

CHAPITRE 2

Espaces de configurations

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts essentiels dans notre étude des espaces de configurations.

Pour rappel, l'espace des configurations de k points d'un espace X est le sous-espace de X^k défini par

$$F(X; k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

Exemple 2.1. (Groupes topologiques)

Soit G un groupe topologique dont l'élément neutre est noté e . L'application $\varphi : F(G; 2) \rightarrow G \times G \setminus \{e\} : (x, y) \mapsto (x, x^{-1}y)$ est clairement un homéomorphisme.

Exemple 2.2. ($F(\mathbb{R}^n; 2)$)

L'application $\psi : F(\mathbb{R}^n; 2) \rightarrow S^{n-1} : (x, y) \mapsto \frac{x-y}{|x-y|}$ est une équivalence d'homotopie, d'inverse homotopique $\psi' : S^{n-1} \rightarrow F(\mathbb{R}^n; 2) : x \mapsto (x, 0)$.

Cet exemple montre que deux espaces de même type d'homotopie, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par exemple, peuvent avoir des espaces de configurations de 2 points qui n'ont pas le même type d'homotopie. Toutefois, en 1995, N. Levitt démontre dans [18], que pour une variété M , compacte, connexe et différentiable, de dimension fixée, le type d'homotopie de l'espace des lacets $\Omega F(M; k)$ ne dépend que de celui de M .

Une des questions fondamentales de la théorie s'énonce alors comme suit : *Deux variétés de même type d'homotopie et de même dimension ont-elles des espaces de configurations de même type d'homotopie ?*

La première réponse est récente : R. Longoni et P. Salvatore [19], ont considéré les espaces lenticulaires $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$. Ces espaces sont des variétés de dimension 3 de même type d'homotopie, mais non difféomorphes. Ils ont montré que les espaces $F(L_{7,1}; 2)$ et $F(L_{7,2}; 2)$ n'ont pas le même type d'homotopie. Dans le cas de deux variétés simplement connexes de même dimension, le problème reste cependant ouvert. Néanmoins, P. Lambrechts et D. Stanley, [15], ont démontré que pour une variété M simplement connexe telle que $H^2(M; \mathbb{Q}) = 0$, le type d'homotopie rationnel de $F(M; 2)$ ne dépend que du type d'homotopie rationnel de M .

Fadell et Neuwirth furent les pionniers dans l'étude des espaces de configurations dans les variétés. En 1962, ils démontrent un théorème fondamental auquel nous consacrons la première section de ce chapitre.

La deuxième section est consacrée aux résultats de F.Cohen et S.Gitler concernant l'algèbre d'homologie de $\Omega F(\mathbb{R}^n; k)$, et celle de $\Omega F(M \setminus m_0; k)$, $M \setminus m_0$ désignant une variété simplement connexe M , privée d'un point. Enfin, dans les deux dernières sections nous étudions les propriétés de la classe diagonale $\Delta \in H^*(M) \otimes H^*(M)$.

2.1. THÉORÈME DE FADELL ET NEUWIRTH

Soit M une variété de dimension $n \geq 2$, $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de points de M , distincts deux à deux, et $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$, $m \geq 1$.

Théorème 2.3. (Fadell-Neuwirth) [7]

La projection $p_r : F(M \setminus Q_m; k) \rightarrow F(M \setminus Q_m; r)$ sur les $r \leq k$ premiers facteurs, définit un fibré localement trivial de fibre $F(M \setminus Q_{m+r}; k - r)$. De plus, si $m \geq 1$, alors p_r admet une section.

La preuve complète de ce théorème se trouve dans [7]. Nous nous contentons ici de construire une section pour $m \geq 1$ et $r = 1$.

Soit $D \subset M$ l'image du disque ouvert unitaire de $\mathbb{R}^n$, par un homéomorphisme $G : D^n \rightarrow D$ tel que $G(0) = q_1$ et tel que $q_i \in M \setminus D$, $2 \leq i \leq m$. Choisissons $k - 1$ points distincts $y_2, \dots, y_k$ dans l'image par G de la sphère de rayon $\frac{1}{2}$. On peut alors définir des fonctions continues

$$f_i : M \setminus Q_m \rightarrow M \setminus Q_m \text{ pour } 2 \leq i \leq k$$

par

$$f_i(x) = \begin{cases} y_i & \text{si } x \notin D, \\ G(|G^{-1}(x)|G^{-1}(y_i)) & \text{si } x \in \overline{D} \setminus q_1. \end{cases}$$

L'application

$$\sigma_{m,k} : M \setminus Q_m \rightarrow F(M \setminus Q_m; k)$$

définie par

$$(2.1) \quad \sigma_{m,k}(x) = (x, f_2(x), \dots, f_k(x))$$

est une section de p_1 .

Dans le cas particulier $m = 1$, nous obtenons ainsi des applications $s_i : M \setminus q_1 \rightarrow F(M \setminus q_1; k)$ définies par

$$(2.2) \quad s_i(x) = (f_2(x), \dots, f_i(x), x, f_{i+1}(x), \dots, f_k(x)).$$

Exemple 2.4. $(F(S^n; 3))$

$F(S^n; 2)$ a le type d'homotopie de S^n . En effet, les applications $\alpha : F(S^n; 2) \rightarrow S^n : (x, y) \mapsto x$ et $\beta : S^n \rightarrow F(S^n; 2) : x \mapsto (x, -x)$ sont homotopiquement inverses.

La projection sur le premier facteur $\alpha : F(S^n; 2) \rightarrow S^n$ est en fait un fibré de Fadell-Neuwirth de fibre contractible $S^n \setminus \{q_1\}$. L'espace $F(S^n; 3)$ a le type d'homotopie de l'espace tangent en sphère S^{n-1} à S^n , $T_{S^{n-1}}S^n$. Ceci résulte du diagramme commutatif suivant formé de fibrés localement triviaux

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\gamma'} & S^n \setminus \{q_1, q_2\} \\
 \downarrow i & & \downarrow j \\
 T_{S^{n-1}}S^n & \xrightarrow{\gamma} & F(S^n; 3) \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 S^n & \xrightarrow{\beta} & F(S^n; 2)
 \end{array}$$

où $\gamma(x, v) = (x, -x, \exp_x(v))$, $p(x, y, z) = (x, y)$, $\{q_1, q_2\}$ désigne l'ensemble formé des pôles nord et sud, $j(x) = (q_1, q_2, x)$, i désigne l'injection de la sphère unitaire dans l'espace tangent en q_1 et $\gamma'(v) = \exp_{q_1}(v)$.

En particulier, il existe une équivalence d'homotopie entre $F(S^2; 3)$ et $SO(3)$. On en déduit que $\pi_1(F(S^2; 3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui entraîne une solution élégante du problème de la corde de Dirac [24].

2.2. HOMOLOGIE DE $\Omega F(M \setminus m_0; k)$

Soit $V_{n,k}$ l'algèbre de Lie graduée libre engendrée par les générateurs $\{B_{i,j}\}_{k \geq i > j \geq 1}$ de degré n . On note $L(n, k)$ l'algèbre de Lie obtenue en quotientant $V_{n,k}$ par les relations :

$$(1) [B_{i,j}, B_{s,t}] = 0 \text{ si } \{i, j\} \cap \{s, t\} = \emptyset,$$

$$(2) [B_{i,j}, B_{i,t} + (-1)^n B_{t,j}] = 0 \text{ si } 1 \leq j < t < i \leq k,$$

$$(3) [B_{t,j}, B_{i,j} + B_{i,t}] = 0 \text{ si } 1 \leq j < t < i \leq k.$$

Ces relations sont connues sous le nom de "infinitesimal braid relations". Dans [2], F.Cohen et S.Gitler prouvent le

Théorème 2.5. (Cohen, Gitler) Si $n \geq 3$, l'homologie de $\Omega F(\mathbb{R}^n; k)$ est sans torsion, et on a un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\psi : L(n-2, k) \rightarrow PH_*(\Omega F(\mathbb{R}^n; k), \mathbb{Z})$$

qui induit un isomorphisme d'algèbres de Hopf

$$UL(n-2, k) \rightarrow H_*(\Omega F(\mathbb{R}^n; k), \mathbb{Z}).$$

Remarque 2.6. (1) Dans le cas particulier où $k = 2$, on obtient simplement

$$H_*(\Omega S^{n-1}, \mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega F(\mathbb{R}^n; 2), \mathbb{Z}) \cong \cup \mathbb{L}_{B_{2,1}}.$$

On reconnaît l'algèbre polynomiale engendrée par

$$[i\tilde{d}] \in \pi_{n-2}(\Omega S^{n-1})$$

où $i\tilde{d}$ est l'application adjointe à $id : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

(2) Le morphisme ψ du Théorème 2.5 est défini comme suit. Fixons les $k-1$ points $q_i = (2i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq k-1$ et notons

$$c_{r,i} : S^{n-1} \rightarrow F(\mathbb{R}^n; k)$$

l'application définie par

$$c_{r,i}(x) = (q_1, \dots, q_{r-1}, q_i + x, q_r, \dots, q_{k-1}).$$

Les éléments $c_{r,i}$, $i < r$, forment une base de $H_{n-1}(F(\mathbb{R}^n; k))$, [1]. Notons $\tilde{c}_{r,i} : S^{n-2} \rightarrow \Omega F(\mathbb{R}^n; k)$ les applications adjointes. L'application ψ est définie par

$$\psi(B_{ij}) = [\tilde{c}_{i,j}].$$

(3) Si $e : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ est un plongement de $\mathbb{R}^n$ dans une variété M , alors l'application composée

$$S^{n-1} \xrightarrow{c_{r,i}} F(\mathbb{R}^n; k) \xrightarrow{e} F(M; k) \xrightarrow{p_{i,r}} F(M; 2)$$

est homotope à l'application t définie dans l'introduction. Ici p_{ir} désigne la projection sur les facteurs d'indices i et r .

Soit m_0 un point de M et $M \setminus m_0 = M \setminus m_0$. Avec les applications $s_i : M \setminus m_0 \rightarrow F(M \setminus m_0; k)$ définies en 2.2, F.Cohen et S.Gitler démontrent le théorème de structure suivant pour les variétés moins un point :

Théorème 2.7. [2] Supposons que M soit une variété simplement connexe de dimension $n \geq 3$, alors

- (1) Tout plongement $e : \mathbb{R}^n \rightarrow M \setminus m_0$ induit un monomorphisme
 $H_*(\Omega e; \mathbb{Q}) : H_*(\Omega F(\mathbb{R}^n; k); \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(\Omega F(M \setminus m_0; k); \mathbb{Q})$
- (2) En tant qu'algèbre, $H_*(\Omega F(M \setminus m_0; k); \mathbb{Q})$ est engendrée par l'image de $H_*(\Omega e; \mathbb{Q})$ et les images des morphismes $H_*(\Omega s_i; \mathbb{Q})$, pour $1 \leq i \leq k$, les applications s_i étant définies en 2.2.
- (3) Les relations suivantes sont satisfaites dans $H_*(\Omega F(M \setminus m_0; k); \mathbb{Q})$:
- Les "infinitesimal braid relations" des $H_*(\Omega e; \mathbb{Q})(B_{i,j})$,
 - $[H_*(\Omega e; \mathbb{Q})(B_{i,j}), m_l] = 0$ si $l \neq i$, $l \neq j$ et m_l est dans l'image de $H_*(\Omega s_l; \mathbb{Q})$.

2.3. CLASSE DIAGONALE ET COHOMOLOGIE DE $F(M; 2)$

Soit M une variété fermée orientée de dimension n . Notons $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ la classe fondamentale de M en homologie. L'algèbre de cohomologie de M est une algèbre à dualité de Poincaré :

- $H^n(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot [\check{M}]$, $\langle [\check{M}], [M] \rangle = 1$,
- $H^k(M; \mathbb{Q}) = 0$ si $k > n$,
- pour chaque $x \in H^p(M; \mathbb{Q})$, il existe $y \in H^{n-p}(M; \mathbb{Q})$ tel que
 $\langle x \cdot y, [M] \rangle = 1$.

Définition 2.8. Nous dirons que M est une variété *polygène* si son algèbre de cohomologie rationnelle $H^*(M; \mathbb{Q})$ nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre. Dans le cas contraire, M sera dite *monogène*.

Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une base homogène de $H^*(M, \mathbb{Q})$. On démontre aisément le

Lemme 2.9. Il existe une base $(\beta_j)_{j \in I}$ de $H^*(M, \mathbb{Q})$ telle que

$$\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij} \cdot [\check{M}].$$

Définition 2.10. La classe diagonale de M est la classe définie par

$$\Delta = \sum_{i \in I} (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i \in (H^*(M) \otimes H^*(M))^n.$$

Lemme 2.11. La classe Δ ne dépend pas du choix de la base.

Preuve

Prenons une autre base α'_i et sa base duale β'_i . Il existe des nombres rationnels λ_i^j et μ_j^r avec

$$\alpha'_i = \sum_k \lambda_i^k \alpha_k, \beta'_j = \sum_r \mu_j^r \beta_r.$$

On en déduit

$$\alpha'_i \beta'_j = \sum_{k,r} \lambda_i^k \alpha_k \mu_j^r \beta_r = \sum_k \lambda_i^k \mu_j^k [\check{M}].$$

Comme $\alpha'_i \beta'_j = \delta_{ij} [\check{M}]$, on en déduit que le produit matriciel

$$\left(\lambda_i^k \right) \cdot \left(\mu_j^k \right)^t = Id.$$

En conséquence, le produit

$$\left(\mu_j^k \right)^t \cdot \left(\lambda_i^k \right) = Id.$$

La somme $\sum_i (-1)^{|\alpha'_i|} \alpha'_i \otimes \beta'_i$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^{|\alpha'_i|} \alpha'_i \otimes \beta'_i &= \sum_i (-1)^{|\alpha'_i|} \left(\sum_k \lambda_i^k \alpha_k \otimes \sum_r \mu_i^r \beta_r \right) \\ &= \sum_{k,r} (-1)^{|\alpha_k|} \left(\sum_i \lambda_i^k \mu_i^r \right) \alpha_k \otimes \beta_r \\ &= \sum_k (-1)^{|\alpha_k|} \alpha_k \otimes \beta_k. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.12. Pour chaque $\gamma \in H^*(M, \mathbb{Q})$, on a l'égalité suivante

$$\Delta(\gamma \otimes 1) = \Delta(1 \otimes \gamma).$$

Preuve

Décomposons $\alpha_i \gamma$ dans la base des α_k et $\beta_j \gamma$ dans la base des β_k .

$$\begin{aligned} \alpha_i \gamma &= \sum_j \lambda_i^j \alpha_j \text{ d'où } \lambda_i^j [\check{M}] = \alpha_i \gamma \beta_j, \\ \beta_j \gamma &= \sum_i \mu_j^i \beta_i \text{ d'où } \mu_j^i [\check{M}] = (-1)^{|\gamma| |\beta_j|} \alpha_i \gamma \beta_j. \end{aligned}$$

D'une part, on calcule

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma \otimes 1) &= \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} (\alpha_i \otimes \beta_i) (\gamma \otimes 1) \\ &= \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} (-1)^{|\gamma||\beta_i|} (\alpha_i \gamma \otimes \beta_i) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{|\alpha_i|+|\gamma||\beta_i|} \lambda_i^j (\alpha_j \otimes \beta_i).\end{aligned}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta(1 \otimes \gamma) &= \sum_j (-1)^{|\alpha_j|} (\alpha_j \otimes \beta_j \gamma) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{|\alpha_j|} \mu_j^i (\alpha_j \otimes \beta_i) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{|\alpha_j|+|\gamma||\beta_j|} \lambda_i^j (\alpha_j \otimes \beta_i).\end{aligned}$$

Comme

$$|\beta_i| = |\beta_j| + |\gamma| \text{ et } |\alpha_j| = |\alpha_i| + |\gamma|,$$

on a

$$|\alpha_i| + |\gamma||\beta_i| = |\alpha_j| + |\gamma||\beta_j| \pmod{2},$$

et ceci termine la preuve. $\square$

Lemme 2.13. L'idéal (Δ) engendré par Δ jouit de la propriété suivante :
Si un élément $\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i \in H^*(M) \otimes H^*(M)$ vérifie

$$\left(\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i\right)(\gamma \otimes 1) = \left(\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i\right)(1 \otimes \gamma)$$

pour tout $\gamma \in H^*(M; \mathbb{Q})$, alors $\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i \in (\Delta)$.

Preuve

Choisissons un générateur α_{i_0} de plus haut degré avec $\alpha_{i_0} \otimes \gamma_{i_0} \neq 0$ et supposons $\alpha_{i_0} \notin [\check{M}]$. Alors

$$\begin{aligned}0 &= \left(\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i\right)(\beta_{i_0} \otimes 1 - 1 \otimes \beta_{i_0}) \\ &= (-1)^{|\gamma_{i_0}||\beta_{i_0}|} [\check{M}] \otimes \gamma_{i_0} - \sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i \beta_{i_0},\end{aligned}$$

ce qui est absurde. En conséquence

$$\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i = (-1)^n [\check{M}] \otimes \rho + \sum_{|\alpha_i| < n} \alpha_i \otimes \gamma_i.$$

Dans ce cas posons

$$u = \sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i - \Delta(1 \otimes \rho).$$

Le fait que $u(x \otimes 1 - 1 \otimes x) = 0$ pour tout $x \in H^*(M; \mathbb{Q})$ et que $u \in H^{<n}(M; \mathbb{Q}) \otimes H^*(M; \mathbb{Q})$, implique que $u = 0$. Par conséquent $\sum_i \alpha_i \otimes \gamma_i$ appartient à l'idéal engendré par Δ . $\square$

L'intérêt de l'idéal (Δ) apparaît de suite dans le

Théorème 2.14. (Cohen-Taylor). Il existe un isomorphisme d'algèbres

$$H^*(F(M; 2); \mathbb{Q}) \cong \frac{H^*(M; \mathbb{Q}) \otimes H^*(M; \mathbb{Q})}{(\Delta)}.$$

2.4. CLASSE DIAGONALE ET INVOLUTION DE $M \times M$

Notons $\tau : M \times M \rightarrow M \times M$ l'involution définie par $\tau(m, m') = (m', m)$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ i_1 \swarrow & & \searrow i_2 \\ M \times M & \xrightarrow{\tau} & M \times M \\ \Delta \swarrow & & \searrow \Delta \\ & M & \end{array}$$

où Δ désigne l'application diagonale, induit un diagramme commutatif en cohomologie

$$\begin{array}{ccccc} & H^*(M) & & & \\ 1 \otimes \epsilon \nearrow & & \nwarrow \epsilon \otimes 1 & & \\ H^*(M) \otimes H^*(M) & \xleftarrow{H^*(\tau)} & H^*(M) \otimes H^*(M) & & \\ \cup \searrow & & \swarrow \cup & & \\ & H^*(M) & & & \end{array}$$

Il en résulte que pour chaque $u \in H^p(M; \mathbb{Q})$ et chaque $v \in H^q(M; \mathbb{Q})$, on a

$$\begin{aligned} H^p(\tau)(u \otimes 1) &= 1 \otimes u, \\ H^q(\tau)(1 \otimes v) &= v \otimes 1, \\ H^{p+q}(\tau)(u \otimes v) &= (-1)^{pq} v \otimes u. \end{aligned}$$

Lemme 2.15.

$$H^*(\tau)(\Delta) = (-1)^n \Delta.$$

Preuve

Ecrivons $\Delta = \sum_i (-1)^{a_i} a_i \otimes a_i^*$. On calcule que

$$H^*(\tau)(\Delta) = \sum_{i \in I} (-1)^{|a_i|} (-1)^{|a_i||a_i^*|} a_i^* \otimes a_i.$$

Les égalités suivantes

$$\langle [M]; (a_i^* \cup a_i) \rangle = (-1)^{|a_i||a_i^*|} \langle [M]; (a_i \cup a_i^*) \rangle = (-1)^{|a_i||a_i^*|},$$

impliquent que

$$H^*(\tau)(\Delta) = \sum_{i \in I} (-1)^{|a_i|} a_i^* \otimes (a_i^*)^*.$$

□