



Université catholique de Louvain

**MODELISATION ET OPTIMISATION
D’ACTIONNEURS PIEZOELECTRIQUES LINEAIRES
A ONDE PROGRESSIVE**

Christophe Vloebergh

Ingénieur Civil électro-mécanicien,
orientation mécatronique

Diplôme d’Etudes Approfondies en Sciences Appliquées

Thèse de doctorat

Composition du jury :

Professeur Thomas Pardoën (UCL-IMMC), président
Professeur Bruno Dehez (UCL-IMMC), promoteur
Professeur Francis Labrique (UCL-IMMC), promoteur
Professeur Betty Semail (Polytech’Lille-L2EP)
Professeur Yves Bernard (Supélec-LGEP)
Professeur Paul Fisette (UCL-IMMC)

Louvain-la-Neuve
Décembre 2010

Remerciements

Qu'il me soit permis de témoigner toute ma gratitude envers celles et ceux qui m'ont aidé et soutenu tout au long de ce travail !

Je remercie tout particulièrement Messieurs Bruno Dehez et Francis Labrique, promoteurs de cette thèse. Leurs conseils avisés et leurs encouragements constants m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ce travail.

Je désire également exprimer toute ma reconnaissance à Madame Betty Semail, ainsi qu'à Messieurs Yves Bernard, Paul Fisette et Thomas Pardoën pour l'intérêt qu'ils ont témoigné envers ce travail en acceptant de faire partie du jury.

Pour les nombreuses heures passées à développer un modèle multicorps du stator du moteur linéaire à onde progressive, à adapter le logiciel Robotran et à repousser au plus loin les limites de nos "machines" et de Simulink, je remercie chaleureusement Monsieur Jean-François Collard.

Pour la fabrication des différents éléments du prototype et du banc d'essai, je remercie Messieurs André Lengelé et Axel Jottard.

Merci aussi à mes collègues et amis du CEREM qui ont permis de créer une ambiance de travail agréable et sympathique.

Enfin, je remercie mes proches qui me soutiennent par leur amitié, leur présence ou leur amour.

Table des matières

Introduction	17
I Thèse	23
1 La piézoélectricité, historique et bases théoriques	25
1.1 Historique de la piézoélectricité	25
1.2 L'effet piézoélectrique	31
1.2.1 Principes	31
1.2.2 Les corps piézoélectriques	31
1.2.3 Les lois de la piézoélectricité	32
1.2.4 Les céramiques piézoélectriques	33
1.2.5 Modélisation de l'effet piézoélectrique	39
1.3 Conclusion	46
2 L'actionnement piézoélectrique : état de l'art et plan de la thèse	47
2.1 Les actionneurs piézoélectriques	48
2.1.1 Les principaux types d'actionneurs piézoélectriques . . .	49
2.2 Les moteurs piézoélectriques	53
2.2.1 Le moteur inchworm	53
2.2.2 Le moteur stick-slip	54
2.2.3 Les moteurs à onde progressive	55
2.3 Plan de l'étude	62
3 Modélisation du stator	65
3.1 Structure du stator étudié	65
3.2 Les modèles développés	66
3.2.1 Le modèle analytique	66

3.2.2	Le modèle multicorps	70
3.2.3	Le modèle éléments finis	75
3.3	Comparaison entre les fréquences propres calculées par les trois modèles	78
3.4	Conclusion	80
4	Optimisation de l'onde progressive	81
4.1	Optimisation par recombinaison de modes propres	82
4.1.1	Recombinaison des deux modes propres principaux	84
4.1.2	Recombinaison de tous les modes propres	88
4.1.3	Maximisation de l'onde progressive	89
4.1.4	Validation par une approche éléments finis	94
4.1.5	Conclusion	95
4.2	Optimisation par minimisation du taux d'ondes stationnaires	96
4.2.1	Calcul de la fonction $\hat{w}(x)$	96
4.2.2	Utilisation de $\hat{w}(x)$ pour caractériser l'onde de flexion	97
4.2.3	Optimisation de la qualité de l'onde progressive	100
4.2.4	Comparaison des deux méthodes	107
4.2.5	Conclusion	107
4.3	Minimisation du SWR à partir d'un échantillon de valeurs de $\hat{w}(x)$	109
4.3.1	Calcul des valeurs de $\hat{w}(x_p)$	109
4.3.2	Calcul de l'ellipse équivalente	110
4.3.3	Calcul du SWR local	111
4.3.4	Optimisation de la qualité de l'onde progressive	113
4.3.5	Validation par une approche éléments finis	113
4.3.6	Influence de l'amortissement sur l'optimisation des conditions d'excitation	113
4.3.7	Conclusion	115
4.4	Minimisation du SWR d'un stator libre à ses extrémités	116
4.5	Conclusion	117
5	Validation expérimentale	121
5.1	Description du banc d'essai	121
5.2	Mesure de l'amortissement dans le stator	124
5.3	Recherche des conditions d'excitation optimales	126
5.4	Conclusion	131

6	Modélisation multicorps du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive	133
6.1	Le contact et l'entraînement par friction	134
6.1.1	Le modèle de friction de Coulomb	134
6.1.2	Implémentation d'un modèle de contact et d'entraînement simplifié	135
6.1.3	Implémentation d'un modèle de contact et d'entraînement plus complexe	137
6.2	Le modèle électromécanique des stacks piézoélectriques	146
6.3	Conclusion	147
	Conclusions et perspectives	149
	Références bibliographiques	155
 II	 Annexes	 163
A	Modélisation des matériaux piézoélectriques par des tenseurs	165
A.1	Théorie des tenseurs : principes généraux	165
A.1.1	Scalars, vecteurs et tenseurs de rang 2	165
A.1.2	Transformations	167
A.1.3	Définition d'un tenseur	170
A.2	Polarisation électrique	170
A.2.1	Relations générales	170
A.2.2	Pyroélectricité	172
A.2.3	Ferroélectricité	172
A.3	Le tenseur des contraintes	173
A.3.1	Contraintes homogènes	173
A.3.2	Contraintes inhomogènes	174
A.4	Le tenseur des déformations et dilatations thermiques	175
A.4.1	Tenseur des déformations	175
A.4.2	Déformation et symétrie cristalline	176
A.4.3	Dilatation thermique	177
A.5	La piézoélectricité : tenseur de rang 3	177
A.5.1	Effet piézoélectrique direct	177
A.5.2	Effet piézoélectrique inverse	178
A.5.3	Réduction du nombre de modules indépendants par la notation matricielle et par la symétrie du cristal	178
A.6	L'élasticité : tenseur de rang 4	182
A.6.1	Loi de HOOKE	182

A.6.2	Notation matricielle	183
A.6.3	Compressibilité en volume, compressibilité linéaire d'un cristal	184
A.7	Thermodynamique des propriétés statiques des cristaux	184
A.7.1	Propriétés thermiques, électriques et mécaniques d'un cristal	185
A.7.2	Etude thermodynamique des effets thermoélastiques . .	188
A.7.3	Thermodynamique des propriétés thermiques, électriques et mécaniques	191
A.7.4	Relations entre les coefficients mesurés dans des condi- tions différentes	194
B	Plans de fabrication du prototype	201
C	Fiche technique de l'actionneur piézoélectrique TS18-H5-104	213

Table des figures

1	Disposition des éléments piézoélectriques dans les moteurs rotatifs	18
2	Stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive étudié	21
1.1	Photographie des frères CURIE et de Gabriel LIPPMANN [Web - 1]	25
1.2	Electromètre développé par les frères CURIE pour la mesure de l'effet piézoélectrique [Web - 2]	27
1.3	Photographie de Paul LANGEVIN [Web - 3]	28
1.4	Actionneur piézoélectrique multi-couches (MLA) [Apc - 2002]	31
1.5	Céramique piézoélectrique PZT	33
1.6	Polarisation des céramiques piézoélectriques	35
1.7	Cycle d'hystérèse (Polarisation P en fonction d'un champ élec- trique E)	37
1.8	Phénomène d'hystérèse mesuré sur une céramique PZT [Vlo - 2005]	38
1.9	Convention pour les notations tensorielles [Nye - 1961]	40
1.10	Interactions modélisées dans les équations tensorielles	42
1.11	Schéma équivalent du modèle de MASON	45
1.12	Schéma équivalent du modèle de MASON simplifié	46
2.1	Caractéristique de déformation des stacks	49
2.2	Bimorphe (<i>bender</i>) et stack piézoélectriques	50
2.3	Principe de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique amplifié	51
2.4	Exemples d'actionneurs ultrasoniques	53
2.5	Le principe du moteur inch-worm	54
2.6	Le principe de fonctionnement du moteur stick-slip	54
2.7	Trajectoire elliptique des points à la surface d'un moteur rotatif à onde progressive [Web - 4]	55

2.8	Trajectoire elliptique des points à la surface du moteur linéaire à onde progressive	56
2.9	Vue explosée d'un moteur piézoélectrique à onde progressive [Web - 4]	57
2.10	Principe de fonctionnement des moteurs rotatifs	59
2.11	Disposition des éléments piézoélectriques dans les moteurs rotatifs	59
2.12	Adaptation d'impédance	61
2.13	Superposition d'ondes stationnaires en quadrature	62
3.1	Moteur piézoélectrique étudié	66
3.2	Schéma du barreau vibrant étudié	69
3.3	Modèle de Huston d'un barreau flexible	72
3.4	Lumped parameter model du barreau sans ses excitateurs suivant la syntaxe Robotran	73
3.5	Lumped parameter model du barreau avec ses deux excitateurs suivant la syntaxe Robotran	74
3.6	Evolution de la valeur estimée des fréquences propres en fonction du nombre de segments utilisés dans la modélisation multicorps du stator pour le 10 ^{ieme} mode (923Hz), pour le 20 ^{ieme} mode (3692Hz) et pour le 40 ^{ieme} mode (14769Hz)	76
3.7	Evolution du nombre de modes propres que l'on peut simuler avec une précision donnée en fonction du nombre de segments présents dans le modèle multicorps (diamants bleus pour une erreur < 0.5% - carrés rouges pour une erreur < 1% - triangles jaunes pour une erreur < 5%)	79
4.1	Schéma du stator vibrant étudié	81
4.2	Evolution de l'amplitude des fonctions poids en fonction de la pulsation d'excitation pour une position d proche d'un ventre du mode propre correspondant	83
4.3	Evolution de l'amplitude des fonctions poids en fonction de la position d'excitation d pour une pulsation ω choisie entre deux pulsations propres consécutives	84
4.4	Formes d'ondes 1 et 2 correspondant aux équations (4.5) et (4.6) qui sont issues de la superposition des modes 21 et 22. La forme d'onde 1 est excitée par l'actionneur de gauche, la forme d'onde 2 par l'actionneur de droite	85
4.5	Onde de flexion obtenue lorsqu'on excite le barreau entre les modes 21 et 22	86

4.6	Formes d'ondes créées par les actionneurs de gauche et de droite après minimisation de la première condition sur les 6 modes principaux autour des modes 21 et 22 en considérant 500 modes propres	92
4.7	Onde de flexion obtenue après minimisation de la première condition sur les 6 modes principaux autour des modes 21 et 22 en considérant 500 modes propres	92
4.8	Illustration du phénomène de battement observé sur l'amplitude de l'onde de flexion quand on minimise l'erreur sur la première condition sur les 42 modes autour des modes 21 et 22 en considérant 500 modes propres	93
4.9	Onde de flexion obtenue dans les mêmes conditions qu'à la figure 4.7 et au tableau 4.2 en utilisant un modèle éléments finis du stator	95
4.10	Trajectoire de $\hat{w}(x)$ pour des valeurs quelconques de f et d (o marque le point de départ ($x = 0$) et * le point d'arrivée ($x = L$))	97
4.11	Décomposition de la trajectoire de $\hat{w}(x)$ en ondes progressives .	99
4.12	Evolution du SWR global après optimisation en fonction de f et d autour des fréquences propres correspondant aux 20 premiers modes propres	102
4.13	Sensibilité du SWR global en fonction de la fréquence d'excitation (o marque la valeur de la fréquence moyenne * celle de l'optimum)	103
4.14	Sensibilité du SWR global en fonction de la position d des actionneurs	103
4.15	Evolution du SWR local après minimisation du SWR global pour une fréquence d'excitation de 207Hz comprise entre les fréquences propres des modes 3 et 4	104
4.16	Evolution du SWR local après minimisation du SWR global pour une fréquence d'excitation de 476Hz comprise entre les fréquences propres des modes 5 et 6	105
4.17	Evolution du SWR local après minimisation du SWR global pour une fréquence d'excitation de 6621Hz comprise entre les fréquences propres des modes 20 et 21	106
4.18	Choix de l'échantillon de points autour de x_p	109
4.19	Représentation de $\hat{w}(x_p)$ dans le plan complexe	110

4.20	Onde de flexion obtenue dans les mêmes conditions qu'au tableau 4.2 en utilisant un modèle éléments finis du stator et en calculant le SWR sur un échantillonnage de 5 mesures issues de simulations numériques calculées sur un intervalle, centré au milieu du stator, dont la longueur correspond à la moyenne des longueurs d'ondes des modes propres principaux	114
4.21	Trajectoire de $\hat{w}(x)$ reconstituée autour du centre	115
4.22	Trajectoire de $\hat{w}(x)$ après optimisation entre les deux actionneurs (o représente l'actionneur de gauche, $*$ celui de droite)	117
4.23	Influence de la fréquence d'excitation sur le SWR au centre du barreau	118
5.1	Prototype du moteur linéaire à onde progressive	122
5.2	Prototype	123
5.3	Banc d'essai	124
5.4	Calibrage du vibromètre laser	125
5.5	Générateur de signal (1) et oscilloscope (2)	126
5.6	Problèmes liés à la détermination expérimentale de la trajectoire de $\hat{w}(x)$	127
5.7	Approximation des moyennes mesurées par une ellipse équivalente	129
5.8	Influence de la fréquence d'excitation sur le SWR au centre du barreau (la courbe continue représente les valeurs issues du modèle numérique, o représente les valeurs obtenues expérimentalement)	130
6.1	Interpolation par spline cubique de la surface de contact du stator pour garantir la continuité du contact avec le rotor (e et v représentent respectivement les vecteur tangent et le vecteur vitesse au contact)	134
6.2	Adaptation de la loi de Coulomb	135
6.3	Stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive étudié	136
6.4	Simulation de la trajectoire du rotor pendant $1ms$ quand le stator est excité à la fréquence de $4276Hz$	137
6.5	Résultats de simulation de la force tangentielle (6.3) appliquée au rotor	138
6.6	Schéma de principe du <i>foundation contact model</i>	139
6.7	Modélisation multicorps du stator et du rotor	141
6.8	Algorithme de calcul du modèle multicorps avec le modèle de contact et la transmission du mouvement du stator au rotor . .	143

6.9	Evolution de la position verticale d'un point matériel à la surface du barreau (visualisation de la mise en régime)	145
6.10	Evolution de la trajectoire d'un point matériel à la surface du barreau	145
6.11	Schéma équivalent du modèle de MASON du stack piézoélectrique	146
6.12	Fiche technique du stack piézoélectrique TS18-H5-104	148
6.13	Stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive étudié	151
6.14	Nouveau prototype de moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive	153
A.1	Thermodynamique des propriétés des cristaux piézoélectriques	185
B.1	Vue isométrique du prototype	201
B.2	Base du banc	202
B.3	Tiges de fixation	203
B.4	Supports de fixation des tiges sur la base du banc	204
B.5	Appuis simples	205
B.6	Supports de fixation de l'actionneur piézoélectrique sur les tiges du banc (partie supérieure)	206
B.7	Supports de fixation de l'actionneur piézoélectrique sur les tiges du banc (partie inférieure)	207
B.8	Cols de cygnes	208
B.9	Interfaces pour le collage de l'actionneur piézoélectrique	209
B.10	Supports de fixation au barreau (partie supérieure)	210
B.11	Supports de fixation au barreau (partie supérieure)	211
B.12	Tiges de fixation pour serrage du barreau	212
C.1	datasheet 1 du TS18-H5-104	214
C.2	datasheet 2 du TS18-H5-104	215

Liste des tableaux

3.1	Dimensions et propriétés mécaniques du stator étudié	65
3.2	Fréquences propres (correspondant au 10 premiers modes propres) calculées à partir de modèles multicorps composés respectivement de 11, 21 et 31 segments	75
3.3	Comparaison entre les fréquences propres calculées à partir des 3 modèles	78
4.1	Paramètres du barreau	90
4.2	Valeurs numériques des paires de fonctions poids a_n associées dans la combinaison de modes, ces résultats sont issus de la minimisation de la première condition sur les 6 modes principaux autour des modes 21 et 22. Nous avons obtenu, après optimisation, la position d'excitation optimale $d = 0.0326209m$ et la fréquence d'excitation optimale $f = 7283.33Hz$	91
4.3	Valeurs numériques des paires de fonctions poids a_n associées dans la combinaison de modes, ces résultats sont issus de la minimisation de la première condition sur les 42 modes autour des modes 21 et 22. Nous avons obtenu, après optimisation, la position d'excitation optimale $d = 0.0336416m$ et la fréquence d'excitation optimale $f = 7288.96Hz$	91
4.4	Fréquences propres des modes 21 et 22	94
5.1	Dimensions et propriétés mécaniques du prototype	121
5.2	Description du prototype et du dispositif de mesure illustré à la figure 5.2	124
5.3	Description du banc d'essai illustré à la figure 5.3	125
5.4	Moyenne des mesures de $\widehat{w}(x)$ en 6 positions	128
A.1	cosinus directeurs	167

A.2	tenseur d_{ijk}	179
A.3	matrice d_{ij}	179
A.4	conversion des indices	179
A.5	intensité des effets	196
A.6	différences relatives	197

Introduction

Contexte du travail

Les progrès réalisés en matière de développement de matériaux piézoélectriques ont permis, depuis le début des années 80, le développement de nouveaux types d'actionneurs : les moteurs piézoélectriques.

Par rapport aux moteurs classiques, comme les machines synchrones ou asynchrones, ces moteurs peuvent développer, à faible vitesse, des couples massiques dix fois supérieurs à ceux générés dans des machines à aimants permanents de taille comparable [Nog - 1990]. De plus, leur principe de fonctionnement permet un verrouillage mécanique naturel de la partie mobile en l'absence d'alimentation. Ces avantages permettent de développer des moteurs qui intègrent à la fois les fonctions d'un moteur, d'un réducteur et d'un frein d'immobilisation ce qui leur confèrent une grande souplesse d'intégration dans les systèmes mécatroniques.

Néanmoins certaines difficultés technologiques et financières ralentissent leur développement industriel. Citons, en particulier, le coût important des céramiques piézoélectriques, la difficulté de les fixer à la structure mécanique, les problèmes liés à la transmission du mouvement qui est le plus souvent réalisée par friction et les difficultés liées à leur alimentation. Les matériaux piézoélectriques sont des dispositifs de nature capacitive qu'il faut alimenter le plus souvent à haute tension et parfois à haute fréquence.

Objectifs du travail

Parmi les moteurs piézoélectriques, le plus utilisé actuellement est, sans doute, le moteur rotatif à onde progressive développé au début des années 80 par Toshiiku Sashida [Sas - 1993] et commercialisé à la fin des années 80 par la firme Shinsei Co. Ltd.

Leur principe de fonctionnement repose sur la génération, à l'aide de céramiques piézoélectriques, de deux ondes stationnaires sinusoïdales de même fréquence et de même amplitude décalées spatialement d'un quart de longueur d'onde et temporellement d'un quart de période (figure 1). Ces deux ondes se combinent entre-elles dans un stator circulaire pour former une onde progressive qui transfère par friction un mouvement de rotation au rotor dans la direction opposée à celle de l'onde progressive.

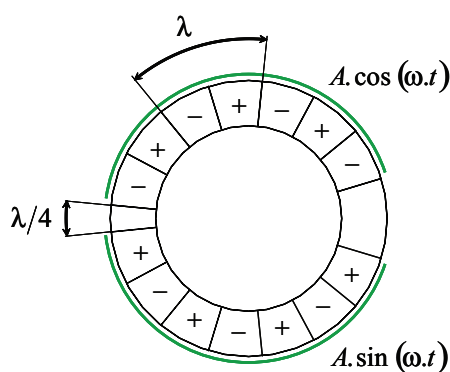


Figure 1 – Disposition des éléments piézoélectriques dans les moteurs rotatifs

Ces moteurs, bien connus, ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche que l'on retrouve dans de nombreuses publications ([Fly - 1997], [Gir - 2002], [Hag - 1995], [Sas - 1993]).

L'objectif de notre thèse est d'exploiter le principe de fonctionnement de ces moteurs dans le cadre des moteurs linéaires et de nous intéresser, en particulier, à la génération de l'onde progressive dans leur stator.

En effet, comme cette fois, le stator est de longueur finie, contrairement au stator circulaire assimilable à un barreau de longueur infinie, il est impossible de générer deux ondes stationnaires de même fréquence décalées spatialement et temporellement de $\pi/2$. Il faut donc avoir recours à une autre technique pour générer l'onde progressive.

- Une première technique est de générer une onde progressive à une extrémité du stator à l'aide d'un actionneur piézoélectrique et de l'absorber à l'aide d'un autre actionneur avant qu'elle n'atteigne l'autre extrémité du stator afin d'éviter la réflexion de l'onde incidente qui créerait une onde stationnaire dépourvue de propriété d'entraînement. Cette technique est la plus répandue, on retrouve sa description et son exploitation dans de nombreuses publications ([Fer - 2004], [Giu - 2000], [Les - 1998],

[Neu - 2006], [Par - 2005], [Pro - 1986], [Riz - 1999], [Sod - 2004]). De plus, nous l'avons étudiée dans le cadre de notre travail de fin d'études et nous avons constaté qu'il était difficile d'absorber l'onde incidente efficacement [Les - 1998], [Vlo - 2003].

- Une seconde technique est d'exciter le stator à une fréquence située entre les fréquences de deux modes propres successifs à l'aide de deux actionneurs situés à une distance spécifique des extrémités du stator de façon à exciter préférentiellement deux modes propres successifs et de créer, par la combinaison de ces modes, une onde progressive [Loh - 2000]. Cette technique, moins connue, présente l'inconvénient qu'il est difficile de supprimer complètement les ondes stationnaires produites.

C'est cette dernière technique que nous avons choisi d'étudier dans le cadre de notre thèse. Nous développerons, en particulier, des modèles du stator de ces moteurs qui permettront de définir un critère capable de quantifier le taux d'onde stationnaire présent dans le stator. Nous utiliserons ensuite ce critère dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer les conditions d'excitation qui minimisent le taux d'onde stationnaire et qui permettront de concevoir un moteur linéaire dont l'onde progressive est optimisée.

Contributions scientifiques

Les contributions scientifiques principales de notre thèse sont le développement de modèles analytiques et numériques du stator d'un moteur piézoélectrique linéaire et leur exploitation en vue de définir un critère objectif : le taux d'onde stationnaire qui quantifie la qualité de l'onde progressive créée à partir de la superposition de modes propres. Nous utilisons ensuite ce critère afin de déterminer les conditions d'excitation du stator qui optimisent la qualité de l'onde progressive obtenue.

Nous avons tout d'abord développé un modèle analytique du stator, décrit à la figure 2, qui est composé d'un barreau métallique posé sur appuis simples et qui est mis en vibration à l'aide de deux actionneurs piézoélectriques situés à une distance donnée de ses extrémités. Ce modèle qui exprime l'onde de flexion produite en fonction des modes propres du stator, nous a permis d'établir le principe de production d'une onde progressive à partir de la superposition de modes propres en fonction des conditions d'excitation (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) et de mettre en évidence l'importance de la contribution de chaque mode propre à la maximisation de la qualité de l'onde progressive en fonction de leur poids respectif.

Ces observations nous ont permis de développer un critère d'optimisation,

basé sur une approche totalement différente, qui caractérise localement la qualité de l'onde progressive obtenue en décomposant, en chaque point du stator, l'onde de flexion en deux ondes progressives qui se propagent dans des directions opposées.

Pour déterminer comment décomposer l'onde de flexion, nous sommes repartis de la solution du modèle analytique et nous avons séparé la dépendance temporelle de la dépendance spatiale de l'onde de flexion en l'exprimant comme une fonction complexe. La dépendance spatiale de l'onde de flexion s'exprime alors sous la forme d'une fonction complexe dont on peut représenter la trajectoire dans le plan complexe.

Nous définissons ensuite un critère géométrique qui approxime, en chaque point du stator, la trajectoire de la dépendance spatiale de l'onde de flexion et qui est équivalent à décomposer l'onde de flexion en deux ondes progressives qui se propagent dans des directions opposées. Connaissant l'amplitude de ces deux ondes progressives, il est alors très facile de mesurer le taux d'onde stationnaire (SWR) local de l'onde de flexion.

La valeur moyenne du SWR local calculé en chaque point le long du stator fournit un critère sur la qualité de l'onde dans tout le barreau statorique : le SWR global. Nous pouvons dès lors utiliser ce critère dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer les conditions d'excitation optimales du stator qui minimisent le SWR global et, par conséquent, les conditions qui maximisent la qualité de l'onde progressive parcourant le stator vibrant.

Nous avons ensuite montré qu'on pouvait se contenter de minimiser le SWR local au centre du stator pour maximiser la qualité de l'onde progressive sur la totalité du stator et qu'il était possible d'appliquer cette méthode d'optimisation à partir d'un échantillon de valeurs de l'onde de flexion. Cet échantillon pouvant être issu d'une simulation numérique, à partir d'un modèle éléments finis, ou de mesures expérimentales.

Pour autant que l'excitation soit sinusoïdale, cette technique permet donc d'étendre la détermination des conditions d'excitation qui maximisent la qualité de l'onde progressive à des stators dont la forme, la composition, la section transversale, les conditions aux extrémités sont différentes de celles du stator initialement choisi pour développer le modèle analytique (figure 2).

Une autre contribution scientifique de notre thèse est le développement d'un modèle multicorps du stator également appelé lumped parameter model. L'idée de base de ce modèle est de considérer le stator vibrant comme une succession de petits segments rigides articulés et d'exploiter le logiciel Robotran, développé dans notre centre de recherche, le CEREM, afin de générer les équations cinématiques et dynamiques de ces segments sous une forme symbolique.

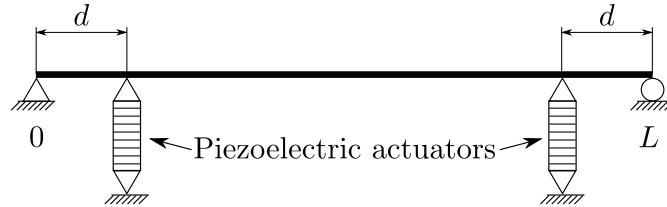


Figure 2 – Stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive étudié

Ceci permet de simplifier les équations et de rendre le code plus efficace surtout dans le cas de simulations de systèmes complexes contenant de nombreux corps. Nous avons montré que cette approche était la plus prometteuse si on voulait modéliser le moteur complet incluant les actionneurs piézoélectriques, le rotor, l'entraînement par friction et finalement, développer un algorithme de commande du moteur.

Ces contributions scientifiques ont fait l'objet de trois publications à des congrès [Vlo - 2008a], [Vlo - 2008b], [Vlo - 2009] et de deux publications dans des revues scientifiques [Vlo - 2010a], [Vlo - 2010b].

Structure du document

Le rapport de notre thèse est divisé en 6 chapitres :

- Au chapitre 1, nous dressons un état de l'art de l'effet piézoélectrique. Après un bref historique de la recherche en matière de piézoélectricité, nous y présentons, en particulier, la description et la modélisation des phénomènes piézoélectriques dans les cristaux et les céramiques piézoélectriques.
- Au chapitre 2, Nous dressons un état de l'art de l'actionnement piézoélectrique. Nous présentons, en particulier, les moteurs piézoélectriques linéaires à onde progressive en insistant sur les techniques de génération de l'onde progressive.
- Au chapitre 3, nous présentons les modèles du stator que nous avons développés (le modèle analytique, le modèle multicorps et le modèle éléments finis). Nous comparons, ensuite, les fréquences propres calculées par ces trois modèles.
- Au chapitre 4, nous montrons comment optimiser l'onde progressive à partir de deux techniques. La première utilise la recombinaison des modes propres calculés à partir du modèle analytique. La seconde exploite un

critère de minimisation du taux d'onde stationnaire basé sur une décomposition en chaque point de l'onde de flexion en deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées. Nous montrons ensuite comment exploiter ce critère à partir d'un échantillon de mesures de l'onde de flexion dans le stator.

- Au chapitre 5, nous présentons un dispositif expérimental et nous recherchons les conditions d'excitation qui maximisent la qualité de l'onde progressive à l'aide du critère de minimisation du taux d'onde stationnaire, présenté au chapitre 4, et de mesures sur le dispositif expérimental. Nous comparons ensuite ces résultats à ceux obtenus à partir d'un modèle numérique du dispositif.
- Au chapitre 6, nous présentons les autres phénomènes qu'il faut modéliser pour permettre la description complète du fonctionnement d'un moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive. Nous y présentons, en particulier, comment intégrer au modèle multicorps du stator, présenté au chapitre 3, un modèle de contact entre le stator et le rotor, un modèle de la force d'entraînement par friction, ainsi qu'un modèle électromécanique des actionneurs piézoélectriques.

Première partie

Thèse

Chapitre 1

La piézoélectricité, historique et bases théoriques

1.1 Historique de la piézoélectricité

L'effet piézoélectrique direct fut signalé pour la première fois par HAUY en 1817. Certains auteurs prétendent qu'il était déjà connu auparavant et parlent également de chimistes hollandais qui auraient écrit un ouvrage à son sujet en 1703 ; quoiqu'il en soit, ce n'est qu'en 1880 que Pierre et Jacques CURIE entreprirent l'étude systématique de l'effet piézoélectrique dans les cristaux. C'est pourquoi, on les considère généralement comme les *inventeurs* de la *piézoélectricité*.

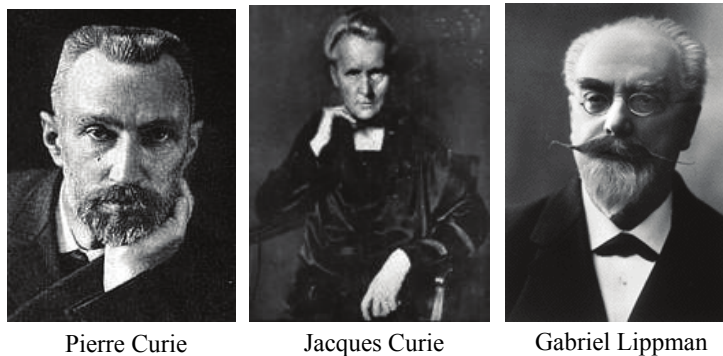


Figure 1.1 – Photographie des frères CURIE et de Gabriel LIPPMANN [Web - 1]

En 1880, Pierre et Jacques CURIE publièrent la première démonstration expérimentale montrant qu'il existait un lien entre le phénomène de piézo-électricité et la structure cristalline de certains matériaux [Cur - 1881a]. Leur expérience consistait en une mesure des charges surfaciques apparaissant sur certains cristaux lorsqu'ils étaient soumis à des contraintes mécaniques. Dans le monde scientifique de l'époque, on considéra ce phénomène comme une découverte de première importance qu'on baptisa *piézoélectricité* pour la distinguer d'autres phénomènes alors à l'étude comme la *pyroélectricité* (électricité générée à partir de l'échauffement de cristaux). Les frères Curie affirmèrent qu'il existait une corrélation mutuelle entre les effets électriques dus à un changement de température et les effets électriques dus à des contraintes mécaniques, et qu'ils avaient utilisé cette correspondance non seulement pour choisir les cristaux pour leurs expériences mais également pour déterminer les coupes en leur sein. Selon eux, cette démonstration était la confirmation de prédictions issues de leur compréhension des origines cristallographiques de la pyroélectricité (certaines asymétries au sein du cristal). Les frères Curie n'ont, cependant, pas prédit que pour les cristaux piézoélectriques (qui produisent de l'électricité s'ils sont soumis à des contraintes mécaniques), il existe un effet réciproque : le matériau piézoélectrique se déforme lorsqu'il est soumis à un champ électrique. Cette propriété, appelée *effet piézoélectrique inverse*, fut mathématiquement déduite de l'effet piézoélectrique direct grâce aux principes fondamentaux de la thermodynamique par LIPPMANN en 1881 [Lip - 1881]. Les frères Curie confirmèrent immédiatement l'existence de l'effet inverse et continuèrent leurs recherches afin d'obtenir la preuve quantitative de la complète réversibilité des déformations électro-élasto-mécaniques dans les cristaux piézoélectriques [Cur - 1881b].

A partir de là, après seulement deux ans de travail interactif au sein de la communauté scientifique européenne, des chercheurs établirent les fondements de la science concernant les applications piézoélectriques :

- l'identification des cristaux piézoélectriques sur base de leur structure cristalline asymétrique ;
- l'échange réversible entre énergie électrique et énergie mécanique ;
- l'utilité de la thermodynamique dans le but de quantifier des relations complexes comprenant des variables électriques, thermiques et mécaniques.

Dans les 25 années qui suivirent (jusqu'en 1910), les scientifiques travaillèrent énormément pour étoffer ces fondements en une structure complète en déterminant les 20 cristaux naturels qui produisent des phénomènes piézoélec-

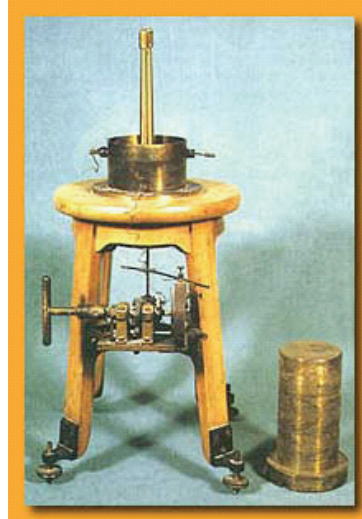


Figure 1.2 – Electromètre développé par les frères CURIE pour la mesure de l'effet piézo-électrique [Web - 2]

triques et en définissant complètement les 18 coefficients piézo-macroscopiques à partir d'un développement rigoureux issu de l'étude thermodynamique du cristal et en utilisant l'analyse tensorielle. En 1910, VOIGT publia l'ouvrage *Lerbuch der Kristallphysik* [Voi - 1910] qui devint la référence contenant l'ensemble des connaissances atteintes jusque là en cristallographie. Pendant ces 25 années, on ne trouva aucune application technologique à la piézoélectricité. Cette dernière restait un phénomène obscur même pour les spécialistes en cristallographie ; de plus, les mathématiques nécessaires à sa compréhension étaient très compliquées. Il faut attendre la fin de la Première Guerre mondiale pour trouver une utilité aux composants piézoélectriques. En 1917, LANGEVIN perfectionna un détecteur sous-marin à ultrasons. Ce transducteur était formé d'une mosaïque de fins cristaux de quartz collés entre deux plaques d'acier montées dans une housse protectrice pour l'immersion. Il parvint à mesurer la profondeur des fonds marins par effet Doppler en émettant un signal haute fréquence (à 50 kHz). Depuis lors, on n'a jamais cessé de perfectionner des SONARS utilisant l'effet piézoélectrique [Mas - 1947].

Le succès du SONAR de LANGEVIN a stimulé une intense activité de recherche autour des composants piézoélectriques utilisant des cristaux naturels. Voici quelques exemples de cette activité entre 1920 et 1940 [Pal - 1947] :

- des résonateurs en quartz sont utilisés pour stabiliser la fréquence d'os-

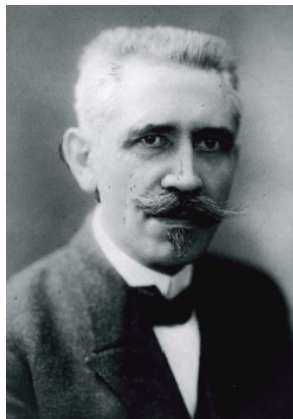


Figure 1.3 – Photographie de Paul LANGEVIN [Web - 3]

cillateurs tubes à vide ;

- la propagation d’ondes ultrasoniques a permis de développer de nouvelles méthodes pour tester les propriétés des matériaux, en particulier, leur viscosité et leur élasticité ;
- une nouvelle gamme de mesure de pression a permis d’étudier les explosifs, la combustion interne des moteurs, ainsi que les vibrations, accélérations et impacts, jusqu’alors non mesurables.

En fait, c’est durant cette période que furent conçues la plupart des applications piézoélectriques qui nous sont familières (microphones, accéléromètres, filtres, SONARS, etc.). Il faut néanmoins remarquer que les matériaux disponibles à l’époque limitaient la performance de ces systèmes et leur commercialisation.

Durant la Seconde Guerre mondiale, les Américains, les Japonais et les Russes découvrirent que certaines céramiques avaient des constantes diélectriques plus de 100 fois supérieures aux cristaux naturels [Jaf - 1971]. La découverte de procédés de fabrication de céramiques efficaces et peu coûteux ainsi que l’augmentation de performance accompagnant l’utilisation des céramiques vont intensifier la recherche et le développement des composants piézoélectriques. Les avancées dans la connaissance des matériaux céramiques se distinguent en 3 catégories :

- le développement de la famille du Titanate de Barium et ensuite de la famille du Titanate Zirconate de Plomb ;
- le développement de la connaissance en matière de corrélation entre la

structure cristalline et l'activité électro-mécanique des matériaux ;

- le développement des techniques de dopages de ces deux familles par des éléments métalliques en vue d'atteindre les propriétés désirées : constante diélectrique, raideur, coefficients de couplage piézoélectriques, facilité de polarisation, etc.

Toutes ces avancées contribuèrent jusqu'en 1970 à la création de nombreuses applications dont voici quelques exemples [Nie - 2001] :

- des SONARS plus puissants basés sur de nouvelles géométries de transducteurs en céramique ;
- des cartouches phonos en céramique, plus performantes et meilleur marché ;
- des systèmes d'injection piézoélectrique qui génèrent la tension nécessaire à la commande de l'électro-vanne d'injection grâce à la compression d'un empilement de céramiques ;
- de petits microphones sensibles ;
- des transducteurs de tonalité audio en céramique ;
- des relais piézoélectriques ;
- des allumeurs piézoélectriques pour les chaudières.

Il faut remarquer que pendant cette période, et spécialement aux États-Unis, la recherche sur les matériaux piézoélectriques était dirigée par des sociétés privées qui ne communiquaient pas entre elles. Les raisons de cette politique étaient les suivantes :

- le personnel travaillait dans une ambiance de confidentialité ;
- les entrepreneurs déposaient des brevets ou préféraient garder le secret de leurs travaux afin de réaliser un maximum de profit ;
- les céramiques étaient, par nature, très difficiles à créer mais facilement exploitables, une fois le procédé connu.

Cette politique a entraîné une stagnation dans le développement d'applications piézoélectriques, même si la majeure partie des applications utilisées de nos jours datent des années 70 [Nie - 2001].

Contrairement aux Américains, les Japonais créèrent une association entre entreprises et universités pour promouvoir la recherche en matière de piézoélectricité. Cette politique se montra rapidement payante : développement de nouvelles connaissances, de nouvelles applications et procédés, et même, une nouvelle famille de matériaux piézoélectriques aux performances comparables aux PZT mais dépourvus de tout brevet. Grâce à ces nouvelles piézocéramiques, les entreprises japonaises développèrent de nombreux filtres dont l'utilisation fut très répandue dans les télévisions et les radios. Avec le temps, le marché de

ces produits ne cessa d'augmenter et par rapport au Japon, le reste du monde avait pris un retard important [Nie - 2001].

Le succès commercial du Japon a encouragé les autres pays à accentuer leur recherche sur les composants piézoélectriques. A partir de 1980, le nombre de brevets déposés chaque année et le nombre de parutions (articles scientifiques, ouvrages ...) en la matière ont fortement augmenté. On a également étudié les problèmes de positionnement par des actionneurs à substrat PZT annulaire [Nie - 2001]. Cependant, pour obtenir un niveau de déformation acceptable, il était indispensable de soumettre le matériau piézoélectrique à des tensions très élevées. Par exemple, des anneaux PZT de 0.5mm d'épaisseur nécessitaient une tension d'alimentation de l'ordre de 1000V, ce qui est trop élevé pour beaucoup d'applications.

En 1988, on met sur le marché des actionneurs multi-couches (MLAs pour Multi-Layer array) (figure 1.4)[Apc - 2002], dont la tension d'alimentation (généralement inférieure à 200V) est bien adaptée à l'électronique moderne tout en garantissant des déformations acceptables (environ 0.1 % de leur longueur) ce qui leur ouvre une large gamme d'applications.

L'objectif actuel est de concevoir de petits actionneurs utiles et bon marché qui nécessitent de faibles puissances et consomment peu d'énergie, tout en étant fiables même dans des environnements hostiles. La recherche en vue d'un perfectionnement de produits piézoélectriques progresse. Et la perspective d'un important développement économique et technologique autour de la piézoélectricité semble certain.

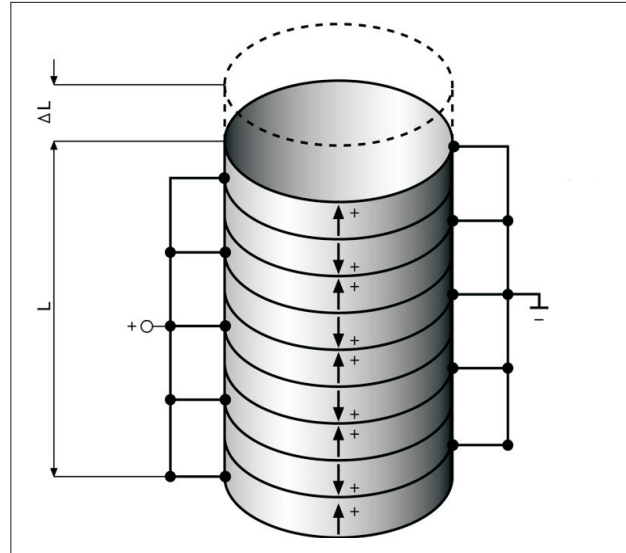


Figure 1.4 – Actionneur piézoélectrique multi-couches (MLA) [Apc - 2002]

1.2 L'effet piézoélectrique

1.2.1 Principes

L'effet piézoélectrique est la propriété que présentent certains cristaux ou céramiques (corps polycristallins composés de microcristaux d'orientations aléatoires) anisotropes de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique, engendrant l'apparition de charges électriques à la surface du matériau (effet direct), et de se déformer lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique (effet inverse) [Cad - 1946].

1.2.2 Les corps piézoélectriques

L'effet piézoélectrique ne pourra s'observer que dans les corps non conducteurs, exclusivement, puisque dans les conducteurs, la charge se répartit sur la totalité de la surface conductrice. Pour que les électrons puissent se déplacer suivant une direction privilégiée, sous l'effet d'efforts de traction ou de compression, il faut que cette direction trouve son origine dans la structure même du corps ; l'effet piézoélectrique ne pourra donc se manifester que dans les corps dont l'édification (la construction par l'assemblage de constituants élémentaires) est soumise à un certain ordonnancement [Enc - 2000].

On peut rencontrer dans la nature des corps dont les constituants élémentaires sont assemblés soit d'une façon ordonnée soit d'une façon non-ordonnée. Dans le premier cas, on parle de cristaux ; dans le second cas, de corps amorphes [Enc - 2000].

Suivant les expériences mettant en évidence l'effet piézoélectrique, celui-ci ne peut se manifester que dans certains cristaux non-conducteurs. Une étude plus approfondie de la physique des cristaux a permis aux frères CURIE de distinguer ceux qui, parmi les cristaux, présentent un effet piézoélectrique.

1.2.3 Les lois de la piézoélectricité

Partant de ces considérations, Pierre et Jacques CURIE ont défini avec l'aide de Gabriel LIPPMANN les conditions nécessaires pour qu'un cristal soit piézoélectrique sous la forme de quatre lois : *les lois de CURIE-LIPPMANN* [Pal - 1947].

- **Première loi :** *La piézoélectricité se manifeste dans tous les cristaux qui ne possèdent pas de centre de symétrie, à l'exception de ceux appartenant à la classe tétragonale parahémiédrique.*
- **Deuxième loi :** *L'effet piézoélectrique ne se manifeste dans les cristaux piézoélectriques que suivant les directions dans lesquelles le cristal présente une dissymétrie.*
- **Troisième loi :** *Lorsqu'on exerce sur deux faces opposées d'un parallélépipède rectangle d'un cristal piézoélectrique un effort F , les charges créées sont directement proportionnelles à l'effort F et directement proportionnelles au rapport $\frac{S'}{S}$ (S' étant les surfaces sur lesquelles apparaissent les charges et S celles sur lesquelles s'exerce l'effort F). On appelle cet effet : **l'effet piézoélectrique direct.***
- **Quatrième loi :** *Quand on soumet un parallélépipède rectangle à un champ électrique, il s'exerce sur les deux faces opposées une force qui provoque la déformation du cristal et qui est directement proportionnelle à la différence de potentiel appliquée et directement proportionnelle au même rapport $\frac{S'}{S}$. On appelle cet effet : **l'effet piézoélectrique inverse de LIPPMANN.***

1.2.4 Les céramiques piézoélectriques

Les microcristaux qui constituent certaines céramiques (figure 1.5) présentent, au-dessus d'une température critique, appelée température de CURIE (température à laquelle la permittivité diélectrique atteint son maximum et où toute polarisation disparaît), une structure cubique symétrique, ne possédant pas de moment dipolaire (figure 1.5(1)). En dessous de la température de Curie, ces microcristaux présentent une structure tétragonale ou rhomboédrique symétrique (proche de la structure cubique) et possèdent un moment dipolaire qui dépend de la composition de la céramique (figure 1.5(2)). Les microcristaux tétragonaux, distribués de manière aléatoire, constituent localement autant de domaines individuellement polarisés (ou dipôles), et chaque domaine polarisé est individuellement piézoélectrique. Du fait de leur comportement ferroélectrique, l'application d'un champ électrique peut inverser ou orienter ces domaines dans certaines directions (figure 1.6). La céramique dans son ensemble devient alors, par la conjugaison de ces effets partiels, un corps polycristallin piézoélectrique.

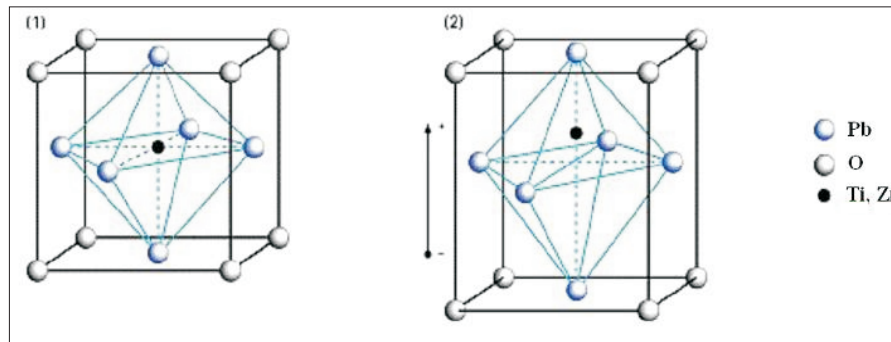


Figure 1.5 – Céramique piézoélectrique PZT
[Apc - 2002]

1.2.4.1 Constitution

La plupart des céramiques piézoélectriques polarisées utilisées pour l'actionnement sont donc des matériaux ferroélectriques polycristallins qui correspondent à la formule générale $A^{2+}B^{4+}O_3^{2-}$, où A représente un ion métallique divalent tels que le plomb Pb ou le baryum Ba , et B un ion métallique tétravalent tels que le titane Ti ou le zirconium Zr . Les céramiques les plus répandues sont composées de titanate de baryum ou titanate zirconate de plomb

(appelée plus communément : céramique PZT). Il en existe également d'autres fabriquées à partir de titanates, niobates ou zirconates de calcium, de baryum ou de plomb [Jaf - 1971].

Les céramiques piézoélectriques polarisées possèdent des coefficients piézoélectriques plus élevés, une plus grande stabilité physique et chimique, ainsi que des températures de fonctionnement plus élevées que les cristaux piézoélectriques naturels. De plus, étant facilement usinables, elles conviennent bien à la production de masse à faible coût, ce qui justifie leur prépondérance dans les applications industrielles.

1.2.4.2 Procédé de fabrication

Le procédé de fabrication des céramiques consiste, dans un premier temps, à mélanger, dans des proportions adéquates, de fines poudres d'oxydes métalliques tels que ceux cités à la section 1.2.4.1 [Shr - 1987]. Ces poudres sont chauffées, entraînant la réaction des constituants et la formation d'un composé uniforme, qui est à nouveau broyé en fines particules.

L'ajout d'un liant organique entraîne la cohésion des particules et permet le formage dans des matrices ayant la forme du produit désiré. L'élément obtenu est chauffé à une température comprise entre 950°C et 1000°C afin d'en extraire le liant et d'en assurer la résistance mécanique.

Selon un programme de chauffage et une durée spécifique, un second traitement thermique entre 1250°C et 1350°C lui est appliqué. Celui-ci complète les liaisons mécaniques entre les constituants du matériau et permet d'obtenir une structure cristalline plus dense.

Enfin, l'élément est refroidi, rectifié si nécessaire avant de fixer des électrodes sur les surfaces appropriées par un autre traitement thermique.

1.2.4.3 Polarisation

Les microcristaux tétraonaux qui constituent autant de dipôles au sein d'une céramique, ne sont pas orientés de manière aléatoire : les dipôles dont l'orientation du moment dipolaire est relativement proche s'alignent entre eux pour former des régions d'alignement local, appelées domaines de WEISS, possédant un moment dipolaire local non nul (figure 1.6(1)).

L'orientation du moment dipolaire associé à un domaine de WEISS diffère approximativement de 90° ou de 180° par rapport à celui du domaine voisin. En effet, les dipôles dont l'orientation du moment dipolaire est proche de celle d'un domaine se joignent à celui-ci. Ceux dont l'orientation est trop différente se joignent à un autre domaine d'orientation plus proche.

Étant donnée la distribution aléatoire de ces domaines de WEISS dans la céramique, aucune polarisation ou effet piézoélectrique global n'y apparaît. La céramique est donc considérée comme isotrope.

Néanmoins, la céramique peut être rendue globalement piézoélectrique, dans toute direction choisie, par un traitement de polarisation. Pour ce faire, la céramique est exposée à un champ électrique continu intense comprise entre 1 et 10kV/mm , généralement sous une température légèrement inférieure à sa température de Curie (l'orientation des dipôles est en effet facilitée par une température élevée, sans pour autant dépasser la température de Curie, sous peine de voir disparaître toute polarisation). Sous l'action de ce champ, le nombre de domaines alignés avec celui-ci croît aux dépens des autres domaines, et le matériau subit un allongement dans la direction du champ (figure 1.6(2)). Lorsque le champ est supprimé, les dipôles demeurent fixés dans un alignement approximatif, donnant à la céramique une polarisation et une déformation rémanentes, la rendant de ce fait anisotrope et piézoélectrique (figure 1.6(3)).

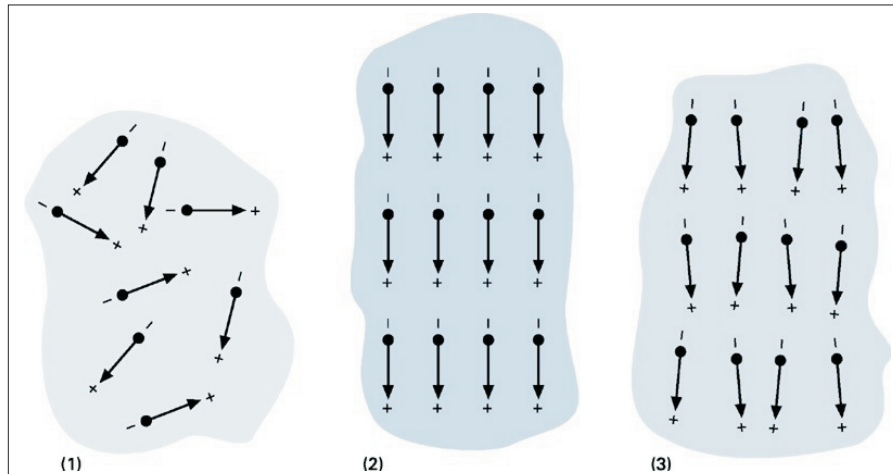


Figure 1.6 – Polarisation des céramiques piézoélectriques

[Apc - 2002]

1.2.4.4 Hystérèse

Lorsque les céramiques piézoélectriques sont ferroélectriques, l'évolution de la polarisation P en fonction du champ électrique E décrit un cycle d'hystérèse (figure 1.7).

Si une céramique ferroélectrique, initialement non polarisée, est soumise à un champ électrique croissant, les dipôles s'alignent de plus en plus avec le champ et la polarisation augmente selon une courbe initiale (courbe en pointillés à la figure 1.7).

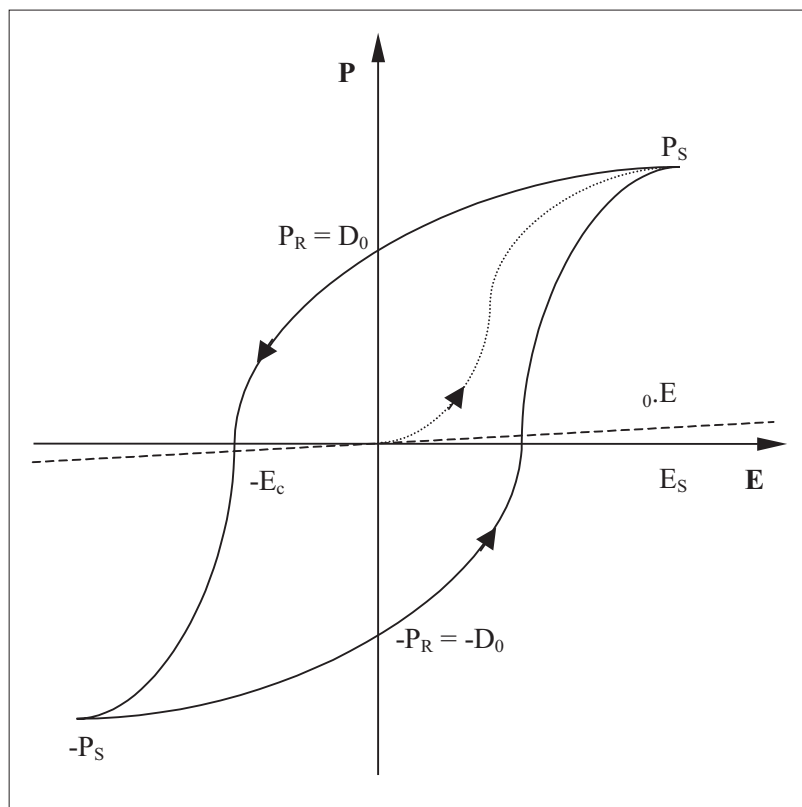
Lorsque le champ atteint une certaine valeur E_S , la polarisation cesse de croître puisque tous les dipôles sont alignés avec le champ. Le matériau a atteint sa polarisation de saturation P_S .

Si le champ est diminué jusqu'à une valeur nulle, les dipôles perdent de leur alignement puisque, en l'absence d'un champ électrique externe, l'orientation de ceux-ci est limitée à certaines directions cristallographiques privilégiées. Cependant, ils ne retrouvent pas leur alignement initial, mais demeurent dans la direction cristallographique privilégiée la plus proche de celle du champ de polarisation. Il reste donc un degré d'alignement important, la polarisation ne retombe donc pas à zéro mais à une valeur intermédiaire, appelée polarisation rémanente P_R .

Si le champ augmente maintenant dans la direction opposée, la polarisation de l'échantillon tombe à une valeur nulle (le champ vaut alors $-E_C$), puis augmente dans la direction négative jusqu'à atteindre la polarisation de saturation $-P_S$. Le champ nécessaire pour supprimer la polarisation rémanente P_R est appelé champ coercitif E_C . En réduisant le champ à une valeur nulle, la polarisation $-P_S$ tombe à la polarisation rémanente $-P_R$.

Enfin, si le champ augmente à nouveau dans la direction positive, la polarisation passe par une valeur nulle à E_C , et éventuellement, augmente à nouveau jusqu'à la polarisation de saturation P_S .

Puisque l'allongement du matériau est proportionnel à sa polarisation, nous observons également un effet d'hystérèse dans la caractéristique de déformation d'une céramique piézoélectrique en fonction du champ électrique appliqué, comme le montre le relevé expérimental effectué sur une céramique PZT (figure 1.8) [Vlo - 2005].

Figure 1.7 – Cycle d'hystérèse (Polarisation P en fonction d'un champ électrique E)

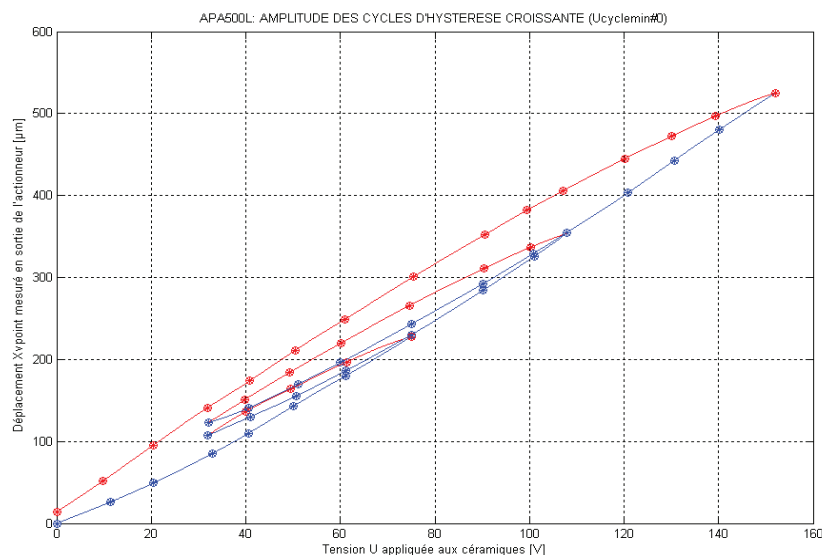


Figure 1.8 – Phénomène d'hystérèse mesuré sur une céramique PZT [Vlo - 2005]

1.2.4.5 Influences de la température

En fonction de la composition des céramiques, la température influence de manière importante ou non les caractéristiques intrinsèques du matériau piézoélectrique. L'approximation qui consiste à considérer celles-ci comme constantes n'est par conséquent valable, dans la plupart des cas, que pour de faibles variations de température.

Plus particulièrement, la permittivité diélectrique à contrainte constante augmente avec la température. Cette augmentation est due à une diminution de mobilité des porteurs avec l'augmentation des collisions couplée à l'agitation thermique. La permittivité atteint son maximum à la température de CURIE.

Au-delà de cette température, chaque microcristal composant la céramique possède une structure cubique symétrique, ne possédant pas de moment dipolaire, le matériau est alors complètement dépolarisé [Jaf - 1954].

Des variations de température peuvent induire des déplacements de charges et des champs électriques dans les matériaux piézoélectriques, c'est l'effet *pyroélectrique*. Lorsque la température augmente, une tension supplémentaire se développe avec la même polarité que la tension de polarisation. Inversement,

lorsque la température diminue, la tension générée possède une polarité opposée à la tension de polarisation, pouvant entraîner la dépolarisation du matériau.

Ainsi, de fortes variations de température peuvent générer de relativement hautes tensions, capables de dépolariser le matériau.

Les céramiques piézoélectriques subissent, comme tout matériau, une dilatation lorsque la température augmente.

Bien que les températures habituelles de fonctionnement des céramiques se situent généralement dans la première moitié de l'intervalle allant de 0°C à leur température de CURIE, elles peuvent également fonctionner à basse température.

Aux températures cryogéniques (températures inférieures à -150°C), le rapport entre l'allongement obtenu à ces températures et l'allongement obtenu à 0°C descend en dessous des 60%, et peut même atteindre les 20 à 30%. A ces températures, les céramiques présentent une forte réduction de leur capacité électrique, une diminution des pertes diélectriques, de l'hystérèse, de la constante de contrainte piézoélectrique et une forte augmentation de la valeur du champ électrique coercitif [Yuh - 1991].

Les céramiques deviennent alors extrêmement stables face à la dépolarisation électrique.

1.2.5 Modélisation de l'effet piézoélectrique

L'effet piézoélectrique prend ses sources au niveau de la maille cristalline. Ces mailles étant anisotropes, nous aurons besoin d'une représentation mathématique tridimensionnelle des grandeurs à considérer. Nous choisissons par conséquent de modéliser les effets de la piézoélectricité, ainsi que les autres interactions cristallines, au moyen de tenseurs car ils permettent de décrire l'influence d'une propriété physique qui dépend de la direction [Bri - 1986].

Nous modélisons donc, à l'aide de tenseurs, le matériau piézoélectrique comme un simple milieu continu anisotrope qui possède certaines propriétés de symétrie qui nous permettent de simplifier certaines composantes des tenseurs qui décrivent ces propriétés.

Pour reprendre les résultats de la mécanique classique des milieux continus, nous nous plaçons sous l'hypothèse des petits déplacements. Ceci signifie que les déplacements mis en jeu sont proportionnellement beaucoup plus petits que les dimensions du cristal. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas des céramiques piézoélectrique, dont les déformations sont de l'ordre du dixième de pourcent.

L'annexe A décrit en détails la modélisation des matériaux piézoélectriques par des tenseurs. Nous nous contentons ici d'en reprendre les éléments essen-

tiels.

Nous représentons les tenseurs en respectant la notation décrite à la figure 1.9 et en utilisant la convention de notation des indices muets donnée par EINSTEIN : *Quand un indice intervient deux fois dans un même monôme, la sommation par rapport à cet indice est automatiquement sous-entendue.*

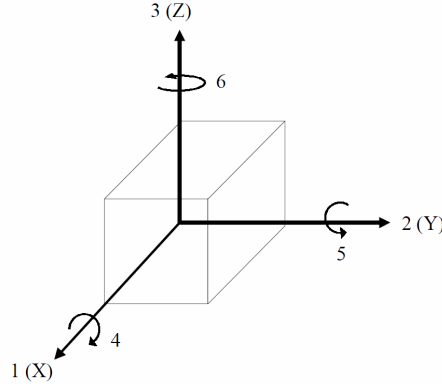


Figure 1.9 – Convention pour les notations tensorielles [Nye - 1961]

1.2.5.1 Les équations tensorielles de la piézoélectricité

Suivant ces considérations, nous pouvons écrire la relation qui décrit l'effet piézoélectrique direct qui exprime la polarisation électrique du matériau lorsqu'il est soumis à des contraintes mécaniques :

$$P_i = d_{ij}\sigma_j, \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.1)$$

où le tenseur P_i représente le vecteur de polarisation électrique, d_{ij} le module piézoélectrique et σ_j le tenseur des contraintes mécaniques.

De même, nous pouvons écrire la relation qui décrit l'effet piézoélectrique inverse qui exprime la déformation du matériau lorsqu'il est soumis à un champ électrique :

$$\varepsilon_j = d_{ij}E_i, \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.2)$$

où le vecteur E_i représente l'intensité du champ électrique dans le cristal et les composantes du tenseur des déformations ε_j représentent les modifications de forme du cristal. Les coefficients d_{ij} qui lient le champ électrique à la déformation mécanique dans l'effet inverse sont les mêmes que ceux qui lient la contrainte mécanique à la polarisation électrique dans l'effet direct.

Il n'y a pas que les effets piézoélectriques (1.1) et (1.2) qui modifient l'état d'équilibre du cristal, d'autres effets thermiques ou élastiques peuvent également influencer son état d'équilibre. Les propriétés thermiques, électriques et mécaniques sont donc liées l'une à l'autre et se rapportent toutes à un état d'équilibre du cristal. On peut donc, dès lors, traduire leurs effets sur un cristal en équilibre avec ce qui l'entoure, sans que l'état du cristal ne se modifie dans le temps, à l'aide de transformations thermodynamiques réversibles [Nye - 1961].

La figure (1.10) schématise les relations qui lient les propriétés présentes dans les matériaux piézoélectriques. Aux trois sommets sont portés la température T , le champ électrique E_i et la contrainte σ_j , que l'on considère généralement comme les actions appliquées au cristal. Les trois sommets du triangle intérieur portent l'entropie S par unité de volume, le déplacement diélectrique D_i et la déformation ε_j , qui représentent respectivement les effets directs de ces actions. Les relations liant ces grandeurs représentées par les droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles sont appelées les trois effets principaux :

- un accroissement de température produit, dans une transformation réversible, une augmentation de l'entropie par unité de volume : $dS = \frac{C_T}{T} dT$, où C_T est la capacité calorifique de l'unité de volume et T , la température absolue ;
- une variation dE_l du champ électrique ($l = 1, 2, 3$) entraîne une variation dD_i du déplacement électrique : $dD_i = \Xi_{il} dE_l$, où Ξ_{il} est le tenseur de permittivité absolue du matériau ;
- une variation de la contrainte $d\sigma_k$ avec ($k = 1, 2, \dots, 6$) produit une variation de déformation $d\varepsilon_j = s_{jk} d\sigma_k$, où s_{jk} est le tenseur des souplesses élastiques.

A côté des effets directs, il existe des effets couplés, ils sont représentés sur la figure par des droites joignant deux sommets non placés dans le même coin. Ces effets couplés appartiennent à trois catégories distinctes :

- les effets électrothermiques liés au phénomène de pyroélectricité ;
- les effets électromécaniques liés au phénomène de piézoélectricité ;
- les effets thermoélastiques.

Dans chacune de ces catégories, on peut distinguer plusieurs effets.

1. Parmi les effets électromécaniques, on distingue :
 - l'effet piézoélectrique direct,
 - l'effet piézoélectrique inverse.
2. Parmi les effets électrothermiques, on distingue :
 - l'effet électrocalorifique : l'entropie (chaleur) engendrée par un champ électrique,

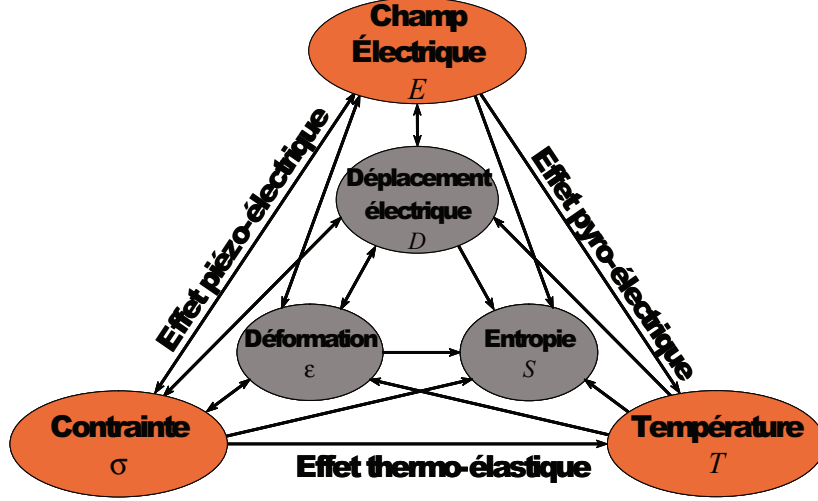


Figure 1.10 – Interactions modélisées dans les équations tensorielles

- la chaleur de polarisation : l'entropie engendrée par déplacement électrique,
 - l'effet pyroélectrique : la polarisation du matériau due à une variation de température.
3. Parmi les effets thermoélastiques, on distingue :
- la chaleur de déformation : l'entropie produite par la déformation,
 - l'effet piézocalorifique : l'entropie produite par la contrainte,
 - la dilatation thermique : la déformation produite par un changement de température,
 - la pression thermique : la modification de température sans déformation entraîne une variation de la contrainte appliquée au cristal.

Les quatre derniers effets couplés, représentant les effets thermoélastiques, lient des scalaires à des tenseurs de rang 2 et sont donc eux-mêmes représentés par des tenseurs de rang 2. Ainsi, par exemple, pour la dilatation thermique, on obtient la relation ($d\varepsilon_j = \alpha_j dT$) où α_j est le tenseur des dilatations thermiques.

Pour les effets couplés relatifs à la piézoélectricité, on procède de manière similaire. Sous forme différentielle, l'effet direct est donné par :

$$dP_i = d_{ij} d\sigma_j \quad (1.3)$$

Or $D_i = \chi_0 E_i + P_i$, d'où $dP_i = dD_i - \chi_0 dE_i$ et si on maintient constant le

champ électrique dans le cristal, $dD_i = dP_i$ et donc :

$$dD_i^E = d_{ij}^E d\sigma_j^E \quad (1.4)$$

Pour exprimer l'effet direct, nous pouvons utiliser l'une ou l'autre des équations (1.3) et (1.4).

Si nous exprimons les transformations thermodynamiques du cristal en choisissant comme variables indépendantes (σ, E, T) , les sommets du triangle externe de la figure 1.10, et comme fonctions d'état, les variables (ε, D, S) , les sommets du triangle intérieur de la figure 1.10, nous pouvons écrire les relations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_j &= \overbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \sigma_k}\right)_{E,T}}^1 d\sigma_k + \overbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial E_i}\right)_{\sigma,T}}^2 dE_i + \overbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial T}\right)_{\sigma,E}}^3 dT \\ dD_i &= \overbrace{\left(\frac{\partial D_i}{\partial \sigma_k}\right)_{E,T}}^4 d\sigma_k + \overbrace{\left(\frac{\partial D_i}{\partial E_l}\right)_{\sigma,T}}^5 dE_l + \overbrace{\left(\frac{\partial D_i}{\partial T}\right)_{\sigma,E}}^6 dT \\ dS &= \overbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_k}\right)_{E,T}}^7 d\sigma_k + \overbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial E_i}\right)_{\sigma,T}}^8 dE_i + \overbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\sigma,E}}^9 dT \end{aligned} \quad (1.5)$$

où chaque coefficient différentiel constitue la quantification d'un effet physique, les autres effets étant alors supposés constants :

1. représente la déformation élastique ;
2. représente l'effet piézoélectrique inverse ;
3. représente la dilatation thermique ;
4. représente l'effet piézoélectrique direct ;
5. représente la permittivité électrique ;
6. représente l'effet pyroélectrique ;
7. représente l'effet piézocalorifique ;
8. représente l'effet électrocalorifique ;
9. représente la capacité calorifique.

Après intégration et linéarisation, ces équations se transforment en :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j &= s_{jk}^{E,T} \sigma_k + d_{ij}^T E_i + \alpha_j^E \Delta T \\
D_i &= d_{ij}^T \sigma_j + \Xi_{il}^{\sigma,T} E_l + p_i^\sigma \Delta T \\
\Delta S &= \alpha_j^E \sigma_j + p_i^\sigma E_i + \frac{C^{\sigma,E}}{T} \Delta T
\end{aligned} \tag{1.6}$$

avec i et $l = 1, 2, 3$ et j et $k = 1, 2, \dots, 6$.

Si on ne tient pas compte des effets thermiques, les équations reprises en (1.6) prennent la forme bien connue :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j &= s_{jk}^E \sigma_k + d_{ij} E_i \\
D_i &= d_{ij} \sigma_j + \Xi_{il}^\sigma E_l
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2.5.2 Simplification des équations tensorielles

Lorsqu'on choisit une céramique piézoélectrique dans laquelle une direction de conversion piézoélectrique est fortement privilégiée au détriment des autres, ce qui est le cas, en particulier, pour les actionneurs multi-couches, les équations tensorielles (1.6) se réduisent en équations scalaires, puisqu'alors, on peut ne tenir compte que des relations suivant la direction privilégiée qui nous intéresse pour décrire le comportement de l'actionneur.

Par exemple, si la céramique travaille en compression-extension suivant la direction 1 du repère définissant la convention des notations tensorielles (figure 1.9), les équations décrites en (1.7) se transforment en :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= s_{11}^E \sigma_1 + d_{11} E_1 \\
D_1 &= d_{11} \sigma_1 + \Xi_{11}^\sigma E_1
\end{aligned} \tag{1.8}$$

En intégrant ces équations sur tout le volume du cristal, on obtient les éléments du circuit équivalent de MASON [Mas - 1952] :

- le facteur de conversion piézoélectrique ou facteur de force : $\eta = \frac{-d_{11} w}{s_{11}^E}$
- la capacité électrique de la céramique piézoélectrique : $C_0 = \frac{\Xi_{11}^\sigma t w}{l}$
- les impédances mécaniques de la céramique : $Z_a = -j Z_0 \sin(\frac{\omega l}{v})$ et $Z_b = Z_c = j Z_0 \tan(\frac{\omega l}{2v})$ avec $Z_0 = w t \sqrt{\rho / s_{11}^E}$ et $v = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}^E}}$

où l représente la longueur de la céramique, w sa largeur, t son épaisseur et ρ sa masse volumique.

On retrouve ces éléments sur le schéma équivalent de MASON de la figure 1.12 ou 1.11 suivant qu'une des deux directions d'actionnement est bloquée ou non. V représente la tension d'alimentation, F_i et $\dot{u}_i$ ($i = 1$ ou 2) sont respectivement les forces appliquées et les vitesses de déformation de la céramique. Z_a , Z_b et Z_c représentent les impédances mécaniques de la céramique en vibration qui peuvent être ramenées à une représentation équivalente de type masse-ressort-amortisseur. C_0 est la capacité électrique de la céramique et η son rapport de conversion piézoélectrique.

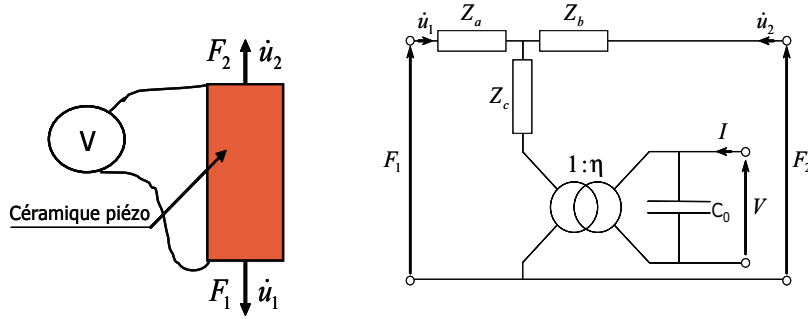


Figure 1.11 – Schéma équivalent du modèle de MASON

Le schéma de la figure 1.11 peut être simplifié lorsqu'une des extrémités de la céramique est bloquée (figure 1.12). L'impédance mécanique Z_m est alors égale à la somme des impédances mécaniques Z_c et Z_b . Z représente l'impédance mécanique du système actionné par la céramique piézoélectrique. L'impédance mécanique Z_m peut être décomposée en un circuit R-L-C série qui a une capacité C qui vaut $\frac{8}{\pi^2} \frac{s_{11}^E l}{tw}$, une inductance L qui est égale à la demi-masse de la céramique et qui vaut $\frac{wtl\rho}{2}$ et une résistance R qui doit être déterminée expérimentalement puisque dans les équations tensorielles (1.7), on ne tient pas compte des pertes mécaniques.

On peut également déterminer expérimentalement les éléments du circuit équivalent de MASON (Figure 1.11) en imposant à la céramique piézoélectrique d'osciller à une fréquence proche de sa fréquence de résonance [Mas - 1952]. En effet, à la fréquence de résonance, la céramique produit des vibrations d'amplitudes maximales qui sont plus faciles à mesurer. L'expérience montre que cette fréquence est très proche de la fréquence de résonance élastique de la céramique qui est fonction de la forme, des dimensions et du type de matériau choisis.

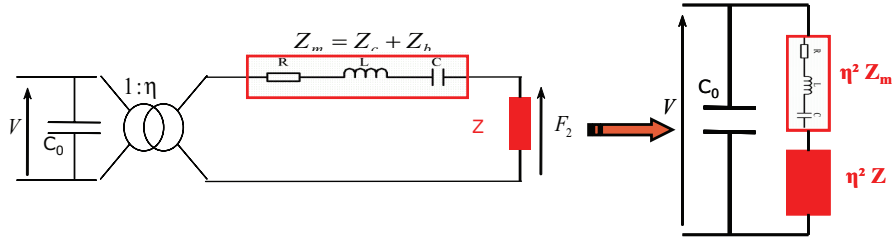


Figure 1.12 – Schéma équivalent du modèle de MASON simplifié

1.3 Conclusion

Après avoir retracé brièvement l'évolution de la recherche sur la piézoélectricité depuis sa découverte en 1880, nous avons présenté comment on peut modéliser, par des tenseurs, l'effet piézoélectrique dans les céramiques (le développement complet de cette présentation se trouve à l'annexe A).

Nous avons ensuite montré comment on peut simplifier les équations tensorielles lorsqu'on choisit une céramique piézoélectrique dans laquelle une direction de conversion piézoélectrique est fortement privilégiée, comme c'est le cas dans les actionneurs multi-couches, pour aboutir à un modèle électro-mécanique de la céramique : le modèle circuit équivalent de MASON que nous utiliserons pour modéliser les excitations piézoélectriques de notre moteur linéaire à onde progressive.

Chapitre 2

L'actionnement piézoélectrique : état de l'art et plan de la thèse

Dans la littérature, on distingue généralement les actionneurs piézoélectriques des moteurs piézoélectriques ou piézomoteurs. On réserve le terme d'actionneur piézoélectrique lorsque l'organe mécanique actionné est directement mis en mouvement par l'élément piézoélectrique [Nog - 1990]. On réserve le terme de piézomoteur au système comprenant l'élément actif et l'ensemble des organes mécaniques qui créent la fonction de mouvement souhaitée. Cette appellation, largement répandue dans le monde anglo-saxon, peut paraître étrange à priori, car les piézomoteurs ont aussi une fonction d'actionnement mais elle provient probablement du fait que, dans les piézomoteurs, l'élément actif transmet une quantité de mouvement à l'organe mécanique qui est chargé de créer la fonction de mouvement souhaitée. Il y a, dès lors, une double conversion d'énergie, l'une de type électro-mécanique, l'autre de type mécano-mécanique. Nous avons choisi par la suite de respecter cette convention.

2.1 Les actionneurs piézoélectriques

Grâce aux nouvelles céramiques piézoélectriques, on a pu développer une large gamme d'actionneurs capables de couvrir les besoins de nombreuses applications.

Les avantages principaux que présente ce type d'actionneurs sont :

- leur conception robuste dépourvue de roulements, ils ne sont donc pas sujets à l'usure par friction ou par abrasion ;
- leur grande résolution, ils sont idéaux pour le nano-positionnement ;
- leur faible consommation ;
- leur grand rapport force/masse, raison de leur temps de réponse court ;
- leur possibilité de faire de l'actionnement non magnétique ;
- leur capacité d'utilisation en milieu de vide d'air important.

Ils présentent, néanmoins, certaines limitations :

- leurs déplacements sont limités, ils vont de quelques micromètres à plusieurs centaines de micromètres suivant le type d'actionneur ;
- leur gamme de température de fonctionnement est inférieure à 100°C pour les céramiques classiques et inférieure à 300°C pour les céramiques dopées au chrome mais qui sont beaucoup plus coûteuses.

Quelques exemples d'applications :

- ingénierie mécanique : positionnement d'outils, pinces, clames actives, amortissement, contrôle actif, générations de vibrations subsoniques et ultrasoniques,
- microélectronique : positionnement de masques, tranches de silicium ou contacts magnétiques, micro-relais,
- mécanique des fluides : soupapes, pompes, mesures, injections, goutte à goutte, jet d'encre,
- optique : positionnement de miroirs ou lentilles, réglage de netteté, mise au point laser, alignement et déformation de fibre optique, scanners, interféromètres, modulateurs,
- ingénierie électrique : *fast circuit breakers*, générateurs de puissance électrique à partir d'énergie mécanique,

2.1.1 Les principaux types d'actionneurs piézoélectriques

2.1.1.1 Les stacks

Un actionneur piézoélectrique *Stack* est un actionneur multi-couches (MLA) (figure 1.4) , obtenu par un empilement de céramiques piézoélectriques isolées les unes des autres et connectées électriquement en parallèle dans une armature adéquate, permettant d'augmenter linéairement l'allongement total tout en nécessitant une tension d'alimentation faible. L'allongement est proportionnel à la hauteur efficace de l'actionneur et la force de blocage F_B générée est proportionnelle à sa section efficace. La direction de polarisation de chaque élément est parallèle à la direction selon laquelle l'allongement et/ou la force doivent être développés (figure 2.1). Un actionneur *Stack* peut être conçu pour fonctionner sous une tension de l'ordre de la centaine de volts et atteindre un allongement correspondant environ au dixième de pourcent de la hauteur efficace de l'actionneur. La force de blocage peut atteindre plusieurs kN .

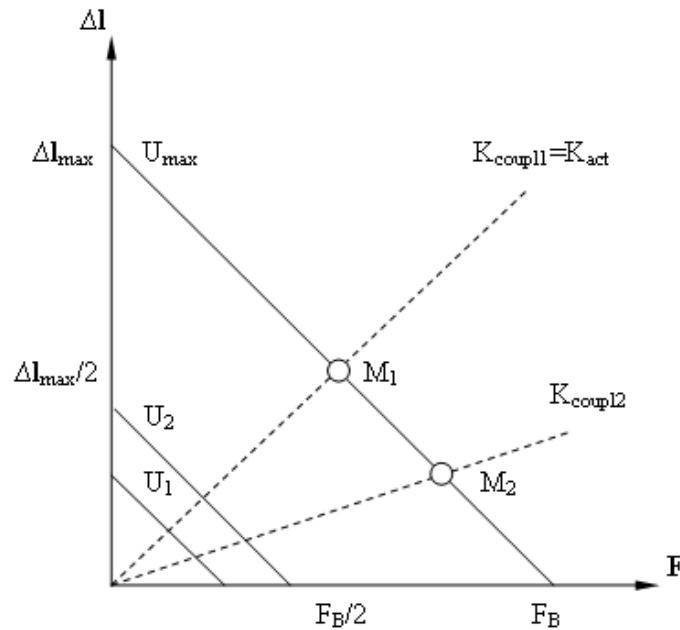


Figure 2.1 – Caractéristique de déformation des stacks

[Apc - 2002]

2.1.1.2 Les benders

Les actionneurs *Bender* (Figure 2.2) utilisent la combinaison de l'allongement d'une des deux céramiques piézoélectriques et la contraction de l'autre céramique piézoélectrique pour induire le mouvement d'actionnement. Ils sont généralement constitués de deux couches de matériaux piézoélectriques, polarisés de telle manière que les couches situées de part et d'autre de la fibre neutre (un plan métallique) produisent des allongements contraires afin de soumettre l'actionneur à un moment de flexion. Outre les couches piézoélectriques, des couches non actives peuvent être ajoutées afin d'accroître la stabilité de l'actionneur [Hir - 2002]. Cette architecture permet d'obtenir une amplification quadratique de la course de l'actionneur en fonction de sa longueur. La force de blocage est en contrepartie plus faible que dans le cas des stacks. Par exemple, la référence [Apc - 2002] décrit un actionneur de $60mm$ de long pouvant produire sous une tension de $150V$ une déflexion de $2.5mm$ avec une force de blocage de $2.5N$.

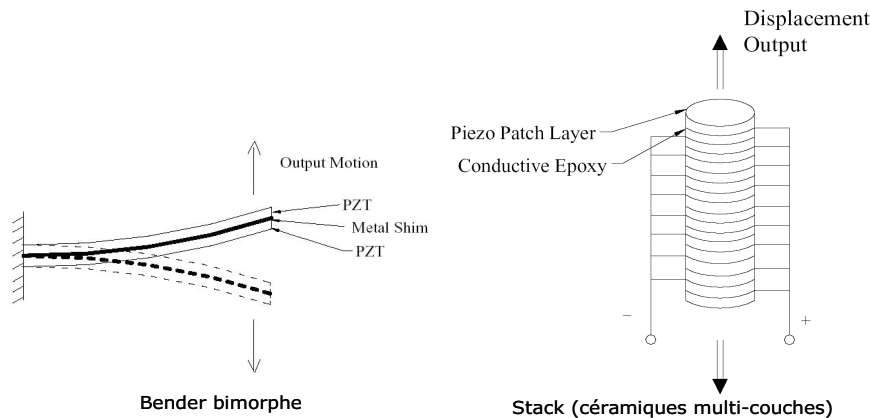


Figure 2.2 – Bimorphe (*bender*) et stack piézoélectriques
[Apc - 2002]

2.1.1.3 les actionneurs amplifiés

Les actionneurs piézoélectriques amplifiés (Figure 2.3) sont conçus sur base d'une coquille, le plus souvent, de forme elliptique. Ils combinent à la fois un grand déplacement et des forces importantes, tout en gardant un très bon comportement mécanique [Vlo - 2008c]. Leur forme elliptique permet de multiplier le déplacement dans le rapport de leurs diamètres (2 à 5 fois), ce qui leur per-

met d'atteindre des déformations de 1% (soit 10 fois celle des *stacks*). Dans certains cas, la déformation du matériau actif peut être une contraction, on parle alors d'actionneur de type poussoir [Ced - 2003].

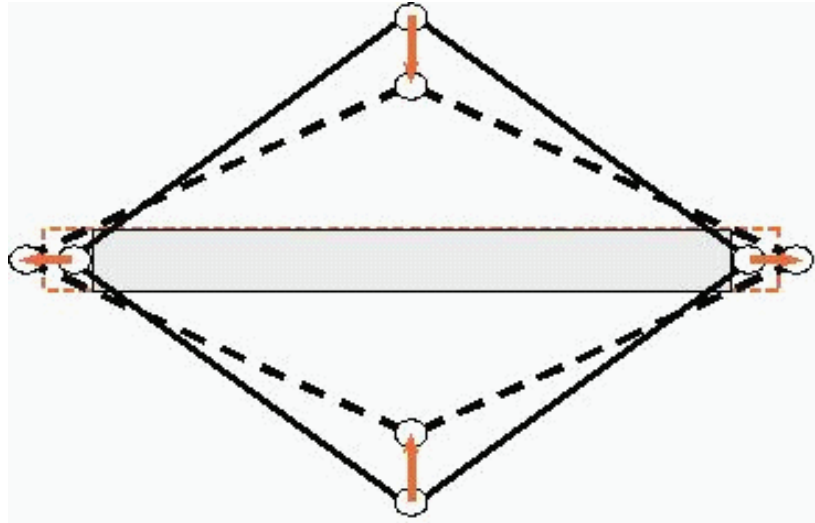


Figure 2.3 – Principe de fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique amplifié

Les avantages des actionneurs piézoélectriques amplifiés [Ced - 2003] :

- ils restent petits et compacts mais leurs déplacements sont plus élevés que ceux des *stacks* ;
- l'amplification du déplacement et la rigidité dépendent de l'excentricité de la coquille ;
- une impédance mécanique bien assortie et un bon couplage électromécanique sont possibles ;
- on peut l'utiliser sur une large gamme de fréquences y compris la fréquence de résonance ;
- le comportement en flexion de la coquille sous actionnement piézoélectrique produit une distribution acceptable des efforts sur l'amplificateur ;
- des moments de flexion et/ou de torsion peuvent s'exercer sur la coquille, laquelle empêche le *stack* de casser. D'un point de vue concret, ces actionneurs sont plus solides que les *stacks* ou les *benders* ;
- leur prix est plus faible que celui d'un actionneur direct produisant la même course. Ceci est dû à la présence de l'amplificateur mécanique, moins coûteux que le matériau actif.

En résumé, la course d'un actionneur piézoélectrique amplifié est meilleure que celle d'un *stack* en rapport à sa tension appliquée. L'hystérèse limite la précision de positionnement, une commande en boucle fermée peut augmenter la précision jusqu'à moins de 0.1%. Ils peuvent être commandés jusqu'à des fréquences atteignant la moitié de leur fréquence de résonance pour des applications de positionnement [Ced - 2003].

Typiquement, on retrouve ces actionneurs amplifiés dans des applications qui permettent un déplacement allant jusqu'à $500\mu m$ pour une tension maximale de 200V. Ils combinent un plus grand déplacement à une force importante. Et comme ils sont compacts, on peut les mettre en série pour atteindre un déplacement de plus de 1mm. On peut également les mettre en parallèle pour répartir la force transmise à la charge sur chaque actionneur [Ced - 2003].

2.1.1.4 les actionneurs résonants

On a développé les actionneurs résonants pour offrir une solution à la génération de vibrations ultrasoniques à l'aide d'actionneurs compacts alimentés à beaucoup plus basse tension (10 à 100 fois moins) que celle nécessaire au déplacement équivalent d'une céramique piézoélectrique alimentée par une tension à basse fréquence.

Les plus connus sont les résonateurs de Langevin (figure 2.4.a) dans lesquels le mouvement est amplifié par une structure mécanique qui fait office de caisse de résonance. Mais il en existe d'autres moins connus qui permettent de générer une trajectoire elliptique au niveau de l'accouplement entre l'actionneur résonant et l'organe mécanique entraîné (figure 2.4.b).

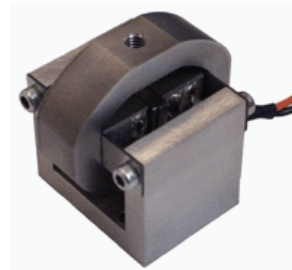
Leur structure est identique à celle des actionneurs amplifiés, mais ils sont maintenus de part et d'autre de leur axe le plus long par un support métallique afin de découpler au maximum le support de la génération de vibration [Ced - 2003].

En comparaison avec les transducteurs de Langevin, ils offrent plusieurs avantages significatifs :

- un poids et une dimension plus faibles à fréquence et amplitude de déplacement comparables ;
- de plus grandes déformations (dus à sa forme elliptique) ;
- une tension d'utilisation plus faible.



Résonateur de Langevin



Actionneur ultrasonique à trajectoire elliptique

Figure 2.4 – Exemples d'actionneurs ultrasoniques
[Apc - 2002], [Ced - 2003]

2.2 Les moteurs piézoélectriques

Dans les moteurs piézoélectriques, le mouvement ne résulte pas directement de la déformation de l'élément piézoélectrique, la conversion de type électromécanique assurée par le transducteur piézoélectrique est assortie d'une conversion purement mécanique, visant à transformer le mouvement initial de la céramique en un mouvement de translation ou de rotation suivant le type de moteur [Nog - 1990]. Dans les sections suivantes, nous présentons trois types de moteurs piézoélectriques parmi les plus répandus :

- le moteur inchworm ;
- le moteur stick-slip ;
- le moteur à onde progressive.

2.2.1 Le moteur inchworm

Dans le moteur inchworm, une séquence de déplacement de l'organe mobile se décompose en six étapes (figure 2.5). Le *Trailing actuator* serre le barreau, le *Leading actuator* le libère et l'*Extending actuator* s'allonge, ensuite, le *Leading actuator* serre le barreau, le *Trailing actuator* le libère et l'*Extending actuator* se contracte [Ten - 2004]. La répétition de la séquence de déplacement permet de déplacer un mobile à une vitesse qui dépend la fréquence d'apparition de cette séquence [Eri - 2008].

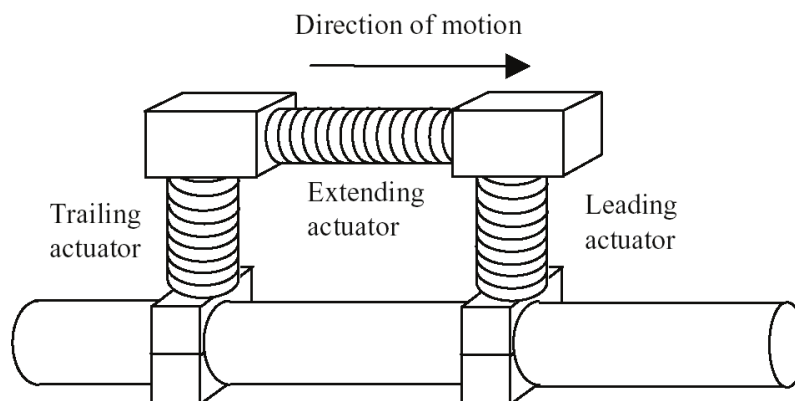


Figure 2.5 – Le principe du moteur inch-worm
[Apc - 2002]

2.2.2 Le moteur stick-slip

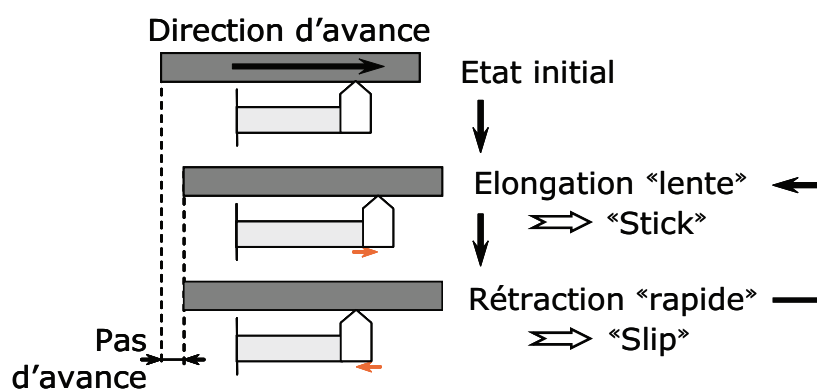


Figure 2.6 – Le principe de fonctionnement du moteur stick-slip

Dans les moteurs stick-slip (figure 2.6), on met à profit les performances en fréquence du matériau piézoélectrique pour produire un mouvement par petits déplacements rapides dans une direction donnée en translation ou en rotation [Bre - 1998]. La vitesse de déplacement de la céramique piézoélectrique lors de l'élongation est plus lente que lors de sa rétraction (figure 2.6). Grâce à la différence entre les forces inertielles, proportionnelles à la vitesse de déplacement, et les forces d'adhérence entre les deux corps, l'organe en mouvement a tendance

à se déplacer avec la céramique lors de son élancement et à ne pas suivre le mouvement de la céramique et rester immobile lors de sa rétraction favorisant de ce fait, un petit déplacement à chaque séquence élancement-rétraction [Pen - 2010]. La répétition de chaque séquence de déplacement permet de déplacer un mobile à une vitesse d'autant plus élevée que la fréquence d'apparition des séquences est élevée.

2.2.3 Les moteurs à onde progressive

2.2.3.1 Le principe d'entraînement

Le principe de ces moteurs est le suivant : lorsqu'une onde progressive se propage dans un stator, les points matériels situés à la surface du stator décrivent une trajectoire elliptique (figure 2.7).

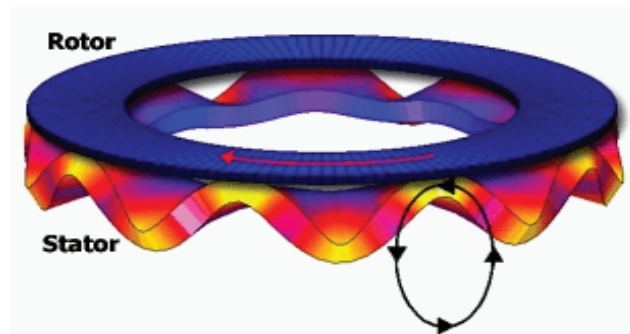


Figure 2.7 – Trajectoire elliptique des points à la surface d'un moteur rotatif à onde progressive [Web - 4]

Quand un corps rigide (le rotor) est maintenu en contact avec le stator vibrant, les points matériels entrent successivement en contact avec lui et lui transfèrent par friction un mouvement dans la direction opposée à celle de l'onde progressive [Fly - 1997].

La figure 2.8 montre la trajectoire elliptique des points situés à la surface du stator. Lorsque l'onde progressive se déplace vers la gauche, les points de contact tournent dans le sens horlogerie.

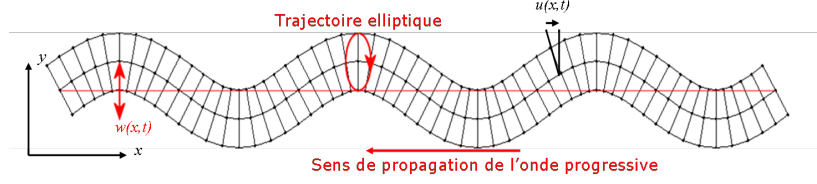


Figure 2.8 – Trajectoire elliptique des points à la surface du moteur linéaire à onde progressive

Nous allons analyser la trajectoire elliptique des points de contact et en déduire leur vitesse tangentielle puisque c'est elle qui est responsable de l'entraînement par friction du rotor.

Supposons une onde progressive qui se propage de la gauche vers la droite. L'expression du déplacement vertical $w(x, t)$ de la fibre neutre est donnée par l'équation suivante [Sas - 1993] :

$$w(x, t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx) \quad (2.1)$$

où ω est la pulsation, k le nombre d'onde et ξ_0 l'amplitude de l'onde.

Le déplacement $u(x, t)$ dans la direction horizontale x est égal au produit entre la pente de la fibre neutre déformée et la demi hauteur h du barreau (figure 2.8) :

$$u(x, t) = -\frac{h}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$u(x, t) = k\xi_0 \frac{h}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (2.3)$$

Le signe moins disparaît, il explique pourquoi lorsqu'une onde progressive se déplace vers la droite, le mobile posé sur le barreau se déplace vers la gauche.

$$u(x, t) = k\xi_0 \frac{h}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (2.4)$$

Comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on obtient :

$$u(x, t) = \frac{\pi\xi_0 h}{\lambda} \cos(\omega t - kx) \quad (2.5)$$

On constate donc que le rapport entre les axes principaux de l'ellipse décrivant la trajectoire géométrique du point de contact vaut $\frac{\pi h}{\lambda}$. Si, par exemple $\lambda = 40mm$ et $h = 2mm$, ce rapport vaut 0.157 ce qui veut dire que si l'amplitude du déplacement vertical vaut $1\mu m$ alors le déplacement horizontal correspondant aura une amplitude de $0.157\mu m$.

Comme la transmission du mouvement entre le stator et le rotor dépend de la vitesse des points matériels à la surface du stator, nous devons dériver, par rapport au temps, l'expression du déplacement horizontal $u(x, t)$. Nous obtenons alors la vitesse tangentielle $v_t(x, t)$ de chaque point à la surface :

$$v_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\pi\omega h\xi_0}{\lambda} \sin(\omega t - kx) \quad (2.6)$$

En comparant l'expression de v_t à celle de l'onde de flexion $w(x, t)$ (2.1), nous remarquons que la vitesse tangentielle est bien maximale aux sommets de l'onde progressive, là où le stator est en contact avec le rotor. La génération d'une onde progressive dans le stator permet donc de maximiser la transmission du mouvement au rotor.

2.2.3.2 Les moteurs rotatifs

Dans les moteurs rotatifs (figure 2.9), le stator vibrant dans lequel se propage l'onde progressive est formé d'un disque de forme annulaire composé de deux parties : une couche de céramiques piézoélectriques et un disque métallique dentelé. Entre la partie mobile (le rotor) et le stator vibrant, on dispose une couche de polymère pour augmenter la friction et donc le couple d'entraînement du moteur. Le rotor et le stator sont maintenus en contact à l'aide d'un ressort de précontrainte [Sas - 1993].

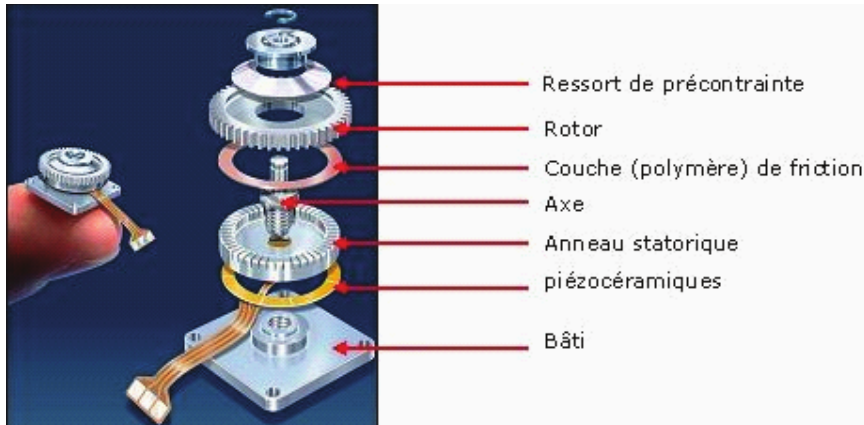


Figure 2.9 – Vue explosée d'un moteur piézoélectrique à onde progressive [Web - 4]

Lorsqu'on applique une tension parallèlement à la direction de polarisation à la partie piézoélectrique d'un disque composite (voir les phases de contraction

sur la figure 2.10), il en résulte à la fois un agrandissement dans cette même direction (effet longitudinal) et un rétrécissement dans les directions perpendiculaires (effet transversal), rétrécissement d'autant plus grand que la longueur de la poutre est grande par rapport son épaisseur. La longueur de la partie piézoélectrique de la poutre diminue donc mais la rigidité de la poutre métallique qui y est accrochée l'empêche de subir ce même rétrécissement. Comme nous avons d'une part une fibre neutre qui a rétréci et d'autre part une fibre neutre dont la longueur n'a pas varié, il en résulte une flexion de la poutre. Si la partie piézoélectrique est une juxtaposition de blocs polarisés alternativement, la forme globale de la poutre après application d'une tension continue sur chacun de ces blocs est celle d'une onde sinusoïdale immobile.

En appliquant une tension alternative, on observe une onde stationnaire. Les électrodes peuvent être disposées pour que deux ondes stationnaires de même mode et de même amplitude A soient générées en quadrature de phase et décalées spatialement d'un quart de longueur d'onde, auquel cas nous obtenons bien une onde progressive :

$$A \sin(\omega t) \cos(kx) + A \cos(\omega t) \sin(kx) = A \sin(\omega t + kx) \quad (2.7)$$

Pour ce moteur à onde progressive, illustré à la figure 2.11, nous sommes en présence de deux actionneurs qui génèrent chacun une onde stationnaire. Cette solution présente aussi l'avantage de ne pas absorber l'onde en fin de parcours comme le fait le moteur linéaire. Le rendement du moteur annulaire est par conséquent plus élevé et il constitue la solution classique lorsqu'on parle de moteur à onde progressive.

D'un point de vue pratique, il existe plusieurs manières de disposer les électrodes pour rencontrer les conditions de génération d'une onde progressive. Typiquement, la polarisation de la céramique est alternée de façon à ce que deux secteurs espacés d'une demi longueur d'onde stationnaire se déforment en sens inverse lorsqu'ils sont soumis à une même tension. L'anneau étant conçu comme ayant un périmètre moyen égal à un multiple entier de la longueur des ondes stationnaires que l'on veut former, si on y applique une alimentation alternative, il vibrera en formant des ondes stationnaires à la fréquence d'alimentation. La fréquence peut être réglée pour entraîner le stator en résonance (c'est-à-dire pour amplifier l'amplitude des vibrations jusqu'à un maximum limité par des effets d'amortissement). La position des noeuds des ondes stationnaires au stator correspond donc aux intersections entre les régions de polarisations inverses sur l'anneau piézoélectrique.

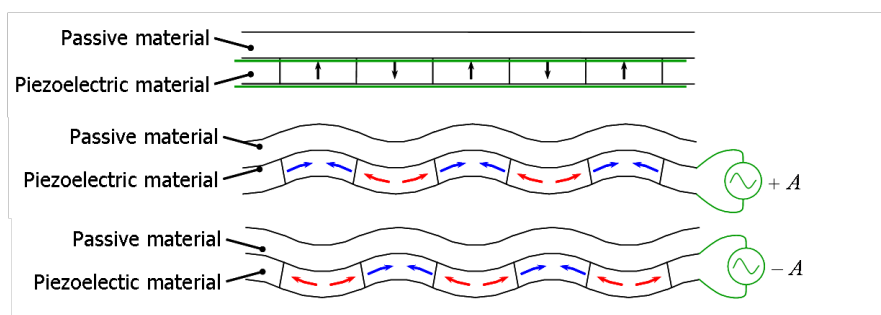


Figure 2.10 – Principe de fonctionnement des moteurs rotatifs

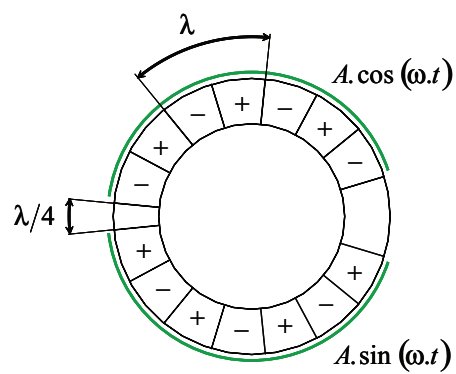


Figure 2.11 – Disposition des éléments piézoélectriques dans les moteurs rotatifs

2.2.3.3 Les moteurs linéaires

Comme pour les moteurs rotatifs, le principe d'entraînement des moteurs linéaires repose sur la nécessité de conserver tout au long du stator des ondes progressives afin de garantir l'entraînement du rotor.

Mais dans les moteurs linéaires, il est plus difficile de générer une onde progressive car, contrairement aux moteurs rotatifs, le stator des moteurs linéaires est de longueur finie. Toute onde incidente, générée dans le stator, sera donc réfléchi lorsqu'elle atteindra une extrémité du barreau créant alors avec son onde incidente, une onde stationnaire dépourvue de propriété d'entraînement.

Il est également impossible de générer deux ondes stationnaires à la même fréquence, décalées d'un quart de longueur d'onde et en quadrature de phase dans le but de générer une onde progressive dans le barreau de longueur finie comme on le fait dans le moteur rotatif.

Comment générer une onde progressive dans le stator ?

Il y a deux manières de générer une onde progressive dans un barreau de longueur finie.

La première consiste à placer à chaque extrémité du barreau un actionneur piézoélectrique. Le premier est utilisé pour générer une onde tandis que le second absorbe cette dernière afin d'empêcher la formation d'ondes stationnaires par réflexion de l'onde incidente lorsqu'elle atteint l'extrémité du barreau.

La seconde méthode consiste à placer deux actionneurs piézoélectriques à une distance spécifique des extrémités du barreau de façon à exciter préférentiellement deux modes propres successifs de ce barreau et créer, par la combinaison de ces modes, une onde progressive.

Première méthode : génération de l'onde progressive par absorption de l'onde incidente

Comme on vient de l'indiquer, l'objectif est de générer des ondes progressives dans une seule direction en empêchant toute réflexion de l'onde incidente à l'extrémité du barreau. A cette fin, l'actionneur placé à une extrémité du barreau est utilisé comme générateur d'ondes progressives et l'actionneur, placé à l'autre extrémité du barreau, comme absorbeur d'ondes incidentes. Par cela, on connecte une impédance à la sortie électrique de l'actionneur piézoélectrique qui fait office d'absorbeur.

Cette impédance doit être parfaitement ajustée à l'impédance caractéristique Z du barreau, sinon les ondes incidentes ne seront pas totalement absor-

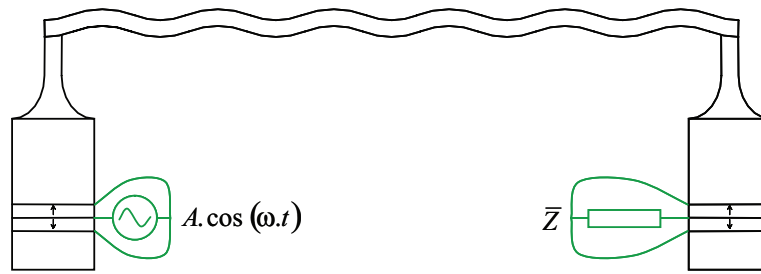


Figure 2.12 – Adaptation d'impédance

bées et une partie d'entre elles sera réfléchi et créera des ondes stationnaires dépourvues de propriétés d'entraînement.

En pratique, il faut tenir compte des variations de l'impédance caractéristique du barreau dues, en particulier, au déplacement du rotor et adapter en permanence la valeur de l'impédance en conséquence [Pro - 1986]. Un système de régulation est donc nécessaire pour garantir de bonnes performances. Une autre difficulté de cette méthode est qu'il faut intervertir le rôle des deux actionneurs si on veut changer le sens de propagation de l'onde progressive.

Seconde méthode : génération de l'onde progressive par superposition d'ondes stationnaires en quadrature

L'objectif est d'essayer de se rapprocher de la solution utilisée pour les moteurs rotatifs : *générer une onde progressive en superposant deux ondes stationnaires créées par deux excitateurs vibrant en quadrature.*

Comme nous le montrerons au chapitre 4, en exprimant chacune de ces ondes stationnaires en fonction des modes propres du stator, il est possible de déterminer les conditions d'excitation (la pulsation d'excitation et la position des excitateurs de la figure 2.13) qui maximisent la qualité de l'onde progressive en minimisant l'impact des ondes stationnaires naturellement produites dans le stator.

C'est cette méthode que nous avons choisi d'étudier dans notre thèse car, même si elle est moins connue que celle utilisant l'adaptation d'impédance, elle permet de contrôler facilement le sens et la vitesse de déplacement du rotor en changeant le déphasage appliqué entre les deux excitateurs en le faisant passer de 90° à 270° .

De plus, l'électronique de commande qui lui est associée est beaucoup plus simple car il n'est pas nécessaire de prévoir un système de mesure et de régulation qui permette d'adapter l'impédance de l'actionneur absorbant l'onde en fonction des conditions d'excitation et de la position du rotor.

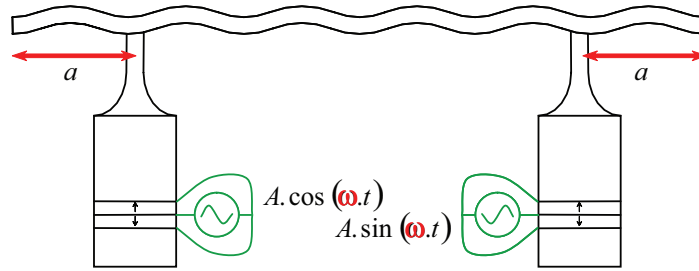


Figure 2.13 – Superposition d'ondes stationnaires en quadrature

2.3 Plan de l'étude

L'objectif principal de notre travail de recherche est donc d'étudier les conditions d'excitation qui permettent la création d'une belle onde progressive.

Pour ce faire, nous développons, tout d'abord, au chapitre 3, un modèle analytique du stator afin de mettre en évidence la façon dont les modes propres peuvent se combiner pour former une onde progressive. Nous établissons ensuite un modèle multicorps afin de tenir compte de l'influence des phénomènes qu'il est impossible de modéliser au travers du modèle analytique. Nous utilisons enfin un modèle éléments finis afin de valider les résultats obtenus par les deux modèles développés. Nous discutons, en particulier, les résultats de calcul des modes propres obtenus à partir des différents modèles pour le stator étudié.

Nous étudions, ensuite au chapitre 4, comment définir un critère d'optimisation permettant de maximiser l'onde progressive (ou de minimiser l'importance des perturbations dues aux ondes stationnaires). Ensuite, dans ce même chapitre, nous expliquons dans un premier temps comment appliquer ce critère aux différents modèles analytique, éléments finis ou multicorps dans le cas du stator étudié pour terminer, dans un second temps, sur la façon dont on peut l'adapter pour l'étude d'autres structures de stators.

Au chapitre 5, nous présentons le prototype du stator vibrant du moteur étudié ainsi qu'une comparaison entre les résultats obtenus par nos différents modèles et ceux issus des mesures effectuées sur le prototype.

Nous terminons, au chapitre 6, par la présentation des autres phénomènes qu'il faut étudier pour modéliser le fonctionnement d'un moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive, à savoir :

- la modélisation du contact entre le stator et le rotor et de la transmission de la force d'entraînement ;
- l'intégration d'un modèle électromécanique des stacks piézoélectriques au modèle multicorps du stator.

Nous montrons comment on peut réaliser ces objectifs en utilisant une approche multicorps permettant de simuler, avec un temps de calcul raisonnable, le comportement complet d'un moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.

Chapitre 3

Modélisation du stator

3.1 Structure du stator étudié

Le stator du piézomoteur étudié est constitué d'un barreau métallique dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont reprises au tableau 3.1.

Le barreau est monté sur deux appuis simples et excité par deux stacks piézoélectriques vibrant à la même fréquence mais avec un déphasage de 90° . Comme illustré à la figure 3.1, les excitateurs sont situés à une distance d des extrémités du barreau.

Nous avons choisi ce type de stator car il est possible d'en faire une étude analytique poussée et d'expliquer comment les modes propres se combinent entre eux pour créer une onde progressive.

Nous avons choisi d'exciter le barreau à l'aide de deux stacks piézoélectriques (section 2.1.1) car leur rapport coût/amplitude de déplacement est intéressant. De plus, ces actionneurs peuvent facilement être contrôlés en force (cf. leur modèle de MASON simplifié, figure 1.12) ce qui permet, au niveau du modèle du stator, d'assimiler les excitations à des forces extérieures.

Longueur L	$0.5m$
Section transversale $b \times h$	$0.015m \times 0.002m$
Masse volumique ρ	$2700kg/m^3$
Module d'élasticité E	$50.925GPa$

Tableau 3.1 – Dimensions et propriétés mécaniques du stator étudié

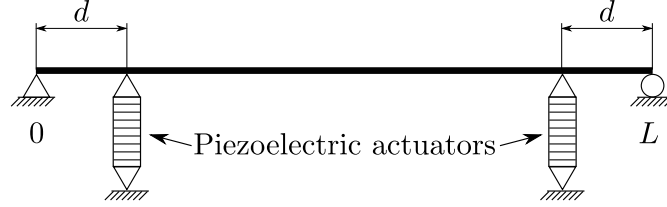


Figure 3.1 – Moteur piézoélectrique étudié

3.2 Les modèles développés

Nous avons développé et comparé trois types de modèles :

- Le premier est un modèle analytique basé sur la résolution de l'équation d'onde par superposition de modes propres. Il permet de comprendre comment ces modes propres se combinent entre eux pour former une onde progressive et de choisir les meilleures conditions de fréquence d'excitation et de position des actionneurs afin de maximiser la qualité de l'onde progressive ainsi créée. Il ne permet cependant pas de déterminer l'amplitude absolue de la vibration mais bien une amplitude relative de l'onde en fonction des contributions de chaque mode propre.
- Le second est un modèle multicorps. Il permet de déterminer les amplitudes absolues de la vibration. De plus, il se prête bien à l'intégration d'un modèle du rotor et du contact entre le rotor et le stator pour aboutir à un modèle complet du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.
- Le troisième est un modèle éléments finis qui permet de vérifier les conclusions tirées des deux autres modèles.

3.2.1 Le modèle analytique

3.2.1.1 Vibrations libres dans un barreau de longueur finie

La première étape dans le développement du modèle analytique consiste à calculer les modes normaux du barreau de longueur finie en résolvant l'équation d'onde sans excitation. L'équation d'onde d'un barreau élastique vibrant est écrite en coordonnées cartésiennes comme [Gra - 1991] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

avec

$$g^2 = \frac{E I}{\rho S}$$

où ρ et E représentent respectivement la masse et le module de Young du barreau, S et I sont les surface et moment d'inertie de la section droite et $w(x, t)$ est le déplacement transversal de l'onde.

Nous utilisons la méthode de séparation des variables en posant $w(x, t) = Y(x)T(t)$ afin de déterminer les fréquences et modes propres du barreau. Sa substitution dans l'équation (3.1) donne les solutions suivantes :

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

$$Y(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (3.3)$$

avec

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{g^2} \quad (3.4)$$

Dans le cas de notre moteur, le barreau est posé sur appuis simples, les conditions aux limites (en $x = 0$ et en $x = L$, figure 3.1) sont décrites par les équations suivantes :

$$Y(0) = \frac{d^2 Y(0)}{dx^2} = 0 \quad \text{and} \quad Y(L) = \frac{d^2 Y(L)}{dx^2} = 0 \quad (3.5)$$

Appliquées à l'équation (3.3), ces conditions imposent que $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ et

$$\sin(\beta L) = 0 \quad (3.6)$$

On obtient alors les modes propres suivants :

$$Y_n(x) = \sin(\beta_n x) \quad (3.7)$$

avec

$$\beta_n = \frac{n \pi}{L} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.8)$$

les racines de l'équation (3.6), on peut dès lors exprimer la solution générale des ondes se propageant dans le barreau par l'expression suivante :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] Y_n(x) \quad (3.9)$$

avec

$$\omega_n = g \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.10)$$

3.2.1.2 Vibrations forcées dans un barreau de longueur finie

La recherche d'une solution à l'équation homogène (3.1) n'est qu'une étape préliminaire à la résolution du cas général qui nous occupe : la résolution en régime permanent du barreau vibrant actionné par des forces externes modélisant l'action des stacks piézoélectriques (figure 3.2). L'équation d'ondes devient alors [Gra - 1991] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{E I} q(x, t) \quad (3.11)$$

Si on considère que l'excitation est purement harmonique, on peut la décomposer suivant ses variables spatiale et temporelle de la façon suivante :

$$q(x, t) = Q(x) \exp(j\omega t) \quad (3.12)$$

La solution en régime permanent de cette excitation sera alors elle aussi purement harmonique, on pourra dès lors l'exprimer de la forme suivante :

$$w(x, t) = Y(x) \exp(j\omega t) \quad (3.13)$$

On peut également exprimer les formes d'onde $Q(x)$ et $Y(x)$ en fonction des modes propres du barreau $Y_n(x)$ calculés à partir de l'équation (3.3), ceux-ci s'écrivent, dès lors :

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n Y_n(x) \\ Y(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

et en substituant ces formes d'onde (3.14) dans l'équation d'onde en vibration forcée (3.11), via (3.12) et (3.13), on obtient la relation suivante qui lie a_n et b_n :

$$a_n = \frac{b_n}{E I (\beta_n^4 - \beta^4)} \quad (3.15)$$

avec b_n qui est donné par l'expression :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L Y_n(x) Q(x) dx \quad (3.16)$$

Concrètement, pour générer une onde progressive, nous mettons en vibration notre barreau à l'aide de deux actionneurs piézoélectriques situés à une distance d des extrémités du barreau (Figure 3.2).

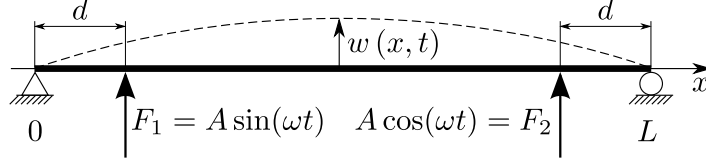


Figure 3.2 – Schéma du barreau vibrant étudié

Nous supposons que ces deux actionneurs produisent des forces F_1 et F_2 de même amplitude A et à la même pulsation ω mais avec un déphasage de 90° :

$$\begin{aligned} F_1 &= A \sin(\omega t) \\ F_2 &= A \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

comme illustré à la figure 3.2, F_1 et F_2 représentent respectivement les forces générées par les actionneurs de gauche et de droite. Dans les conditions particulières qui nous occupent, nous pouvons calculer les coefficients b_n du développement en série (3.14). La forme d'onde due aux excitations devient alors respectivement pour F_1 et pour F_2 :

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= A \delta(x - d) \\ Q_2(x) &= A \delta(x - (L - d)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac afin d'exprimer le fait que l'excitation est une force ponctuelle.

Suivant ces considérations et en considérant les forces de gauche et de droite séparément, nous obtenons les résultats suivants pour l'intégrale (3.16) :

$$\begin{aligned} b_{n1}(x) &= \frac{2A}{L} Y_n(d) \\ b_{n2}(x) &= \frac{2A}{L} Y_n(L - d) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dans le moteur étudié (le barreau est posé sur appuis simples) les modes propres et les fréquences propres sont respectivement donnés par les équations (3.7) et (3.10). Nous pouvons dès lors écrire l'expression du facteur poids a_n qui exprime la contribution de chacun des modes propres du barreau à sa vibration globale et ce en fonction de chaque exciteur :

$$\begin{aligned} a_{n1}(x) &= \frac{2A}{L} \frac{\sin(\beta_n d)}{E I (\beta_n^4 - \beta^4)} \\ a_{n2}(x) &= \frac{2A}{L} \frac{\sin[\beta_n (L - d)]}{E I (\beta_n^4 - \beta^4)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

a_{n_1} représentant la contribution de l'actionneur de gauche, a_{n_2} celle de l'actionneur de droite. En considérant les valeurs particulières du nombre d'onde β_n , données par l'équation (3.8), nous pouvons exprimer les facteurs poids a_{n_2} en fonction des facteurs poids a_{n_1} :

$$a_{n_2} = (-1)^n a_{n_1} \quad (3.21)$$

Et finalement, en utilisant l'équation (3.13) et le principe de superposition entre les deux excitations, nous pouvons écrire la solution générale de la vibration parcourant le barreau :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\beta_n x) \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin(\beta_n x) \cos(\omega t) \quad (3.22)$$

où chaque terme correspond à chaque contribution (celle due à l'actionneur de gauche et celle due à l'actionneur de droite) et où a_{n_2} est exprimé en fonction de a_{n_1} via (3.21), lui-même renommé a_n dans (3.22).

3.2.1.3 Remarque

Le modèle analytique ne permet pas de déterminer l'amplitude absolue de l'onde de flexion $w(x, t)$ dans le barreau [Gra - 1991]. Il fournit cependant une amplitude relative de l'onde de flexion calculée à partir de la contribution relative a_n de chaque mode propre dont la somme (3.22) est l'expression analytique de l'onde de flexion résultante $w(x, t)$ [Gra - 1991].

3.2.2 Le modèle multicorps

Une deuxième façon de modéliser les barreaux flexibles est d'utiliser un nombre fini de segments dans un modèle multicorps, également appelé *lumped parameter model* [Sam - 2003]. L'idée de base est de considérer le barreau comme une succession de petits segments rigides. Ces segments sont liés par des articulations rotoïdes avec une raideur et éventuellement un amortissement équivalent. Cette approche est basée sur le modèle de Huston détaillé ci-dessous [Hus - 1993] (Figure 3.3).

Nous avons choisi, pour modéliser le système multicorps, d'utiliser, comme coordonnées généralisées pour décrire les variables de la dynamique du système (les articulations entre chaque corps), les variables relatives décrivant la configuration de chaque segment par rapport à celui auquel il est lié. Nous avons également choisi d'utiliser le logiciel *Robotran* ©, développé par notre centre de

recherche (le CEREM) pour générer automatiquement les équations cinématiques et dynamiques sous leur forme symbolique en utilisant une formulation réursive basée sur les équations de Newton et d'Euler [Sam - 2003].

Un des avantages principaux de l'approche symbolique est de rendre les équations plus compactes en les simplifiant. Le code généré est alors plus efficace surtout dans le cas de simulations de systèmes complexes contenant de nombreux corps comme c'est le cas des modèles en segments-finis que nous proposons.

Dans cette section, nous présentons la formulation générale des équations dynamiques multicorps avant de développer le modèle équivalent du barreau vibrant. Ce modèle permettra de calculer les fréquences propres et les modes propres du système et de simuler son comportement lorsqu'il est excité par deux actionneurs.

En général, la plupart des applications multicorps contiennent des boucles de plusieurs corps reliés entre eux (suspensions de voiture, robots parallèles, etc...) qui obligent les n coordonnées généralisées q (les coordonnées relatives dans notre formalisme) à satisfaire m contraintes géométriques $h(q) = 0$ à tout instant. Afin de décrire le système complètement, ces contraintes de liaison doivent être ajoutées aux équations du mouvement, dans lesquelles les forces contraintes sont introduites via la technique du multiplicateur de Lagrange [Sam - 2003] :

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} + c(q, \dot{q}, f_{ext}, t_{ext}, g) &= Q(q, \dot{q}) + J^t \lambda \\ h(q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

où :

- $M [n \times n]$ est la matrice de masse symétrique,
- $q [n \times 1]$ décrit les coordonnées généralisées,
- $c [n \times 1]$ est le vecteur dynamique non linéaire qui contient les termes gyroscopiques, centrifuge et gravitationnel ainsi que la contribution des composantes des forces externes f_{ext} et des couples externes t_{ext} résultants,
- $Q [n \times 1]$ représente les forces et les couples articulaires généralisés,
- $J = \frac{\partial h}{\partial q^t}$ représente la matrice Jacobienne des contraintes (de dimension : $[m \times n]$),
- λ représente les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (de dimension : $[m \times 1]$).

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre les $n + m$ équations différentielles algébriques (3.23) en les variables $q [n \times 1]$ et $\lambda [m \times 1]$.

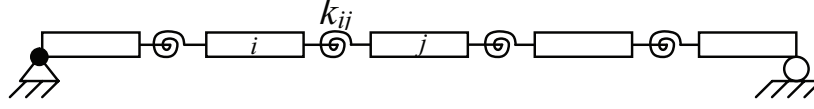


Figure 3.3 – Modèle de Huston d'un barreau flexible

Parmi celles-ci, nous avons opté pour la réduction complète du système à une forme purement différentielle, que nous obtenons au moyen de la méthode du partitionnement de coordonnées (*Coordinate Partitioning* [Weh - 1982]). Ceci nous conduit finalement au système d'équations différentielles suivant :

$$M_r(q_u, q_v) \ddot{q}_u + F_r(\dot{q}_u, q_u, q_v) = 0 \quad (3.24)$$

où q_u et q_v représentent respectivement les coordonnées généralisées indépendantes et dépendantes issues du partitionnement.

L'intégration temporelle du système d'équations différentielles (3.24) nous fournit l'évolution temporelle des coordonnées généralisées indépendantes q_u à partir desquels nous pouvons calculer les coordonnées généralisées dépendantes q_v , en résolvant numériquement les contraintes non linéaires $h(q)$. La linéarisation du système (3.24) autour d'une configuration d'équilibre nous permet de déterminer les fréquences propres comme nous le montrons à la section 3.2.2.1.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le modèle de Huston utilise un modèle de segments finis pour modéliser un barreau flexible comme illustré à la figure 3.3. Dans le cas de notre moteur piézoélectrique, les segments rigides sont articulés entre eux par une articulation rotoïde à 1 degré de liberté. Selon Huston [Hus - 1993] et conformément à l'élasticité linéaire, les paramètres de raideur équivalente k_{ij} entre deux segments i et j (figure 3.3) sont donnés par :

$$k_{ij} = \frac{2E_i E_j I_i I_j}{E_i I_j l_j + E_j I_i l_i} \quad (3.25)$$

où E_i et E_j sont les modules de Young, I_i et I_j sont les moments d'inertie de la section transversale du barreau, l_i et l_j sont les longueurs respectives des deux segments. Dans le cas où les segments sont identiques, l'équation (3.25) se réduit à :

$$k_{ij} = \frac{E I}{l} \quad (3.26)$$

où $E = E_i = E_j$, $I = I_i = I_j$ et $l = l_i = l_j$.

Les actionneurs piézoélectriques qui mettent en vibration le barreau sont modélisés simplement par des corps supplémentaires du système multicorps

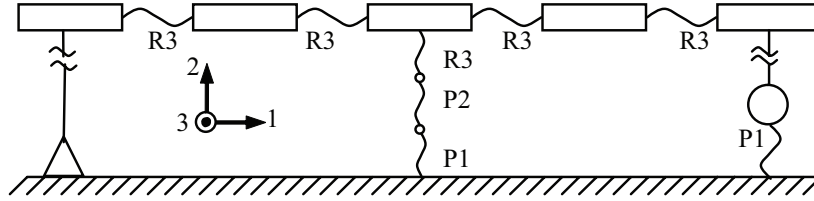


Figure 3.4 – Lumped parameter model du barreau sans ses excitateurs suivant la syntaxe Robotran

qui se déplacent verticalement et sont liés au barreau à leur position d de manière rigide. Les sections suivantes donnent plus de détails sur le modèle des vibrations libres et forcées de notre système.

3.2.2.1 Modèle segments-finis du barreau vibrant

Le modèle segments finis du barreau flexible sans excitateurs est décrit à la figure 3.4.

Dans l'exemple illustré, seulement cinq segments sont représentés. Ils sont reliés par des articulations rotoïdes autour de troisième axe (R3) tandis que le segment central représentant le centre du barreau est libre dans le plan et est donc relié au sol par l'intermédiaire de trois articulations : deux articulations prismatiques le long des axes 1 (P1) et 2 (P2) et une articulation rotoïde autour de l'axe 3 (R3). Ceci fournit les 3 degrés de liberté libres au barreau qui est physiquement lié au sol par l'intermédiaire d'appuis simples à ses extrémités. Au lieu de lier le barreau au sol à l'une de ses extrémités, nous avons choisi de le relier au centre afin de réduire la longueur des chaînes cinématiques et donc la longueur des expressions symboliques récursives.

Dans le cas d'un barreau divisé en m segments, nous avons besoin de $m + 3$ coordonnées généralisées pour modéliser le barreau. Les deux appuis imposent chacun une contrainte ponctuelle, comprenant quatre équations de contraintes algébriques $h(q) = 0$ entre les coordonnées généralisées. Il reste alors $m - 1$ coordonnées indépendantes correspondant aux angles relatifs entre les m segments.

Pour étudier les modes propres du barreau, les équations du mouvement réduites (3.24) sont d'abord linéarisées autour de l'équilibre statique horizontal $(\bar{q}_u, \bar{q}_v)$. On calcule ensuite les matrices tangentes G_r et K_r de la manière suivante :

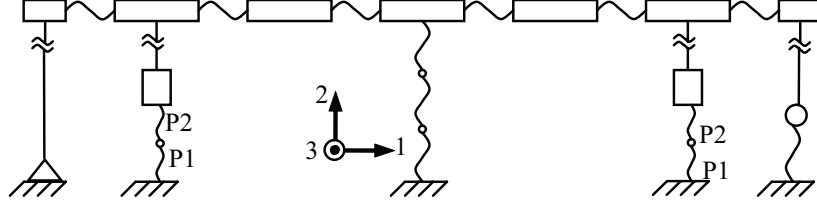


Figure 3.5 – Lumped parameter model du barreau avec ses deux excitateurs suivant la syntaxe Robotran

$$\begin{aligned} G_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v) &= \frac{\partial F_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v)}{\partial \dot{q}_u} \\ K_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v) &= \frac{\partial F_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v)}{\partial q_u} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ce qui, en posant $\Delta q = q - \bar{q}$, permet de linéariser les équations du mouvement :

$$M_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v) \Delta \ddot{q}_u + G_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v) \Delta \dot{q}_u + K_r(\bar{q}_u, \bar{q}_v) \Delta q_u = 0 \quad (3.28)$$

que l'on peut ensuite reformuler au premier ordre de la manière suivante :

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q}_u \\ \Delta q_u \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q}_u \\ \Delta q_u \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

en posant $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -M_r^{-1} G_r & -M_r^{-1} K_r \\ I & 0 \end{bmatrix}$ avec M_r la matrice de masses réduite et I la matrice identité.

Nous pouvons dès lors déduire les modes et fréquences propres du stator à partir des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$.

Si on considère les actionneurs piézoélectriques, nous devons adapter le modèle comme illustré à la figure 3.5. Les actionneurs imposent un mouvement vertical par rapport au sol et sont reliés au barreau par l'intermédiaire de contraintes. Nous imposons dès lors une loi de mouvement aux actionneurs qui mettent le barreau en vibration.

3.2.2.2 L'influence du nombre de segments

Le nombre et la précision des modes propres que nous pouvons calculer grâce au modèle en segments finis du barreau en vibrations libres dépend du

Normal modes	Normal frequencies 11 segments	Normal frequencies 21 segments	Normal frequencies 31 segments
1	9	9	9
2	37	37	37
3	83	83	83
4	148	148	148
5	230	231	231
6	329	332	332
7	441	452	452
8	560	590	591
9	671	745	748
10	753	918	923

Tableau 3.2 – Fréquences propres (correspondant au 10 premiers modes propres) calculées à partir de modèles multicorps composés respectivement de 11, 21 et 31 segments

nombre de coordonnées indépendantes. Pour calculer la fréquence du N^{ieme} mode propre, nous devons donc modéliser au moins $N + 1$ segments (c'est-à-dire : N angles relatifs entre ces segments correspondant aux N coordonnées indépendantes).

Mais, comme illustrés à la figure 3.6 et au tableau 3.2, pour obtenir des modes plus élevés, nous avons besoin de plus de $N+1$ segments. La valeur exacte de la fréquence analytique évolue de manière asymptotique avec le nombre de segments. Par exemple, nous avons besoin de 73 segments pour calculer le 40^{ieme} mode avec une erreur de 1% par rapport à la valeur analytique et nous avons besoin de 19 segments pour calculer le 10^{ieme} mode avec la même précision.

3.2.3 Le modèle éléments finis

En général, si le problème se réduit à un problème à deux dimensions [Mir - 2003], on peut décrire les conditions de déformation d'un corps élastique, à partir des composantes $u = (u_x, u_y)$ de déformation. En supposant de faibles déplacements, on peut déduire les contraintes normales de déformation (ϵ_x, ϵ_y) et les contraintes de cisaillement ϵ_{xy} à partir des déformations de la manière suivante :

$$\epsilon = \nabla \mathbf{u} \quad (3.30)$$

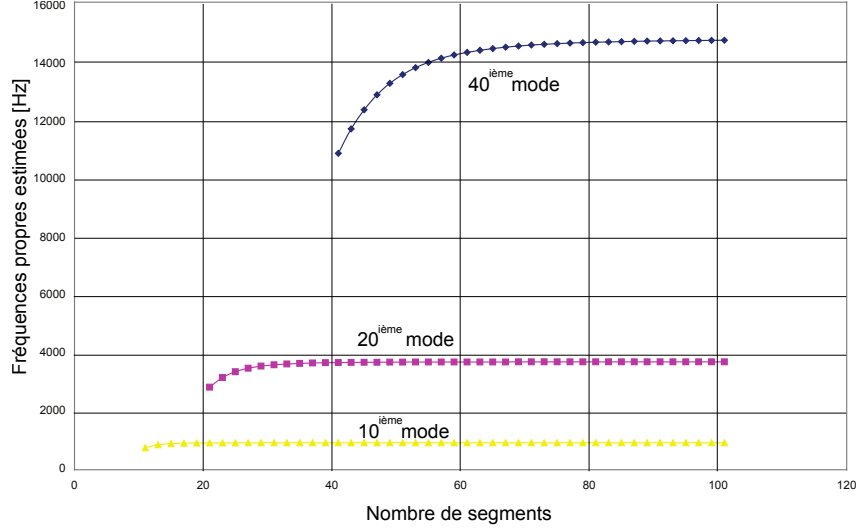


Figure 3.6 – Evolution de la valeur estimée des fréquences propres en fonction du nombre de segments utilisés dans la modélisation multicorps du stator pour le 10^{ème} mode (923Hz), pour le 20^{ème} mode (3692Hz) et pour le 40^{ème} mode (14769Hz)

De plus, on peut lier les déformations aux contraintes mécaniques à travers la relation constitutive suivant la relation :

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \epsilon \quad (3.31)$$

où $\mathbf{D}$ est la matrice d'élasticité. Dans le cas d'un matériau isotrope, la matrice d'élasticité $\mathbf{D}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

où E est le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson qui définit la contraction du matériau dans la direction perpendiculaire à la déformation.

Nous avons utilisé le logiciel *COMSOL Multiphysics*® pour obtenir la solution de ces équations dans une approche éléments finis. Ce programme se base sur la résolution des équations d'équilibre exprimées suivant des contraintes globales [Com - 2008]. Cette équation d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{F} = -\nabla \cdot \sigma \quad (3.33)$$

où $\mathbf{F}$ représente les forces de volume. En substituant les relations contrainte-déformation et déplacement-déformation (3.31) dans l'équation d'équilibre statique (3.33), on trouve l'équation d'équilibre suivante :

$$\mathbf{F} = -\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u) \quad (3.34)$$

Afin de trouver les fréquences propres, on ajoute la masse à l'équation (3.34) et on résout le problème aux valeurs propres suivant [Com - 2008] :

$$|-\lambda \rho u - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u)| = 0 \quad (3.35)$$

où ρ représente la densité. Les fréquences propres f sont liées aux valeurs propres λ par la relation : $f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$.

Pour résoudre le système complet, nous devons introduire la seconde loi de Newton :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u) = F \quad (3.36)$$

COMSOL Multiphysics [Com - 2008] utilise l'amortissement de Rayleigh pour modéliser l'effet dû à l'amortissement visqueux en spécifiant deux coefficients. Pour voir comment le logiciel procède, nous considérons un système à 1 degré de liberté. Ce système est décrit par la relation suivante :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial u}{\partial t} + k u = f(t) \quad (3.37)$$

Le modèle d'amortissement de Rayleigh exprime le facteur d'amortissement ξ suivant un terme de masse m et de raideur k :

$$\xi = \alpha m + \beta k \quad (3.38)$$

Si on définit le vecteur de vitesse $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, nous pouvons inclure l'amortissement à l'équation dynamique. Ce qui conduit à l'équation suivante résolue par l'intégrateur de *COMSOL* [Com - 2008] :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \nabla \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \beta \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & \rho \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Normal modes	Analytical model	F.E. model	Multi-body model 31 seg.	Multi-body model 83 seg.
1	9	9	9	9
5	231	232	231	231
10	923	926	923	923
15	2077	2083	2064	2077
20	3692	3564	3590	3691
25	5769	5683	5215	5762
30	8308	8026	6187	8285
35	11308	10789		11251
40	14769	13967		14641
45	18692	17797		18420

Tableau 3.3 – Comparaison entre les fréquences propres calculées à partir des 3 modèles

3.3 Comparaison entre les fréquences propres calculées par les trois modèles

Si nous calculons les fréquences propres du stator étudié à l'aide des trois modèles présentés aux sections précédentes, nous obtenons les résultats présentés au tableau 3.3.

Dans le modèle analytique, les fréquences propres sont calculées à partir de l'équation (3.10). Quand nous calculons les fréquences propres avec *COM-SOL Multiphysics*, les résultats que nous obtenons sont légèrement différents. Ces différences viennent vraisemblablement du fait que le modèle analytique ne prend en compte ni les forces de cisaillement, ni le moment d'inertie, ni l'amortissement du barreau dans ses équations.

Comme nous l'avons expliqué à la section précédente, le modèle segments-finis dépend du nombre de segments pour une fréquence propre donnée. Dans notre cas, un modèle à 31 segments permet de calculer les 15 premières fréquences propres alors qu'un modèle à 83 segments permet de calculer les 45 premières fréquences propres avec la même précision de 1%. Pour une précision donnée, la figure 3.7 illustre le nombre de segments nécessaires.

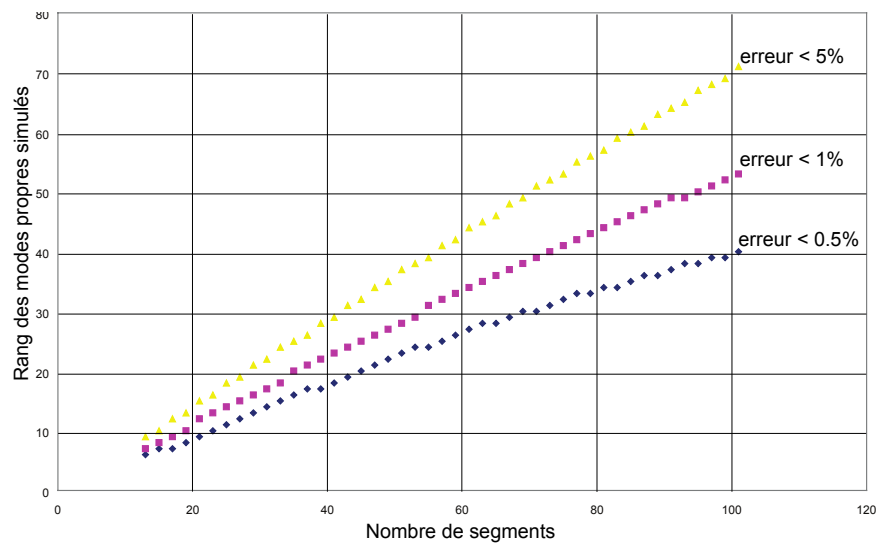


Figure 3.7 – Evolution du nombre de modes propres que l'on peut simuler avec une précision donnée en fonction du nombre de segments présents dans le modèle multicorps (diamants bleus pour une erreur < 0.5% - carrés rouges pour une erreur < 1% - triangles jaunes pour une erreur < 5%)

3.4 Conclusion

Bien que le modèle analytique permette de comprendre le comportement d'un barreau vibrant et fournisse une bonne estimation des fréquences propres qui permettront, comme nous le présenterons au chapitre suivant, de trouver les meilleures fréquences d'excitation pour obtenir une "belle" onde progressive dans le barreau, il ne donne qu'une amplitude relative de l'onde de flexion en fonction de l'amplitude relative de chaque mode propre et non l'amplitude réelle de la déformation du stator car il ne prend pas en compte l'amortissement du barreau ni les contraintes de cisaillement et le moment d'inertie qui influencent fortement l'amplitude des vibrations. Il est également impossible de construire un modèle analytique complet permettant le dimensionnement et l'optimisation d'un moteur linéaire en incluant un modèle dynamique des actionneurs piézoélectriques et un modèle du contact entre le mobile et le barreau qui, à son tour, peut influencer la propagation de l'onde progressive à travers le barreau.

Dans le modèle éléments finis, le calcul des modes propres et fréquences propres est plus proche de la réalité. De plus, il est très facile de tenir compte de l'amortissement dans le barreau vibrant. Mais le temps de calcul est très important et il est difficile de modéliser le moteur piézoélectrique dans un modèle global incluant le mobile et en particulier le modèle d'entraînement par friction.

Le modèle multicorps en segments-finis permet d'obtenir des résultats précis en utilisant un nombre raisonnable de segments, tout en rendant cette approche très intéressante en termes de temps de calcul. De plus, il est possible d'inclure et de régler un coefficient d'amortissement à chaque articulation afin de tenir compte des pertes dans le stator. Enfin, ce modèle est le plus prometteur si on veut modéliser le système complet incluant les actionneurs piézoélectriques, le mobile et son influence sur l'onde progressive, l'entraînement par friction et permettre le dimensionnement et l'optimisation d'un moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.

Chapitre 4

Optimisation de l'onde progressive

Au chapitre précédent, nous avons présenté trois modèles (un analytique et deux numériques) d'un stator vibrant constitué d'un barreau métallique simplement posé à ses extrémités. Ce stator est excité par deux actionneurs piézoélectriques situés à une distance d de ses extrémités. Nous avons également supposé que ces deux actionneurs produisent des forces sinusoïdales F_1 et F_2 de même amplitude A , de même pulsation ω mais déphasées de 90° (figure 4.1).

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment choisir les conditions d'excitation (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) de l'onde de flexion produite dans ce stator afin qu'elle se rapproche au mieux d'une onde progressive parfaite. A cette fin, nous utilisons deux techniques :

- La première est directement basée sur l'étude de la solution analytique de l'onde de flexion produite dans le stator (solution donnée en (3.22) et reprise ci-dessous en (4.1)) qui s'exprime, pour chaque actionneur, par la superposition d'un nombre infini de modes normaux dont les fonc-

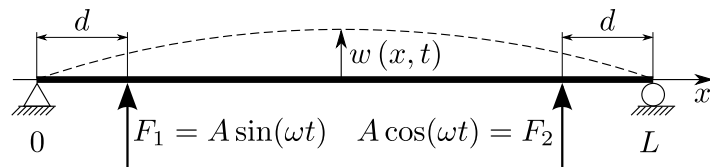


Figure 4.1 – Schéma du stator vibrant étudié

tions poids a_n , qui définissent la contribution de chaque mode propre, dépendent de la position des actionneurs d et de la pulsation d'excitation ω (3.20) égale à $2\pi f$.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\beta_n x) \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin(\beta_n x) \cos(\omega t) \quad (4.1)$$

Nous nous intéresserons à la façon dont les termes du développement (4.1) se combinent entre eux pour former une onde progressive et des ondes stationnaires pour en déduire la position des actionneurs et la pulsation d'excitation qui maximise la proportion d'onde progressive au détriment des ondes stationnaires.

- La seconde technique se base sur un critère qui permet d'approximer localement (en chaque position le long du stator) l'onde de flexion par la superposition de deux ondes progressives qui se propagent dans des directions opposées. Ce critère permettra de privilégier l'onde progressive qui se propage dans la direction choisie au détriment des ondes stationnaires en choisissant la position des actionneurs et leur fréquence d'excitation de manière à maximiser l'amplitude de cette onde par rapport à celle se propageant dans la direction opposée.

4.1 Optimisation par recombinaison de modes propres

Comme nous l'avons présenté au chapitre 2, l'onde progressive dans les stators annulaires est créée à partir de la superposition de deux ondes stationnaires (4.2) déphasées spatialement d'un quart de longueur d'onde et temporellement d'un quart de période :

$$A \sin(\omega t) \cos(kx) + A \cos(\omega t) \sin(kx) = A \sin(\omega t + kx) \quad (4.2)$$

où k est le nombre d'ondes.

Dans le stator linéaire que nous étudions, considérant l'équation (4.1), où le déphasage temporel est obtenu en déphasant l'alimentation des deux actionneurs, le problème de maximisation de l'onde progressive revient à s'assurer que les actionneurs génèrent, autant que possible, les mêmes formes d'ondes mais déphasées spatialement de 90° .

Etant entendu que la solution (4.1), décrivant l'onde de flexion produite dans le stator, est construite à partir de la superposition d'un nombre infini

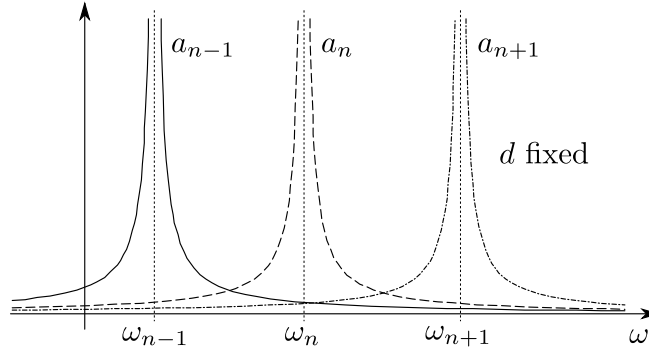


Figure 4.2 – Evolution de l'amplitude des fonctions poids en fonction de la pulsation d'excitation pour une position d proche d'un ventre du mode propre correspondant

de modes normaux, dont les contributions respectives sont déterminées par des fonctions poids a_n qui dépendent non seulement des conditions aux limites (la façon dont le barreau vibrant est fixé au bâti) mais également de la façon dont le barreau est excité (la position d des actionneurs et de la pulsation d'excitation ω), le problème revient donc à choisir judicieusement les valeurs de d et ω de façon à imposer que les deux actionneurs génèrent bien les mêmes formes d'ondes avec le déphasage spatial souhaité.

Comme illustré à la figure 4.2, la contribution d'un mode propre devient rapidement dominante lorsque la pulsation d'excitation se rapproche de la pulsation naturelle correspondant à ce mode. D'un autre côté, quand la pulsation d'excitation n'est proche d'aucune pulsation propre, aucun mode propre ne prédomine, même si les deux modes propres qui ont leurs pulsations propres situées de part et d'autre de la pulsation d'excitation sont excités de manière privilégiée.

La figure 4.3 montre que la localisation de l'actionneur a aussi une influence sur l'importance relative des modes propres. En pratique, le poids de chaque mode propre sera maximum si l'actionneur est placé sur un ventre ("anti node") de ce mode. Au contraire, un mode sera complètement absent si l'actionneur est placé à un noeud ("node") de ce mode.

En conclusion, le choix de la pulsation d'excitation et de la position des actionneurs détermine l'onde générée dans le barreau en fonction de l'amplitude relative des différents modes propres excités par chacun des deux actionneurs.

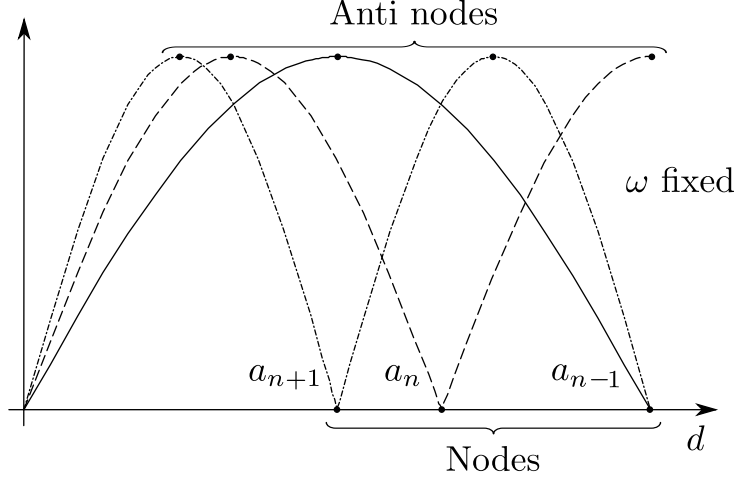


Figure 4.3 – Evolution de l'amplitude des fonctions poids en fonction de la position d'excitation d pour une pulsation ω choisie entre deux pulsations propres consécutives

4.1.1 Recombinaison des deux modes propres principaux

Considérons dans un premier temps pour simplifier le problème, que, dans le calcul de l'onde de flexion donnée par (4.1), on peut se limiter à considérer uniquement les deux modes propres qui encadrent la fréquence d'excitation. Supposons donc que la fréquence d'excitation est située entre les fréquences propres des modes l et $l + 1$ (en choisissant, par exemple, l pair), et que les actionneurs sont situés à des positions proches des ventres de ces modes. Dans ce cas, la solution de l'onde de flexion (4.1) devient :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= [a_l \sin(\beta_l x) + a_{l+1} \sin(\beta_{l+1} x)] \sin(\omega t) \\ &+ [a_l \sin(\beta_l x) - a_{l+1} \sin(\beta_{l+1} x)] \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

comme l est pair, on peut transformer (4.3) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \left[\overbrace{a_l (\sin(\beta_l x) - \sin(\beta_{l+1} x))}^1 + \overbrace{(a_l + a_{l+1}) \sin(\beta_{l+1} x)}^3 \right] \sin(\omega t) \\ &+ \left[\overbrace{a_l (\sin(\beta_l x) + \sin(\beta_{l+1} x))}^2 - \overbrace{(a_l + a_{l+1}) \sin(\beta_{l+1} x)}^3 \right] \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

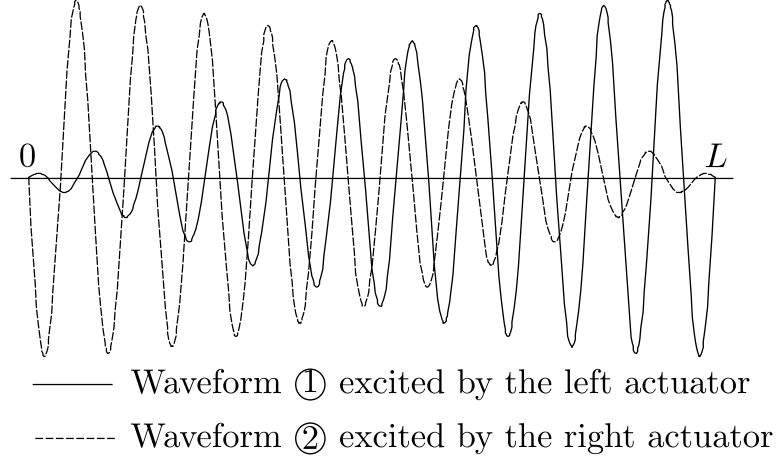


Figure 4.4 – Formes d’ondes 1 et 2 correspondant aux équations (4.5) et (4.6) qui sont issues de la superposition des modes 21 et 22. La forme d’onde 1 est excitée par l’actionneur de gauche, la forme d’onde 2 par l’actionneur de droite

ce qui met en évidence trois formes d’ondes. Les deux premières (notées 1 et 2 dans l’équation (4.4)), excitées respectivement par les actionneurs de gauche et de droite, peuvent se transformer, grâce aux relations trigonométriques, en les expressions suivantes :

La forme d’onde 1 de (4.4) devient :

$$2 a_l \cos \left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x \right) \sin \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \quad (4.5)$$

et la forme d’onde 2 de (4.4) devient :

$$2 a_l \sin \left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \quad (4.6)$$

Ces deux équations sont des fonctions sinusoïdales d’argument $\left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x \right)$ modulées en amplitude par une autre fonction sinusoïdale d’argument $\left(\frac{\pi}{2L} x \right)$. Suivant la même approche que pour l’équation (4.2), on remarque que la superposition des formes d’ondes 1 et 2, décalées spatialement d’un quart de longueur d’onde (figure 4.4), donne naissance à une onde partiellement progressive et partiellement stationnaire dont la superposition peut être vue comme une onde progressive modulée en amplitude par une fonction sinusoïdale d’argument $\left(\frac{\pi}{2L} x \right)$.

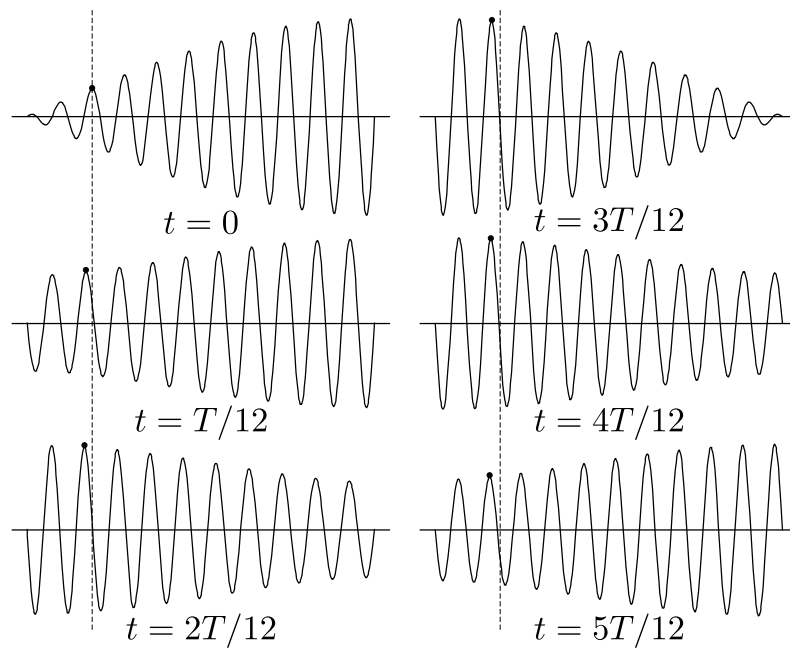


Figure 4.5 – Onde de flexion obtenue lorsqu'on excite le barreau entre les modes 21 et 22

La figure 4.5 illustre l'onde de flexion résultant de la superposition des deux ondes stationnaires issues de (4.5) et (4.6) ainsi que son évolution temporelle, on y observe une onde progressive sur la totalité de la longueur du barreau, mais avec battement nul en son centre et maximum à ses extrémités.

Si la modulation de l'amplitude des formes d'ondes 1 et 2 n'existait pas, les deux actionneurs exciteraient des formes d'ondes déphasées d'un quart de longueur d'onde qui multipliées par leur dépendance temporelle respective en quadrature l'une par rapport à l'autre formeraient deux ondes stationnaires de même amplitude mais déphasées d'un quart de longueur d'onde et d'un quart de période comme dans l'équation (4.2). Leur superposition fournirait alors une onde progressive d'amplitude constante sur la totalité du barreau. Malheureusement, la modulation de l'amplitude des formes d'ondes créées détériore fortement la qualité de l'onde progressive lorsqu'on s'éloigne du centre du barreau (figure 4.5) rendant l'onde presque totalement stationnaire aux extrémités du stator.

La troisième forme d'onde de l'équation (4.4), notée 3, est excitée par chaque actionneur. Elle donne naissance à une onde purement stationnaire de la forme suivante :

$$\sqrt{2}(a_l + a_{l+1}) \sin(\beta_l x) \cos(\omega t - \pi/4) \quad (4.7)$$

qui se superpose à l'onde progressive formée par les parties 1 et 2 des équations (4.3) et (4.4), ce qui réduit davantage la qualité de l'onde progressive dans le stator.

En conclusion, cette approche nous montre que pour maximiser la qualité de l'onde progressive, il faut choisir les conditions d'excitation (ω et d) qui assurent que les formes d'ondes des modes propres principaux (l et $l+1$) aient la même amplitude avec un signe opposé ($a_l = -a_{l+1}$). De cette façon, l'onde stationnaire (4.7) disparaît, augmentant par conséquent, la qualité de l'onde progressive.

L'expression mathématique exprimant cette condition ($a_l = -a_{l+1}$) donne un nombre infini de solutions, parmi lesquelles on choisit une solution particulière en imposant :

$$\begin{aligned} \sin(\beta_l d) &= \sin(\beta_{l+1} d) \\ (\beta_l^4 - \beta^4) &= -(\beta_{l+1}^4 - \beta^4) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ce qui nous permet de déterminer des conditions d'excitation particulières (la position d et la pulsation ω) :

$$\begin{aligned} d &= \pi/(\beta_l + \beta_{l+1}) \\ \omega &= g\sqrt{(\beta_l^4 + \beta_{l+1}^4)/2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

en fonction des modes propres principaux (l et $l+1$) qui ne dépendent pas directement des dimensions géométriques et des propriétés mécaniques du stator.

4.1.2 Recombinaison de tous les modes propres

Si on considère tous les modes présents dans la solution générale du système excité, on observe, comme illustré à la figure 4.2, que si les deux modes propres dont les fréquences encadrent la fréquence d'excitation sont prédominants, les autres ne sont pas complètement insignifiants. Dès lors, la question que l'on peut se poser, est de savoir si ces derniers peuvent améliorer ou non la qualité de l'onde progressive et si oui dans quelle mesure et à quelles conditions.

Afin de répondre à ces questions, repartons de l'expression complète des formes d'ondes issues de (4.1) en ne prenant que la partie de la solution correspondant à l'excitation de gauche :

$$\begin{aligned} \cdots + \overbrace{a_{l-2} \sin(\beta_{l-2}x)}^2 + \overbrace{a_{l-1} \sin(\beta_{l-1}x)}^1 + \overbrace{a_l \sin(\beta_l x)}^0 + \\ \underbrace{a_{l+1} \sin(\beta_{l+1}x)}_0 + \underbrace{a_{l+2} \sin(\beta_{l+2}x)}_1 + \underbrace{a_{l+3} \sin(\beta_{l+3}x)}_2 + \cdots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si on combine deux par deux les modes propres situés de part et d'autre des modes propres principaux l et $l+1$ en groupant les modes $l-i$ et $l+1+i$ (pour $i = 0, 1, \dots$) pour autant que leurs poids respectifs soient égaux au signe près ($a_{l-i} = -a_{l+1+i}$) et en appliquant les mêmes transformations trigonométriques que précédemment, on peut exprimer le résultat pour chaque paire de modes propres de la manière suivante :

$$2a_{l-i} \cos\left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x\right) \sin\left((2i+1) \frac{\pi}{2L} x\right) \quad (4.11)$$

Chaque paire produit la même forme d'onde mais modulée en amplitude par une fonction sinusoïdale dont l'argument évolue avec $2i+1$. La forme d'onde résultante conserve une forme commune, en $\cos\left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x\right)$, mais modulée en amplitude par une somme de termes de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_{l-i} \sin\left((2i+1) \frac{\pi}{2L} x\right) \quad (4.12)$$

Si les poids a_{l-i} des différents modes propres satisfont la condition $\frac{a_{l-i}}{a_l} = \frac{1}{2^{i+1}}$, les termes de la somme (4.12) deviennent ceux du développement en série de Fourier :

$$\frac{a_l}{4} \left(\frac{\sin((\pi/L)x)}{1} + \frac{\sin(3(\pi/L)x)}{3} + \frac{\sin(5(\pi/L)x)}{5} + \dots \right) \quad (4.13)$$

d'une fonction échelon d'amplitude $2a_l/\pi$ et de période spatiale $4L$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a_l/\pi & \text{si } 0 < x < 2L \\ -a_l/\pi & \text{si } -2L < x < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Dans ce cas, la forme d'onde excitée par l'actionneur de gauche sera donnée par une fonction en $\cos\left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x\right)$ sans aucune modulation d'amplitude et ce sur toute la longueur du barreau.

Suivant ces mêmes conditions, nous pouvons montrer que la forme d'onde excitée par l'actionneur de droite donnera une fonction en $\sin\left(\frac{\beta_l + \beta_{l+1}}{2} x\right)$. Les conditions nécessaires pour produire une onde progressive parfaite tout au long du barreau sont alors réunies.

En conclusion, les modes propres secondaires excités par les deux actionneurs peuvent améliorer de manière significative la qualité de l'onde progressive produite pour autant que les conditions suivantes puissent être rencontrées :

$$\begin{aligned} a_{l-i} &= -a_{l+1+i} \\ \frac{a_{l-i}}{a_l} &= \frac{1}{2^{i+1}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec $i = 0, 1, 2 \dots$

4.1.3 Maximisation de l'onde progressive

Malheureusement, nous ne pouvons pas trouver de solution en pulsation ω et en position d pour l'équation (4.1) qui satisfasse de manière exacte les conditions (4.15). On ne peut qu'approcher ces conditions en minimisant un critère d'erreur.

Pour illustrer notre propos, nous allons essayer de calculer les conditions d'excitation (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) qui garantissent la meilleure qualité d'onde progressive dans le barreau décrit au tableau 4.1 pour une fréquence d'excitation choisie, par exemple, entre les fréquences propres des modes 21 et 22.

Amplitude de la force d'excitation A	$1N$
Longueur L	$0.5m$
Section transversale $b \times h$	$0.015m \times 0.002m$
Masse volumique ρ	$2700kg/m^3$
Module d'élasticité E	$50.925GPa$
Modes propres principaux	21 et 22

Tableau 4.1 – Paramètres du barreau

Dans un premier temps, nous minimisons l'erreur ϵ_1 sur la première condition de (4.15) au sens des moindres carrés en faisant varier les conditions d'excitation (la pulsation ω et la position d) dans leurs intervalles respectifs à l'aide de l'algorithme de Lagarias [Lag - 1998] qui est basé sur la méthode du simplexe de Nelder-Mead [Nel - 1965] :

$$\epsilon_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^m (a_{l-i} + a_{l+i+1})^2} \quad (4.16)$$

en se limitant au niveau du critère de minimisation à un nombre $m+1$ de paires de modes propres considérés afin d'examiner l'impact sur la qualité de l'onde progressive du nombre de modes considérés lors de la minimisation de l'erreur ϵ_1 .

Nous avons donc minimisé l'erreur ϵ_1 en augmentant le nombre m de 1 à 20 qui correspond à 21 paires de modes propres (le nombre maximum de paires de modes propres que l'on peut associer lorsqu'on excite le stator entre les modes 21 et 22).

Nous avons constaté qu'il fallait considérer un minimum de six modes propres ($m = 2$) pour que l'application du critère conduise à des valeurs de ω et d qui donnent un résultat satisfaisant au niveau de l'onde progressive obtenue. Le tableau 4.2 reprend les résultats obtenus après minimisation de l'erreur ϵ_1 . On remarque que lorsque la première condition de (4.15) est satisfaite, la seconde condition de (4.15) tend également à être satisfaite alors qu'elle ne fait pas partie du critère d'erreur.

Nous avons ensuite tracé, à la figure 4.6, les formes d'ondes générées par les actionneurs de gauche et de droite pour les résultats présentés au tableau 4.2 en considérant un nombre de 500 modes propres. Si on compare ces résultats à ceux obtenus précédemment à figure 4.4 lorsqu'on ne considérait que les deux modes propres principaux, nous constatons que nous obtenons toujours deux sinusoïdes décalées spatialement d'un quart de longueur d'onde mais, cette fois, avec des amplitudes qui restent constantes sur la quasi-totalité du stator. On

a_{18}	$2.411338 \cdot 10^{-8}$	a_{25}	$-2.61088 \cdot 10^{-8}$
a_{19}	$4.13084 \cdot 10^{-8}$	a_{24}	$-4.17822 \cdot 10^{-8}$
a_{20}	$7.67206 \cdot 10^{-8}$	a_{23}	$-7.62253 \cdot 10^{-8}$
a_{21}	$2.40379 \cdot 10^{-7}$	a_{22}	$-2.40415 \cdot 10^{-7}$
a_{21}/a_{20}	3.13317	a_{21}/a_{19}	5.81913
a_{21}/a_{18}	9.96025	ϵ_1^2	$3.799 \cdot 10^{-15}$

Tableau 4.2 – Valeurs numériques des paires de fonctions poids a_n associées dans la combinaison de modes, ces résultats sont issus de la minimisation de la première condition sur les 6 modes principaux autour des modes 21 et 22. Nous avons obtenu, après optimisation, la position d'excitation optimale $d = 0.0326209m$ et la fréquence d'excitation optimale $f = 7283.33Hz$.

a_{17}	$1.30097 \cdot 10^{-8}$	a_{26}	$-1.69024 \cdot 10^{-8}$
a_{18}	$2.41338 \cdot 10^{-8}$	a_{25}	$-2.61088 \cdot 10^{-8}$
a_{19}	$4.13084 \cdot 10^{-8}$	a_{24}	$-4.17822 \cdot 10^{-8}$
a_{20}	$7.67206 \cdot 10^{-8}$	a_{23}	$-7.62253 \cdot 10^{-8}$
a_{21}	$2.40379 \cdot 10^{-7}$	a_{22}	$-2.40415 \cdot 10^{-7}$
a_{21}/a_{20}	3.00534	a_{21}/a_{19}	5.36823
a_{21}/a_{18}	8.71554	ϵ_1^2	$3.377 \cdot 10^{-15}$

Tableau 4.3 – Valeurs numériques des paires de fonctions poids a_n associées dans la combinaison de modes, ces résultats sont issus de la minimisation de la première condition sur les 42 modes autour des modes 21 et 22. Nous avons obtenu, après optimisation, la position d'excitation optimale $d = 0.0336416m$ et la fréquence d'excitation optimale $f = 7288.96Hz$.

observe tout au plus quelques imperfections à ses extrémités. L'onde de flexion résultante de cette minimisation est illustrée à la figure 4.7. On y observe une onde progressive d'amplitude constante sur la totalité du stator à l'exception de ses extrémités.

La minimisation de l'erreur ϵ_1 en considérant un plus grand nombre de modes conduit à un meilleur respect des deux conditions de (4.15). Le tableau 4.3 reprend les résultats obtenus après minimisation de l'erreur ϵ_1 en considérant 42 modes propres (càd : en prenant $m = 20$), on remarque que si l'erreur sur la première condition de (4.15) est pratiquement identique à celle obtenue précédemment pour $m = 2$, celle sur la seconde condition de (4.15) est mieux respectée.

Cependant, l'onde progressive résultante, illustrée à la figure 4.8, se détériore par rapport à celle obtenue précédemment. On constate une légère variation de l'amplitude et de la vitesse de l'onde progressive. Cette dernière semble provenir

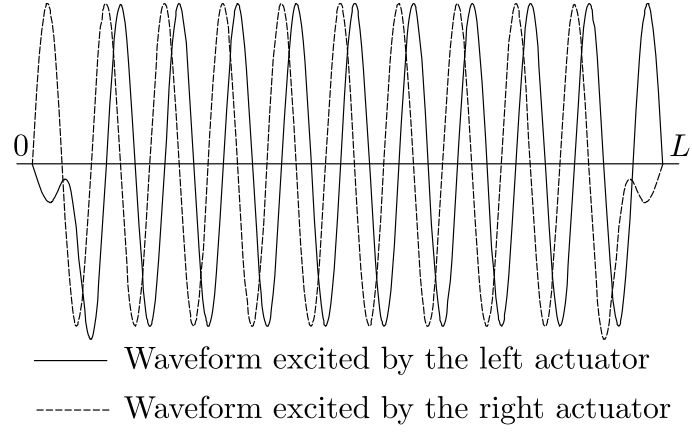


Figure 4.6 – Formes d'ondes créées par les actionneurs de gauche et de droite après minimisation de la première condition sur les 6 modes principaux autour des modes 21 et 22 en considérant 500 modes propres

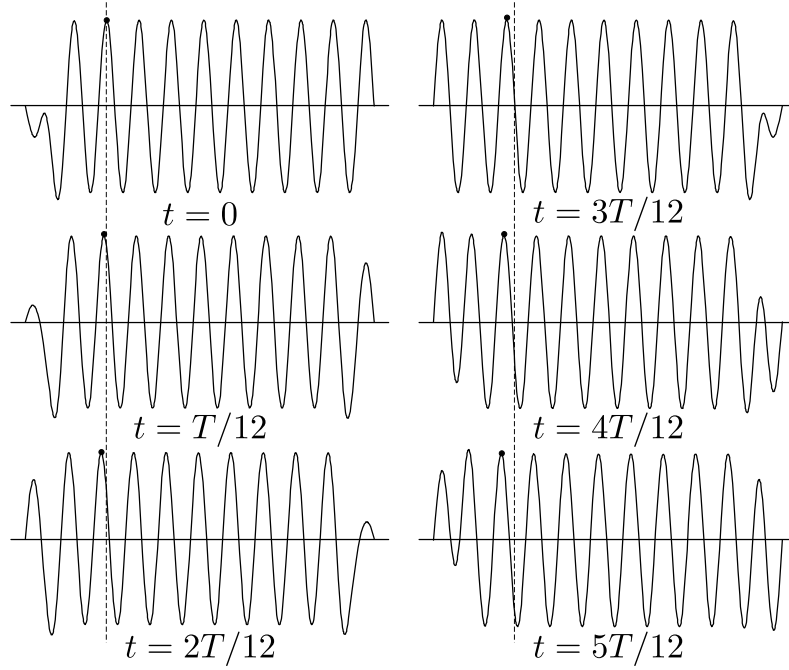


Figure 4.7 – Onde de flexion obtenue après minimisation de la première condition sur les 6 modes principaux autour des modes 21 et 22 en considérant 500 modes propres

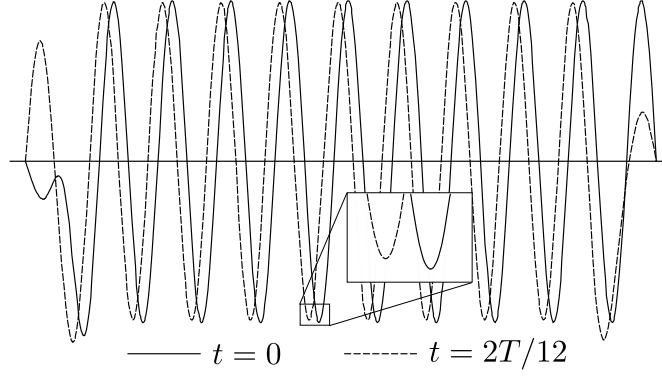


Figure 4.8 – Illustration du phénomène de battement observé sur l'amplitude de l'onde de flexion quand on minimise l'erreur sur la première condition sur les 42 modes autour des modes 21 et 22 en considérant 500 modes propres

d'une variation de la valeur du déphasage spatial entre les deux formes d'ondes principales générées par les deux actionneurs. En effet, pour garantir une belle onde progressive, il faut que le déphasage spatial entre ces formes d'ondes soit égal à 90° . Lors de l'optimisation réalisée sur six modes propres (pour $m = 2$), ce déphasage spatial est proche de 90° à 0,03% près alors que pour l'optimisation réalisée sur les 42 modes (pour $m = 20$), il ne l'est qu'à 0,3% près. L'écart est donc 10 fois plus important.

Nous avons, ensuite, inclus la seconde condition de (4.15) dans un nouveau critère d'erreur ϵ_2 :

$$\epsilon_2 = \sqrt{\sum_i (a_{l-i} + a_{l+i+1})^2 + \sum_i ((2i+1) a_{l-i} - a_l)^2} \quad (4.17)$$

Après avoir minimisé l'erreur sur ϵ_2 au sens des moindres carrés en faisant varier les conditions d'excitation (la pulsation ω et la position d) dans leurs intervalles respectifs à l'aide de l'algorithme de Lagarias [Lag - 1998] qui est basé sur la méthode du simplex de Nelder-Mead [Nel - 1965], nous avons constaté une détérioration de la qualité de l'onde progressive obtenue par rapport aux résultats obtenus après minimisation de l'erreur ϵ_1 sur la première condition seule et ce quelle que soit la valeur de m .

En conclusion, la minimisation des erreurs ϵ_1 ou ϵ_2 faites sur les conditions (4.15) n'est probablement pas le moyen le plus approprié pour améliorer la qualité de l'onde progressive parcourant le stator car ces critères donnent le même poids à l'erreur faite sur chacun de ses termes (càd : l'erreur faite entre

Modèle analytique	Modèle éléments finis
$f_{21} = 6947Hz$	$f_{21} = 5965Hz$
$f_{22} = 7625Hz$	$f_{22} = 6602Hz$

Tableau 4.4 – Fréquences propres des modes 21 et 22

chaque paire de modes associés) alors que, suivant les quelques observations que nous avons faites, il semblerait que l'erreur faite sur chaque paire de mode a un impact réel sur la qualité de l'onde progressive qui diminue à mesure que les modes considérés s'éloignent des modes principaux et que la première condition de (4.15) influence la qualité de l'onde progressive plus fortement que la seconde condition de (4.15).

4.1.4 Validation par une approche éléments finis

L'intérêt d'une validation par une approche éléments finis est de montrer que les conclusions tirées du modèle analytique, qui mettent en évidence la possibilité de générer une onde progressive dans un barreau de longueur finie en choisissant judicieusement les conditions d'excitation, restent valables en dépit des hypothèses inhérentes au modèle analytique. Nous devons cependant rester prudents car nous ne pouvons pas utiliser la fréquence d'excitation et la position des actionneurs obtenues à partir du modèle analytique telles qu'elles.

En effet, comme nous l'avons montré précédemment, le principe de l'optimisation par superposition de modes consiste à choisir judicieusement la fréquence d'excitation et la position des actionneurs en accord avec les modes et les fréquences propres du barreau. Maintenant, si nous comparons les fréquences propres calculées par le modèle éléments finis suivant les mêmes conditions décrites au tableau 4.2, nous observons qu'elles sont relativement différentes de celles calculées à partir du modèle analytique. Ces résultats sont illustrés au tableau 4.4 pour les modes 21 et 22.

Ces différences sont dues à l'influence des efforts de cisaillement et du moment d'inertie en rotation qui, contrairement au modèle éléments finis, ne sont pas pris en compte dans le modèle analytique et ce d'autant plus que leur influence augmente lorsque la fréquence augmente.

Nous avons donc tenu compte du décalage des fréquences propres lors de notre validation par le modèle éléments finis en maintenant la position relative de la fréquence d'excitation entre les fréquences propres des deux modes principaux calculés par le modèle analytique et en l'adaptant aux fréquences propres correspondantes calculées par le modèle éléments finis.

Nous avons calculé la fréquence d'excitation en utilisant le modèle éléments finis à partir des résultats obtenus à la section précédente en minimisant l'erreur sur la première condition (4.15) pour les six modes principaux et reprise au tableau 4.2. Nous avons obtenu une fréquence d'excitation de $6280,7\text{Hz}$. La position des actionneurs ne doit pas être changée car les modèles éléments finis et analytiques donnent les mêmes modes propres. L'onde alors obtenue (figure 4.9) est bien une belle onde progressive, conformément à ce que nous avons prédit à l'aide du modèle analytique.

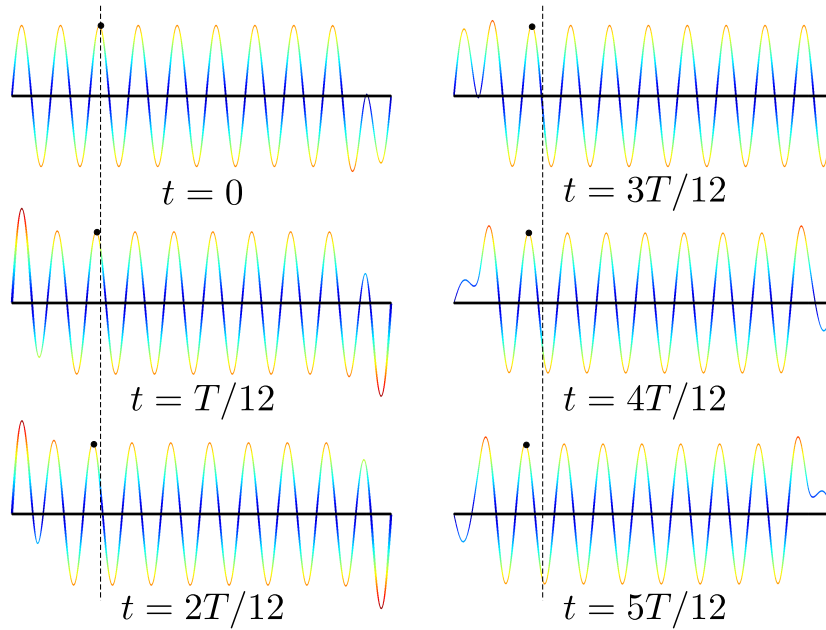


Figure 4.9 – Onde de flexion obtenue dans les mêmes conditions qu'à la figure 4.7 et au tableau 4.2 en utilisant un modèle éléments finis du stator

4.1.5 Conclusion

La méthode de superposition de modes nous a permis d'établir, à partir du modèle analytique, le principe de production d'une onde progressive mais également de déterminer les conditions (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) assurant une onde progressive de la meilleure qualité possible tout au long du barreau. Les résultats que nous avons obtenus montrent que cette méthode donne pleine satisfaction seulement si on applique l'optimisation sur

une partie des modes propres présents, ceux dont le poids est le plus important et qui semblent avoir un impact prépondérant sur la qualité de l'onde obtenue. Ces observations nous motivent à développer un autre critère d'optimisation, basé sur une approche totalement différente, et qui permette de caractériser localement la qualité de l'onde progressive obtenue en minimisant le taux d'ondes stationnaires.

4.2 Optimisation par minimisation du taux d'ondes stationnaires

Dans cette section, nous présentons un nouveau critère d'optimisation : le taux d'onde stationnaire (noté SWR pour "standing wave ratio") et nous montrons comment construire ce nouveau critère à partir du modèle analytique. Ensuite, nous le comparons avec le critère développé à la section 4.1 et nous montrons qu'il donne des résultats pratiquement indiscernables de ceux obtenus précédemment. Finalement, nous présenterons, à la section 4.3, comment on peut exploiter le critère du SWR sans utiliser le modèle analytique mais à partir d'un échantillon de mesures issu d'un modèle numérique ou de résultats expérimentaux sur un stator donné.

4.2.1 Calcul de la fonction $\hat{w}(x)$

Si nous reprenons la solution générale de l'onde dans le barreau (4.1) et que nous exprimons cette solution en utilisant la représentation complexe de sa dépendance temporelle, en posant $\cos(\omega t) = \Re(\exp(j\omega t))$ et $\sin(\omega t) = \Re(-j \exp(j\omega t))$, l'équation (4.1) se transforme en :

$$\hat{w}(x, t) = \left(-j \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\beta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin(\beta_n x) \right) \exp(j\omega t) \quad (4.18)$$

Cette expression permet de séparer la dépendance temporelle de la dépendance spatiale de l'onde de flexion. La fonction $\hat{w}(x)$ qui exprime la dépendance spatiale de l'onde en fonction de la position x le long du barreau ($0 < x < L$) s'exprime dès lors :

$$\hat{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin(\beta_n x) - j \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\beta_n x) = w_1(x) - jw_2(x) \quad (4.19)$$

On peut représenter cette fonction, $\hat{w}(x)$, dans le plan complexe par une trajectoire fonction de la position x (figure 4.10). Afin d'exprimer comment le point représentant la fonction $\hat{w}(x)$ évolue le long de sa trajectoire quand x augmente, en partant de 0 jusqu'à L (la longueur du barreau), nous avons indiqué, à la figure 4.10, le point de départ de la trajectoire en $x = 0$ et le point d'arrivée de cette même trajectoire en $x = L$.

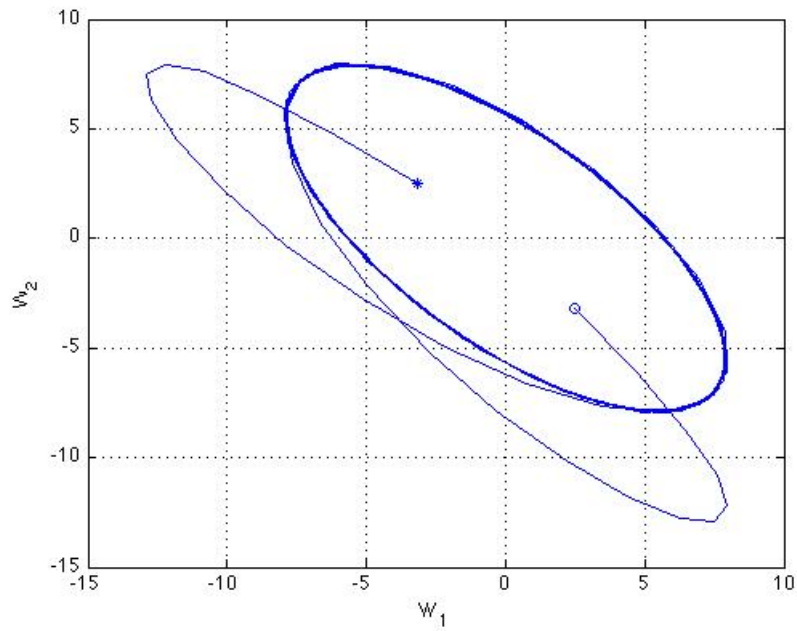


Figure 4.10 – Trajectoire de $\hat{w}(x)$ pour des valeurs quelconques de f et d (o marque le point de départ ($x = 0$) et * le point d'arrivée ($x = L$))

4.2.2 Utilisation de $\hat{w}(x)$ pour caractériser l'onde de flexion

Lorsqu'une onde de flexion est une pure onde progressive qui se propage dans la direction des x positifs, $w(x, t)$ s'écrit :

$$w_-(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (4.20)$$

où k représente le nombre d'onde. On peut dès lors écrire sa dépendance spatiale en utilisant la représentation complexe :

$$\hat{w}_-(x) = A \cos(kx) - jA \sin(kx) \quad (4.21)$$

La trajectoire de $\hat{w}_-(x)$ dans le plan complexe, exprimée par (4.21), forme un cercle sur lequel le point représentant $\hat{w}_-(x)$ se déplace dans le sens horlogique quand x croît (figure 4.11).

De manière similaire, lorsqu'une onde progressive se déplace dans la direction opposée (4.22), la trajectoire de $\hat{w}_+(x)$, donnée par (4.23), forme un cercle sur lequel le point représentant $\hat{w}_+(x)$ se déplace dans le sens anti-horlogique quand x croît (figure 4.11).

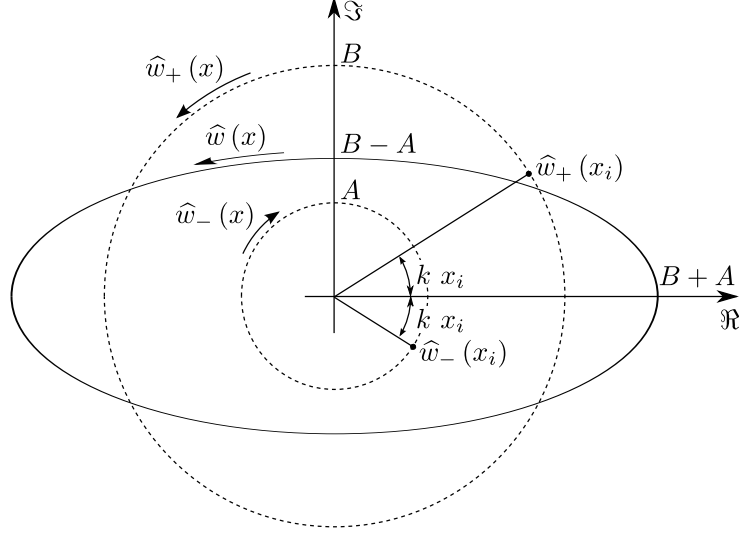
$$w_+(x, t) = B \cos(\omega t + kx) \quad (4.22)$$

$$\hat{w}_+(x) = B \cos(kx) + jB \sin(kx) \quad (4.23)$$

Lorsqu'une onde de flexion $w(x, t)$ est le résultat de la somme de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées, elle forme une onde qui est partiellement progressive et partiellement stationnaire et la trajectoire de sa dépendance spatiale sous sa forme complexe $\hat{w}(x)$ suit la forme d'une ellipse (figure 4.11). Si les deux ondes progressives se compensent l'une l'autre, l'ellipse se transforme en une ligne droite. On obtient alors une onde purement stationnaire.

Donc, quand l'onde de flexion $w(x, t)$ est issue de la somme de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées, l'excentricité de l'ellipse, décrivant la trajectoire de $\hat{w}(x)$ dans le plan complexe, fournit une bonne estimation de l'importance du taux d'onde stationnaire (SWR pour Standing Wave Ratio) contenu dans l'onde de flexion $w(x, t)$. En effet, au plus l'excentricité de l'ellipse est proche de 0, au plus la trajectoire de $\hat{w}(x)$ ressemble à un cercle et au plus l'onde de flexion se rapproche d'une onde purement progressive.

Dans le cas général décrit par (4.19), on peut appliquer ce critère de mesure du SWR pour estimer localement la qualité de l'onde progressive (càd : en chaque point x le long du barreau) à condition d'approximer, en chaque point x du barreau, la trajectoire de $\hat{w}(x)$ par une ellipse qui est tangente et qui a la même concavité que la trajectoire de $\hat{w}(x)$. L'excentricité de l'ellipse qui approxime localement la trajectoire de $\hat{w}(x)$ donne le SWR local de l'onde au point x et, par conséquent, une indication sur la qualité de l'onde progressive en x .

Figure 4.11 – Décomposition de la trajectoire de $\hat{w}(x)$ en ondes progressives

4.2.2.1 Approximation de la trajectoire de $\hat{w}(x)$ par une ellipse

Les équations paramétriques d'une ellipse s'écrivent :

$$X(z) = a \cos z \cos \phi - b \sin z \sin \phi \quad (4.24)$$

$$Y(z) = a \cos z \sin \phi + b \sin z \cos \phi \quad (4.25)$$

Pour approximer, en chaque point x , $\hat{w}(x)$ par une ellipse tangente à $\hat{w}(x)$ et de même concavité, nous devons trouver les valeurs des paramètres a , b , ϕ et z qui satisfont aux équations suivantes :

$$X(z) = w_1(x) \quad (4.26)$$

$$Y(z) = w_2(x) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial X(z)}{\partial z} = \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial Y(z)}{\partial z} = \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 X(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_1(x)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 Y(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_2(x)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (4.31)$$

Après avoir résolu ces équations ((4.26) à (4.31)), nous trouvons les relations suivantes :

$$a^2(x) + b^2(x) = w_1^2 + w_2^2 + \left(\left(\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \right)^2 \right) A(x) \quad (4.32)$$

et

$$(a(x) \cdot b(x))^2 = A(x) \left(w_1 \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} - w_2 \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.33)$$

où

$$A(x) = \frac{\frac{w_2'(x)}{w_1'(x)} w_1(x) - w_2(x)}{w_2''(x) - \frac{w_2'(x)}{w_1'(x)} w_1''(x)} \quad (4.34)$$

Des quelles ((4.32) et (4.33)) nous déduisons les axes principaux de l'ellipse $a(x)$ et $b(x)$. Et connaissant l'expression analytique des axes principaux $a(x)$ et $b(x)$, nous pouvons en déduire facilement l'excentricité $\epsilon(x)$ de l'ellipse :

$$\epsilon(x) = \sqrt{\frac{a^2(x) - b^2(x)}{a^2(x)}} \quad (4.35)$$

et donc, finalement, le taux d'onde stationnaire (SWR) local de l'onde de flexion.

4.2.3 Optimisation de la qualité de l'onde progressive

4.2.3.1 Critère et paramètres de l'optimisation

Si nous voulons optimiser la qualité de l'onde progressive sur l'ensemble du barreau vibrant, nous devons optimiser la valeur moyenne du SWR local (4.35) calculée en chaque point x du barreau.

Comme nous pouvons le constater dans l'expression de $\hat{w}(x)$ (4.19), le SWR (càd : l'excentricité de l'ellipse approchant localement la trajectoire en ce point x) dépend de la fréquence d'excitation f et de la position des actionneurs d via l'équation des fonctions poids a_n (3.20) qui expriment l'importance relative de chaque mode propre du stator.

Nous procédons à l'optimisation en deux étapes :

- La première étape est relativement grossière. Elle part du principe que les fréquences propres f_k qui correspondent aux modes propres k du barreau avec $k = 1, 2, \dots, n$ définissent une série d'intervalles dans lesquels on peut

choisir la fréquence d'excitation f . On peut dès lors choisir un intervalle en particulier, par exemple l'intervalle $[f_k, f_{k+1}]$ qui correspond aux modes k et $k + 1$. Selon [Loh - 2000], on peut choisir pour f la valeur moyenne des fréquences propres f_k et f_{k+1} et pour d la valeur moyenne des demi-longueurs d'ondes λ_k et λ_{k+1} qui correspondent aux modes propres k et $k + 1$ afin de positionner les actionneurs à proximité des positions des ventres de ces modes pour maximiser l'amplitude de l'onde (3.20).

- La seconde étape consiste à faire varier les valeurs de f et de d autour des valeurs choisies lors de la première étape afin de trouver un optimum local pour le SWR global. A cette fin, nous pouvons appliquer différentes méthodes d'optimisation, nous avons choisi d'utiliser l'algorithme de Lagarias [Lag - 1998] qui est basé sur la méthode du simplex de Nelder-Mead [Nel - 1965].

4.2.3.2 Les résultats de l'optimisation du SWR global

La figure 4.12 montre l'évolution du SWR global en fonction de la fréquence d'excitation f . On y donne, pour chaque intervalle dans lequel on peut choisir f , la valeur minimale du SWR global obtenu après optimisation des valeurs de f et de d à l'intérieur de leurs intervalles respectifs.

On remarque qu'il faut choisir une fréquence f située entre les fréquences propres des modes 5 et 6 pour que le SWR global soit inférieur à 50%. A partir d'une fréquence f située entre les fréquences propres des modes 15 et 16, le SWR global devient inférieur à 20% et tend vers une valeur située autour des 15% lorsque la fréquence d'excitation augmente vers des modes plus élevés.

C'est donc le rang des modes propres principaux (ceux qui encadrent la fréquence d'excitation) qui influence, de manière prépondérante, la valeur du taux d'onde stationnaire global.

Les figures 4.13 et 4.14 montrent, à titre d'exemple pour une fréquence f située entre les fréquences propres des modes 20 et 21, l'évolution du SWR global en fonction de f et de d . Comme on peut le constater, le SWR global est très sensible aux variations de fréquence et que la fréquence d'excitation optimale est proche de la valeur moyenne des fréquences propres f_{20} et f_{21} sans être strictement égale à celle-ci.

On peut également remarquer que le SWR global dépend moins fortement de la position d des actionneurs, on constate également que leur position doit être proche de celle d'un ventre mais sans nécessiter une grande précision de positionnement.

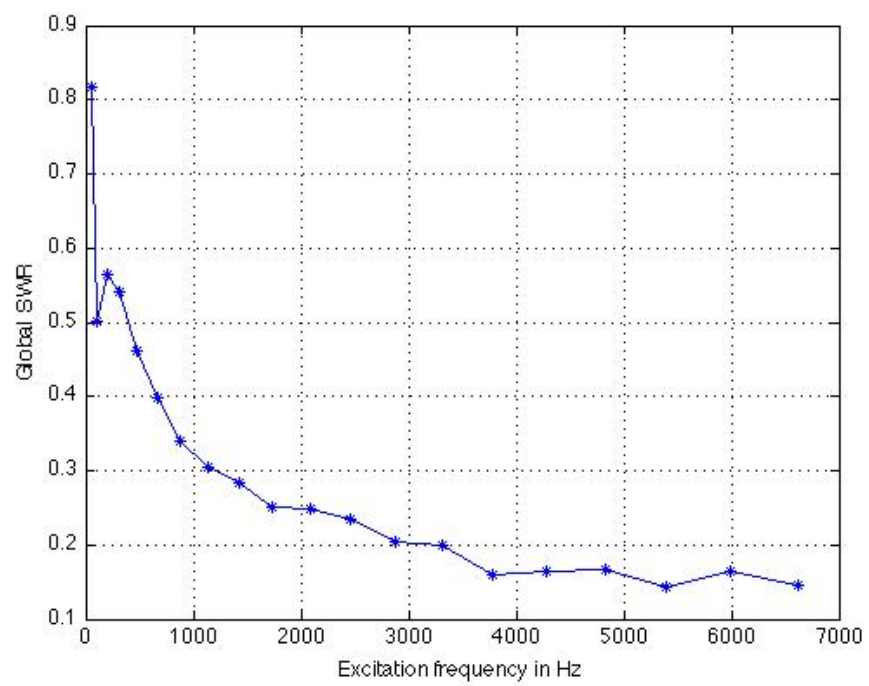


Figure 4.12 – Evolution du SWR global après optimisation en fonction de f et d autour des fréquences propres correspondant aux 20 premiers modes propres

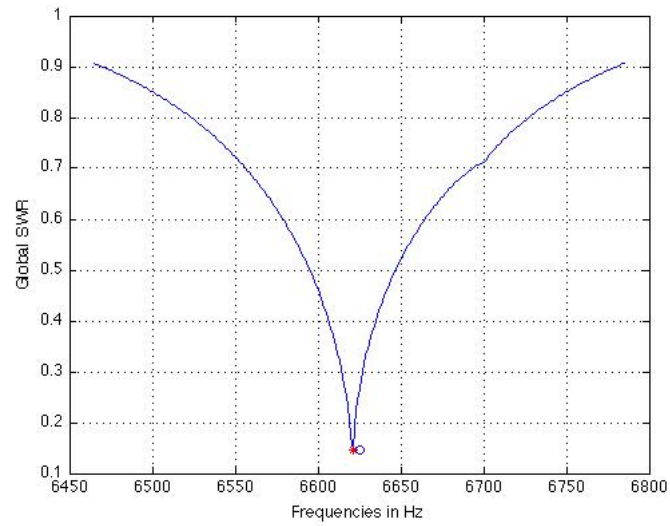


Figure 4.13 – Sensibilité du SWR global en fonction de la fréquence d'excitation (o marque la valeur de la fréquence moyenne * celle de l'optimum)

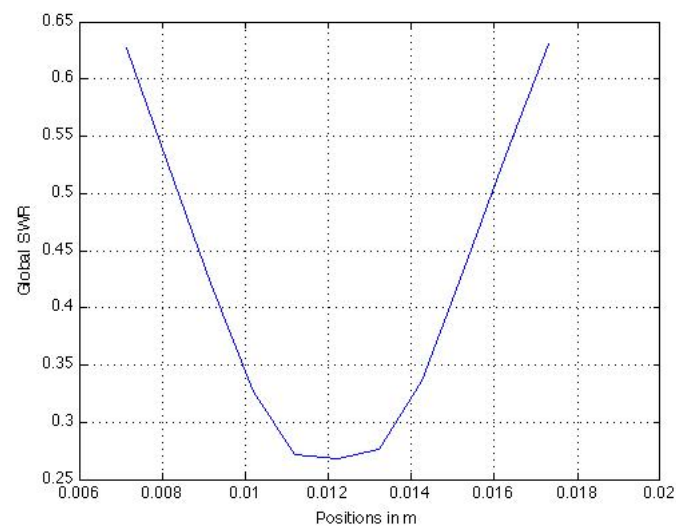


Figure 4.14 – Sensibilité du SWR global en fonction de la position d des actionneurs

4.2.3.3 Evolution du SWR local en fonction de la position x après optimisation du SWR global

Après avoir optimisé les conditions d'excitation de barreau, intéressons-nous à l'évolution du SWR local afin de voir si la qualité de l'onde progressive est constante ou si elle se détériore sur certaines parties du barreau.

La figure 4.15 montre que lorsqu'on choisit une fréquence d'excitation autour des premiers modes propres, nous obtenons un SWR local très important dans la partie centrale du barreau ce qui nous empêche de choisir ces fréquences d'excitation si l'on veut garantir un déplacement du mobile sur une distance raisonnable par rapport à la longueur du barreau.

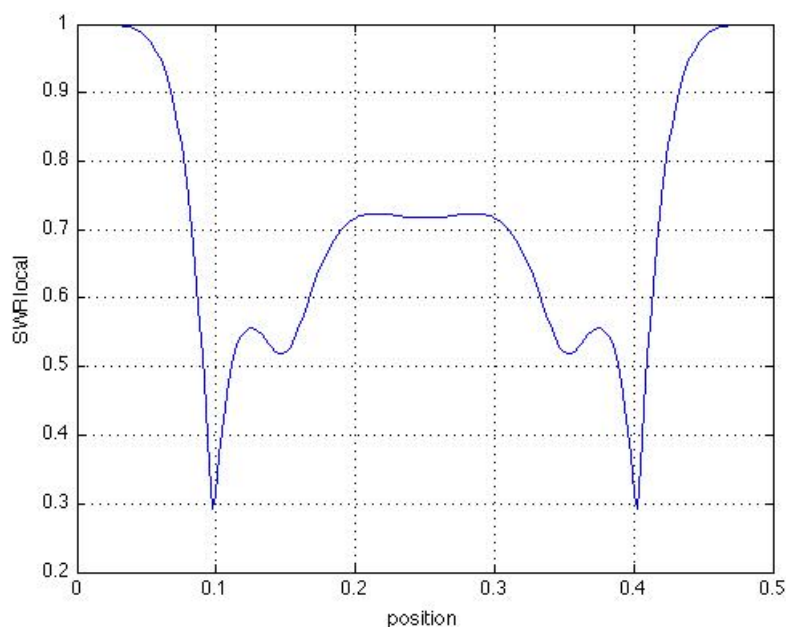


Figure 4.15 – Evolution du SWR local après minimisation du SWR global pour une fréquence d'excitation de 207Hz comprise entre les fréquences propres des modes 3 et 4

Autour des modes plus élevés, les SWR global reste élevé mais la qualité de l'onde progressive est très satisfaisante dans la partie centrale du barreau (figure 4.16) ce qui implique qu'on pourrait utiliser une fréquence d'excitation correspondant à ces modes propres si on accepte d'utiliser un stator beaucoup

plus long que sa partie utile (celle sur laquelle se déplace le rotor).

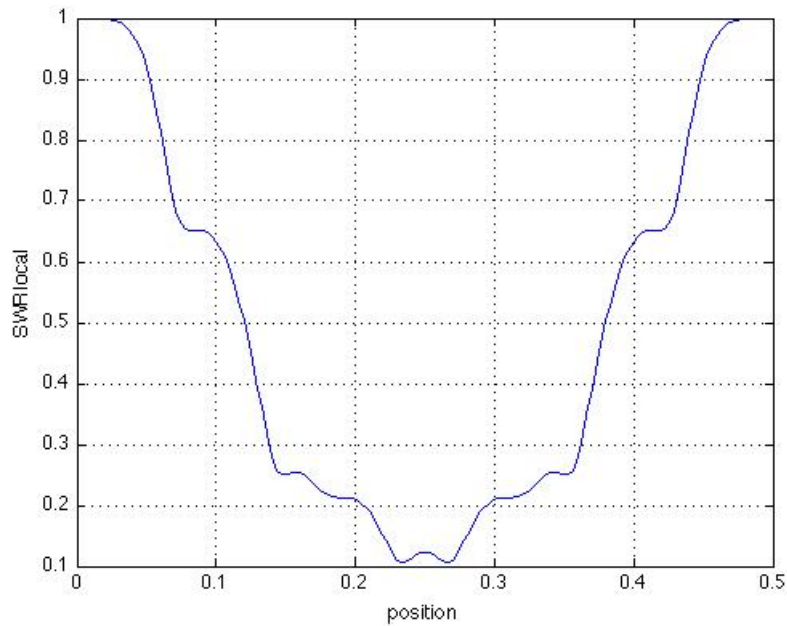


Figure 4.16 – Evolution du SWR local après minimisation du SWR global pour une fréquence d'excitation de 476Hz comprise entre les fréquences propres des modes 5 et 6

Si nous voulons imposer un SWR global faible sur une grande partie du barreau, nous devons choisir une fréquence d'excitation beaucoup plus élevée (située au delà du quinzième mode) (figure 4.17) pour exciter le barreau suivant des modes propres de rang plus élevé mais comme l'amplitude de l'onde décroît lorsque le rang des modes propres principalement excités augmente, il est nécessaire de faire un compromis entre la qualité et l'amplitude de l'onde progressive générée. Ce compromis dépend de paramètres technologiques comme la rugosité des surfaces du barreau et du mobile et nécessite de plus amples investigations sur le contact entre le stator et le rotor.

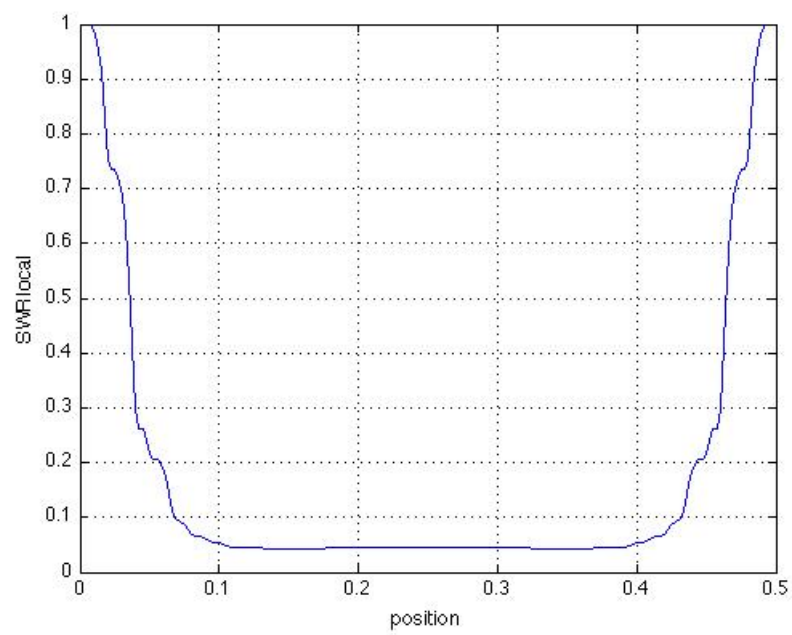


Figure 4.17 – Evolution du SWR local après minimisation du SWR global pour une fréquence d'excitation de 6621Hz comprise entre les fréquences propres des modes 20 et 21

4.2.3.4 Les résultats de l'optimisation du SWR local calculé au centre du barreau

Après avoir observé l'évolution du SWR local le long du barreau lorsque nous avons procédé à l'optimisation du SWR global, nous sommes en droit de nous poser la question suivante :

Est-il nécessaire d'optimiser le SWR global (qui correspond à la valeur moyenne des SWR locaux calculés pour chaque position x du barreau) ou pouvons-nous nous contenter d'optimiser le SWR local calculé au centre du barreau ?

Pour répondre à cette question, nous avons procédé à la minimisation du SWR local calculé au milieu du stator en fonction de la fréquence d'excitation f et de la position des actionneurs d dans tous les intervalles de fréquence $[f_k, f_{k+1}]$ correspondant aux modes k et $k + 1$ calculés précédemment et pour lesquels le SWR global était inférieur à 50% (figure 4.12). Nous avons également adapté la position d en fonction des modes principaux k et $k + 1$.

Nous avons constaté que dans tous les cas, les conditions d'excitation (la fréquence f et la position d) obtenues en minimisant le SWR local au centre du stator sont identiques à celle obtenues en optimisant le SWR global.

On peut donc se contenter de minimiser le SWR au centre du stator afin d'obtenir l'onde progressive de la meilleure qualité sur la totalité du stator ce qui réduit significativement le temps de calcul.

4.2.4 Comparaison des deux méthodes

Si nous appliquons la procédure de minimisation du SWR global suivant les mêmes conditions qu'à la section 4.1 reprises au tableau 4.2 entre les modes propres 21 et 22, nous remarquons que la fréquence d'excitation (7284, 21Hz) obtenue après minimisation du SWR global est très proche de celle obtenue par recombinaison des 6 modes propres principaux (7283, 33Hz). Cette constatation montre bien que, comme nous l'avions supposé à la section 4.1, l'influence des 6 modes propres principaux entourant la fréquence d'excitation est bien prépondérante dans la qualité de l'onde progressive.

4.2.5 Conclusion

Nous avons développé une méthode d'optimisation originale à partir de la solution analytique de l'onde de flexion parcourant un stator vibrant. Cette méthode a permis de déterminer les conditions (la fréquence d'excitation et la

position des actionneurs) assurant une onde progressive de la meilleure qualité possible tout au long du barreau.

Dans un premier temps, nous avons séparé la dépendance temporelle de la dépendance spatiale de la solution analytique en exprimant l'onde de flexion comme une fonction complexe $\hat{w}(x, t) = \hat{w}(x) \exp(j\omega t)$. La dépendance spatiale de cette fonction est alors également une fonction complexe $\hat{w}(x)$ que l'on peut représenter par une trajectoire dans le plan complexe.

Dans le cas très simple où l'onde de flexion est créée par la superposition de deux ondes progressives qui se propagent dans des directions opposées, la fonction complexe $\hat{w}(x)$ suit une trajectoire elliptique. L'excentricité de cette ellipse fournit une bonne mesure du taux d'onde stationnaire (SWR).

Dans le cas général, nous pouvons approximer localement (càd : en chaque position x le long du stator) la trajectoire de la fonction complexe $\hat{w}(x)$, représentant la dépendance spatiale de l'onde, par une ellipse équivalente tangente à la trajectoire de $\hat{w}(x)$ et qui présente localement la même concavité que $\hat{w}(x)$. L'excentricité de cette ellipse fournit une mesure locale du taux d'onde stationnaire (SWR local) de l'onde de flexion.

La valeur moyenne du SWR local calculé en chaque position x le long du stator fournit un critère sur la qualité de l'onde dans tout le barreau statorique : le SWR global. Nous pouvons dès lors utiliser ce critère dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer les conditions d'excitation optimales du stator (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) qui minimisent le SWR global et, par conséquent, les conditions qui maximisent la qualité de l'onde progressive parcourant le stator vibrant et nous avons montré que c'est principalement le choix du rang des modes propres principaux qui détermine la qualité de l'onde progressive. Ceci nous permet d'étendre nos conclusions à des stators dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont différentes de celles de l'exemple du stator étudié (décrit au tableau 4.1).

Nous avons ensuite montré qu'on pouvait se contenter de minimiser le SWR local au centre du stator pour obtenir la meilleure qualité d'onde progressive sur la totalité du stator et qu'il fallait exciter le stator à une fréquence située au delà du 14^{ième} mode pour obtenir un taux d'onde stationnaire global inférieur à 20%.

Finalement, nous avons comparé la fréquence d'excitation obtenue après minimisation du SWR à celle obtenue précédemment en utilisant la superposition de modes propres et en minimisant l'erreur autour des 6 modes principaux. Nous avons constaté que ces fréquences étaient pratiquement les mêmes.

4.3 Minimisation du SWR à partir d'un échantillon de valeurs de $\hat{w}(x)$

Il est également possible de calculer le SWR d'une onde de flexion sinusoïdale se propageant sur le stator vibrant à partir d'un échantillon de points donnant les fonctions $w(x_p, t)$ avec $p = 1, 2, \dots, p_{max}$ (le nombre de points de l'échantillon) sans avoir à calculer l'expression analytique de l'onde de flexion.

Cet échantillon peut être le résultat de simulations numériques ou le résultat de mesures sur la totalité du stator ou seulement sur une partie de celui-ci. On peut en effet diviser le barreau en fonction de la longueur d'ondes des modes principaux et obtenir des segments de longueur identiques qui forment des intervalles d'échantillonnage dans lesquels nous pouvons calculer un SWR local (figure 4.18). Nous déterminons ensuite le SWR global du stator en calculant la valeur moyenne des SWR locaux correspondant à chaque intervalle.

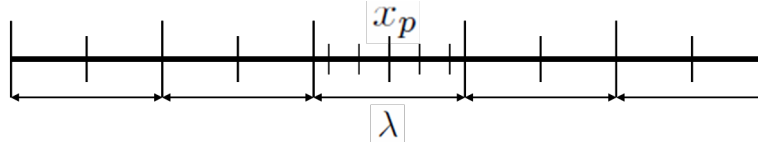


Figure 4.18 – Choix de l'échantillon de points autour de x_p

Nous pouvons également nous contenter de calculer le SWR sur un intervalle situé au centre du stator à partir d'un échantillon de points puisque nous avons montré à la section précédente que la minimisation du SWR au centre du stator était équivalente à la minimisation du SWR global.

4.3.1 Calcul des valeurs de $\hat{w}(x_p)$

A condition que l'excitation du stator soit sinusoïdale, on obtient, en chaque point d'échantillonnage x_p le long du stator, une onde de flexion de la forme :

$$w(x_p, t) = A(x_p) \sin(\omega t + \phi(x_p)) \quad (4.36)$$

dont l'amplitude $A(x_p)$ et le déphasage $\phi(x_p)$ dépendent du point x_p d'échantillonnage.

En appliquant à $w(x_p, t)$ les mêmes transformations qu'à la section 4.2, on obtient $\hat{w}(x_p)$, la dépendance spatiale de $w(x, t)$ au point x_p , sous sa forme complexe :

$$\hat{w}(x_p) = A(x_p) e^{j\phi(x_p)} \quad (4.37)$$

que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\hat{w}(x_p) = w_1(x_p) + jw_2(x_p) \quad (4.38)$$

et que l'on peut représenter dans le plan complexe (figure 4.19).

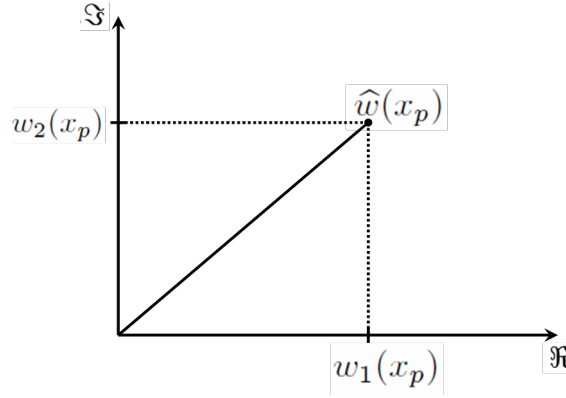


Figure 4.19 – Représentation de $\hat{w}(x_p)$ dans le plan complexe

Pour calculer le SWR au point x_p , il faut trouver l'ellipse qui, dans le plan complexe, approxime la trajectoire de $\hat{w}(x)$ (figure 4.21) autour du point x_p .

4.3.2 Calcul de l'ellipse équivalente

La relation (4.39) qui représente l'équation caractéristique d'une ellipse à condition que (4.40) soit respectée.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 1 \quad (4.39)$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (4.40)$$

fait intervenir 5 paramètres. Nous devons donc disposer d'un échantillon supplémentaire de 4 valeurs de $\hat{w}(x)$ pour des points x situés à proximité du point x_p . Nous choisissons ces points uniformément répartis sur un intervalle dont la longueur est inférieure à λ (figure 4.18), la longueur d'onde de l'onde progressive qui correspond à la moyenne des longueurs d'ondes des deux modes propres principaux (cf. section 4.1).

L'approche directe consiste à obtenir les 5 valeurs $\hat{w}(x_p)$ nécessaires pour déterminer de manière univoque les coefficients a, b, c, d, e de l'équation caractéristique de l'ellipse par ces points. En effet, si on remplace respectivement

les valeurs de x et de y dans l'équation (4.39) par les valeurs de $w_1(x_p)$ et de $w_2(x_p)$ pour $p = 1, 2, \dots, 5$, on peut réécrire l'équation (4.39) de la façon suivante et déterminer les coefficients a, b, c, d, e en inversant la matrice des w .

$$\begin{pmatrix} w_1^2(x_1) & w_1(x_1) \cdot w_2(x_1) & w_2^2(x_1) & w_1(x_1) & w_2(x_1) \\ w_1^2(x_2) & w_1(x_2) \cdot w_2(x_2) & w_2^2(x_2) & w_1(x_2) & w_2(x_2) \\ w_1^2(x_3) & w_1(x_3) \cdot w_2(x_3) & w_2^2(x_3) & w_1(x_3) & w_2(x_3) \\ w_1^2(x_4) & w_1(x_4) \cdot w_2(x_4) & w_2^2(x_4) & w_1(x_4) & w_2(x_4) \\ w_1^2(x_5) & w_1(x_5) \cdot w_2(x_5) & w_2^2(x_5) & w_1(x_5) & w_2(x_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où une approche directe n'est pas possible, parce que les valeurs que nous avons obtenues ne se trouvent pas sur une ellipse ou parce que ces valeurs sont entachées d'une certaine imprécision (ce qui est souvent le cas lorsque ces valeurs sont obtenues expérimentalement), nous pouvons faire une régression via la fonction *fitellipse* de *Matlab* [Bro - 2007] et minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre les points de mesures de $w_1(x_p)$ et de $w_2(x_p)$. Il faut alors disposer d'au moins 6 valeurs pour $w_1(x_p)$ et $w_2(x_p)$ de façon à améliorer la qualité de l'approximation par l'ellipse équivalente.

4.3.3 Calcul du SWR local

Comme à la section 4.2, nous calculons le SWR local à partir de l'excentricité de l'ellipse équivalente. Pour y arriver, nous devons d'abord transformer l'équation caractéristique de l'ellipse (4.39) afin de la ramener à sa forme canonique :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (4.41)$$

Cette opération se déroule en deux étapes :

La première étape consiste à effectuer une translation du repère du plan complexe afin de faire coïncider l'origine du repère avec le centre de l'ellipse.

On calcule donc le centre de l'ellipse (x_0, y_0) en fonction des coefficients a, b, c, d, e , on trouve :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2cd-be}{b^2-4ac} \\ y_0 = \frac{2ae-bd}{b^2-4ac} \end{cases} \quad (4.42)$$

L'équation (4.39) se transforme alors en :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = f \quad (4.43)$$

où $f = 1 - (ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0)$

La seconde étape consiste à effectuer une rotation du repère afin de faire coïncider les axes du repère avec les axes principaux de l'ellipse. Cette opération permet de faire disparaître le terme en xy de l'équation (4.43) et de lui donner la forme suivante :

$$M y^2 + N x^2 = F \quad (4.44)$$

Selon Lupsin et Graas [Lup - 1962], puisqu'on passe d'un système rectangulaire à un autre du même type, les invariants sur les équations des coniques sont conservés.

Le premier invariant fournit directement le résultat du produit entre M et N tandis que le second invariant fournit le résultat de la somme de M et N :

- *Premier invariant* : $M \cdot N = ac - \frac{b^2}{4}$
- *Second invariant* : $M + N = a + c$

Connaissant la somme et le produit de M et N , nous pouvons calculer les valeurs de M et N à partir de l'équation du second degré :

$$z^2 - (a + c)z + ac - \frac{b^2}{4} = 0 \quad (4.45)$$

dont les racines z_1 et z_2 sont les coefficient M et N :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2} = M \\ z_2 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2} = N \end{cases} \quad (4.46)$$

En fait, l'équation (4.45) correspond à l'équation caractéristique du déterminant de la matrice $\mathbf{Q}$ où

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Le calcul des axes principaux de l'ellipse se ramène dès lors à un problème de calcul des valeurs propres du déterminant de la matrice $\mathbf{Q}$. On peut ensuite calculer l'excentricité ε de l'ellipse, on obtient alors la relation suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{N}{M}} \quad (4.47)$$

qui nous donne le SWR local comme à la section 4.2.

4.3.4 Optimisation de la qualité de l'onde progressive

Après avoir déterminé les fréquences propres du stator, nous procédons, comme nous l'avons fait à la section 4.2.3, à l'optimisation de la qualité de l'onde progressive. Celle-ci se déroule en deux étapes :

- La première étape est identique, elle part du principe que les fréquences propres f_k qui correspondent aux modes propres k du barreau avec $k = 1, 2, \dots, n$ définissent une série d'intervalles dans lesquels on peut choisir la fréquence d'excitation f . On peut dès lors choisir un intervalle en particulier, par exemple l'intervalle $[f_k, f_{k+1}]$ qui correspond aux modes k et $k + 1$.
- La seconde étape est différente, elle consiste à faire varier les valeurs de f et de d autour des valeurs choisies lors de la première étape afin de trouver un optimum local pour le SWR local calculé au centre du stator. Ce SWR est calculé à partir de l'excentricité d'une ellipse (4.47) construite à l'aide des 5 points $\hat{w}(x_p)$ ($p = 1, 2, \dots, 5$) d'un échantillon distribué uniformément sur un intervalle d'une longueur égale à $(\lambda_k + \lambda_{k+1})/2$ centré au milieu du stator.

4.3.5 Validation par une approche éléments finis

Si on applique cette procédure au modèle éléments finis correspondant au barreau décrit au tableau 4.2 entre les fréquences propres correspondant aux modes 21 et 22 ($f_{21} = 5965Hz$ et $f_{22} = 6602Hz$), nous obtenons, après optimisation, une fréquence d'excitation de $6283,85Hz$ qui est pratiquement identique à celle obtenue à la section 4.2 après avoir ajusté les conditions d'excitation données par le modèle analytique en fonction des fréquences propres calculées par le modèle éléments finis.

L'onde de flexion ainsi obtenue (figure 4.20) correspond bien à une onde progressive de bonne qualité.

4.3.6 Influence de l'amortissement sur l'optimisation des conditions d'excitation

Si on optimise le SWR au centre du barreau à partir du même modèle éléments finis qu'à la section précédente, en ajoutant cette fois un facteur d'amortissement de 0.3% (facteur de perte de l'aluminium [Top - 1989]), nous trouvons une fréquence d'excitation de $6283,85Hz$. Cette fréquence est la même que celle calculée sur un barreau identique en l'absence d'amortissement.

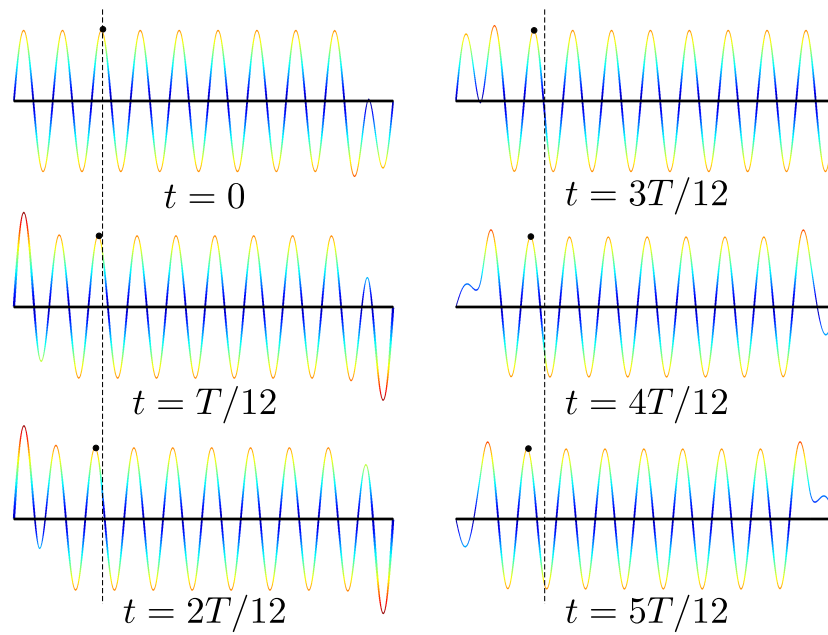
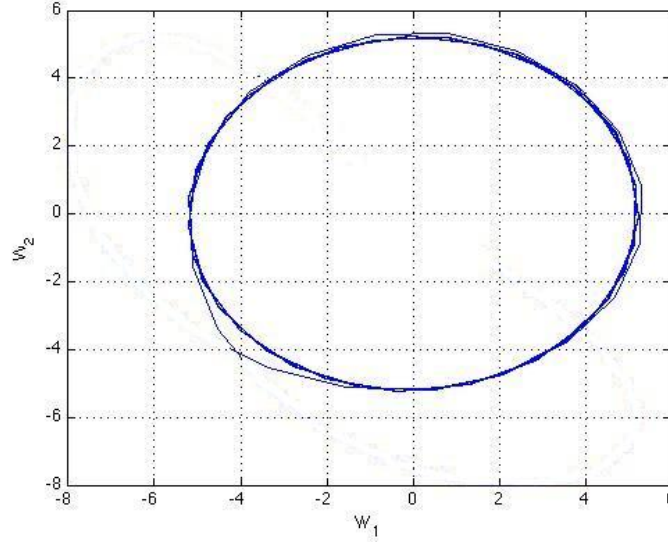


Figure 4.20 – Onde de flexion obtenue dans les mêmes conditions qu’au tableau 4.2 en utilisant un modèle éléments finis du stator et en calculant le SWR sur un échantillonnage de 5 mesures issues de simulations numériques calculées sur un intervalle, centré au milieu du stator, dont la longueur correspond à la moyenne des longueurs d’ondes des modes propres principaux

Figure 4.21 – Trajectoire de $\hat{w}(x)$ reconstituée autour du centre

On constate donc que l'amortissement n'influence pas les conditions d'excitation qui minimisent le taux d'onde stationnaire dans le stator.

4.3.7 Conclusion

Nous avons montré qu'il est possible de maximiser la qualité de l'onde progressive parcourant le stator à partir de la mesure de l'onde de flexion $w(x_p, t)$ en 5 positions uniformément réparties sur un intervalle dont la longueur est égale à la moyenne des longueurs d'ondes des modes propres principalement excités.

En effet, comme l'excitation est sinusoïdale, nous pouvons déterminer, à partir des valeurs de $w(x_p, t)$, la dépendance spatiale sous la forme d'une fonction complexe $\hat{w}(x_p)$ qui, lorsqu'on la représente dans le plan complexe, forme un lieu de points par lesquels on peut faire passer une ellipse. L'excentricité de cette ellipse fournit une mesure du taux d'onde stationnaire (SWR) local.

La minimisation de ce SWR local en fonction de la fréquence d'excitation et de la position des actionneurs permet de déterminer les conditions d'excitation qui conduisent à la maximisation de la qualité de l'onde progressive sur la totalité du stator.

Cette technique permet de s'affranchir des équations analytiques (3.22) qui décrivent les ondes de flexion dans un stator particulier (un barreau de section rectangulaire constante posé sur appuis simples).

On peut dès lors déterminer les conditions d'excitation qui maximisent la qualité de l'onde progressive dans un stator dont la forme, la composition, la section transversale, les conditions aux extrémités peuvent varier..., en tenant compte de l'amortissement structurel, à condition que l'excitation soit sinusoïdale et qu'on puisse le représenter par un modèle éléments finis.

4.4 Minimisation du SWR d'un stator libre à ses extrémités

Afin de vérifier que la procédure de minimisation du SWR, décrite à la section précédente, peut bien s'étendre à d'autres structures de stator, nous avons développé un modèle éléments finis d'un stator libre à ses extrémités, la structure de stator la plus utilisée dans les moteurs linéaires à onde progressive et nous avons vérifié qu'il était possible d'utiliser la méthode d'optimisation présentée à la section 4.3 pour déterminer les conditions d'excitation qui garantissent la génération de la meilleure onde progressive possible.

Pour illustrer notre étude, nous avons choisi de déterminer la fréquence d'excitation qui se situe entre les fréquences propres des modes 14 et 15 ($f_{14} = 3253Hz$ et $f_{15} = 3731Hz$) et qui minimise le SWR au centre du stator.

Après optimisation, nous avons obtenu une fréquence d'excitation de $3491.5Hz$ qui est proche de la valeur moyenne ($3492Hz$) des fréquences propres des modes 14 et 15.

La figure 4.22 illustre la trajectoire de la fonction $\hat{w}(x)$ pour une fréquence d'excitation de $3491.5Hz$. On remarque qu'elle forme bien une ellipse dont la forme tend vers un cercle autour du centre du stator.

Nous avons ensuite tracé à la figure 4.23, l'évolution du SWR autour de la fréquence d'excitation optimale pour une fréquence d'excitation comprise entre $3350Hz$ et $3650Hz$.

L'évolution du SWR en fonction de la fréquence d'excitation suit une courbe comparable à celle que nous avons obtenue dans le cas du stator posé sur appuis simples étudié à la section 4.2.

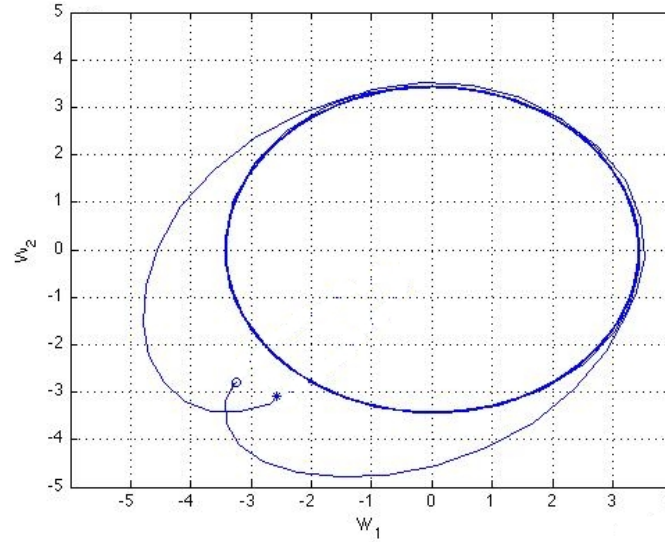


Figure 4.22 – Trajectoire de $\hat{w}(x)$ après optimisation entre les deux actionneurs (o représente l'actionneur de gauche, $*$ celui de droite)

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment on peut générer une onde progressive en superposant des ondes stationnaires décalées spatialement et temporellement de 90° .

La méthode de superposition de modes nous a permis d'établir, à partir du modèle analytique, le principe de production d'une onde progressive en fonction des conditions d'excitation (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) et de mettre en évidence l'importance de la contribution de chaque mode propre à la maximisation de la qualité de l'onde progressive en fonction de leur poids respectif.

Ces observations nous ont permis de développer un critère d'optimisation qui caractérise localement la qualité de l'onde progressive obtenue en décomposant localement l'onde de flexion en deux ondes progressives qui se déplacent dans des directions opposées.

Repasant de la solution du modèle analytique, nous avons séparé sa dépendance temporelle de sa dépendance spatiale en exprimant l'onde de flexion comme une fonction complexe dont la dépendance spatiale est également une

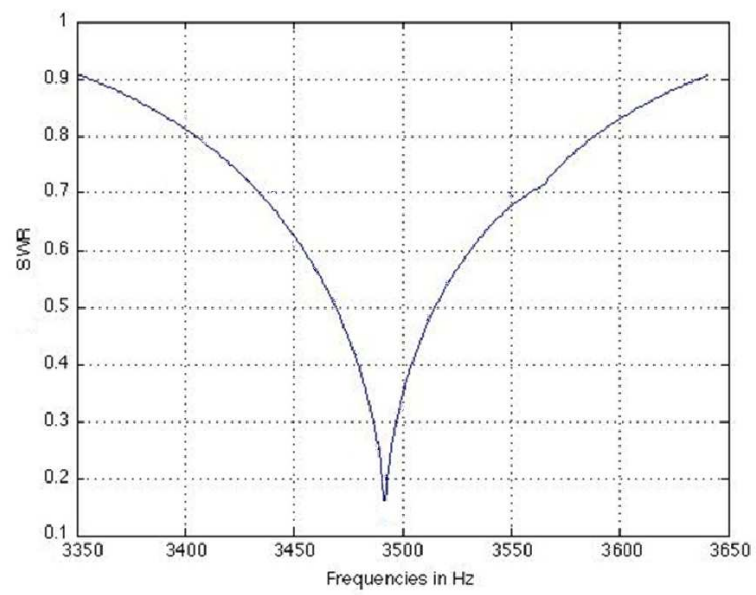


Figure 4.23 – Influence de la fréquence d'excitation sur le SWR au centre du barreau

fonction complexe que l'on peut représenter par une trajectoire dans le plan complexe que nous pouvons approximer localement par une ellipse. L'excentricité de cette ellipse fournit une mesure locale du taux d'onde stationnaire (SWR local) de l'onde de flexion.

La valeur moyenne du SWR local calculé en chaque position x le long du stator fournit un critère sur la qualité de l'onde dans tout le barreau statorique : le SWR global. Nous pouvons dès lors utiliser ce critère dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer les conditions d'excitation optimales du stator (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) qui minimisent le SWR global et, par conséquent, les conditions qui maximisent la qualité de l'onde progressive parcourant le stator vibrant.

Nous avons ensuite montré qu'on pouvait se contenter de minimiser le SWR local au centre du stator pour obtenir la meilleure qualité d'onde progressive sur la totalité du stator et qu'il était possible d'appliquer cette méthode d'optimisation à partir d'un échantillon de valeurs de l'onde de flexion en au moins 5 positions uniformément réparties sur un intervalle dont la longueur est égale à la moyenne des longueurs d'ondes des modes propres principalement excités. Cet échantillon peut être issu d'une simulation numérique, à partir d'un modèle éléments finis, ou de mesures expérimentales.

Pour autant que l'excitation soit sinusoïdale, cette technique permet d'étendre la détermination des conditions d'excitation qui maximisent la qualité de l'onde progressive à des stators dont la forme, la composition, la section transversale, les conditions aux extrémités sont différentes de celles modélisées analytiquement, tout en tenant compte d'effets tels que l'amortissement structural, les efforts de cisaillement et le moment d'inertie en rotation sur la qualité de l'onde.

Chapitre 5

Validation expérimentale

Les objectifs principaux de ce chapitre sont de construire un prototype de stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive (décrit au chapitre 2) qui permette de vérifier la validité des modèles numériques et de valider la procédure d'optimisation de la qualité de l'onde progressive (décrite à la section 4.3) à partir d'un échantillon de mesures de l'onde de flexion.

Nous commencerons par donner une description du prototype de stator vibrant ainsi que des instruments de mesures. Nous présenterons, ensuite, comment nous avons déterminé l'amortissement dans le stator et finalement, nous comparerons le résultats de mesure du SWR sur le prototype avec ceux donnés par son modèle éléments finis.

5.1 Description du banc d'essai

Nous avons construit un prototype (figure 5.1) du stator vibrant posé sur appuis simples et actionné par deux stacks piézoélectriques dont les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques sont reprises au tableau 5.1.

Les plans de fabrication de notre prototype se trouvent en annexe B. Des cols de cygnes assurent le rôle des appuis simples en empêchant le barreau de se

Longueur L	$0.5m$
Section transversale $b \times h$	$0.015m \times 0.002m$
Masse volumique ρ	$2700kg/m^3$
Module d'élasticité E	$50.925GPa$

Tableau 5.1 – Dimensions et propriétés mécaniques du prototype

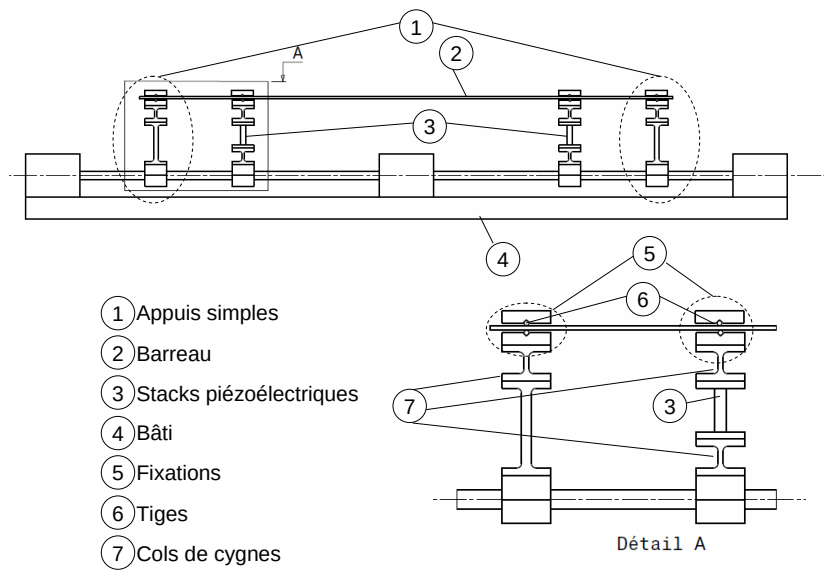


Figure 5.1 – Prototype du moteur linéaire à onde progressive

déplacer verticalement et horizontalement tout en lui permettant une rotation dans le plan vertical. Les stacks piézoélectriques sont entourés de cols de cygnes qui reprennent les efforts de flexion du barreau afin de protéger les stacks. Les actionneurs et les appuis sont fixés au barreau par un dispositif constitué de deux clames qui enserrant deux tiges métalliques afin d'assurer un contact avec le barreau qui soit le plus ponctuel possible comme dans les modèles développés.

Malheureusement, lors des premiers essais expérimentaux, nous avons constaté que les résultats de mesure sur le prototype divergeaient de manière significative par rapport aux résultats prédits par le modèle éléments finis du prototype, notamment sur les formes d'ondes et les fréquences propres. Ces divergences sont dues à la difficulté de construire un dispositif mécanique dont le comportement est conforme à celui modélisé par des appuis simples. En effet, le dispositif expérimental produisait des contraintes mécaniques non prévues par le modèle qui créent des déformations mécaniques supplémentaires dont les amplitudes sont plus de 10 fois supérieures à celles produites par les actionneurs piézoélectriques rendant toute validation des modèles et de la procédure de minimisation du SWR impossibles.

Dans la mesure où le passage à un stator libre à ses extrémités ne modifie pas la procédure d'optimisation de l'onde progressive comme on l'a montré à la section 4.4, nous avons décidé de supprimer ces appuis du prototype. Nous allons donc mesurer les vibrations dans le stator libre-libre (figure 5.2) dont le modèle élément-finis est présenté à la section 4.4. Ainsi, nous pourrions comparer les mesures effectuées sur le prototype avec les prédictions du modèle numérique.

La figure 5.2 illustre le banc de mesure du prototype, le tableau 5.2 décrit les éléments de cette figure. Nous fixons le prototype à un positionneur plan afin de pouvoir positionner avec précision le stator du moteur par rapport au laser du vibromètre dans le plan horizontal. Un pied assure le positionnement du laser dans la direction verticale.

La figure 5.3, décrite au tableau 5.3, donne une vue d'ensemble du dis-

N°	Description
1	pied qui permet le réglage de la hauteur du laser du vibromètre
2	émetteur et récepteur laser du vibromètre
3	stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive
4	actionneur piézoélectrique de type "stack"
5	positionneur plan qui permet le positionnement du stator dans le plan x-y

Tableau 5.2 – Description du prototype et du dispositif de mesure illustré à la figure 5.2

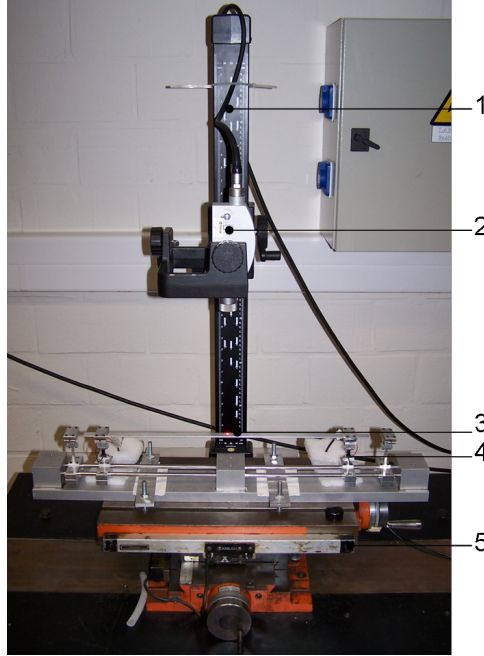


Figure 5.2 – Prototype

positif expérimental. On y retrouve le banc de mesure, décrit à la figure 5.2 et au tableau 5.2, ainsi que les alimentations des actionneurs piézoélectriques, le contrôleur du vibromètre laser (figure 5.4), le générateur de signal (figure 5.5(1)) qui fournit les consignes de tension en quadrature aux alimentations et l'oscilloscope (figure 5.5(2)) qui récupère les tensions d'alimentations des actionneurs et l'amplitude et la phase de l'onde de flexion mesurée à une position x du stator par le vibromètre laser.

5.2 Mesure de l'amortissement dans le stator

Même si nous avons montré que l'amortissement dans le stator n'influait pas les conditions d'excitations optimales pour des valeurs de facteurs de pertes de l'aluminium que l'on retrouve en général dans la littérature (section 4.3), nous avons tenu à déterminer expérimentalement le facteur de perte du prototype afin de vérifier que sa valeur était proche de celle que l'on retrouve dans la littérature et afin de pouvoir l'intégrer au modèle numérique utilisé pour comparer ses résultats avec ceux issus d'une mesure expérimentale.

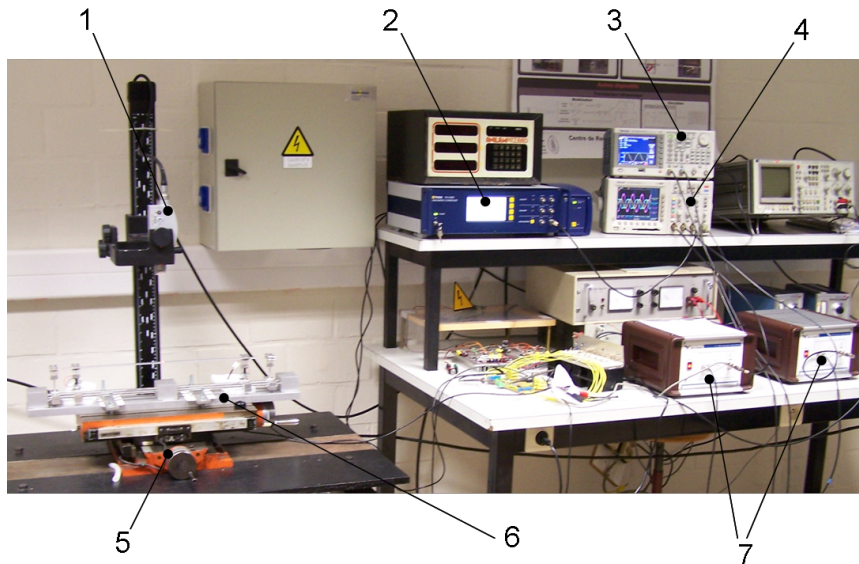


Figure 5.3 – Banc d'essai

Nous avons excité le barreau à l'aide d'un seul actionneur à la fréquence moyenne des modes 14 et 15 et nous avons mesuré l'amplitude de crête de la vibration sinusoïdale pour plusieurs valeurs de x le long du barreau (une mesure tous les centimètres) à l'aide du vibromètre laser. Nous avons pu ainsi déterminer la diminution de l'amplitude de crête et en déduire le facteur de perte.

Nous avons obtenu un facteur de perte de 0.4%, ce qui est proche de la valeur de 0.3% que l'on a trouvé dans la littérature pour l'aluminium [Top - 1989].

N°	Description
1	émetteur et récepteur laser du vibromètre
2	décodeur du signal de mesure du vibromètre
3	générateur des signaux de commande
4	oscilloscope pour la mesure des vibrations
5	positionneur plan qui permet le positionnement du moteur dans le plan x-y
6	moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive
7	alimentations des actionneurs piézoélectriques

Tableau 5.3 – Description du banc d'essai illustré à la figure 5.3

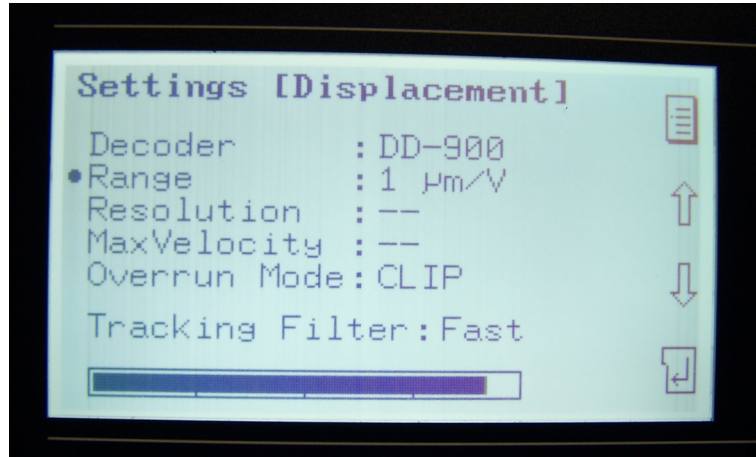


Figure 5.4 – Calibrage du vibromètre laser

5.3 Recherche des conditions d'excitation optimales

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode d'optimisation présentée à la section 4.3 afin de déterminer les conditions d'excitation (la fréquence d'excitation) qui permettent de générer dans le stator une onde progressive de la meilleure qualité.

Nous allons mesurer, en six points répartis uniformément dans un intervalle situé autour du centre du stator et dont la longueur est inférieure à la longueur d'onde de l'onde progressive, l'onde de flexion $w(x_p, t) = A(x_p) \sin(\omega t + \phi(x_p))$ avec $p = 1, 2, \dots, 6$, en déduire le SWR pour plusieurs fréquences d'excitations et comparer les SWR obtenus à partir des mesures sur le prototype à ceux obtenus à partir de son modèle éléments finis présenté à la section 4.4. Nous pourrions ainsi vérifier si les conditions d'excitation expérimentales qui minimisent le SWR sont bien les mêmes que celles prédites par le modèle numérique.

La première étape consiste donc à définir un intervalle de fréquences délimité par les fréquences propres de deux modes propres consécutifs (cf. section 4.3) dans lequel on choisira la fréquence d'excitation. Compte tenu de la limitation en courant des alimentations (300mA), de l'étude sur l'évolution du SWR global en fonction du choix des modes propres principaux, nous avons choisi de rechercher la fréquence d'excitation optimale qui se situe entre les modes 14 et

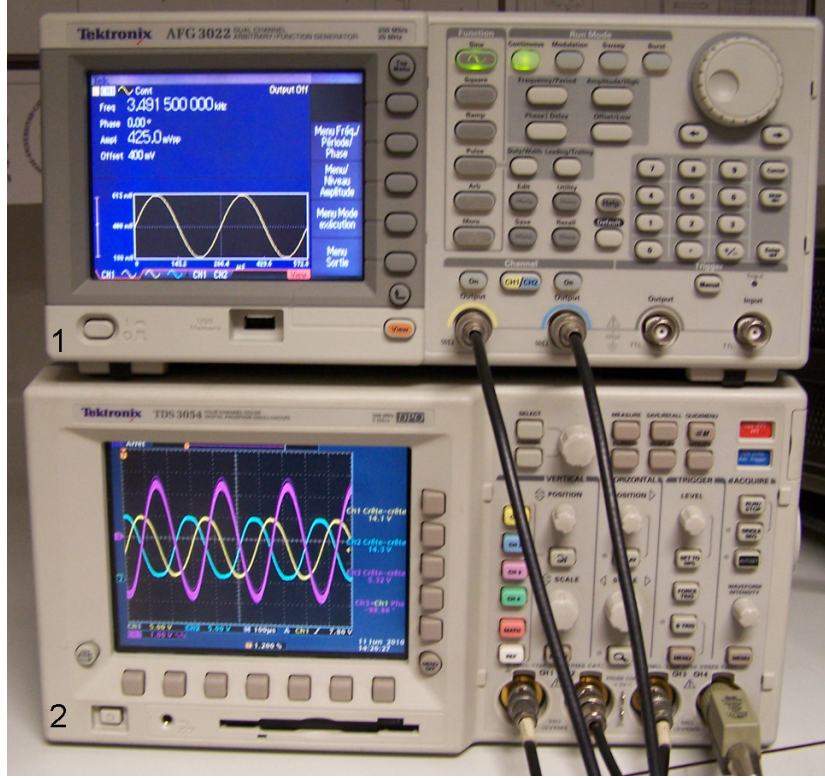


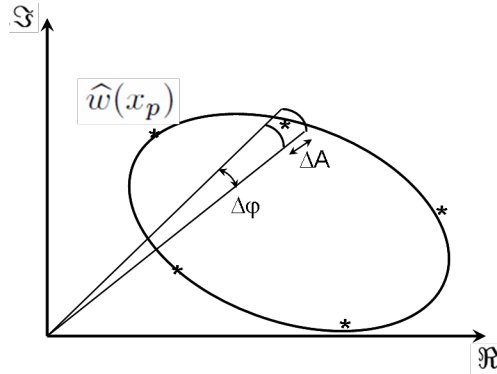
Figure 5.5 – Générateur de signal (1) et oscilloscope (2)

15 du prototype, soit entre les fréquences $f_{14} = 3253Hz$ et $f_{15} = 3731Hz$.

Nous avons excité le stator à l'aide des deux actionneurs piézoélectriques déphasés de 90° pour des fréquences allant de $3400Hz$ à $3550Hz$ par pas de $10Hz$ autour de la fréquence d'excitation optimale trouvée à partir du modèle numérique et nous avons mesuré l'amplitude et la phase des ondes flexion pour exprimer $\hat{w}(x)$ en 6 points distants l'un de l'autre de $0.3cm$ autour du centre du stator afin de pouvoir reconstituer l'ellipse équivalente à la trajectoire de $\hat{w}(x)$ qui permettra de calculer le SWR au centre du barreau.

Nous avons obtenu des mesures sur la phase et l'amplitude de l'onde $w(x, t)$ qui oscillaient entre deux valeurs extrêmes et qui ne permettaient pas de déterminer de manière univoque l'ellipse équivalente à la trajectoire de $\hat{w}(x)$ (figure 5.6).

Par exemple, on mesure une amplitude comprise entre $1,09$ et $1,17\mu m$ au

Figure 5.6 – Problèmes liés à la détermination expérimentale de la trajectoire de $\hat{w}(x)$

Moyenne des amplitudes mesurées (μm)	Moyenne des angles mesurés (deg)
1,30	-116,4
1,20	-57
1,13	0
1,12	60,6
1,23	116,4
1,28	185,4

Tableau 5.4 – Moyenne des mesures de $\hat{w}(x)$ en 6 positions

centre du barreau avec un déphasage par rapport à la tension d'alimentation de l'actionneur de gauche compris entre $44,2$ et $47,2^\circ$, ce qui donne une amplitude moyenne de $1,13\mu m$ et un déphasage moyen de $45,7^\circ$. On procède de même pour 5 autres mesures situées de par et d'autre du centre du barreau. Pour faciliter le calcul de l'ellipse équivalente, on retranche le déphasage moyen du centre du barreau aux moyennes des déphasages mesurés pour les 5 autres points x . On obtient alors les résultats présentés au tableau 5.4.

Après avoir calculé, pour chaque échantillon de mesure de $\hat{w}(x)$, la valeur moyenne des amplitudes et phases mesurées, nous avons recherché l'ellipse qui s'approchait au mieux au sens des moindres carrés du lieu des points correspondant aux 6 valeurs moyennes de $\hat{w}(x)$ (reprises au tableau 5.4) en utilisant la fonction Matlab *fitellipse*. Nous avons obtenu l'ellipse équivalente illustrée à la figure 5.7.

Nous avons alors pu déduire de l'ellipse équivalente, conformément à la méthode présentée à la section 4.3, le SWR au centre du barreau (qui vaut 0,2076

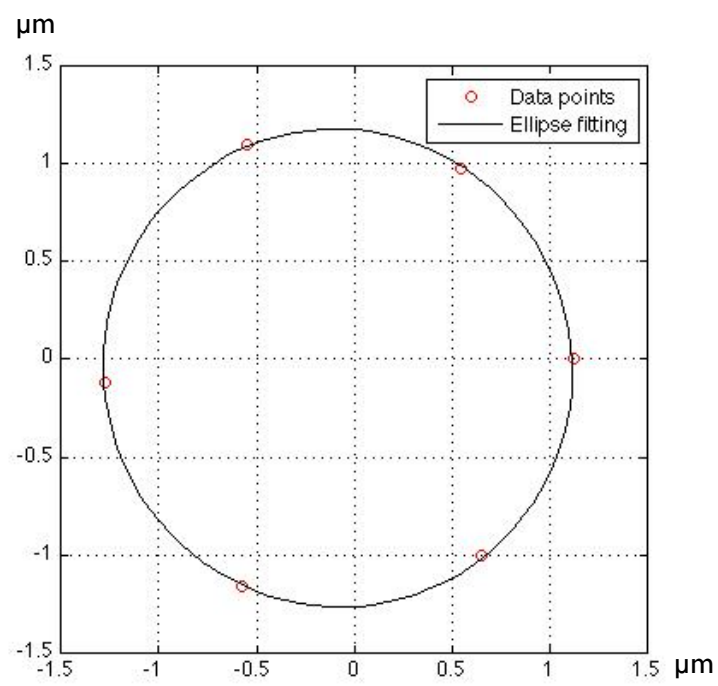


Figure 5.7 – Approximation des moyennes mesurées par une ellipse équivalente

dans l'exemple illustré à la figure 5.7 à la fréquence optimale de $3490Hz$).

En reproduisant ces mesures pour plusieurs fréquences d'excitations, nous avons tracé les valeurs expérimentales du SWR au centre du barreau sur la figure 5.8 qui reprend, en continu, l'évolution du SWR calculé à partir du modèle éléments finis du prototype présenté à la section 4.4 en fonction d'une fréquence d'excitation comprise entre 3350 et $3650Hz$. Chaque o correspond à une valeur de SWR déterminée à partir des mesures de phase et d'amplitude de l'onde de flexion en 6 points autour du centre du stator.

L'optimum expérimental est obtenu à la fréquence de $3490Hz$. Il est très proche de l'optimum numérique ($3491.5Hz$). La précision sur les mesures ne permettant pas d'affiner davantage la valeur de la fréquence d'excitation optimale.

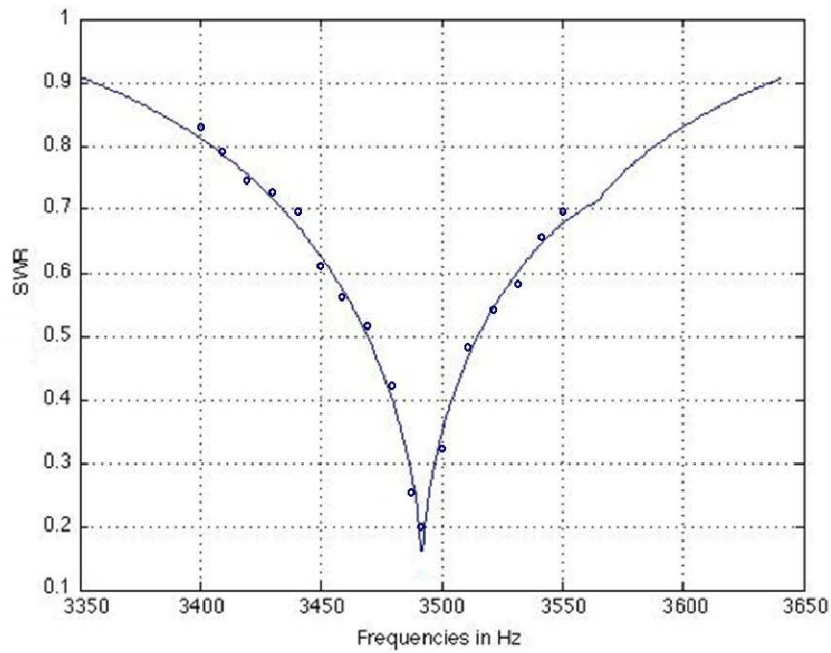


Figure 5.8 – Influence de la fréquence d'excitation sur le SWR au centre du barreau (la courbe continue représente les valeurs issues du modèle numérique, o représente les valeurs obtenues expérimentalement)

5.4 Conclusion

Si on compare les résultats expérimentaux de l'évolution du SWR en fonction de la fréquence d'excitation à ceux obtenus à partir du modèle éléments finis (section 4.4), tous repris à figure 5.8, on constate que les valeurs expérimentales du SWR suivent bien celles du modèle numérique. Même si l'imprécision sur les mesures ne permet pas d'affiner la valeur de la fréquence d'excitation autant que le modèle numérique, nous avons obtenu expérimentalement des résultats probants qui permettent de valider la procédure de minimisation du taux d'onde stationnaire (SWR) à partir d'un modèle numérique du stator (cf. chapitre 4) comme une méthode qui garantit la meilleure qualité d'onde progressive dans un stator de longueur finie.

Chapitre 6

Modélisation multicorps du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive

Nous avons jusqu'ici concentré notre travail sur la modélisation du stator du moteur piézoélectrique linéaire et sur la façon de déterminer les conditions d'excitation qui maximisent la qualité de l'onde progressive qui le parcourt. Dans l'optique de développer un modèle complet du moteur, il faut également modéliser le rotor (la partie mobile) et la façon dont la vibration dans le stator transmet un mouvement au rotor. Nous devons donc développer un modèle de la transmission du mouvement entre le stator et le rotor.

Si on peut modéliser facilement le comportement vibratoire du stator du moteur par un modèle analytique (cf. section 3.2.1) ou un modèle éléments finis (cf. section 3.2.3), ces approches ne permettent pas de traiter facilement l'entraînement du rotor par friction. C'est pourquoi, nous avons également développé un modèle multicorps du stator (cf. section 3.2.2), où on décompose le barreau flexible en un nombre fini de segments rigides articulés entre-eux au travers de ressorts équivalents dont la raideur est connue (cf. le modèle de HUSTON présenté à la section 3.2.2.1), mis en oeuvre via le logiciel Robo-tran dont les avantages ont été présentés au chapitre 3. On récupère ensuite les positions, vitesses et accélérations de chaque segment rigide pour décrire le comportement dynamique du barreau flexible.

Comme la décomposition du stator en segments rigides introduit une discrétisation du barreau flexible, il est nécessaire d'appliquer une méthode d'inter-

polaion par spline cubique aux variables de position, vitesse et accélération des segments obtenues après intégration des équations dynamiques du stator afin de garantir la continuité du contact entre le stator et le rotor, en particulier, lorsque le contact passe d'un segment rigide à un autre.

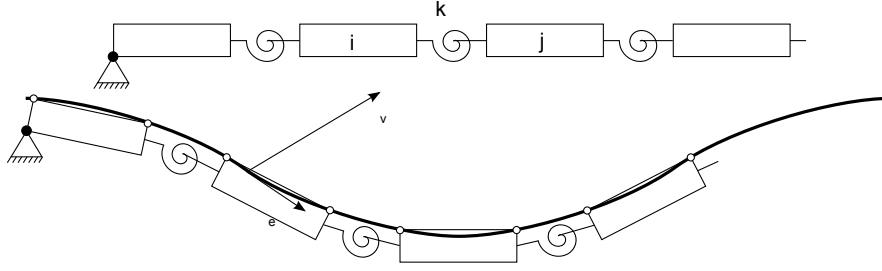


Figure 6.1 – Interpolation par spline cubique de la surface de contact du stator pour garantir la continuité du contact avec le rotor (e et v représentent respectivement les vecteur tangent et le vecteur vitesse au contact)

A ce modèle, nous pouvons aussi ajouter un modèle électromécanique des stacks piézoélectriques basé sur le modèle de MASON (cf section 1.2.5.2) afin d'obtenir un modèle multi-physique intégré du moteur liant directement les tensions appliquées par les alimentations aux éléments piézoélectriques et au déplacement du rotor et permettant in fine le développement d'un contrôleur pour le moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.

6.1 Le contact et l'entraînement par friction

Le calcul de la force d'entraînement, à un instant donné, nécessite de :

- trouver le point de contact ou la surface de contact ;
- déterminer les forces de contact à appliquer sur chaque corps à partir de la loi constitutive choisie.

6.1.1 Le modèle de friction de Coulomb

Dans le modèle originel, on considère que la norme (F_T) de la force tangentielle est proportionnelle à la norme de force normale (F_N) :

$$F_T = \mu F_N \quad (6.1)$$

où μ est le coefficient de frottement sec de Coulomb. Pour éviter la discontinuité du modèle autour de la vitesse nulle (figure 6.2), nous avons transformé

l'équation constitutive du frottement en l'équation suivante :

$$F_T = -\mu \tanh (K (\dot{q}_t^{rotor} - \dot{q}_t^{stator})) F_N \quad (6.2)$$

La raideur K est calculée en fonction de la proportion de force normale souhaitée lorsque le rotor atteint sa vitesse de régime. La valeur recommandée par [Jon - 1987] est de 96% de la vitesse de régime.

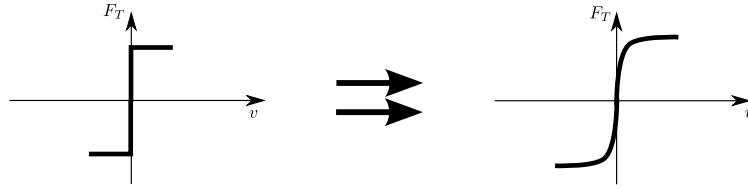


Figure 6.2 – Adaptation de la loi de Coulomb

6.1.2 Implémentation d'un modèle de contact et d'entraînement simplifié

Dans un premier modèle, on peut supposer que le rotor surfe sur les ondes de flexion du stator sans les perturber et on le ramène à un point matériel de masse m , avant de choisir, comme loi constitutive, la force d'entraînement par friction de Coulomb. On obtient alors la relation suivante, où la discontinuité à l'origine a été lissée :

$$F = -\mu m g \tanh (K (\dot{q}_t^{rotor} - \dot{q}_t^{stator})) \quad (6.3)$$

où μ est le coefficient de frottement sec, g la constante de gravité, $\dot{q}_t^{rotor}$ et $\dot{q}_t^{stator}$ sont respectivement les vitesses tangentielles du rotor et du point de contact à la surface du stator et K est le coefficient de la pente de la tangente hyperbolique à l'origine. Les coefficients μ et K doivent être estimés expérimentalement.

Comme le stator est modélisé par une succession de segments rigides, la surface de contact peut présenter des discontinuités au niveau de la vitesse tangentielle $\dot{q}_t^{stator}$ qui peut varier d'un segment à l'autre ce qui peut causer des variations brutales de la force d'entraînement et conduire à des difficultés numériques lors de la simulation du système. C'est la raison pour laquelle nous avons lissé la forme et la pente en interpolant à l'aide d'une spline cubique les déplacements et les vitesses des segments rigides pour obtenir une déformation et une variation de la vitesse des points matériels à la surface du stator continues

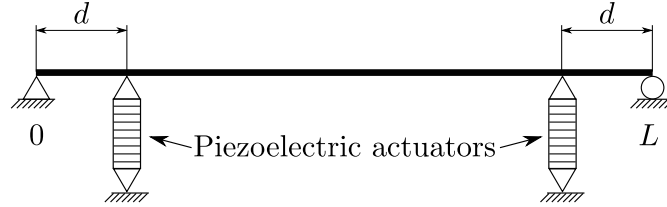


Figure 6.3 – Stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive étudié

(figure 6.1). Il est alors toujours possible de trouver un point de contact puisque cette technique permet de traiter facilement les cas où le point de contact est entre deux segments rigides et d'en déduire sa vitesse tangentielle $\dot{q}_t^{stator}$. Celle-ci est calculée après avoir interpolé par une spline les vitesses aux articulations et projeté la vitesse au point de contact dans la direction tangentielle $\dot{q}_t^{stator} = \vec{v} \cdot \hat{e}$ (figure 6.1).

Pour simuler le comportement du moteur, nous avons repris le stator décrit au chapitre 2 (figure 6.3) et nous l'avons excité à la fréquence de 4276Hz (fréquence optimale entre les modes 16 et 17 du barreau). A cette fréquence, on peut se contenter de décomposer le barreau en 49 segments (cf. section 3.3) pour obtenir une précision acceptable sur les formes d'ondes générées.

Nous présentons, à la figure 6.4, les résultats de simulation du déplacement du mobile pendant 1ms , en considérant uniquement la force de contact tangentielle (6.3) appliquée au mobile ponctuel en un point de contact sur la surface du stator à chaque instant. On suppose que le mobile colle à la spline d'interpolation du barreau et on néglige l'influence du mobile sur les ondes parcourant le barreau. On observe que le mobile se déplace vers la gauche (dans la direction des x négatifs) en partant du centre du barreau (en $x = 0$) à la vitesse de $1,5\text{cm/s}$ (vitesse comparable à celle d'autres moteurs piézoélectriques linéaires à onde progressive [Loh - 2000]) vu que l'onde progressive parcourant le stator se déplace vers la droite (dans la direction des x positifs).

On remarque, à la figure 6.5, que la force d'entraînement (6.3) bascule quasi instantanément entre ses valeurs de saturation $\pm 2 \cdot 10^{-3}\text{N}$. Sa valeur moyenne est néanmoins négative tout comme la vitesse tangentielle moyenne à la surface du barreau.

Ce modèle d'entraînement donne déjà une bonne estimation du comportement d'un mobile posé sur un stator vibrant tout en garantissant un temps de simulation raisonnable par rapport à une approche éléments finis. Il pourrait permettre de développer un modèle suffisamment simple et performant pour

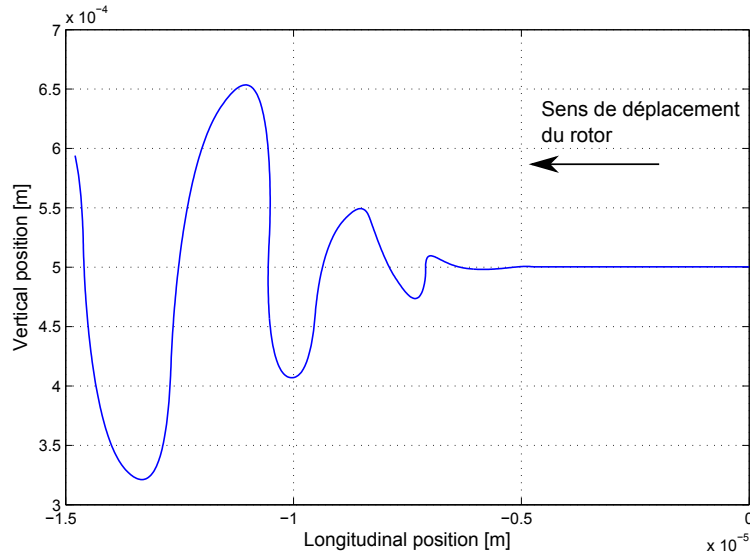


Figure 6.4 – Simulation de la trajectoire du rotor pendant $1ms$ quand le stator est excité à la fréquence de $4276Hz$

permettre de développer une stratégie de commande du moteur linéaire à onde progressive.

Il peut cependant être intéressant de raffiner le modèle afin de pouvoir traiter les cas de plusieurs points de contact entre le mobile et le barreau et in fine de pouvoir optimiser la structure du mobile et du contact. C'est pourquoi, nous présentons un autre modèle de contact plus complexe.

6.1.3 Implémentation d'un modèle de contact et d'entraînement plus complexe

Nous pouvons développer et implémenter des modèles plus complexes qui tiennent compte de l'évolution de la surface de contact entre le rotor et le stator et qui permettent d'optimiser le rotor afin d'améliorer la transmission en modifiant par exemple ses dimensions, sa forme, les matériaux au niveau du contact... [Jon - 1987]

Le contact entre le rotor et le stator est un contact purement glissant. Parmi les modèles de contact que nous pouvons utiliser pour modéliser la transmission du mouvement du stator au rotor [Jon - 1987], nous avons choisi un modèle qui

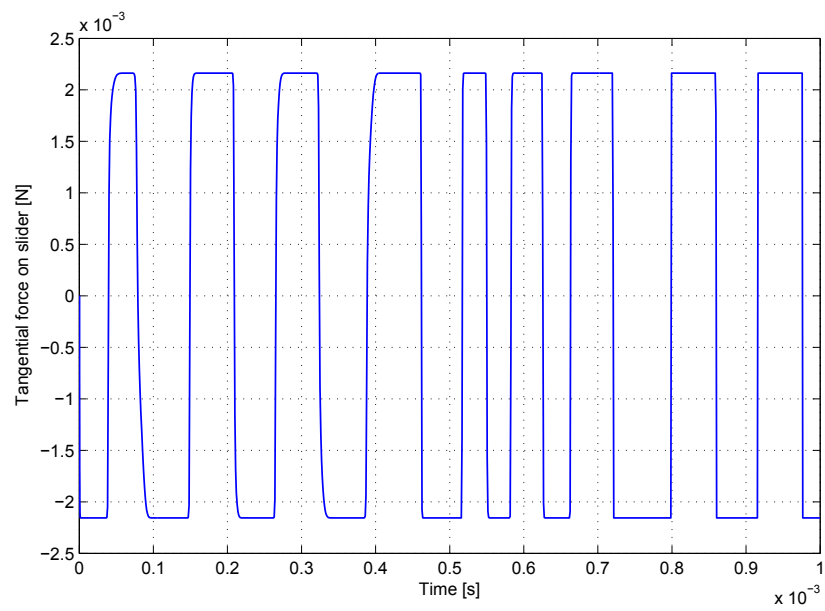


Figure 6.5 – Résultats de simulation de la force tangentielle (6.3) appliquée au rotor

découple les distributions de force tangentielle et normale.

Ce modèle suppose que la force normale n'est pas influencée par la force tangentielle et il a moins de coefficients à déterminer. On détermine tout d'abord la distribution de force normale selon un modèle de contact choisi, pour ensuite déterminer la force tangentielle grâce à un modèle de frottement.

Nous avons choisi comme modèle de contact : le *foundation contact model* car ce modèle permet de tenir compte de l'interpénétration entre le rotor et le stator [Jon - 1987].

6.1.3.1 Le modèle de contact : *Foundation contact model*

Ce modèle se base sur l'interpénétration des deux corps mis en contact, il établit que les pressions de surface qui entraînent ces déformations sont celles que l'on aurait obtenues si on avait glissé entre les deux corps un réseau de ressorts de raideur k_{sp} et de longueur h (valeurs à déterminer expérimentalement) (figure 6.6).

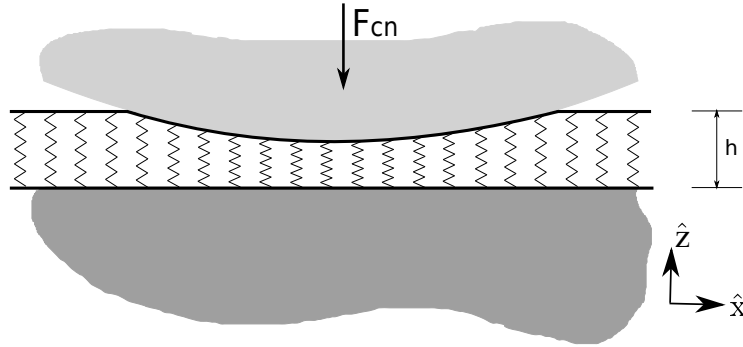


Figure 6.6 – Schéma de principe du *foundation contact model*

On obtient ainsi la force normale de contact qui vaut :

$$F_N(x) = k_{sp}u_z(x) \quad (6.4)$$

avec $F_N(x)$ la distribution de pression recherchée, $u_z(x)$ la variation de longueur du ressort situé au point x dans la direction $\hat{z}$ et k_{sp} la raideur des ressorts du modèle.

Pour déterminer la raideur k_{sp} , nous pouvons soit le mesurer expérimentalement soit le choisir à partir d'un modèle de contact plus simple comme le modèle de Hertz [Jon - 1987]. On peut montrer que dans le cas d'un contact

cylindre/cylindre la raideur des ressorts équivalents au modèle de Hertz vaut [Jon - 1987] :

$$k_{sp} = 1.18 \frac{E^*}{a}; \quad (6.5)$$

où a représente la demi-largeur de la zone de contact et E^* le module de Young normalisé fonction des coefficient de Poisson des deux corps ν_1 et ν_2 :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (6.6)$$

Ce modèle permet de calculer une force normale F_N de manière plus raffinée que dans le cas du contact ponctuel.

Comme précédemment, on utilise la force normale calculée à partir du modèle de contact pour obtenir la force d'entraînement à partir du modèle de friction de Coulomb modifié, présenté à la section 6.1.1.

6.1.3.2 Implémentation de la transmission dans le modèle multicorps

Pour déterminer la déformation du barreau, on récupère les coordonnées des centres de masse de chacun des segments. Ces données ne sont pas suffisantes pour développer le modèle de contact choisi dans la mesure où la déformation du barreau est discrétisée trop grossièrement : nous utilisons 63 segments articulés pour modéliser un barreau de $0.5m$ de long, nous obtenons donc 63 mesures de déplacement, vitesse et accélération pour modéliser le barreau.

Nous avons résolu cette difficulté en interpolant ces mesures à l'aide d'une spline cubique pour obtenir une déformation et une variation de la vitesse à la fibre neutre du stator (figure 6.7) qui soient continues. Nous pouvons ensuite calculer le déplacement des points matériels à la surface du barreau en effectuant une translation de $h/2$ (la demi-épaisseur du barreau) sur la déformée de la fibre neutre et en déduire la vitesse des points matériels à la surface du barreau. Il est alors toujours possible de trouver une zone de contact puisque cette technique permet de traiter facilement les cas où le contact est entre deux segments rigides. Nous calculons ensuite la vitesse tangentielle à la surface de contact $\dot{q}_t^{stator}$ en projetant la vitesse dans la direction tangentielle au rotor.

Le rotor, n'est pas modélisé comme un corps rigide dans le même système dynamique que le stator, sa dynamique est entièrement calculée en dehors du modèle du stator, il est modélisé dans le modèle multicorps du stator par des forces extérieures. Ainsi, nous calculons à chaque pas de temps les forces de

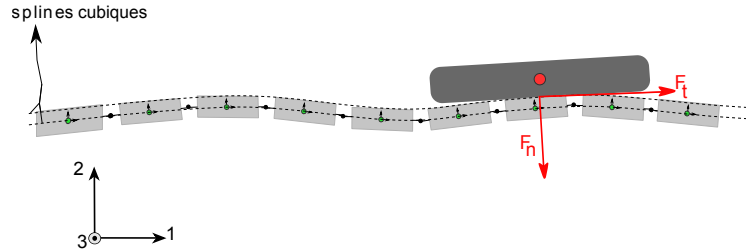


Figure 6.7 – Modélisation multicorps du stator et du rotor

contact entre le rotor et le stator et nous les utilisons pour déterminer la dynamique du rotor au pas de temps suivant. Nous adaptons ensuite la valeur des forces extérieures sur chaque segment rigide du stator en fonction de la nouvelle position du rotor. Cette modélisation du rotor présente les avantages suivants :

- On simplifie le modèle du moteur en simplifiant celui du rotor, surtout si ce dernier ne se comporte pas comme un corps rigide mais comme un corps élastique. Il faudrait alors le décomposer en segments rigides articulés comme pour le stator,
- On évite tous les problèmes de boucles cinématiques liées à une géométrie de rotor compliquée,
- Le nombre de degrés de liberté du système ne varie pas en fonction du nombre de contacts entre le stator et le rotor.

La figure 6.8 montre comment nous avons ajouté un modèle du contact et de l'entraînement du rotor dans le modèle multicorps du stator (cf. section 3.2.2 où nous utilisons le logiciel Robotran pour conditionner les équations dynamiques (3.23) du modèle multicorps du stator)

Dans le modèle de contact et de la force d'entraînement (figure 6.8), à chaque instant t , nous récupérons les données du rotor (sa vitesse, sa position et son orientation) pour déterminer la zone du barreau qui se trouve en dessous du rotor et identifier la partie de la spline cubique de la surface du barreau qui est potentiellement en contact avec le rotor. Nous discrétisons ensuite cette zone potentielle de contact en un nombre donné de points. Au plus la découpe est fine, au plus la prise en compte des déformations du barreau est précise mais il ne faut pas l'exagérer car une discrétisation trop fine conduit à des temps de calculs très longs et consomme beaucoup de ressources informatiques, ce que nous cherchons à éviter.

Nous calculons ensuite les interpénétrations entre stator et rotor aux points discrétisés de la zone de contact. Cette opération se déroule en deux étapes :

- dans la première, on utilise les valeurs issues de l'interpolation par spline de la surface de contact du stator aux points de l'échantillon
- dans la seconde, on calcule, pour tous les points de l'échantillon, la différence entre la position verticale du slider et celle de la frontière à la surface du barreau

Après avoir déterminé les zones d'interpénétrations, nous calculons les forces normales locales de contact en appliquant l'équation (6.4).

Ensuite, nous déterminons les forces tangentielles à l'aide du modèle de frottement de Coulomb (6.2). Pour cela, nous utilisons la vitesse du centre de masse du slider $\dot{q}_t^{rotor}$ ainsi que les vitesses tangentielles à la surface du stator aux points de l'échantillon $\dot{q}_t^{stator}(x_i)$.

Pour terminer, nous calculons la force d'entraînement F_T résultante en intégrant les distributions $F_T(x_i)$ obtenues.

La force d'entraînement est ensuite appliquée au rotor et au modèle multicorps du stator. On utilise alors le logiciel Robotran pour conditionner les équations dynamiques du modèle multicorps (équations (3.23) de la section 3.2.2) et en déduire les accélérations $\ddot{q}$ que nous intégrons numériquement dans Simulink afin de trouver les vitesse, position et orientation du rotor à l'instant t (figure 6.8).

Finalement, nous utilisons ces données pour calculer la dynamique du moteur à l'instant $(t + 1)$ et ainsi de suite aux instants suivants (figure 6.8).

6.1.3.3 Les problèmes de l'implémentation de la transmission dans le modèle multicorps

Cette solution dépend fortement de la qualité de l'échantillonnage sur la zone de contact. Si l'échantillonnage est trop fin, on se retrouve avec une précision inutilement élevée qui conduit à une consommation inutile de ressources informatiques et un accroissement du temps de calcul. Dans le cas contraire, un échantillonnage trop grossier ne permet pas de prendre en compte les différentes zones de contact entre le barreau et le slider.

Lorsque le nombre de segments qui décomposent le barreau augmente, le système devient sensible aux perturbations qui peuvent le rendre instable avec le temps et un important battement se superpose à l'onde progressive.

Des transitions trop brusques sur les consignes d'excitation du stator peuvent avoir le même effet, ce qui peut allonger le temps nécessaire à la création de l'onde progressive dans le stator et entraîner une augmentation du temps nécessaire avant de pouvoir simuler le déplacement du rotor. Vu la

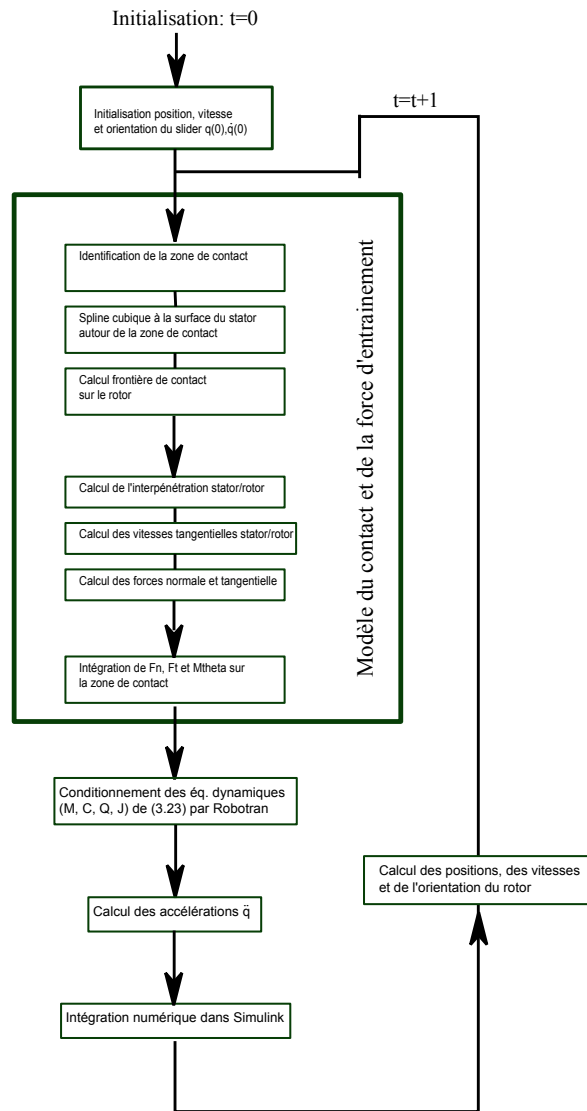


Figure 6.8 – Algorithme de calcul du modèle multicorps avec le modèle de contact et la transmission du mouvement du stator au rotor

faible taille des pas de temps qui est due à la fréquence d'excitation du barreau, cette durée de mise en régime peut occuper un certain temps de la simulation et réduire le temps de simulation utile pour exploiter le modèle de contact et d'entraînement à cause de problèmes de taille de la mémoire allouée par Simulink pour stocker les résultats.

Plusieurs solutions ont été envisagées pour résoudre ce problème :

- l'initialisation du moteur dans une configuration de régime : une fois le régime atteint, on enregistre le temps de simulation ainsi que les coordonnées articulaires de position, vitesse et accélération de tous les segments du barreau. Il suffit alors de démarrer les autres simulations avec ces données. Ceci nous permettrait d'économiser de la mémoire et nous éviterait de devoir simuler le transitoire à l'avenir. Malheureusement, cette solution n'a pas permis de garantir la stabilité des vibrations dans le stator.
- l'utilisation d'une rampe sur l'amplitude des conditions initiales des excitateurs pour réduire les perturbations qui déstabilisent les vibrations dans le barreau mais cette technique augmente le transitoire et l'amplitude de l'excitation, sa fréquence et le temps de montée de la rampe sont trois paramètres très dépendants les uns des autres et s'ils sont mal choisis l'onde dans le barreau deviendra instable ou présentera un battement.

6.1.3.4 Les résultats de simulation du modèle multicorps

Malgré ces difficultés, nous avons effectué quelques simulations du comportement du moteur et nous avons obtenu quelques résultats encourageants. Pour nos simulations, nous avons choisi d'imposer comme amplitude de vibration des actionneurs $10\mu m$ (cette valeur correspond, d'après des essais préliminaires, à l'amplitude nécessaire à l'entraînement d'un rotor) et comme fréquence d'excitation $4273Hz$ (fréquence optimale pour le moteur entre les modes 16 et 17).

Pour ces paramètres, le temps de montée le plus petit de la rampe sur l'amplitude des conditions initiales est de $0.005s$. On mesure un battement sur l'amplitude de l'onde progressive d'environ 15% comme on l'observe à la figure 6.9 ce qui est conforme à la valeur du SWR global prédit à la section 4.2 pour cette fréquence d'excitation. On constate aussi, en suivant la trajectoire d'un point à la surface du barreau, qu'elle est bien elliptique (figure 6.10).

La présence du slider ne semble donc pas trop perturber le comportement des ondes dans le barreau.

Nous n'avons pas obtenu de résultats pour une simulation de plus longue durée à cause du problème de dépassement de la capacité de la mémoire à laquelle nous n'avons pas trouvé de solution. Nous avons malgré tout obtenu des résultats cohérents et conformes à nos attentes. Le temps de calcul nécessaire

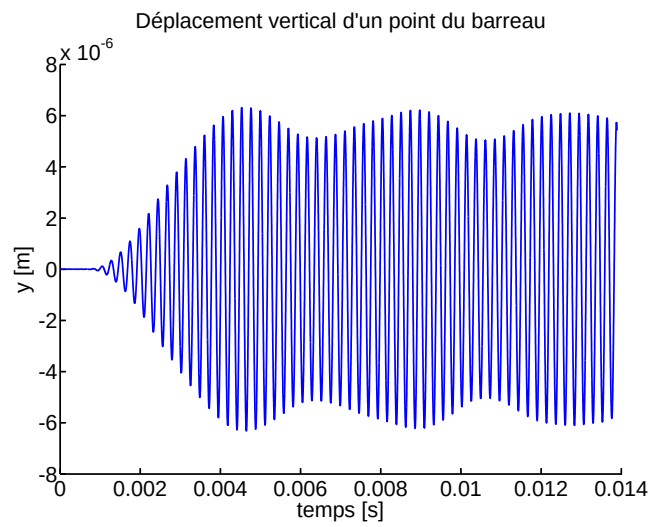


Figure 6.9 – Evolution de la position verticale d'un point matériel à la surface du barreau (visualisation de la mise en régime)

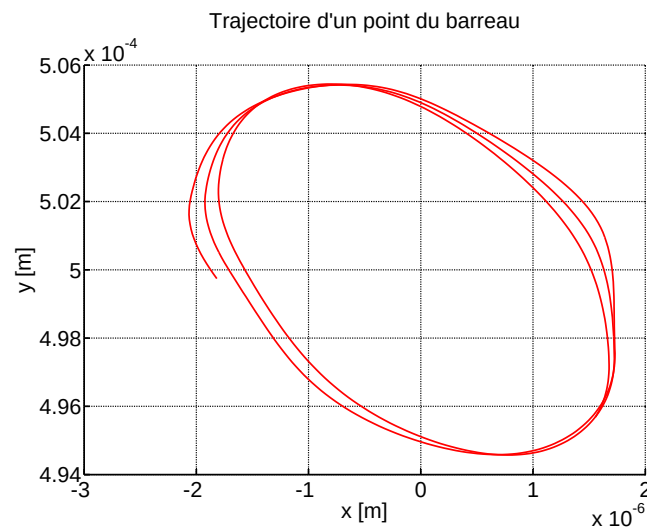


Figure 6.10 – Evolution de la trajectoire d'un point matériel à la surface du barreau

pour obtenir ces résultats est encourageant. En effet, il faut environ 90 minutes pour simuler 6ms alors qu'avec un modèle éléments finis, il faut plus de 24 heures.

6.2 Le modèle électromécanique des stacks piézoélectriques

Dans le but de développer un contrôleur pour notre moteur linéaire, il est intéressant de pouvoir disposer d'un modèle multi-physique du moteur qui fournit la dynamique du rotor en fonction des tensions appliquées aux éléments piézoélectriques. Pour y parvenir, il nous reste à proposer un modèle électromécanique des stacks piézoélectriques qui complètera le modèle multicorps du stator vibrant, du rotor et de la transmission du mouvement. Une façon simple de construire un modèle électromécanique pour les stacks piézoélectriques est d'utiliser le modèle de MASON simplifié présenté à la section 1.2.5.2 et repris à la figure 6.11.

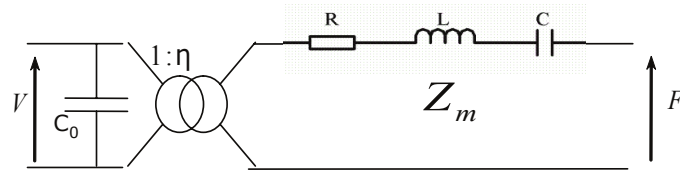


Figure 6.11 – Schéma équivalent du modèle de MASON du stack piézoélectrique

On construit le modèle de MASON directement à partir des données du fabricant de stacks piézoélectriques (reprises à la figure 6.12) ou en effectuant des mesures sur le stack.

Dans le modèle multicorps du stator, l'action des stacks piézoélectriques peut être modélisée par une force extérieure s'appliquant sur le segment correspondant à la position sur le barreau de la fixation du stack. Il suffit alors d'ajouter dans Simulink la fonction de transfert du modèle de Mason pour calculer la force F appliquée au stator dans le modèle Robotran en fonction de la tension d'alimentation V et de calculer la dynamique du stator en fonction de la force F appliquée par le stack. De cette dynamique, on pourra alors déduire la vitesse et la position des stacks.

Cette problématique de couplage électromécanique dans le contexte multicorps a été traitée avec succès dans la thèse de Laurent Sass [Sas - 2004]. L'utilisation de la méthode qu'il propose et qui consiste à produire un modèle multi-physique unifié sans avoir recours à des techniques de cosimulation est bien adaptée à la modélisation de notre moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.

Les autres paramètres du modèle de Mason (figure 6.11) sont calculées à partir des données techniques fournies par le fabricant (figure 6.12) :

- la capacité électrique C_0 vaut $1,6\mu F$,
- le rapport de transformation η est donné par le rapport entre la force de blocage $840N$ et la tension maximale applicable $100V$, il vaut $8,4N/V$,
- l'impédance mécanique Z_m peut être décomposée en 3 éléments $R-L-C$ série,
- l'inductance L correspond à la masse en mouvement, elle vaut la moitié de la masse du stack ($4,5g$),
- la capacité C est égale à l'inverse de la raideur du stack $5,8 \cdot 10^7 N/m$,
- la résistance R représente l'amortissement du stack, sa valeur est généralement très petite, on a pour habitude de ne pas en tenir compte sauf si on excite le stack à une fréquence proche de sa fréquence de résonance.

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment compléter le modèle multicorps du stator présenté au chapitre 3 en y ajoutant un modèle du rotor, du contact entre le rotor et le stator et de l'entraînement par friction et comment ajouter, à ce modèle, un modèle électromécanique des stacks piézoélectriques basé sur le modèle de Mason afin de construire un modèle multi-physique intégré du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.

Ce modèle intégré fournira alors directement la dynamique du rotor en fonction des tensions d'alimentations fournies aux éléments piézoélectriques.

Il permettra, une fois que les problèmes relatifs au temps de calcul seront résolus, d'optimiser la structure complète du moteur. Un travail particulier reste à faire au niveau de l'optimisation de la structure du rotor et de la transmission du mouvement. On pourra alors développer un contrôleur performant pour le moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive.

PIEZO
STACKS

SPECIFICATIONS				
PIEZOELECTRIC STACKS				
		TS18-H5-104	TS18-H5-202	
MECHANICAL				
Dimensions (L x W x H)	Inches	0.2 x 0.2 x 0.72	0.4 x 0.4 x 0.72	
	mm	5 x 5 x 18	10 x 10 x 18	
Compressive Strength	N/m ²	8.8 x 10 ⁸	8.8 x 10 ⁸	
Tensile Strength	N/m ²	4.9 x 10 ⁶	4.9 x 10 ⁶	
Young's Modulus	N/m ²	4.4 x 10 ¹⁰	4.4 x 10 ¹⁰	
Poisson Ratio		0.34	0.34	
Density	Kg/m ³	7,900	7,900	
Weight	grams	4.5	16.	
Wires		.002 x 50 Stranded, Red wire positive		
ELECTRICAL				
Rated Voltage (Positive Only)		+100VDC	+100VDC	
Capacitance	nF	1600	6,500	
PERFORMANCE (@ =100 VDC)				
Free Deflection	µm	+14.5	+14.5	
Blocked Force	N	840	3,388	
Resonant Frequency	Hz	74,000	69,000	
Stiffness	N/m	5.8 x 10 ⁷	2.3 x 10 ⁸	
Response Time	µs	50	50	
ENVIRONMENTAL				
Thermal Operating Range	° C	-20° to +80°		
Thermal Storage Range	° C	-30° to +85°		
Humidity	%	< 50%		
ROHS:		Compliant.		

Figure 6.12 – Fiche technique du stack piézoélectrique TS18-H5-104

Conclusions et perspectives

Dans les moteurs piézoélectriques rotatifs, l'entraînement du rotor est réalisé par une onde progressive créée à partir de deux ondes stationnaires sinusoïdales de même fréquence et de même amplitude décalées spatialement d'un quart de longueur d'onde et temporellement d'un quart de période. En effet, dans un stator circulaire, ces deux ondes se combinent entre elles pour former une onde purement progressive qui transfère par friction un mouvement de rotation au rotor dans la direction opposée à celle de l'onde progressive.

Dans les moteurs piézoélectriques linéaires, l'onde progressive peut être créée en utilisant deux techniques :

- La première technique, la plus connue, consiste à disposer deux actionneurs piézoélectriques aux extrémités d'un stator linéaire. Le premier actionneur est utilisé pour générer une onde progressive, le second absorbe l'onde générée par le premier afin d'empêcher toute réflexion de l'onde incidente à l'extrémité du stator sinon l'onde réfléchie se superposerait à l'onde incidente pour créer une onde stationnaire dépourvue de propriété d'entraînement.
- La seconde technique est proche de celle que l'on utilise pour générer une onde progressive dans les moteurs rotatifs mais dans le cas des moteurs linéaires, la génération de l'onde progressive est plus complexe. En effet, comme le stator est de longueur finie, il est impossible de générer deux ondes stationnaires identiques décalées spatialement et temporellement de $\pi/2$.

C'est la deuxième technique que nous avons choisi d'étudier plus en détails. Nous avons, en particulier, montré comment générer une onde progressive dans un stator linéaire de longueur finie en l'excitant à une fréquence proche de la fréquence moyenne des fréquences propres de deux modes propres successifs et en positionnant les deux actionneurs piézoélectriques à une distance bien choisie des extrémités du stator. Dans ces conditions, on excite préférentiellement deux modes propres successifs qui créent, par superposition, une onde progressive.

Cette technique présente l'inconvénient qu'il est difficile de supprimer complètement les ondes stationnaires produites. C'est pourquoi nous avons développé des modèles du stator qui ont permis de définir un critère (le SWR global) qui quantifie le taux d'onde stationnaire présent dans le stator et nous avons utilisé ce critère dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer les conditions d'excitation (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) qui minimisent le taux d'onde stationnaire (SWR) et qui permettront in fine de concevoir un moteur linéaire dont l'onde progressive est optimisée.

Résultats

Nous avons tout d'abord développé un modèle analytique du stator, décrit à la figure 2, qui est composé d'un barreau métallique posé sur appuis simples et qui est mis en vibration à l'aide de deux actionneurs piézoélectriques situés à une distance donnée de ses extrémités. Ce modèle qui exprime l'onde de flexion produite en fonction des modes propres du stator, nous a permis d'établir le principe de production d'une onde progressive à partir de la superposition de modes propres en fonction des conditions d'excitation (la fréquence d'excitation et la position des actionneurs) et de mettre en évidence l'importance de la contribution de chaque mode propre à la maximisation de la qualité de l'onde progressive en fonction de leur poids respectif.

Ces observations nous ont permis de développer un critère d'optimisation, basé sur une approche totalement différente, qui caractérise localement la qualité de l'onde progressive obtenue en décomposant, en chaque point du stator, l'onde de flexion en deux ondes progressives qui se propagent dans des directions opposées.

Pour déterminer comment décomposer l'onde de flexion, nous sommes repartis de la solution du modèle analytique et nous avons séparé la dépendance temporelle de la dépendance spatiale de l'onde de flexion en l'exprimant comme une fonction complexe. La dépendance spatiale de l'onde de flexion s'exprime alors sous la forme d'une fonction complexe dont on peut représenter la trajectoire dans le plan complexe.

Nous définissons ensuite un critère géométrique dans le plan complexe qui approxime, en chaque point du stator, la trajectoire de la dépendance spatiale de l'onde de flexion par une ellipse et qui est équivalent à décomposer l'onde de flexion en deux ondes progressives qui se propagent dans des directions opposées. Connaissant l'amplitude de ces deux ondes progressives, il est alors très facile de mesurer le taux d'onde stationnaire (SWR) local de l'onde de flexion qui n'est autre que l'excentricité de l'ellipse équivalente.

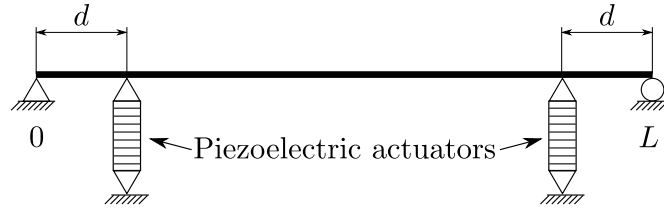


Figure 6.13 – Stator du moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive étudié

La valeur moyenne du SWR local calculé en chaque point le long du stator fournit un critère sur la qualité de l'onde dans tout le barreau statorique : le SWR global. Nous pouvons dès lors utiliser ce critère dans un algorithme d'optimisation afin de déterminer les conditions d'excitation optimales du stator qui minimisent le SWR global et, par conséquent, les conditions qui maximisent la qualité de l'onde progressive parcourant le stator vibrant.

Nous avons ensuite montré qu'on pouvait se contenter de minimiser le SWR local au centre du stator pour maximiser la qualité de l'onde progressive sur la totalité du stator et qu'il était possible d'appliquer cette méthode d'optimisation à partir d'un échantillon de valeurs de l'onde de flexion. Cet échantillon pouvant être issu d'une simulation numérique, à partir d'un modèle éléments finis, ou de mesures expérimentales.

Nous avons donc construit un prototype expérimental du stator d'un moteur linéaire à onde progressive, ce qui nous a permis de valider notre étude et notre optimisation en comparant les résultats de minimisation du SWR obtenus à partir d'un modèle éléments finis du prototype à ceux issus de mesures expérimentales sur ce même prototype.

De plus, nous avons montré que, pour autant que l'excitation soit sinusoïdale, notre technique permet d'étendre la détermination des conditions d'excitation qui maximisent la qualité de l'onde progressive à des stators dont la forme, la composition, la section transversale, les conditions aux extrémités sont différentes de celles du stator initialement choisi pour développer le modèle analytique (figure 6.13).

Nous avons également développé un modèle multicorps du stator également appelé lumped parameter model. L'idée de base de ce modèle est de considérer le stator vibrant comme une succession de petits segments rigides articulés et d'exploiter le logiciel Robotran, développé dans notre centre de recherche, afin de générer les équations cinématiques et dynamiques de ces segments sous une forme symbolique. Ceci permet de simplifier les équations et de rendre le code plus efficace surtout dans le cas de simulations de systèmes complexes

contenant de nombreux corps.

Nous avons ensuite complété le modèle multicorps du stator par un modèle du rotor et de l'entraînement par friction de ce rotor lorsque le stator est parcouru par une onde progressive ainsi qu'un modèle électromécanique des actionneurs piézoélectriques créant un modèle multi-physique du moteur linéaire. Les résultats que nous avons obtenus montrent que cette approche est très prometteuse si on veut modéliser le moteur complet en y incluant les modèles des actionneurs piézoélectriques, du rotor, de l'entraînement par friction pour développer, in fine, un algorithme de commande du moteur.

Perspectives

Nous pouvons exploiter la méthode d'optimisation de l'onde progressive (la minimisation du taux d'onde stationnaire) pour étudier les conditions optimales d'excitation dans d'autres structures de stators à partir de données fournies par un modèle éléments finis ou, expérimentalement, à l'aide d'un prototype du stator étudié.

L'amélioration du modèle multicorps du moteur permettrait de choisir les matériaux et la structure du rotor qui maximisent la force d'entraînement afin de développer des moteurs linéaires à onde progressive plus performants.

Il serait également intéressant de pouvoir valider expérimentalement le modèle multicorps du moteur et, en particulier, de déterminer expérimentalement les paramètres nécessaires à la modélisation de la transmission du mouvement au rotor.

Pour cela, nous devons disposer d'alimentations capables de fournir aux stacks piézoélectriques un courant plus élevé (de l'ordre de 3A) pour que leur déformation puisse atteindre une amplitude de l'ordre de $10\mu m$, valeur minimale pour permettre l'entraînement par friction du rotor [Vlo - 2003], aux fréquences où le taux d'onde stationnaire global est suffisamment petit pour garantir une bonne qualité d'onde progressive sur la majeure partie du stator.

Il faudrait modifier le prototype de façon à découpler le guidage du rotor avec l'entraînement par friction et éviter ainsi que le poids du rotor ne repose sur la partie la plus fine du stator (figure 6.14).

Il faudrait également apporter un soin particulier aux tolérances d'usinage et d'assemblage des composants du moteur. Il faut, en effet, que les tolérances de fabrication du prototype soient très inférieures à l'amplitude des ondes générées qui est de l'ordre de $10\mu m$.

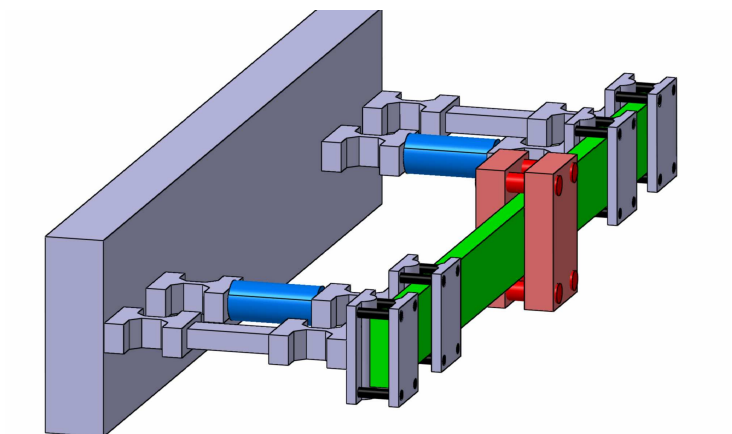


Figure 6.14 – Nouveau prototype de moteur piézoélectrique linéaire à onde progressive

Références bibliographiques

- [Apc - 2002] APC International, Ltd., *Piezoelectric Ceramics : Principles and Applications*, (APC, 2002).
- [Bre - 1998] J.M. Breguet, *Actionneurs "stick and slip" pour micro-manipulateurs*, Thèse de doctorat, EPFL Lausanne, 1998.
- [Bri - 1986] M. Brissaud, *Caractérisation tensorielle et modélisation des céramiques piézoélectriques utilisées en imagerie ultrasonore*, (INSA Lyon, 1986).
- [Bro - 2007] R. Brown, *FITELLIPSE : Least squares ellipse fitting demonstration*, In : <http://www.mathworks.com>.
- [Cad - 1946] W.G. Cady, *Piezoelectricity*, (McGraw-Hill, New-York 1946).
- [Ced - 2003] CEDRAT Technologies, *Piezo Actuators Catalogue*, (version 3.0, septembre 2003).
- [Com - 2008] COMSOL multiphysic help, *Structural mechanics*, Theory background on www.comsol.com.
- [Cro - 1993] L.E. Cross, *Ferroelectric ceramics : tailoring properties for specific applications*, (Ferroelectric ceramics, Basel : Birkhauser, 1993. p 1-85).
- [Cur - 1881a] P. Curie, J. Curie, *Développement par pression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées*, (C.R. Acad. Sc., Paris 92 1881).
- [Cur - 1881b] P. Curie, J. Curie, *Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux*, (C.R. Acad. Sc., Paris 92 1881).

- [Enc - 2000] ENCYCLOPAEDIA UNIVERSALIS FRANCE S.A., *Cristaux et piézo-électricité*, (Cristallographie, 2000).
- [Eri - 2008] M.A. Erismis, H.P. Neves, R. Puers, C. Van Hoof, *A low-voltage large-displacement large-force inchworm actuator*, Journal of Micromechanical systems, 2008, vol. 17, n°6, pp. 1294-1301.
- [Fer - 2004] J.A. Fernandez, Y. Perriard, *Characteristics, modeling and simulation of a traveling wave ultrasonic linear motor*, IEEE Ultrasonics Symposium, 2004, vol. 3, pp. 2247-2250.
- [Fly - 1997] A.M. Flynn, *Piezoelectric ultrasonic micromotors*, MIT Artificial Intelligence Laboratory, December 1997.
- [Gir - 2002] F. Giraud, *Modélisation causale et commande d'un actionneur piézo-électrique à onde progressive*, Thèse de doctorat à USTL de Lille, 2002.
- [Giu - 2000] V. Giurgiutu, C.A. Rogers, *Modal expansion modeling of the electro-mechanical impedance response of 1-D structures*, European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Universidad Politécnica de Madrid, Spain, 6-9 June 2000.
- [Gra - 1991] K. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, New-York, 1991.
- [Hag - 1995] N.W. Hagood, A.J. McFarland, *Modeling of a piezoelectric rotary ultrasonic motor*, IEEE Trans. Ultrasonic, Ferroelectric and Frequency Control, 1995, vol. 42, n°2, pp. 210-224.
- [Hir - 2002] S. Hirsekom, *Flexural vibration behaviour of piezoelectric heterogeneous bimorph beams*, IEEE Trans. Ultrasonic, Ferroelectric and Frequency Control, 2002, vol. 49, n°7, pp. 959-971.
- [Hus - 1993] R.L. Huston, Y. Wang, *Flexibility Effects in Multibody Systems* In : M.F.O.S. Pereira, J.A.C. Ambrosio, Computer-Aided Analysis of Rigid and

- Flexible Mechanical Systems, NATO ASI Series E : Applied Sciences, Vol. 268, Dordrecht, 1993, pp. 351-376.
- [Ike - 1990] T. Ikeda, *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University Press, 1990.
- [Ire - 1961] *IRE Standards on Piezoelectric Crystals - Measurements of piezoelectric Ceramics*, (61 IRE 14. S1. Proceedings of IRE, 1961, vol. 49, n°7, p 1161-1169).
- [Jaf - 1954] B. Jaffe, R.S. Roth, S. Marzullo, *Piezoelectric properties of lead zirconate - lead titanate solid - solution ceramic ware*, (J. Appl. Phys., 1954, vol. n°25, p 809).
- [Jaf - 1971] B. Jaffe, *Piezoelectric ceramics*, (London : Academic Press, 1971).
- [Jon - 1987] K.L. Johnson, *Contact mechanics*, Cambridge University Press, 1987.
- [Kur - 1985] M. Kuribayashi, S. Ueha, E. Mori, *Excitation conditions of flexural traveling waves for a reversible ultrasonic linear motor*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 77, No 4, April 1985.
- [Lag - 1998] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, P.E. Wright, *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions*, SIAM Journal of optimization, Vol.9, no.1, 1998, pp.112-147.
- [Les - 1998] G. Lesieutre, *Can a coupling coefficient of a piezoelectric device be higher than of its active material ?*, Penn State University, 1998.
- [Lip - 1881] G. Lippmann, *Principe de conservation d'électricité*, (Phys. Chim. 24, Paris 1881).
- [Loh - 2000] B.G. Loh, P.I. Ro, *An Object Transport System Using Flexural Ultrasonic Progressive Waves Generated by Two-Mode Excitation*, IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, vol. 47, no. 4, july 2000, pp. 994-999.

- [Lup - 1962] G. Lupsin, R. Graas, *Géométrie analytique plane*, La Procure Namur, 8^e édition, 1962.
- [Mas - 1947] W.P. Mason, *Piezoelectricity, Its History and Applications*, (Journal of Acoustical Society of America, Vol. 70, N°6, 1947).
- [Mas - 1952] W.P. Mason, Phys. Rev., 69, 173-94 (1946), 82, 715-23 (1951), 85, 1065 (1952).
- [Mir - 2003] A. Miranville, R. Temam, *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*, Springer, 2003.
- [Nel - 1965] J. Nelder, R. Mead, *A simplex method for function minimization*, Computer Journal, Vol. 7, no. 4, 1965, pp. 308-313.
- [Neu - 2006] M. Neubauer and al., *Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance*, Journal of sound and vibration, Vol. 298, 2006, pp. 84-107.
- [Nie - 2001] C. Niezrecki, D. Brei, S. Balakrishnan and A. Moskalik, *Piezoelectric Actuation : State of the Art*, The Shock and Vibration Digest 33 (2001), pp. 269-280. .
- [Nog - 1990] B. Nogarede, *Moteurs piézoélectriques, Technique de l'ingénieur*, Traité de génie électrique, D3765, 1990.
- [Nye - 1961] J.F. Nye, *Propriétés physiques des cristaux : leur représentation par des tenseurs et des matrices*. (Dunod, Paris 1961).
- [Pal - 1947] E. Palmans, *Théorie et pratique de la piézo-électricité*, (Eyrolles, Paris 1947).
- [Par - 2005] C. H. Park, A. Baz, *Vibration control of beams with negative capacitive shunting of interdigital electrode piezoceramics*, Journal of Vibration and Control, 2005, 11, 331.
- [Pen - 2010] J.Y. Peng, D.B. Chen, *Modeling of piezoelectric-driven stick-slip actuators*, Trans. Mechatronics, 2010, Vol. PP, n°99, pp. 1-6.

- [Pro - 1986] G.M. Procopio, *Active damping of a Bernoulli-Euler beam via end-point impedance control using distributed parameter techniques*, Master thesis at MIT, September 1986.
- [Riz - 1999] N. Rizet, *Contrôle actif de vibrations utilisant des matériaux piézoélectriques*, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.
- [Sam - 2003] J.C. Samin, P. Fisette, *Symbolic Modeling of Multi-body Systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht : 2003.
- [Sas - 1993] T. Sashida, T. Kenjo, *An introduction to ultrasonic motors*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [Sas - 2004] L. Sass, *Symbolic Modeling of Electromechanical Multibody Systems*, Ph.D. Thesis, Université catholique de Louvain, 2004.
- [Shr - 1987] T.R. Shrout, A. Halliyal, *Preparation of lead-based ferroelectric relaxors for capacitors*, (Am. Ceram. Soc. Bull., 1987, vol. 66, n°4, p 704-711).
- [Sod - 2004] H. Sodano, D. Inman, G. Park, *A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials*, The Shock and Vibration Digest, Vol. 36, N° 3, 2004, pp. 197-205.
- [Ten - 2004] P.E. Tenzer, R.B. Mrad, *A systematic procedure for the design of piezoelectric inchworm precision positioners*, Trans. Mechatronics, 2004, vol. 9, n° 2, pp. 427-435.
- [Top - 1989] J. Toppler, V. Arnhold, *Damping properties of P/M aluminium alloys*, International journal of powder metallurgy, 1989, vol. 25, N°2, pp. 95-100.
- [Voi - 1910] VOIGT W., *Lehrbuch der Krystallphysik*, (Teubner, Leipzig 1910).
- [Weh - 1982] R.-A. Wehage, E.-J. Haug, *Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems*, Journal of Mechanical Design, Vol. 134, 1982, pp. 174-190.

- [Yuh - 1991] X. Yuhuan, *Ferroelectric materials and their applications*, Elsevier science publishers, 1991.
- [Web - 1] *Piezoelectric history*, www.tau.ac.il
- [Web - 2] *American physical society*, www.aps.org
- [Web - 3] *Pour une école de la culture*, www.espci.fr
- [Web - 4] *Moteurs et actuateurs piézoélectriques*, www.geniemeca.fpms.ac.be
- [Vlo - 2010a] C. Vloebergh, B. Dehez, F. Labrique, *Optimization of the traveling wave in linear piezoelectric motors*, soumis à Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, TUFFC-03650-2010.
- [Vlo - 2010b] B. Dehez, C. Vloebergh, F. Labrique, *Study and Optimization of Traveling Wave Generation in Finite-Length Beams*, In : Mathematics and Computers in Simulation, doi :10.1016/j.matcom.2010.05.013, published by Elsevier Ltd. 26 May 2010.
- [Vlo - 2009] J.-F. Collard, C. Vloebergh, B. Dehez, P. Fissette, *Multibody modelling of a travelling wave linear piezomotor*, In : Proceedins of the EC-COMAS Multibody Dynamics 2009 Conference (CD-Rom), Warsaw, Poland, June 29-July 2, 2009, p. 6 pages. (Publié, Scientifique - portée internationale).
- [Vlo - 2008a] C. Vloebergh, J.-F. Collard, B. Dehez, F. Labrique, *Study of a travelling wave linear piezomotor using analytical, finite element and lumped parameter models*, In : Proceedings of the Electrimacs 2008 Conference (CD-Rom), Montréal, Québec, June 9-11, 2008, p. 6 pages. (Publié, Scientifique - portée internationale).
- [Vlo - 2008b] B. Dehez, C. Vloebergh, F. Labrique, *Study and Optimization of the Travelling Waves Generation in Finite-Length Beams*, In : Proceedins of the Electrimacs 2008 Conference (CD-Rom), Montréal, Québec, June 9-11, 2008, p. 6 pages. (Publié, Scientifique - portée internationale).

- [Vlo - 2008c] C. Vloebergh, P. Sente, F. Labrique, P. Alexandre *Control of a direct-drive servo-valve actuated by a linear amplified piezoelectric actuator for aeronautic applications*, 18th International Conference on Electrical Machines, Vilamoura, Portugal, 6-9 septembre, ISBN : 978-1-4244-1736-0, IEEE, 2008, p. 6 pages. (Publié, Scientifique - portée internationale).
- [Vlo - 2005] C. Vloebergh, F. Labrique, *2 finite element modeling methods for linear amplified piezoelectric actuators*, In : Proceedings of the 8th International Conference on Modeling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems (Electrimacs 2005), Hammamet, Tunisie, 17-20 avril 2005, ISBN : 2-921145-51-0, 2005, p. 5 pages. (Publié, Scientifique - portée internationale).
- [Vlo - 2003] C. Vloebergh, F. Labrique, D. Grenier, *Design of a Lamb's Wave Generator Using Amplified Piezoelectric Actuators*, In : 10th European Conference on Power Electronics and Application (EPE'2003), Toulouse, France, Septembre 2003, ISBN : 90-75815-07-7, 2003, p. pp.1-10. (Publié, Scientifique - portée internationale).

Deuxième partie

Annexes

Annexe A

Modélisation des matériaux piézoélectriques par des tenseurs

A.1 Théorie des tenseurs : principes généraux

La théorie des tenseurs permet de préciser la valeur d'une propriété cristalline pouvant dépendre de la direction. Dans ce chapitre, nous nous préoccupons davantage de la forme et de la signification générale d'un tenseur, que de sa valeur numérique. Dans ce but, il suffit de modéliser un cristal comme un simple milieu continu anisotrope ayant certaines propriétés de symétrie, sans qu'il soit nécessaire de se préoccuper de sa structure intime. Nous supposons également que le cristal est homogène (que les propriétés physiques sont identiques en tout point).

A.1.1 Scalaires, vecteurs et tenseurs de rang 2

Scalaires : En physique, certaines grandeurs usuelles comme la densité et la température d'un corps sont indépendantes de toute notion d'orientation. Ces grandeurs physiques non directionnelles sont des scalaires ; la valeur d'un scalaire est complètement déterminée par un seul nombre, c'est aussi pourquoi un scalaire est appelé *tenseur de rang zéro*.

Vecteurs : A côté des scalaires, il existe des grandeurs physiques, les vecteurs, qui sont inséparables de la notion de direction. Pour définir complète-

ment l'action d'un vecteur, il faut donner son intensité et sa direction. Comme exemples de vecteurs, on peut citer les forces, le champ électrique en un point, le moment d'un dipôle magnétique, le gradient de température en un point ... Nous pouvons représenter un vecteur en intensité et en direction dans un repère orthonormé $(\widehat{ox_1}, \widehat{ox_2}, \widehat{ox_3})$ et donner les composantes de ce vecteur sur ces 3 axes, les composantes étant simplement les projections du vecteur sur les axes. Si les composantes du vecteur E sont (E_1, E_2, E_3) , nous écrirons : $E = [E_1, E_2, E_3]$. Une fois les axes de référence choisis, un vecteur est complètement déterminé par les valeurs de ces 3 composantes sur les 3 axes de référence ; un vecteur est aussi appelé *tenseur de rang 1*.

Tenseurs de rang 2 : Prenons l'exemple d'un champ électrique E agissant à l'intérieur d'un conducteur ; il se produit un courant électrique dont la densité de courant (intensité par unité de surface perpendiculaire au courant) j est liée au champ électrique E par la loi d'Ohm $j = \sigma E$. En décomposant j et E par leurs composantes dans un repère orthonormé, on obtient pour un matériau anisotrope :

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3$$

Ces équations peuvent être représentées sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

Les σ_{ij} sont les composantes d'un tenseur de rang 2.

A.1.1.1 Notation des indices muets

L'équation matricielle précédente peut être notée de la manière suivante :

$$j_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

En ôtant le signe de sommation Σ ,

$$j_i = \sigma_{ij} E_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.1})$$

nous introduisons **la convention de notation des indices muets** donnée par EINSTEIN : *Quand un indice intervient deux fois dans un même monôme, la sommation par rapport à cet indice est automatiquement sous-entendue.*

La position des indices répétés est importante, dans l'équation (A.1), j est un indice muet et i est un indice libre. Dans une équation écrite avec la notation d'EINSTEIN, les indices libres doivent être les mêmes dans tous les termes des deux membres de l'équation alors que les indices muets doivent apparaître deux fois dans chaque terme.

A.1.2 Transformations

Lorsqu'on change le système de référence (le repère orthonormé), seule change la méthode de représentation de la propriété physique (càd : les valeurs des composantes des tenseurs représentant la propriété) mais la propriété elle-même reste inchangée (l'équation tensorielle représentant la propriété s'exprime de manière identique).

L'étape suivante consiste à déterminer la loi de variation des 9 composantes d'un tenseur quelconque T_{ij} liant les vecteurs p_i et q_j par la relation :

$$p_i = T_{ij}q_j \quad (\text{A.2})$$

Lors d'un changement d'axes, il faut d'abord préciser le changement d'axes avant d'étudier comment varient les composantes des vecteurs p_i et q_j sous l'effet de ce changement d'axes.

A.1.2.1 Transformations d'axes

Par changement d'axes, nous entendons le passage d'un système d'axes orthonormés à un autre ayant la même origine. Sur chaque axe, l'unité de longueur reste la même. Vous désignons le premier système par (x_1, x_2, x_3) et le second par (x'_1, x'_2, x'_3) .

On peut préciser les relations angulaires liant les axes en dressant le tableau des *cosinus directeurs* (tableau (A.1)) :

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Tableau A.1 – cosinus directeurs

Le premier indice des a_{ij} se rapporte aux nouveaux axes, le second, aux anciens; a_{ij} est le cosinus de l'angle que font x'_i et x_j . Les 9 composantes du tableau (A.1) forment une matrice de transformation des axes. En général, $a_{ij} \neq a_{ji}$ (la matrice transposée de a_{ij}).

A.1.2.2 Transformation des composantes d'un vecteur

Considérons un vecteur p dont les composantes par rapport à x_1, x_2, x_3 sont (p_1, p_2, p_3) . Désignons par (p'_1, p'_2, p'_3) ces mêmes composantes exprimées cette fois par rapport à x'_1, x'_2, x'_3 . p'_1 est obtenue en projetant p_1, p_2, p_3 (composantes du vecteur p exprimé suivant les axes x_1, x_2, x_3) sur la nouvelle direction x'_1 :

$$p'_1 = p_1 \cos \widehat{x_1 x'_1} + p_2 \cos \widehat{x_2 x'_1} + p_3 \cos \widehat{x_3 x'_1}$$

$$p'_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3$$

d'après la définition des cosinus directeurs. De même :

$$p'_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3$$

$$p'_3 = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3$$

que l'on peut écrire selon la notation des indices muets (expression des "nouveaux" p en fonction des "anciens") :

$$p'_i = a_{ij}p_j \quad (\text{A.3})$$

Reprenant le même raisonnement pour la transformation inverse, on a :

$$p_1 = a_{11}p'_1 + a_{21}p'_2 + a_{31}p'_3$$

$$p_2 = a_{12}p'_1 + a_{22}p'_2 + a_{32}p'_3$$

$$p_3 = a_{13}p'_1 + a_{23}p'_2 + a_{33}p'_3$$

ou selon la notation des indices muets (expression des "anciens" p en fonction des "nouveaux") :

$$p_i = a_{ji}p'_j \quad (\text{A.4})$$

Dans la transformation faisant passer les "nouveaux" p aux "anciens", les indices muets occupent des places voisines. Dans la transformation inverse, ils sont séparés.

A.1.2.3 Transformation des coordonnées d'un point

La transformation qui lie les coordonnées d'un point (y_1, y_2, y_3) exprimées dans le système d'axes x_1, x_2, x_3 aux coordonnées de ce même point (y'_1, y'_2, y'_3) exprimées cette fois dans le système d'axes x'_1, x'_2, x'_3 est donnée par la relation :

$$y'_i = a_{ij}y_j \quad (\text{A.5})$$

et sa transformation inverse par :

$$y_i = a_{ji}y'_j \quad (\text{A.6})$$

La démonstration est identique à celle réalisée pour la transformation d'un vecteur.

A.1.2.4 Transformation d'un tenseur de rang 2

Les valeurs particulières des coefficients T_{ij} dans l'équation tensorielle (A.2) dépendent du système d'axes choisi car dans le nouveau système d'axes x'_1, x'_2, x'_3 , les vecteurs p et q ont pour composantes p'_i et q'_i . Pour trouver les relations qui existent entre ces nouvelles composantes, nous utiliserons la série d'équations qui lient p' à q' dans l'ordre des transformations suivantes : $p' \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow q'$. On a : $p'_i = a_{ik}p_k$, $p_k = T_{kl}q_l$ et $q_l = a_{jl}q'_j$; et en combinant ces équations :

$$p'_i = a_{ik}p_k = a_{ik}T_{kl}q_l = a_{ik}T_{kl}a_{jl}q'_j$$

On obtient donc le nouveau tenseur :

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad (\text{A.7})$$

On peut obtenir, de manière analogue, l'expression qui donne les anciennes composantes en fonction des nouvelles en considérant la transformation inverse :

$$T_{ij} = a_{ki}a_{lj}T'_{kl} \quad (\text{A.8})$$

Dans la transformation des composantes d'un tenseur de rang 2 où les nouvelles composantes sont exprimées en fonction des anciennes, les indices muets sont aussi voisins que possible, tandis que dans la transformation inverse, c'est le contraire.

A.1.3 Définition d'un tenseur

Un tenseur représente une grandeur physique à laquelle on attribue une existence propre, indépendante du choix particulier et arbitraire des axes du référentiel dans lequel on exprime cette grandeur physique. Quand on change les axes du référentiel, la grandeur physique ne change pas ; seule la méthode de représentation est modifiée.

Autrement dit, toute la physique exprimée à l'aide de tenseurs (l'équation tensorielle) est indépendante du référentiel dans lequel elle est exprimée mais la valeur des composantes des tenseurs peut changer en fonction du référentiel choisi.

A.1.3.1 Différence entre matrice et tenseur

La matrice a_{ij} et le tenseur T_{ij} ont tous deux 9 composantes mais leur ressemblance s'arrête là. A d'autres points de vue, ils sont totalement différents :

- a_{ij} est une matrice de coefficients exprimant les relations qui unissent deux systèmes d'axes ;
- T_{ij} est une grandeur physique qui, pour un système d'axes donné, est représentée par 9 nombres qui ne dépendent à la fois que d'un seul système d'axes.

A.1.3.2 Tenseurs symétriques et antisymétriques

- un tenseur T_{ij} est **symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$;
- un tenseur T_{ij} est **antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$; ceci implique que $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$.

La propriété de symétrie ou d'antisymétrie d'un tenseur est indépendante des axes de référence.

A.2 Polarisation électrique

La polarisation d'un cristal, créée par un champ électrique, est une propriété d'un cristal anisotrope représentée par un tenseur de rang 2.

A.2.1 Relations générales

3 vecteurs sont à prendre en considération pour décrire la polarisation électrique :

- E : l'intensité du champ électrique ;

- P : la polarisation (le moment électrique de l'unité de volume ou la charge de polarisation par surface unité normale à la direction de polarisation) ;
 - D : le déplacement électrique ou la densité de flux électrique.
- L'équation qui lie ces grandeurs est :

$$D = \chi_0 E + P \quad (\text{A.9})$$

où χ_0 représente la permittivité électrique du vide et vaut $8,854 \cdot 10^{-12}$.

Dans les corps isotropes, la polarisation est proportionnelle au champ électrique (sauf dans le cas de champs très intenses) :

$$P = \chi_0 \cdot \chi \cdot E \quad (\text{A.10})$$

χ étant la susceptibilité diélectrique du corps considéré. De même, on a la relation :

$$D = \Xi \cdot E \quad \text{où} \quad \Xi = \chi_0 \cdot (1 + \chi) \quad (\text{A.11})$$

où Ξ est la permittivité de la substance. Souvent, on définit la permittivité d'une substance en fonction du vide en introduisant la permittivité relative (ou constante diélectrique) : $\kappa = \frac{\Xi}{\chi_0}$.

Dans un corps anisotrope, les relations liant la polarisation et le déplacement électrique au champ électrique, ainsi que la relation définissant la constante diélectrique, sont données par les relations tensorielles :

$$P_i = \chi_0 \cdot \chi_{ij} \cdot E_j \quad (\text{A.12})$$

$$D_i = \Xi_{ij} \cdot E_j \quad (\text{A.13})$$

$$\Xi_{ij} = \chi_0 \cdot (\delta_{ij} + \chi_{ij}) \quad (\text{A.14})$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\Xi_{ij}}{\chi_0} \quad (\text{A.15})$$

D'après des considérations énergétiques, $\Xi_{ij} = \Xi_{ji}$, $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ et $\chi_{ij} = \chi_{ji}$. Ces tenseurs peuvent donc être rapportés à leurs axes principaux communs et permettre ainsi d'avoir des relations scalaires entre leurs composantes principales $\Xi_1 = \chi_0 \cdot \kappa_1 \dots$.

Les propriétés diélectriques d'un cristal sont ainsi caractérisées en grandeurs et en directions par les 3 permittivités, constantes diélectriques ou susceptibilités diélectriques principales. Ces grandeurs et leurs directions dépendent, en général, de la fréquence du champ électrique mais elles sont toujours soumises aux restrictions imposées par la symétrie du cristal.

A.2.2 Pyroélectricité

Certains cristaux se polarisent sous l'effet d'un changement de température ; s'ils sont déjà polarisés spontanément, leur polarisation est modifiée. Ce phénomène porte le nom de *pyroélectricité*. En pratique, le moment électrique ainsi produit n'est pas durable parce que l'isolement est imparfait et qu'il y a un apport de charges sur la surface du cristal.

Pour observer la pyroélectricité, on chauffe le cristal uniformément et on observe la modification de sa polarisation. Cette expérience peut être réalisée de deux façons : on peut maintenir inchangée la forme géométrique et les dimensions du cristal mais on peut aussi le laisser se dilater librement sous l'effet de la variation de température ; dans ces deux cas, les effets ne sont pas les mêmes :

- dans le premier cas (dimensions maintenues constantes), il s'agit d'une pyroélectricité primaire ;
- dans le second cas (dilatation libre), il existe un effet de pyroélectricité secondaire qui vient se superposer à l'effet primaire et l'on observe la résultante de l'effet primaire et de l'effet secondaire (une étude complète des relations existant entre les effets primaire et secondaire fait appel à la thermodynamique (section (A.7))).

Si on élève la température du cristal d'une petite quantité ΔT , la variation ΔP_i du vecteur polarisation est :

$$\Delta P_i = p_i \cdot \Delta T \quad (\text{A.16})$$

les p_i étant les 3 coefficients pyroélectriques. Le vecteur p caractérise donc l'effet pyroélectrique dans tout le cristal.

D'après le principe de Neumann, p est fonction des symétries du cristal : *l'effet pyroélectrique ne peut donc pas avoir lieu ($p = 0$) dans un cristal possédant un centre de symétrie*. Le phénomène de pyroélectricité ne peut donc avoir lieu que dans les 10 classes **non centro-symétriques**.

A.2.3 Ferroélectricité

Comme les cristaux pyroélectriques, les cristaux ferroélectriques peuvent présenter une polarisation spontanée mais ils ont la particularité suivante : *l'application d'un champ électrique suffisamment intense permet d'inverser la polarisation* ; un phénomène d'**hystérésis** se produit donc dans un champ alternatif intense.

Le champ électrique peut inverser la polarisation en engendrant de petits déplacements des atomes du cristal ; ces déplacements modifient la répartition

des charges dans le cristal. Si l'amplitude de déplacement de chaque atome est diminuée de moitié ou si la seule moitié des atomes est déplacée, le cristal se placera dans un état plus symétrique et non polarisé. Il arrive fréquemment que cette configuration intermédiaire soit provoquée par un changement de température ; ainsi la plupart des cristaux ferroélectriques présentent une température de transition (point de CURIE) au-dessus de laquelle ils sont normaux et non polarisés.

Un cristal ferroélectrique ayant une polarisation spontanée doit être moins symétrique que lorsqu'il se trouve dans son état non polarisé.

A.3 Le tenseur des contraintes

Un corps est en état de contrainte quand il est soumis à l'action de forces extérieures ou de façon plus générale, quand un de ses éléments exerce une force sur les éléments voisins. Un élément de volume situé à l'intérieur d'un corps en état de contrainte est soumis à deux types de forces :

les champs de force : comme la pesanteur, dont l'action se manifeste dans tous les éléments de volume du corps qui créent une force proportionnelle au volume de l'élément.

les forces de contact : exercées sur la surface de l'élément par le milieu qui l'entoure, qui sont proportionnelles à l'aire de la surface externe de l'élément ; la force par unité d'aire est appelée **contrainte**.

La contrainte est **homogène** si les forces agissant sur la surface d'un élément de forme et d'orientation données sont indépendantes de la position qu'occupe l'élément à l'intérieur du corps.

A.3.1 Contraintes homogènes

Notre discussion se limitera d'abord aux états dans lesquels :

- la contrainte est homogène dans l'ensemble du corps ;
- toutes les parties du corps sont en équilibre statique ;
- il n'existe ni champ de forces ni champ de moments.

La contrainte est exprimée par le tenseur σ_{ij} où σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} sont les composantes normales de la contrainte et σ_{12} , σ_{23} , σ_{21} , σ_{31} , σ_{13} , σ_{32} sont les composantes de cisaillement.

La convention de signe, généralement adoptée, impose que des σ_{11} , σ_{22} ou σ_{33} positifs impliquent une contrainte correspondant à une traction et que des valeurs négatives correspondent à une compression. Cependant, on utilise parfois

la convention de signe opposée (contraintes positives pour la compression), en particulier dans les applications piézoélectriques, il convient donc de faire très attention chaque fois que l'on relève des valeurs numériques données par différents auteurs.

La **condition d'équilibre** pour des contraintes homogènes impose que le tenseur des contraintes soit symétrique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A.17})$$

A.3.2 Contraintes inhomogènes

En tout point P d'un milieu matériel, la contrainte peut être définie ; dS étant l'aire d'un élément de surface passant par P , n le vecteur unitaire normal à cette surface et $p.dS$ la force qui s'exerce sur l'élément de surface. Nous adoptons la convention suivante : $p.dS$ est la force exercée par la matière située du côté de la face positive de l'aire (définie par l'orientation de n) sur la matière située du côté de la face négative. Des considérations statiques (ou dynamiques si le corps est en mouvement) montrent que si $dS \rightarrow 0$, p est lié à n par :

$$p_i = \sigma_{ij}.n_j \quad (\text{A.18})$$

où σ_{ij} est un tenseur de rang 2 appelé contrainte en P . Les équations d'un mouvement de translation d'un petit élément sont :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} \quad (\text{A.19})$$

qui, si l'ensemble du corps est en équilibre statique, devient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad (\text{A.20})$$

ρ étant la masse volumique et g_i la force de volume par unité de masse. les équations d'un mouvement de rotation sont :

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} + G_1 = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_{13} - \sigma_{31} + G_2 = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_{21} - \sigma_{12} + G_3 = 0 \quad (\text{A.23})$$

où G_i est le moment par unité de volume. En l'absence de tout champ de moments : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et σ_{ij} est un tenseur symétrique que l'on peut rapporter à ses axes principaux (axes perpendiculaires deux à deux qui restent perpendiculaires lorsqu'ils sont soumis à une contrainte, ces axes sont déterminés en fonction de la structure cristalline).

A.4 Le tenseur des déformations et dilatations thermiques

A.4.1 Tenseur des déformations

On suppose que les déplacements et les déformations sont faibles. u_i étant le déplacement d'un point x_j dans un corps déformé, le tenseur des déplacements relatifs e_{ij} est défini par :

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.24})$$

Ses composantes ont les significations suivantes :

- e_{11} , e_{22} et e_{33} sont les allongements par unité de longueur, parallèlement à ox_1 , ox_2 et ox_3 respectivement ;
- e_{12} est la rotation vers ox_1 d'un élément linéaire parallèle à ox_2 , cette rotation étant faite autour de ox_3 ;
- e_{21} est la rotation vers ox_2 d'un élément linéaire parallèle à ox_1 , cette rotation étant faite autour de ox_3 ;
- les autres e_{ij} ont des significations analogues.

Si le corps subit une simple rotation, sans déformation, le tenseur e_{ij} est antisymétrique. Choisissons, en effet, l'origine sur l'axe de rotation et posons :

$$u_i = e_{ij}.x_j \quad (\text{A.25})$$

Dans une simple rotation, tout point se déplace perpendiculairement à son rayon vecteur, donc $u_i.x_i = 0$ (produit scalaire) ou encore $e_{ij}.x_j.x_i = 0$. L'équation précédente étant vérifiée pour tous les x_i , tous les coefficients du premier membre doivent être nuls, d'où $e_{ij} = 0$ si $i = j$ et $e_{ij} = -e_{ji}$ si $i \neq j$. Ce sont les conditions que doit remplir e_{ij} pour être antisymétrique.

Une rotation peut être représentée par un vecteur axial ; un tel vecteur équivaut à un tenseur symétrique de rang 2, les 3 composantes indépendantes de :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \quad (\text{A.26})$$

sont les composantes d'un vecteur axial qui définit la rotation.

Le tenseur des déformation ε_{ij} est la partie symétrique de e_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \quad (\text{A.27})$$

Les composantes diagonales de ε_{ij} sont les allongements, les autres mesures les déformation de cisaillement.

L'angle que font deux droites respectivement parallèles à ox_1 et à ox_2 après déformation est : $\frac{1}{2}\pi - 2\varepsilon_{12}$; ε_{23} et ε_{31} s'interprètent de manière identique.

Si la déformation est homogène, son tenseur symétrique peut être rapporté à ses axes principaux, les composantes de cisaillement disparaissent et le tenseur des déformations devient diagonal et s'exprime à partir des déformations principales ε_1 , ε_2 et ε_3 . On peut mettre en évidence la signification géométrique des déformations principales en choisissant un cube de volume unité dont les arêtes sont parallèles aux axes principaux. Pendant la déformation, les arêtes restent perpendiculaires et leurs longueurs deviennent $1 + \varepsilon_1$, $1 + \varepsilon_2$ et $1 + \varepsilon_3$. Il serait faux de croire que les axes principaux de la déformation gardent des directions inchangées pendant le déplacement ; ceci n'est vrai que si la rotation ω_{ij} est nulle. Les axes principaux sont caractérisés par le fait qu'ils sont perpendiculaires deux à deux dans le corps et qu'ils restent perpendiculaires durant la déformation.

La variation de volume du cube unité est la dilatation ; elle a pour valeur : $\Delta = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, les ε_i étant petits. Rapportée à des axes quelconques, la dilatation constitue un invariant exprimé par :

$$\Delta = \varepsilon_{ii} \quad (\text{A.28})$$

A.4.2 Déformation et symétrie cristalline

La déformation d'un cristal n'est pas une propriété physique ayant le même sens qu'une constante diélectrique par exemple. La déformation constitue la réponse d'un cristal à un phénomène d'influence qui peut être une contrainte mécanique (élasticité) ou un champ électrique (piézoélectricité). Dans les deux cas, les grandeurs et les directions des déformations principales sont déterminées par l'intensité et l'orientation du phénomène d'influence, mais aussi par les propriétés physiques et la symétrie du cristal. Le tenseur des déformations, comme le tenseur des contraintes, ne possède pas nécessairement la symétrie du cristal (sauf si le phénomène d'influence possède lui-même cette symétrie). Si le phénomène d'influence provient d'une variation de température, il n'est pas orienté car il est représenté par un scalaire et la déformation qui en résulte présente la symétrie cristalline. La polarisation électrique en est un bon exemple : la polarisation n'a pas la symétrie du cristal quand elle est produite par un champ de direction particulière ; elle la possède, par contre, si elle résulte d'une variation de température (pyroélectricité).

A.4.3 Dilatation thermique

La déformation qui résulte de la variation de température du cristal peut être représentée par le tenseur des déformations ε_{ij} . Pour une petite variation uniforme ΔT de température du cristal, la déformation est homogène et toutes les composantes de ε_{ij} sont proportionnelles à ΔT :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \Delta T \quad (\text{A.29})$$

les α_{ij} étant les coefficients de dilatation thermique.

ε_{ij} est un tenseur symétrique, donc α_{ij} est aussi un tenseur symétrique. On peut donc rapporter à ses axes principaux le tenseur de dilatation thermique α_{ij} ; l'équation (A.29) se simplifie alors en :

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 \cdot \Delta T \quad (\text{A.30})$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 \cdot \Delta T \quad (\text{A.31})$$

$$\varepsilon_3 = \alpha_3 \cdot \Delta T \quad (\text{A.32})$$

α_1 , α_2 et α_3 étant les coefficients principaux de dilatation.

La dilatation thermique d'un cristal doit posséder la symétrie de ce cristal, elle ne peut donc détruire aucun de ses éléments de symétrie (mises à part lors des transformations de phase). C'est pour cette raison que la classe d'un cristal ne dépend pas de la température.

Le coefficient volumétrique de dilatation thermique constitue un invariant, il vaut $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, ou de façon générale :

$$\Delta_T = \alpha_{ii} \quad (\text{A.33})$$

A.5 La piézoélectricité : tenseur de rang 3

A.5.1 Effet piézoélectrique direct

Sous une contrainte, certains cristaux sont le siège d'un moment électrique dont l'intensité est proportionnelle à la contrainte appliquée. C'est l'**effet piézoélectrique direct**. Si une tension uniaxiale est appliquée selon l'un des axes binaires d'un cristal piézoélectrique, l'intensité du moment par unité de volume ou la charge de polarisation par unité d'aire est :

$$P = d \cdot \sigma \quad (\text{A.34})$$

d étant une constante appelée *module piézoélectrique*. Cette équation implique que la direction de polarisation est inversée quand une contrainte de traction

est remplacée par une compression de même intensité.

Si la contrainte σ_{ij} s'exerce sur un cristal piézoélectrique, chaque composante de la polarisation P_i est liée linéairement à toutes les composantes de σ_{ij} . En appliquant la convention d'EINSTEIN, nous obtenons l'expression générale entre P_i et σ_{ij} :

$$P_i = d_{ijk} \cdot \sigma_{jk} \quad (\text{A.35})$$

où les d_{ijk} sont les modules piézoélectriques.

Comme le tenseur des contraintes σ_{ij} est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), le tenseur des modules piézoélectriques a la propriété suivante : $d_{ijk} = d_{ikj}$.

A.5.2 Effet piézoélectrique inverse

La forme d'un cristal piézoélectrique est légèrement modifiée par l'application d'un champ électrique. C'est l'**effet piézoélectrique inverse** ; son existence est une conséquence thermodynamique de l'effet direct. Il existe une relation linéaire entre les composantes du vecteur E_i , intensité du champ électrique dans le cristal et les composantes du tenseur des déformations ε_{ij} qui caractérisent les modifications de la forme du cristal. Bien plus, les coefficients liant le champ et la déformation dans l'effet inverse sont les mêmes que ceux qui lient la contrainte et la polarisation dans l'effet direct :

$$\varepsilon_{jk} = d_{ijk} \cdot E_i \quad (\text{A.36})$$

A.5.3 Réduction du nombre de modules indépendants par la notation matricielle et par la symétrie du cristal

A.5.3.1 Notation matricielle

Un tenseur de rang 3 possède $3^3 = 27$ composantes indépendantes. Sous forme développée, ces composantes ne forment pas une matrice carrée, comme dans le cas d'un tenseur de rang 2, mais un ensemble à 3 dimensions ayant la forme d'un cube. Si le premier indice des d_{ijk} désigne la couche dans laquelle se trouve ces composantes particulières, le second indice la ligne et le troisième la colonne, les 3 couches de coefficients sont :

Comme d_{ijk} est symétrique en j et en k , les coefficients placés entre parenthèses dépendent des coefficients composant la partie triangulaire supérieure des trois matrices ; il reste donc 18 coefficients d_{ijk} indépendants, ce qui permet l'utilisation d'une notation plus concise : *la notation matricielle*.

La notation tensorielle est la seule façon de mettre en évidence le caractère

couche ($i = 1$)			couche ($i = 2$)			couche ($i = 3$)		
d_{111}	d_{112}	d_{113}	d_{211}	d_{212}	d_{213}	d_{311}	d_{312}	d_{313}
(d_{121})	d_{122}	d_{123}	(d_{221})	d_{222}	d_{223}	(d_{321})	d_{322}	d_{323}
(d_{131})	(d_{132})	d_{133}	(d_{231})	(d_{232})	d_{233}	(d_{331})	(d_{332})	d_{333}

Tableau A.2 – tenseur d_{ijk}

exacte des équations, et en particulier, leur propriétés de transformation. Mais pour résoudre des problèmes particuliers, il est avantageux de réduire autant que possible le nombre des indices. On y parvient par la notation matricielle, en définissant de nouveaux symboles d_{ij} . Avec ces nouveaux symboles, le tableau (A.2) prend la forme du tableau (A.3) : ainsi, par exemple, $d_{21} = d_{211}$ et $d_{14} = 2.d_{123}$.

couche ($i = 1$)			couche ($i = 2$)			couche ($i = 3$)		
d_{11}	$\frac{1}{2}d_{16}$	$\frac{1}{2}d_{15}$	d_{21}	$\frac{1}{2}d_{26}$	$\frac{1}{2}d_{25}$	d_{31}	$\frac{1}{2}d_{36}$	$\frac{1}{2}d_{35}$
$\times$	d_{12}	$\frac{1}{2}d_{14}$	$\times$	d_{22}	$\frac{1}{2}d_{24}$	$\times$	d_{32}	$\frac{1}{2}d_{34}$
$\times$	$\times$	d_{13}	$\times$	$\times$	d_{23}	$\times$	$\times$	d_{33}

Tableau A.3 – matrice d_{ij}

Dans les deux notations, le premier indice est le même mais le second et le troisième indice de la notation tensorielle sont remplacés par un indice compris entre 1 et 6, selon la correspondance suivante :

Notation tensorielle :	11	22	33	23 et 32	31 et 13	12 et 21
Notation matricielle :	1	2	3	4	5	6

Tableau A.4 – conversion des indices

Les deux derniers indices de la notation tensorielle correspondent à ceux des composantes de contrainte ; pour plus de logique, il faut effectuer, dans la notation des composantes de contrainte, le changement suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Dans la nouvelle notation, l'équation de l'effet piézoélectrique prend la forme :

$$P_i = d_{ij} \cdot \sigma_j \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{A.38})$$

On fait parfois des confusions concernant les coefficients $\frac{1}{2}$ qui entrent dans la définition des d_{ij} . L'introduction dans le tableau (A.3) de ces facteurs a pour but d'éviter l'apparition de facteurs 2 dans les 3 derniers termes de l'équation (A.38). Il est impossible d'éviter qu'ils apparaissent à une place ou à une autre, il est cependant plus logique d'introduire ces facteurs $\frac{1}{2}$ lorsqu'on fait appel à la symétrie du tenseur pour en simplifier son écriture.

Pour écrire l'équation tensorielle de l'effet piézoélectrique inverse en notation matricielle, il faut utiliser les composantes de déformation à un indice :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

L'équation de l'effet piézoélectrique inverse s'écrit alors :

$$\varepsilon_j = d_{ij} \cdot E_i \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{A.40})$$

La présence des facteurs ($\frac{1}{2}$) étant admise dans la définition des d_{ij} , il faut l'admettre dans la définition des ε_{ij} , s'il n'en était pas ainsi, quelques termes de l'équation (A.40) auraient le coefficient ($\frac{1}{2}$); cette équation ne pourrait donc pas être considérée comme une somme de termes semblables et on perdrait l'intérêt de la notation indicielle.

Remarquons que grâce à l'introduction des facteurs ($\frac{1}{2}$), les composantes ε_4 , ε_5 et ε_6 sont les composantes exactes de déformation de cisaillement. La matrice des d_{ij} développée est une matrice dont les lignes correspondent aux couches de la disposition tensorielle d_{ijk} :

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

La notation matricielle a l'avantage d'être plus condensée que la notation tensorielle, elle rend facile l'écriture des coefficients et c'est pour cette raison qu'on l'utilise; cependant, il faut se souvenir qu'en dépit des apparences, les d_{ij} ne se transforment pas comme les composantes d'un tenseur de rang 2.

A.5.3.2 Symétrie du cristal

Si un cristal possède des éléments de symétrie, le nombre des modules piézoélectriques indépendants se trouve réduit. Il existe une méthode analytique qui permet de réduire le nombre de modules piézoélectriques indépendants.

Cette méthode consiste à transformer les axes de référence du tenseur selon l'un des éléments de symétrie du cristal : les coefficients correspondant à l'effet piézoélectrique doivent être les mêmes avant et après la transformation.

Centre de symétrie

Considérons un cristal possédant un centre de symétrie, la matrice de transformation est $a_{ij} = -\delta_{ij}$, les modules piézoélectriques transformés deviennent :

$$d'_{ijk} = a_{il}.a_{jm}.a_{kn}.d_{lmn} = -\delta_{il}.(-\delta_{jm}).(-\delta_{kn}).d_{lmn} = -d_{ijk} \quad (\text{A.42})$$

Pour que l'égalité soit respectée, il faut que $d_{ijk} = 0$ càd que le matériau soit non piézoélectrique, ce qui est bien conforme à la réalité.

Les raisonnements ne sont pas toujours aussi simples pour les autres opérations de symétrie mais l'utilisation du formalisme de FUMI permet une systématisation de ce raisonnement. Nous ferons mieux comprendre cette méthode en reprenant l'exemple d'un centre de symétrie et en développant complètement le calcul des modules avec la nouvelle notation.

Une symétrie centrale opérée sur les axes de référence est représentée par les transformations $(x_1 \rightarrow -x_1, x_2 \rightarrow -x_2, x_3 \rightarrow -x_3)$. Ces expressions représentent la transformation d'un point quelconque de coordonnées (x_1, x_2, x_3) en un point de coordonnées $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Comme les composantes d'un tenseur se transforment comme les produits de coordonnées correspondantes, d_{122} , par exemple, se transforme comme le produit $x_1.x_2^2$, en effectuant la substitution, $x_1.x_2^2$ se transforme en $-x_1.x_2^2$, donc d_{122} devient $-d_{122}$. Comme dans un cristal possédant un centre de symétrie, la transformation ne doit pas modifier les composantes, d_{122} doit se transformer en lui-même et $d_{122} = -d_{122} = 0$. Le même raisonnement s'applique aux autres composantes et nous aboutissons au résultat général : $d_{ijk} = 0$.

Axe binaire

Pour préciser l'emploi de cette méthode, nous allons considérer l'effet sur les modules piézoélectriques d'un axe binaire parallèle à ox_3 . La transformation est $(x_1 \rightarrow -x_1, x_2 \rightarrow -x_2, x_3 \rightarrow x_3)$. Nous devons maintenant prendre les modules un par un et leur appliquer la transformation. Si le signe change, le module doit être nul, si le signe reste le même, le module est conservé. Par exemple, $d_{133} \rightarrow -d_{133}$ donc $d_{133} = 0$, mais $d_{123} \rightarrow d_{123}$ donc d_{123} est conservé. Finalement, la matrice d_{ij} représentant le tenseur d_{ijk} en notation matricielle devient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}$$

A.6 L'élasticité : tenseur de rang 4

A.6.1 Loi de HOOKE

Un corps solide soumis à une contrainte se déforme. Si la contrainte est inférieure à une certaine valeur limite, la *limite d'élasticité*, la déformation est réversible : le corps reprend sa forme initiale si on supprime la contrainte. De plus, pour une contrainte suffisamment faible, l'importance de la déformation est proportionnelle à la grandeur de la contrainte appliquée : dans un barreau solide isotrope soumis à une contrainte σ en traction pure, la déformation longitudinale vaut $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ où Δl est l'augmentation de longueur et l la longueur initiale. La loi de HOOKE s'écrit :

$$\varepsilon = s \cdot \sigma \quad (\text{A.43})$$

s étant une constante appelée *coefficient d'élasticité* ou *souplesse élastique* et réciproquement :

$$\sigma = c \cdot \varepsilon \quad (\text{A.44})$$

où $c = \frac{1}{s}$ est la *constante de rigidité élastique* ou *module d'élasticité de YOUNG*. Nous pouvons généraliser ces notions au cas d'une contrainte homogène entraînant une déformation homogène et inversement. Si on applique à un cristal une contrainte σ_{ij} , la déformation homogène ε_{ij} qui en résulte est telle que chaque composante est liée aux composantes de la contrainte par une relation linéaire. On obtient alors la forme généralisée de la loi de HOOKE :

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (\text{A.45})$$

où les s_{ijkl} sont les 81 coefficients d'élasticité ; et de même pour la relation réciproque :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.46})$$

où les c_{ijkl} sont les 81 coefficients de rigidité élastique.

Comme le tenseur des contraintes σ_{kl} est symétrique ($\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$), il est évident que le tenseur de souplesse élastique s_{ijkl} a la propriété suivante ($s_{ijkl} = s_{ijlk}$). De même, comme le tenseur des déformations ε_{ij} est également symétrique,

on a que ($s_{ijkl} = s_{jikl}$) et donc seulement 36 des 81 composantes de s_{ijkl} sont indépendantes.

Ce raisonnement est également valable pour le tenseur c_{ijkl} : $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ et $c_{ijkl} = c_{jikl}$, ce qui réduit également le nombre de coefficients indépendants de 81 à 36.

A.6.2 Notation matricielle

Comme, en ce qui concerne leurs deux premiers et deux derniers indices, les tenseurs s_{ijkl} et c_{ijkl} sont symétriques, la notation matricielle est applicable, les composantes de contrainte σ_{ij} ainsi que les composantes de déformation ε_{ij} sont écrites avec un indice allant de 1 à 6 :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

Dans les s_{ijkl} et les c_{ijkl} , les deux premiers et les deux derniers indices sont résumés en un seul variant de 1 à 6. Le tableau (A.4) donne la correspondance des indices entre la notation tensorielle et la notation matricielle. On introduit en même temps des facteurs 2 et 4 comme suit :

- $s_{ijkl} = s_{mn}$ quand m et n valent 1, 2 ou 3
- $2s_{ijkl} = s_{mn}$ quand m ou n valent 4, 5 ou 6
- $4s_{ijkl} = s_{mn}$ quand m et n valent 4, 5 ou 6

On obtient donc l'équation de HOOKE sous sa forme abrégée :

$$\varepsilon_i = s_{ij} \cdot \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{A.49})$$

L'introduction de facteurs 2 et 4 dans les définitions des s_{ij} a pour but d'éviter l'apparition de facteurs 2 ou 4 dans les équations de la forme abrégée, ce qui permet d'écrire ces équations sous formes condensées en utilisant la convention des indices muets.

Pour les c_{ijkl} , les facteurs 2 et 4 ne sont pas nécessaires, nous écrivons simplement $c_{ijkl} = c_{mn}$ où $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$ et $(m, n = 1, 2, \dots, 6)$.

D'après leur développement complet, les équations de la réciproque de la loi de HOOKE prennent la forme :

$$\sigma_i = c_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{A.50})$$

Remarques

- En dépit des apparences, les c_{ij} et les s_{ij} à deux indices ne sont pas les composantes d'un tenseur de rang 2 et ne se transforment pas comme telles, il est donc nécessaire de revenir d'abord à la notation tensorielle avant de les transformer pour exprimer ces propriétés physiques dans un autre système d'axes.
- Tout comme les composantes s_{ijkl} et c_{ijkl} , certaines composantes s_{ij} et c_{ij} peuvent s'annuler pour des raisons de symétrie du cristal.

A.6.3 Compressibilité en volume, compressibilité linéaire d'un cristal

Compressibilité en volume

Calculons la diminution relative de volume d'un cristal soumis à une pression hydrostatique de valeur unité, càd : sa compressibilité en volume. Posons $\sigma_{kl} = -p\delta_{kl}$ d'où $\varepsilon_{ij} = -ps_{ijkl}\delta_{kl} = -ps_{ijkk}$. Pour la dilatation, $\Delta = \varepsilon_{ii} = -ps_{iikk}$. La compressibilité en volume ($\frac{-\Delta}{p}$) est donc s_{iikk} : nous trouvons un exemple d'invariant formé à partir d'un tenseur. Cette expression exprimée sous sa forme développée vaut : $s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{23} + s_{31})$, elle est la somme des 9 coefficients du triangle supérieur de la matrice des élasticités.

Compressibilité linéaire

La compressibilité linéaire d'un cristal est la diminution de la longueur d'un segment de droite lorsqu'on soumet ce cristal à une pression hydrostatique égale à l'unité. Elle dépend en général de la direction ; sous l'effet de la pression p , l'allongement d'un segment de droite dans la direction du vecteur unitaire l_i est $\varepsilon_{ij}.l_i.l_j = -ps_{ijkk}.l_i.l_j$ et donc, la compressibilité linéaire est $\beta = s_{ijkk}.l_i.l_j$.

A.7 Thermodynamique des propriétés statiques des cristaux

Dans les sections précédentes, nous avons étudié les propriétés thermiques, électriques et mécaniques des cristaux, en traitant séparément chacune d'entre elles. En réalité, ces propriétés sont liées, elles se rapportent toutes à un état

d'équilibre. Il est donc possible de les quantifier dans un cristal en équilibre avec ce qui l'entoure, sans que l'état du cristal ni celui de ce qui l'entoure ne se modifient dans le temps. Autrement dit, ces propriétés se traduisent par des transformations thermodynamiques réversibles.

A.7.1 Propriétés thermiques, électriques et mécaniques d'un cristal

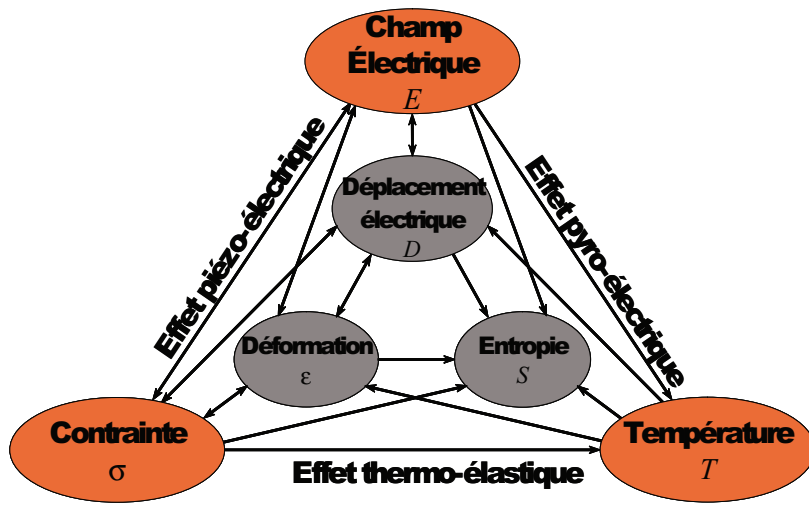


Figure A.1 – Thermodynamique des propriétés des cristaux piézoélectriques

La figure (A.1) schématise les relations qui lient les propriétés présentes dans les matériaux piézoélectriques. Aux trois sommets sont portés la température T , le champ électrique E_i et la contrainte σ_{ij} , que l'on considère généralement comme les actions appliquées au cristal. Les trois sommets du triangle intérieur portent l'entropie S par unité de volume, le déplacement diélectrique D_i et la déformation ϵ_{ij} , qui représentent respectivement les effets directs de ces actions. Les relations liant ces grandeurs représentées par les droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles sont appelées les trois effets principaux :

- un accroissement de température produit, dans une transformation réversible, une augmentation de l'entropie par unité de volume : $dS = \frac{C_T}{T} dT$, où C_T est la capacité calorifique de l'unité de volume et T , la température absolue ;

- une variation dE_j du champ électrique entraîne une variation dD_i du déplacement électrique : $dD_i = \Xi_{ij}.dE_j$, où Ξ_{ij} est le tenseur de permittivité absolue du matériau ;
- une variation de la contrainte $d\sigma_{kl}$ produit une variation de déformation $d\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}.d\sigma_{kl}$, où s_{ijkl} est le tenseur des souplesses élastiques.

A côté des effets directs, il existe des effets couplés, ils sont représentés sur la figure par des droites joignant deux sommets non placés dans le même coin. Ces effets couplés appartiennent à trois catégories distinctes :

- les effets électrothermiques liés au phénomène de pyroélectricité ;
- les effets électromécaniques liés au phénomène de piézoélectricité ;
- les effets thermoélastiques.

Dans chacune de ces catégories, on peut distinguer plusieurs effets.

1. Parmi les effets électromécaniques, on distingue :
 - l'effet piézoélectrique direct,
 - l'effet piézoélectrique inverse.
2. Parmi les effets électrothermiques, on distingue :
 - l'effet électrocalorifique : l'entropie (chaleur) engendrée par un champ électrique,
 - la chaleur de polarisation : l'entropie engendrée par déplacement électrique,
 - l'effet pyroélectrique : la polarisation du matériau due à une variation de température.
3. Parmi les effets thermoélastiques, on distingue :
 - la chaleur de déformation : l'entropie produite par la déformation,
 - l'effet piézocalorifique : l'entropie produite par la contrainte,
 - la dilatation thermique : la déformation produite par un changement de température,
 - la pression thermique : la modification de température sans déformation entraîne une variation de la contrainte appliquée au cristal.

Les quatre derniers effets couplés, représentant les effets thermoélastiques, lient des scalaires à des tenseurs de rang 2 et sont donc eux-mêmes représentés par des tenseurs de rang 2. Ainsi, par exemple, pour la dilatation thermique, on obtient la relation ($d\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}dT$) où α_{ij} est le tenseur des dilatations thermiques.

Pour les effets couplés relatifs à la piézoélectricité, on procède de manière similaire. Sous forme différentielle, l'effet direct est donné par :

$$dP_i = d_{ijk}.d\sigma_{jk} \quad (\text{A.51})$$

Or $D_i = \chi_0 E_i + P_i$, d'où $dP_i = dD_i - \chi_0 dE_i$ et si on maintient constant le champ électrique dans le cristal, $dD_i = dP_i$ et donc :

$$dD_i^E = d_{ijk}^E \cdot d\sigma_{jk}^E \quad (\text{A.52})$$

Pour exprimer l'effet direct, nous pouvons utiliser l'une ou l'autre des équations (A.51) et (A.52) représentant ainsi 2 des 4 relations possibles susceptibles d'être choisies pour étudier les interactions du champ électrique, du déplacement électrique, des contraintes et des déformations dans les cristaux piézoélectriques. Les deux autres relations représentent l'effet piézoélectrique inverse et concernent, de manière similaire, la déformation et le déplacement électrique, d'une part, la déformation et le champ électrique d'autre part. Ces effets couplés lient des tenseurs de rang 1 (E_i ou D_i) à des tenseurs de rang 2 (σ_{ij} ou ε_{ij}), ils sont donc eux-mêmes représentés par des tenseurs de rang 3 (d_{ijk}). Les effets couplés représentant les effets électrothermiques lient un vecteur (D_i ou E_i) à un scalaire (S ou T) et s'expriment donc par des tenseurs de rang 1. Parmi ces relations, on distingue l'effet pyroélectrique ($dP_i = p_i dT$) qui devient, si le champ électrique est maintenu constant, lors de la variation de température :

$$dD_i^E = p_i^E dT^E \quad (\text{A.53})$$

L'effet pyroélectrique à champ constant peut ainsi être considéré comme une polarisation ou comme un déplacement électrique produit par une variation de température.

Toutes les propriétés cristallines sont liées les unes aux autres. Pour étudier leurs interactions, il est nécessaire de préciser strictement les conditions expérimentales. Les élasticités, par exemple, peuvent être mesurées dans des conditions isothermes ou adiabatiques ; dans les deux cas, leurs valeurs numériques sont différentes. De même, la chaleur spécifique d'un cristal devrait être mesurée à contrainte constante (nulle), mais dans certains cas, on accepte aussi bien une mesure à déformation constante ; on arriverait, dans de telles conditions, à des valeurs légèrement différentes.

Les phénomènes de pyroélectricité primaire et secondaire fournissent un exemple d'interaction forte entre diverses propriétés cristallines. Si on modifie la température, un courant électrique prend naissance par effet pyroélectrique dans la direction directe ($T \rightarrow D$) mais d'autres voies sont possibles. ($T \rightarrow \varepsilon \rightarrow D$), par exemple, provoquerait un courant par effets couplés de la dilatation thermique et de la piézoélectricité. Cette voie est ouverte ou non selon que le cristal est ou non déformable.

Ces exemples prouvent qu'il faut considérer, dans leur ensemble, les propriétés

thermiques, électriques et mécaniques. La compréhension de leurs interactions découle de leur étude thermodynamique. Cette étude conduit à formuler ces propriétés d'une façon plus précise et fournit de nouvelles relations entre les coefficients qui définissent ces propriétés.

A.7.2 Etude thermodynamique des effets thermoélastiques

Introduisons la méthode d'analyse thermodynamique par l'étude d'un exemple simple, un cristal qui ne présente ni l'effet piézoélectrique ni l'effet pyroélectrique (un cristal ayant un centre de symétrie) et intéressons-nous à son comportement thermoélastique. Prenons, pour variables indépendantes, les 9 composantes de contrainte σ_{ij} et la température T ; l'état du cristal, et en particulier les composantes de déformation ε_{ij} et l'entropie S , est déterminé lorsqu'on se donne les quantités σ_{ij} et T . Il serait également possible de prendre comme variables les 10 quantités (ε_{ij}, S) ou (σ_{ij}, S) ou même (ε_{ij}, T) . Pour un volume unité, nous pouvons écrire les fonctions ε_{ij} et S des variables indépendantes σ_{ij} et T :

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T . d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma dT \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{A.54})$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T . d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma dT \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{A.55})$$

La différentiation par rapport à chaque composante de contrainte est faite en supposant constantes toutes les autres composantes de contrainte et la température. Dans le symbole $\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma$, l'indice σ indique que, dans la différentiation par rapport à T , on doit considérer tous les σ_{ij} comme constants.

Les 4 dérivées partielles des équations (A.54) et (A.55) présentent une signification physique :

- $\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T$ sont les souplesses élastiques isothermes s_{ijkl}^T (les lettres en exposant désignent toujours la quantité qui doit rester constante);
- $\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma$ sont les coefficients de dilatations thermiques mesurés sous une contrainte constante α_{ij}^σ ;
- $\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T$ mesure l'accroissement d'entropie produit par des contraintes isothermes; multiplié par T , il donne la quantité de chaleur produite quand le cristal est soumis à des contraintes isothermes : c'est l'effet piézocalorifique;

- $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\sigma$ est la capacité calorifique par unité de volume, à contraintes constantes C^σ ; multiplié par T , il donne la chaleur dégagée lorsque la température varie mais que la contrainte est maintenue constante.

Les interactions entre ces 4 effets font que les 4 coefficients différentiels des équations (A.54) et (A.55) ne sont pas indépendants. Afin d'obtenir les relations qui les lient, nous allons réaliser le bilan d'énergie du système. Pour un volume unité et d'après le premier principe de la thermodynamique, si le cristal reçoit une petite quantité de chaleur dQ et est soumis au travail élémentaire dW dû à des forces extérieures, l'accroissement dU de l'énergie interne est une différentielle exacte donnée par :

$$dU = dW + dQ \quad (\text{A.56})$$

- Par unité de volume, le travail dû à une petite modification $d\varepsilon_{ij}$ des déformations est :

$$dW = \sigma_{ij}.d\varepsilon_{ij} \quad (\text{A.57})$$

- D'après le second principe de thermodynamique et pour une transformation réversible :

$$dQ = TdS \quad (\text{A.58})$$

L'équation (A.56) devient :

$$dU = \sigma_{ij}.d\varepsilon_{ij} + TdS \quad (\text{A.59})$$

Nous posons la fonction Φ définie par $\Phi = U - \sigma_{ij}.\varepsilon_{ij} - TS$, imposant de ce fait comme condition initiale $\Phi = 0$ car nous supposons que U , S et ε_{ij} sont simultanément nuls quand le cristal est placé dans sa condition initiale. Nous pouvons le faire dans l'étude d'équations d'états car les équations (A.56), (A.57) et (A.58) ne donnent que les variations de U , S et ε_{ij} entre deux états distincts ; chacune de ces quantités contient une constante arbitraire définissant l'énergie interne, l'entropie ou la déformation initiale correspondant à un certain état zéro (qui peut être précisé en fonction des contraintes et de la température). Pour donner un sens précis à U , S et ε_{ij} , nous posons que l'état initial est le même pour ces trois quantités et que dans cet état, elles sont toutes trois nulles. Par différentiation, Φ devient :

$$d\Phi = dU - \sigma_{ij}.d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}.d\sigma_{ij} - TdS - SdT \quad (\text{A.60})$$

et en combinant avec l'équation (A.59) :

$$d\Phi = -\varepsilon_{ij}.d\sigma_{ij} - SdT \quad (\text{A.61})$$

Comme, par définition, la fonction Φ est une combinaison linéaire de fonctions d'états dont les variables sont σ_{ij} et T , Φ est elle-même une fonction d'état de variables σ_{ij} et T , donc :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T = -\varepsilon_{ij} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_\sigma = -S \quad (\text{A.62})$$

Différentions la première de ces équations par rapport à T et la seconde par rapport à σ_{ij} , l'ordre de différentiation étant sans importance puisque Φ est une fonction d'état, nous obtenons la relation thermodynamique importante :

$$-\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{ij} \partial T} \right) = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma = \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T \quad (\text{A.63})$$

Nous avons établi une relation liant les coefficients de dilatation thermique aux coefficients caractérisant l'effet piézocalorifique.

Remarque

Les équations (A.54) et (A.55) restent valables que les 4 propriétés du cristal soient linéaires ou non. Ces propriétés pourront cependant être linéarisées pour une variation suffisamment petite des variables, donc pour de petites variations des contraintes et de la température (effets du premier ordre).

L'intégration et la linéarisation des équations (A.54) et (A.55) donne :

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^T \cdot \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T \quad (\text{A.64})$$

$$\Delta S = \alpha_{ij} \cdot \sigma_{ij} + \frac{C^\sigma}{T} \Delta T \quad (\text{A.65})$$

Les coefficients étant des constantes, on pose $\Delta S = \varepsilon_{ij} = 0$ pour $\sigma_{kl} = \Delta T = 0$. Dans la notation matricielle, les équations (A.64) et (A.65) prennent la forme simplifiée :

$$\varepsilon_i = s_{ij}^T \cdot \sigma_j + \alpha_i \Delta T \quad (\text{A.66})$$

$$\Delta S = \alpha_j \cdot \sigma_j + \frac{C^\sigma}{T} \Delta T \quad (\text{A.67})$$

On peut représenter également les matrices, simplement par des lettres et les équations (A.66) et (A.67) deviennent :

$$\varepsilon = s^T \cdot \sigma + \alpha \Delta T \quad (\text{A.68})$$

$$\Delta S = \alpha \cdot \sigma + \frac{C^\sigma}{T} \Delta T \quad (\text{A.69})$$

Relation entre les élasticités isothermes et adiabatiques

On peut obtenir la différence des élasticités mesurées adiabatiquement et de manière isotherme en éliminant dT entre les équations (A.54) et (A.55), et en posant $dS = 0$ (transformation adiabatique). Il vient :

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T \cdot d\sigma_{kl} - \frac{\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T \cdot d\sigma_{kl}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma} \quad (\text{A.70})$$

Nous divisons par $d\sigma_{kl}$ et sachant que $\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma = \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T$, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_S - \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_T = - \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma \left(\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial T} \right)_\sigma \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\sigma \quad (\text{A.71})$$

qui, lorsqu'elle est linéarisée, devient :

$$s_{ijkl}^S - s_{ijkl}^T = -\alpha_{ij} \cdot \alpha_{kl} \frac{T}{C^\sigma} \quad (\text{A.72})$$

Les cristaux ont habituellement (mais pas toujours) des coefficients de dilatation positifs ; C^σ est positif et donc le second membre est habituellement négatif. Les élasticités adiabatiques sont donc plus petites que les élasticités isothermes, ce que l'on peut interpréter ainsi : dans une expérience adiabatique, une contrainte de traction produit une chute de température, donc une diminution de la déformation. La déformation totale produite par la contrainte est plus petite qu'elle ne le serait dans une expérience isotherme.

De même, on peut trouver de façon analogue l'expression qui donne la différence entre les capacités calorifiques à déformation constante ou à contrainte constante.

A.7.3 Thermodynamique des propriétés thermiques, électriques et mécaniques

Nous prenons comme variables indépendantes (σ_{ij}, E_i, T) , les fonctions des ces variables $(\varepsilon_{ij}, D_i, S)$ étant des fonctions d'état, leurs différentielles s'écrivent :

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{E,T} \cdot d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_k} \right)_{\sigma,T} \cdot dE_k + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_{\sigma,E} dT \quad (\text{A.73})$$

$$dD_i = \left(\frac{\partial D_i}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{E,T} .d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_{\sigma,T} .dE_k + \left(\frac{\partial D_i}{\partial T} \right)_{\sigma,E} dT \quad (\text{A.74})$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{E,T} .d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial S}{\partial E_k} \right)_{\sigma,T} .dE_k + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\sigma,E} dT \quad (\text{A.75})$$

Il y a $9 + 3 + 1 = 13$ équations, dont chacune possède $9 + 3 + 1 = 13$ termes. Chaque coefficient différentiel constitue la quantification d'un effet physique ; les coefficients de la diagonale principale mesurent les effets principaux, les autres mesurent les effets couplés.

Etablissement des relations thermodynamiques liant les coefficients de ces 3 équations

Les relations (A.73), (A.74) et (A.75) sont réversibles ; le premier et second principe de la thermodynamique permettent d'écrire que l'énergie interne du système est égale à la somme des travaux mécanique, électrique et thermique que le système est capable de fournir :

$$dU = \sigma_{ij} .d\varepsilon_{ij} + E_i .dD_i + TdS \quad (\text{A.76})$$

Il est plus commode de résoudre le problème en passant par la fonction d'enthalpie libre de GIBBS qui donne directement l'évolution générale de l'énergie totale d'un système :

$$\Phi = U - \sigma_{ij} .\varepsilon_{ij} - E_i .D_i - TS \quad (\text{A.77})$$

et nous obtenons en différentiant Φ et en décomposant dU par l'équation (A.76) :

$$d\Phi = -\varepsilon_{ij} .d\sigma_{ij} - D_i .dE_i - SdT \quad (\text{A.78})$$

(Le but visé par l'introduction de la fonction Φ est d'exprimer toutes les relations thermodynamiques au travers d'une même fonction dont les variables d'états σ_{ij}, E_i, T sont les mêmes que pour les équations (A.73), (A.74) et (A.75).)

Comme dans (A.77), toutes les grandeurs sont fonctions des variables d'états (σ_{ij}, E_i, T) , qui définissent complètement l'état du système, Φ est aussi une fonction d'état des variables (σ_{ij}, E_i, T) et nous pouvons écrire :

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{E,T} .d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial E_i} \right)_{\sigma,T} .dE_i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\sigma,E} dT \quad (\text{A.79})$$

En identifiant les coefficients respectifs des équations (A.79) et (A.78), nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}\right)_{E,T} = -\varepsilon_{ij} \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial E_i}\right)_{\sigma,T} = -D_i \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{\sigma,E} = -S \quad (\text{A.80})$$

- En différentiant la première de ces équations par rapport à E_k et la seconde par rapport à σ_{ij} , on obtient :

$$-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma_{ij}\partial E_k}\right)_T = \left(\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial E_k}\right)_{\sigma,T} = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial E_k\partial\sigma_{ij}}\right)_T = \left(\frac{\partial D_k}{\partial\sigma_{ij}}\right)_{E,T} = d_{kij}^T \quad (\text{A.81})$$

- En différentiant la première de ces équations par rapport à T et la troisième par rapport à σ_{ij} , on obtient :

$$-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma_{ij}\partial T}\right)_E = \left(\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial T}\right)_{\sigma,E} = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial T\partial\sigma_{ij}}\right)_E = \left(\frac{\partial S}{\partial\sigma_{ij}}\right)_{E,T} = \alpha_{ij}^E \quad (\text{A.82})$$

- En différentiant la seconde de ces équations par rapport à T et la troisième par rapport à E_i , on obtient :

$$-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial E_i\partial T}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial D_i}{\partial T}\right)_{\sigma,E} = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial T\partial E_i}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial S}{\partial E_i}\right)_{\sigma,T} = p_i^\sigma \quad (\text{A.83})$$

Les relations (A.81), (A.82) et (A.83) établissent que la matrice des coefficients du second membre des équations (A.73), (A.74) et (A.75) est symétrique par rapport à sa diagonale principale, càd :

1. les coefficients de l'effet piézoélectrique inverse sont numériquement égaux aux coefficients de l'effet direct ;
2. les coefficients de dilatation thermique sont les mêmes que ceux de l'effet piézocalorifique ;
3. les coefficients de l'effet pyroélectrique sont les mêmes que ceux de l'effet électrocalorifique.

Après intégration et linéarisation, les équations (A.73), (A.74) et (A.75) prennent la forme :

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^{E,T} \cdot \sigma_{kl} + d_{kij}^T \cdot E_k + \alpha_{ij}^E \Delta T \quad (\text{A.84})$$

$$D_i = d_{ijk}^T \cdot \sigma_{jk} + \Xi_{ij}^{\sigma,T} \cdot E_j + p_i^\sigma \Delta T \quad (\text{A.85})$$

$$\Delta S = \alpha_{ij}^E \cdot \sigma_{ij} + p_i^\sigma \cdot E_i + \frac{C^{\sigma,E}}{T} \Delta T \quad (\text{A.86})$$

Dans ces équations, ε_{ij} et D_i sont rapportés à des valeurs correspondant à des contraintes et champs électriques donnés et avant tout changement de température.

A.7.4 Relations entre les coefficients mesurés dans des conditions différentes

Les élasticités dans les conditions isothermes et adiabatiques sont différentes (cf. section A.7.2). Il existe des différences analogues entre différents coefficients qui interviennent dans la physique des cristaux. Par exemple, pour définir complètement les élasticités, il est nécessaire de préciser les conditions thermiques (à S constante ou à T constante) mais aussi les conditions électriques : on peut choisir E constant ou D constant. De même, la capacité calorifique d'un cristal dépend à la fois des conditions mécaniques et des conditions électriques dans lesquelles sont faites les mesures ; elles dépendent aussi de la manière dont peuvent varier E_i , D_i , σ_{ij} et ε_{ij} .

Nous allons essentiellement nous intéresser aux conditions suivantes :

- T constante (transformation isotherme) : cette condition est réalisée dans une expérience d'évolution assez lente pour que le cristal soit à chaque instant en équilibre thermique avec ce qui l'entoure ;
- S constante (transformation adiabatique) : il n'y a pas d'échange de chaleur entre le cristal et l'extérieur, c'est le cas lorsqu'un cristal est en vibrations élastiques (les transformations sont assez rapides pour que tout échange de chaleur entre les différentes parties du cristal soit très faible ;
- E constant : E est nul si on maintient au même potentiel toute la surface du cristal. Pour ($E = 0$), on dit que le cristal est électriquement libre, par analogie avec l'état mécaniquement libre ;
- D constant : si D est constant, ($dD = \chi_0 dE + dP = 0$), toute variation de polarisation P due aux effets piézoélectriques ou pyroélectriques doit être équilibrée par une variation égale en valeur absolue mais opposée à $(\chi_0 E)$. D'une façon générale, pour ($D = 0$), on dit que le cristal est électriquement neutre ;
- σ constant : on obtient approximativement l'état mécaniquement libre ($\sigma_{ij} = 0$) en disposant le cristal de telle sorte que ses déformations puissent s'établir le plus librement possible ;
- ε constant : pour que les ε_{ij} soient constants, il faut appliquer un système de contraintes mécaniques tel que toutes les composantes de la déformation demeurent constantes, on peut imaginer que le cristal est entouré d'un milieu qui est en contact étroit avec sa surface et possède une ri-

gidité infinie. Pour $(\varepsilon_{ij} = 0)$, on dit que le cristal est mécaniquement indéformable.

A.7.4.1 Effets principaux

Les expressions qui suivent traduisent comment les conditions expérimentales modifient les coefficients caractéristiques des effets principaux. D'après la figure (A.1), toutes les expressions ont essentiellement la même forme : toute expression qui fait intervenir les quantités associées aux sommets du triangle possède une expression corrélative pour chacun des deux autres sommets. Si on a obtenu une telle expression, on peut, par simple examen de la figure (A.1), en déduire les deux autres à l'exception de l'ordre des indices.

1. *Elasticités isotherme et adiabatique (à champ E constant) :*

$$s_{ijkl}^S - s_{ijkl}^T = -\alpha_{ij} \cdot \alpha_{kl} \frac{T}{C_\sigma} \quad (E = \text{constante}) \quad (\text{A.87})$$

On peut considérer que le terme de droite de l'équation est la composante thermoélastique de l'élasticité.

2. *Elasticités électriquement libre et électriquement neutre (isothermes) :*

$$s_{ijkl}^D - s_{ijkl}^E = -d_{mij} \cdot d_{nkl} \cdot \beta_{mn}^\sigma \quad (T = \text{constante}) \quad (\text{A.88})$$

Le terme de droite est la composante piézoélectrique de l'élasticité.

3. *Perméabilités fixe et libre (isothermes) :*

$$\Xi_{ij}^\varepsilon - \Xi_{ij}^\sigma = -d_{ikl} \cdot d_{jmn} \cdot c_{klmn}^E \quad (T = \text{constante}) \quad (\text{A.89})$$

Le terme de droite est la composante piézoélectrique de la perméabilité.

4. *Perméabilités isotherme et adiabatique (à contraintes constantes) :*

$$\Xi_{ij}^S - \Xi_{ij}^T = -p_i \cdot p_j \frac{T}{C_E} \quad (\sigma = \text{constante}) \quad (\text{A.90})$$

Le terme de droite est la composante pyroélectrique de la perméabilité.

5. *Capacités calorifiques électriquement neutre et électriquement libre (à contraintes constantes) :*

$$\frac{C^D - C^E}{T} = -p_i \cdot p_j \cdot \beta_{ij}^T \quad (\sigma = \text{constante}) \quad (\text{A.91})$$

Le terme de droite est la composante pyroélectrique de la capacité calorifique.

6. *Capacités calorifiques fixe et libre (à champ électrique constant) :*

$$\frac{C^\varepsilon - C^\sigma}{T} = -\alpha_{ij} \cdot \alpha_{kl} \cdot c_{ijkl}^T \quad (E = \text{constante}) \quad (\text{A.92})$$

Le terme de droite est la composante thermoélastique de la capacité calorifique.

A.7.4.2 Effets couplés

On peut obtenir des expressions analogues à celles des effets principaux pour des coefficients qui traduisent les effets couplés.

1. *Coefficients pyroélectrique et électrocalorifique à contrainte et déformation constantes :*

$$p_i^\varepsilon - p_i^\sigma = -\alpha_{jk}^E \cdot c_{jklm}^{E,T} \cdot d_{ilm}^T \quad (\text{A.93})$$

2. *Coefficients de dilatation thermique et piézocalorifique électriquement neutre et libre :*

$$\alpha_{ij}^D - \alpha_{ij}^E = -d_{kij}^T \cdot \beta_{kl}^{\sigma,T} \cdot p_l^\sigma \quad (\text{A.94})$$

3. *Coefficients piézoélectriques direct et inverse isotherme et adiabatique :*

$$d_{ijk}^S - d_{ijk}^T = -p_i^\sigma \frac{T}{C_{\sigma,E}} \alpha_{jk}^E \quad (\text{A.95})$$

A.7.4.3 Intensité des effets

L'intensité de toutes les interactions possibles entre les propriétés cristallines que nous considérons est donnée si on connaît les coefficients différentiels des équations (A.73), (A.74) et (A.75). Le tableau (A.5) résume les ordres de grandeur des coefficients à température ambiante, pour des cristaux non métalliques et non ferroélectriques, quand des raisons de symétrie ne les rendent pas obligatoirement nuls (valeurs en unités MKSA).

	σ	E	T
ε	$s = 10^{-11}$	$d = 10^{-12}$	$\alpha = 10^{-5}$
D	$d = 10^{-12}$	$\Xi = 10^{-10}$	$p = 10^{-6}$
S	$\alpha = 10^{-5}$	$p = 10^{-6}$	$\frac{C}{T} = 10^4$

Tableau A.5 – intensité des effets

Il s'agit là de valeurs très approximatives : on n'a pas tenu compte de la dispersion des valeurs des diverses composantes de chaque tenseur, ni de la

dispersion considérable des intensités des coefficients pour des cristaux différents. Par exemple, pour les cristaux ferroélectriques, les ordres de grandeur de certains coefficients sont très différents de ceux indiqués au tableau (A.5) ; de plus, certains coefficients varient très fortement en fonction de la température.

Si on se limite au calcul des ordres de grandeur, on peut opérer sur les tenseurs comme sur les scalaires. La différence relative entre les élasticités isotherme et adiabatique ($\frac{s^{S,E} - s^{T,E}}{s^{T,E}}$) est de l'ordre de grandeur ($\frac{\alpha^2 T}{C_s}$), c'est un coefficient sans dimensions qui mesure l'intensité de l'interaction thermoélastique (les racines carrées de ces types de rapports sont appelées les facteurs de couplage thermoélastique, électrothermique et électromécanique). Si on prend les valeurs numériques du tableau (A.5), le rapport est égal à 10^{-3} . Ce résultat figure dans le tableau (A.6), en même temps que d'autres différences.

Différence	Valeur relative	ordre de grandeur
$s^{S,E} - s^{T,E}$	$\frac{\alpha^2 T}{C_s}$	10^{-3}
$s^{T,D} - s^{T,E}$	$\frac{d^2 \Xi}{C_s}$	10^{-2}
$\Xi^{\varepsilon,T} - \Xi^{\sigma,T}$	$\frac{d^2}{s^2 \Xi}$	10^{-2}
$\Xi^{S,\sigma} - \Xi^{T,\sigma}$	$\frac{p^2 T}{C_s \Xi}$	10^{-5}
$C^{D,\sigma} - C^{E,\sigma}$	$\frac{p^2 T}{C_s \Xi}$	10^{-5}
$C^{\varepsilon,E} - C^{\sigma,E}$	$\frac{\alpha^2 T}{s C}$	10^{-3}
$p^{\varepsilon} - p^{\sigma}$	$\frac{d \alpha}{s C}$	1
$\alpha^D - \alpha^E$	$\frac{sp}{dp}$	10^{-2}
$d^S - d^T$	$\frac{\Xi \alpha T}{p C d}$	10^{-3}

Tableau A.6 – différences relatives

La dernière colonne du tableau (A.6) montre que les différences entre les coefficients mesurés dans des conditions différentes sont en général inférieures à $1^\circ/\circ$. On doit cependant noter que la différence entre l'effet pyroélectrique à contrainte constante et celui à déformation constante n'est pas petite : elle est de l'ordre de $100^\circ/\circ$. Cette particularité de la pyroélectricité conduit à apporter une grande attention à la pyroélectricité secondaire qui fait l'objet de la section (A.7.4.4). Il ne faut pas croire que le fait d'étudier particulièrement la pyroélectricité secondaire signifie qu'elle est différente des autres effets couplés, on pourrait aussi bien étudier les effets secondaires de la dilatation thermique ou de la piézoélectricité, si l'ordre de grandeur de ces effets l'imposait.

A.7.4.4 Pyroélectricités primaire et secondaire

Dans ce qui suit, nous supposons que E est constant. Puisque $D = f_1(\varepsilon, T)$ et $\varepsilon = f_2(\sigma, T)$, nous pouvons écrire :

$$dD = \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} \right)_T d\varepsilon + \left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\varepsilon dT \quad \text{et} \quad d\varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right)_T d\sigma + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\sigma dT \quad (\text{A.96})$$

Partant de la première équation, la valeur de $d\varepsilon$ tirée de la seconde après avoir posé $d\sigma = 0$ et en divisant ensuite par dT , on obtient :

$$\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\sigma = \left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\varepsilon + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} \right)_T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\sigma \quad (E = \text{constante}) \quad (\text{A.97})$$

Le terme $\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\sigma$ de l'équation (A.97) représente l'effet pyroélectrique à contrainte constante. C'est l'effet qui serait mesuré si le cristal était libre de changer de forme. L'équation (A.97) montre que cet effet se divise en deux composantes, représentées par les deux termes du second membre. Il y a d'abord l'effet primaire ou "effet pyroélectrique vrai" donné par $\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\varepsilon$. C'est le déplacement (ou polarisation) produit par un changement de température, la forme géométrique et le volume du cristal étant maintenus constants.

Le second terme mesure l'effet pyroélectrique secondaire ou "pseudo-pyroélectricité de seconde espèce" ; cette pyroélectricité supplémentaire est due au fait que le cristal est libre de se déformer. Cet effet supplémentaire se produit dans le sens $(T \rightarrow \varepsilon \rightarrow D)$ (figure ??). Quand le cristal est libre de se déformer, la dilatation thermique produit une déformation qui, par effet piézoélectrique dans le sens $(\varepsilon \rightarrow D)$ produit un courant de déplacement.

Si dans l'équation (A.97), on exprime $\left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} \right)_T$ sous la forme d'un produit de deux dérivées :

$$\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\sigma = \left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\varepsilon + \left(\frac{\partial D}{\partial \sigma} \right)_T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\sigma \quad (E = \text{constante}) \quad (\text{A.98})$$

qui peut s'écrire :

$$p_i^\sigma - p_i^\varepsilon = d_{ilm}^T \cdot c_{jklm}^{E,T} \cdot \alpha_{jk}^E \quad (\text{A.99})$$

Cette équation donne l'effet secondaire en fonction des coefficients piézoélectriques, de rigidité mécanique et de dilatation thermique $(T \rightarrow \varepsilon \rightarrow \sigma \rightarrow D)$. En pratique, il arrive que l'effet secondaire soit plus important que l'effet primaire ; il peut même se faire que l'effet primaire soit trop petit pour que l'on puisse l'observer. C'est $\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\sigma$ que l'on mesure normalement. Pour en déduire $\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\varepsilon$, il est nécessaire de connaître les coefficients piézoélectriques, élastiques et de dilatation thermique. $\left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_\varepsilon$ est relativement faible et une petite erreur

dans la détermination de $\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_\sigma$ peut avoir pour conséquence de masquer totalement l'effet primaire.

Tous les cristaux manifestent les effets de dilatation thermique et de thermoélasticité. Nous avons vu cependant qu'à cause de la symétrie du cristal, la pyroélectricité (primaire et secondaire) et la piézoélectricité ne peuvent exister que dans les cristaux appartenant à certaines classes. La symétrie de quelques cristaux les autorise à être piézoélectriques mais non pyroélectriques, ce qui conduit à la question suivante : qu'advient-il de la pyroélectricité secondaire qui résulte de la dilatation thermique et de la piézoélectricité ?

D'après la symétrie du cristal, elle n'existe pas, bien que cette symétrie autorise aussi bien la dilatation thermique que la piézoélectricité. Prenons le quartz α (classe 32) comme exemple : il possède trois axes binaires et une pression exercée selon l'un d'eux permet à la piézoélectricité de se manifester. Quand il est chauffé, il se dilate, les déformations étant égales selon chacun de ces axes. Ces déformations sont orientées à 120° les unes des autres, de telle sorte que tous les effets sont annulés : il n'y a donc pas d'effet pyroélectrique secondaire.

NB1 : Notons incidemment que, puisque la symétrie du quartz α lui interdit d'être pyroélectrique, ce cristal ne présente pas non plus d'effet piézoélectrique secondaire provenant des effets thermoélastique et pyroélectrique.

NB2 : Dans tous les phénomènes étudiés dans ce chapitre, on suppose que l'état du cristal est le même en tous ses points. La piézoélectricité ternaire ou "pseudo-piézoélectricité de seconde espèce" provient essentiellement d'un état non uniforme. Un chauffage non uniforme produit des gradients de température qui, par dilatation thermique, provoquent des contraintes et des déformations non uniformes. Celles-ci peuvent produire une polarisation par effet piézoélectrique qui, à moins que l'expérience ne soit conduite avec beaucoup de soin, peut être considérée à tort comme venant des effets pyroélectriques.

Annexe B

Plans de fabrication du prototype

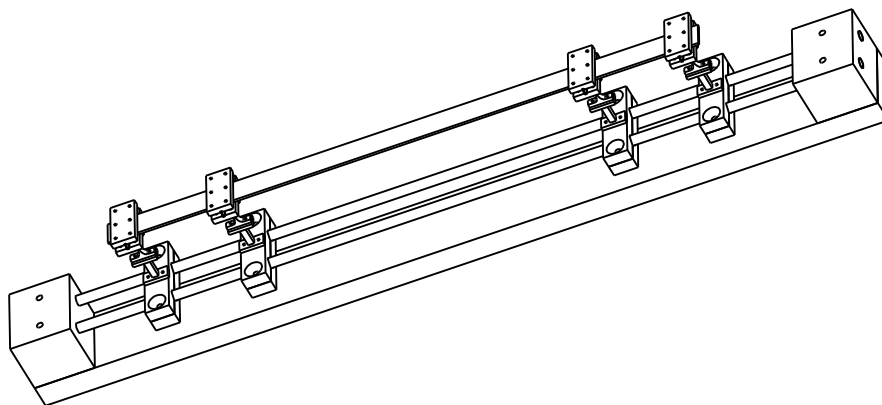


Figure B.1 – Vue isométrique du prototype

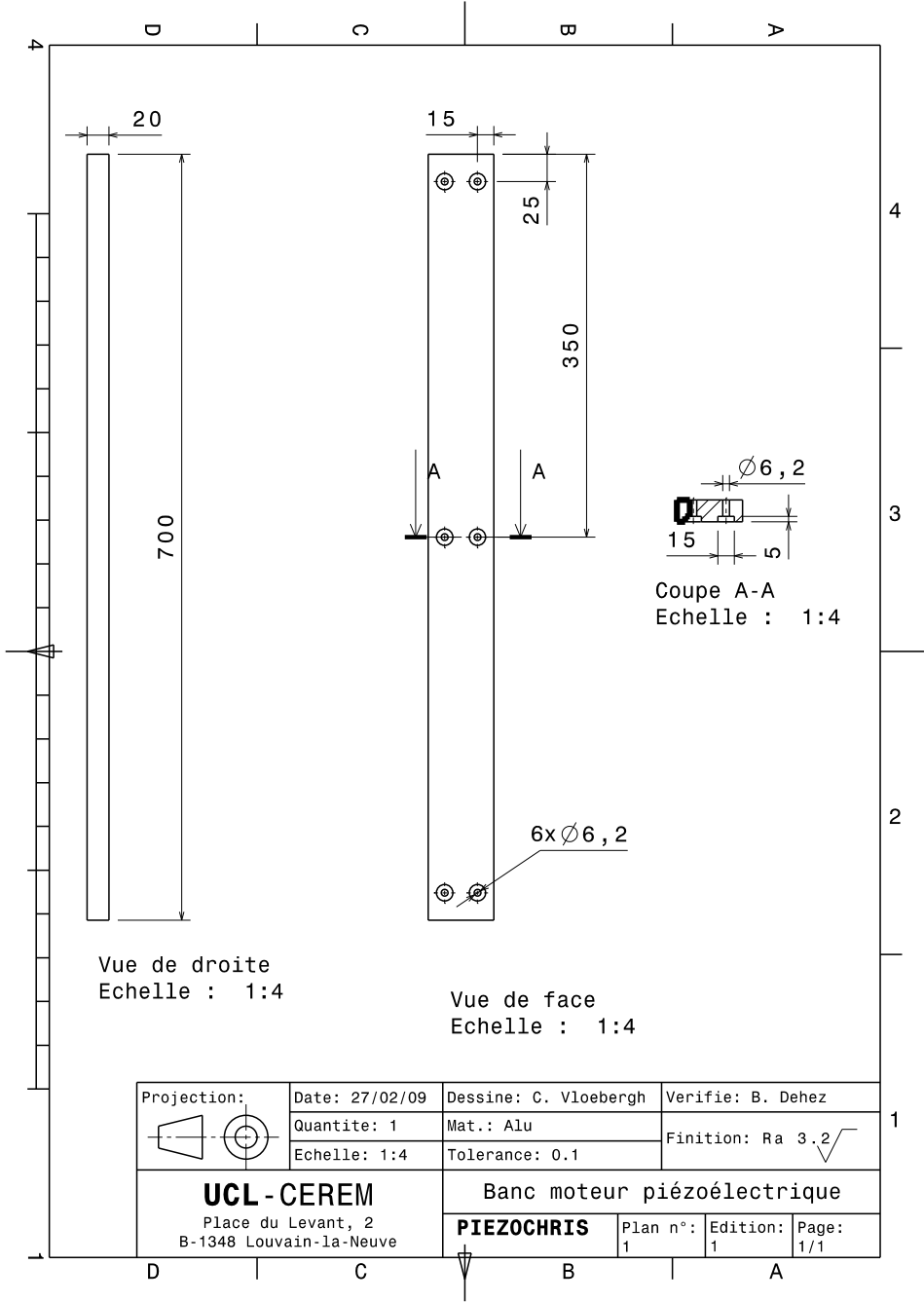


Figure B.2 – Base du banc

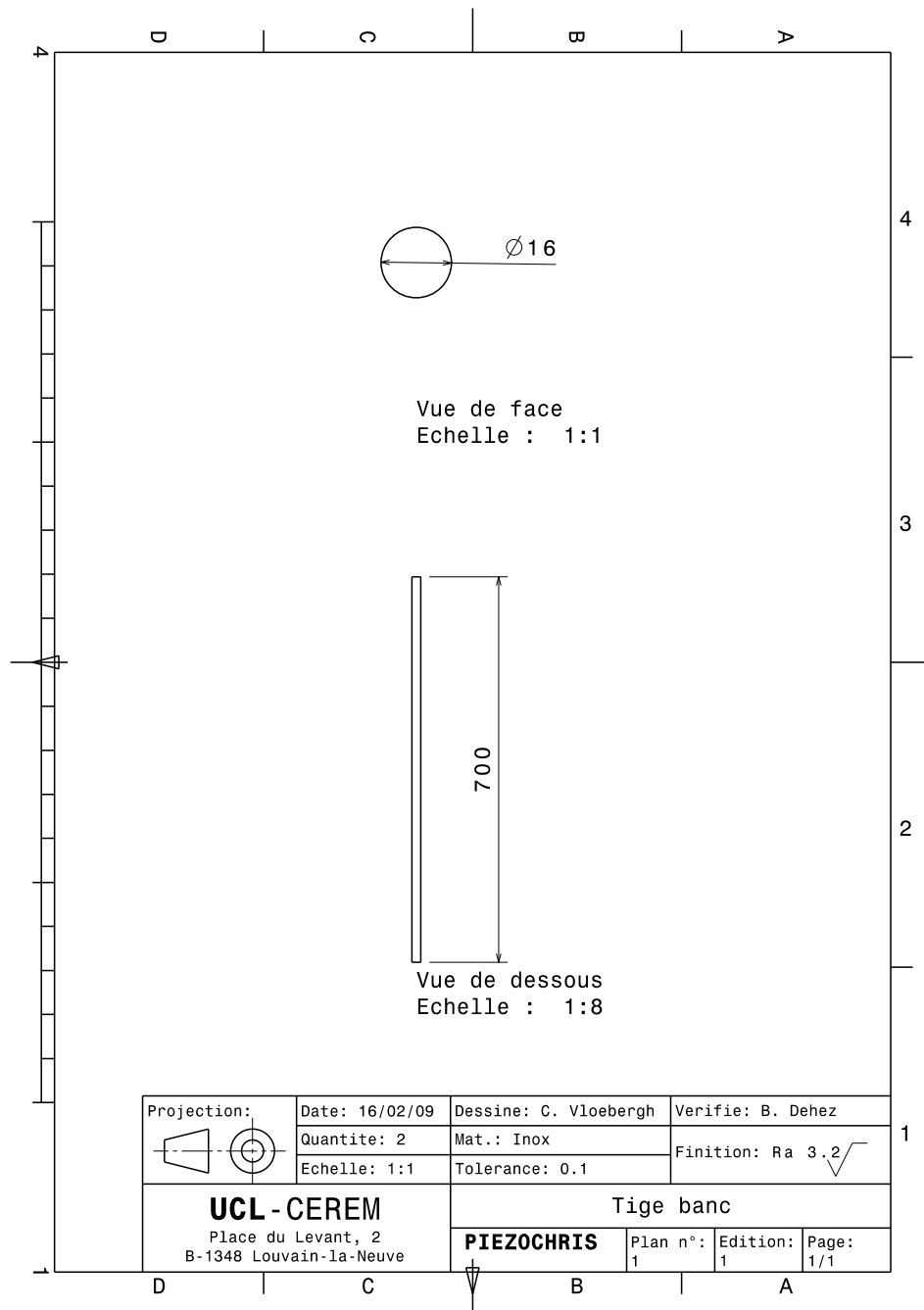


Figure B.3 – Tiges de fixation

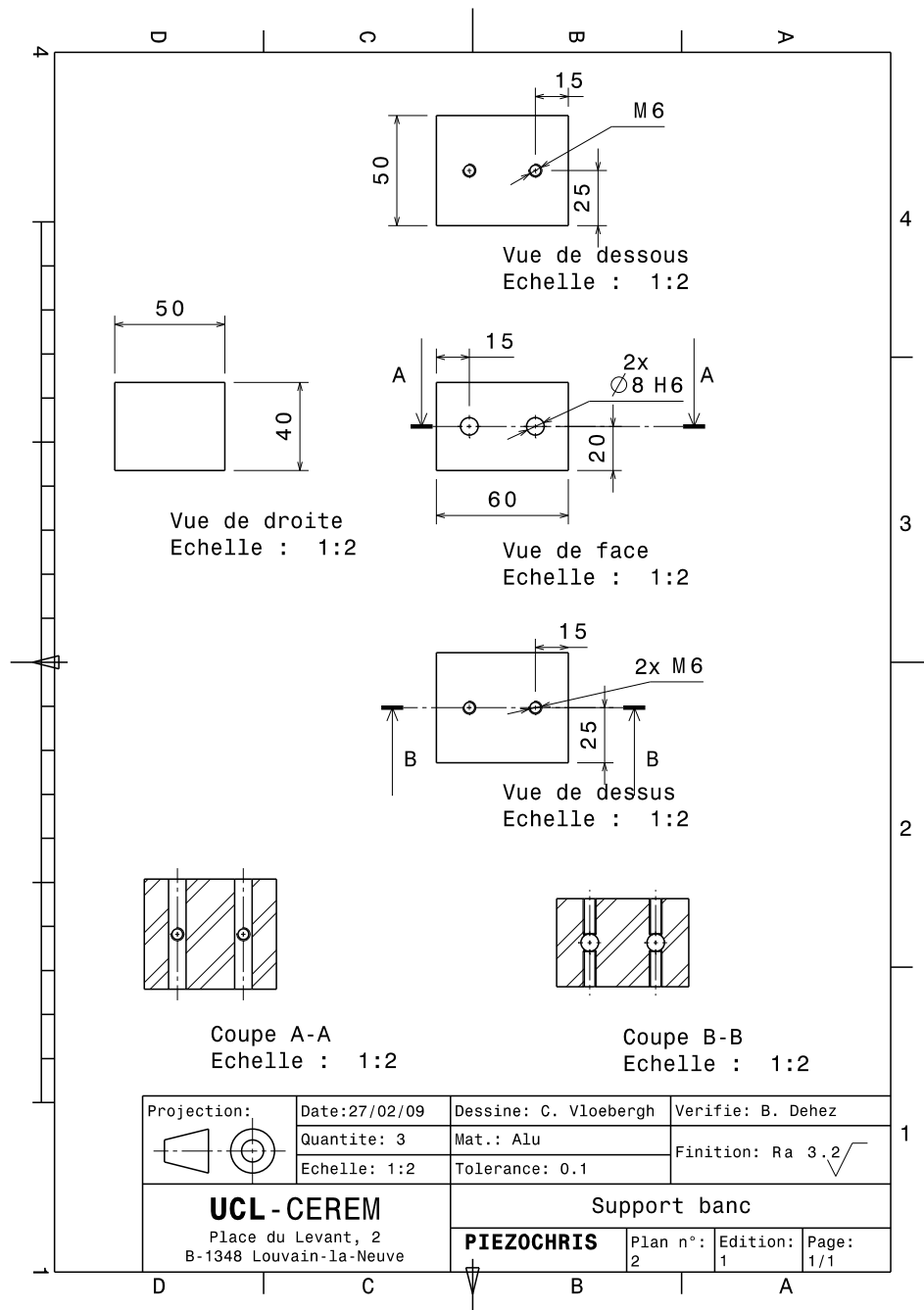


Figure B.4 – Supports de fixation des tiges sur la base du banc

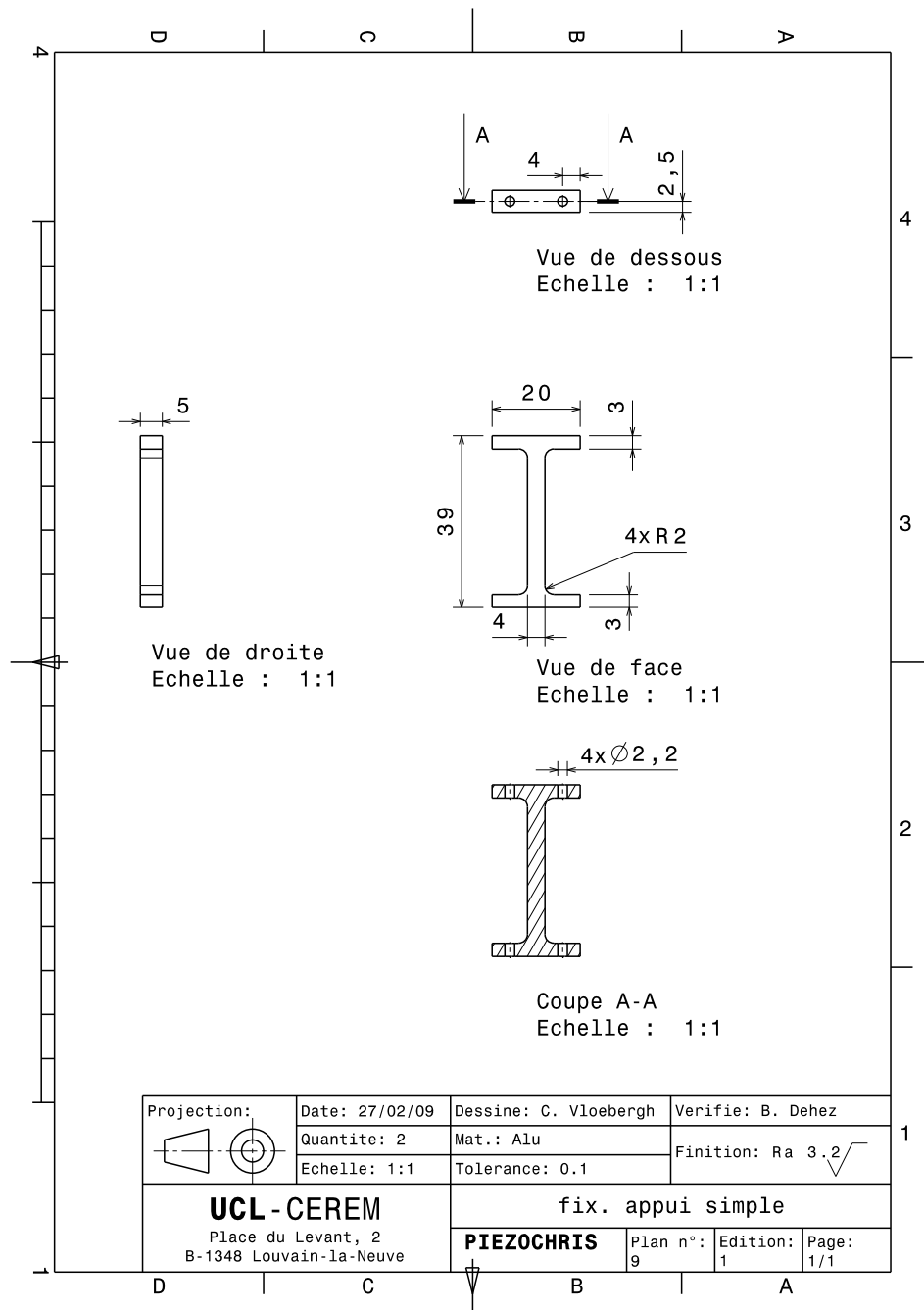


Figure B.5 – Appuis simples

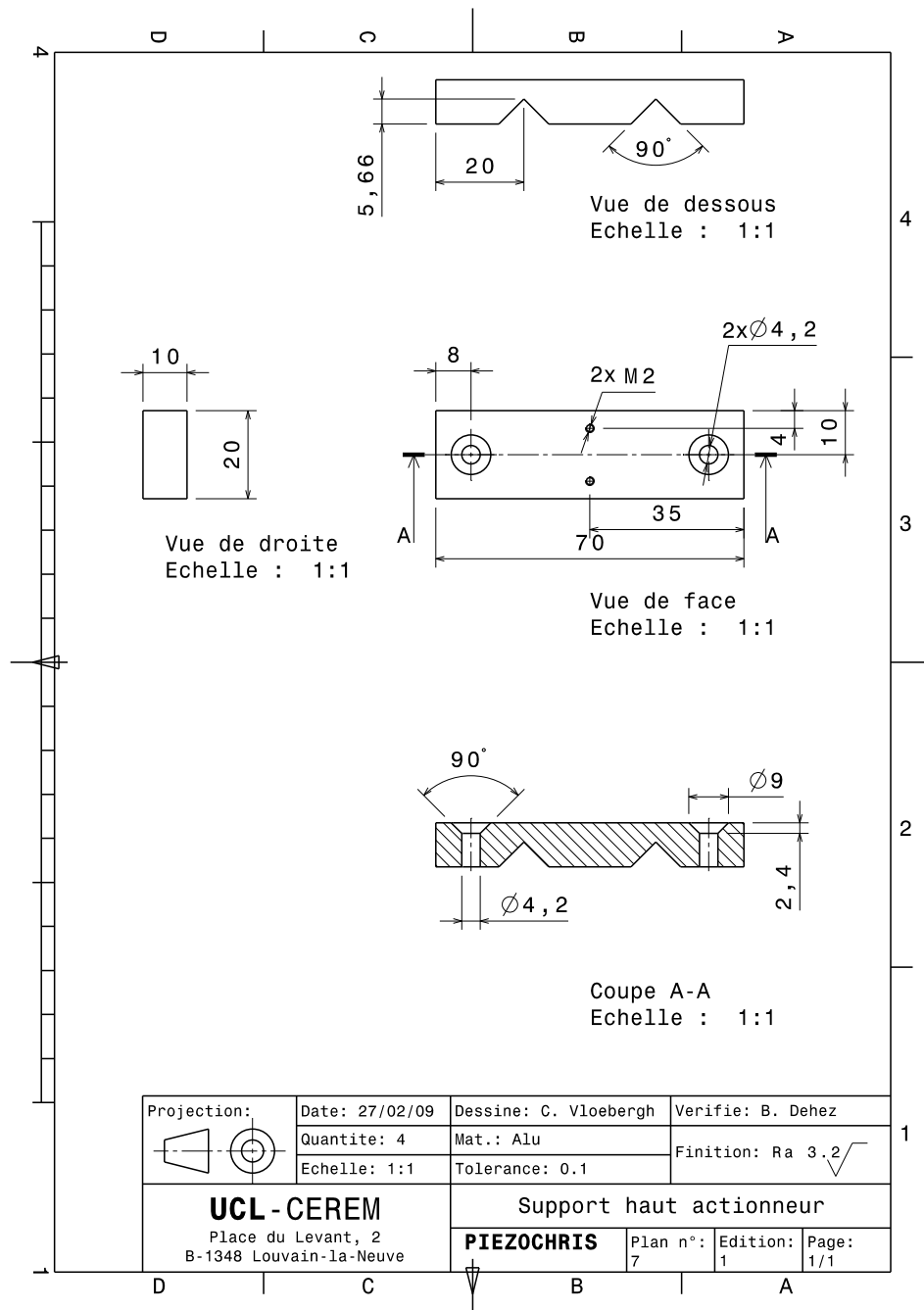


Figure B.6 – Supports de fixation de l'actionneur piézoélectrique sur les tiges du banc (partie supérieure)

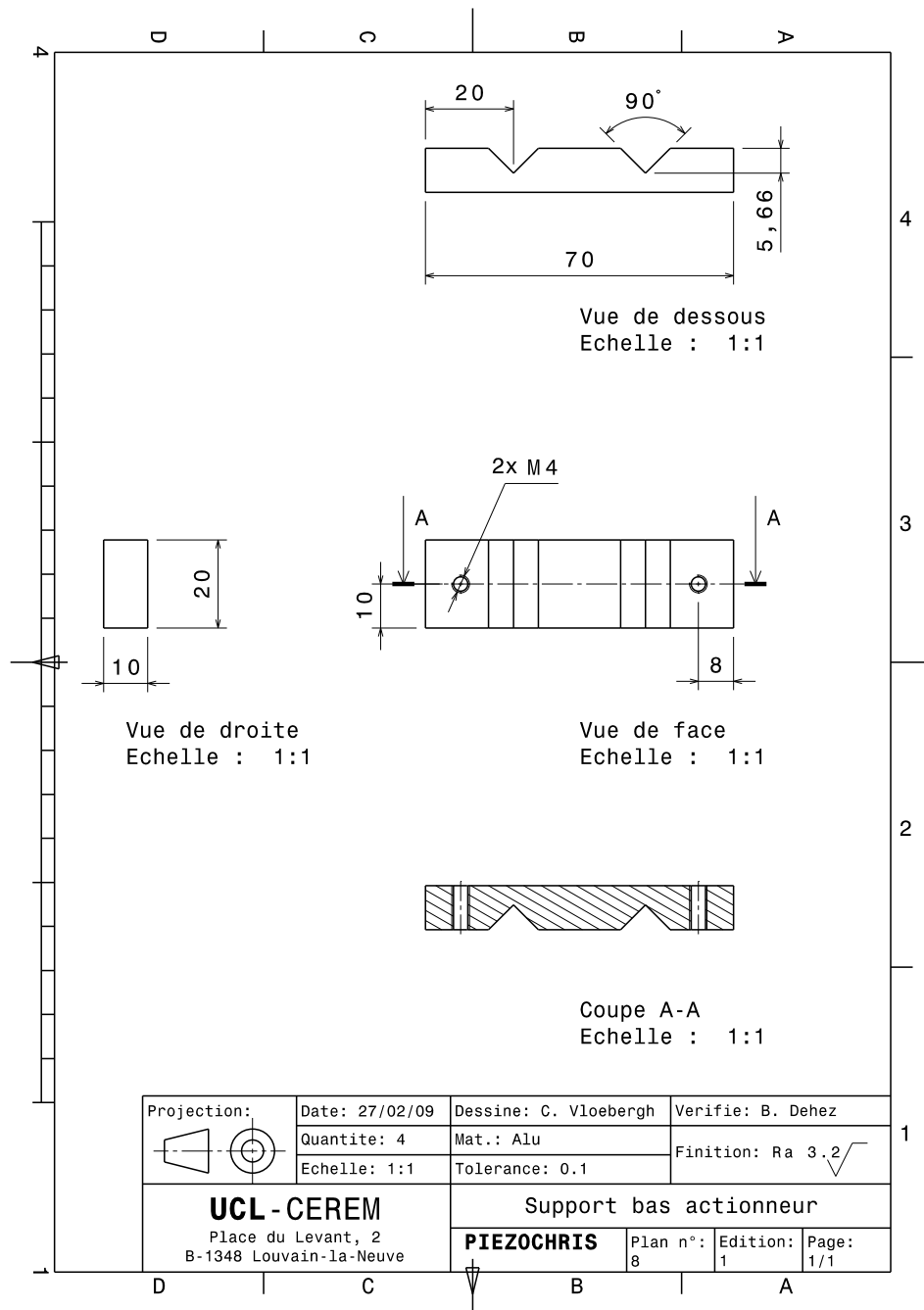


Figure B.7 – Supports de fixation de l'actionneur piézoélectrique sur les tiges du banc (partie inférieure)

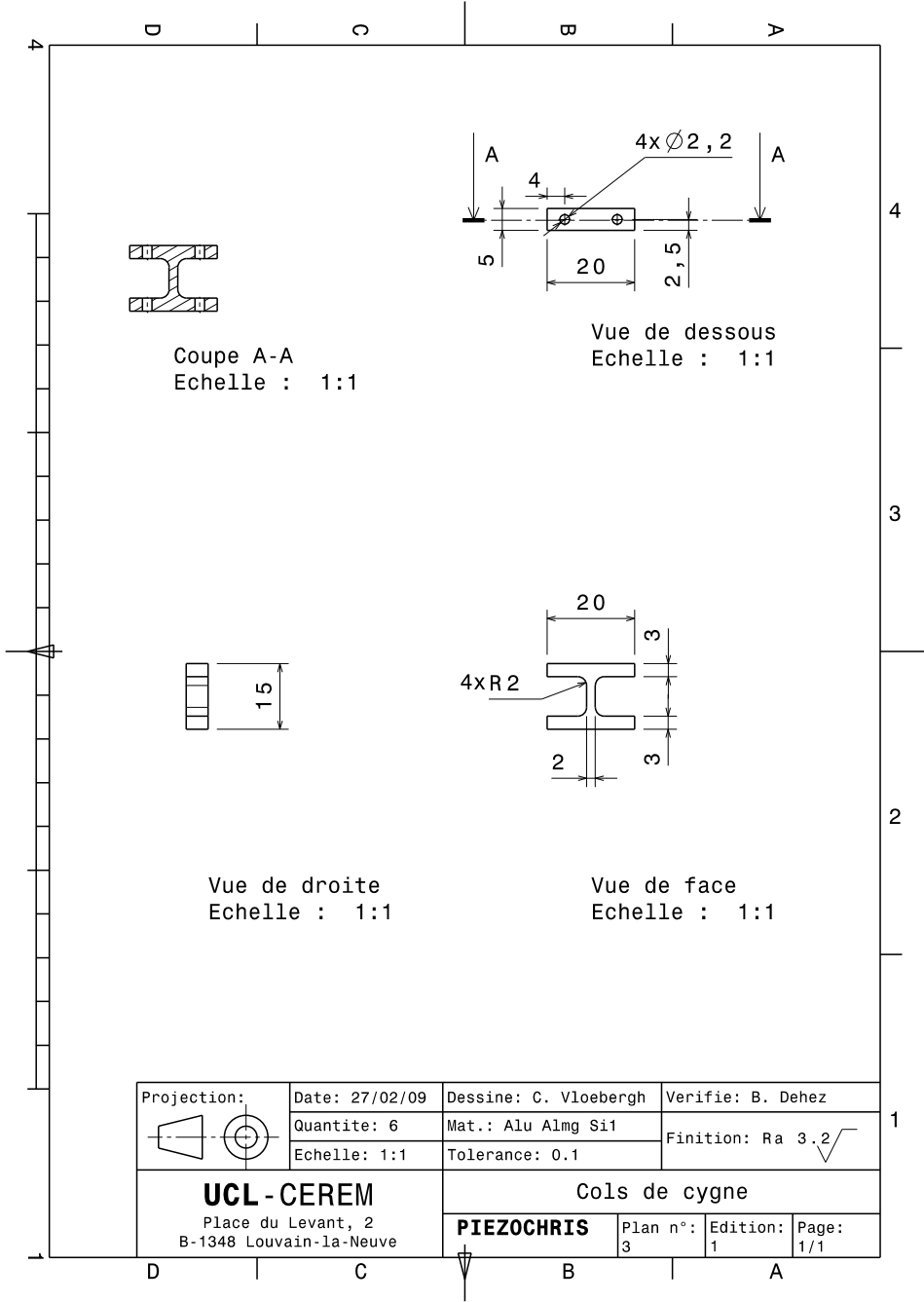


Figure B.8 – Cols de cygnes

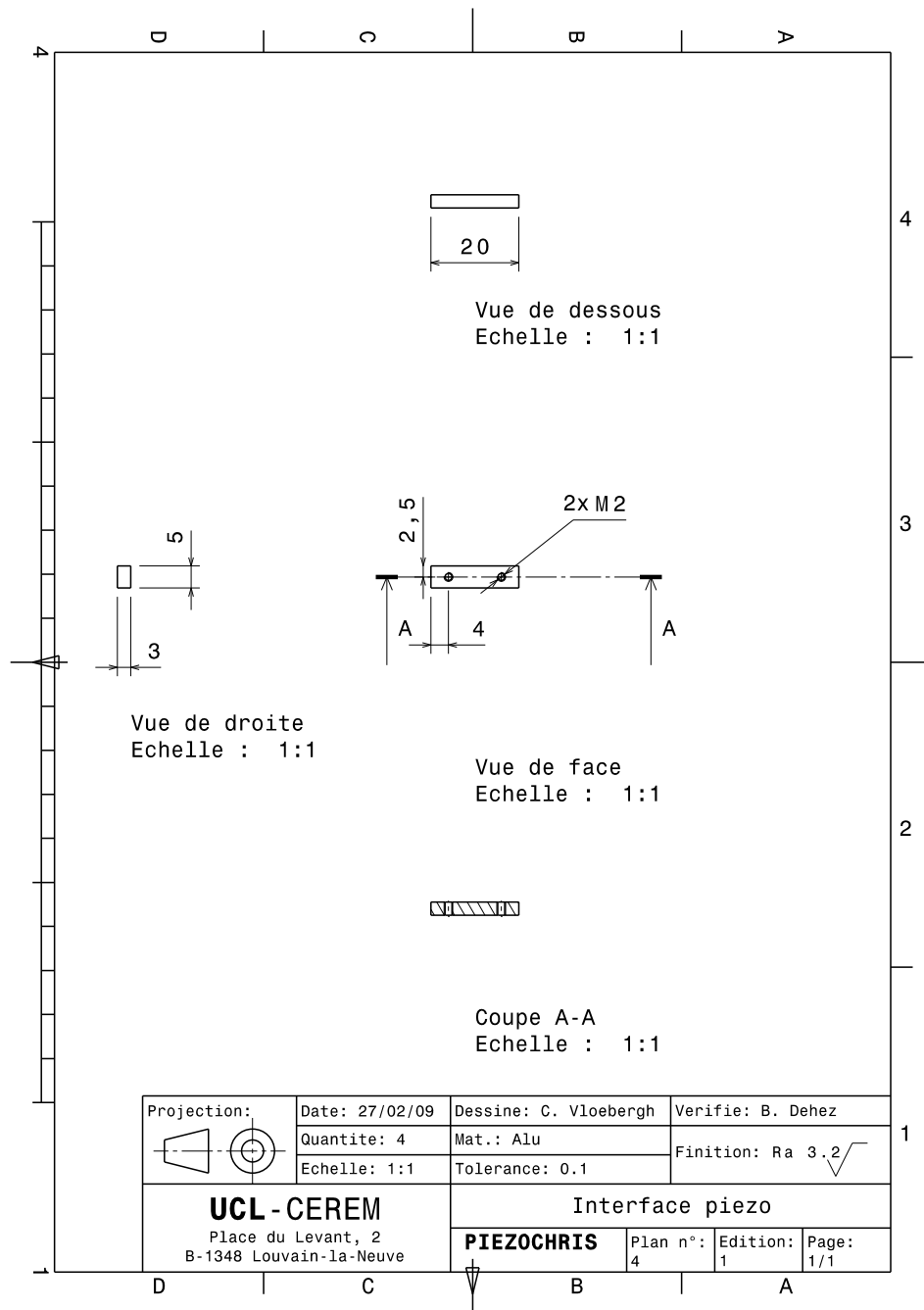


Figure B.9 – Interfaces pour le collage de l'actionneur piézoélectrique

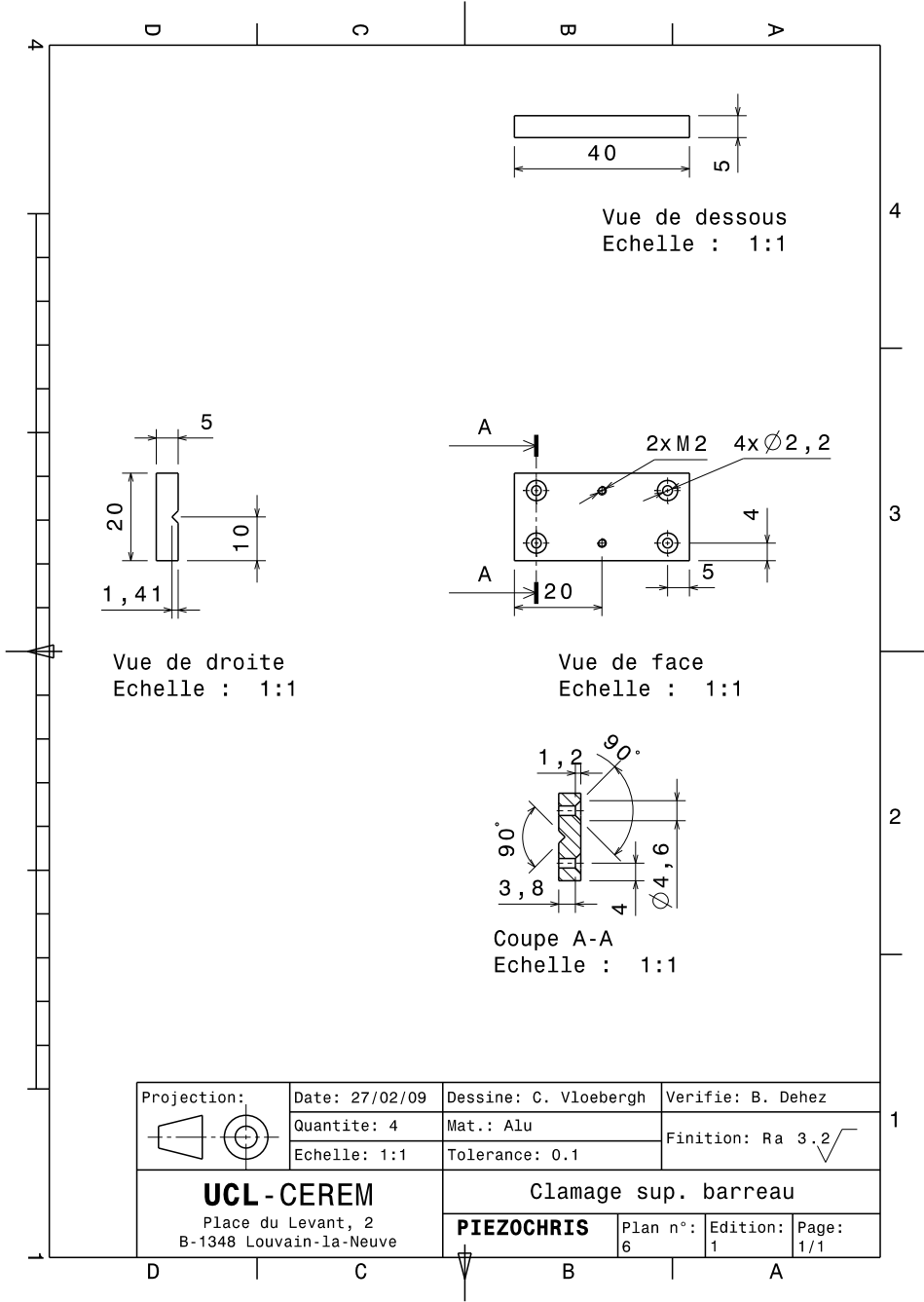


Figure B.10 – Supports de fixation au barreau (partie supérieure)

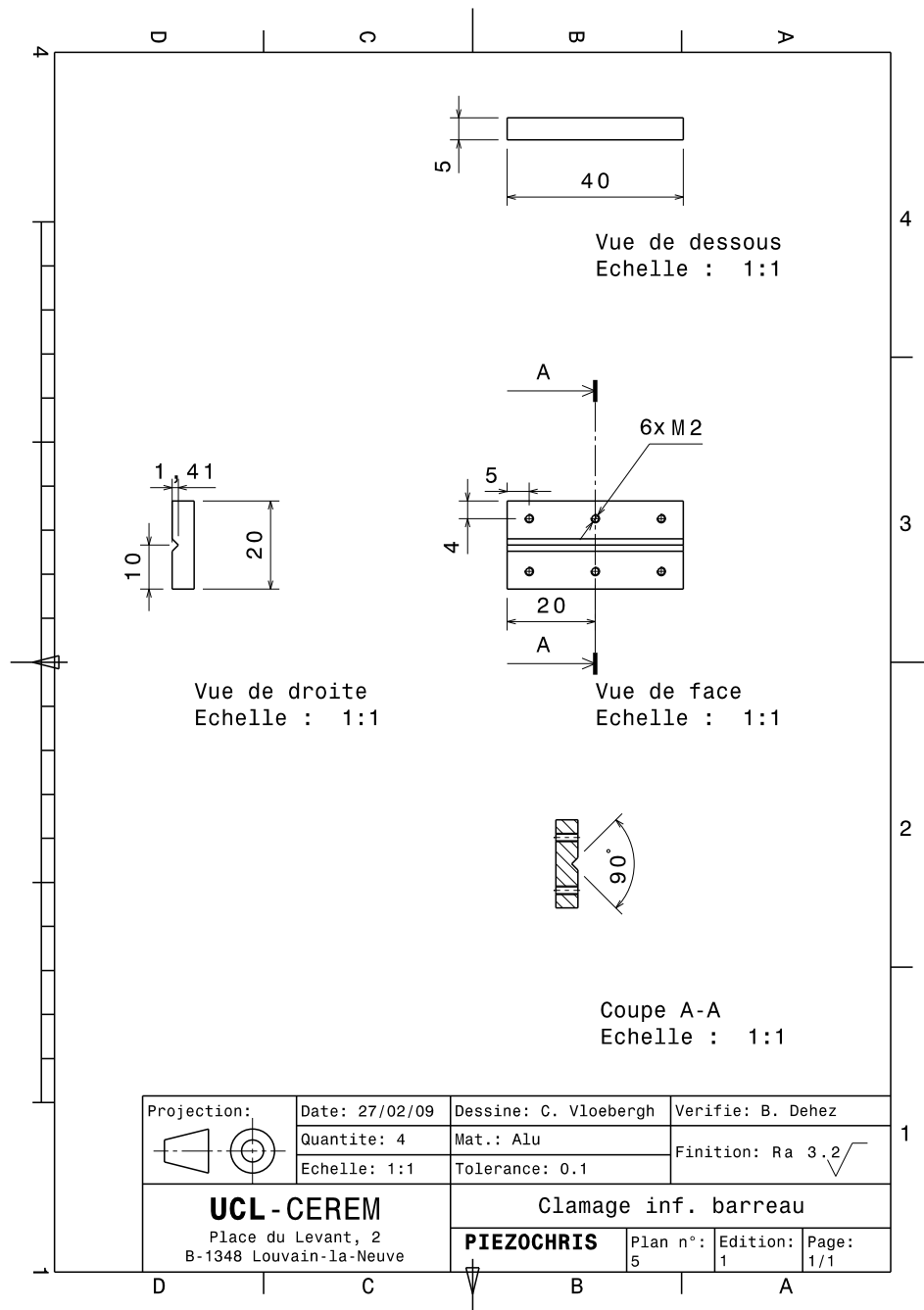


Figure B.11 – Supports de fixation au barreau (partie supérieure)

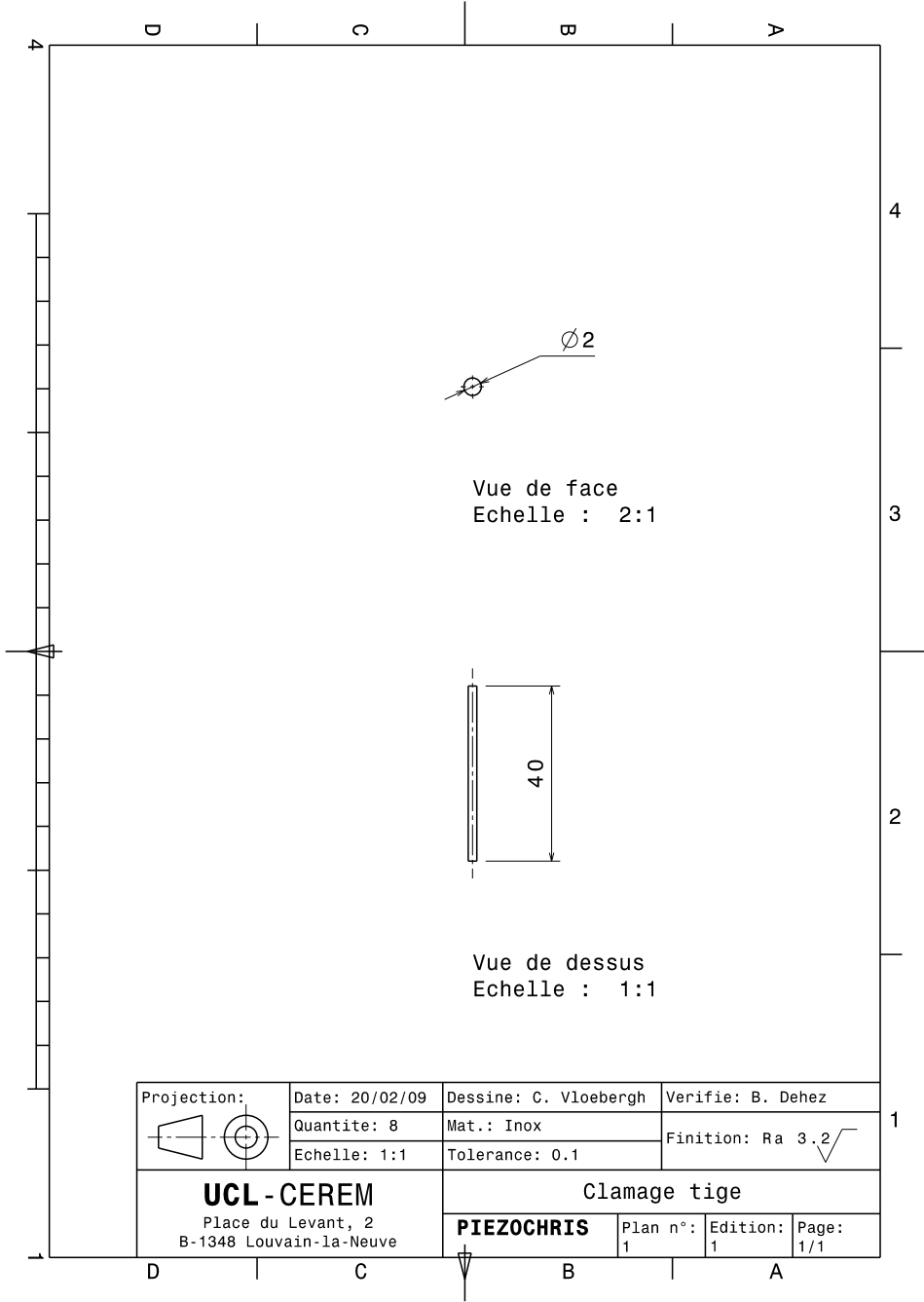
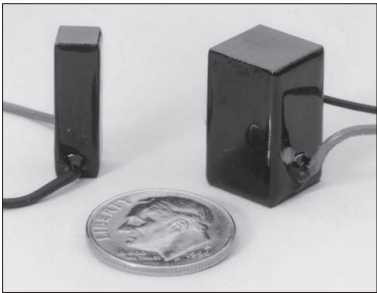


Figure B.12 – Tiges de fixation pour serrage du barreau

Annexe C

Fiche technique de l'actionneur piézoélectrique TS18-H5-104

LOW VOLTAGE PIEZOELECTRIC STACKS



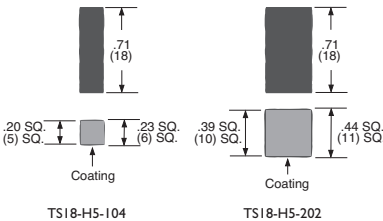
DESCRIPTION

A low voltage piezoelectric stack is a monolithic ceramic construction of many thin piezoceramic layers which are connected in parallel electrically. The principal characteristics of the stack are: a high energy conversion efficiency, low voltage operation, large force, low motion, fast response, and no EMI.

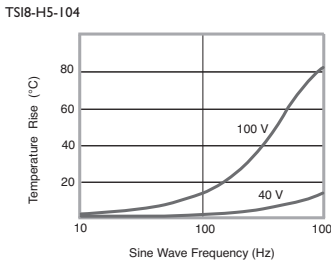
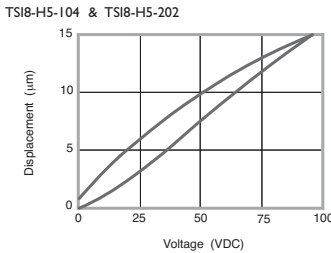
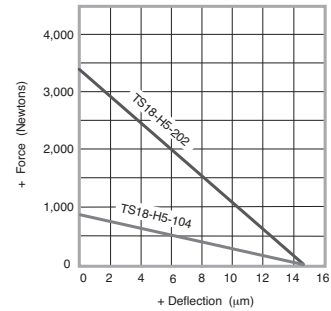
Motion may be increased, at the expense of force, by mechanical amplification. The stack offers a high energy density in a small package. Due to its superior compressive strength, it provides a high load bearing capability. However, it is relatively weak in tension.

Generally, excitation should be applied only in the direction of polarization.

Hysteresis is typically about 15% in static applications.



STACK PERFORMANCE



ORDERING INFORMATION	PART NO.	1 pc.	5 pc.	25 pc.	100 pc.
Low Voltage Piezoelectric Stack (small)	TS18-H5-104	\$350	\$300	\$250	\$200
Low Voltage Piezoelectric Stack (large)	TS18-H5-202	\$499	\$425	\$350	\$275

Figure C.1 – datasheet 1 du TS18-H5-104

SPECIFICATIONS
PIEZOELECTRIC STACKS

		TS18-H5-104	TS18-H5-202
MECHANICAL			
Dimensions (L x W x H)	Inches	0.2 x 0.2 x 0.72	0.4 x 0.4 x 0.72
	mm	5 x 5 x 18	10 x 10 x 18
Compressive Strength	N/m ²	8.8 x 10 ⁸	8.8 x 10 ⁸
Tensile Strength	N/m ²	4.9 x 10 ⁶	4.9 x 10 ⁶
Young's Modulus	N/m ²	4.4 x 10 ¹⁰	4.4 x 10 ¹⁰
Poisson Ratio		0.34	0.34
Density	Kg/m ³	7,900	7,900
Weight	grams	4.5	16.
Wires		.002 x 50 Stranded, Red wire positive	
ELECTRICAL			
Rated Voltage (Positive Only)		+100VDC	+100VDC
Capacitance	nF	1600	6,500
PERFORMANCE (@ =100 VDC)			
Free Deflection	µm	+14.5	+14.5
Blocked Force	N	840	3,388
Resonant Frequency	Hz	74,000	69,000
Stiffness	N/m	5.8 x 10 ⁷	2.3 x 10 ⁸
Response Time	µs	50	50
ENVIRONMENTAL			
Thermal Operating Range	° C	-20° to +80°	
Thermal Storage Range	° C	-30° to +85°	
Humidity	%	< 50%	
ROHS:		Compliant.	

Figure C.2 – datasheet 2 du TS18-H5-104