

CHAPITRE 1

Homotopie et homotopie rationnelle des espaces et des applications

Ce premier chapitre réalise deux objectifs.

Premièrement, il contient une brève introduction à la théorie de l'homotopie rationnelle. Celle-ci ne peut être présentée dans sa totalité en un seul chapitre. Par conséquent, nous nous limitons aux concepts et aux outils spécifiques, indispensables à notre travail.

Deuxièmement, il rassemble la plupart des lemmes techniques utilisés dans les trois derniers chapitres, où sont exposés les arguments plus fondamentaux.

Dans la première section, nous introduisons la classe des espaces nilpotents, qui étend celle des espaces simplement connexes.

La deuxième section est consacrée aux modèles de Sullivan. Nous re-voyons en détail les notions de modèle minimal et de modèle minimal relatif, et les propriétés principales dont nous ferons usage.

Les deux sections suivantes sont consacrées aux algèbres de Lie graduées. Nous rappelons la définition d'une telle algèbre et construisons l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle d'un espace X . En particulier, nous montrons comment retrouver cette algèbre de Lie graduée à partir du modèle minimal de Sullivan de X .

La section 5 présente successivement les espaces formels, dont le type d'homotopie rationnel peut se déduire formellement de l'algèbre de cohomologie, et les espaces coformels, dont le modèle minimal admet une différentielle quadratique.

La sixième section est consacrée à l'étude de l'opération d'holonomie d'une fibration. Nous en rappelons la définition, nous faisons le lien avec la longue suite exacte en homotopie, et nous décrivons cette opération au niveau des modèles de Sullivan.

Dans la septième section, nous étudions les fibrations dont la fibre est un bouquet de sphères. Nous démontrons en particulier que le modèle minimal relatif d'une telle fibration est le modèle minimal de l'espace total.

Enfin, les notions de catégorie de Lusternik-Schnirelmann et de catégorie rationnelle sont rappelées dans la huitième section, et dans la dernière section, nous expliquons les raisons qui nous poussent à limiter notre étude aux variétés simplement connexes.

1.1. ESPACES NILPOTENTS

Les espaces nilpotents forment la famille naturelle d'espaces généralisant les espaces simplement connexes, et à laquelle s'applique la théorie de Sullivan. Pour pouvoir les définir, commençons par rappeler l'action du groupe fondamental d'un espace sur ses groupes d'homotopie d'ordre supérieur.

Désignons par D^n le disque unitaire de $\mathbb{R}^n$, dont le bord, noté ∂D^n est homéomorphe à S^{n-1} , $n \geq 1$, et par I l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Soient $(X, *)$ un espace topologique pointé et $f : (D^1, \partial D^1) \rightarrow (X, *)$ et $g : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, *)$ deux applications continues.

La classe d'homotopie de l'application $f \star g : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, *)$, définie par

$$f \star g(v) = \begin{cases} g(2v) & \text{si } |v| \leq \frac{1}{2}, \\ f(2(1 - |v|)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |v|, \end{cases}$$

ne dépend que des classes d'homotopie de f et de g . On peut vérifier que $f \star [g_1 + g_2] = f \star [g_1] + f \star [g_2]$. Par conséquent, cette construction définit une action du groupe $\pi_1(X)$ sur les groupes $\pi_n(X)$, $n \geq 1$. Cette action est dite triviale sur $\pi_n(X)$, si $[f \star g] = [g]$, pour chaque $g \in \pi_n(X)$.

Notons

$$\pi_n(X)^{(2)} := \{[f \star g - g] | g \in \pi_n(X)\}.$$

Par récurrence, on définit

$$\pi_n(X)^{(r)} := \{[f \star g - g] | g \in \pi_n(X)^{(r-1)}\}.$$

Définition 1.1. L'action $\star$ est dite *nilpotente* sur $\pi_n(X)$ s'il existe $r \geq 2$ tel que $\pi_n(X)^{(r)} = 0$.

Définition 1.2. Un espace *nilpotent* est un espace pointé $(X, *)$ tel que $\pi_1(X)$ est un groupe nilpotent, agissant de manière nilpotente sur chacun des $\pi_n(X)$.

Parmi les espaces nilpotents, on trouve les espaces simplement connexes et les espaces d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ dont le groupe fondamental G , est nilpotent.

1.2. MODÈLES DE SULLIVAN

A chaque espace topologique X nilpotent, nous associons un objet algébrique, appelé son modèle de Sullivan, à partir duquel nous pouvons calculer explicitement le crochet de Lie de $\pi_*\Omega X \otimes \mathbb{Q}$. Cette section introduit les concepts essentiels. Le lecteur désireux d'en savoir plus, pourra consulter [8].

1.2.1. Modèles minimaux

Soit V un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué. Nous noterons $\Lambda V = TV/I$, l'algèbre graduée commutative obtenue en quotientant l'algèbre tensorielle sur V , par l'idéal I engendré par les éléments du type $x \otimes y - (-1)^{|x||y|}y \otimes x$, $x, y \in V$. Par convention, $\Lambda(x_1, \dots, x_k)$ désigne l'algèbre graduée commutative associée à l'espace vectoriel engendré par les x_i .

Définition 1.3. Une *algèbre de Sullivan* est une $\mathbb{Q}$ -algèbre de cochaines commutative de la forme $(\Lambda V, d)$ où

- $V = \bigoplus_{p \geq 1} V^p$
- $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)$, où $V(0) \subset V(1) \subset \dots$ est une suite croissante d'espaces vectoriels gradués telle que

$$d = 0 \text{ sur } V(0), \text{ et } d(V(k)) \subset \Lambda V(k-1), k \geq 1.$$

Une telle algèbre est *minimale* si $d(V) \subset \Lambda^{\geq 2} V$.

Notons $\Lambda(t, dt)$ l'algèbre de Sullivan contractible telle que $|t| = 0$, et $\epsilon_0, \epsilon_1 : \Lambda(t, dt) \rightarrow \mathbb{Q}$ les augmentations définies respectivement par $\epsilon_0(t) = 0$ et $\epsilon_1(t) = 1$. Deux morphismes d'algèbres de cochaines commutatives $\varphi_0, \varphi_1 : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$ sont dits *homotopes* s'il existe un morphisme d'algèbres différentielles graduées commutatives

$$\phi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d) \otimes \Lambda(t, dt)$$

tel que $(Id \cdot \epsilon_i)\phi = \varphi_i, i = 0, 1$.

Une propriété clé des modèles de Sullivan est contenue dans la proposition suivante :

Proposition 1.4. (Lemme de relèvement) ([8], Prop 12.9)

Supposons avoir des morphismes d'algèbres de cochaines commutatives

$$\begin{array}{ccc} & (A, d) & \\ & \simeq \downarrow \eta & \\ (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\psi} & (C, d) \end{array}$$

tels que η soit un quasi-isomorphisme et $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan. Alors il existe un morphisme d'algèbres de cochaines commutatives $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$, unique à homotopie près, tel que le diagramme commute à homotopie près. En particulier, ceci implique qu'il commute en homologie.

Dans [21], D.Sullivan définit le foncteur

$$A_{PL} : TOP \longrightarrow ADGC$$

de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives. Celui-ci associe à chaque espace topologique X une algèbre de cochaines commutative $A_{PL}(X)$ telle que $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H(A_{PL}(X))$. L'algèbre différentielle $A_{PL}(X)$ est un analogue rationnel de l'algèbre des formes de de Rham sur une variété.

Définition 1.5. Un *modèle de Sullivan* d'une $\mathbb{Q}$ -algèbre de cochaines commutative (A, d) , cohomologiquement connexe (c.à.d. $H^0(A, d) = \mathbb{Q}$), est une algèbre de Sullivan munie d'un quasi-isomorphisme

$$\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d).$$

Un modèle de Sullivan est dit minimal si l'algèbre $(\Lambda V, d)$ est minimale. Toute $\mathbb{Q}$ -algèbre de cochaines commutative cohomologiquement connexe admet un modèle de Sullivan minimal unique à isomorphisme près [8]. Un *modèle de Sullivan* d'un espace X est une algèbre de Sullivan munie d'un quasi-isomorphisme

$$\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow A_{PL}(X).$$

Chaque espace topologique connexe X , possède un modèle minimal de Sullivan, unique à isomorphisme près [8]. Nous le noterons m_X .

Remarque 1.6. (Voir [8], section 17)

Sullivan établit dans [21] une bijection entre les types d'homotopies rationnels d'une part et les classes d'isomorphismes d'algèbres minimales de Sullivan sur $\mathbb{Q}$ d'autre part. Il construit pour cela un foncteur de réalisation $|\cdot|$, qui associe à chaque algèbre de Sullivan minimale $(\Lambda V, d)$, un CW-complexe $|(\Lambda V, d)|$ tel que $m_{|(\Lambda V, d)|} \cong (\Lambda V, d)$.

Exemple 1.7. Le modèle minimal des sphères.

Si $k \geq 1$ est impair, le modèle minimal de S^k est donné par $(\Lambda e, 0)$ avec $|e| = k$.

Si $k \geq 1$ est pair, alors le modèle minimal de S^k est donné par $(\Lambda(e, t), d)$ avec $d(e) = 0, d(t) = e^2$ et $|e| = k$.

Exemple 1.8. [8] Tout H -espace admet un modèle minimal de Sullivan de la forme $(\Lambda V, 0)$.

Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces connexes et

$$m_X : (\Lambda V, d) \rightarrow A_{PL}(X), \quad m_Y : (\Lambda W, d) \rightarrow A_{PL}(Y)$$

deux modèles minimaux de Sullivan, respectivement de X et de Y . On peut modéliser le morphisme $A_{PL}(f) : A_{PL}(X) \rightarrow A_{PL}(Y)$ en choisissant, par la Proposition 1.4, un morphisme $\varphi_f : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, d)$ tel que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(Y) \\ m_X \uparrow & & \uparrow m_Y \\ (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\varphi_f} & (\Lambda W, d). \end{array}$$

L'application φ_f étant la seule, à homotopie près, à vérifier cette propriété, la partie linéaire $Q(\varphi_f) : V \rightarrow W$ ne dépend pas du choix de φ_f . Elle dépend uniquement de la classe d'homotopie de f . Dans la suite de ce texte, nous la noterons $Q(f)$.

Lemme 1.9. Si $Q(f)$ est injectif, alors φ_f est injectif, et si φ_f est surjectif, alors $Q(f)$ est surjectif.

Preuve

Remarquons tout d'abord que si $\psi : V \rightarrow W$ est injectif, alors son extension multiplicative $\psi : \Lambda V \rightarrow \Lambda W$, est également injective. Supposons ensuite que

$$w = \sum_{i \geq k} w_i \text{ avec } w_i \in \Lambda^i V$$

soit tel que $\varphi_f(w) = 0$. Clairement, $\varphi_f(w) - Q(f)(w_k) \in \Lambda^{>k} W$. Dès lors, $w_k = 0$ et en répétant l'argument, on obtient $w = 0$. La deuxième affirmation est évidente. $\square$

Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal de X et $(\Lambda W, d)$ le modèle minimal de S^k avec $W^k = \mathbb{Q} \cdot e$, comme décrit dans l'Exemple 1.7. Pour chaque $[a : S^k \rightarrow X] \in \pi_k(X)$ et chaque $v \in V^k$, il existe un unique $r \in \mathbb{Q}$ tel que $Q(a)(v) = r \cdot e$.

Proposition 1.10. L'application $\langle, \rangle : \pi_k(X) \times V^k \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par

$$(1.1) \quad \langle [a], v \rangle = \begin{cases} r \text{ si } |v| = k, [a] \in \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \text{ et } Q(a)(v) = r \cdot e \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est bilinéaire.

Si l'espace X est nilpotent et si sa cohomologie rationnelle est de type fini, alors cette application bilinéaire est non-dégénérée. (Dans [8], les auteurs font la preuve dans le cas simplement connexe.) En d'autres termes, cette application bilinéaire induit un isomorphisme

$$(1.2) \quad V^k \cong \text{Hom}(\pi_k(X), \mathbb{Q}),$$

qui est naturel dans le sens suivant :

Pour toute application continue $f : Y \rightarrow X$ de modèle minimal $\varphi_f : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, d)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} V^k & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(\pi_k(X); \mathbb{Q}) \\ Q(f) \downarrow & & \downarrow \pi_k(\check{f}) \\ W^k & \xrightarrow[\cong]{} & \text{Hom}(\pi_k(Y); \mathbb{Q}). \end{array}$$

Lemme 1.11. Soit $p : E \rightarrow B$ une application continue telle que l'homomorphisme

$$\pi_*(\Omega p) : \pi_*(\Omega E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(\Omega B) \otimes \mathbb{Q}$$

soit surjectif, alors l'application rationalisée $(\Omega p)_0$ admet une section.

Preuve

Suivant l'Exemple 1.8, le modèle de l'application Ωp est donné par un morphisme d'adgc

$$(\Lambda V, 0) \xrightarrow{\varphi} (\Lambda W, 0).$$

La naturalité de l'isomorphisme 1.2 permet de déduire de la surjectivité de $\pi_*(\Omega p)$ que l'application linéaire $Q(\varphi)$ est injective. On peut donc décomposer W comme $W \cong I \oplus S$ avec $I = Q(\varphi)(V)$ et définir le morphisme d'adgc

$$(\Lambda W, 0) \xrightarrow[\rho]{\cong} (\Lambda I \otimes \Lambda S, 0) \twoheadrightarrow (\Lambda V, 0)$$

par $\rho(s) = 0$ et $\rho(x) = Q(\varphi)^{-1}(x)$ pour $s \in S$ et $x \in I$. Par construction, on obtient $\rho \circ \varphi = Id_{\Lambda V}$. En réalisant ρ , on obtient donc une application $\tilde{\rho} : (\Omega B)_0 \rightarrow (\Omega E)_0$ telle que $(\Omega p)_0 \circ \tilde{\rho} \sim Id_{(\Omega B)_0}$. $\square$

1.2.2. Modèles minimaux relatifs

Soit $f : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées commutatives. Supposons que $H^0(A, d_A) = H^0(B, d_B) = \mathbb{Q}$, et que $H^1(f)$ soit injectif, alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xrightarrow{f} & (B, d_B) \\ & \searrow i & \uparrow \varphi \\ & & (A \otimes \Lambda W, D) \end{array}$$

où i désigne l'injection naturelle, où φ est un quasi-isomorphisme et où $(A \otimes \Lambda W, D)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$- D(W) \subset (A^+ \otimes \Lambda W) \oplus \Lambda^{\geq 2} W$$

- Il existe une filtration

$$W = \cup_n W(n) , W(0) \subset W(1) \subset \dots$$

avec $D(W(0)) \subset A^+$ et $D(W(n)) \subset A \otimes \Lambda W(n-1)$.

Notons que l'algèbre quotient $(\Lambda W, \overline{D})$ est une algèbre de Sullivan minimale. L'algèbre différentielle $(A \otimes \Lambda W, D)$ s'appelle un *modèle minimal relatif* de f . L'intérêt premier de cette notion réside dans le théorème suivant de Halperin [11], décrivant une propriété essentielle des fibrations nilpotentes.

Définition 1.12. Une fibration $p : E \rightarrow B$ de fibre F est *nilpotente* si l'action de $\pi_1(B)$ sur les groupes d'homotopie de F , induite par l'holonomie, définie dans la section 1.6, est nilpotente.

Théorème 1.13. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de fibre F . Supposons que la fibration soit nilpotente et que la cohomologie de B soit de type fini. Prenons un modèle minimal relatif de $A_{PL}(p)$,

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(B) & \longrightarrow & A_{PL}(E) \\ \uparrow \cong & & \cong \uparrow \\ (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D), \end{array}$$

alors l'algèbre quotient $(\Lambda W, \overline{D})$ est un modèle minimal de Sullivan de F .

1.3. ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES

Définition 1.14. Une algèbre de Lie graduée est un espace vectoriel gradué $L = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ muni d'une application linéaire de degré zero, $L \otimes$

$L \rightarrow L : x \otimes y \mapsto [x, y]$ telle que $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$, pour tous les éléments $a, b \in L$, et satisfaisant l'identité de Jacobi :

$$(-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|b||a|}[b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b]] = 0.$$

Soit V un espace vectoriel gradué, et TV l'algèbre tensorielle sur V . Le commutateur usuel $[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba$ définit une structure d'algèbre de Lie sur TV . Par définition, l'algèbre de Lie libre sur V , notée $\mathbb{L}(V)$, est la sous-algèbre de Lie de TV engendrée par V . Par ailleurs, à toute algèbre de Lie graduée L , on peut associer une algèbre UL , appelée l'algèbre enveloppante de L , et définie comme le quotient $UL = TL/I$, où I désigne l'idéal engendré par les éléments $ab - (-1)^{|a||b|}ba - [a, b]$ pour $a, b \in L$.

Lemme 1.15. Dans une algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(V)$, tout mot de longueur supérieure à deux s'écrit comme une somme de mots de la forme $[v, l]$ avec $v \in V$ et $l \in \mathbb{L}(V)$.

Preuve

La preuve se fait par récurrence sur la longueur des mots de $\mathbb{L}(V)$. Pour les mots de longueur 2, c'est clair. Supposons ensuite que ce soit vrai pour les éléments de $\mathbb{L}^{\leq k}(V)$, et considérons $l = [l_r, l_{k-r+1}] \in \mathbb{L}^{k+1}(V)$, avec $l_r \in \mathbb{L}^r(V)$ et $l_{k-r+1} \in \mathbb{L}^{k-r+1}(V)$. Si $r = 1$ ou k , il n'y a rien à démontrer. Si $1 < r < k$, alors, par l'hypothèse de récurrence,

$$l_r = \sum_j [v_j, l_{r-1}^j]$$

pour certains $v_j \in V$ et $l_{r-1}^j \in \mathbb{L}^{r-1}(V)$. Grâce à l'identité de Jacobi, on peut encore écrire

$$[[v_j, l_{r-1}^j], l_{k-r+1}] = [v_j, [l_{r-1}^j, l_{k-r+1}]] - (-1)^{|v_j||l_{r-1}^j|}[l_{r-1}^j, [v_j, l_{k-r+1}]],$$

et on conclut par récurrence sur r . $\square$

Soient L_1 et L_2 deux algèbres de Lie graduées. Notons i_1 et i_2 les inclusions de L_1 et L_2 dans l'algèbre de Lie libre engendrée par $L_1 \oplus L_2$. Le produit libre

$$L_1 \amalg L_2,$$

est l'algèbre de Lie graduée obtenue en quotientant l'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(L_1 \oplus L_2)$ par l'idéal engendré par les éléments $i_k([x, y]) - [i_k(x), i_k(y)]$ pour tous les $x, y \in L_k$, $1 \leq k \leq 2$. Le produit libre est le coproduit dans la catégorie des algèbres de Lie graduées.

Toute courte suite exacte d'algèbres de Lie graduées de la forme

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} K \longrightarrow 0$$

définit une action de l'algèbre enveloppante UK sur l'algèbre de Lie graduée I/I^2 . En effet, prenons une section linéaire $\sigma : K \rightarrow L$ de p . Celle-ci définit une action de K sur I/I^2 de la manière suivante. Pour chaque $k \in K$, et chaque classe $[y] \in I/I^2$, on définit $k*[y] := [[\sigma(k), y]] \in I/I^2$. Cette action est bien définie et de plus, elle ne dépend pas de la section σ . En effet, pour chaque $\alpha \in I$, $[\sigma(k) + \alpha, y] = [\sigma(k), y] + [\alpha, y]$. Par conséquent, dans I/I^2 , $[\sigma(k) + \alpha, y] = [\sigma(k), y]$. Cette action peut être étendue linéairement à UK en définissant

$$(k_1 \cdots k_n) * [y] := [\sigma(k_1), [\sigma(k_2), [\dots [\sigma(k_n), y] \dots]]$$

pour chaque classe $(k_1 \cdots k_n) \in UK$. Cette extension est bien une action d'algèbre car en vertu de l'identité de Jacobi,

$$k_1 * (k_2 * [y]) - (-1)^{|k_1||k_2|} k_2 * (k_1 * [y]) - [k_1, k_2] * [y] = 0,$$

pour tous les $k_1, k_2 \in K$. L'action ainsi définie, associée à la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} K \longrightarrow 0$$

sera notée

(1.3)

$$Ad : UL \otimes I/I^2 \rightarrow I/I^2 : (k_1 \cdots k_n) \otimes [y] \mapsto [\sigma(k_1), [\sigma(k_2), [\dots [\sigma(k_n), y] \dots]].$$

Remarquons que lorsque I est une algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(V)$, ceci définit une action de UK sur $V = \mathbb{L}(V)/[\mathbb{L}(V), \mathbb{L}(V)]$.

1.4. L'ALGÈBRE DE LIE $\pi_*\Omega X \otimes \mathbb{Q}$

L'espace vectoriel gradué $\pi_*\Omega X \otimes \mathbb{Q}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée définie de la manière suivante.

Soient $[f] \in \pi_n\Omega X$, $[g] \in \pi_m\Omega X$. On forme l'application

$$h : S^n \times S^m \rightarrow \Omega X : (x, t) \mapsto f(x) * g(t) * \overline{f(x)} * \overline{g(t)}$$

où $*$ désigne la composition des lacets dans ΩX et $\bar{\cdot}$ le lacet inverse du lacet c .

La restriction de h au bouquet $S^n \vee S^m$ est homotopiquement triviale.

Ceci a pour conséquence que h passe au quotient à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} S^n \times S^m & \xrightarrow{h} & \Omega X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ S^{n+m} = S^n \wedge S^m & & \end{array}$$

L'application $\tilde{h} : S^{n+m} \rightarrow \Omega X$ ainsi construite s'appelle le *crochet de Whitehead* de f et g et se note $[f, g]$. Sa classe d'homotopie ne dépend que des classes d'homotopie de f et g .

Dans [8], on trouve une preuve du

Théorème 1.16. (Milnor-Moore) Si X est un espace topologique simplement connexe, alors

- (1) L'espace vectoriel $\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}$ muni du crochet de Whitehead est une algèbre de Lie graduée ;
- (2) L'homomorphisme de Hurewicz $Hur_* \otimes \mathbb{Q} : \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées de $\pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}$ vers $PH_*(\Omega X; \mathbb{Q})$, l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$;
- (3) Cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme d'algèbres de Hopf,

$$\cup \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(\Omega X; \mathbb{Q}).$$

Définition 1.17. L'algèbre de Lie graduée $L_X = \pi_* \Omega X \otimes \mathbb{Q}$ s'appelle l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de X .

Proposition 1.18. [8] Soient X et Y deux espaces topologiques simplement connexes, alors $L_{X \vee Y} \cong L_X \amalg L_Y$.

Calcul de L_X à partir du modèle minimal

Fixons le modèle minimal de Sullivan de l'espace nilpotent X ,

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{m} A_{PL}(X).$$

Nous allons donner une structure naturelle d'algèbre de Lie graduée à l'espace vectoriel gradué L défini par

$$sL = Hom(V, \mathbb{Q}),$$

sL désignant la suspension de L . Dans ce but, remarquons le simple fait suivant. La différentielle d peut s'écrire sous la forme

$$d = d_2 + d_3 + \dots,$$

chacun des d_i désignant la partie de d telle que $d_i(V) \subset \Lambda^i V$. Un calcul direct montre que l'application linéaire d_2 vérifie l'équation $d_2^2 = 0$, et désigne donc une différentielle. De plus, on vérifie aussi que $d_2 d_3 + d_3 d_2 = 0$. On en déduit l'existence d'un crochet de Lie sur L défini par l'égalité suivante :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \langle s([x, y]), v \rangle &= (-1)^{|y|+1} \sum_{\alpha} (\langle s(y), v_{\alpha} \rangle \langle s(x), w_{\alpha} \rangle \\ &+ (-1)^{|s(x)||w_{\alpha}|} \langle s(x), w_{\alpha} \rangle \langle s(y), v_{\alpha} \rangle), \end{aligned}$$

pour tout $x, y \in L$ et $v \in V$, avec $d_2(v) = \sum_{\alpha} v_{\alpha} w_{\alpha}$.

Remarque 1.19. Supposons que l'algèbre minimale de Sullivan $(\Lambda V, d)$ soit bigraduée, c'est-à-dire munie d'une graduation complémentaire

$$\Lambda V = \bigoplus_r (\Lambda V)^{(r)},$$

telle que $d : (\Lambda V)^{(r)} \rightarrow (\Lambda V)^{(r+1)}$. Cette graduation induit alors une nouvelle graduation sur L définie par $sL_r = \text{Hom}(V^{(r)}; \mathbb{Q})$, telle que

$$[,] : L_r \times L_p \rightarrow L_{r+p-1}.$$

Exemple 1.20. Considérons la variété $M = \mathbb{C}P(n) \times S^{2m+1}$, $n \geq 2$. Le modèle minimal de Sullivan de M est donné par le produit tensoriel des modèles de $\mathbb{C}P(n)$ et de S^{2m+1} . Dans l'Exemple 1.7, nous avons vu que l'algèbre $(\Lambda(z), 0)$ avec $|z| = 2m+1$ est le modèle minimal de Sullivan de S^{2m+1} et il est aussi facile de voir que $(\Lambda(x, y), d)$ avec $|x| = 2, d(x) = 0$ et $d(y) = x^{n+1}$ est le modèle minimal de Sullivan de $\mathbb{C}P(n)$. Par conséquent, l'algèbre de Sullivan $(\Lambda(x, y, z), d)$ est le modèle minimal de M . Comme $n \geq 2$, la partie quadratique de la différentielle est nulle, et L est donc une algèbre de Lie abélienne $Ab(a, b, c)$ avec $|a| = 1, |b| = 2n$ et $|c| = 2m$.

Notons $\Sigma_* : \pi_*(\Omega X) \rightarrow \pi_{*+1}(X)$ le morphisme de suspension obtenu par l'adjonction $[S^*, \Omega X] \cong [S^{*+1}, X]$. Notons x_0 le point de base de X et c_0 le lacet constant en x_0 . L'application Σ_* associe à la classe d'homotopie d'une application $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\Omega X, c_0)$, la classe d'homotopie de l'application $h : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (X, x_0)$ définie par $h(x, t) = g(x)(t)$. Dans [8] les auteurs démontrent le

Théorème 1.21. L'application linéaire

$$\varrho_X : \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow L$$

telle que $s(\varrho_X(\alpha))$ est l'élément de $sL = \text{Hom}(V; \mathbb{Q})$ vérifiant

$$s(\varrho_X(\alpha))(v) = (-1)^{|\alpha|+1} \langle \Sigma_n(\alpha), v \rangle, \quad \alpha \in \pi_n(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}, \quad v \in V^{n+1},$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées.

Autrement dit, la formule 1.4 définit entièrement le crochet sur L_X .

Exemple 1.22. Dans le cas de la variété $M = \mathbb{C}P^n \times S^{2m+1}$, $n \geq 2$, le Théorème 1.21 indique que

$$\pi_*(\Omega M) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{Ab}(a, b, c).$$

1.5. ESPACES FORMELS ET COFORMELS

1.5.1. Espaces formels

Définition 1.23. Un espace X est formel s'il existe un quasi-isomorphisme

$$f_X : m_X \xrightarrow{\simeq} (H^*(X, \mathbb{Q}), 0).$$

Les sphères sont évidemment des variétés formelles. Parmi ces variétés, on trouve aussi les variétés projectives complexes et en particulier les variétés Kähleriennes 1-connexes [4]. Les propriétés suivantes se révèlent très utiles pour construire des espaces formels.

Proposition 1.24. (1) Soient X et Y deux espaces formels. Alors le bouquet $X \vee Y$ et le produit $X \times Y$ sont formels.

(2) Tout retract par déformation d'un espace formel, est formel.

Preuve 1. Voir [20], Lemme 4.1.

2. Soit $Y \hookrightarrow X$ un retract de l'espace formel X et notons i l'inclusion et r la rétraction telles que $i \circ r \sim id_X$. On en déduit le quasi-isomorphisme

$$(\Lambda V_Y, d_Y) \xrightarrow{r^*} (\Lambda V_X, d_X) \xrightarrow{f_X} (H^*(X, \mathbb{Q}), 0) \xrightarrow{i^*} (H^*(Y, \mathbb{Q}), 0).$$

□

(a) Modèles bigradués

Soit A une algèbre graduée commutative connexe ($A^0 = \mathbb{Q}$). On peut construire un espace vectoriel bigradué $Z = \bigoplus_{q \geq 1, p \geq 0} Z_p^q$ et une différentielle d sur ΛZ telle que

$$(1) \quad d(Z_p^q) \subset (\Lambda^{\geq 2} Z)_{p-1}^{q+1}$$

$$(2) \quad H_0^q(\Lambda Z, d) \cong A^q \text{ et } H_p^q(\Lambda Z, d) = 0 \text{ si } p \neq 0,$$

et pour lequel on a un quasi-isomorphisme $\varphi : (\Lambda Z, d) \rightarrow (A, 0)$, vérifiant $\varphi(Z_p) = 0$ si $p \geq 1$.

Ce modèle $(\Lambda Z, d)$ s'appelle le *modèle minimal bigradué* de $(A, 0)$.

Construisons-le pas à pas. On pose tout d'abord $Z_0 = A^+/(A^+ \cdot A^+)$ et $d = 0$ sur Z_0 . De cette façon on a un morphisme d'algèbre surjectif $\varphi_0 : \Lambda Z_0 \rightarrow A$.

On considère ensuite $\text{Ker} \varphi_0$ et on pose $V_0 = \text{Ker}(\varphi_0)/(Z_0 \cdot \text{Ker}(\varphi_0))$. Prenons une section

$$\text{Ker}(\varphi_0) \xrightleftharpoons[\sigma]{} V_0$$

et posons enfin

$$Z_1^p \xrightarrow[\theta]{\cong} V_0^{p+1} \text{ et } d(z) = \sigma(\theta(z)) \text{ pour chaque } z \in Z_1.$$

Dès lors, on constate que $H_0(\Lambda Z_0 \otimes \Lambda Z_1, d) = A$.

Il nous reste à "tuer" tous les nouveaux cocycles créés par l'introduction de Z_1 . On regarde une section σ de la projection

$$\text{ker}(d) \cap (\Lambda(Z_0 \oplus Z_1)_1) \longrightarrow \bar{H}_1(\Lambda(Z_0 \oplus Z_1)) ,$$

on pose

$$Z_2^p \xrightarrow[\theta]{\cong} H_1^{p+1}(\Lambda(Z_0 \oplus Z_1)) \text{ et } d(z) = \sigma(\theta(z)) \text{ pour chaque } z \in Z_2$$

et ainsi de suite.

Il est clair que pour chaque espace formel X , le modèle bigradué associé à $H^*(X, \mathbb{Q})$ est le modèle minimal de Sullivan de cet espace. Toutefois, l'utilisation de cette construction est bien plus étendue. Dans [13], Halperin et Stasheff démontrent le

Théorème 1.25. Soit X un espace topologique nilpotent, et $(\Lambda Z, d)$ le modèle bigradué associé à $H^*(X; \mathbb{Q})$. Il existe une dérivation $D = d + d_2 + d_3 + \dots$ de carré nul, telle que $d_i : Z_k \rightarrow (\Lambda Z)_{k-i}$ et telle que $(\Lambda Z, D)$ soit un modèle de Sullivan de X .

Remarque 1.26. Ce théorème implique l'inégalité

$$\dim(\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}) \leq \dim(Z^n)$$

pour chaque X et chaque n .

(b) Applications

Soit A une algèbre n -connexe, i.e. telle que $A^0 = \mathbb{Q}$, $A^i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Le modèle bigradué associé à A est tel que $Z_0^p = 0$, $p \leq n$.

Comme $d(Z_1^p) \subset (\Lambda^2 Z)_0^{p+1}$, il s'en suit que $Z_1^q = 0$ pour $q \leq 2n$. Plus généralement, on constate que $Z_r^q = 0$ pour $q \leq (r+1)n$. Ce constat entraîne l'assertion suivante :

Proposition 1.27. Les espaces n -connexes de dimension inférieure à $3n+1$ sont formels.

Preuve

Soit $(\Lambda Z, d)$ le modèle bigradué associé à $(H^*(X), 0)$. Le constat précédent et les hypothèses permettent d'affirmer que pour chaque $r \geq 0$, $Z_r^q = 0$ si $q \leq (r+1)n$ et que de plus, $Z_0^q = 0$ si $q > 3n+1$.

Par ailleurs, le théorème précédent assure l'existence d'une dérivation D , telle que $(\Lambda Z, D)$ soit un modèle de X .

Montrons par récurrence que pour chaque $r > 1$, on peut modifier les dérivations d_k pour $k \leq r$ de telle sorte $D = d$ sur $Z_{\leq r}$.

Tout d'abord, remarquons que comme $d_2(Z_2) \subset (\Lambda Z_0)^{\geq 3n+2}$, l'image de Z_2 par d_2 est incluse dans l'image de d . Dès lors il existe une application linéaire φ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Z_2 & \xrightarrow{d_2} & \Lambda Z_0 \\ & \searrow \varphi & \nearrow d \\ & Z_1 & \end{array}$$

Etendons φ à ΛZ comme l'unique dérivation telle que $\varphi(Z_i) = 0$ pour $i \neq 2$. On remarque que $\varphi : \Lambda Z \rightarrow \Lambda Z$ est localement nilpotente, c.à.d que pour chaque $x \in \Lambda Z$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^n(x) = 0$. On peut donc définir $e^\varphi : \Lambda Z \rightarrow \Lambda Z$ par

$$e^\varphi(x) = x + \varphi(x) + \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{\varphi^3(x)}{3!} + \dots + \frac{\varphi^n(x)}{n!} + \dots$$

Cet automorphisme de ΛZ nous permet de définir la dérivation

$$D' : \Lambda Z \rightarrow \Lambda Z : x \mapsto e^\varphi(D(e^{-\varphi}(x))).$$

Celle-ci permet d'obtenir un nouveau modèle de Sullivan noté $(\Lambda Z, D')$ tel que

$$D'(z) = \begin{cases} e^\varphi(D(e^{-\varphi}(z))) = d(z) & \text{si } z \in Z_1, \\ e^\varphi(D(z - \varphi(z))) = d(z) & \text{si } z \in Z_2, \\ e^\varphi(d(z) + \dots) = d(z) + d'_2(z) + d'_3(z) + \dots & \text{si } z \in Z_{r \geq 3}. \end{cases}$$

Comme $e^\varphi : (\Lambda Z, D) \rightarrow (\Lambda Z, D')$ est un isomorphisme d'algèbres de Sullivan, $(\Lambda Z, D')$ est un modèle de Sullivan de X pour lequel $D = d$ sur $Z_{\leq 2}$. On continue de manière similaire pour les autres degrés. $\square$

1.5.2. Espaces coformels

Définition 1.28. Un espace X est *coformel* si son modèle minimal est isomorphe à l'algèbre des cochaînes sur l'algèbre de Lie graduée L_X [8],

$$(1.5) \quad (\Lambda V, d) \cong C^*(L_X).$$

De manière équivalente, l'espace X est coformel si la différentielle d de son modèle minimal est quadratique, $d : V \rightarrow \Lambda^2 V$.

Soit M une variété coformelle de dimension m et de modèle minimal $(\Lambda V, d)$. La différentielle est de degré 1 pour la nouvelle graduation sur l'algèbre ΛV définie par

$$(\Lambda V)^{(p)} := (\Lambda^p V),$$

et celle-ci induit donc une nouvelle graduation en cohomologie. Soit r l'entier maximal tel que $H^{(r)}(\Lambda V, d) \neq 0$ et $[\check{M}] \in H^m(\Lambda^r V, d)$. La dualité de Poincaré met alors en dualité les espaces vectoriels $H^p(\Lambda^q V, d)$ et $H^{m-p}(\Lambda^{r-q} V, d)$.

Parmi les espaces coformels, on trouve les groupes de Lie, les sphères, les bouquets de sphères $\vee_i S^{n_i}$, $n_i \geq 2$, et les produits d'espaces coformels. En particulier, le joint de deux espaces X et Y , défini par

$$X \star Y = CX \times Y \cup_{X \times Y} X \times CY$$

est un espace coformel en vertu de l'équivalence d'homotopie

$$X \star Y \xrightarrow{\sim} \Sigma(X \wedge Y) \cong (\Sigma X) \wedge Y$$

établie dans [8], (Proposition 1.17.).

Enfin, J.Neisendorfer et T.Miller ont déterminé une condition suffisante pour qu'une "petite" variété soit coformelle :

Théorème 1.29. ([20]) Toute variété compacte n -connexe de dimension m dont la cohomologie est de rang $k > 3$ et telle que $m \leq 3n + 1$, $n \geq 1$ est formelle et coformelle.

1.6. L'OPÉRATION D'HOLONOMIE

Dans cette section, désignons par $p : (E, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ une fibration de fibre $F = p^{-1}(b_0)$ et $i : (F, x_0) \rightarrow (E, x_0)$ l'inclusion de la fibre au dessus de b_0 .

Lorsque B a le type d'homotopie d'un CW-complexe, ce qui est le cas d'une variété fermée, alors par un théorème de Milnor, ([10], Proposition 5.4.1.), ΩB a aussi le type d'homotopie d'un CW-complexe, et l'injection $\{c_0\} \hookrightarrow \Omega B$ est une cofibration, c_0 désignant le lacet constant. De plus, si B et E ont le type d'homotopie de CW-complexes, alors il en est de

même pour F , [10]. Nous supposons dans la suite que E et B ont le type d'homotopie de CW-complexes.

On considère alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega(B, b_0) \times F \times \{0\} \cup \{c_0\} \times F \times I & \xrightarrow{j} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ \Omega(B, b_0) \times F \times I & \xrightarrow{l} & B \end{array}$$

où $j(c_0, x, t) = x$, $j(w, x, 0) = x$ et $l(w, x, t) = w(t)$. La définition de fibration assure l'existence d'un relèvement

$$K : \Omega(B, b_0) \times F \times I \rightarrow E$$

vérifiant $p \circ K = l$ et $K \circ i_0 = j$. Ceci nous permet de définir une application continue

$$(1.6) \quad h : \Omega(B, b_0) \times F \rightarrow F : (\omega, x) \mapsto K(\omega, x, 1),$$

appelée *l'holonomie* de la fibration. Celle-ci vérifie $h(c_0, x) = x$. Dans cette section, nous discutons les propriétés de h , mais aussi de l'application $\delta : \Omega(B, b_0) \rightarrow F : \omega \mapsto K(\omega, x_0, 1)$, désignant la restriction de l'holonomie h à $\Omega(B, b_0) \times \{x_0\}$.

1.6.1. Relation avec le connectant en homotopie

Nous voulons ici comparer l'homomorphisme

$$\pi_n(\delta) : \pi_n(\Omega(B, b_0), c_0) \rightarrow \pi_n(F, x_0)$$

avec le connectant de la longue suite exacte en homotopie de la fibration $p : E \rightarrow B$.

Rappelons pour cela la définition de ce connectant.

Soit $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue représentant un élément $[f]$ de $\pi_{n+1}(B, b_0)$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\}) & \xrightarrow{x_0} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

implique l'existence d'un relèvement $H : I^n \times I \rightarrow E$ dont la restriction à $I^n \times \{1\}$ est une application $(I^n \times \{1\}, \partial I^n \times \{1\}) \rightarrow (F, x_0)$. Celui-ci nous permet de définir un homomorphisme $\partial_n : \pi_{n+1}(B, b_0) \rightarrow \pi_n(F, x_0)$ en posant

$$(\partial_n(f))(x) = H(x, 1).$$

On a alors le résultat suivant bien connu

Théorème 1.30. La suite

$$\longrightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial_n} \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow$$

est exacte.

Notons maintenant $\theta : \pi_{*+1}(B) \rightarrow \pi_*(\Omega B)$ l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme Σ_* défini dans la section 1.4. Plus précisément, $\theta([f]) = \bar{f}$ où $\bar{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\Omega(B, b_0), c_0)$ est l'application continue définie par $\bar{f}(x)(t) = f(x, t)$ pour $x \in I^n$ et $t \in I$. En particulier, $f = l \circ (\bar{f} \times 1)$

$$I^n \times I \xrightarrow{\bar{f} \times 1} \Omega(B, b_0) \times I \xrightarrow{l} B$$

avec $l(c, t) = c(t)$. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\}) & \xrightarrow{\bar{f} \times 1} & (\Omega B \times \{0\}) \cup (c_0 \times I) & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{\bar{f} \times 1} & \Omega B \times I & \xrightarrow{l} & B \end{array}$$

montre que l'on peut définir H à partir de K en posant $H = K(-, x_0, -) \circ \bar{f} \times 1$. Ceci prouve le

Lemme 1.31. $\partial_n = \pi_n(\delta) \circ \theta$.

Par souci de simplicité, nous omettrons désormais les points de base quand ceux-ci sont clairs au vu du contexte.

1.6.2. Connectant et centre de $\pi_*(\Omega F) \otimes \mathbb{Q}$

Proposition 1.32. L'image de $\pi_*(\Omega(\delta)) \otimes \mathbb{Q}$ est incluse dans le centre de l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega F) \otimes \mathbb{Q}$.

Preuve

Soient $x \in \pi_n(\Omega^2(B))$ et $y \in \pi_k(\Omega F)$. L'application $h : \Omega B \times F \rightarrow F$ induit le morphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\pi_*(\Omega h) : \pi_*(\Omega^2 B) \oplus \pi_*(\Omega F) \rightarrow \pi_*(\Omega F)$$

vérifiant les équations

$$\begin{cases} \pi_*(\Omega h)(x, 0) &= \pi_*(\Omega \delta)(x) \\ \pi_*(\Omega h)(0, y) &= y. \end{cases}$$

Dès lors, on obtient

$$[\pi_*(\Omega \delta)(x), y] = [\pi_*(\Omega h)(x, 0), \pi_*(\Omega h)(0, y)] = \pi_*(\Omega h)([(x, 0), (0, y)]) = 0.$$

□

Corollaire 1.33. Si le centre de $\pi_*(\Omega F) \otimes \mathbb{Q}$ est réduit à 0, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \pi_n(\Omega F) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_n(\Omega E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_n(\Omega B) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

1.6.3. Opération d'holonomie et homologie sphérique

Rappelons que l'homologie sphérique $H_*^S(X)$ est l'image de l'application de Hurewicz $Hur : \pi_*(X) \rightarrow H_*(X)$. Nous avons la

Proposition 1.34. Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration dans laquelle le connectant $\pi_*(\delta) \otimes \mathbb{Q}$ est nul. Alors l'opération d'holonomie rationnelle induit l'homomorphisme $H_*(h) : H_*(\Omega B; \mathbb{Q}) \otimes H_*(F; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(F; \mathbb{Q})$, qui préserve l'homologie sphérique rationnelle.

Preuve

Si $\pi_*(\delta) \otimes \mathbb{Q} = 0$, alors dans la fibration

$$\Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\delta} F,$$

l'application $\pi_*(\Omega p) \otimes \mathbb{Q}$ est surjective. Suivant le Lemme 1.11, l'application rationalisée $(\Omega p)_0$ admet une section $\sigma : (\Omega B)_0 \rightarrow (\Omega E)_0$ avec $(\Omega p)_0 \circ \sigma = Id_{(\Omega B)_0}$. En particulier $\delta_0 = \delta_0 \circ (\Omega p)_0 \circ \sigma$ est triviale, car $\delta_0 \circ (\Omega p)_0$ l'est. Comme δ est la restriction à $\Omega B \times \{*\}$ du morphisme d'holonomie $h : \Omega B \times F \rightarrow F$, h factorise rationnellement via

$$\Omega B \times F / \Omega B \times \{*\}.$$

Considérons maintenant une classe d'homologie sphérique rationnelle de F , $\alpha = Hur_{\mathbb{Q}}([f])$, $f : S^r \rightarrow F$ et une classe $\beta \in H_k(\Omega B, \mathbb{Q})$. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Omega B \times F & \longrightarrow & \Omega B \times F / \Omega B \times \{*\} & \xrightarrow{\bar{h}} & F \\ \uparrow 1 \times f & & \uparrow \varphi & & \\ \Omega B \times S^r & \xrightarrow{q} & \Omega B \times S^r / \Omega B \times \{*\}, & & \end{array}$$

dans lequel q est la projection et φ l'application induite de $1 \times f$. Par conséquent,

$$H_{r+k}(h)(\beta \otimes \alpha) = H_{r+k}(\bar{h} \circ \varphi)(H_{r+k}(q)(\beta \otimes [S^r])).$$

On observe maintenant, grâce au Lemme 1.35, que $\Omega B \times S^r / \Omega B \times \{*\}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères. En particulier son homologie réduite coïncide avec son homologie sphérique. La classe $H_{r+k}(q)(\beta \otimes [S^r])$ est donc dans l'image de l'application de Hurewicz rationnelle. Nous

pouvons dès lors écrire $H_{r+k}(q)(\beta \otimes [S^r]) = Hur_{\mathbb{Q}}([g])$, pour un certain $[g] \in \pi_*(\Omega B \times S^r / \Omega B \times \{*\}) \otimes \mathbb{Q}$. Finalement, on obtient

$$H_{r+k}(h)(\beta \otimes \alpha) = Hur_{\mathbb{Q}}([\bar{h} \circ \varphi \circ g]).$$

□

Lemme 1.35. Pour tout CW-complexe X , $(S^n \times X)/X \approx S^n \vee \Sigma^n X$.

Preuve

Il suffit de considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & & \\ S^n \times X & \xrightarrow{g} & (S^n \vee S^n) \times X = (S^n \times X) \cup_{* \times X} (S^n \times X) \\ \rho \downarrow & & \downarrow h \\ (S^n \times X)/X & \xrightarrow{\varphi} & S^n \vee (S^n \wedge X), \end{array}$$

dans lequel f est l'injection canonique, g vient de la loi de co-H-espace de S^n , h consiste à projeter le premier facteur $S^n \times X$ sur sa première composante S^n , et ρ est la surjection canonique. Le composé $h \circ g \circ f$ étant trivial, on obtient un morphisme φ vérifiant $h \circ g \approx \varphi \circ \rho$. Ce morphisme φ induit un isomorphisme en homologie et est donc une équivalence d'homotopie. □

Corollaire 1.36. Pour tout CW-complexe X , $\frac{D^n \times X}{S^{n-1} \times X} \approx S^n \vee \Sigma^n X$.

Preuve L'application surjective $f : D^n \times X \rightarrow \frac{D^n}{S^{n-1}} \times X : (v, x) \mapsto ([v], x)$ induit un homéomorphisme $\bar{f} : \frac{D^n \times X}{S^{n-1} \times X} \rightarrow \frac{S^n \times X}{* \times X}$. □

1.6.4. Description en modèles de l'opération d'holonomie

L'opération d'holonomie h définit une action

$$H_*(\Omega B; \mathbb{Q}) \otimes H_*(F; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(F; \mathbb{Q}) : x \otimes z \mapsto x \cdot z = H_*(h; \mathbb{Q})(x \otimes z),$$

pour tout $x \in H_*(\Omega B; \mathbb{Q})$, et tout $z \in H_*(F; \mathbb{Q})$. Dualement, cette action induit une opération

$$\check{h} : H^*(F; \mathbb{Q}) \otimes H_*(\Omega B; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(F; \mathbb{Q})$$

définie par

$$\langle \check{h}(\alpha \otimes x), z \rangle = \langle \alpha, x \cdot z \rangle$$

pour $\alpha \in H^*(F; \mathbb{Q})$, $z \in H_*(F; \mathbb{Q})$ et $x \in H_*(\Omega B; \mathbb{Q})$. Dans [8], Felix, Halperin et Thomas décrivent comment déduire l'opération $\check{h}$ d'un modèle minimal relatif de la fibration. Notons

$$(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \rightarrow (\Lambda W, \overline{D})$$

un tel modèle minimal relatif. Choisissons une base homogène $\{v_i\}$ de V . On décompose D sous la forme

$$D(w) = \overline{D}(w) + \sum_i v_i \theta_i(w) + D_+(w)$$

avec $\theta_i(w) \in \Lambda W$ et $D_+(w) \in \Lambda^{\geq 2} V \otimes \Lambda W$. Les applications θ_i sont des dérivations qui anti-commutent avec $\overline{D}$,

$$\overline{D}\theta_i = -(-1)^{|\theta_i|}\theta_i\overline{D}.$$

On choisit alors une base x_i de L_B , duale de la base v_i ,

$$\langle v_i; sx_j \rangle = \delta_{ij},$$

et on a le

Théorème 1.37. ([8], Formule 31.1.)

$$\check{h}(\alpha \otimes x_i) = (-1)^{|x_i|(|\alpha|+1)} H(\theta_i)(\alpha).$$

Proposition 1.38. Soit $E \subset H_*(F; \mathbb{Q})$ un sous $H_*(\Omega B; \mathbb{Q})$ -module et $\tilde{E} \subset H^*(F; \mathbb{Q})$ un sous-espace vectoriel induisant par évaluation sur E un isomorphisme $\tilde{E} \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(E; \mathbb{Q})$. Si l'application $\sum_i v_i \otimes H(\theta_i)$ envoie $\tilde{E}^{\geq r}$ de manière injective dans $V \otimes \tilde{E}$, alors $H_*(h) : H_*(\Omega B; \mathbb{Q}) \otimes E^{< r} \rightarrow E$ est surjective.

Preuve

Soit $\alpha \in \tilde{E}^{\geq r}$. Par l'interprétation en modèles de $\check{h}$, il existe $x \in H_*(\Omega B; \mathbb{Q})$ avec $\check{h}(\alpha \otimes x) \neq 0$. Il existe donc un $z \in E$ avec $\langle \alpha, x \cdot z \rangle \neq 0$. On peut itérer l'opération tant que $\check{h}(\alpha \otimes x) \in \tilde{E}^{\geq r}$. On peut donc supposer que $\check{h}(\alpha \otimes x) \in \tilde{E}^{< r}$. Maintenant, s'il existe une classe d'homologie qui n'est pas dans l'image de $H_*(\Omega B; \mathbb{Q}) \otimes E^{< r}$, alors il existe une classe de cohomologie $\beta \in \tilde{E}^{\geq r}$ qui s'annule sur tous les éléments dans l'image par l'holonomie de $H_*(\Omega B; \mathbb{Q}) \otimes E^{< r}$, ce qui est absurde. $\square$

1.7. FIBRATIONS DE FIBRE UN BOUQUET DE SPHÈRES

Soit X un espace ayant le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères, $X \approx_0 \vee_i S^{n_i}$. Dans [8] §24, on trouve la preuve du fait que L_X est une algèbre de Lie libre que nous noterons $\mathbb{L}(R)$. Dès lors, l'algèbre de Lie différentielle graduée $(\mathbb{L}(R), 0)$ est un modèle de Lie de X ([8]), et un modèle minimal de Sullivan de X est donné par l'algèbre des cochaînes sur $(\mathbb{L}(R), 0)$. On a un quasi-isomorphisme

$$\varphi : C^*(\mathbb{L}(R), 0) = (\Lambda W, d = d_2) \rightarrow A_{PL}(X),$$

avec $W = \text{Hom}(s\mathbb{L}(R), \mathbb{Q})$.

L'espace vectoriel gradué W peut être muni d'une deuxième graduation de la manière suivante. Notons

$$W_p = \{f \in W \mid f(sx) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{L}^q(R) \text{ avec } q \neq p+1\}.$$

Dans ce cas, la définition de $C^*(\mathbb{L}(R), 0)$ implique que $W = \bigoplus_{p \geq 0} W_p$ a les propriétés suivantes

$$(1) \quad d(W_p) \subset (\Lambda^2 W)_{p-1}$$

$$(2) \quad W_0 \text{ est formé de cocycles et l'application linéaire } l : W_0 \rightarrow \tilde{H}(\Lambda W, d) : \alpha \mapsto [\alpha] \text{ est un isomorphisme.}$$

Par définition, le degré en haut est le *degré cohomologique* tandis que le degré en bas est le *degré homologique* :

$$d(W^p) \subset (\Lambda W)^{p+1} \text{ et } d(W_p) \subset (\Lambda W)_{p-1}.$$

L'algèbre de Sullivan $(\Lambda W, d)$, avec cette bigraduation, est donc le modèle minimal bigradué de $(H^*(X; \mathbb{Q}), 0)$.

Théorème 1.39. Soit

$$(1.7) \quad X \rightarrow E \rightarrow B$$

une fibration de fibre $X \approx_0 \bigvee_i S^i$, et

$$(A, d) \rightarrow (A \otimes \Lambda W, D) \rightarrow (\Lambda W, d)$$

un modèle minimal relatif de cette fibration. Si pour un certain k , la différentielle D vérifie

$$D(W_p) \subset (\Lambda^2 W)_{p-1} \oplus (A^+ \otimes W_{\leq p}) \oplus A^+, \text{ pour } p \leq k,$$

alors il existe un modèle minimal relatif de la forme

$$(A, d) \rightarrow (A \otimes \Lambda W, D') \rightarrow (\Lambda W, d)$$

avec $D' = D$ sur $W_{\leq k}$ et

$$D'(W_p) \subset (\Lambda^2 W)_{p-1} \oplus (A^+ \otimes W_{\leq p}) \oplus A^+, \text{ pour tout } p.$$

Preuve

Nous allons effectuer des changements de générateurs de type $w' = w + \sum_i a_i w_i$ avec $a_i \in A^+$ et $w_i \in \Lambda W$ de manière à ne pas changer D sur $W_{\leq k}$ et à ne pas changer la partie $d(w)$.

Ces changements se font par récurrence sur le degré cohomologique, et pour un degré fixé n , par récurrence sur le degré homologique. Supposons donc que la formule soit vérifiée sur $W^{<n}$ et $W_{<r}^n$ pour un $r \geq k$. Prenons une base $(w_i)_{i \in I}$ de W_r^n . Pour l'élément w_i , notons q l'indice minimal

tel que $D(w_i) - d(w_i) \in A^+ \otimes \Lambda^{\leq q} W$. Si $q \geq 2$, $D(w_i) - d(w_i)$ a une composante

$$\sum_j a_j \sigma_j^i \in A^+ \otimes \Lambda^q W,$$

les a_j formant une base de A^+ . Dans ce cas, comme $D^2 = 0$, l'hypothèse d'induction implique que pour chaque j on ait $d(\sigma_j^i) = 0$. Le fait que $(\Lambda W, d)$ soit un modèle bigradué permet donc d'affirmer l'existence d'un $\beta_j^i \in \Lambda^{q-1} W$ tel que $d(\beta_j^i) = \sigma_j^i$ pour chaque j . En remplaçant w_i par

$$w'_i = w_i - \sum_j a_j \beta_j^i,$$

on obtient une nouvelle base bihomogène de W_r^n telle que pour chaque i , $D(w'_i) - d(w'_i) \in (A^+ \otimes \Lambda^{\leq q-1} W)$, sans changer d . Par induction on peut donc supposer que pour chaque i , $D(w_i) - d(w_i) \in (A^+ \otimes W) \oplus A^+$. Soit s l'indice maximal tel que $D(w_i) - d(w_i)$ ait une composante

$$\sum_j a_j \sigma_j^i \in A^+ \otimes W_s.$$

Si $s > r$, le fait que $D^2 = 0$ et l'hypothèse d'induction montrent que $d(\sigma_j^i) = 0$, ce qui est impossible car $s > 0$. Par conséquent, $s \leq r$, et la preuve est complète. $\square$

Lemme 1.40. Soient $(A \otimes \Lambda W, D)$ et $(A \otimes \Lambda V, D)$ deux modèles minimaux relatifs, et

$$f : (A \otimes \Lambda W, D) \rightarrow (A \otimes \Lambda V, D)$$

un morphisme d'adgc. Supposons que $f|_A = Id_A$ et que l'application linéaire $Q(f) : W \rightarrow V$ soit injective.

Alors on peut étendre f en un isomorphisme

$$F : (A \otimes \Lambda W \otimes \Lambda Z, D) \rightarrow (A \otimes \Lambda V, D).$$

Preuve

On construit un modèle minimal relatif de f ,

$$\begin{array}{ccccc} (A \otimes \Lambda W, D) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (A \otimes \Lambda W \otimes \Lambda Z, D) & \longrightarrow & (\Lambda Z, \delta). \\ & \searrow f & \swarrow F \simeq & & \\ & & (A \otimes \Lambda V, D) & & \end{array}$$

Le quasi-isomorphisme F induit un quasi-isomorphisme

$$\overline{F} : (\Lambda W \otimes \Lambda Z, \overline{D}) \rightarrow (\Lambda V, \overline{D}).$$

Pour prouver que $\overline{F}$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que l'algèbre $(\Lambda W \otimes \Lambda Z, \overline{D})$ est minimale. Par construction des modèles relatifs minimaux,

$$\overline{D}(W) \subset \Lambda^{\geq 2}(W) \text{ et } \overline{D}(Z) \subset (\Lambda^+ W \otimes \Lambda Z) \oplus \Lambda^{\geq 2} Z.$$

Si $(\Lambda W \otimes \Lambda Z, \overline{D})$ n'était pas minimale, la partie linéaire de $\overline{D}$,

$$\overline{D}_0 : Z \rightarrow W$$

serait non nulle. Or, $Q(\overline{F}) : (W \oplus Z, \overline{D}_0) \rightarrow (V, 0)$ est un morphisme de complexes. Comme $W \hookrightarrow V$, il est impossible de trouver des bords dans W . Par conséquent $\overline{D}_0 = 0$, et $\overline{F}$ est un isomorphisme par unicité des modèles minimaux de Sullivan. Il en résulte que F aussi est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 1.41. Soit $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ un modèle minimal relatif de la fibration 1.7, dans laquelle $(\Lambda V, d)$ est le modèle minimal de (B, d) , alors $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ est le modèle minimal de Sullivan de E .

Preuve

Dans cette fibration, l'algèbre de Lie graduée L_X est libre et donc de centre nul. Par le Corollaire 1.33, on a la suite exacte

$$(1.8) \quad 0 \longrightarrow \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi_k(i) \otimes \mathbb{Q}} \pi_k(E) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi_k(p) \otimes \mathbb{Q}} \pi_k(B) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

pour chaque $k \geq 0$. Le modèle minimal de Sullivan de E , $(\Lambda X, \delta)$, s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(B) & \xrightarrow{A_{PL}(p)} & A_{PL}(E) & \xrightarrow{A_{PL}(i)} & A_{PL}(F) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) & \xrightarrow{\epsilon} & (\Lambda W, \overline{D}) \\ & \searrow \eta & \uparrow m \simeq & \nearrow & \\ & & (\Lambda X, \delta) & & \end{array}$$

La surjectivité de $\pi_k(p) \otimes \mathbb{Q}$ entraîne l'injectivité de $Q(\eta)$ et donc celle de η . Mieux encore, on déduit de l'exactitude de la suite 1.8 que $X = V \oplus Z$, avec $Z \xrightarrow[\cong]{i} W$, et on peut supposer que $Q(m)(z) = i(z)$. Il s'ensuit que $Q(m)(Z) \subset W$. Enfin, l'injectivité de $\pi_k(i) \otimes \mathbb{Q}$ entraîne la surjectivité de $Q(\epsilon \circ m)$. Par conséquent $Q(m)$ est injectif et on conclut par le Lemme 1.9. $\square$

1.8. CATÉGORIE DE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN

La *catégorie de Lusternik-Schnirelmann* d'un espace X , $catX$, est le plus petit entier naturel n tel que X peut être recouvert par $n + 1$ ouverts contractibles dans X . Par exemple la catégorie d'un espace est 0 si l'espace est contractible et la catégorie d'une sphère est 1. Une borne inférieure pour la catégorie est donnée par la cup longueur rationnelle de l'espace, définie par

$$cup_0(X) = \max\{n | \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) \text{ avec } \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \neq 0\}.$$

Par un résultat de Toomer [22], la catégorie du rationnalisé d'un espace simplement connexe est inférieure ou égale à la catégorie de X , et fournit une nouvelle borne inférieure pour la catégorie d'un espace :

$$cup_0(X) \leq catX_0 \leq catX.$$

La catégorie du rationnalisé s'appelle la catégorie rationnelle de X ; elle peut se déduire du modèle minimal [8].

Si (A, d_A) est une algèbre différentielle graduée commutative connexe, alors la nilpotence de (A, d_A) , $Nil(A, d_A)$, est le maximum de la longueur des produits non nuls d'éléments de $A^{\geq 1}$. La catégorie rationnelle d'un espace X , est inférieure à $Nil(A, d_A)$ pour toute algèbre différentielle (A, d_A) quasi-isomorphe au modèle minimal de X . Pour une variété, le résultat est meilleur ([8]) : La catégorie rationnelle d'une variété est égale à l'infimum des nilpotences des algèbres différentielles graduées qui sont quasi-isomorphes à son modèle minimal.

Les espaces de petites catégories ont fait l'objet d'études. Ainsi un espace est de catégorie rationnelle 1 s'il est une suspension, et de catégorie rationnelle 2 s'il a le type d'homotopie rationnel de la cofibre d'une application entre bouquet de sphères, sans être lui-même rationnellement un bouquet de sphères.

1.9. EXTENSION AU CAS NILPOTENT

Dans ce texte nous nous limiterons aux espaces de configurations de points dans une variété simplement connexe. Les problèmes relatifs à l'extension au cas nilpotent sont de deux ordres.

La première difficulté du cas nilpotent est le caractère non type fini du modèle $(\Lambda \overline{V}, 0)$, de l'espace des lacets d'un espace nilpotent. Dans ce texte, un certain nombre d'arguments vont utiliser le caractère type fini des modèles et ces arguments ne pourront pas facilement s'étendre.

La deuxième difficulté plus embêtante est que si M est une variété nilpotente compacte de dimension n , alors $M \setminus m_0$ n'est pas nécessairement une variété nilpotente. En effet, notons $\tilde{t} : S^{n-1} \rightarrow M \setminus m_0$ l'injection

d'une petite sphère entourant le point m_0 , l'action de $\pi_1(M)$ sur cet élément est non nilpotente. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple $M = S^1 \times S^2$. La variété moins un point $M \setminus m_0$ a le type d'homotopie de $S^1 \vee S^2$ et l'action de $\pi_1(S^1)$ sur $\pi_2(S^2)$ n'est pas nilpotente.

Comme le $\pi_1(M)$ n'agit pas de manière nilpotente sur $\pi_*(M \setminus m_0)$, la fibration homotopique associée à l'inclusion $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$ n'est pas nilpotente. En particulier son modèle ne fournit pas nécessairement le modèle de la fibre homotopique F .

L'utilisation des modèles minimaux nous oblige à nous restreindre à l'étude des variétés simplement connexes.