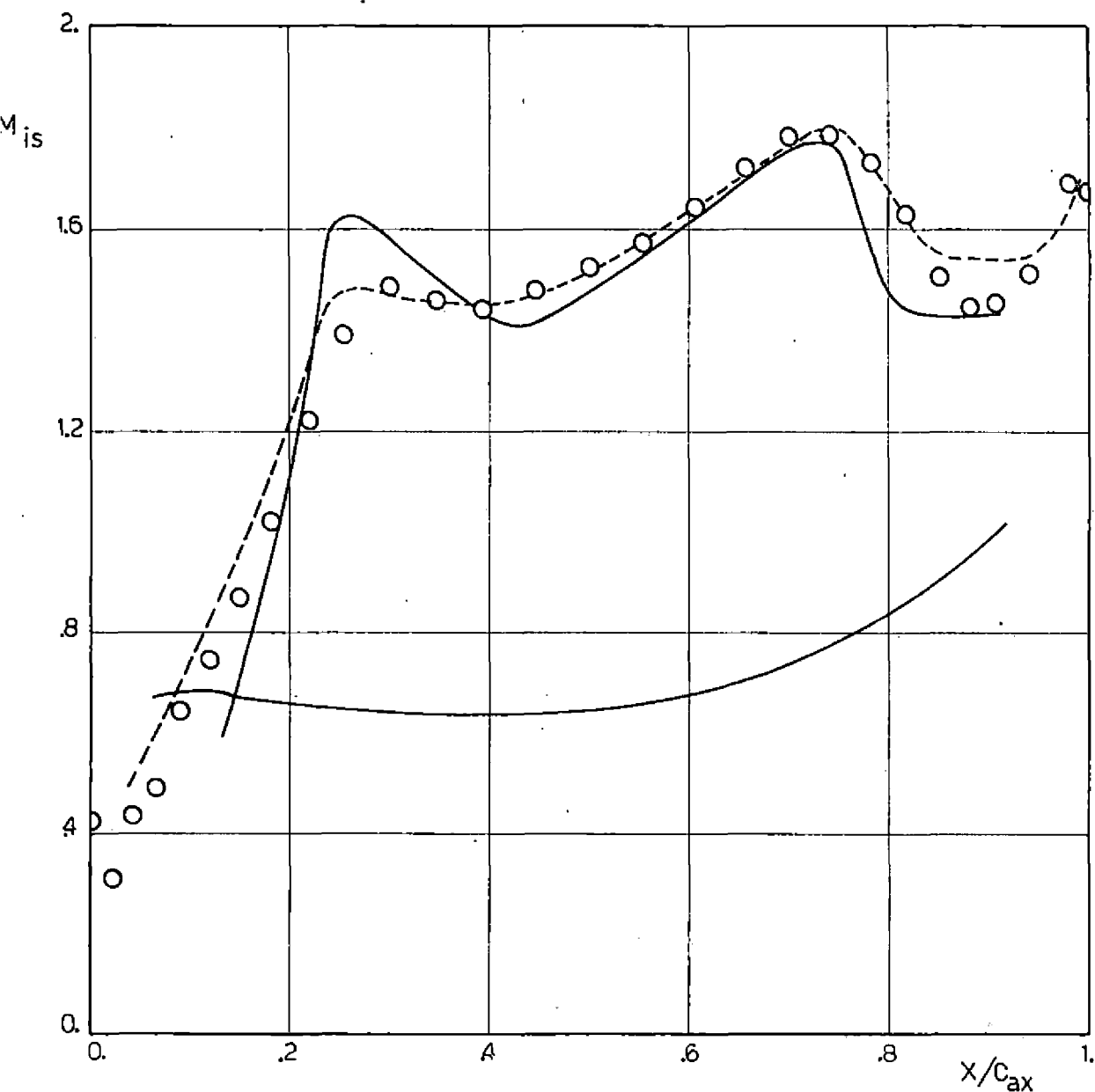
SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

- : Mesures (Réf. 59)
- : Solution après 2000 itérations
- : Solution après 500 itérations

$M_{2,is} = 1.58$
 $C.F.L. = 1$
 $VC = 0.995$
 $Nv = 20$

FIG.46a — DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH
ISENTROPIQUE :
SOLUTIONS INTERMEDIAIRES

(Aube 1 — $M_{2,is} = 1.58$)



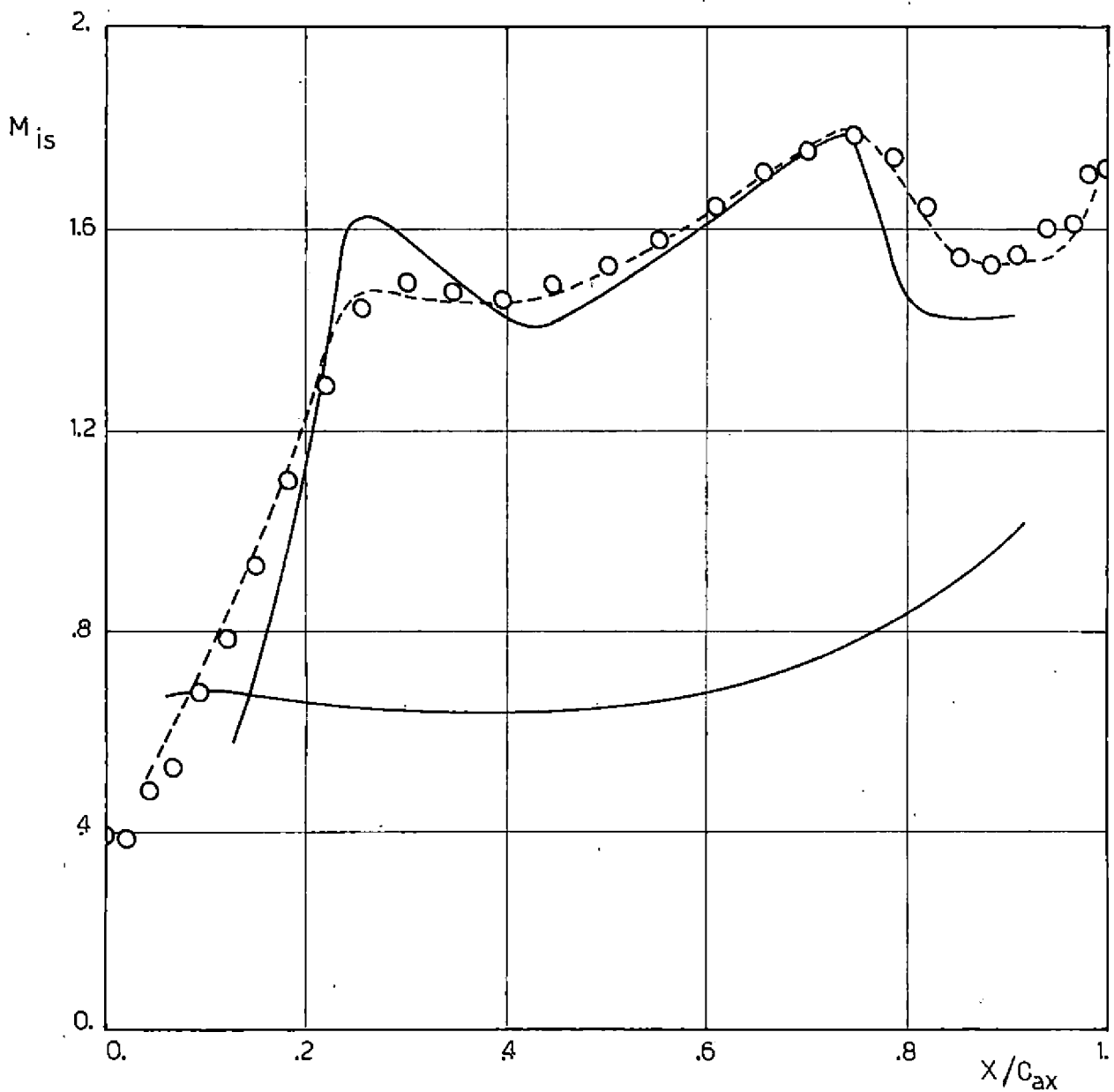
SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

— : Mesures (Réf. 59)
 ---- : Solution après 2000 itérations
 O : Solution après 1000 itérations

$M_{2, is} = 1.58$
 $C.F.L. = 1.$
 $VC = 0.995$
 $N_v = 20$

FIG.46b - DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH
 ISENTROPIQUE :
 SOLUTIONS INTERMEDIAIRES

(Aube 1 - $M_{2, is} = 1.58$)



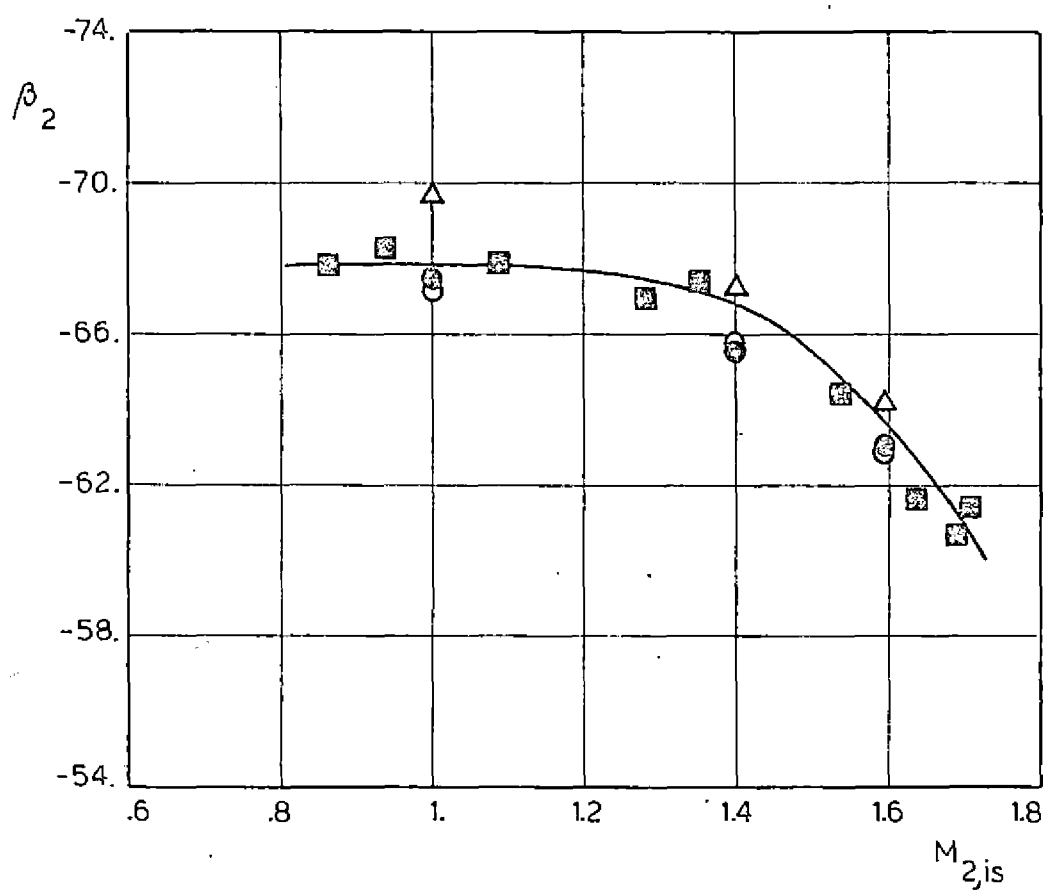
SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

- : Mesures (Réf. 59)
- : Solution après 2000 itérations
- : Solution après 1500 itérations

$M_{2, is} = 1.58$
 $C.F.L. = 1.$
 $VC = 0.995$
 $N_v = 20$

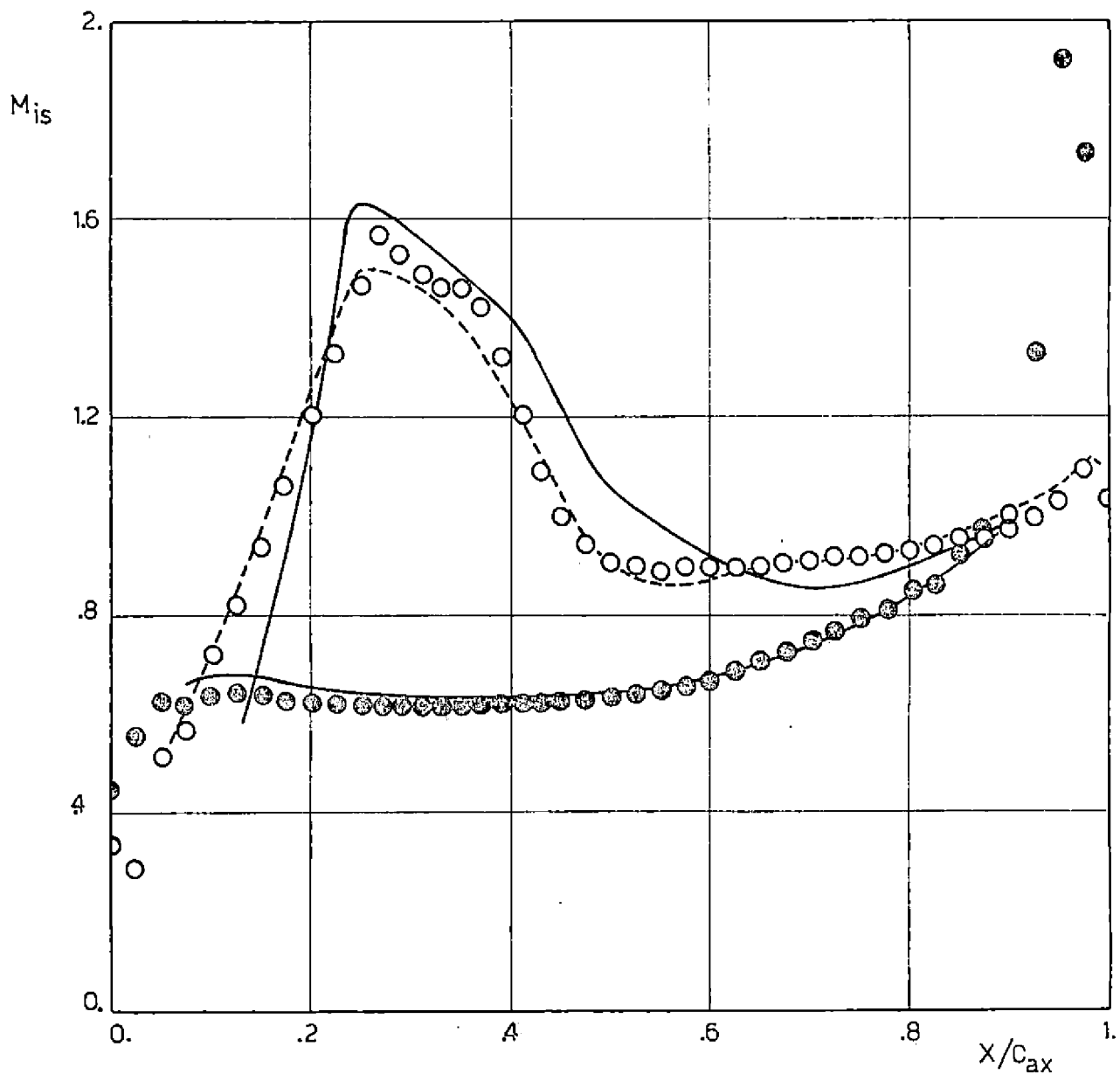
FIG.46c – DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH
ISENTROPIQUE :
SOLUTIONS INTERMEDIAIRES

(Aube 1 - $M_{2, is} = 1.58$)



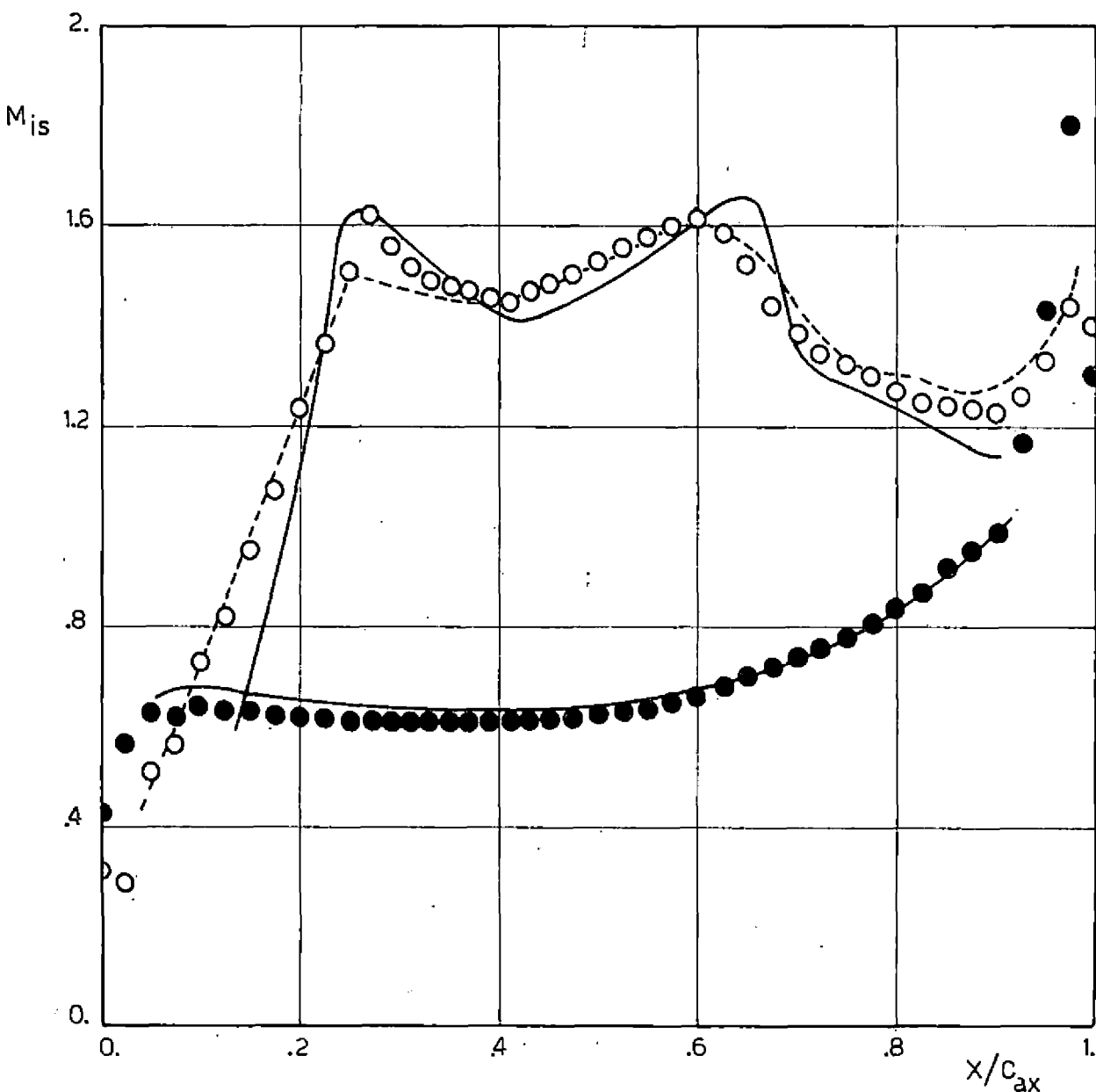
- : Mesures (Réf. 59)
- △ : COUSTON (Réf. 19)
- : VAN HOVE (Réf. 54)
- ⊗ : ARTS

FIG. 47 — COMPARAISON DES VALEURS DE L'ANGLE
AERODYNAMIQUE DE SORTIE
(Aube 1)



SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

FIG.48 – DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH
ISENTROPIQUE :
INFLUENCE DE LA TAILLE DU MAILLAGE
(Aube 1 - $M_{2is} = 1$.)

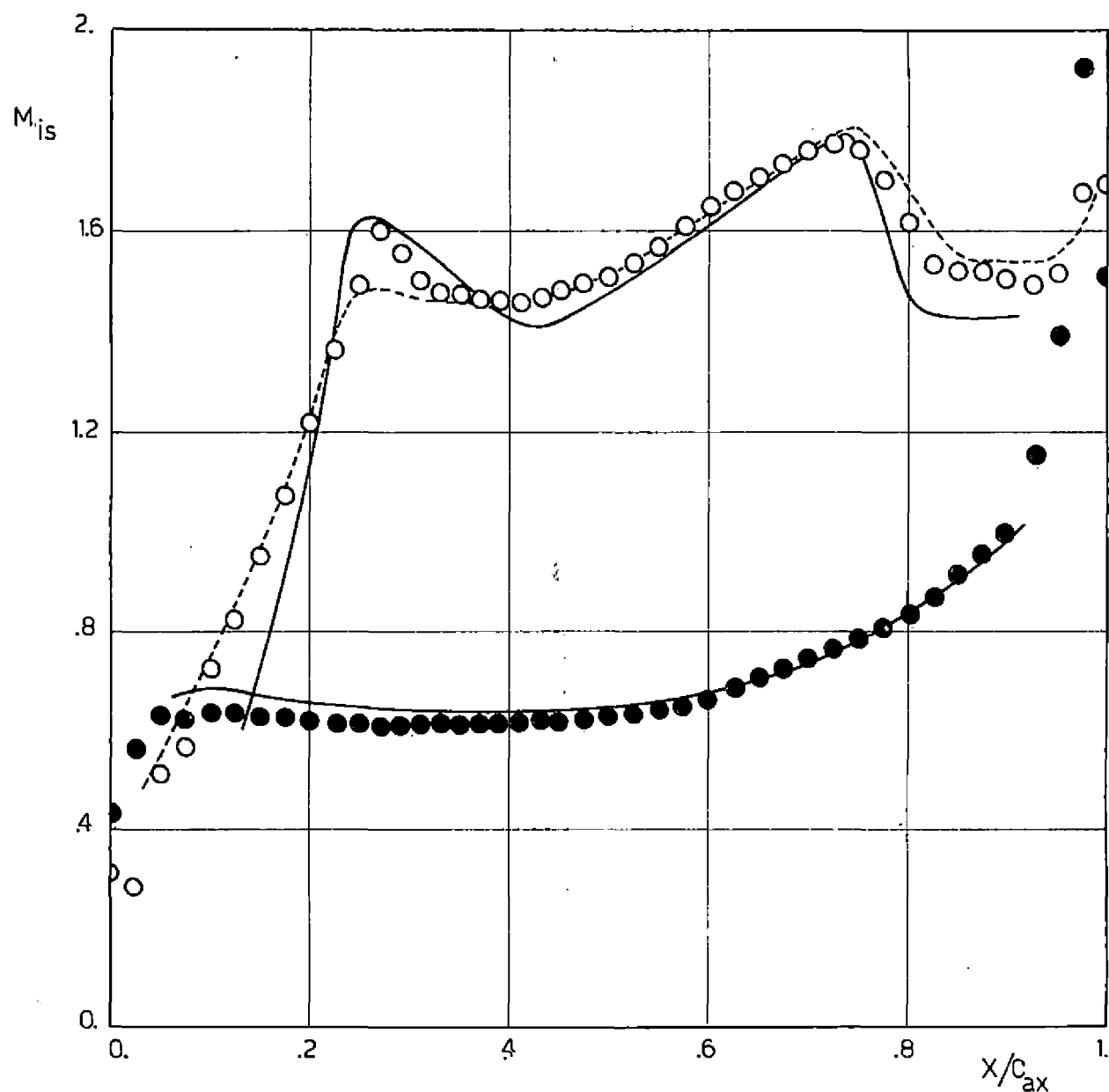


SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

— : Mesures (Réf. 59)
 ---- : Maillage (61 x 15)
 O ● : Maillage (71 x 25)

$M_{2,is} = 1.4$
 $C.F.L. = 1.$
 $VC = 0.995$
 $N_v = 20$

FIG.49 – DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH
 ISENTROPIQUE :
 INFLUENCE DE LA TAILLE DU MAILLAGE
 (Aube 1 - $M_{2,is} = 1.4$)

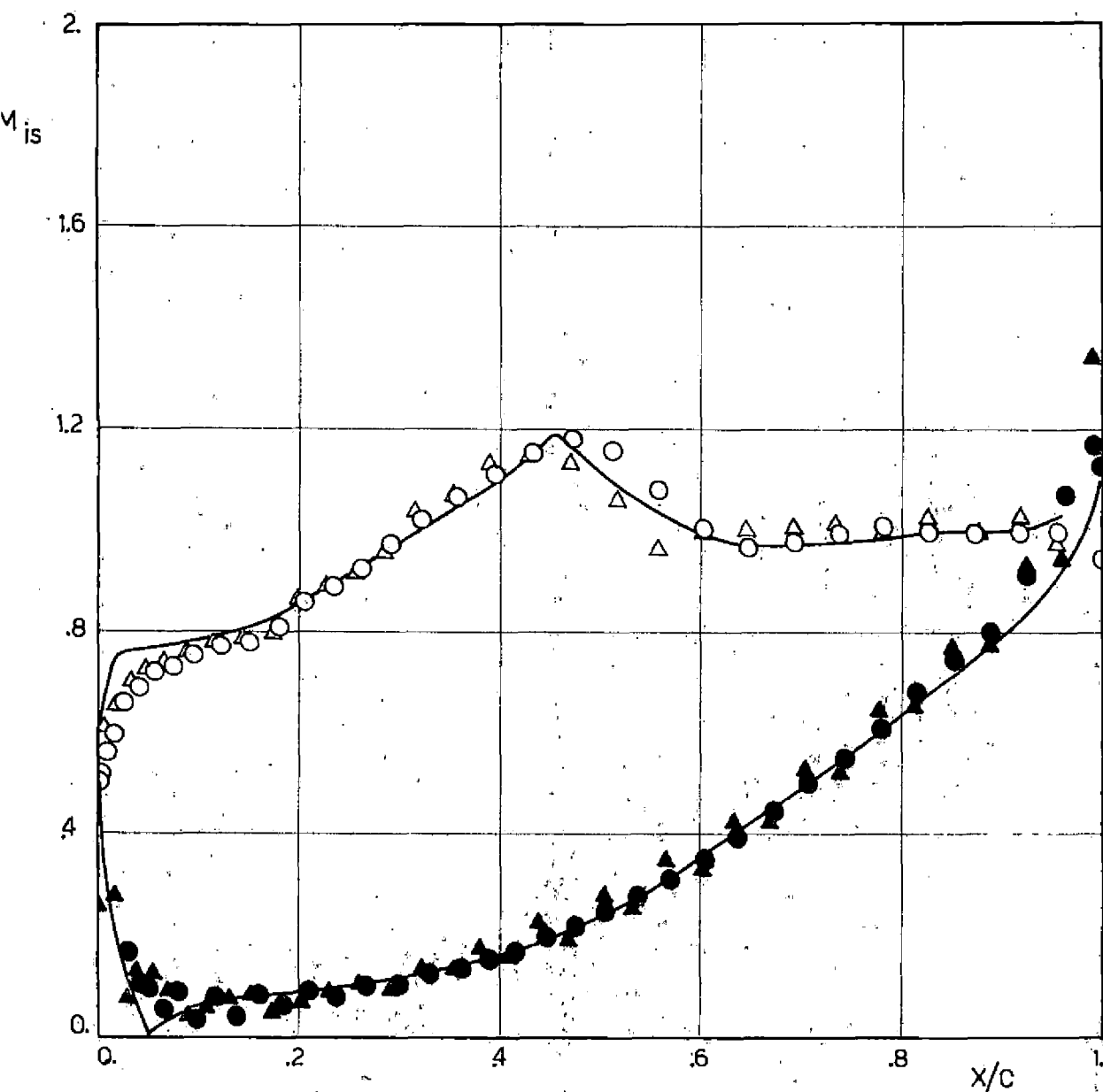


SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

— : Mesures (Réf. 59)
 ---- : Maillage (61 x 15)
 ○ ● : Maillage (71 x 25)

$M_{2,is} = 1.58$
 $C.F.L. = 1$
 $VC = 0.995$
 $Nv = 20$

FIG. 50 - DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH
 ISENTROPIQUE :
 INFLUENCE DE LA TAILLE DU MAILLAGE
 (Aube 1 - $M_{2,is} = 1.58$)



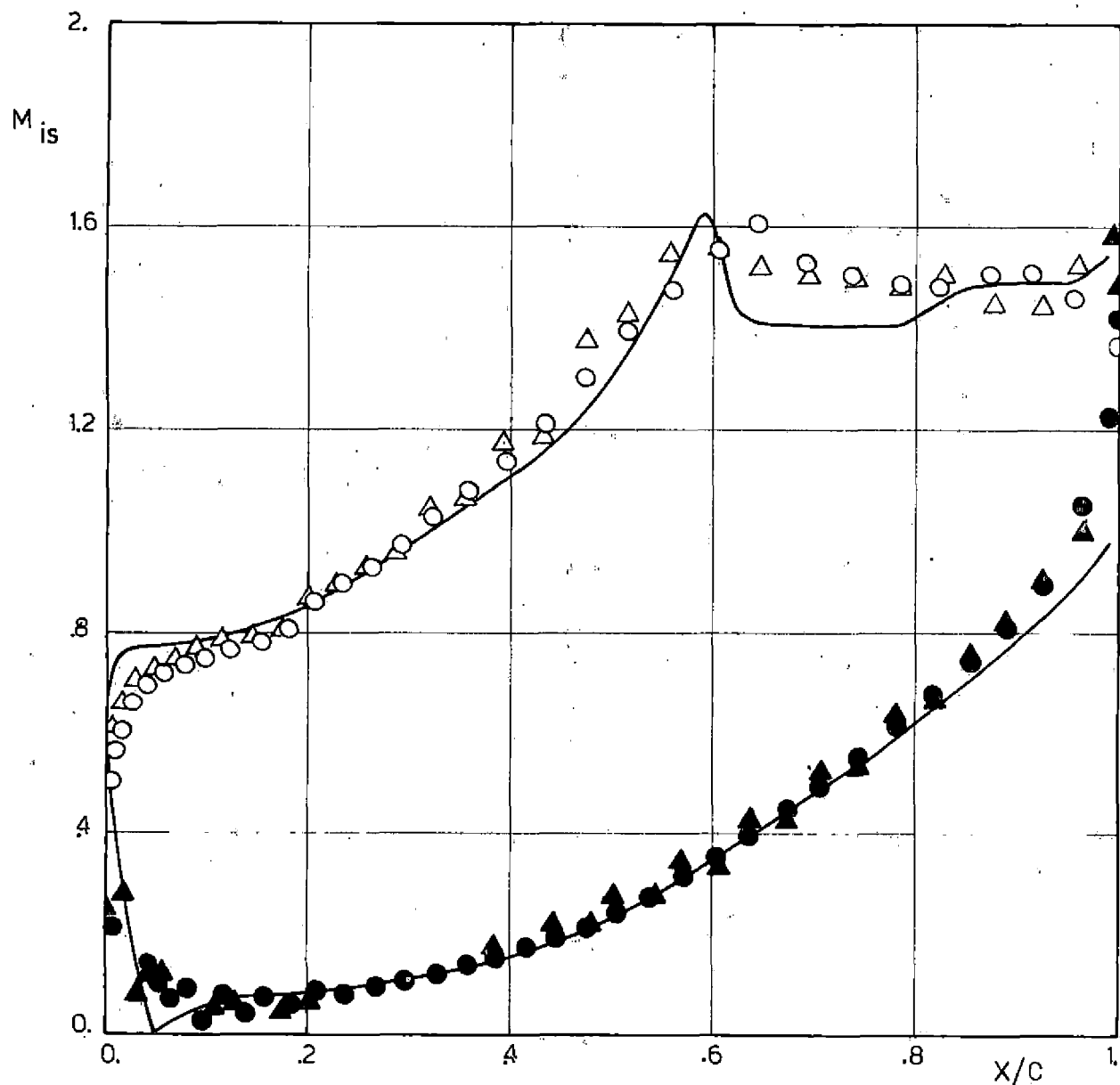
SCHEMA A VISCOSITE CORRIGEE

—: Mesures (Réf. 61)
 $\Delta \blacktriangle$: COUSTON (Réf. 19)
 $\circ \bullet$: ARTS

$M_{2,is} = 1.$
 C.F.L. = 0.8
 $VC = 0.995$
 $N_v = 20$

FIG.51 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU
 NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE

(Aube 2 - $M_{2,is} = 1.$)



— : Mesures (Ref 61)
 △ ▲ : COUSTON (Réf. 19)
 ○ ● : ARTS

$M_{2,is} = 1.41$
 $C.F.L. = 0.8$
 $VC = 0.995$
 $N_v = 20$

FIG.52 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU
 NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE

(Aube 2 - $M_{2,is} = 1.41$)

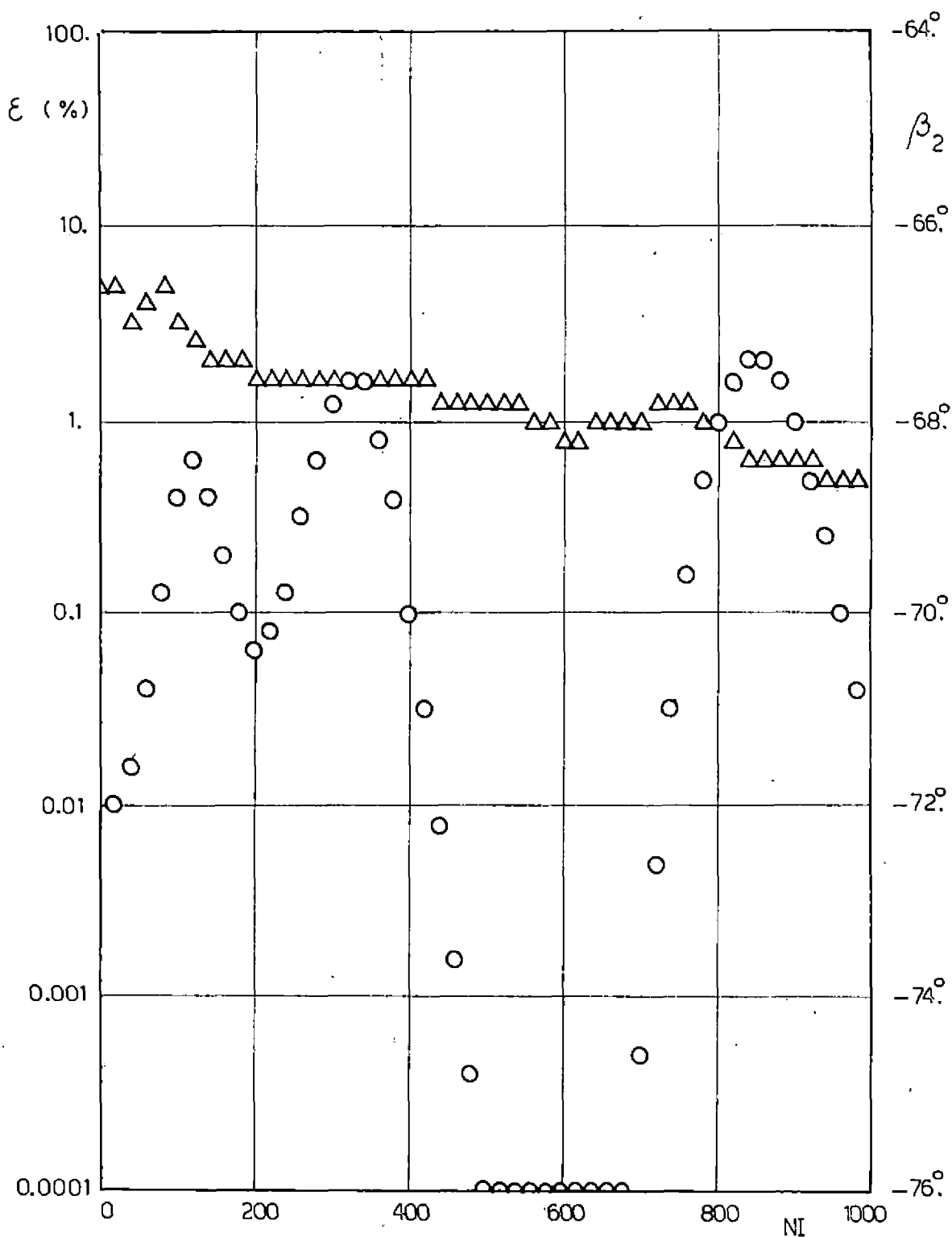


FIG.53a – EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE
ET DE L'ANGLE DE SORTIE
(Aube 2 - $M_{2is}=1$ - Maillage grossier)

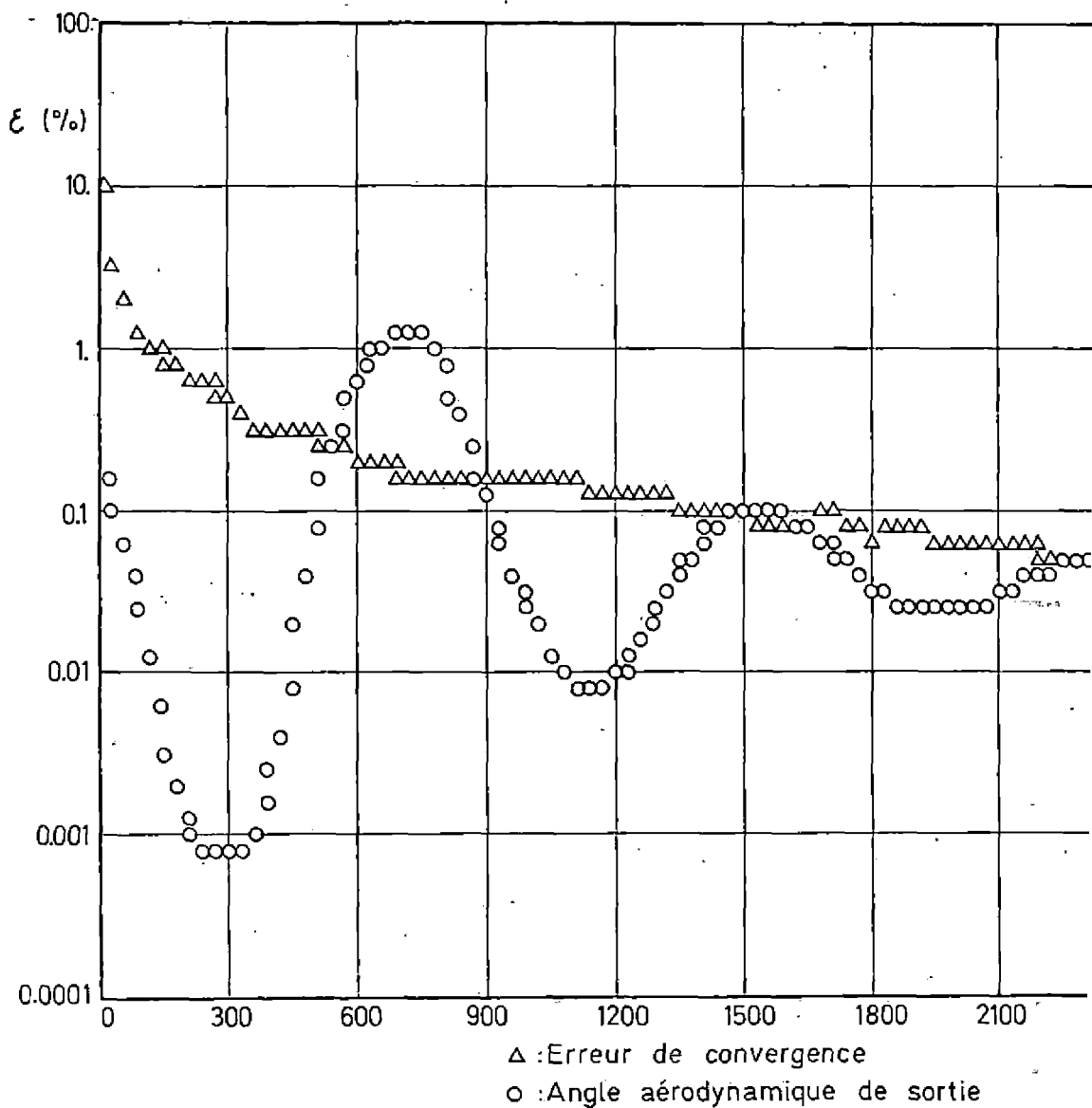
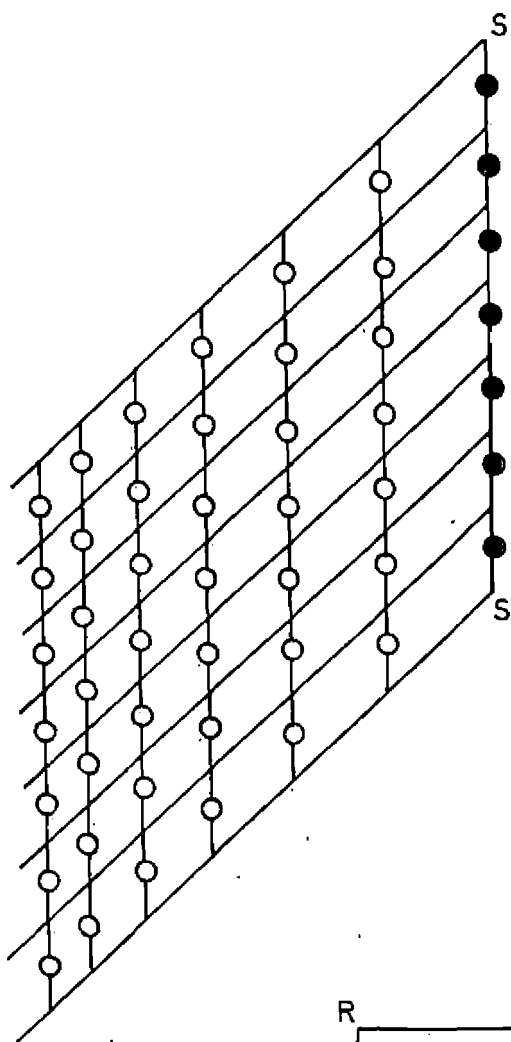


FIG. 53b — EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE DE SORTIE

(Aube 2 - $M_{2, is} = 1$ - Maillage fin)



Plan de sortie du stator

1 condition aux frontières doit
être imposée

(fonction des inconnues dans
le plan R-R)

Plan d'entrée du rotor

3(ou 2) conditions aux
frontières doivent être
imposées

(fonction des inconnues
dans le plan S-S)

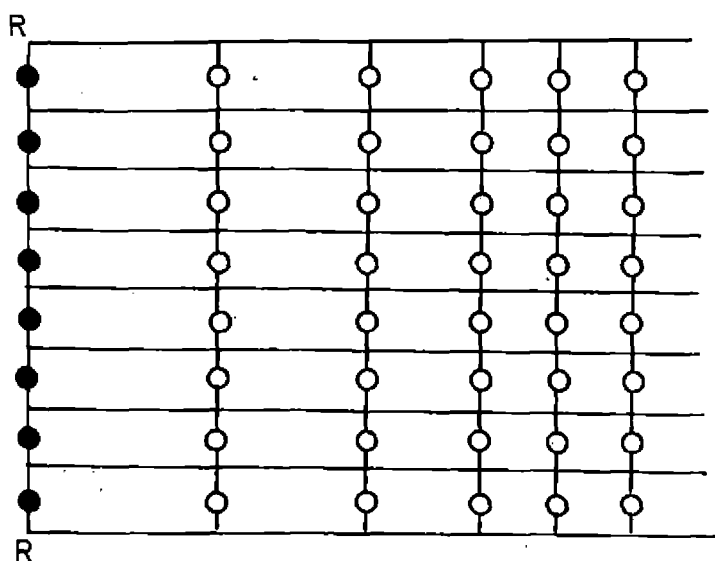


FIG. 54 — PRINCIPE DU CALCUL DES CONDITIONS
AUX FRONTIERES INTERMEDIAIRES D'UN
ETAGE DE TURBINE

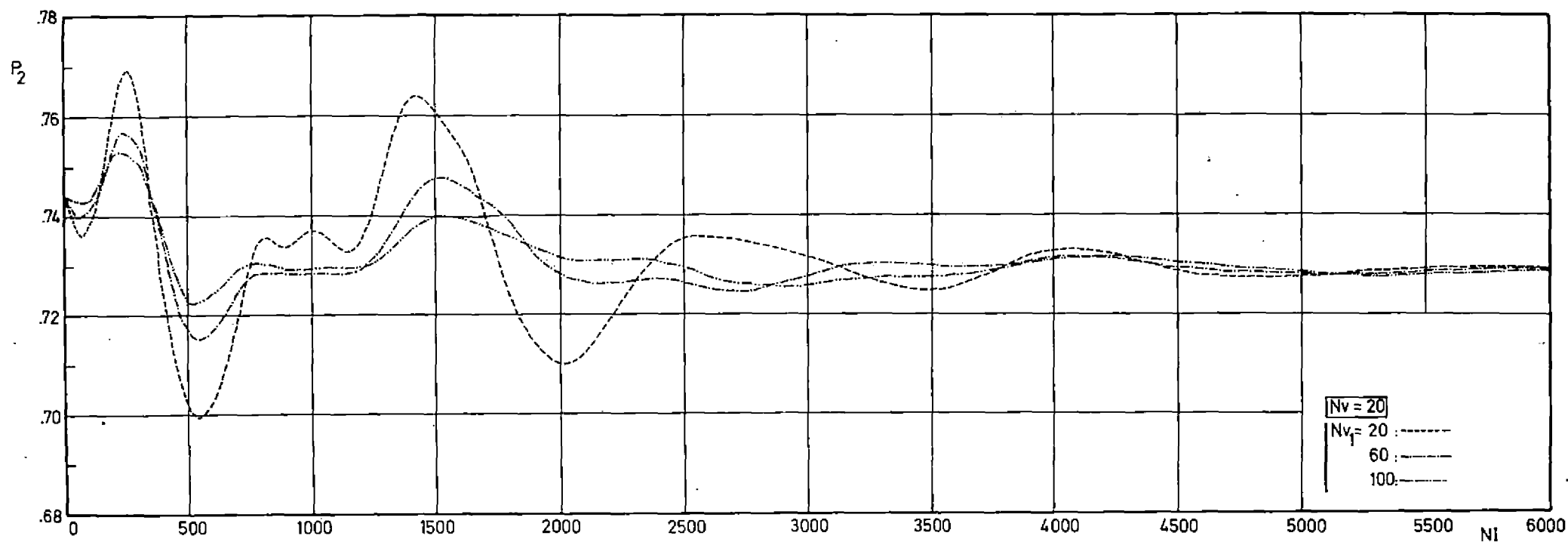


FIG. 55 — MISE A JOUR DES CONDITIONS AUX LIMITES PHYSIQUES INTERMEDIAIRES

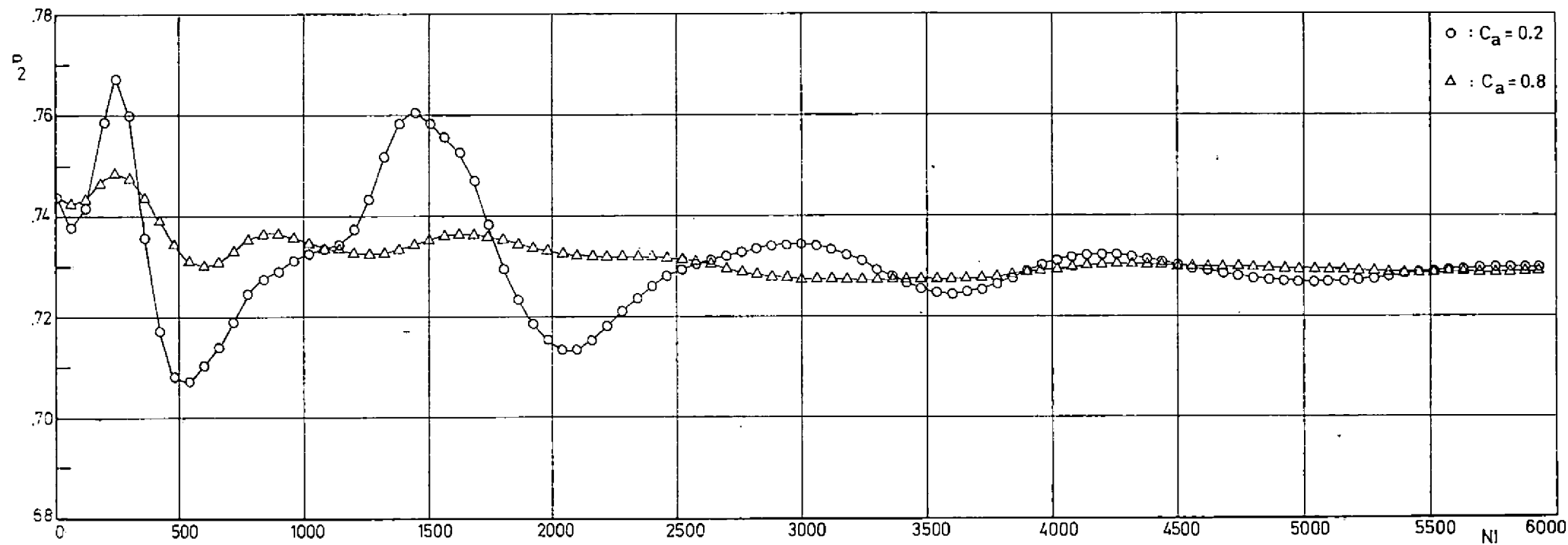


FIG. 56 — AMORTISSEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES PHYSIQUES INTERMEDIAIRES

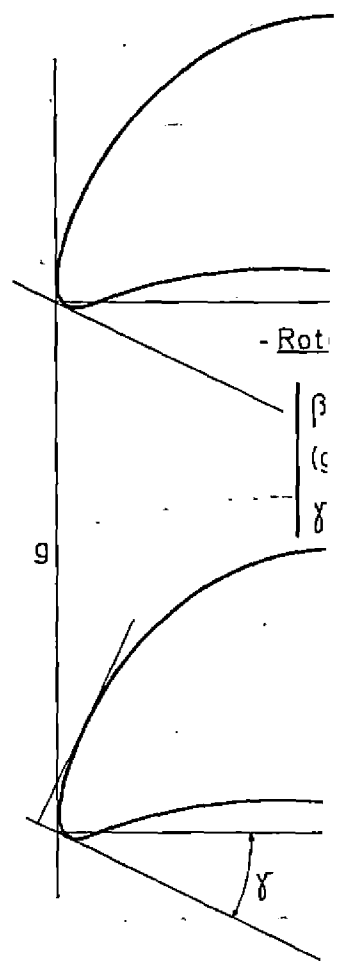
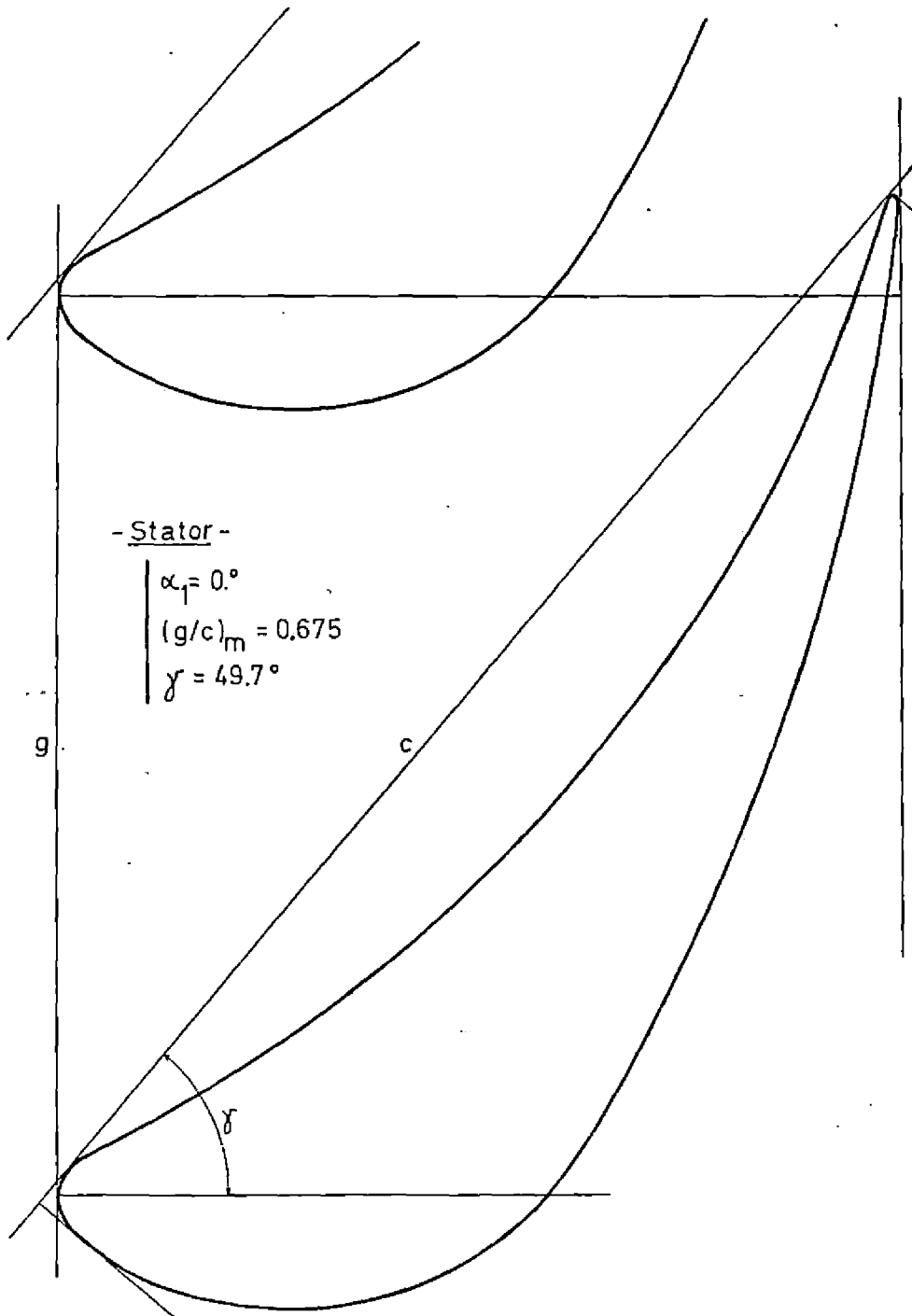


FIG. 57 — GEOMETRIE DE L'ETAGE 1 (A.C.E.C.)

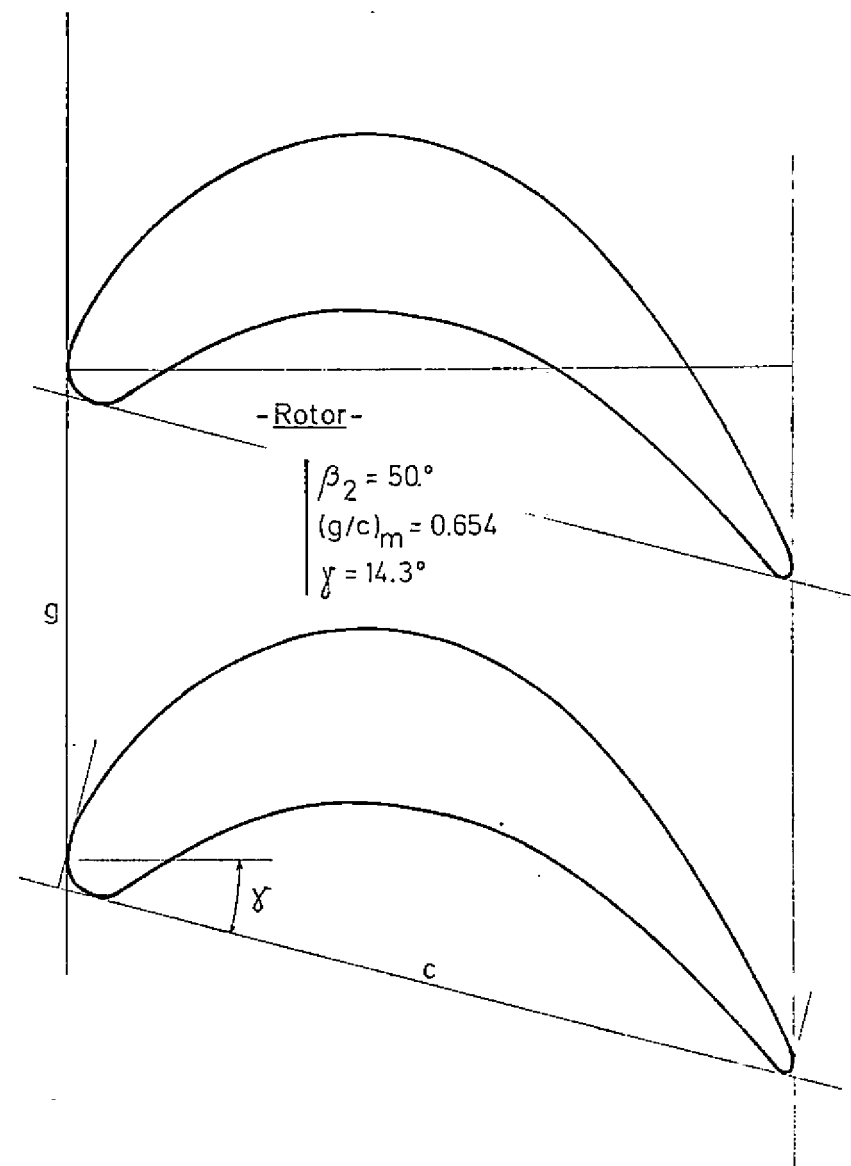
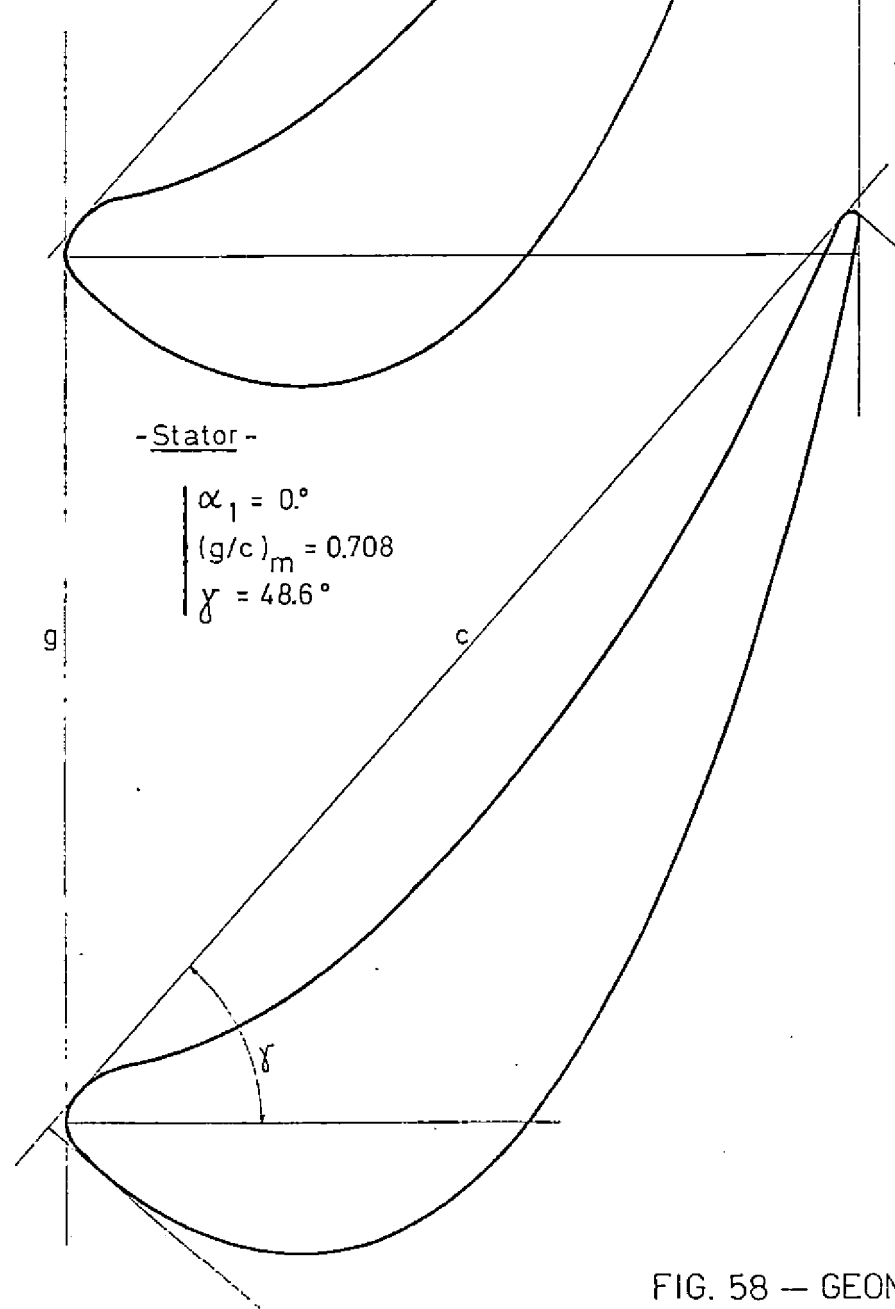
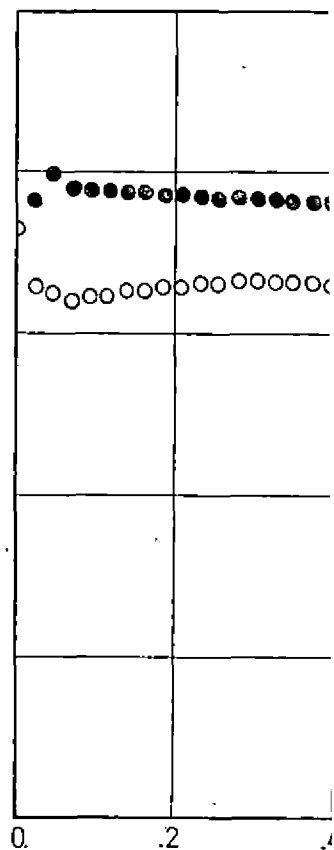
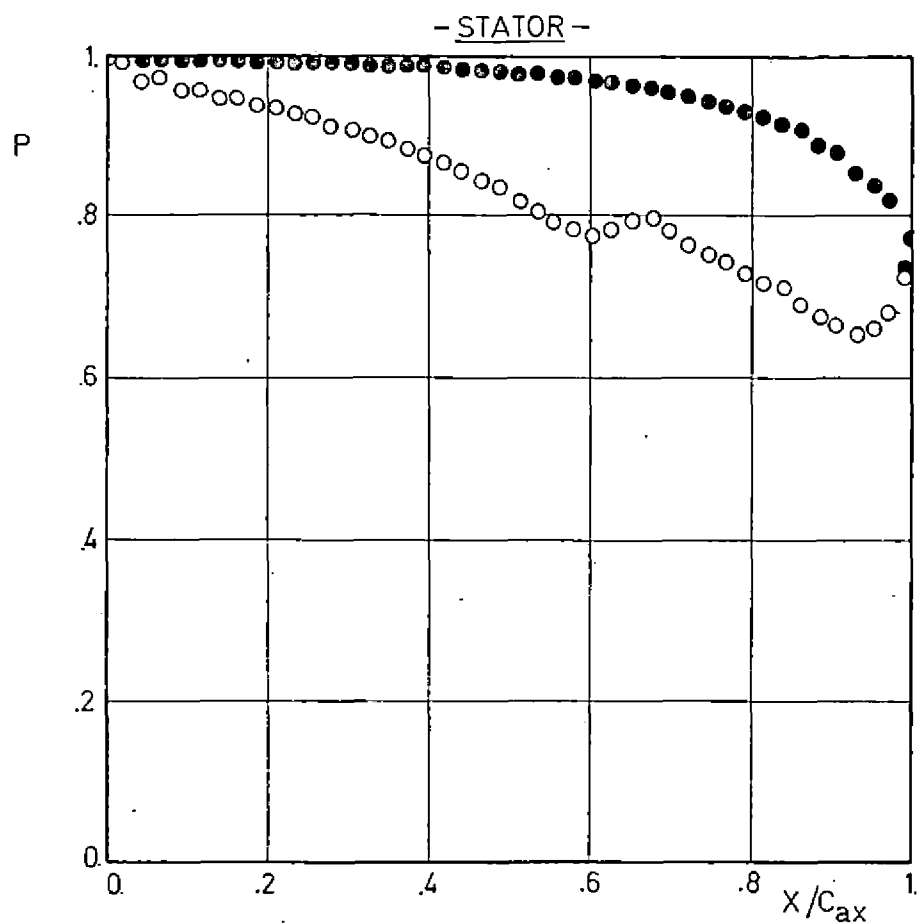


FIG. 58 — GEOMETRIE DE L'ETAGE 2
(N.A.S.A.)



$P_3/P_{01} = 0.7$
 $Nr = 9000 \text{ tr/min}$

- ETAGE 1 -

FIG. 59 — DISTRIBUTION DE LA PRESSION STATIQUE
 (Etage 1 - $P_3/P_{01} = 0.7$)

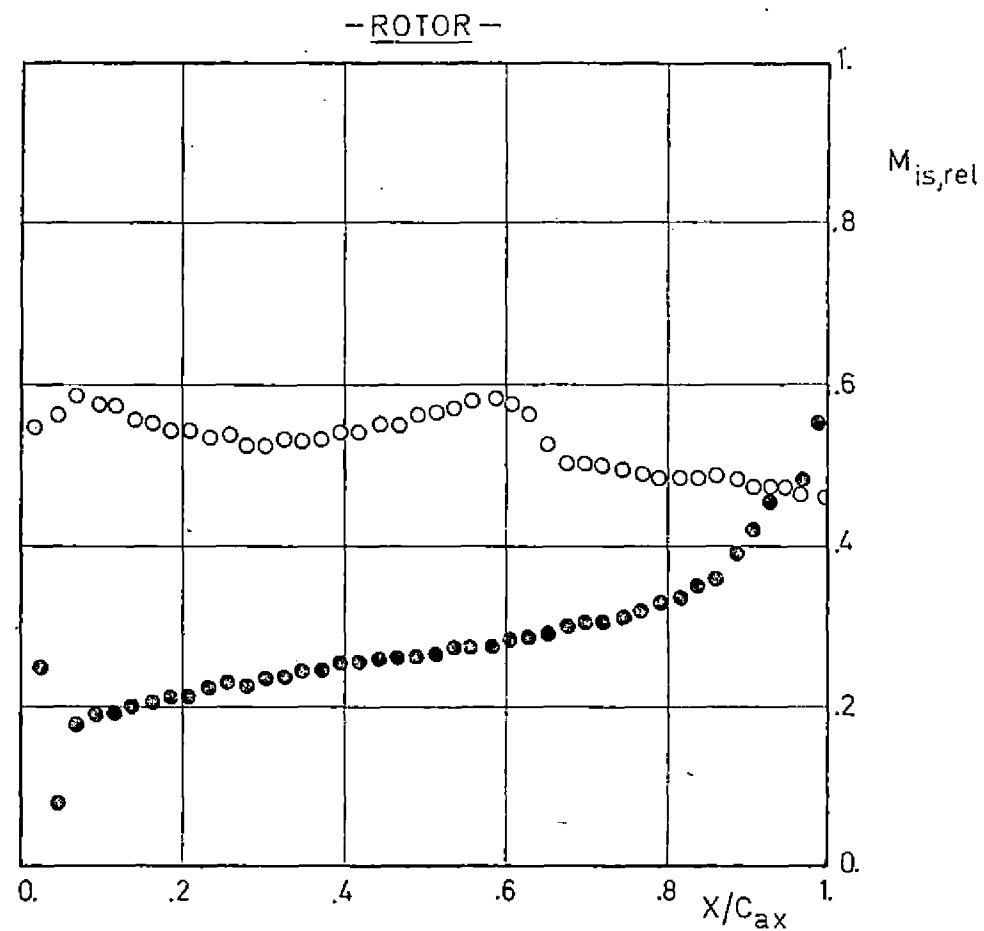
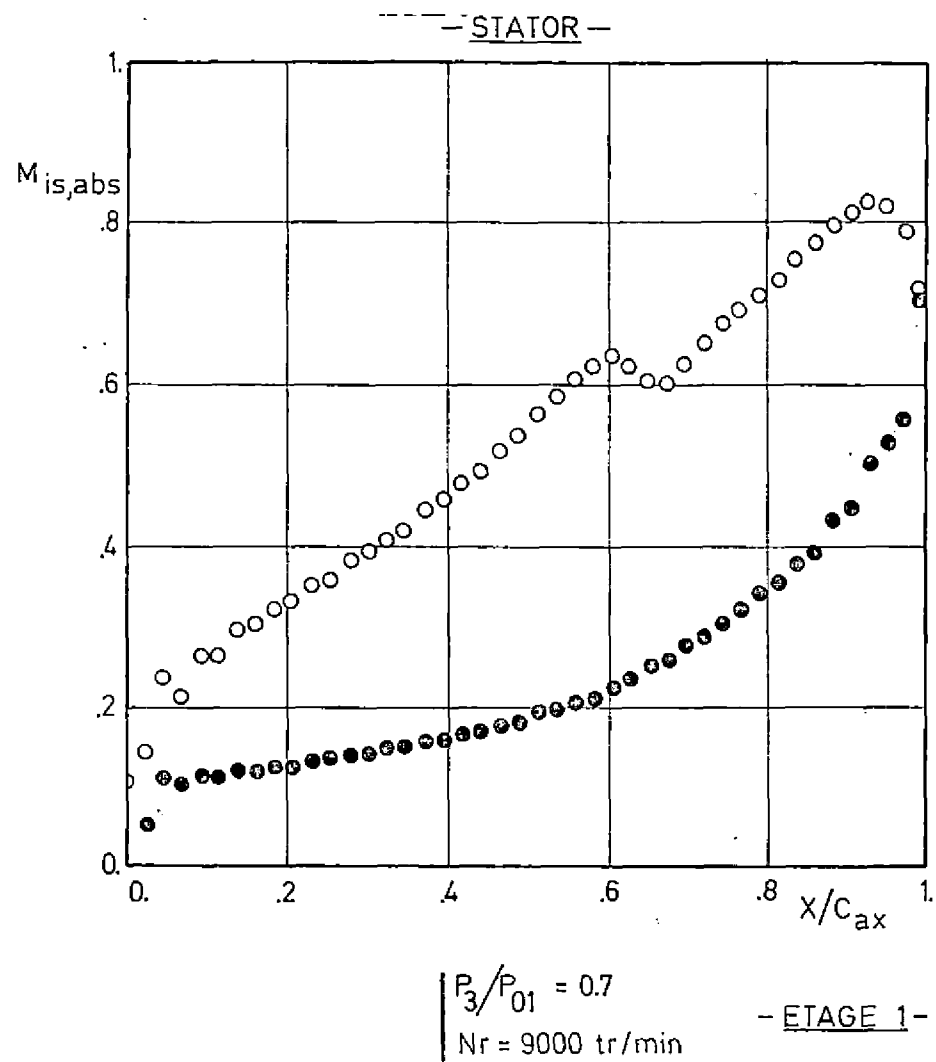


FIG. 60 — DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 (Etage 1 — $P_3/P_{01} = 0.7$)

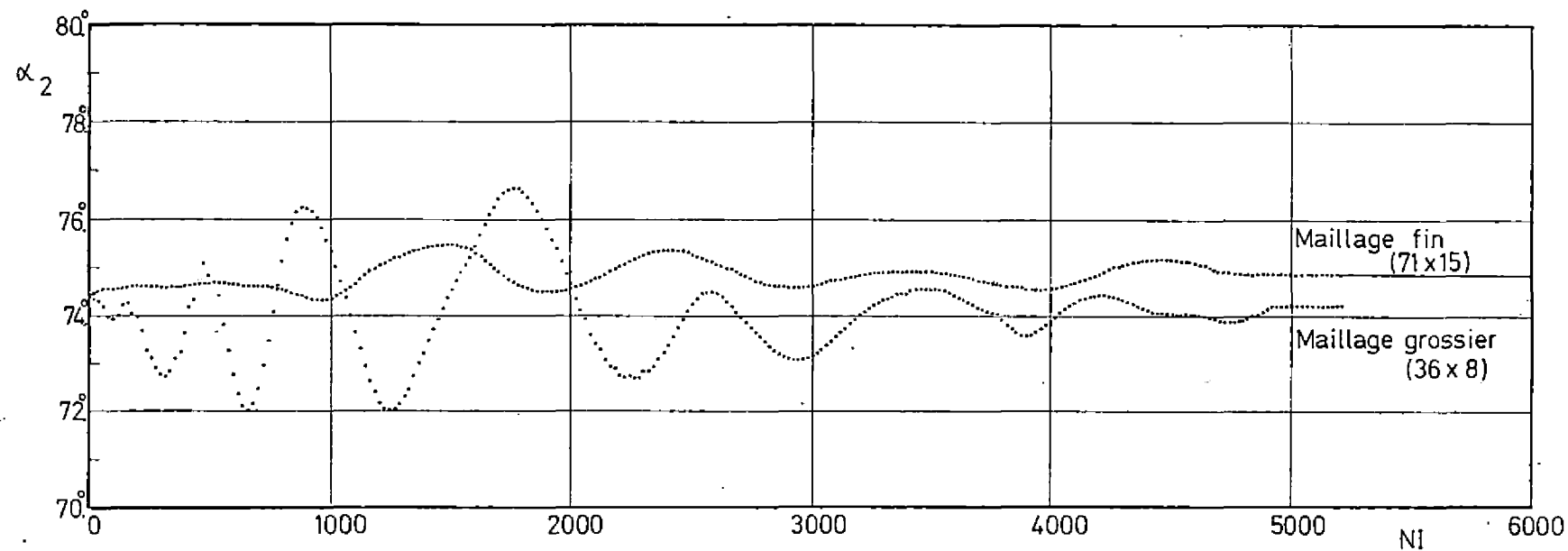


FIG. 61a — EVOLUTION DE L'ANGLE ABSOLU DE SORTIE DU STATOR
 (Etage 1 — $P_3/P_{01} = 0.7$ — $Nr = 9000$ tr/min)

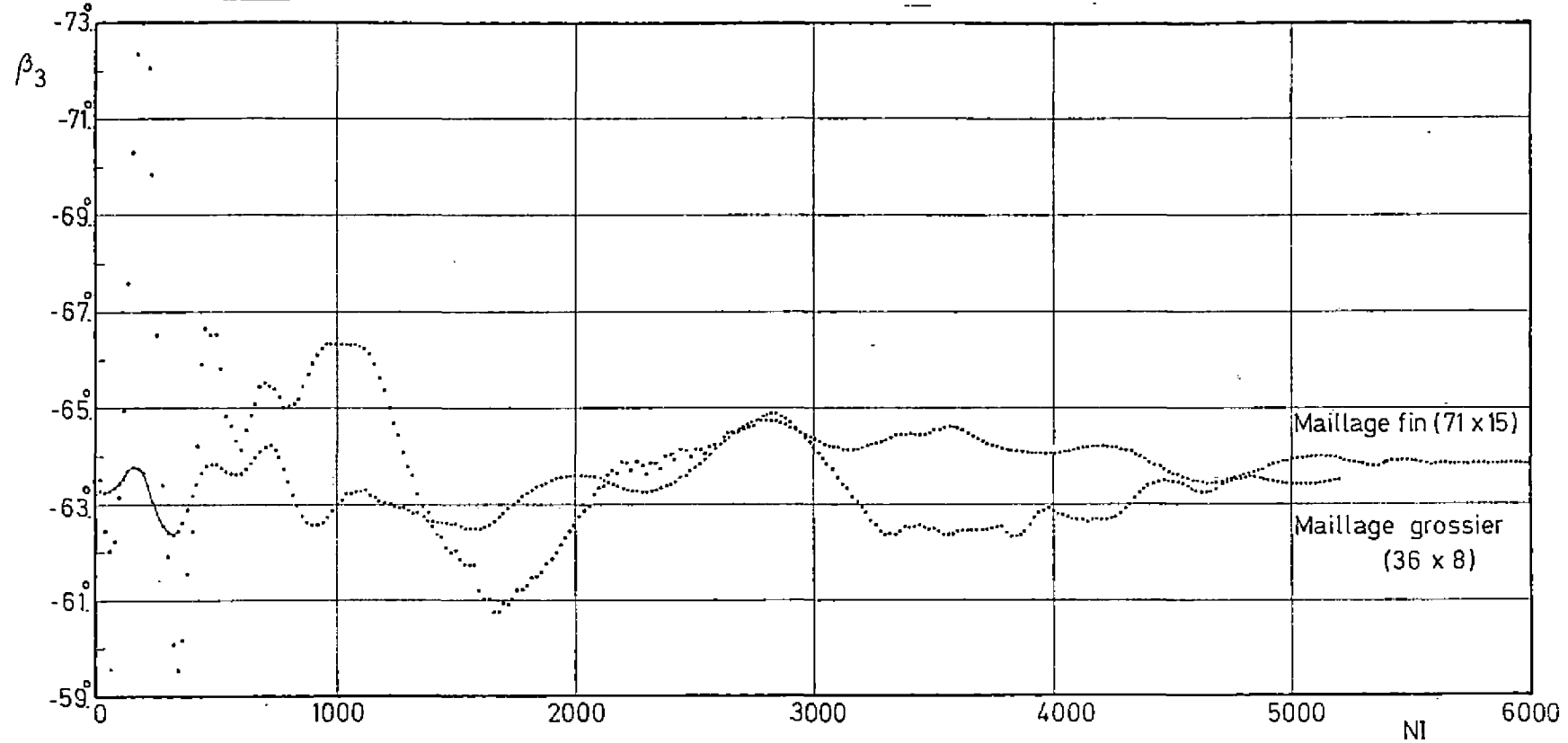


FIG. 61.b — EVOLUTION DE L'ANGLE RELATIF DE SORTIE DU ROTOR

(Etage 1 - $P_3/P_{01} = 0.7$ - $Nr = 9000$ tr/min)

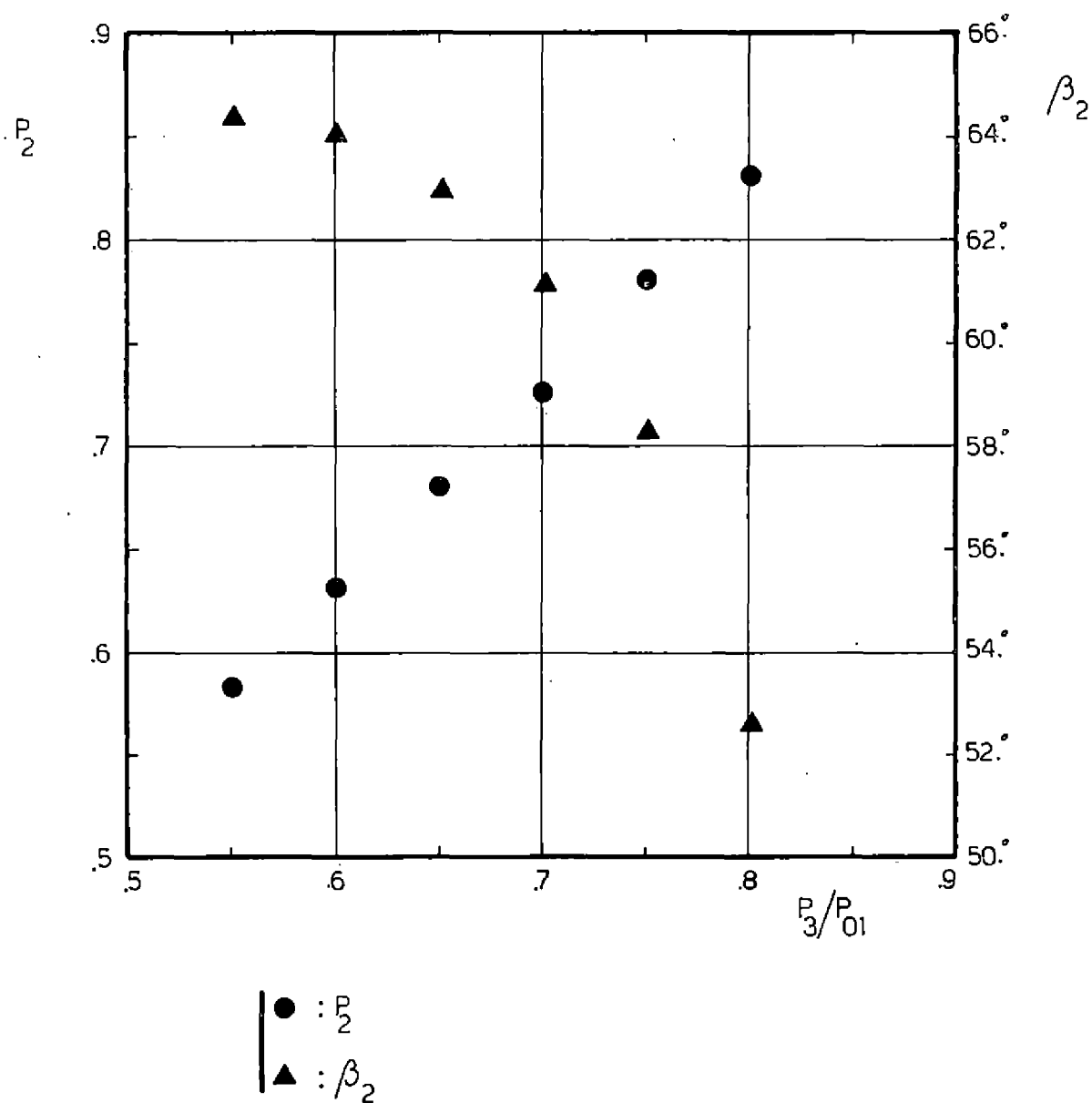
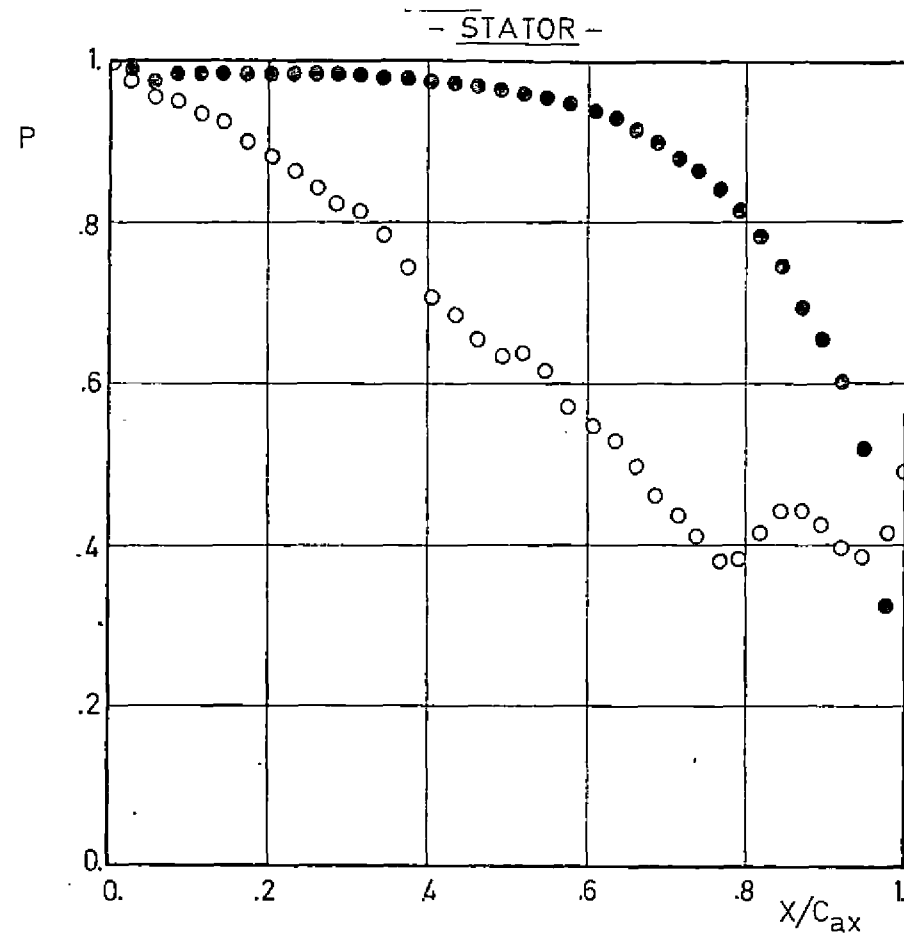


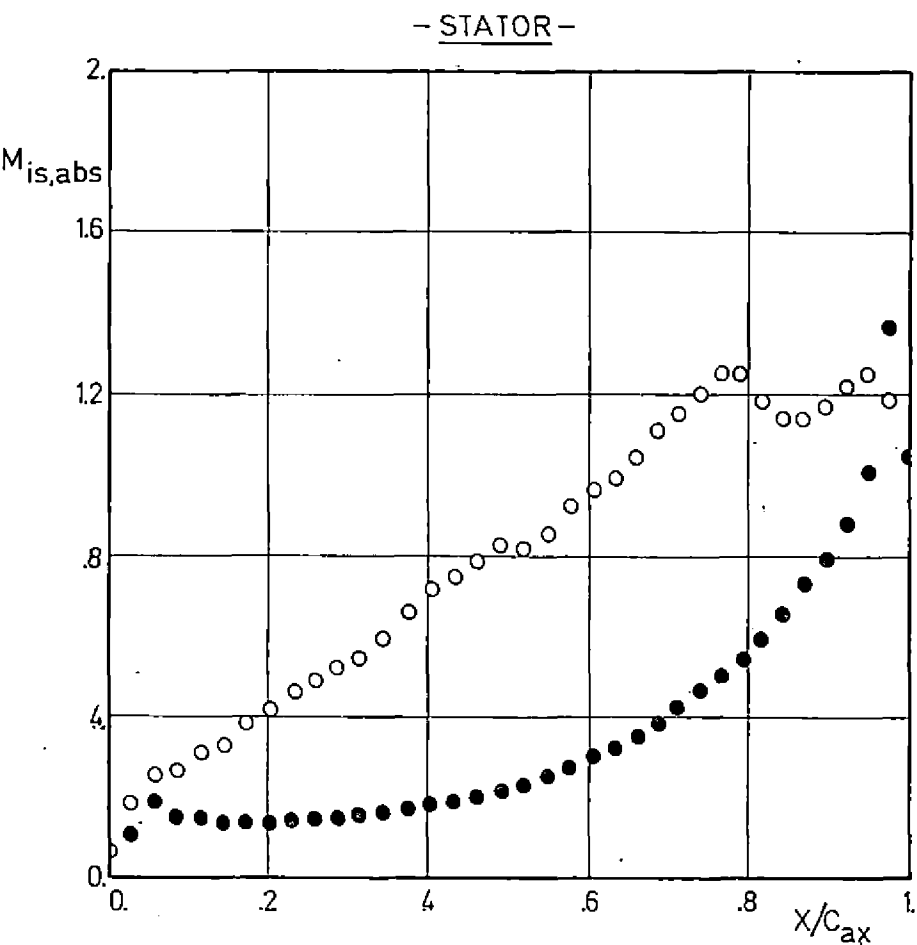
FIG. 62 — EVOLUTION DES CONDITIONS INTERMEDIAIRES
EN FONCTION DE LA CONTREPRESSION
(Etage 1)



$P_3/P_{01} = 0.225$
 $Nr = 8081, \text{ tr/min}$

- ETAGE 2 -

FIG. 63 — DISTRIBUTION DE LA PRESSION STATIQUE
 (Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.225$)



$P_3/P_{01} = 0.225$
 $Nr = 8081 \text{ tr/min}$

- ETAGE 2 -

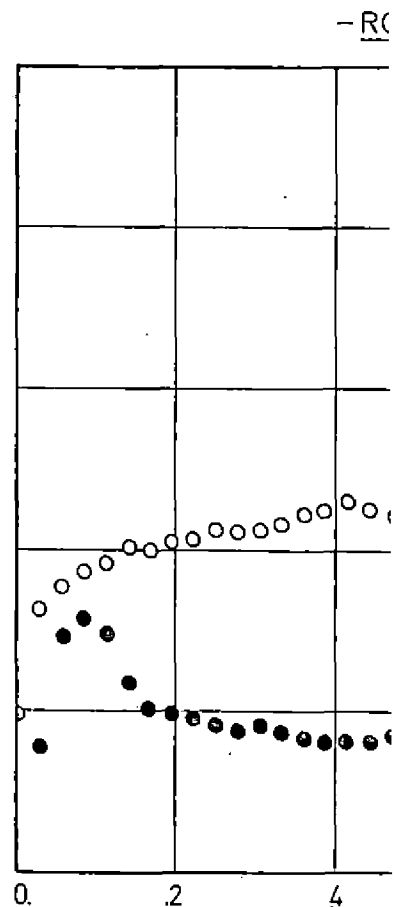
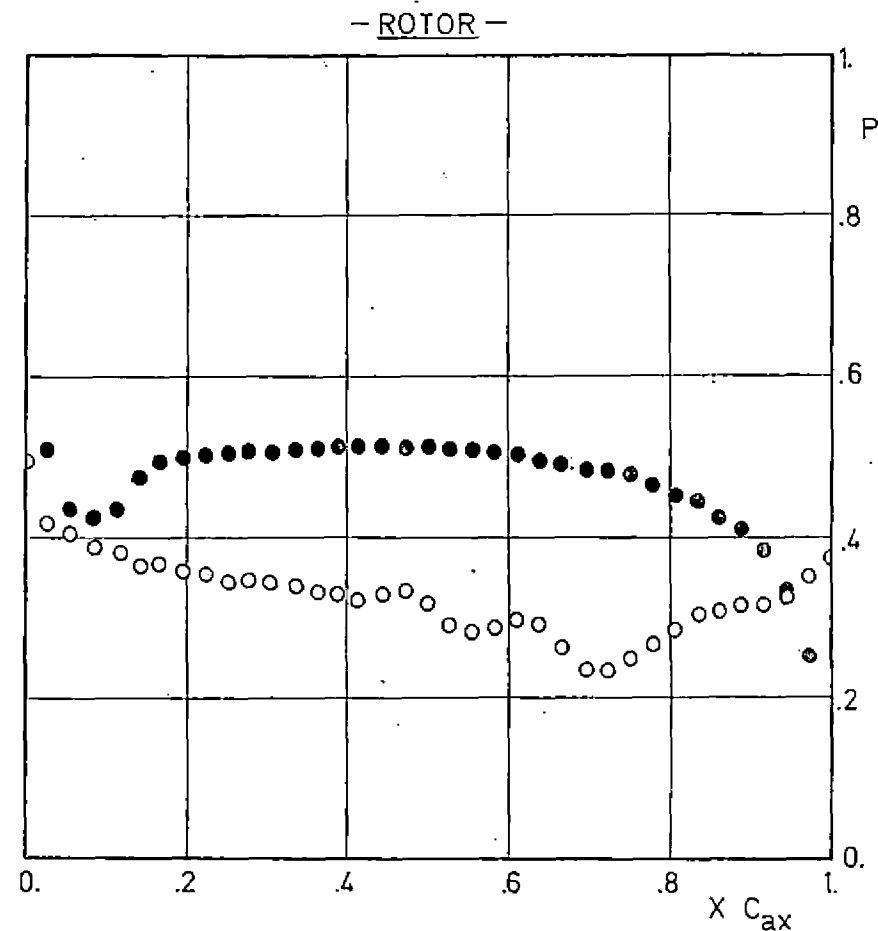
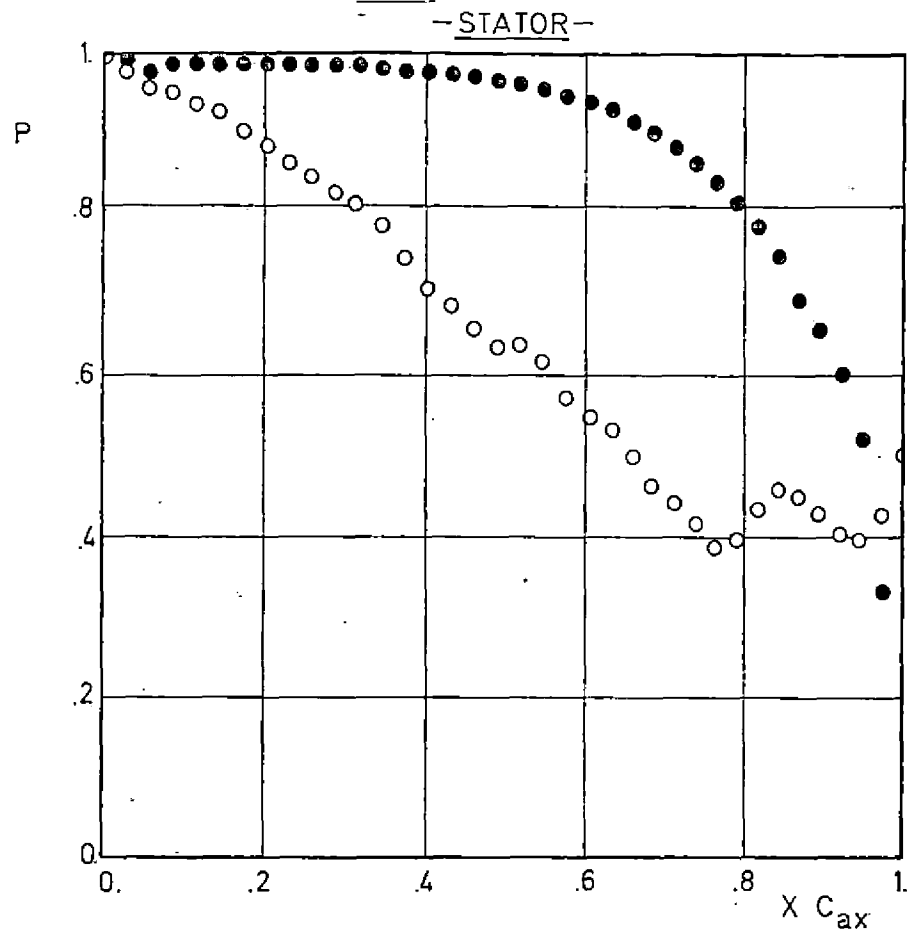


FIG. 64 - DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 (Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.225$)

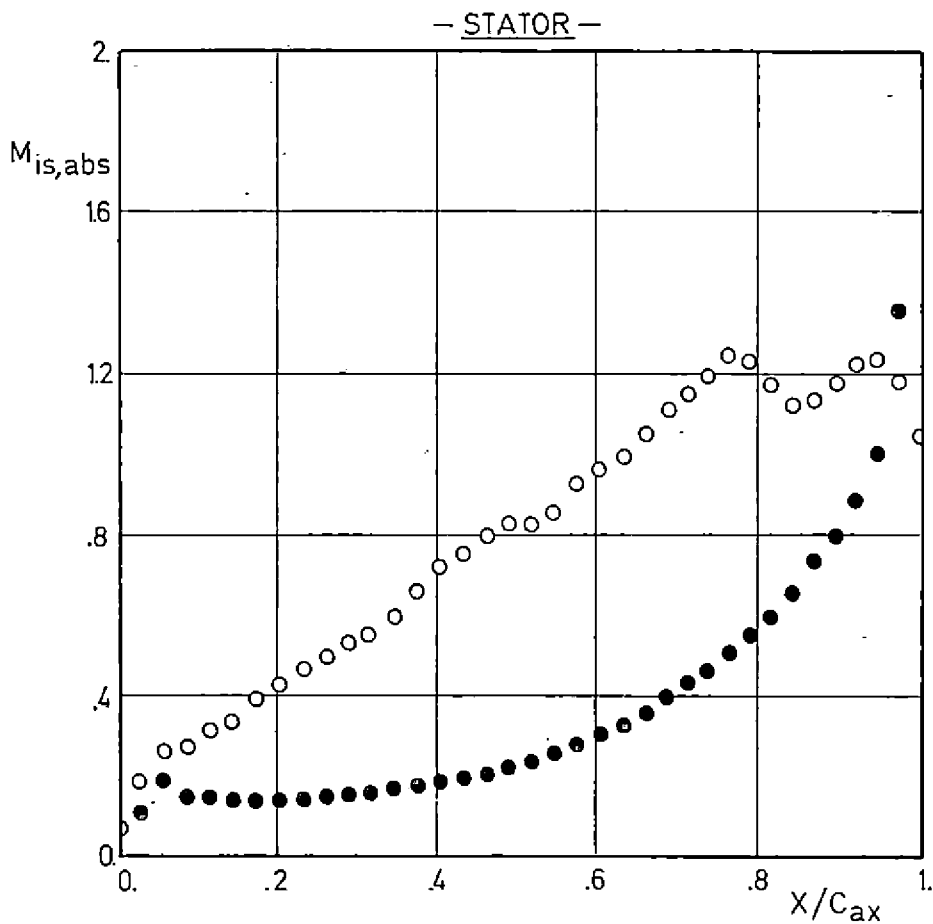


$\left| \begin{array}{l} P_3/P_{01} = 0.358 \\ Nr = 8081 \text{ tr/min} \end{array} \right.$

- ETAGE 2 -

FIG. 65 — DISTRIBUTION DE LA PRESSION STATIQUE

(Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.358$)



$P_3/P_{01} = 0.358$
 $Nr = 8081 \text{ tr/min}$

— ETAGE 2 —

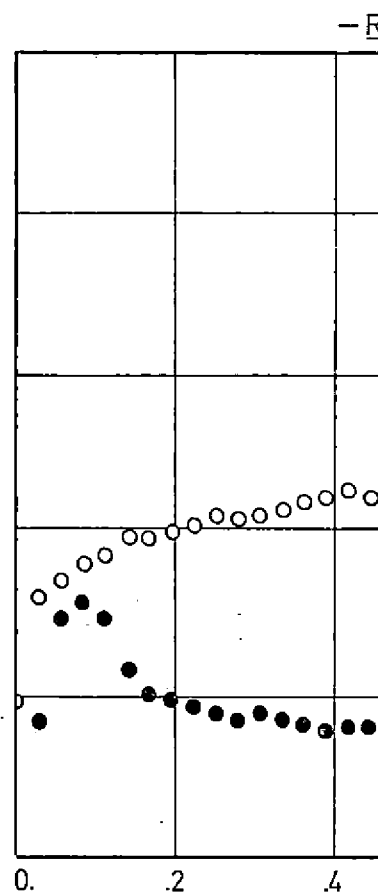
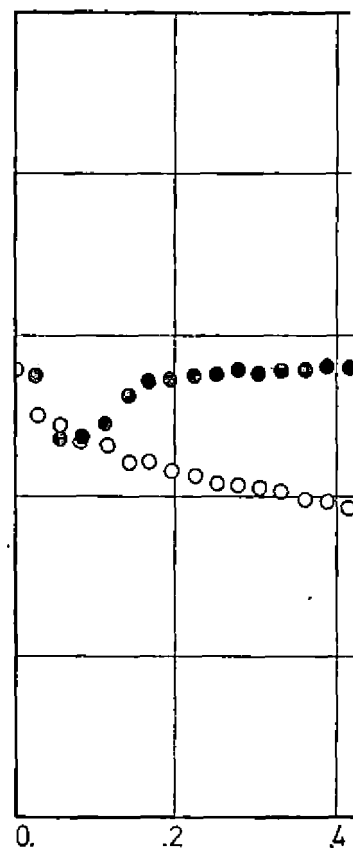
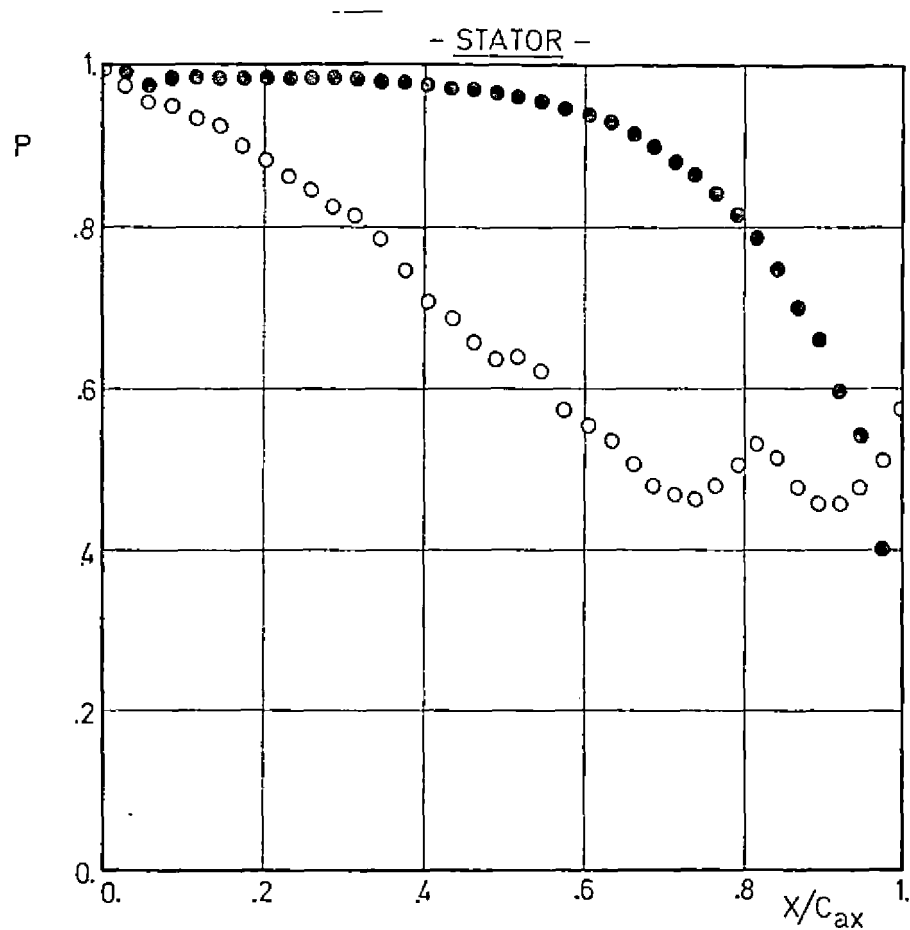


FIG. 66 — DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 (Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.358$)

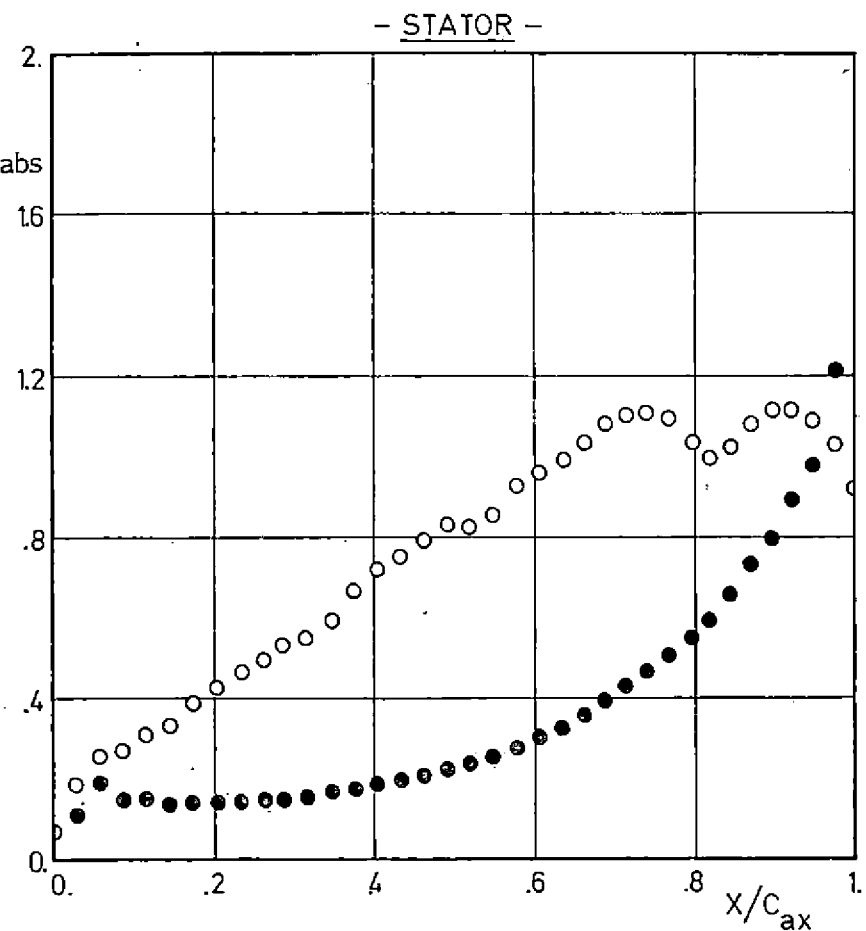


$P_3/P_{01} = 0.462$
 $Nr = 8081 \text{ tr/min}$

- ETAGE 2 -

FIG.67 — DISTRIBUTION DE LA PRESSION STATIQUE

(Etage 2 — $P_3/P_{01} = 0.462$)



$\left| \frac{P_3}{P_{01}} = 0.462 \right.$
 $Nr = 8081. \text{ tr/min}$

- ETAGE 2 -

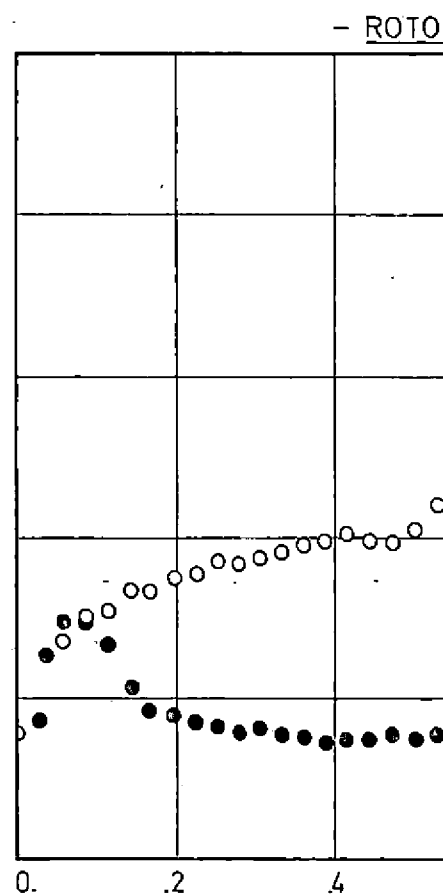
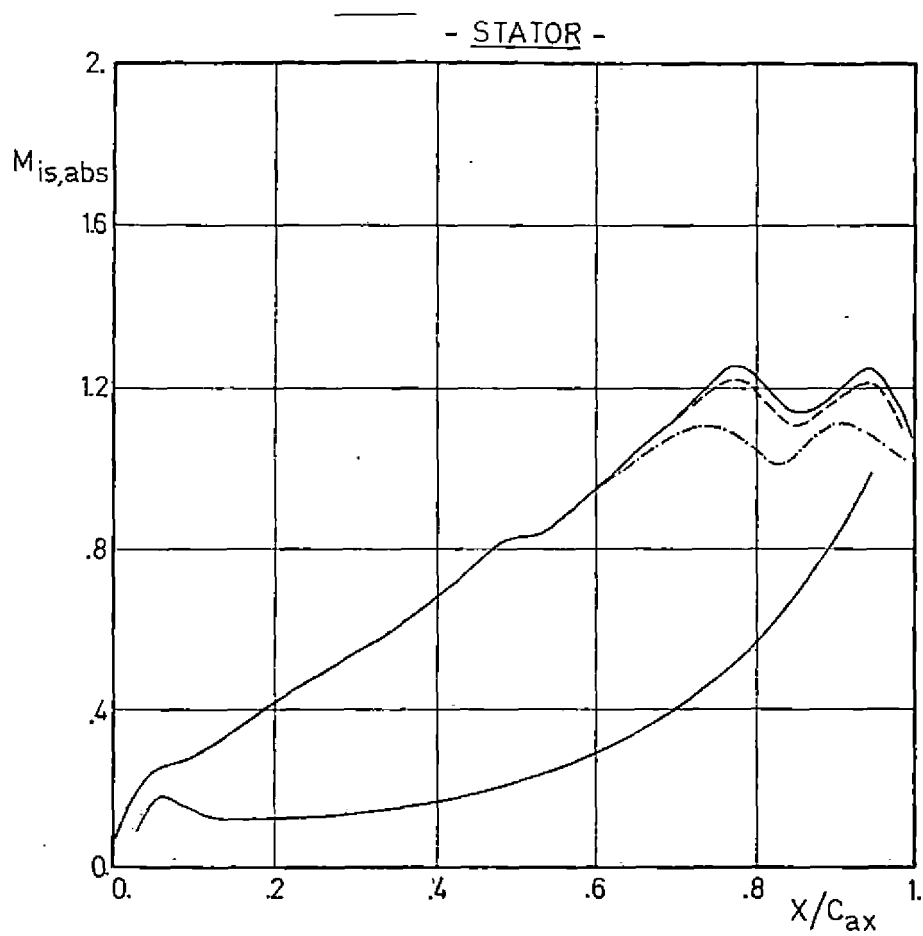


FIG.68 - DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 (Etage 2 - $\frac{P_3}{P_{01}} = 0.462$)



— : $P_3/P_{01} = 0.225$
 - - : " = 0.358
 - . - : " = 0.462

ETAGE 2
 Nr = 8081.tr/min

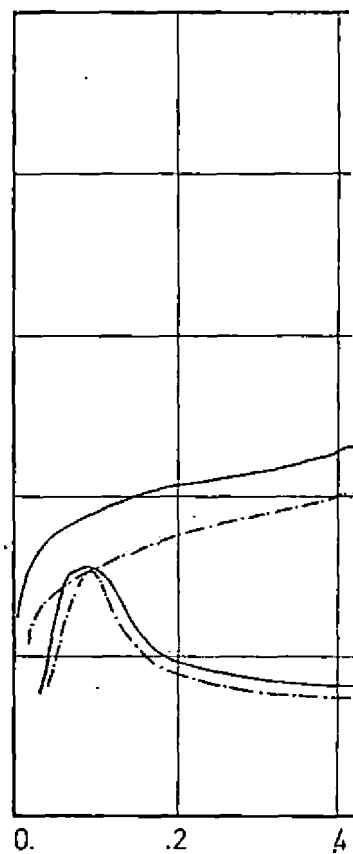
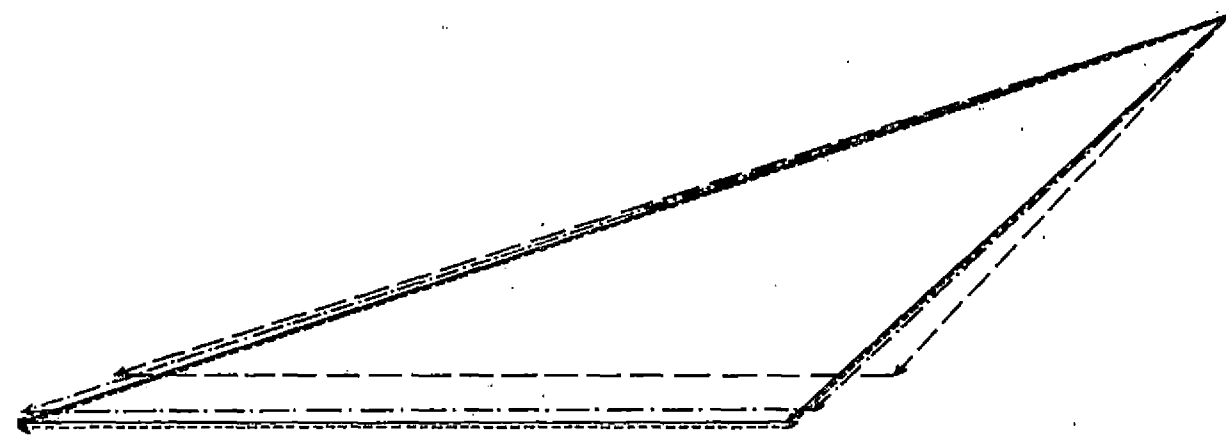
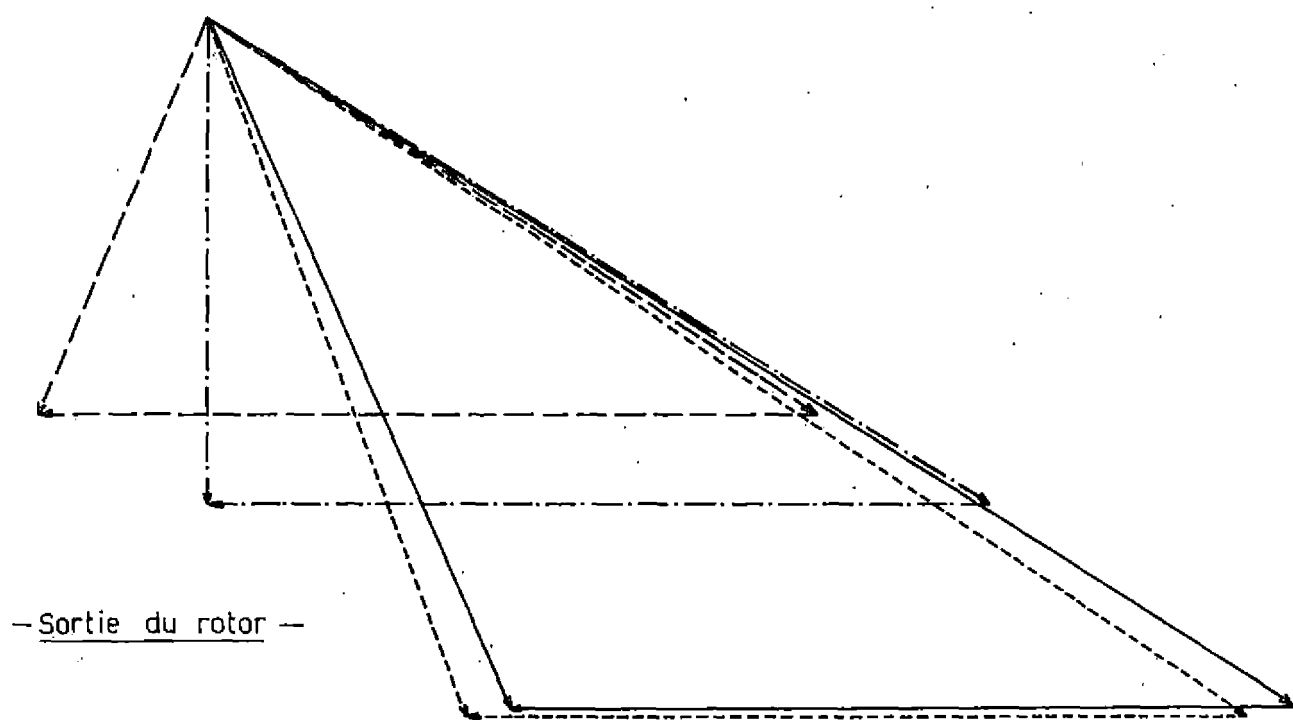


FIG. 69 — DISTRIBUTION DU NOMBRE DE MACH ISENTROPIC
(Etage 2)



— Sortie du stator —



— Sortie du rotor —

$$\frac{P_3}{P_{01}} = 0.225$$

— : Valeurs mesurées

---- : Valeurs calculées

Valeurs calculées

----- : $\frac{P_3}{P_{01}} = 0.358$

----- : $\frac{P_3}{P_{01}} = 0.462$

FIG.70 — EVOLUTION DES TRIANGLES DE VITESSES EN
 AVAL DU STATOR ET DU ROTOR EN FONCTION
 DE LA CONTREPRESSION DE L'ETAGE
 (Etage 2)

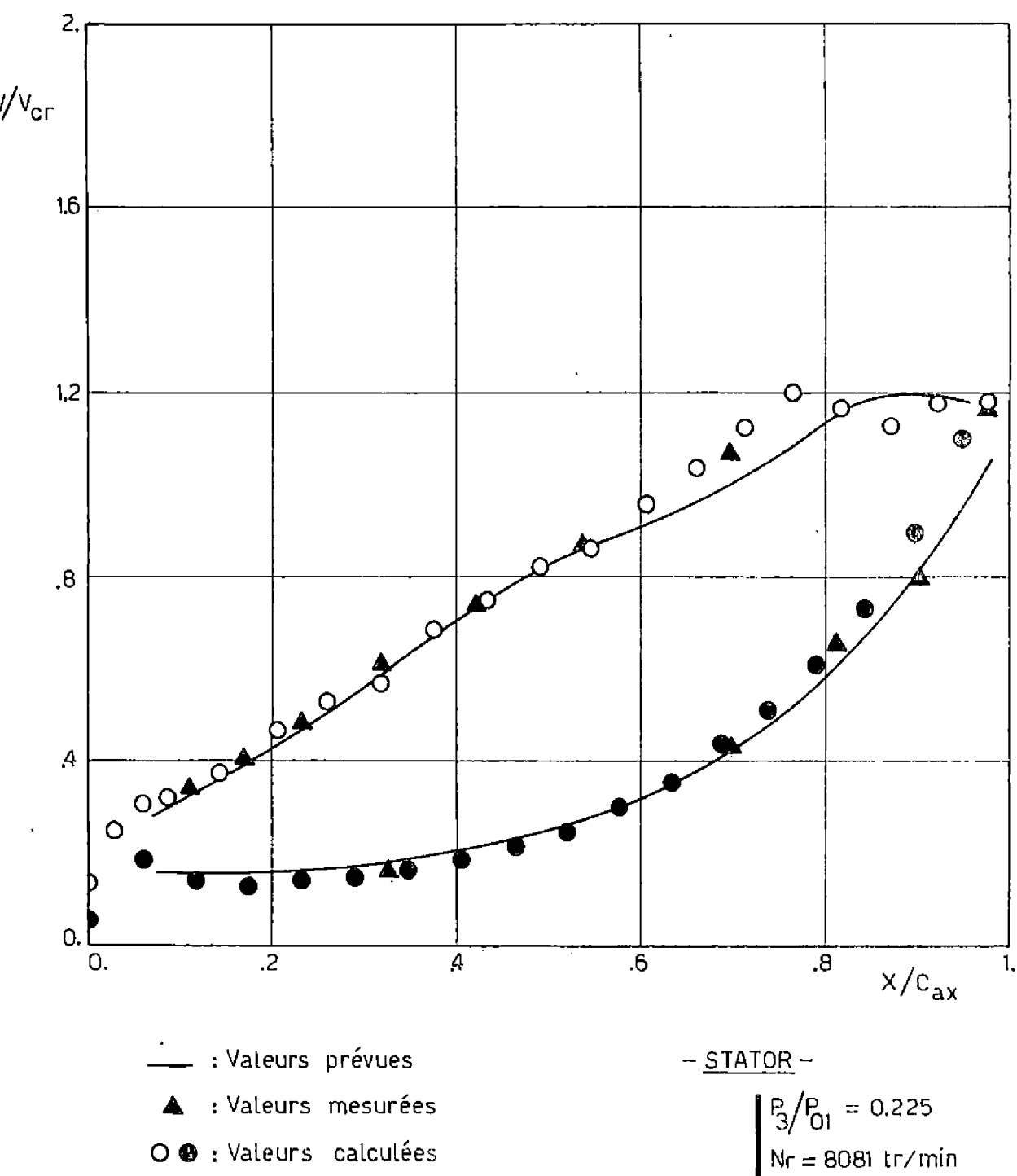


FIG. 71 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS
 DE VITESSE DANS LE STATOR
 (Etage 2)

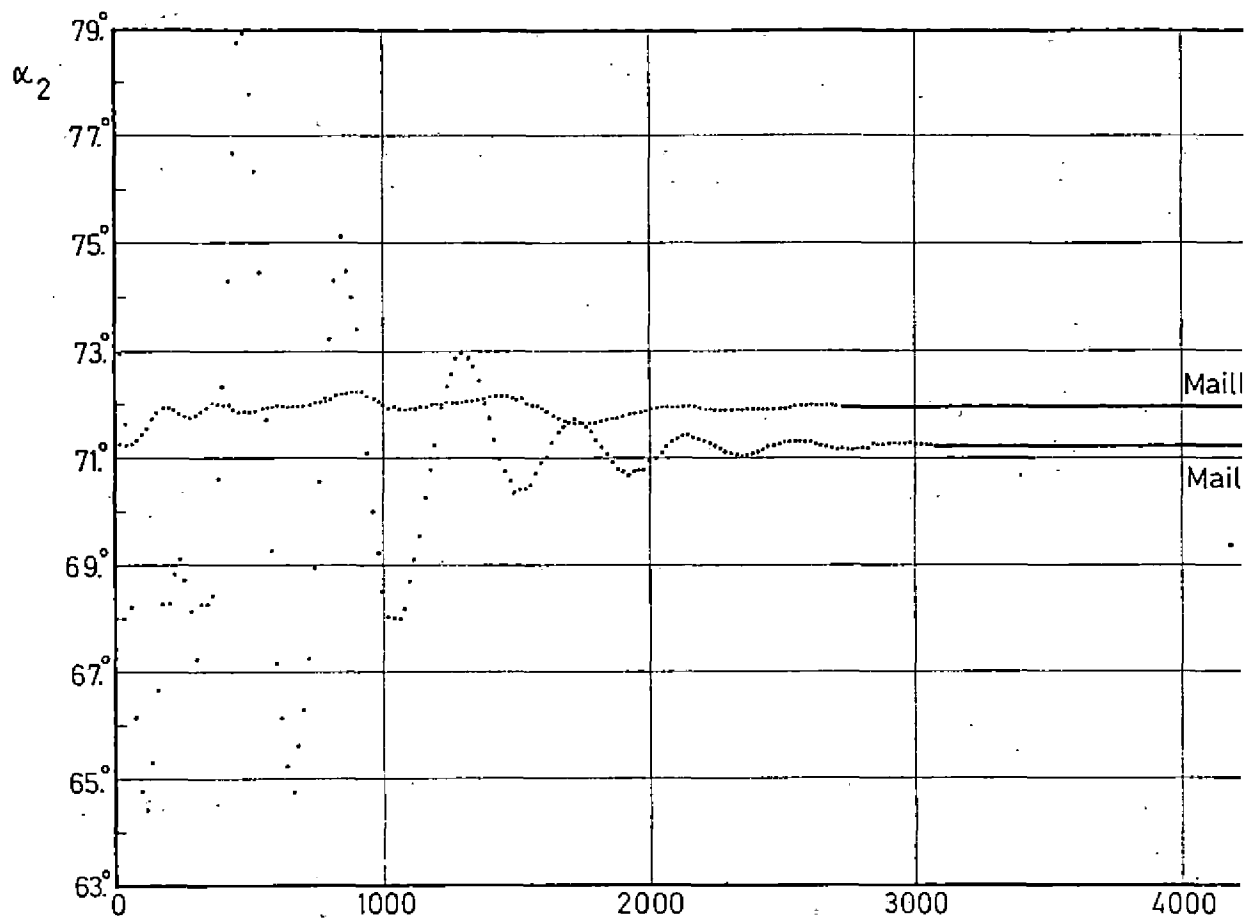


FIG. 72a. — EVOLUTION DE L'ANGLE ABSOLU DE SORTIE DU

(Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.225$ - N

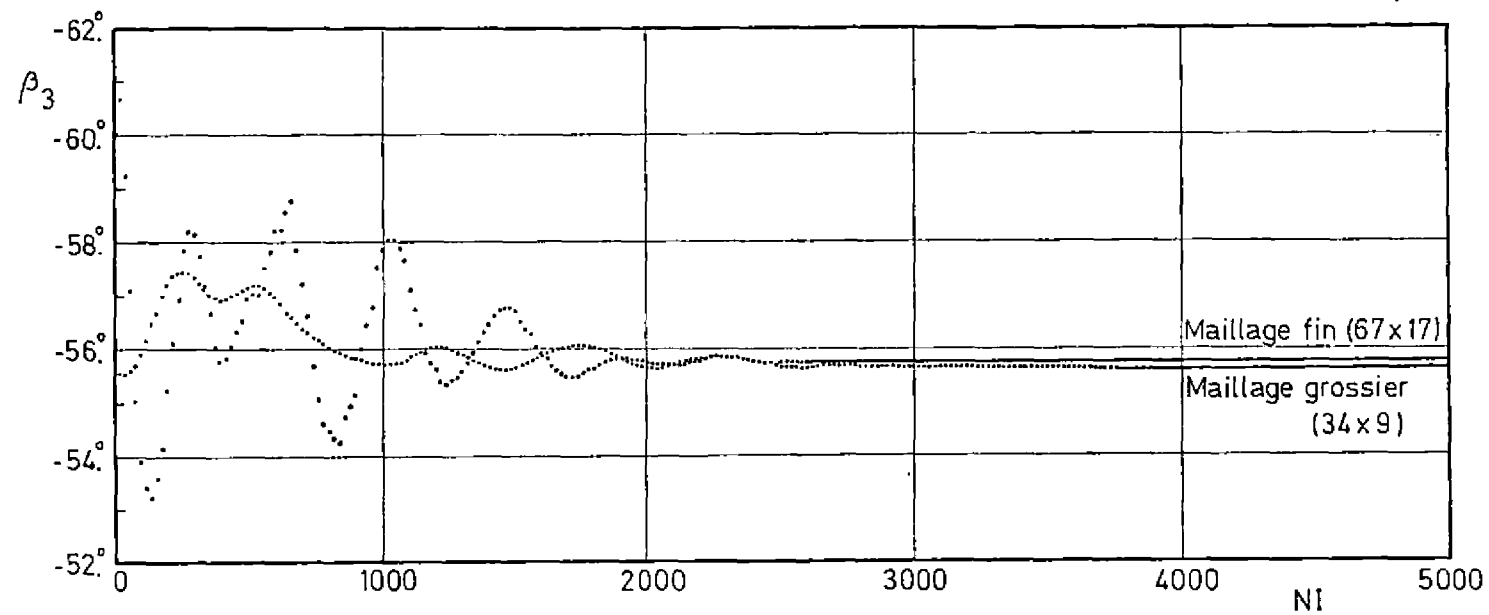


FIG. 72.b — EVOLUTION DE L'ANGLE RELATIF DE SORTIE DU ROTOR

(Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.225$ - $Nr = 8081$ tr/min)

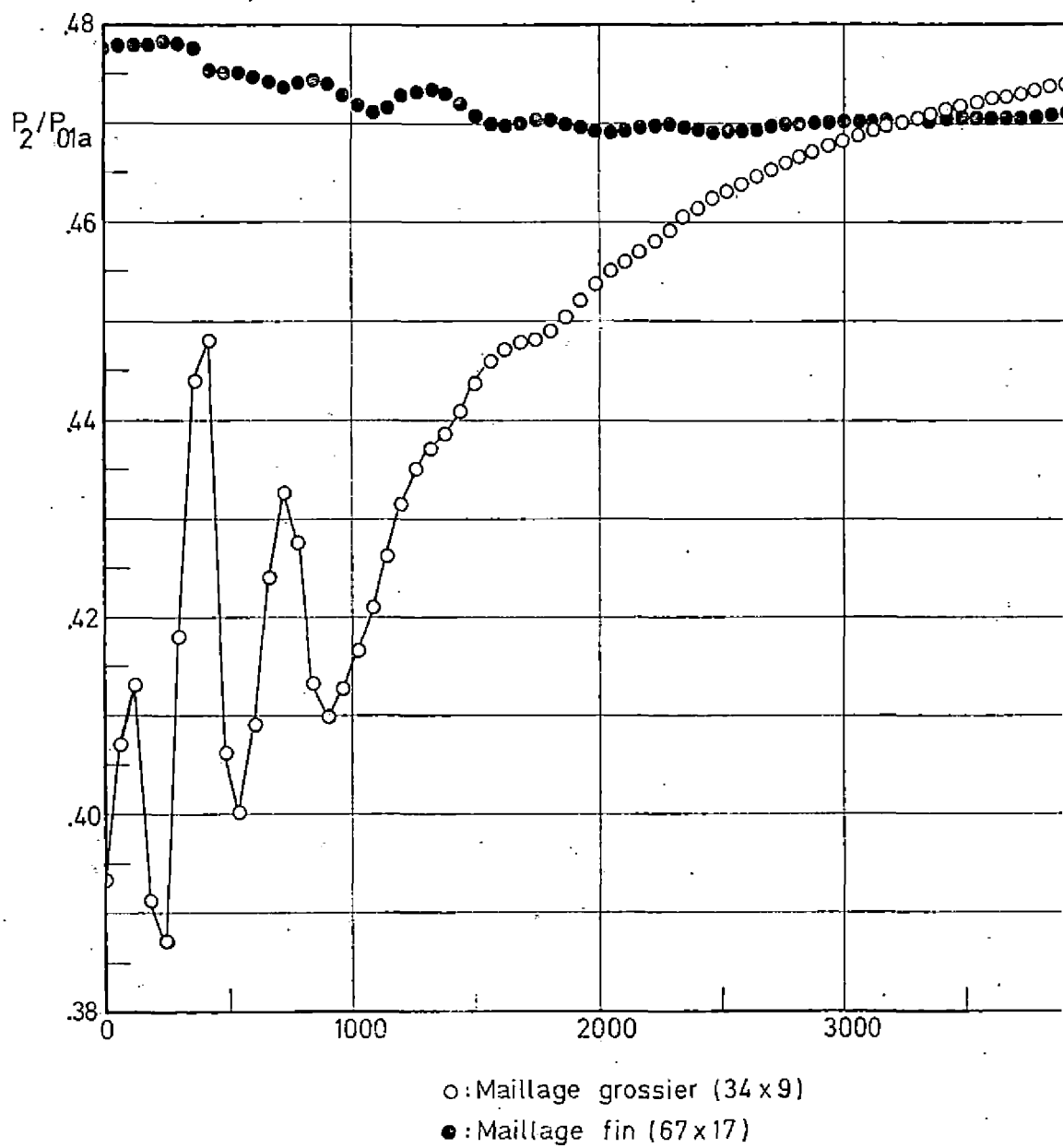
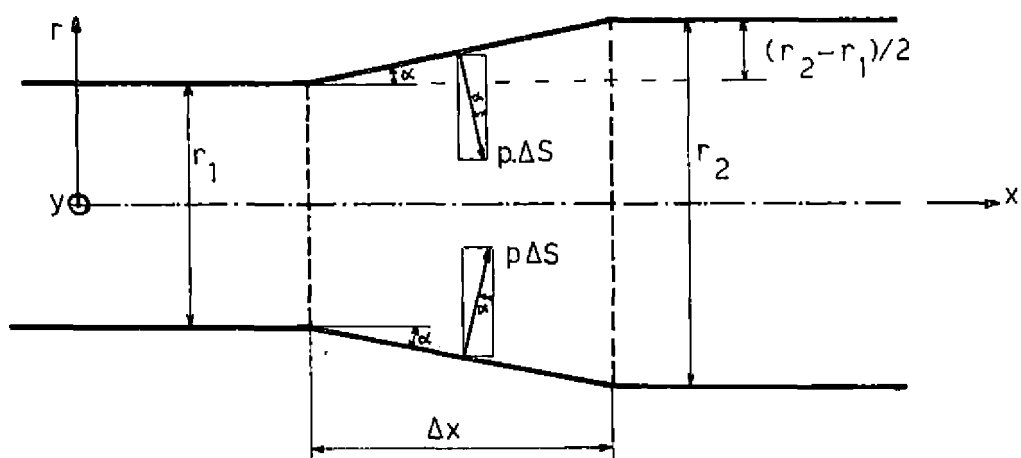


FIG. 73 —EVOLUTION DE LA PRESSION STATIQUE INTER

(Etage 2 - $P_3/P_{01} = 0.225$ - $Nr = 8$)



$$\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$$

Forces exercées sur la paroi

$$\begin{cases} F_x = p \cdot \Delta S \sin \alpha + p \cdot \Delta S \sin \alpha = p \cdot \Delta S \left(\frac{r_2 - r_1}{\Delta x} \right) \\ F_y = 0. \quad (\text{sauf sur une paroi solide}) \\ F_r = p \cdot \Delta S \cos \alpha - p \cdot \Delta S \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

FIG. 74 — FORCES EXERCEES SUR LES PAROIS
(Ecoulement quasi-tridimensionnel)

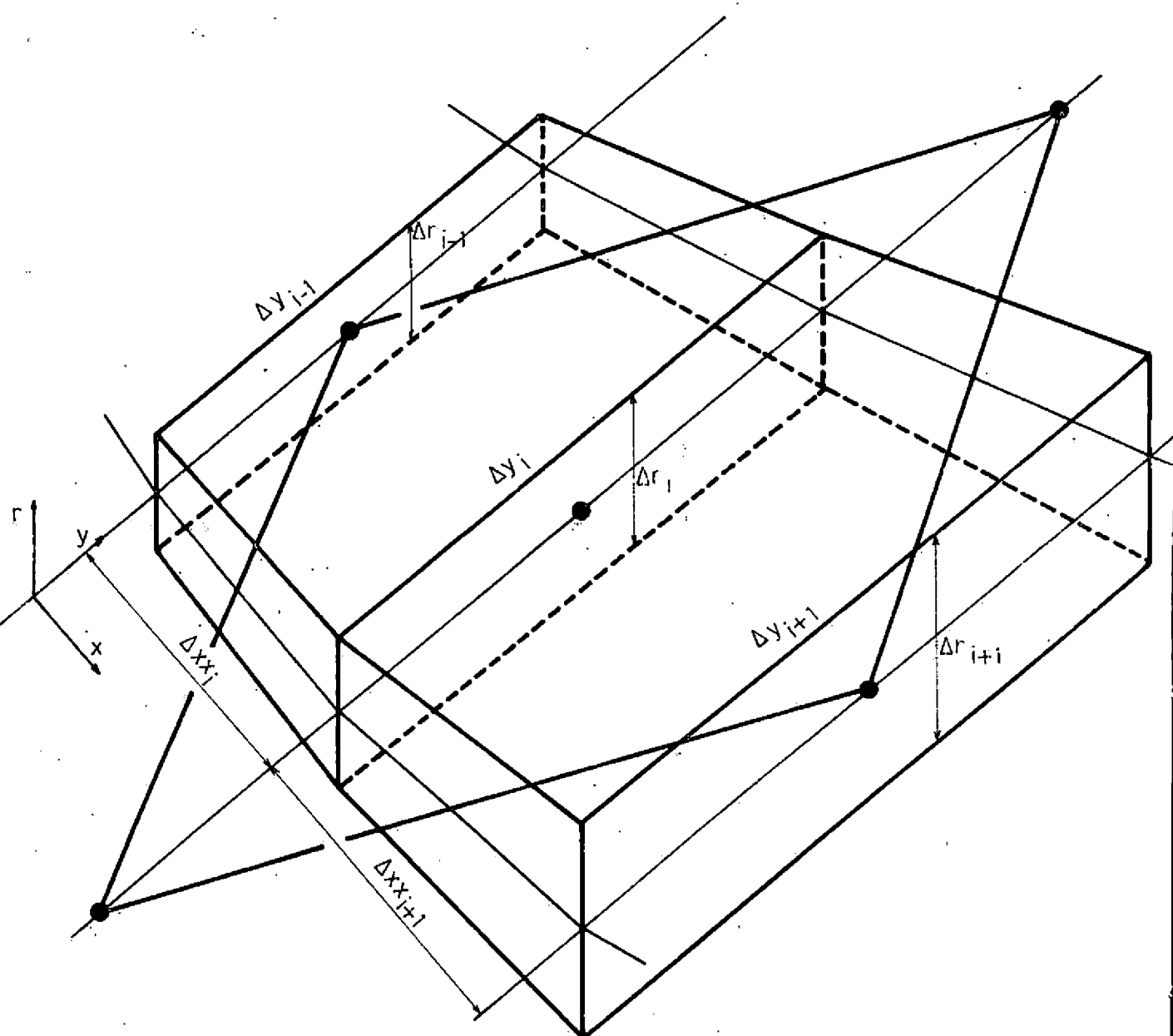


FIG. 75 — ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL :
DEFINITION DES "VOLUMES" DE CONTROLE

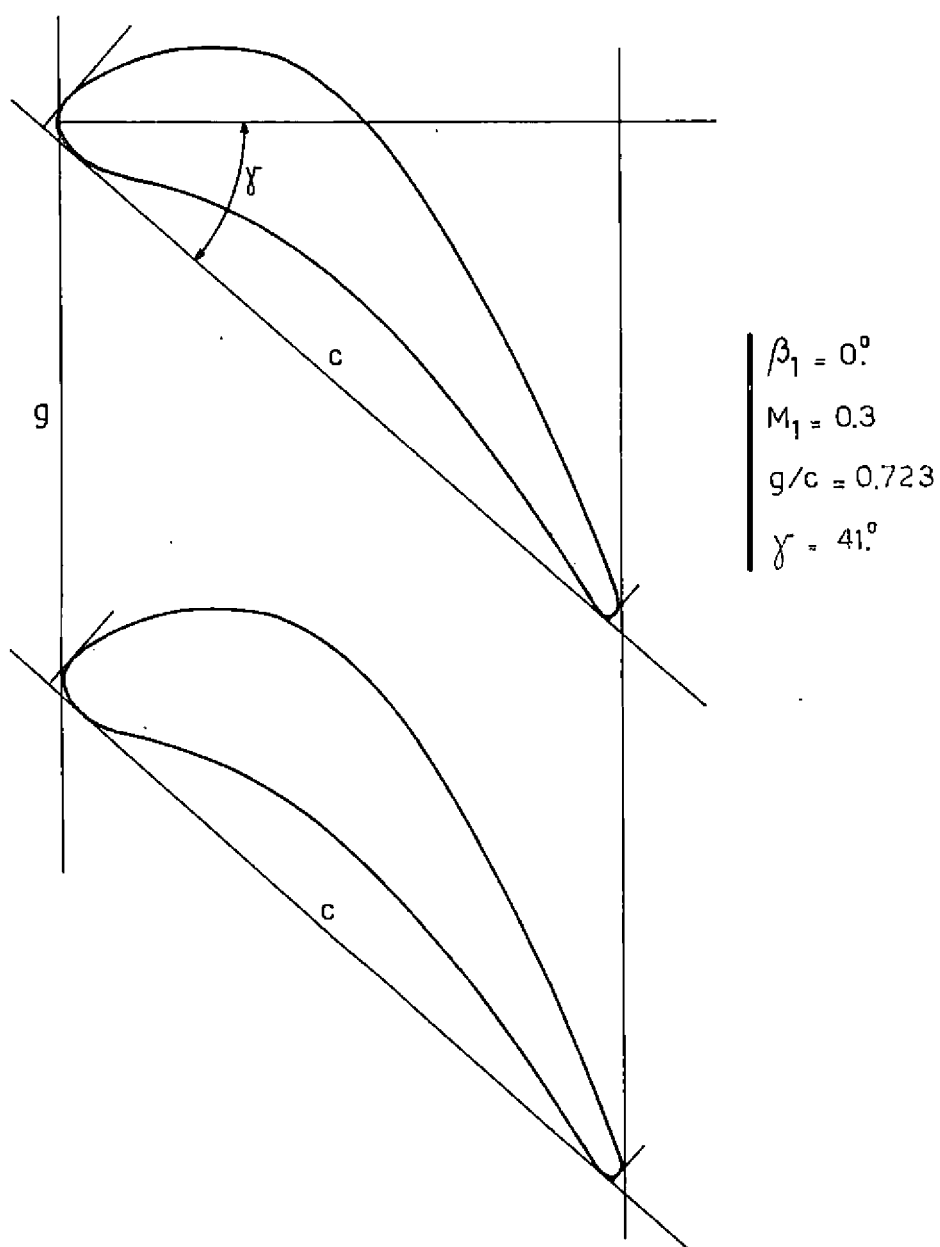


FIG.76.a — AUBE STATORIQUE DE TURBINE A GAZ
(Aube 3 - Réf. 19)

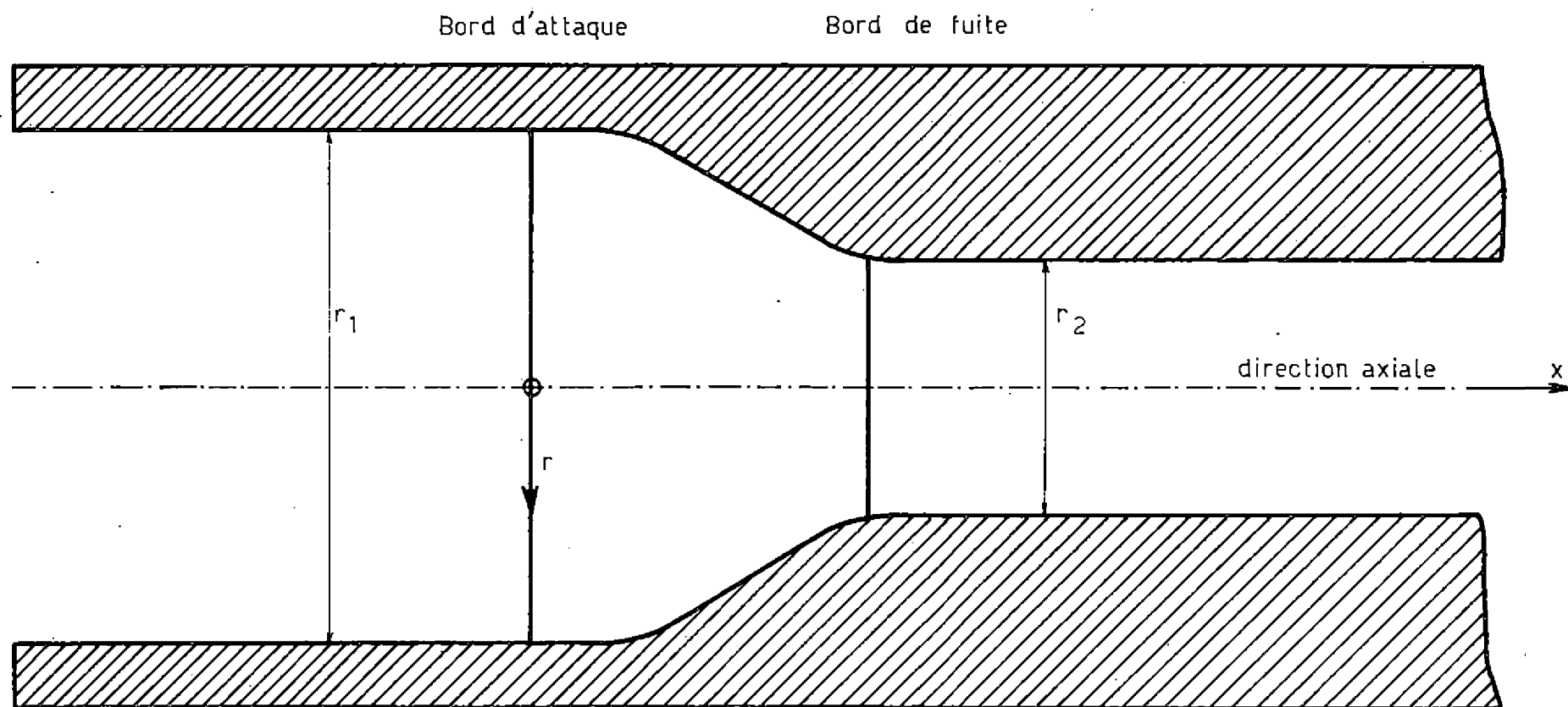


FIG. 76.b — PROFIL DES PAROIS CONTOURNEES

(Aube 3 - Réf. 19)

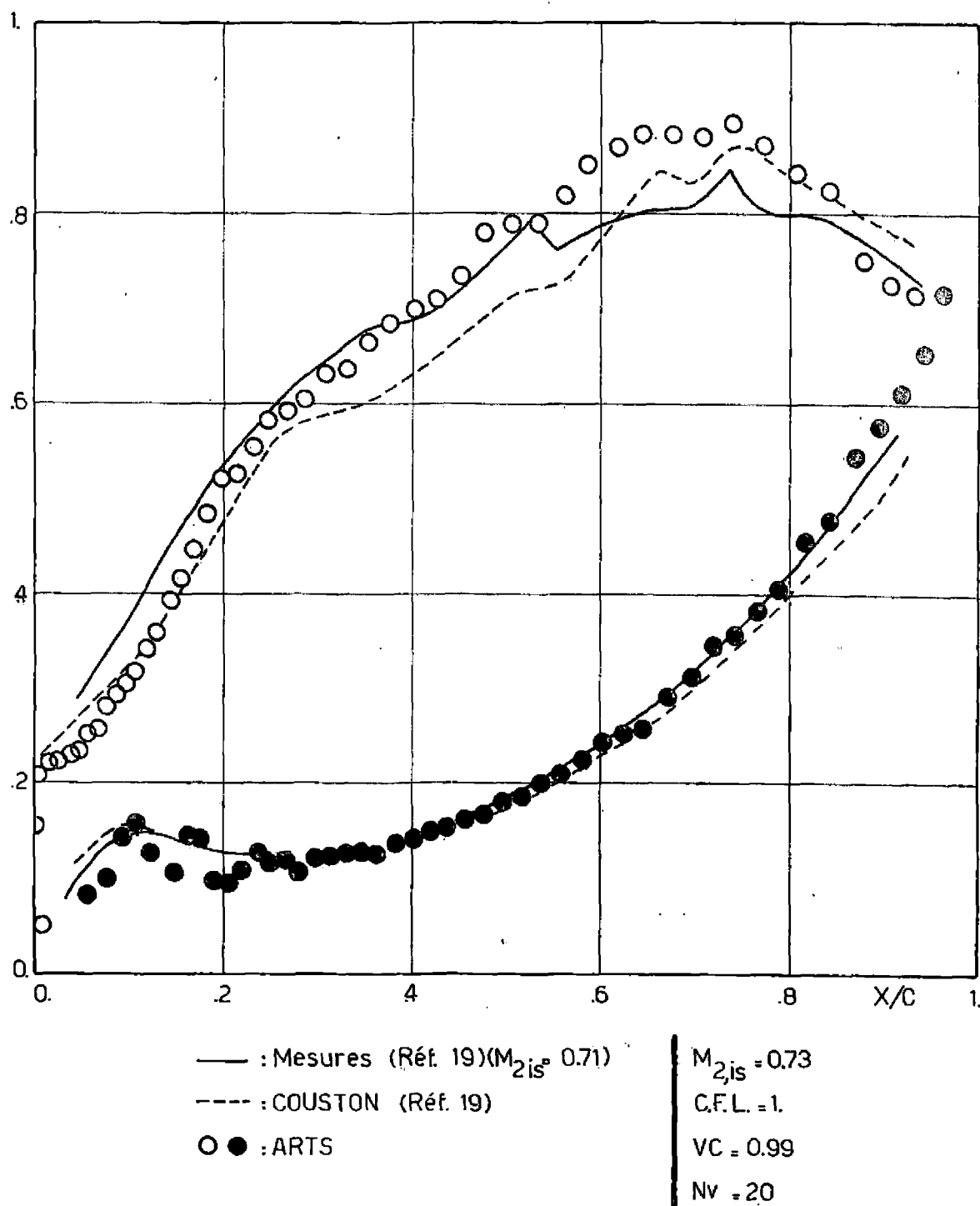


FIG. 77 — ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL :
COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU NOMBRE
DE MACH ISENTROPIQUE

(Aube 3 - $M_{2, is} = 0.73$)

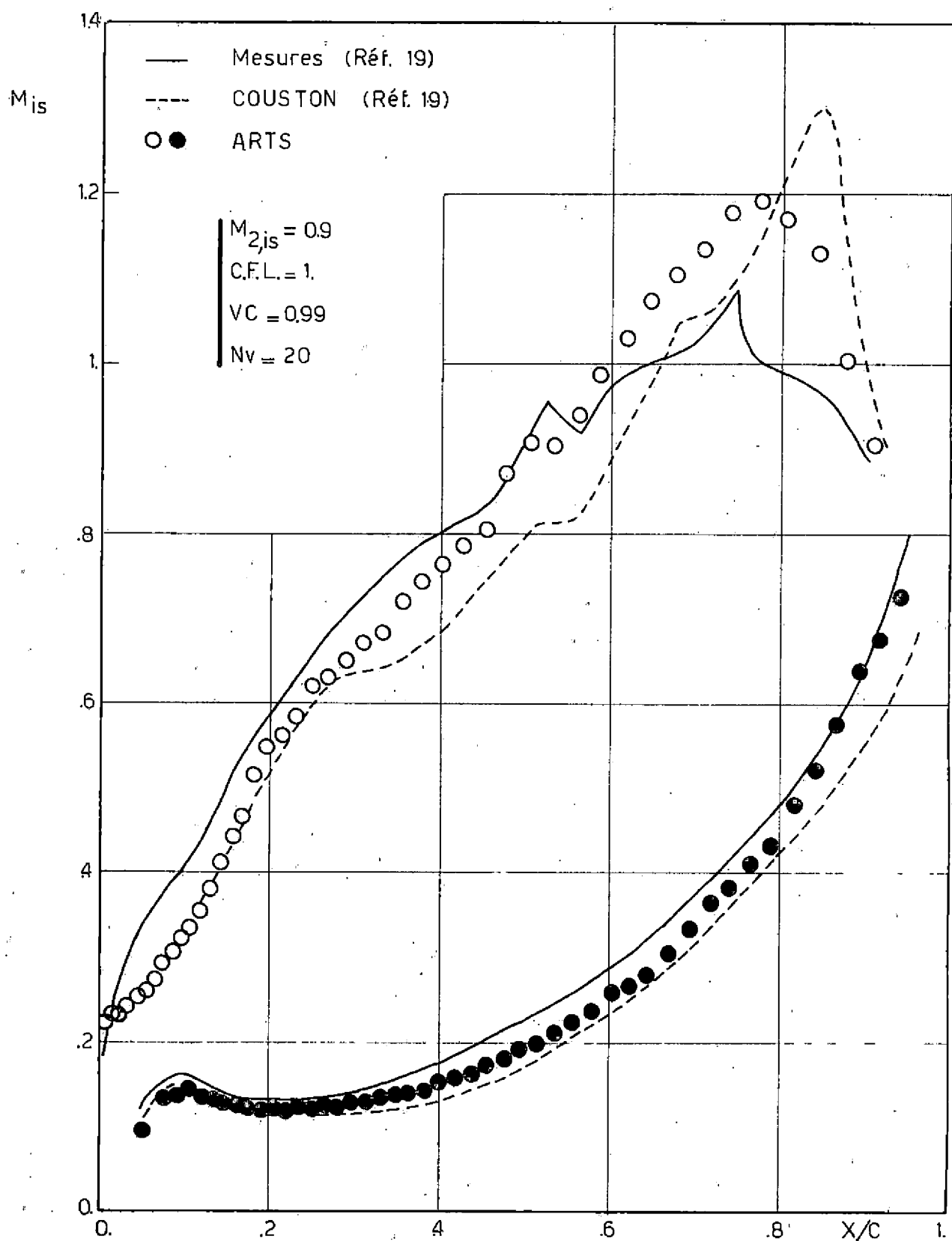
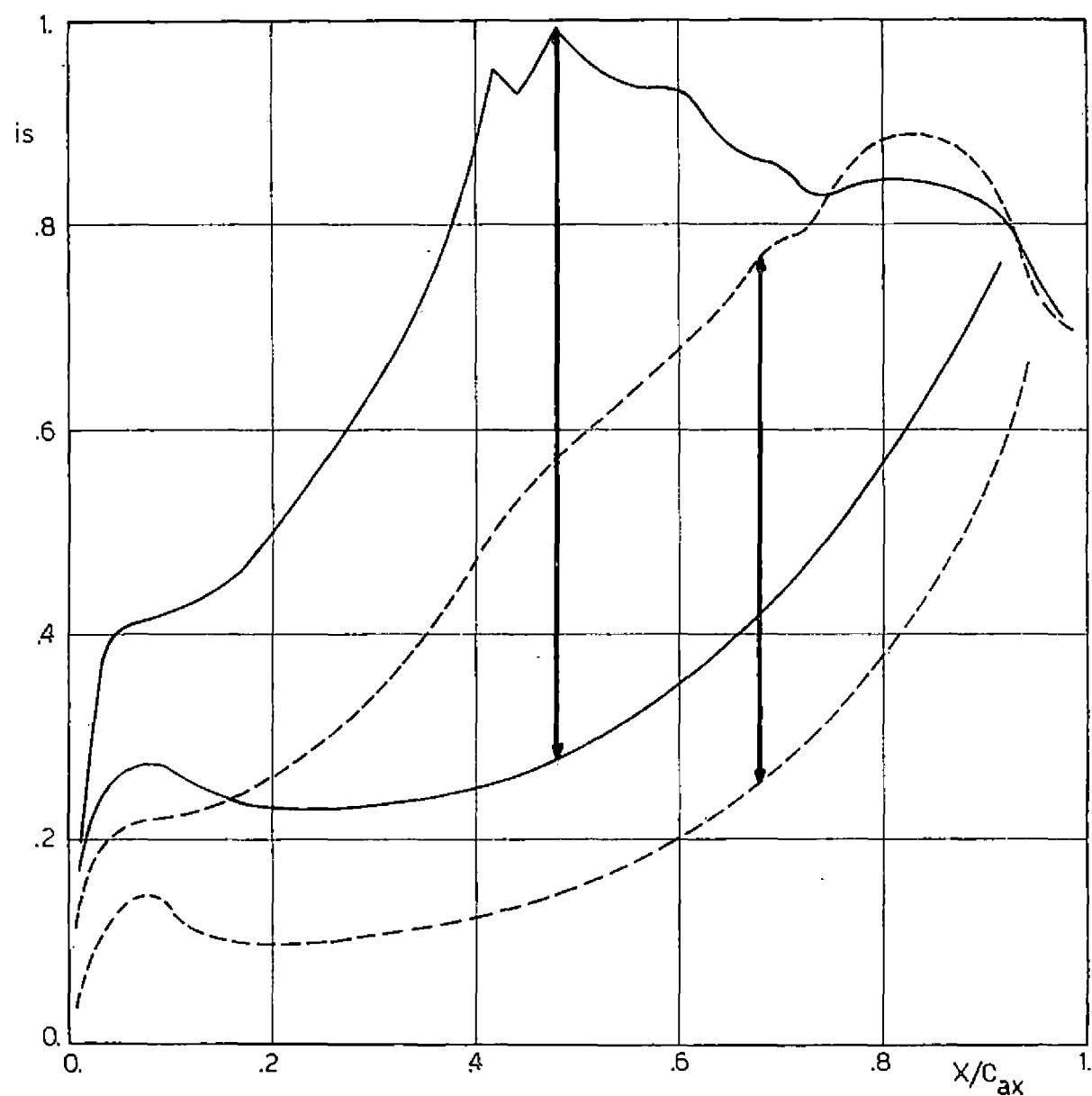


FIG. 78 — ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL :
COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU NOMBRE
DE MACH ISENTROPIQUE

(Aube 3 - $M_{2,is} = 0.9$)



VALEURS CALCULEES

- : Ecoulement bidimensionnel
 ---- : Ecoulement quasi-tridimensionnel

$M_{2, is} = 0.73$
 $C.F.L. = 1.$
 $VC = 0.995$
 $N_v = 20$

FIG 79a INFLUENCE DE LA PRESENCE DE PAROIS
 CONTOURNEES SUR LA DISTRIBUTION DU
 NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE

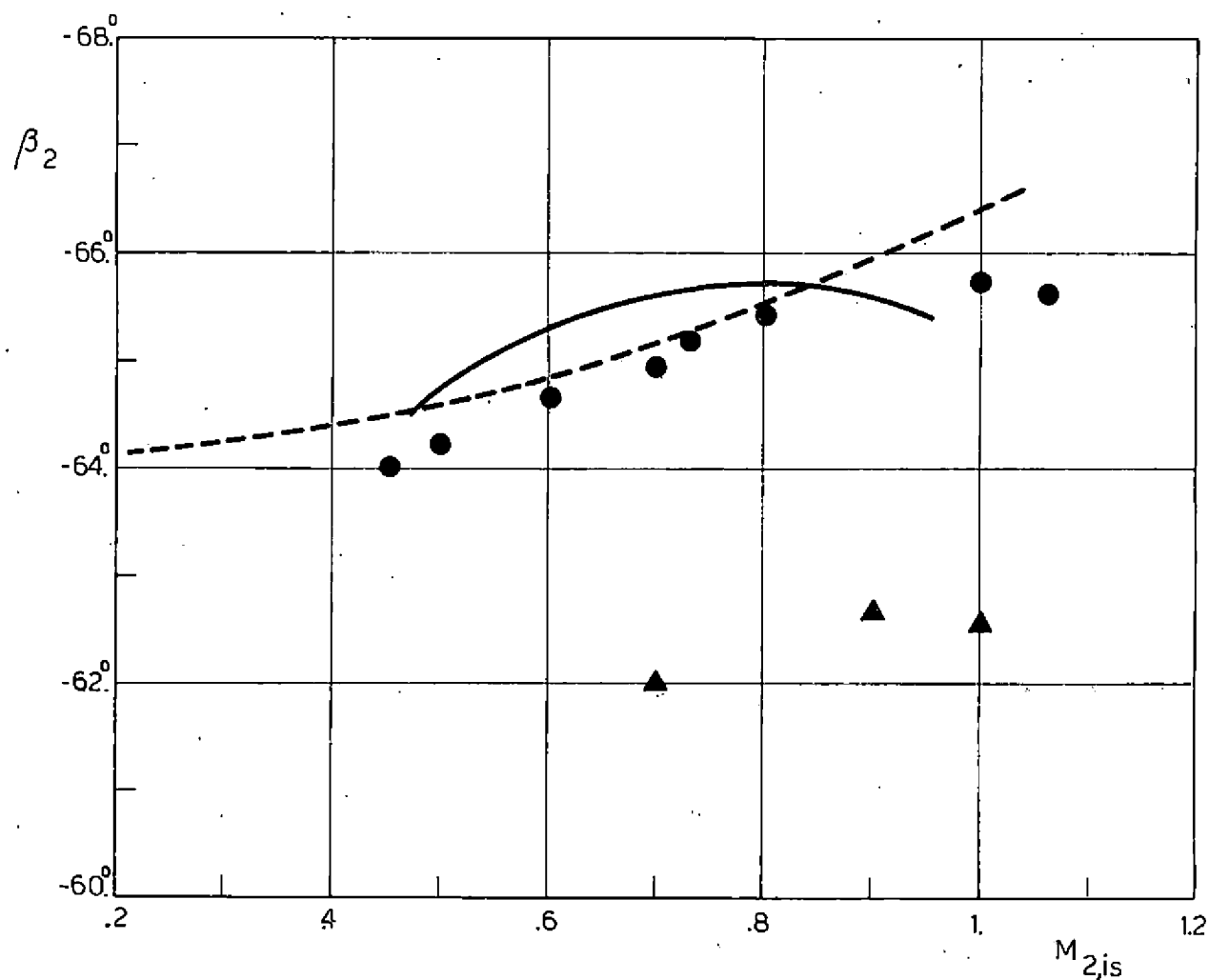


FIG.79b — INFLUENCE DE LA PRESENCE DE PAROIS
CONTOURNEES SUR L' ANGLE DE SORTIE

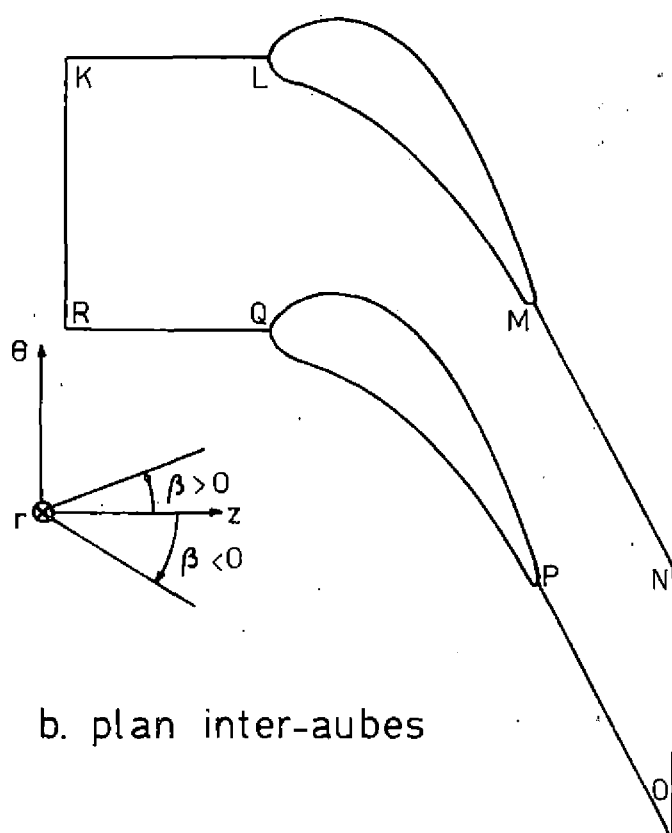
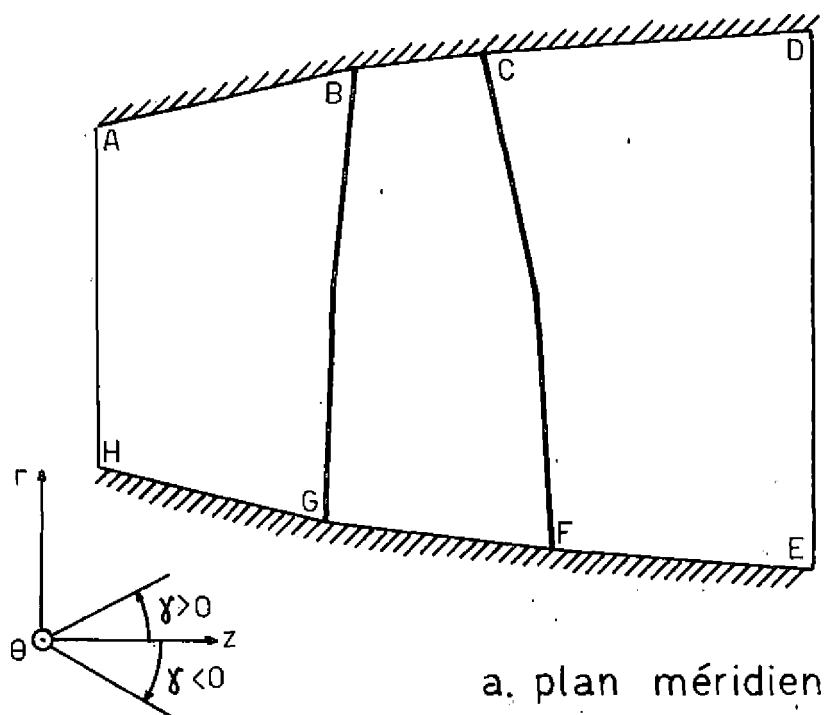
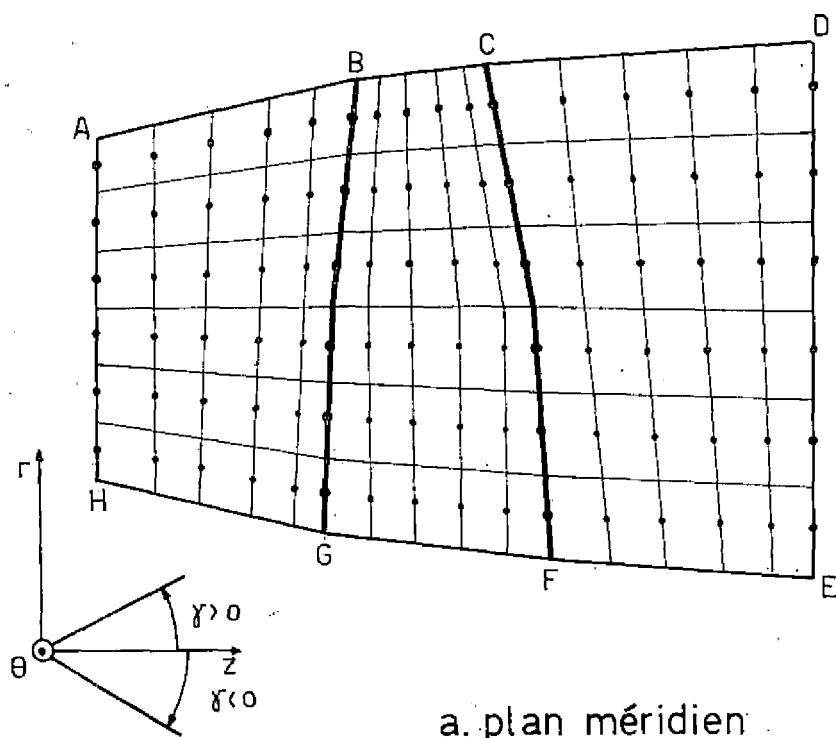
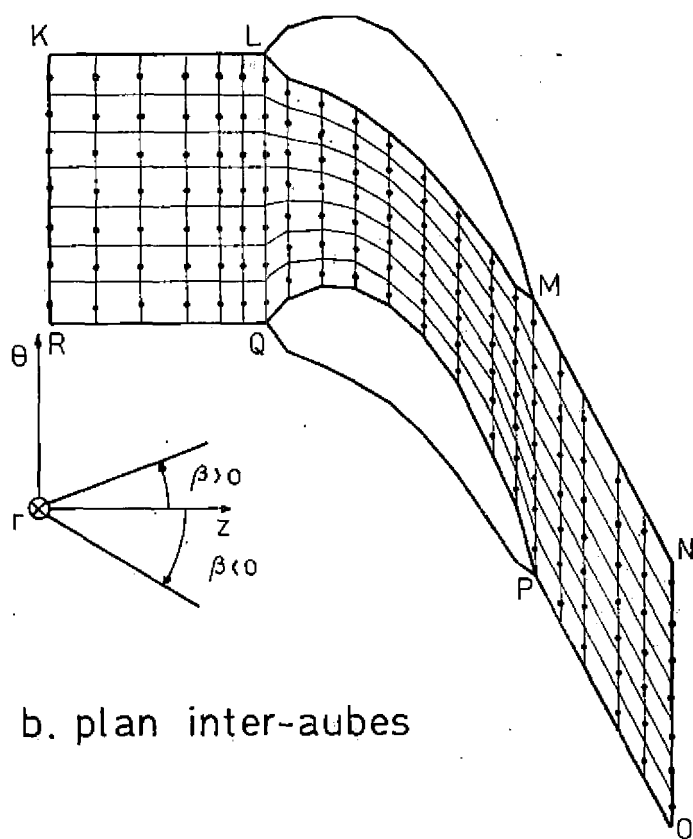


FIG.80 — DOMAINE PHYSIQUE DE L'ECOULEMENT



a. plan méridien



b. plan inter-aubes

FIG.81 — DOMAINE NUMERIQUE DE L'ECOULEMENT

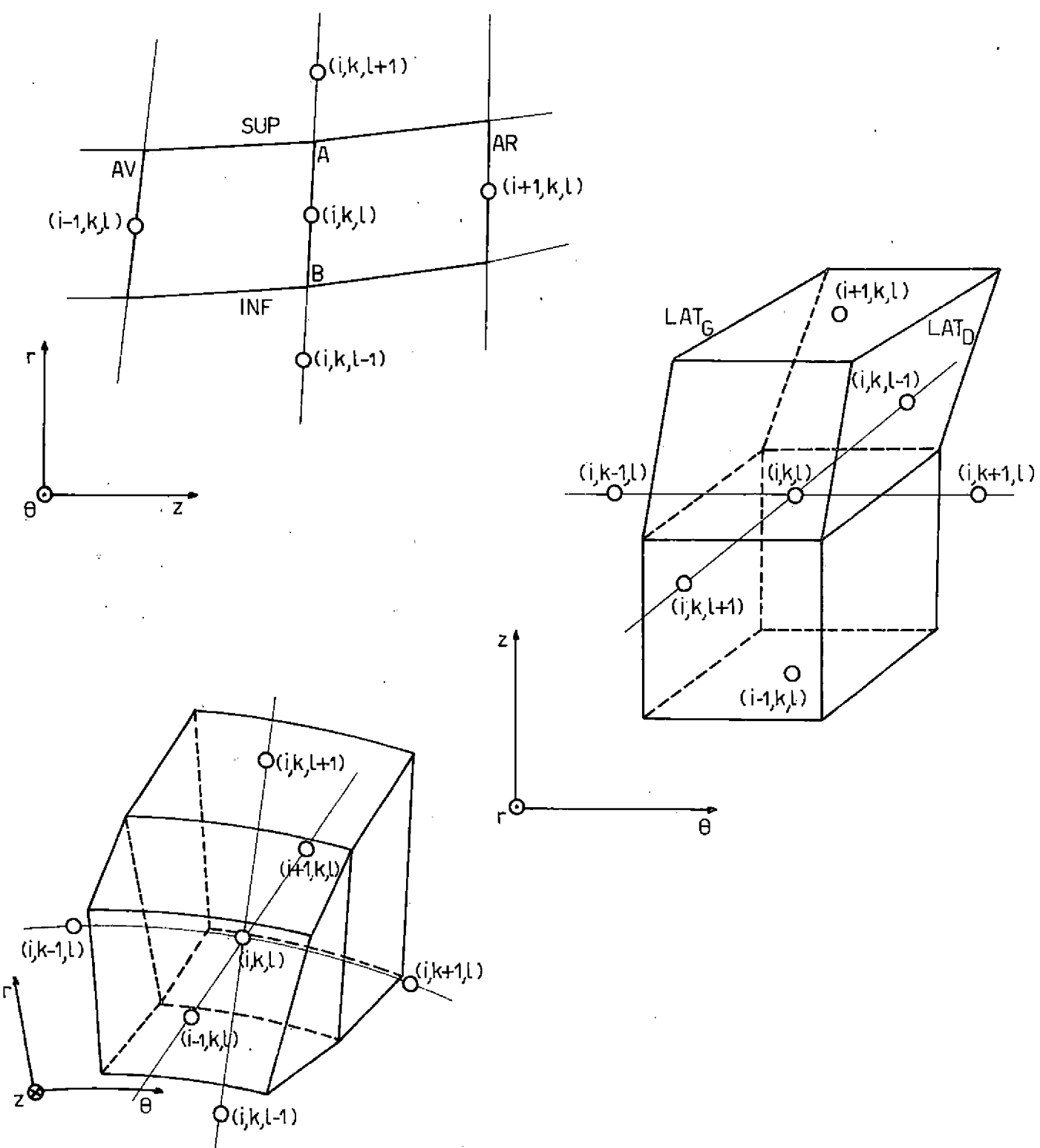


FIG.82 — DIFFERENTES PROJECTIONS DU VOLUME DE CONTROLE

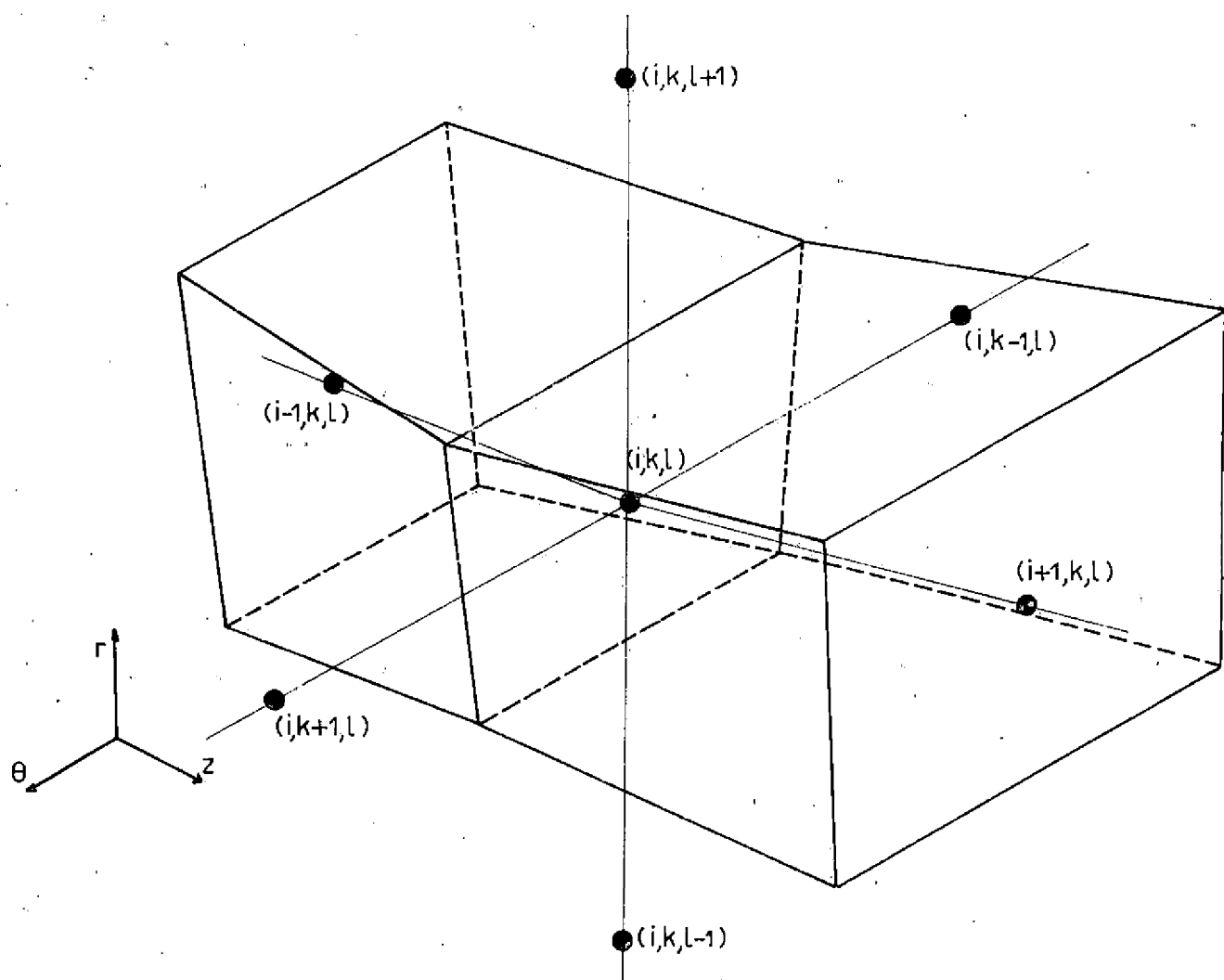


FIG. 83 — EXEMPLE DE VOLUME DE CONTROLE

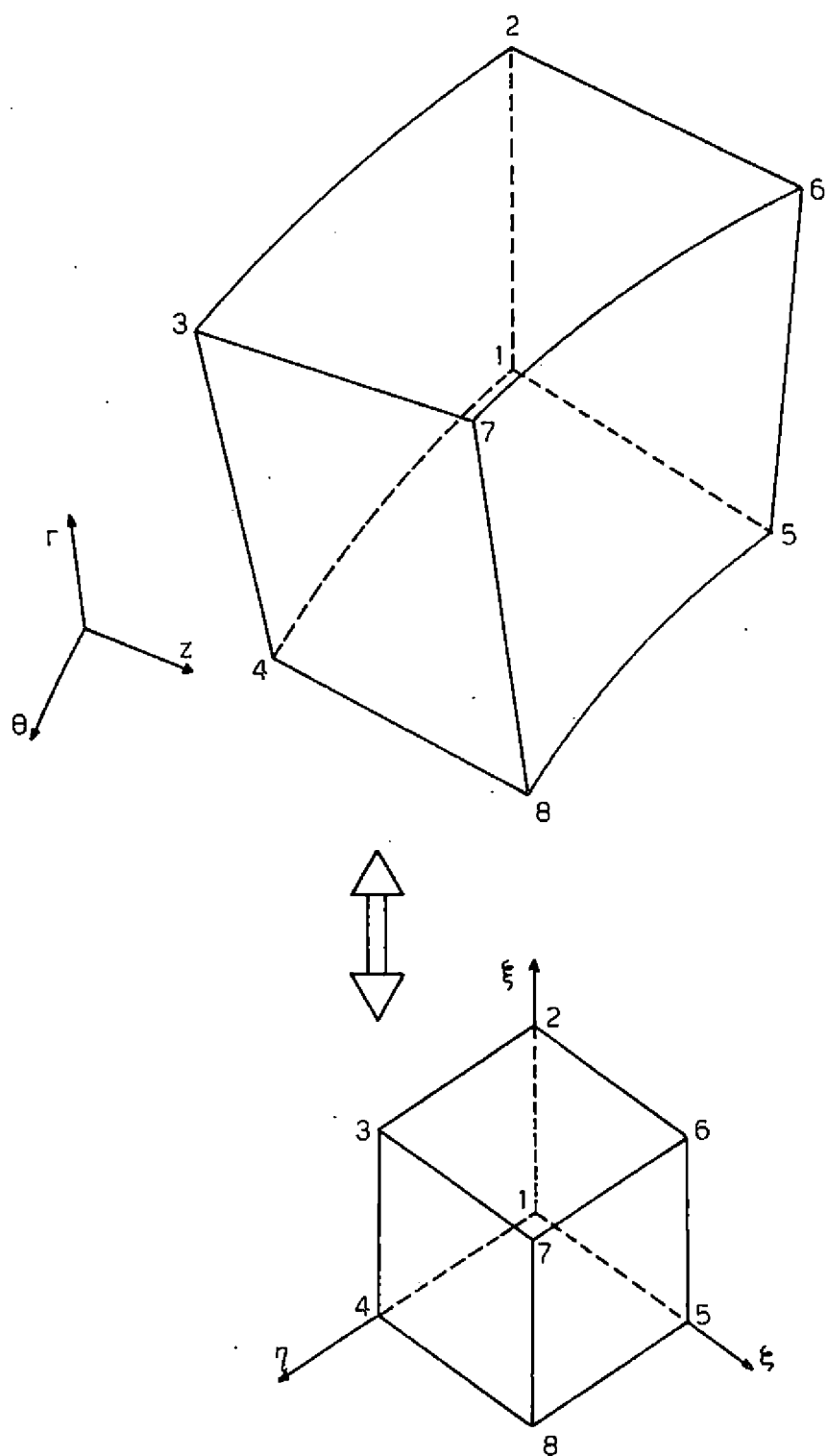


FIG. 84 — TRANSFORMATION DE COORDONNEES
PERMETTANT LE CALCUL DU VOLUME
DES ELEMENTS DE CONTROLE

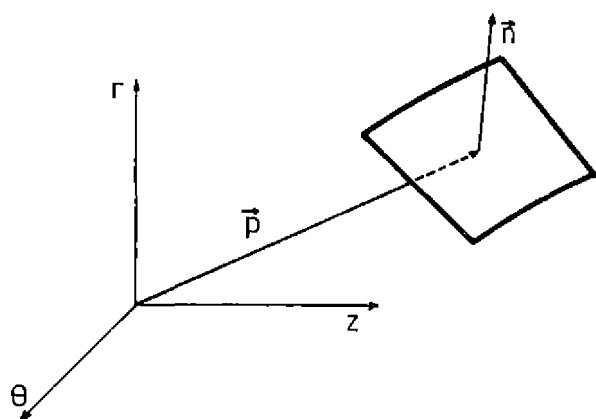


FIG. 85 — DEFINITION D'UNE FACE DU VOLUME DE CONTROLE

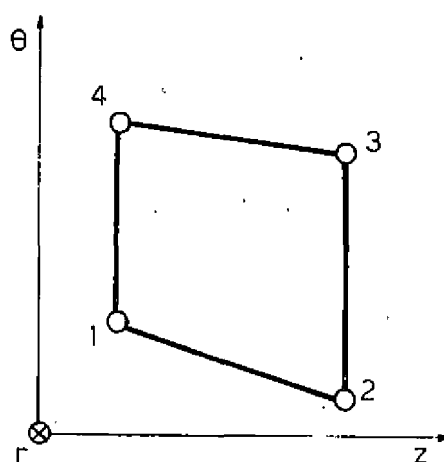
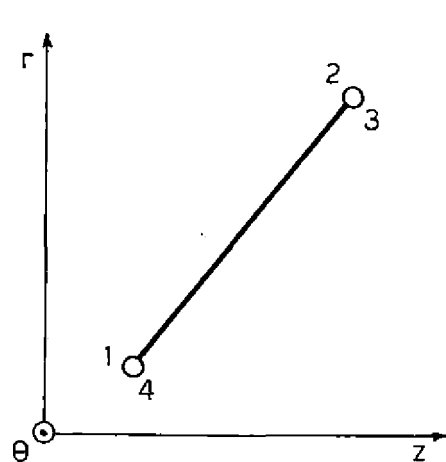


FIG. 86 — PROJECTIONS DE LA FACE AVANT DU VOLUME DE CONTROLE

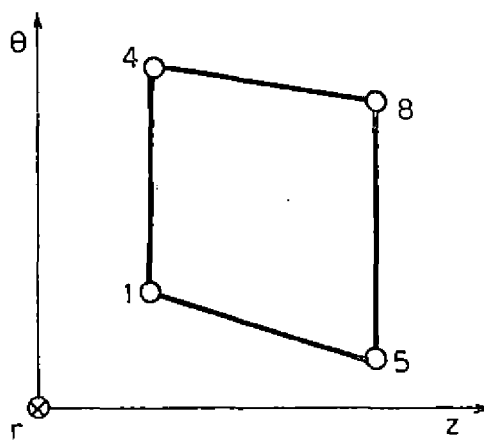
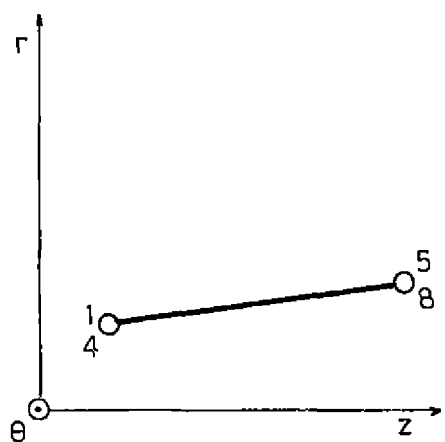


FIG. 87 — PROJECTIONS DE LA DEMI-FACE INFÉRIEURE
DU VOLUME DE CONTRÔLE

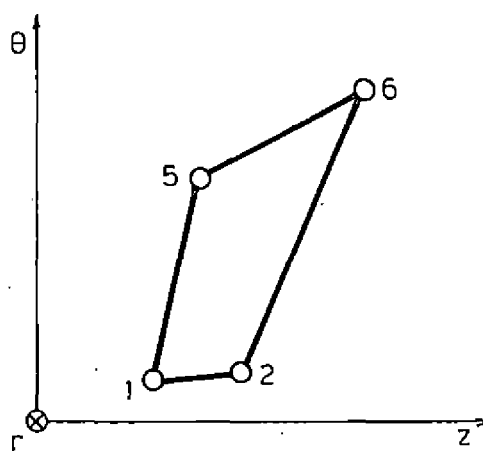
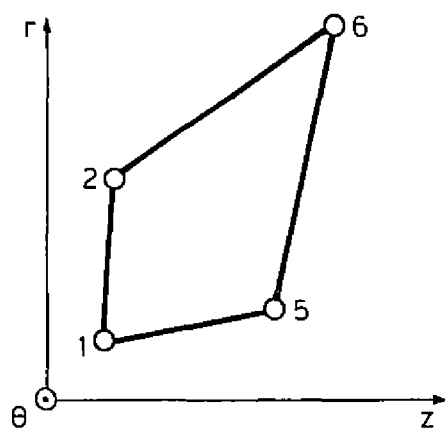


FIG. 88 — PROJECTIONS D'UNE DEMI-FACE LATÉRALE
DU VOLUME DE CONTRÔLE

LOW SPEED TURBINE FACILITY T 1

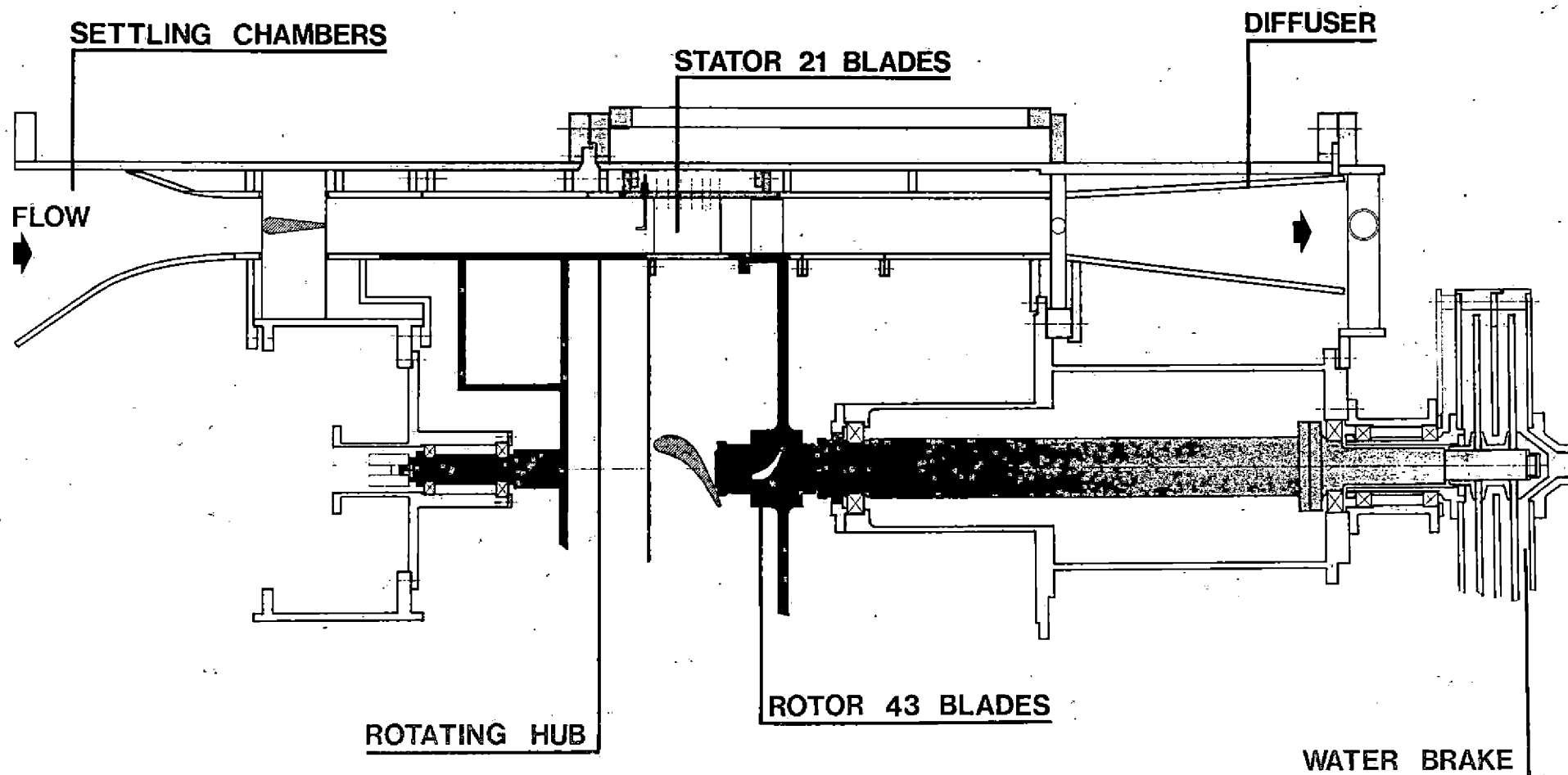
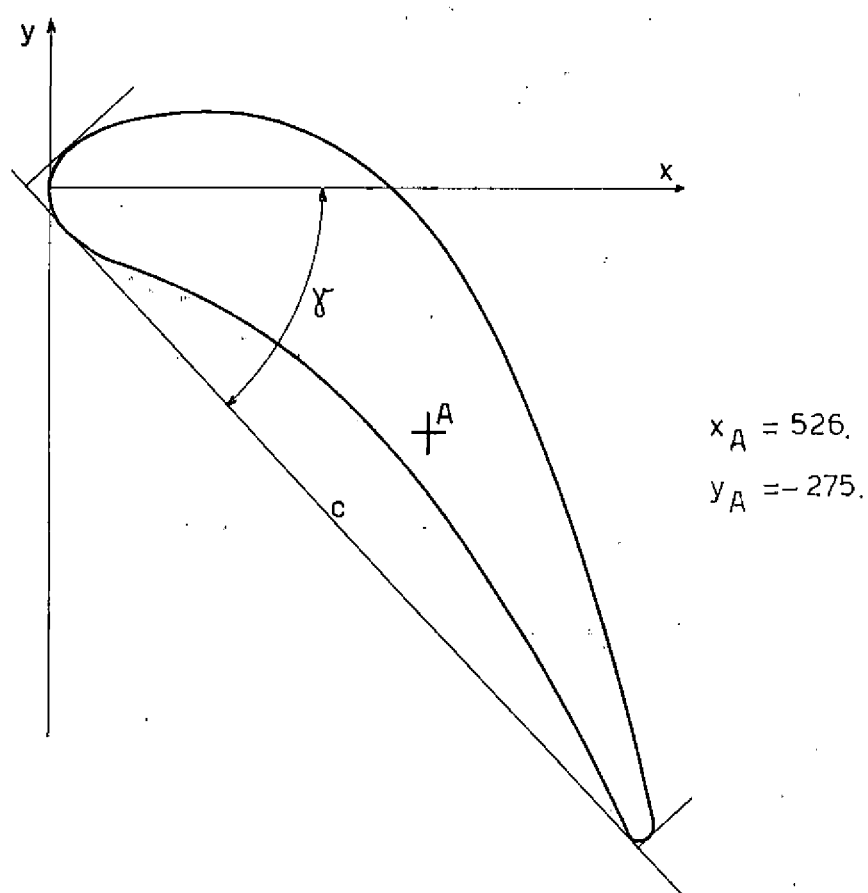


FIG.90 — SOUFFLERIE BASSE VITESSE T1



Nombre d'aubes : 21

$$\gamma = 42.5^\circ$$

$$\beta_1 = 0^\circ$$

$$c_{ax} = 0.087 \text{ m}$$

FIG. 91 — GRILLE D'AUBES ANNULAIRE T1 :
GEOMETRIE DES AUBAGES STATORIQUES

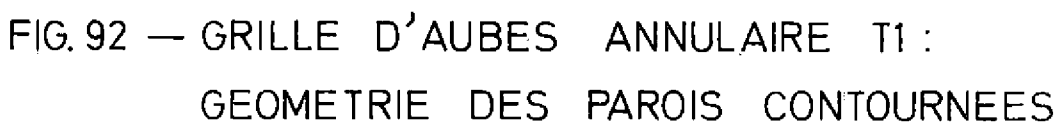


FIG. 92 — GRILLE D'AUBES ANNULAIRE T1 :
GEOMETRIE DES PAROIS CONTOURNEES

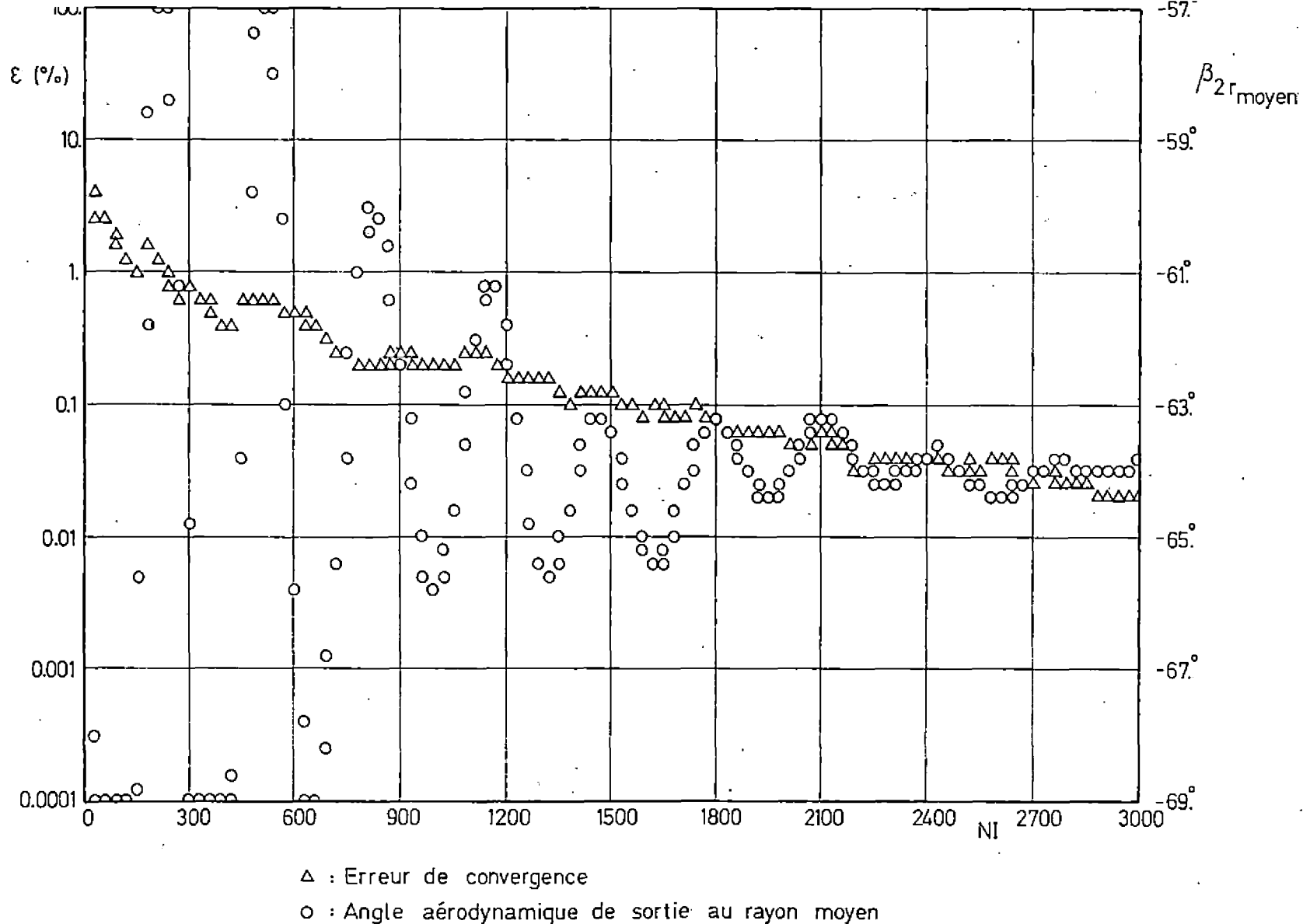


FIG.93a — EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE ET DE L'ANGLE DE SORTIE AU RAYON MOYEN

(Paroi extérieure contournée — Réseau grossier)

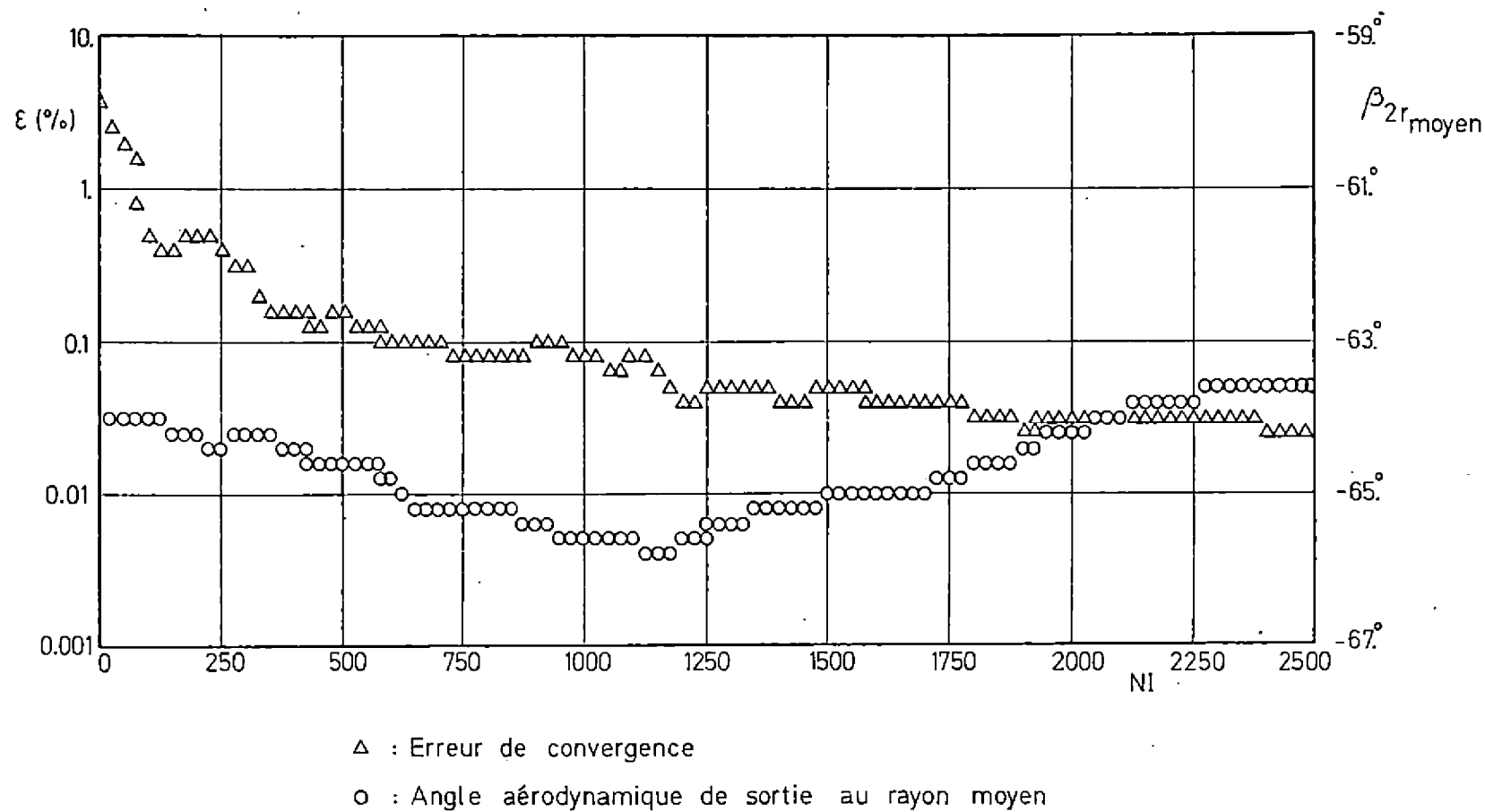


FIG.93b — EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE ET DE L'ANGLE DE SORTIE AU RAYON MOYEN

(Paroi extérieure contournée — Réseau fin)

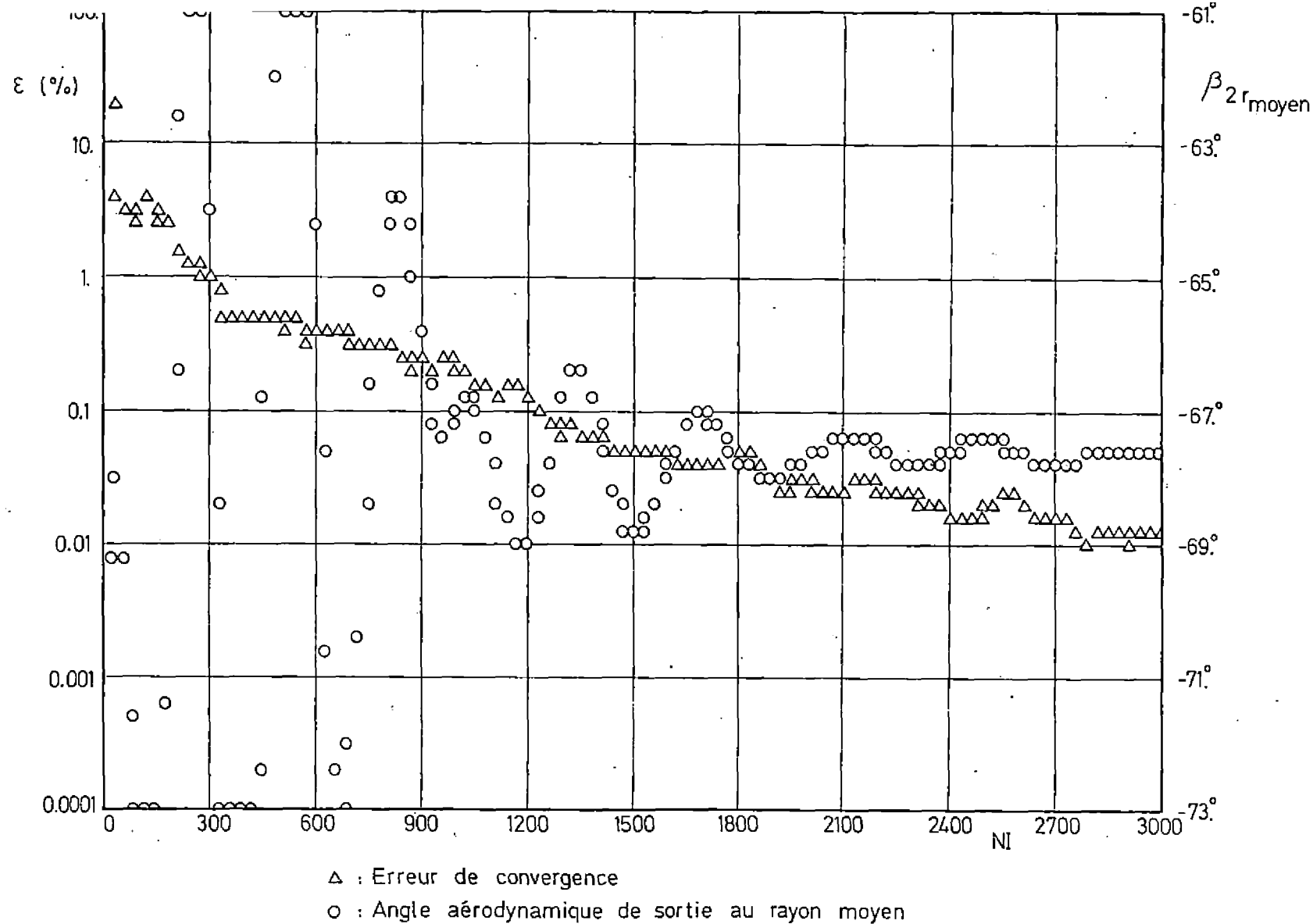


FIG.94 - EVOLUTION DE L'ERREUR DE CONVERGENCE ET DE L'ANGLE DE SORTIE AU RAYON MOYEN

(Paroi extérieure cylindrique - Réseau grossier)

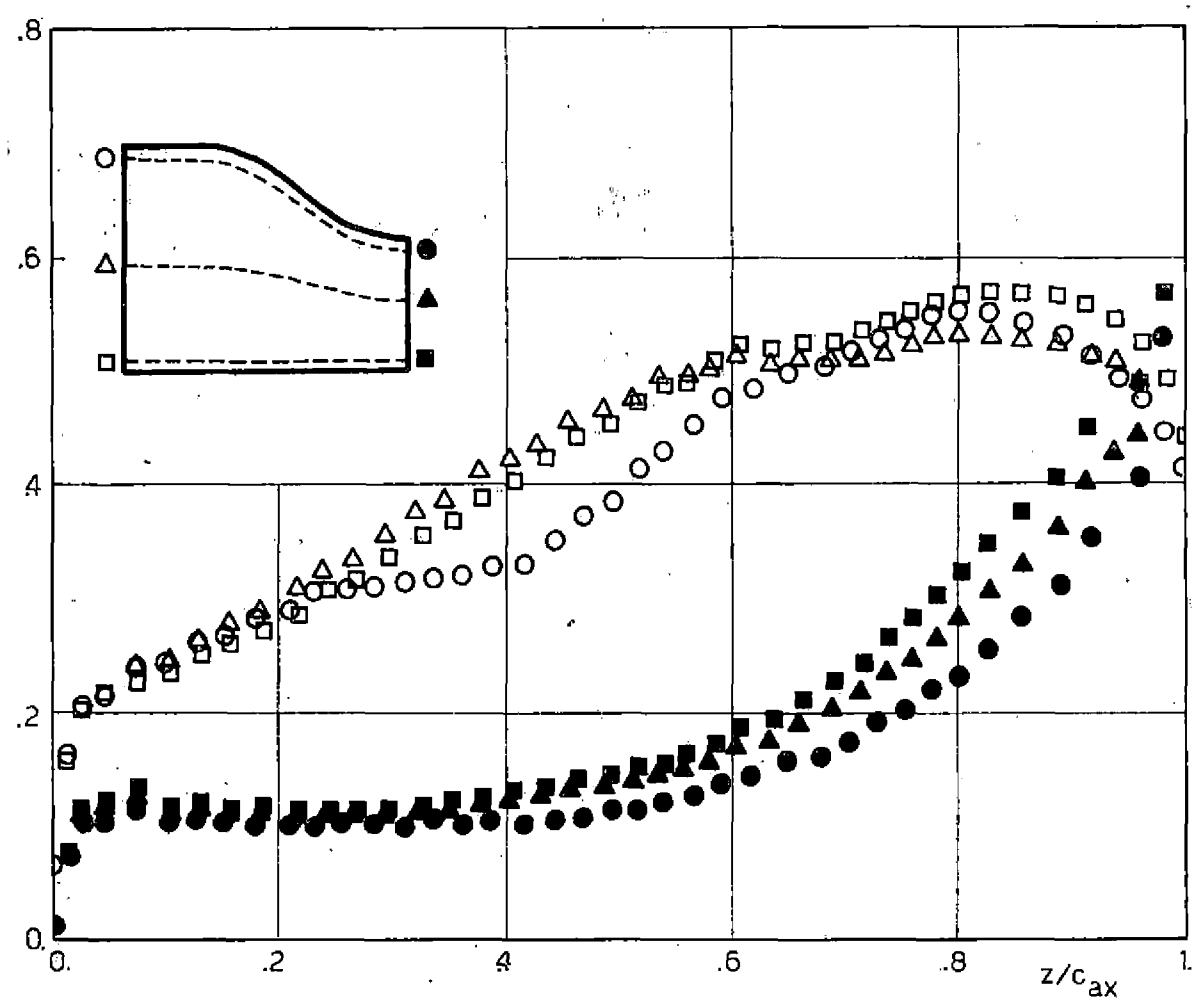
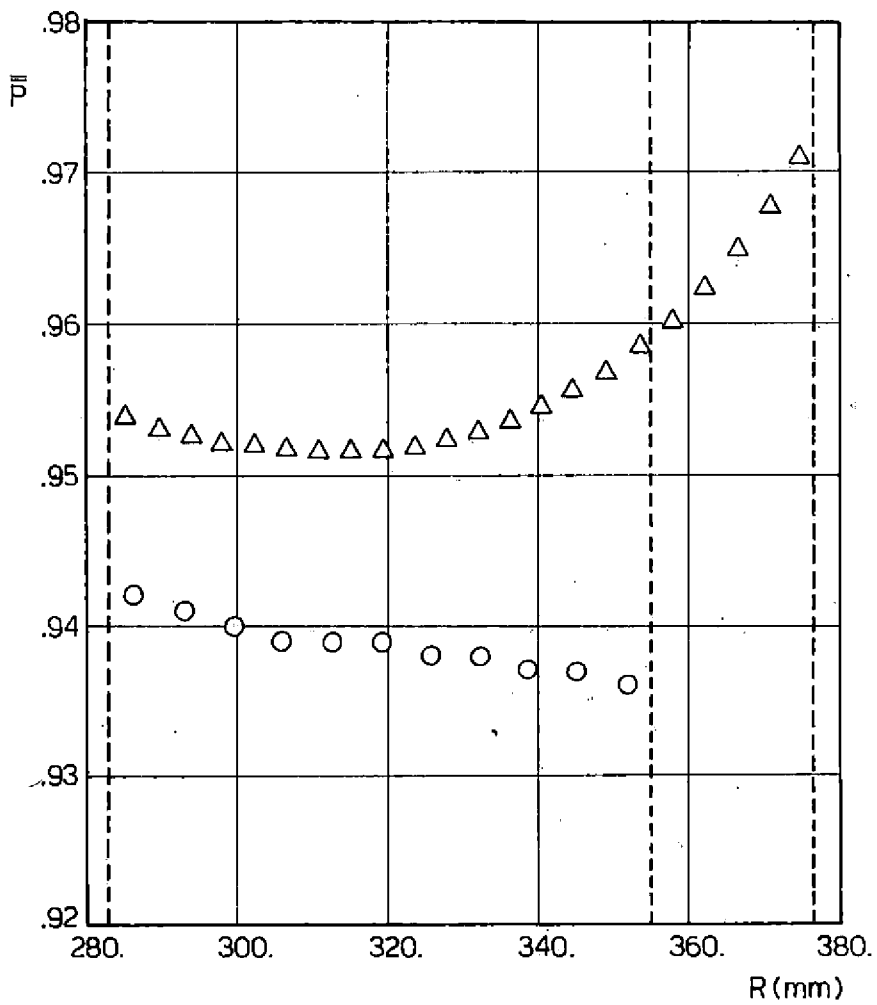


FIG. 95 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU
NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
(paroi extérieure contournée)



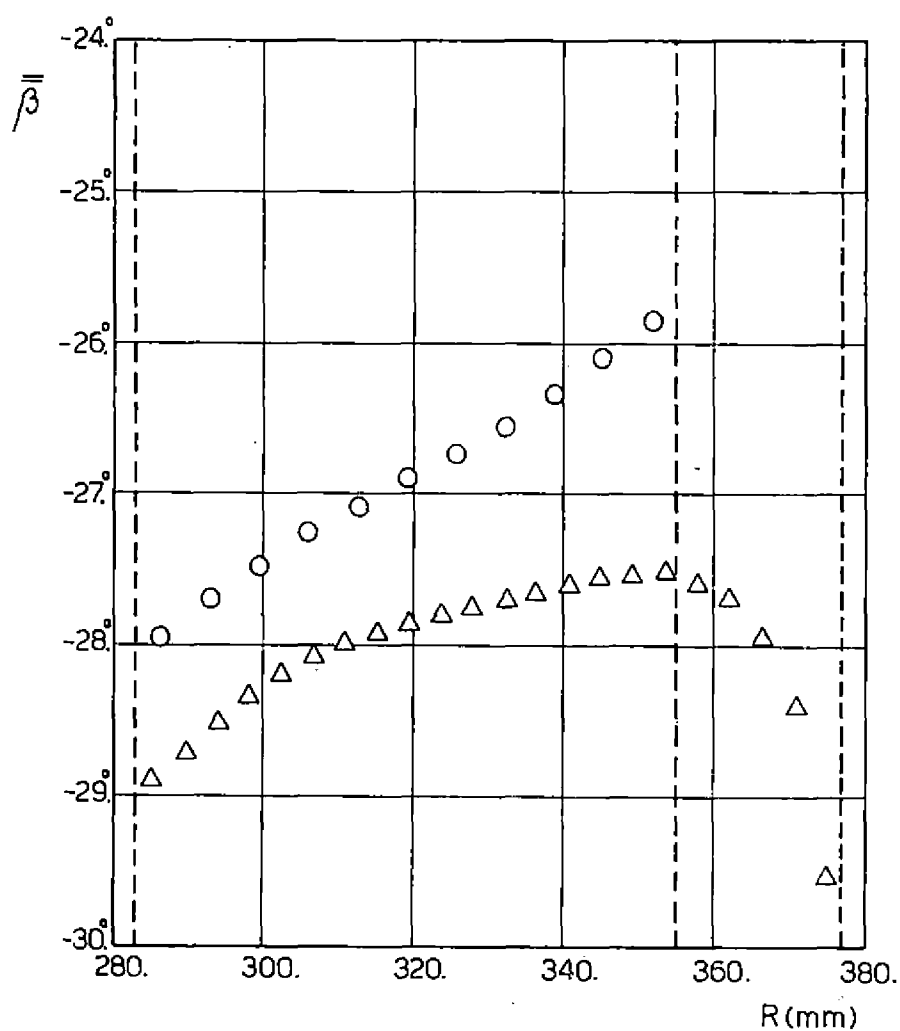
Paroi extérieure :

O : cylindrique

Δ : contournée

FIG.96 — DISTRIBUTION RADIALE DE LA PRESSION
STATIQUE

($z/c_{ax}=0.407$)



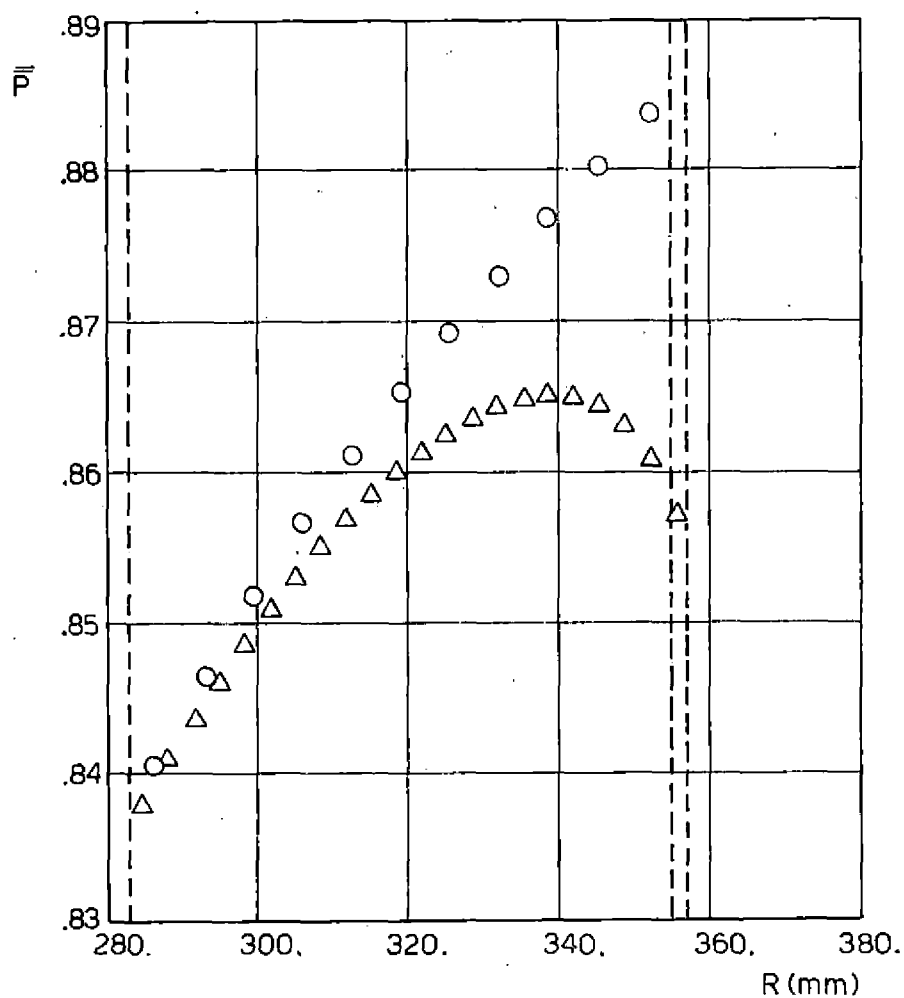
Paroi extérieure :

○ : cylindrique

△ : contournée

FIG. 97 — DISTRIBUTION RADIALE DE LA DEFLEXION
ANGULAIRE DANS LE PLAN (θ, z)

($z/c_{ax} = 0.407$)



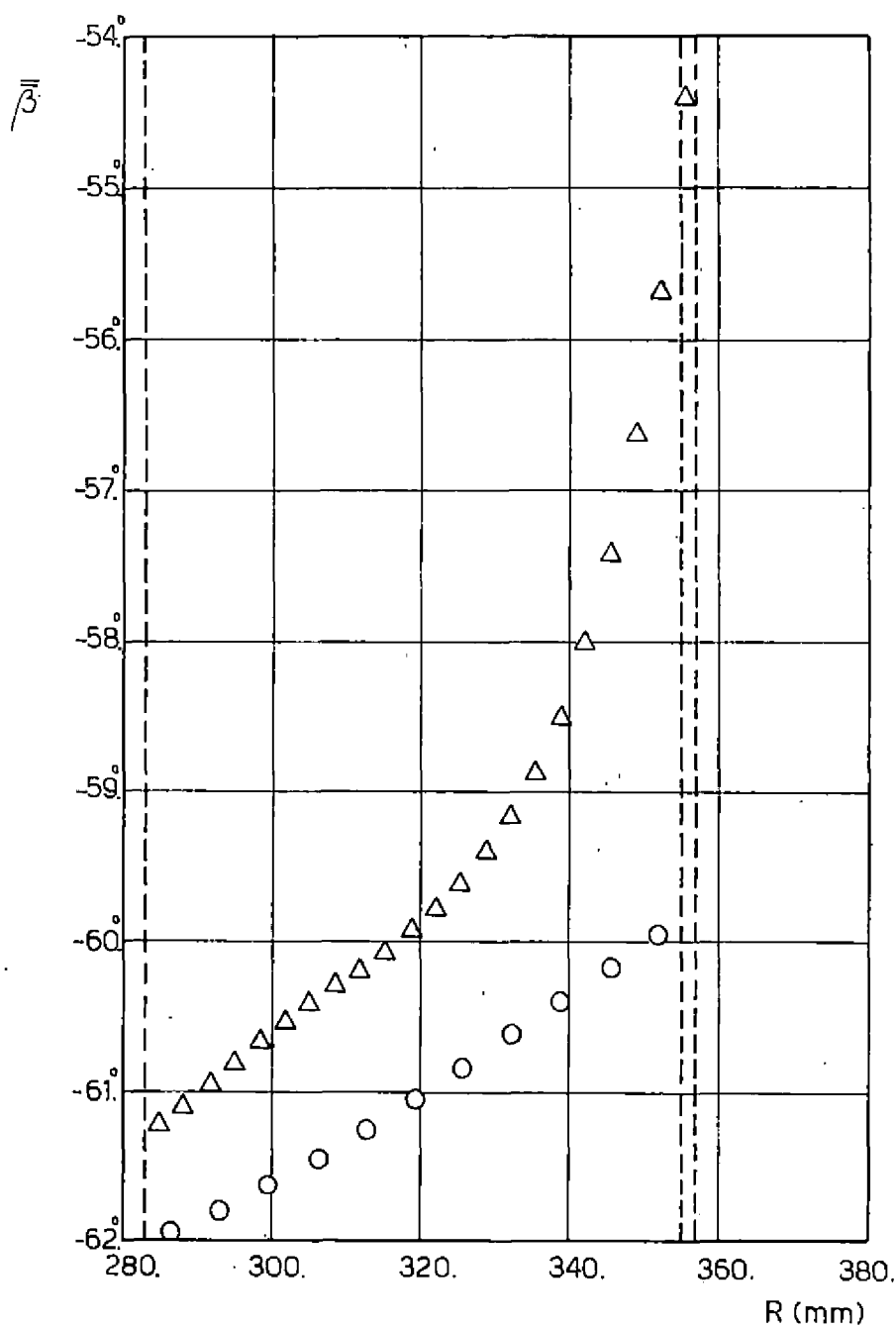
Paroi extérieure :

○ : cylindrique

△ : contournée

FIG. 98 — DISTRIBUTION RADIALE DE LA PRESSION
STATIQUE

($z/c_{ax} = 0.912$)



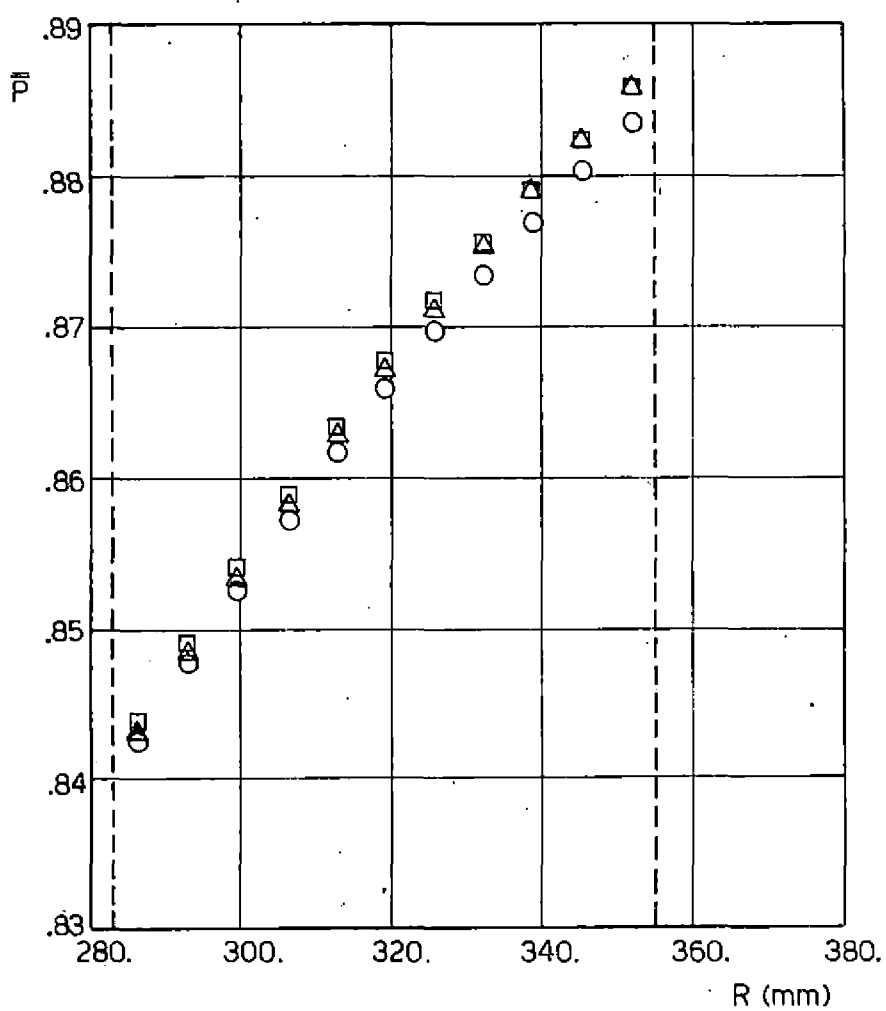
Paroi extérieure :

○ : cylindrique

△ : contournée

FIG.99 — DISTRIBUTION RADIALE DE LA DEFLEXION
ANGULAIRE DANS LE PLAN (θ, z)

($z/c_{ax} = 0.912$)



$\frac{z}{c_{ax}}$

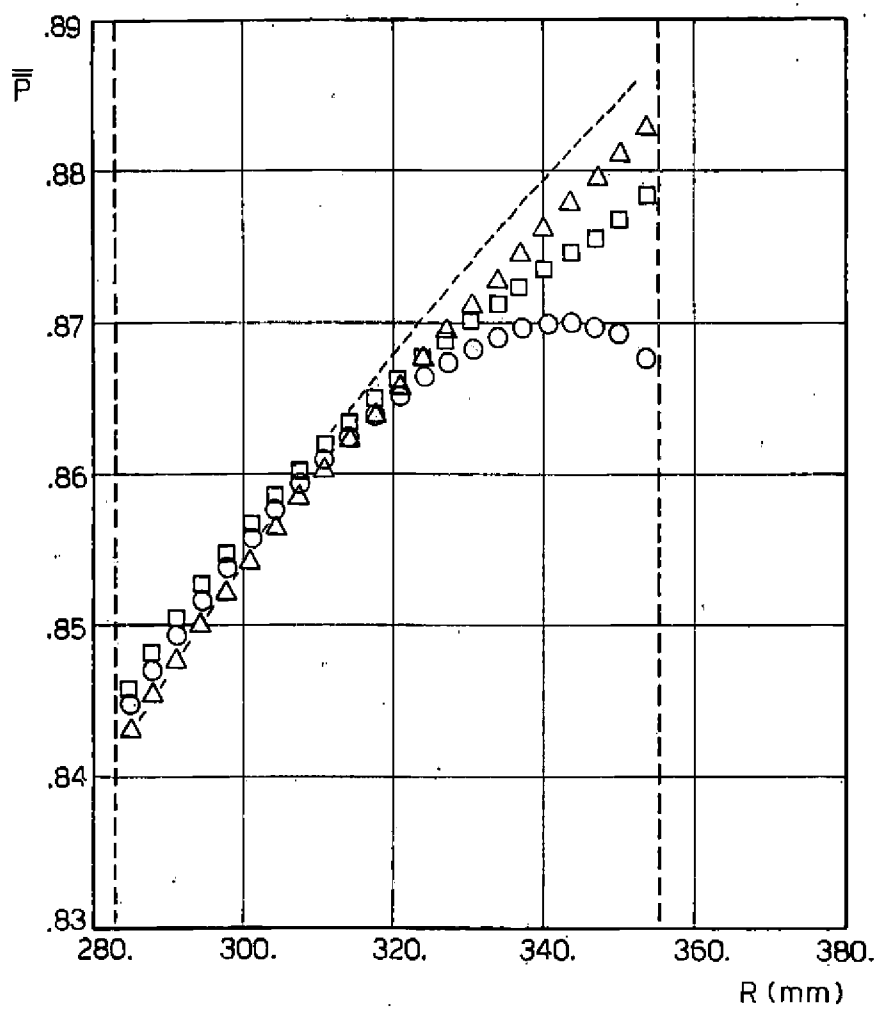
○ : 1.043

□ : 1.174

△ : 1.702

FIG.100 – COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS RADIALES
DE LA PRESSION STATIQUE

(paroi extérieure cylindrique)

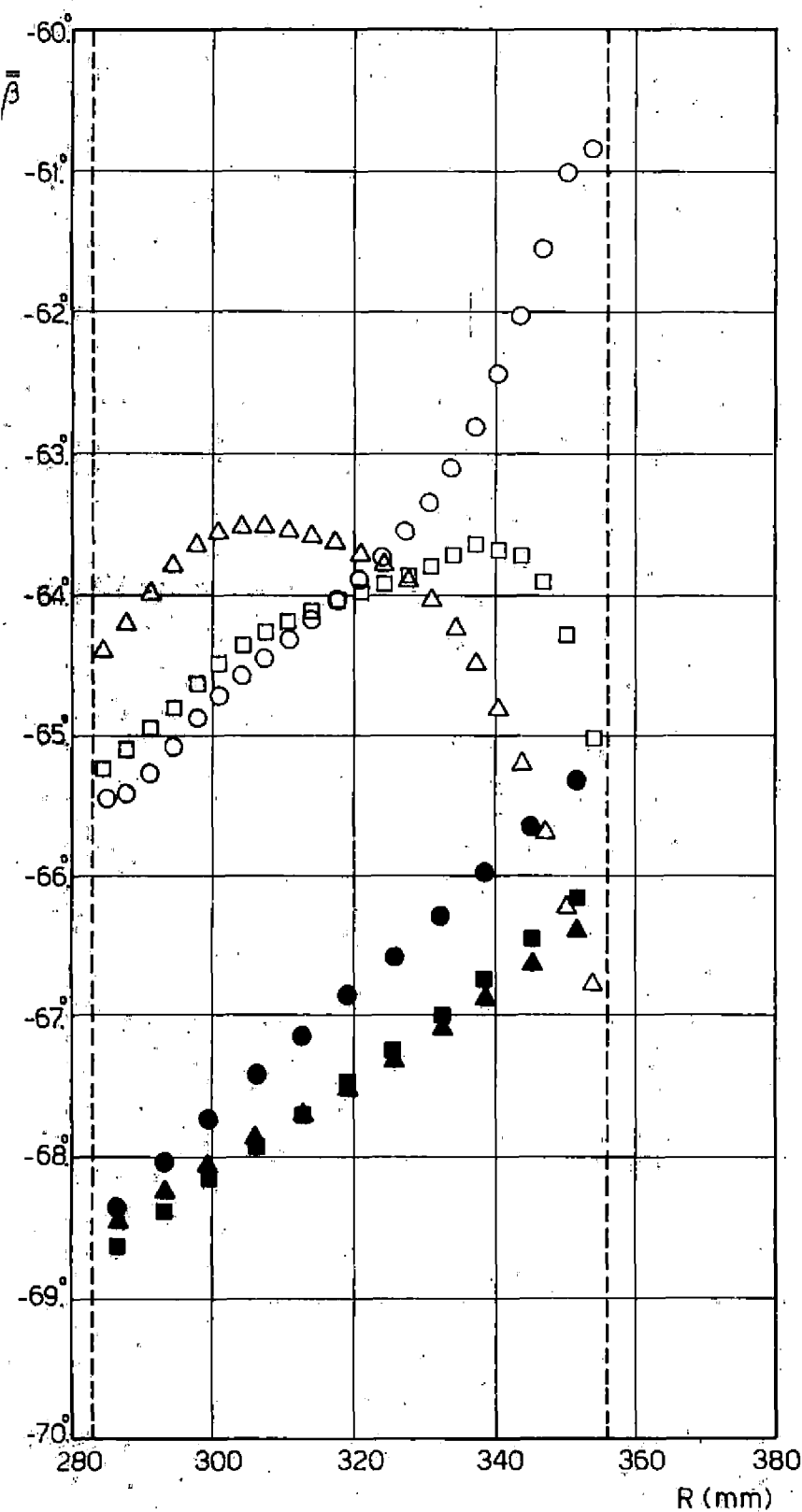


Paroi extérieure contournée

$\frac{z}{c_{ax}}$
 $\circ$: 1,043
 $\square$: 1,174
 $\triangle$: 1,702

--- : Paroi extérieure cylindrique

FIG. 101 – COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS RADIALES
 DE LA PRESSION STATIQUE
 (paroi extérieure contournée).



z/c_{ax}	Paroi extérieure	
	cylindrique	contournée
1.043	●	○
1.174	■	□
1.702	▲	△

FIG.102 – COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS RADIALES
DE LA DEFLEXION ANGULAIRE DANS LE
PLAN (θ, z)

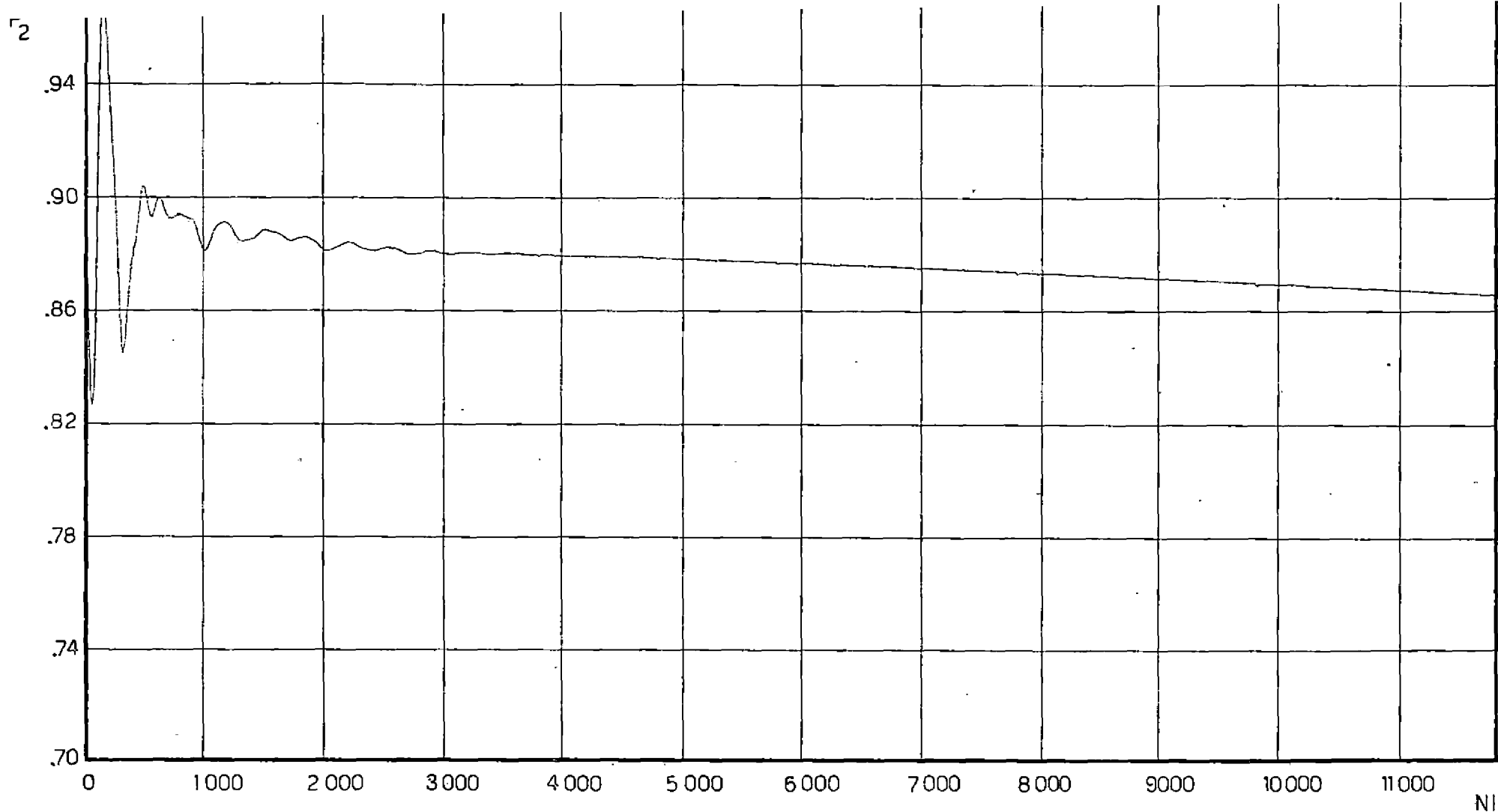


FIG. 103 – EVOLUTION DE LA PRESSION STATIQUE INTERMEDIAIRE AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

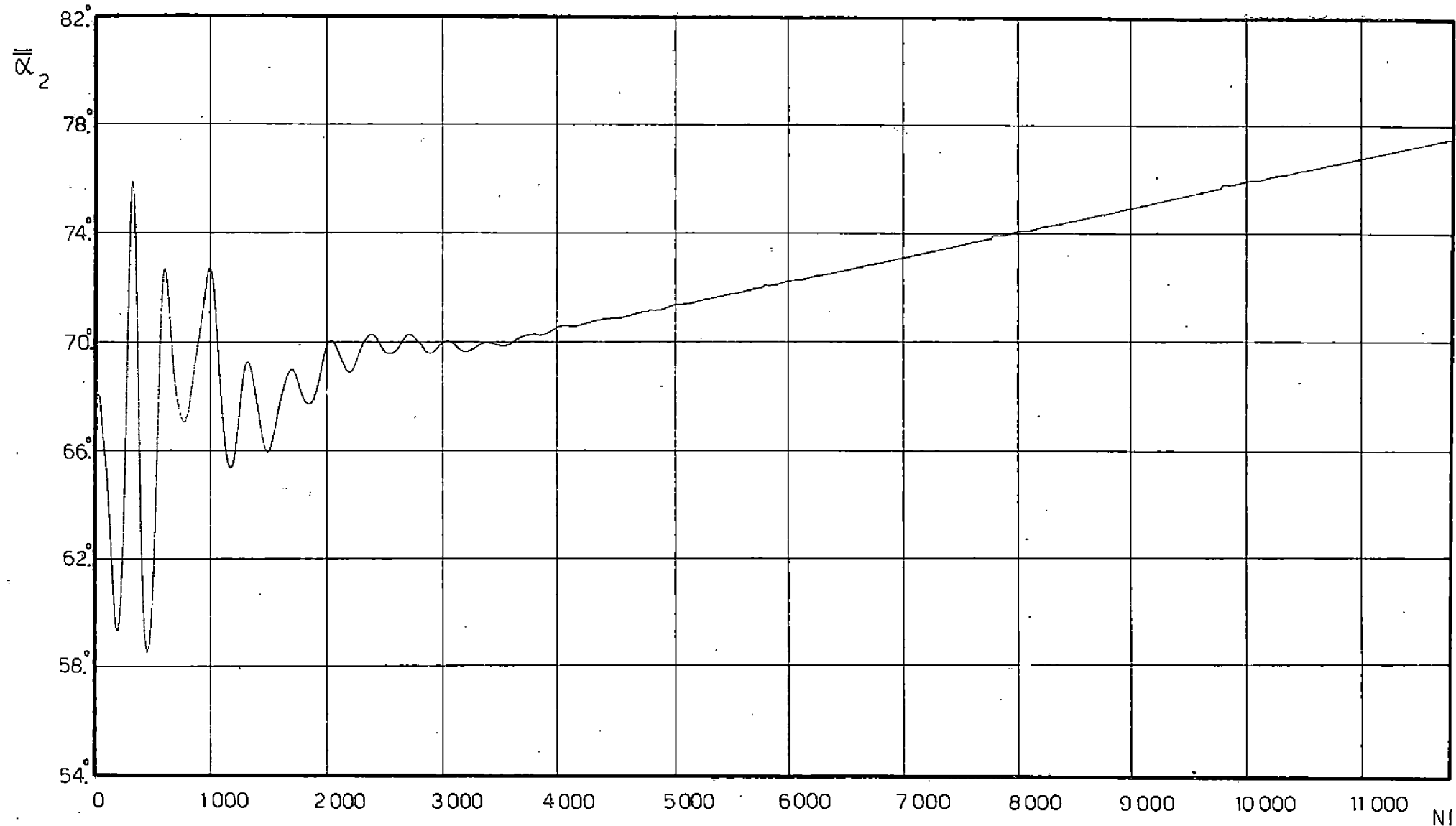


FIG.104 — EVOLUTION DE L' ANGLE ABSOLU DE SORTIE DU STATOR AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

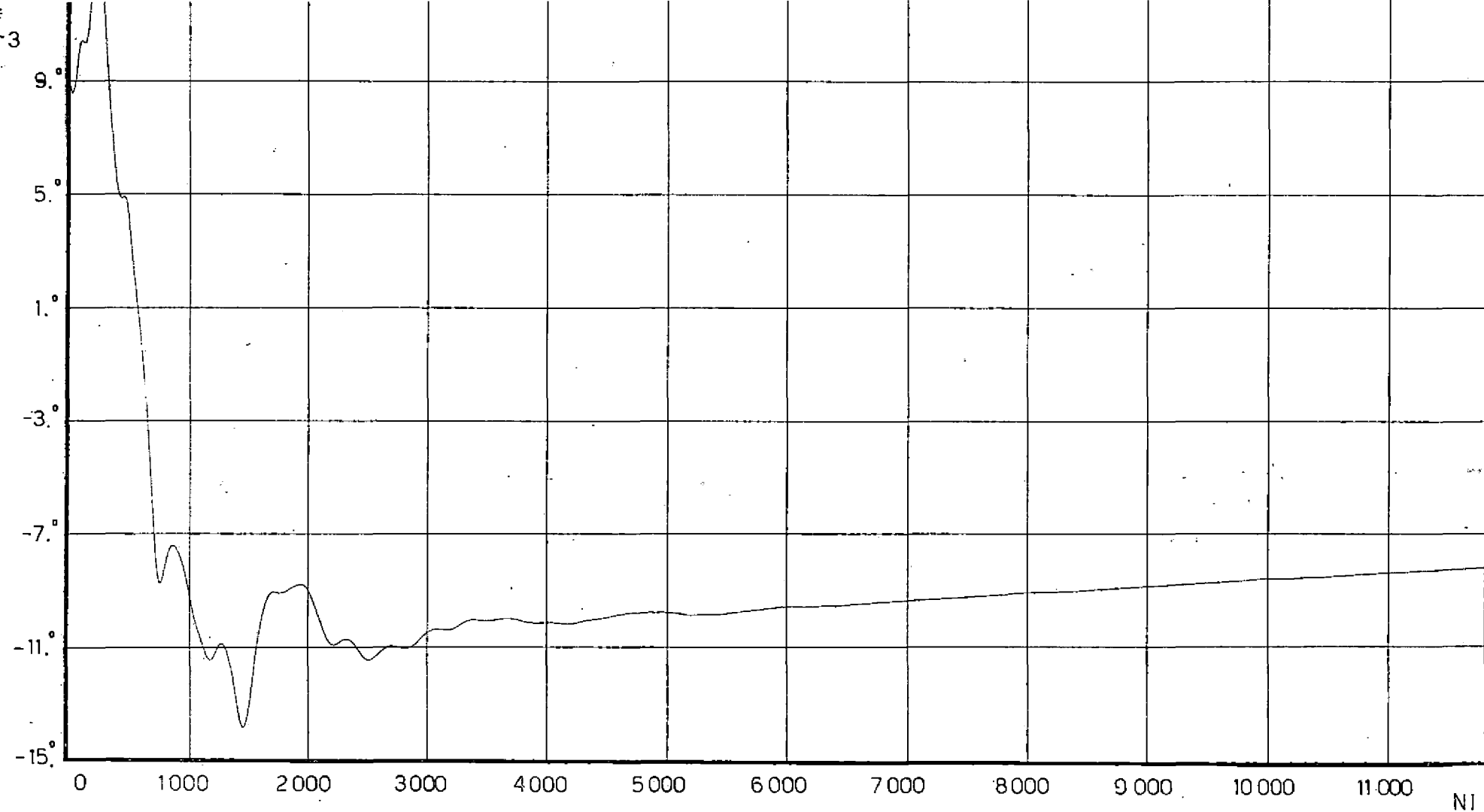


FIG.105 — EVOLUTION DE L' ANGLE ABSOLU DE SORTIE DU ROTOR AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

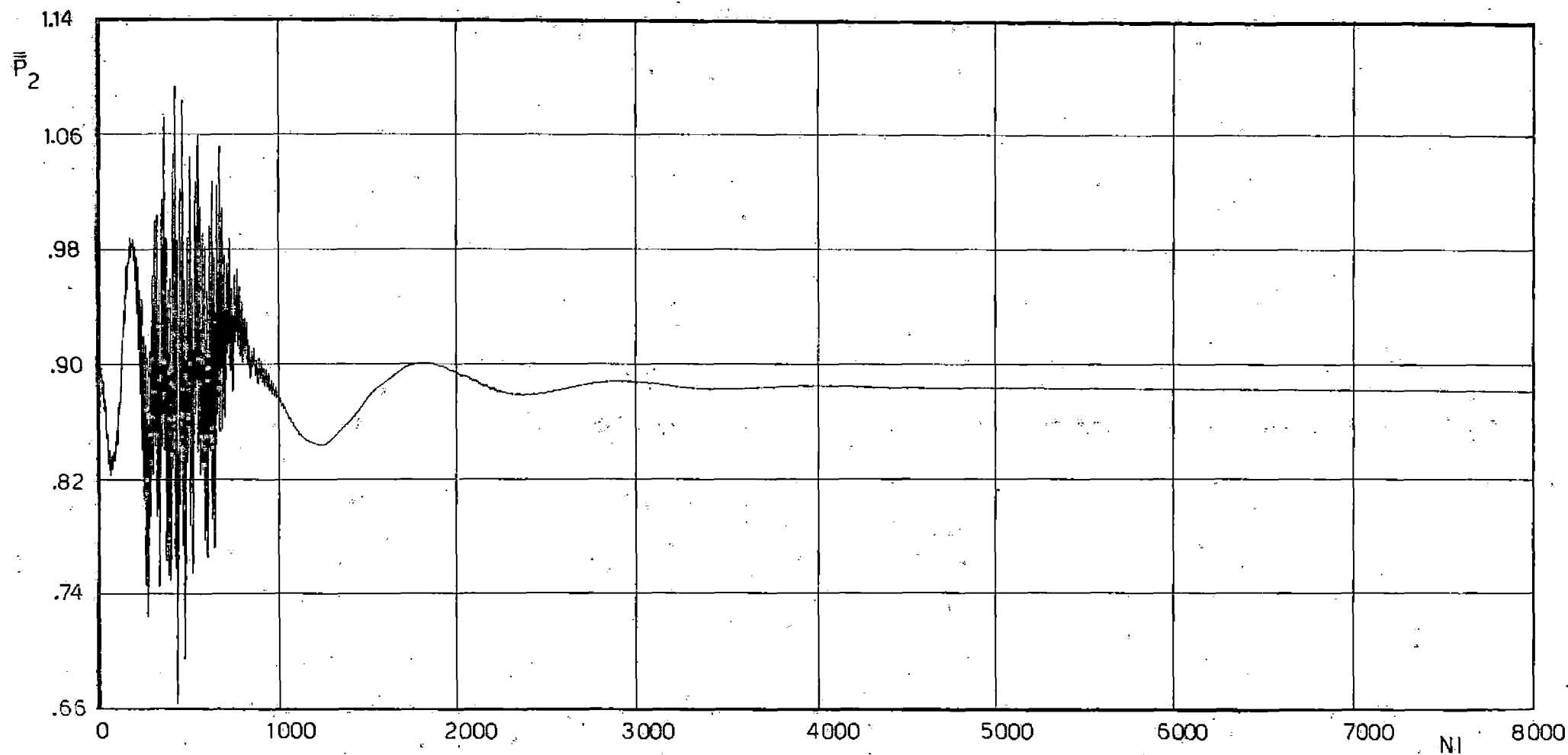


FIG. 106 — EVOLUTION DE LA PRESSION STATIQUE INTERMEDIAIRE AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

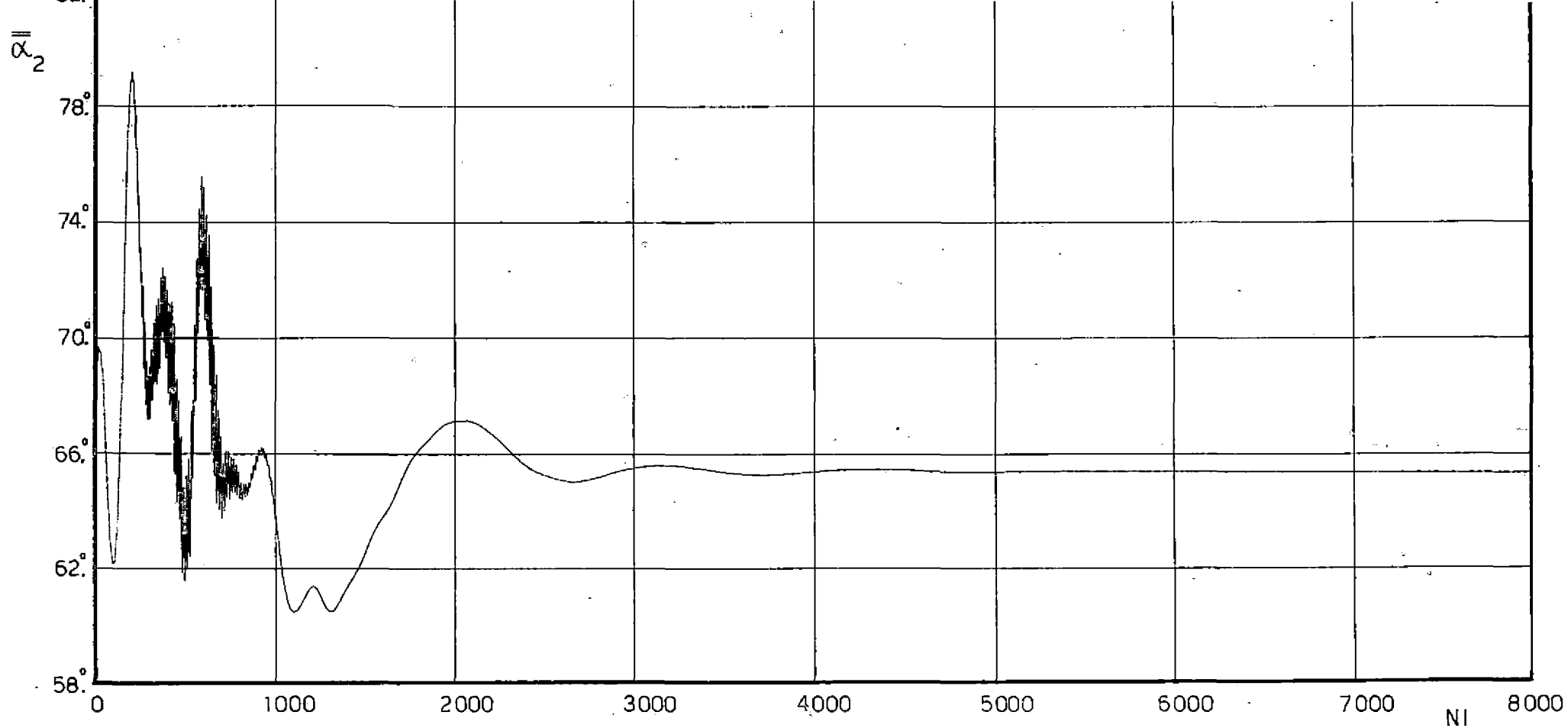


FIG.107 — EVOLUTION DE L' ANGLE ABSOLU DE SORTIE DU STATOR AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

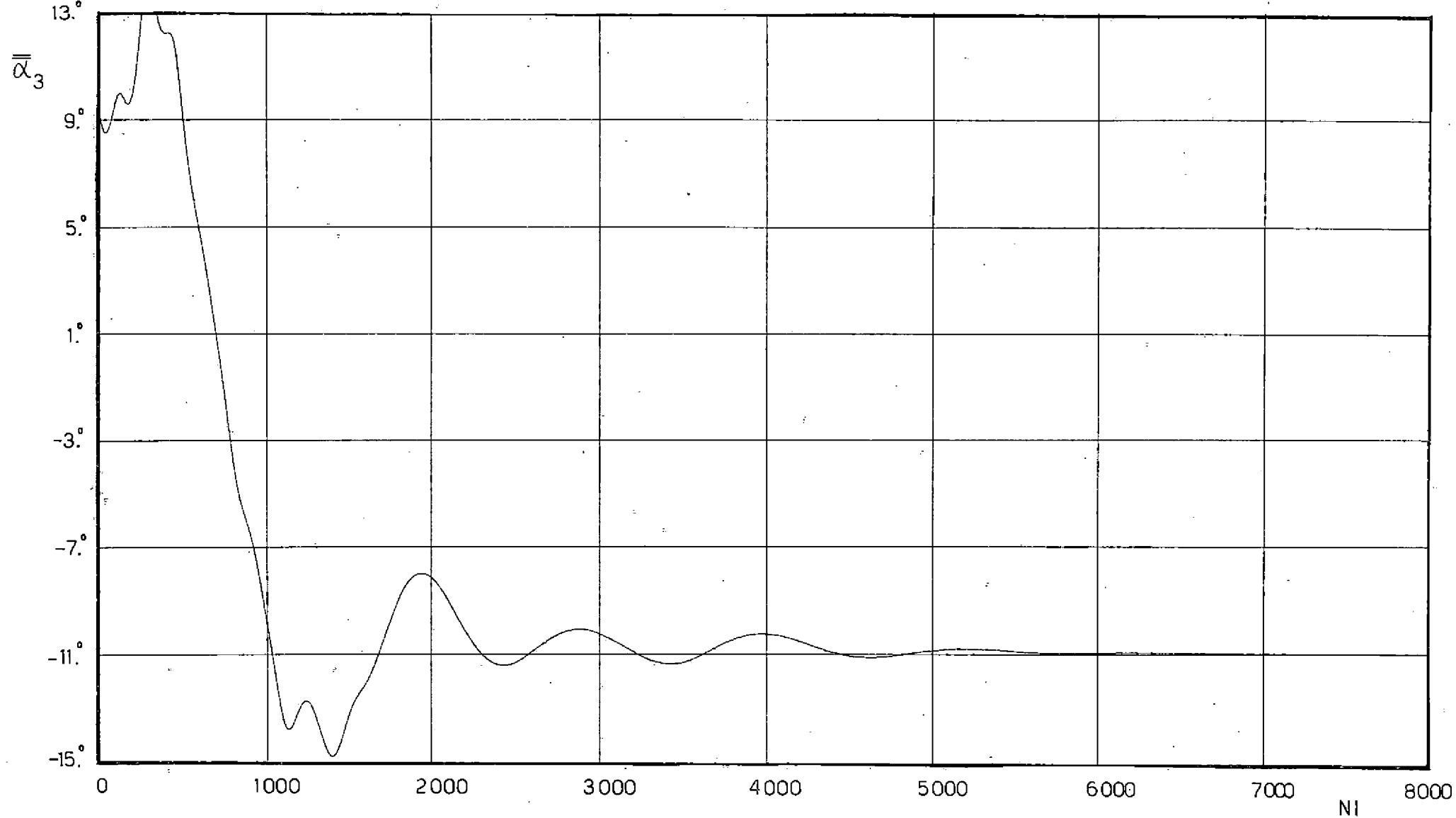


FIG.108 — EVOLUTION DE L' ANGLE ABSOLU DE SORTIE DU ROTOR AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

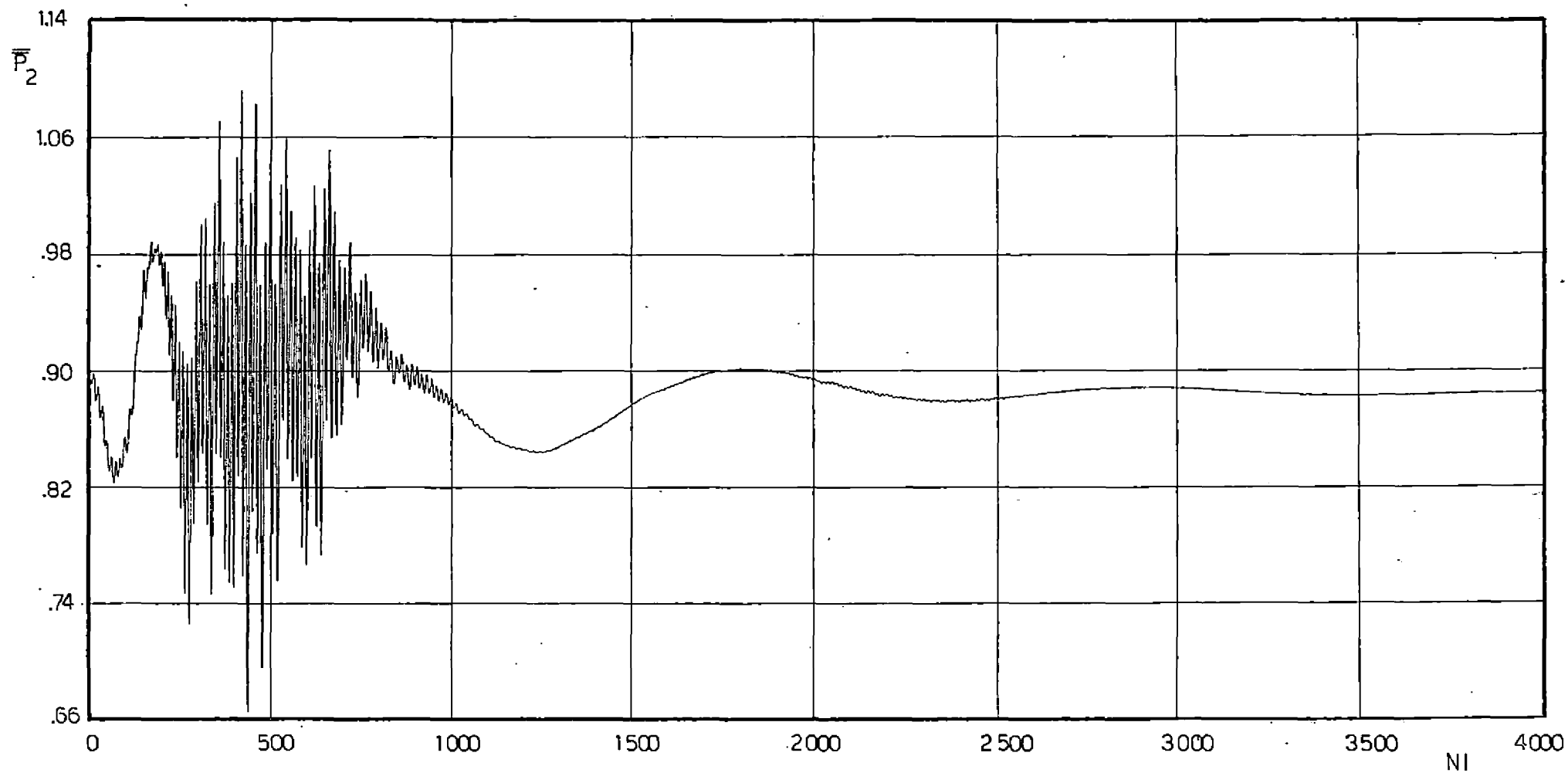


FIG.109 – EVOLUTION DE LA PRESSION STATIQUE INTERMEDIAIRE AU
RAYON MOYEN

(Etage 3)

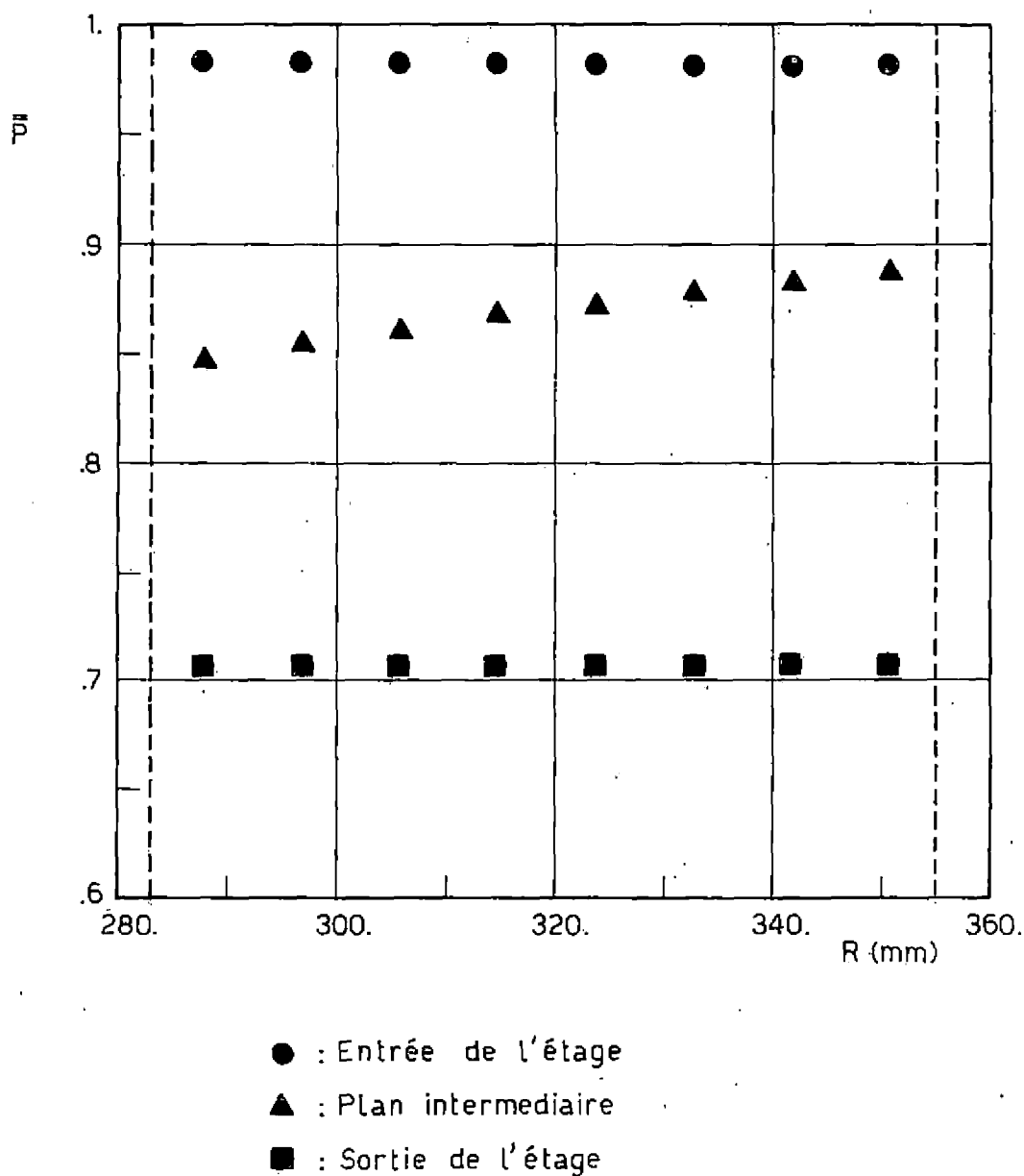


FIG. 110 – DISTRIBUTION RADIALE DE LA PRESSION
STATIQUE EN AMONT, AU DROIT DU PLAN
INTERMEDIAIRE ET EN AVAL DE L'ETAGE
(Étage 3)

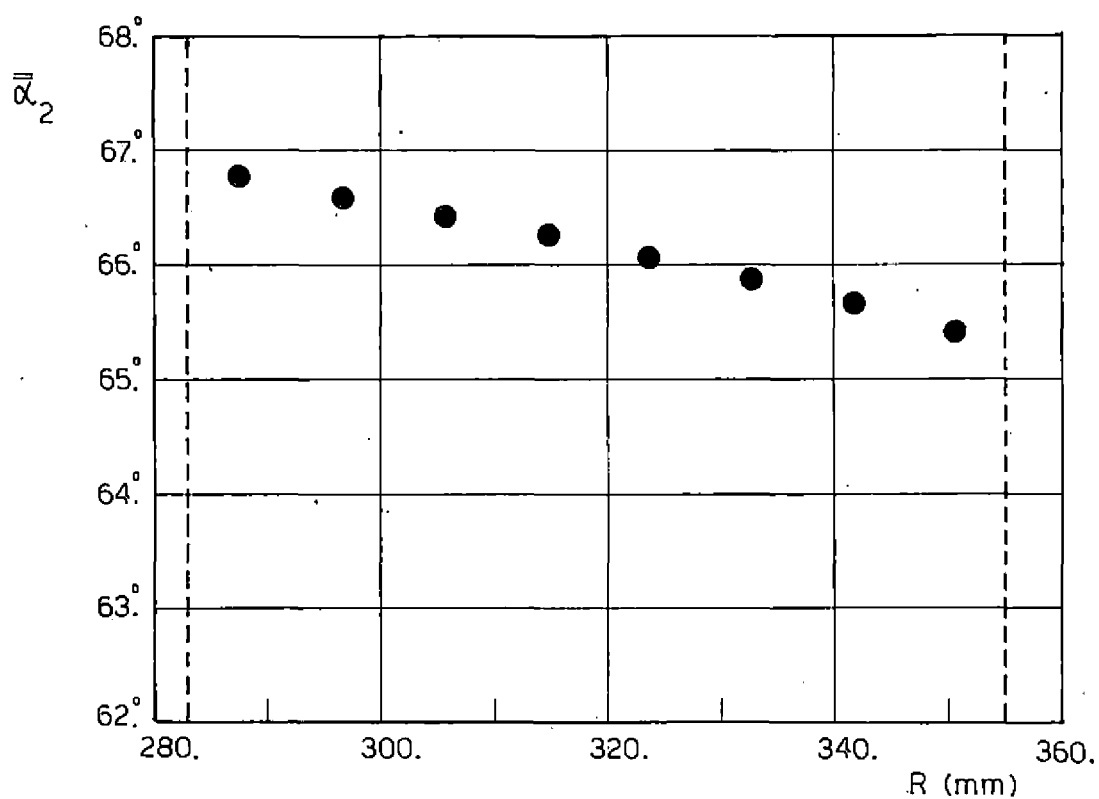


FIG.111 — DISTRIBUTION RADIALE DE L'ANGLE DE
L'ECOULEMENT ABSOLU AU DROIT DU
PLAN DE SORTIE DU STATOR
(Etage 3)

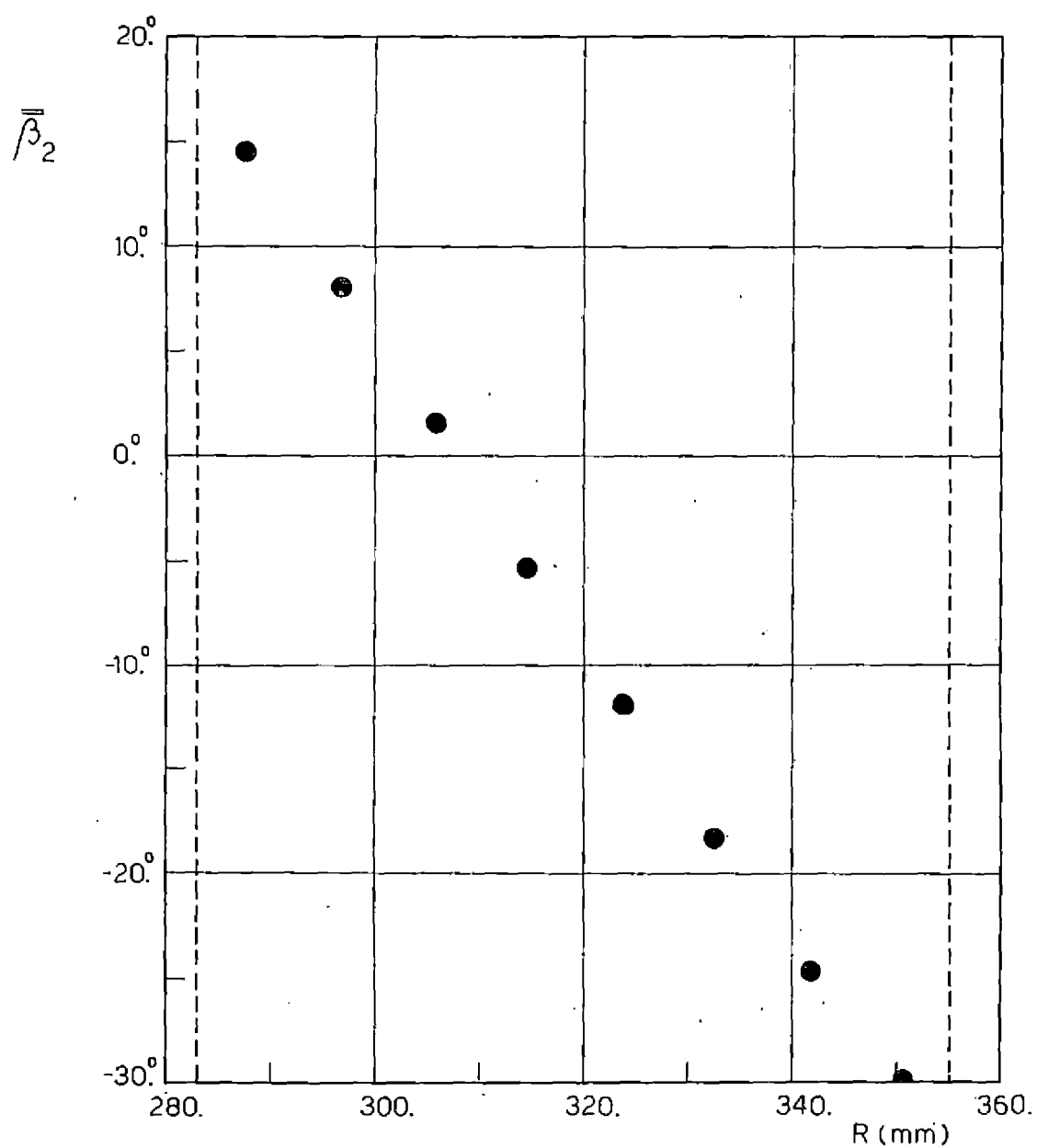


FIG. 112 — DISTRIBUTION RADIALE DE L'ANGLE DE
L'ÉCOULEMENT RELATIF AU DROIT DU
PLAN D'ENTRÉE DU ROTOR
(Etage 3)

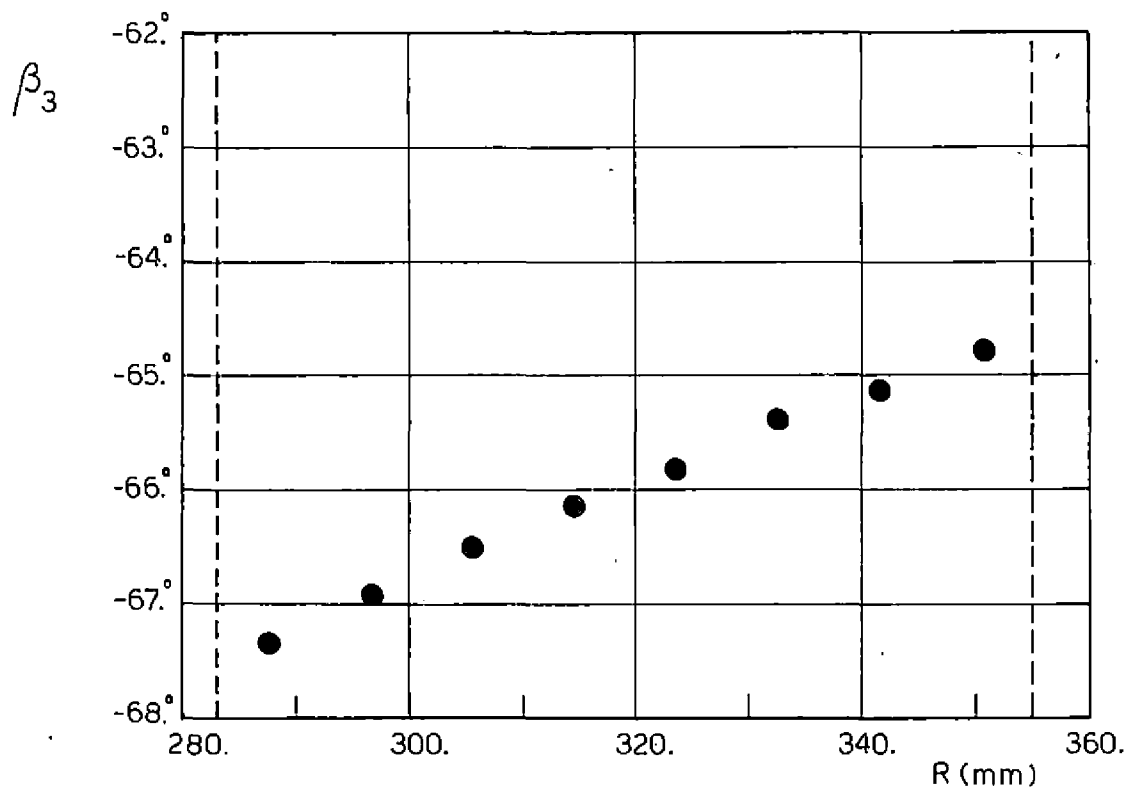


FIG. 113 – DISTRIBUTION RADIALE DE L' ANGLE DE
L' ECOULEMENT RELATIF AU DROIT DU
PLAN DE SORTIE DU ROTOR
(Etage 3)

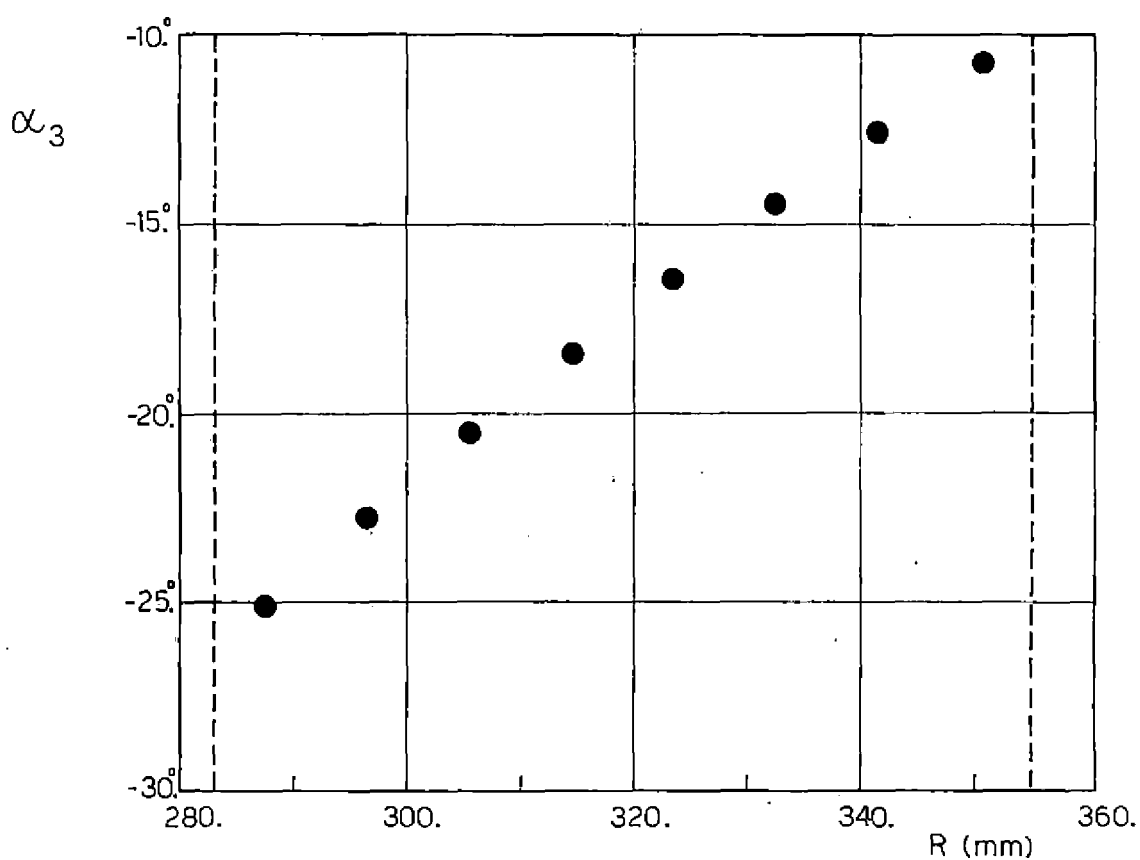
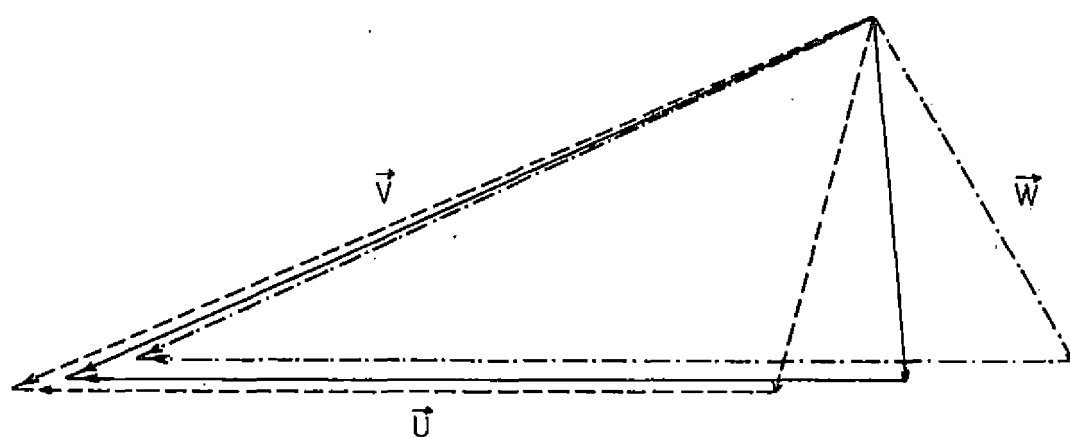


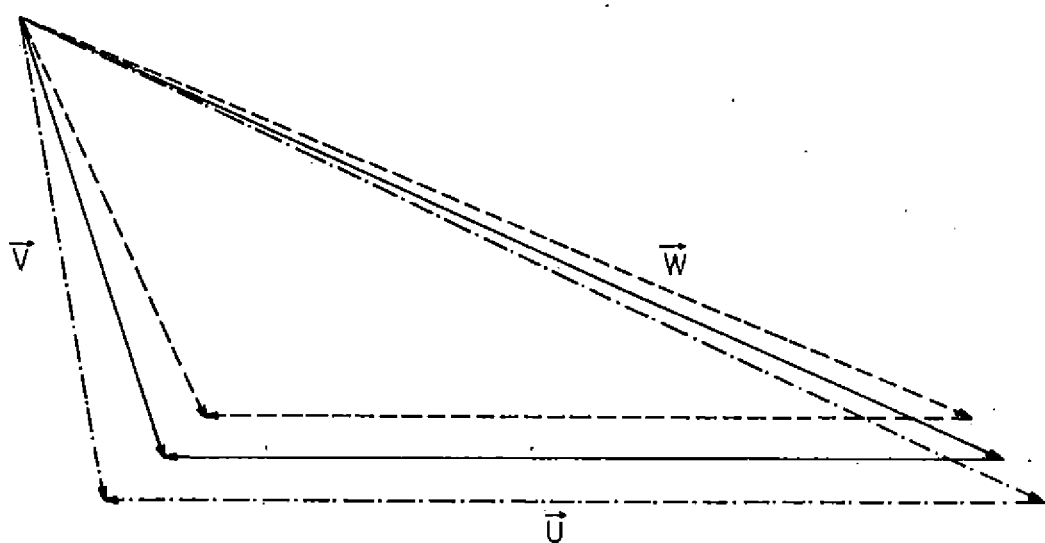
FIG.114 — DISTRIBUTION RADIALE DE L'ANGLE DE
L'ECOULEMENT ABSOLU AU DROIT DU
PLAN DE SORTIE DU ROTOR
(Etage 3)



- : Rayon de pied
- : Rayon moyen
- · - · - : Rayon de tête

FIG. 115a – COMPARAISON DES TRIANGLES DE
VITESSES DANS LE PLAN INTER-AUBES
EN AVAL DU STATOR

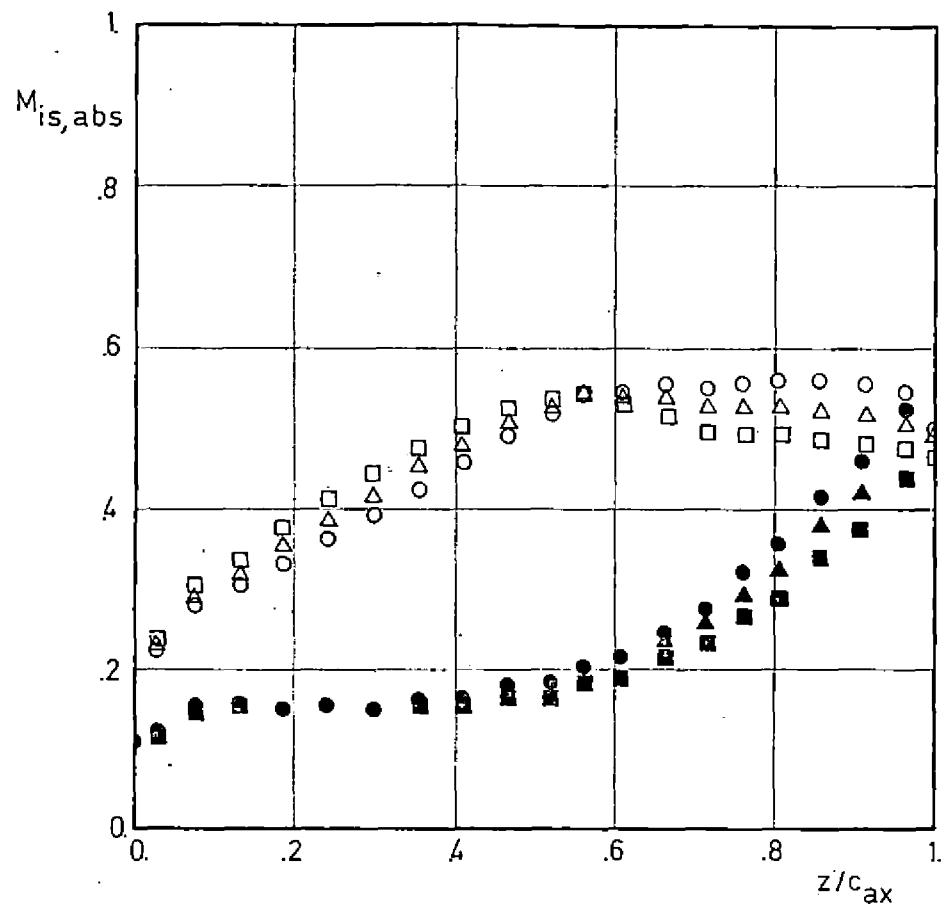
(Etage 3)



----- : Rayon de pied
 ————— : Rayon moyen
 - · - · - : Rayon de tête

FIG.115b — COMPARAISON DES TRIANGLES DE
 VITESSES DANS LE PLAN INTER-AUBES
 EN AVAL DU ROTOR

(Etage 3)



○● : Rayon de pied
 △▲ : Rayon moyen
 □■ : Rayon de tête

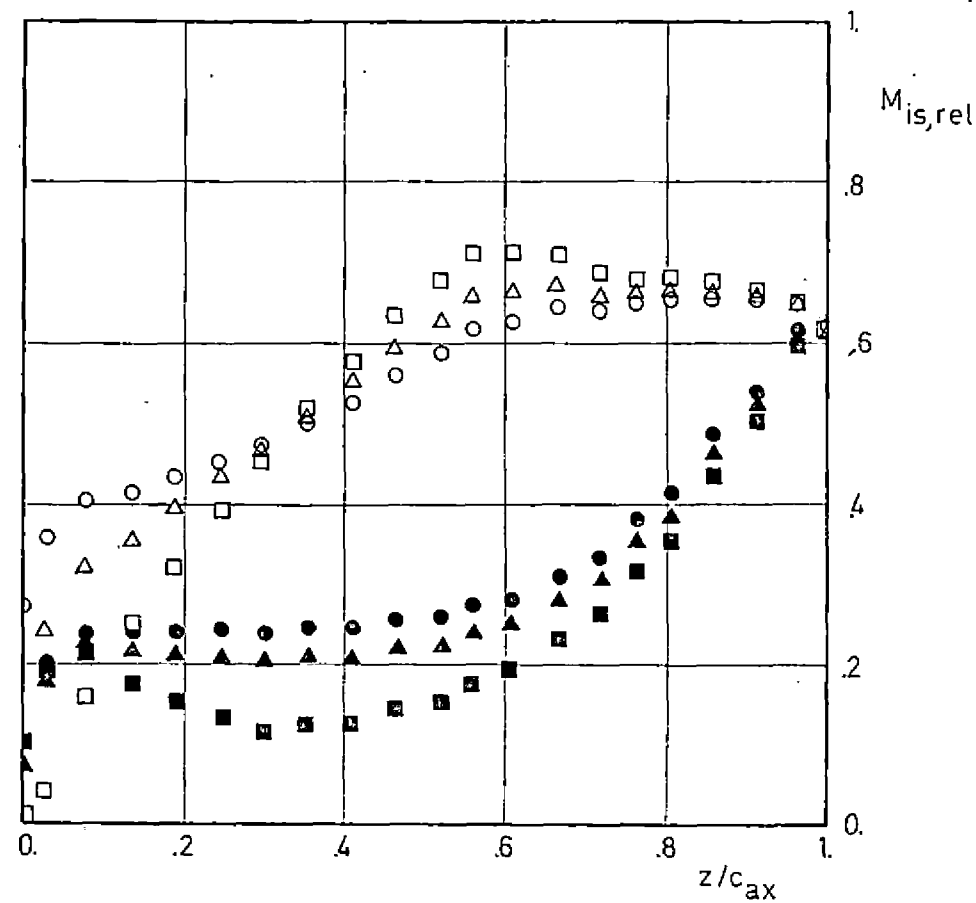


FIG. 116 — COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DU NOMBRE DE MACH ISENTROPIQUE
 DANS LE STATOR ET LE ROTOR

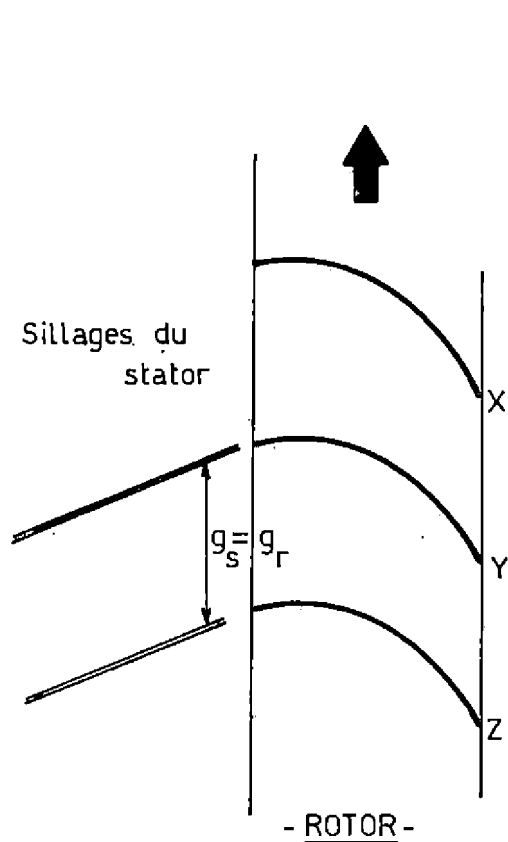


FIG. A1.a

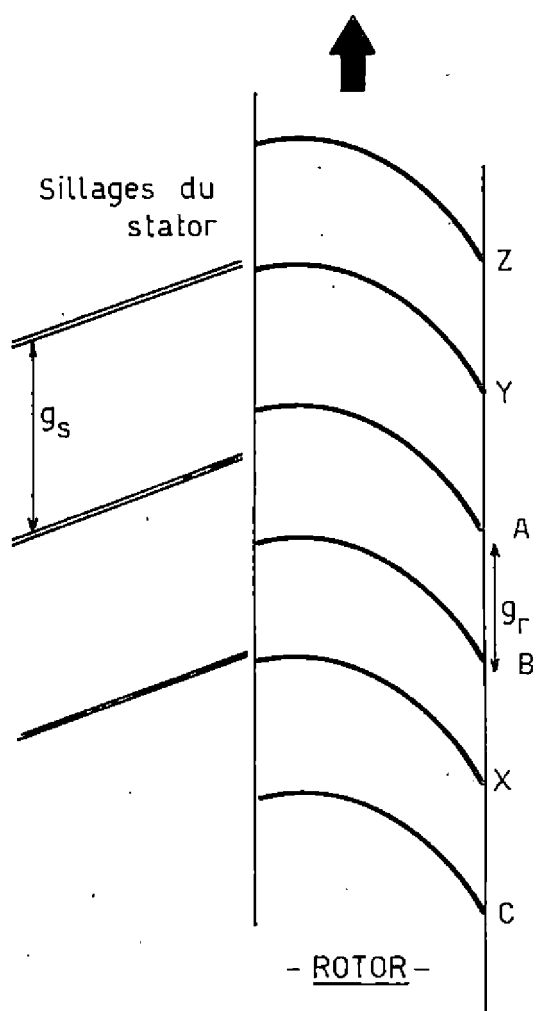


FIG. A1.b

FIG. A1 — CONDITIONS LE LONG DES FRONTIERES PERIODIQUES

(Réf. 36)

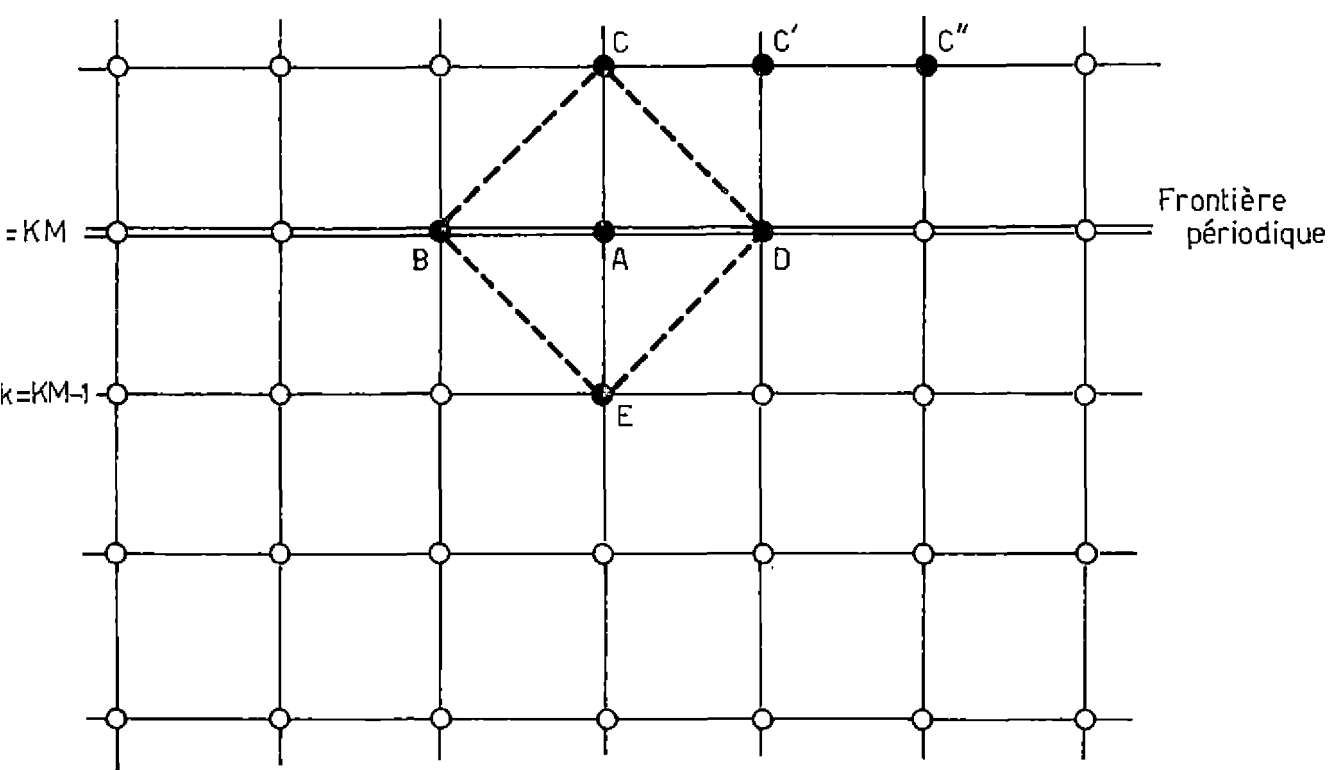


FIG. A2 — APPLICATION DES CONDITIONS AUX LIMITES
LE LONG D'UNE FRONTIERE PERIODIQUE

(Réf. 36)

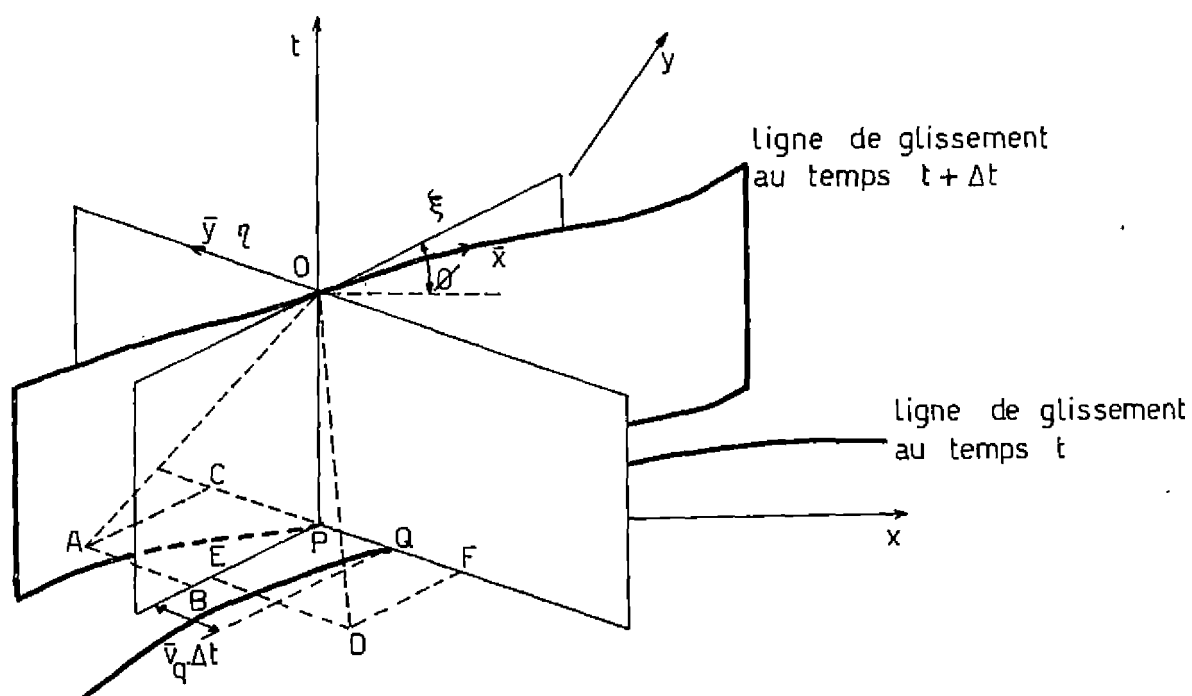


FIG. A3 — DEFINITION DES LIGNES DE GLISSEMENT

(Réf. 36)

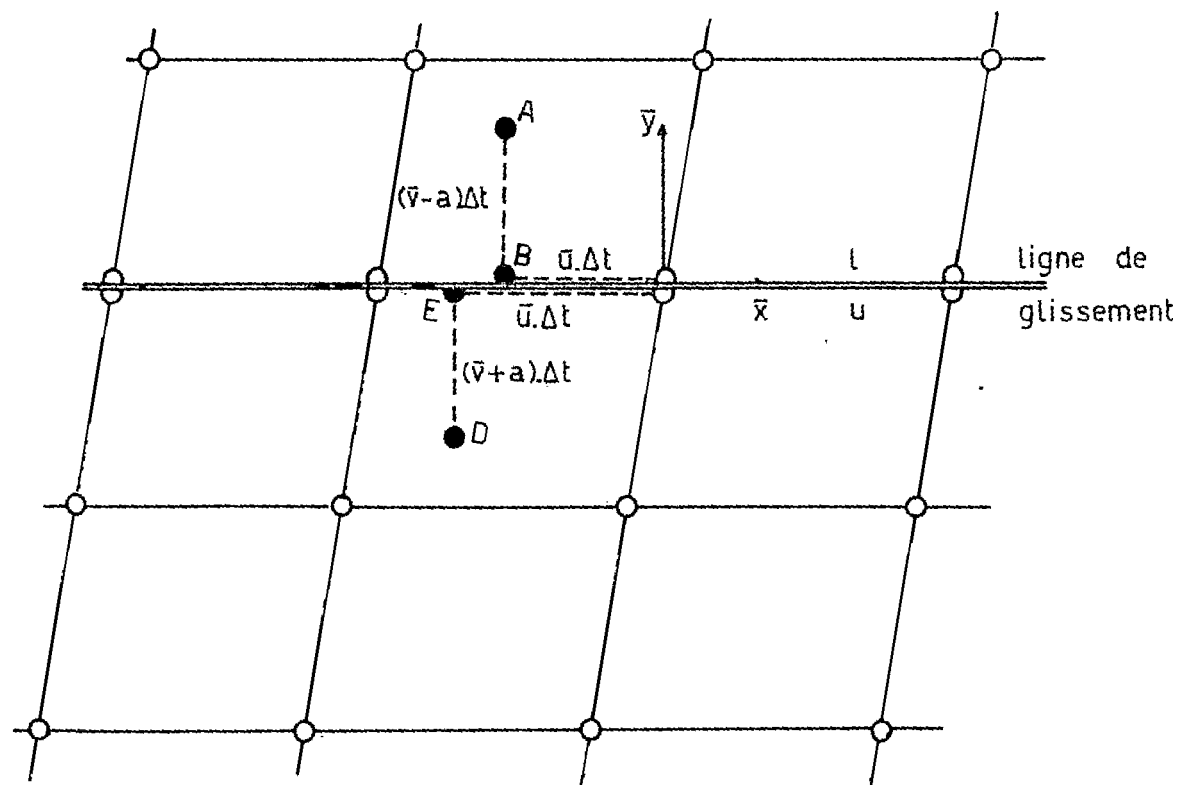
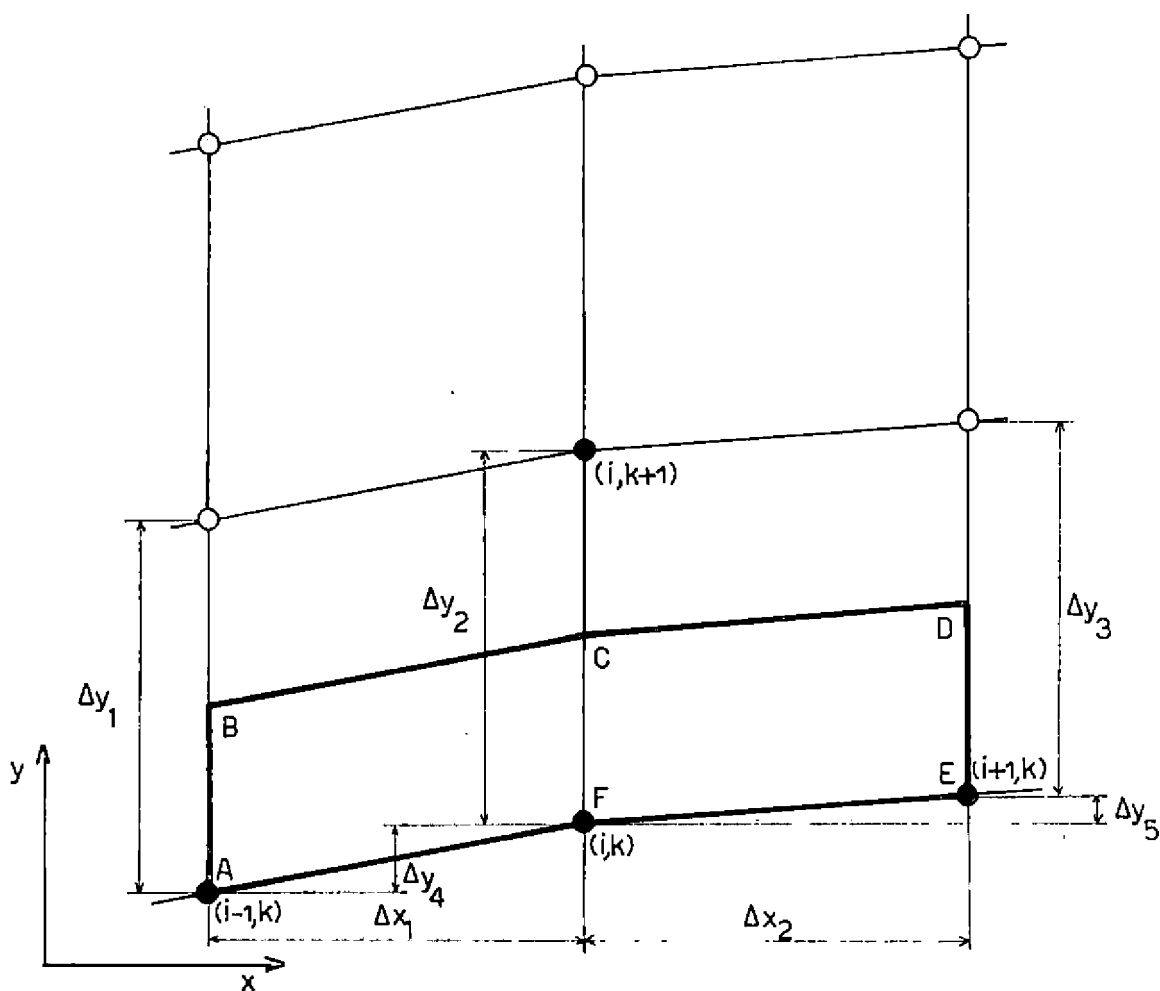


FIG. A4 — CALCUL DES LIGNES DE GLISSEMENT
(Réf. 36)



Condition de consistance :

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3$$

FIG. A5 — DEMI-ELEMENT DE DISCRETISATION LE LONG D'UNE PAROI SOLIDE :



Université catholique de Louvain

NCE



10.887.775



Université catholique de Louvain



10.887.775