Conservation de l'énergie dans un système linéaire

Eric Deleersnijder, le 26 février 2002

On considère le système d'équations algébriques linéaires obtenu par discrétisation dans l'espace d'un problème différentiel dont les inconnues dépendent du temps t et de l'espace:

$$\frac{dx}{dt} = Dx \ , \tag{1}$$

où x est le vecteur d'inconnues et D est une matrice appropriée. On appelle "énergie" le produit scalaire du vecteur x par lui-même, $x^T x = |x|^2$. On suppose que le système conserve l'énergie: pour tout vecteur y le produit $y^T D y$, de sorte que

$$\frac{d}{dt}(x^T x) = 2x^T Dx = 0 \ . \tag{2}$$

Il faut que la matrice D soit antisymétrique. Pour le montrer, on suppose d'abord qu'elle est quelconque et on la décompose en sa partie symétrique, D_s, et sa partie antisymétrique, D_a, de sorte que $D = D_s + D_a$, avec $D_s^T = D_s$ et $D_a^T = -D_a$. Le produit $y^T D y$ qui doit être nul pour tout vecteur y s'écrit alors

$$y^T D y = y^T D_s y + y^T D_a y \ . \tag{3}$$

On vérifie sans peine que $y^T D_a y = (y^T D_a y)^T = y^T D_a^T y = -y^T D_a y$, ce qui implique que $y^T D_a y = 0$, pour tout vecteur y. La matrice D_s étant symétrique, on peut toujours l'écrire sous la forme d'un produit matriciel du type $D_s = S^T S$. Donc, $y^T D_s y = y^T S^T S y = (Sy)^T (Sy)$, une expression qui n'est nulle pour tout vecteur y qu'à la condition que toutes les composantes de S, et donc de D_s, soient nulles. La partie symétrique de la matrice D doit donc bien être nulle.

On discrétise dans le temps l'équation (1) par un schéma de type Euler dont le taux d'implicité est $\alpha \in [0,1]$:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = (1-\alpha) D x_n + \alpha D x_{n+1} \ . \tag{4}$$

On peut ré-écrire cet algorithme comme suit:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = \frac{1}{2} D(x_{n+1} + x_n) - \frac{1-2\alpha}{2} D(x_{n+1} - x_n) \ . \tag{5}$$

On multiplie (5) par $(x_{n+1} + x_n)^T$ et, après quelques manipulations, on obtient

$$\frac{|x_{n+1}|^2 - |x_n|^2}{\Delta t} = \frac{1-2\alpha}{2} (x_{n+1} - x_n)^T D (x_{n+1} + x_n). \tag{6}$$

En combinant (5) et (6), il vient

$$\boxed{|x_{n+1}|^2 - |x_n|^2 = (1-2\alpha)|x_{n+1} - x_n|^2 \ .} \tag{7}$$

En conséquence, pour $0 \le \alpha < 1/2$, $\alpha = 1/2$, et $1/2 < \alpha \le 1$, l'énergie augmente, reste constante et diminue, respectivement. En d'autres termes, le schéma semi-implicite (α=1/2) conserve l'énergie, les schémas à dominante explicite "explosent", tandis que les schémas à dominance implicite "implosent".

Oscillations d'inertie

- $$\frac{d\underline{v}}{dt} + 2\underline{\Omega} \times \underline{v} = 0$$

  où : • $\underline{v} = \underline{v}(t)$: vitesse

  • $\underline{\Omega} = cte$: vecteur "vitesse angulaire"

$$\underbrace{\underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt}}_{= \frac{d}{dt}\left(|\underline{v}|^2/2\right)} + \underbrace{\underline{v} \cdot \left(2\underline{\Omega} \times \underline{v}\right)}_{=0 \text{ car } 2\underline{\Omega} \times \underline{v} \perp \underline{v}} = 0.$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{|\underline{v}|^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{|\underline{v}|^2 = cte} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ énergie cinétique conservée.

- <u>résolution numérique</u>

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\underline{v}_n = \underline{v}(n\Delta t)$: notation conventionnelle.
(où Δt = incrément temporel)

discrétisation

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} + \alpha\, 2\underline{\Omega} \times \underline{v}_n + (1-\alpha)\, 2\underline{\Omega} \times \underline{v}_{n+1} = 0 \quad (2)$$

si : • $\alpha = 0$ méthode implicite

• $\alpha = 1/2$ méthode semi-implicite

• $\alpha = 1$ méthod explicite

algorithme numérique
ou "schéma numérique"

(en tout cas $0 \le \alpha \le 1$)

décomposer $\underline{v}$ en 2 parties :

$$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \quad \text{où : } \bullet\ \underline{u} \cdot \underline{\Omega} = 0$$

$$\bullet\ \underline{w} \cdot \underline{\Omega} = \pm |\underline{w}||\underline{\Omega}|$$

c'est-à-dire $\underline{u}$: partie de la vitesse $\perp$ à $\underline{\Omega}$

$\underline{w}$: " " " " // " "

$$\Rightarrow \quad 2\underline{\Omega} \times \underline{v} = 2\underline{\Omega} \times \underline{u} + \underbrace{2\underline{\Omega} \times \underline{w}}_{=0 \text{ car } \underline{\Omega} // \underline{w}}$$

$\Rightarrow$ le schéma numérique (2) s'écrit :

$$\frac{\underline{w}_{n+1} - \underline{w}_n}{\Delta t} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n}{\Delta t} + \alpha\, 2\underline{\Omega} \times \underline{u}_n + (1-\alpha)\, 2\underline{\Omega} \times \underline{u}_{n+1} = 0 \qquad (4).$$

$\Rightarrow$ (3) : $\boxed{\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n}$ (5)

(4) : $\underline{u}_{n+1} + 2(1-\alpha)\Delta t\, \underline{\Omega} \times \underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n - 2\alpha \Delta t\, \underline{\Omega} \times \underline{u}_n$

$$\left|\underline{u}_{n+1} + 2(1-\alpha)\Delta t\, \underline{\Omega} \times \underline{u}_{n+1}\right|^2 = \left|\underline{u}_n - 2\alpha\Delta t\, \underline{\Omega} \times \underline{u}_n\right|^2$$

$$|\underline{u}_{n+1}|^2 + 4(1-\alpha)^2 \Delta t^2 |\underline{\Omega}|^2 |\underline{u}_{n+1}|^2 = |\underline{u}_n|^2 + 4\alpha^2 \Delta t^2 |\underline{\Omega}|^2 |\underline{u}_n|^2$$

$$\text{car} \left\{ \begin{array}{l} |\underline{\Omega} \times \underline{u}|^2 = |\underline{\Omega}|^2 |\underline{u}|^2 - \underbrace{(\underline{\Omega} \cdot \underline{u})^2}_{=0} = |\underline{\Omega}|^2 |\underline{u}|^2 \\ \underline{u} \cdot (\underline{\Omega} \times \underline{u}) = 0 \end{array} \right.$$

poser : $$\gamma = \frac{1 + 4\,\Delta t^2 |\underline{\Omega}|^2 \alpha^2}{1 + 4\,\Delta t^2 |\underline{\Omega}|^2 (1-\alpha)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{on a :} & \gamma < 1 & \text{si} & 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ & \gamma = 1 & \text{si} & \alpha = \frac{1}{2} \\ & \gamma > 1 & \text{si} & \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{array}} \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\underline{u}_{n+1}|^2 = \gamma |\underline{u}_n|^2} \qquad (7)$$

énergie cinétique de la solution numérique :

$$|\underline{v}|^2 = |\underline{u} + \underline{w}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2\underbrace{\underline{u}\cdot\underline{w}}_{=0}$$

$$\Rightarrow |\underline{v}_{n+1}|^2 = |\underline{u}_{n+1}|^2 + |\underline{w}_{n+1}|^2 = \gamma |\underline{u}_n|^2 + |\underline{w}_n|^2$$

$$= |\underline{u}_n|^2 + |\underline{w}_n|^2 + (\gamma - 1)|\underline{u}_n|^2$$

$$= |\underline{v}_n|^2 + (\gamma - 1)|\underline{u}_n|^2$$

$$\boxed{|\underline{v}_{n+1}|^2 = |\underline{v}_n|^2 + (\gamma - 1)|\underline{u}_n|^2} \qquad (8)$$

donc : $$\boxed{|\underline{v}_n|^2 = |\underline{v}_0|^2 + (\gamma^n - 1)\,|\underline{u}_0|^2} \quad (9)$$

$\Longrightarrow$

- si $0 \le \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\underline{v}_n|^2 = |\underline{w}_0|^2 \le |\underline{v}_0|^2$
- si $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} |\underline{v}_n|^2 = |\underline{v}_0|^2$
- si $\frac{1}{2} < \alpha \le 1 \Rightarrow \gamma > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\underline{v}_n|^2 \longrightarrow \infty$ (EXPLOSION !)

schéma est dit <u>stable</u> pour $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$

schéma est dit <u>instable</u> pour $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$

<u>Note</u> : propriétés de stabilité <u>ne dépendent pas de Δt</u>

(cas rare....)