

## A few remarks and ideas about wetting-drying schemes for DG shallow water models

Eric Deleersnijder, 25 April 2016 - 4 February 2018

Here is some food for thought (in no particular order):

- Most studies of wetting-drying, including that claiming to have found the “Holy Grail” of the domain (Candy A.S., 2017, An implicit wetting and drying approach for non-hydrostatic baroclinic flows in high aspect ratio domains, *Advances in Water Resources*, 102, 188-205), focus on the numerical and algorithmic aspects, and mention hardly anything about the mathematical underpinning of the problem. Would not this amount to putting the horse before the cart?
- There are two reviews papers that may be worth looking at:
  - Balzano A., 1998, Evaluation methods for numerical simulations of wetting and drying in shallow water flow models, *Coastal Engineering*, 34, 83-107
  - Medeiros S.C. and S.C. Hagen, 2013, Review of wetting and drying algorithms for numerical tidal flow models, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71, 473-487
- We have developed two wetting-drying schemes for DG shallow water models. They have been tested for idealised flows and realistic ones (especially in the Scheldt Estuary):
  - Gourgue O., R. Comblen, J. Lambrechts, T. Kärnä, V. Legat and E. Deleersnijder, 2009, A flux-limiting wetting-drying method for finite-element shallow-water models, with application to the Scheldt Estuary, *Advances in Water Resources*, 32, 1726-1739 (*to be used with explicit time steppings*)
  - Kärnä T., B. de Brye, O. Gourgue, J. Lambrechts, R. Comblen, V. Legat and E. Deleersnijder, 2011, A fully implicit wetting-drying method for DG-FEM shallow water models, with an application to the Scheldt Estuary, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, 509-524 (*can be used with implicit time steppings, thereby offering a speed up of order 200 in the Scheldt over the abovementioned scheme*)
- Idealised test cases are probably not sufficient. Realistic flows should be tackled too. We can provide a set up for the Scheldt Estuary.
- It is desirable that wetting-drying schemes be independent of dimensional parameters and, hence, rely only on dimensionless parameters. So far we could not meet this objective.
- For realistic flow models, the CPU time is a key factor for selecting a WD scheme.
- One should not restrict the developments to the continuity and momentum equations. The reactive transport equation should also be considered, i.e.

$$\frac{\partial(HC)}{\partial t} = H\theta - \nabla \cdot (HC\mathbf{u} - H\mathbf{K} \cdot \nabla C)$$

The WD algorithm should not jeopardise the conservativity of the discretised reactive transport equation. It should also be consistent with the continuity equation: if one sets  $C = 1$  (concentration = 1) everywhere, then the continuity equation should be retrieved, i.e.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \nabla \cdot (H\mathbf{u})$$

## Vers un schéma numérique calculant explicitement la position de la frontière libre dans les problèmes de rupture de barrages/digues

*Eric Deleersnijder, le 2 août 2002*

On considère les équations des eaux peu profondes non dissipatives sur un lit horizontal. Pour tenir compte des mouvements de la frontière libre séparant la région mouillée de la région sèche, on pourrait utiliser un algorithme inspiré de Deleersnijder and Roland (1993), Roland (1993) et Deleersnijder (1994). La faisabilité d'une telle approche dépend cruciallement de l'existence d'une solution asymptotique permettant d'évaluer la vitesse de la frontière libre à partir de la valeur des variables d'état évaluées en un point — ou plusieurs points — du domaine mouillé. Les développements ci-dessous suggèrent qu'il est possible de mettre en oeuvre une telle technique.

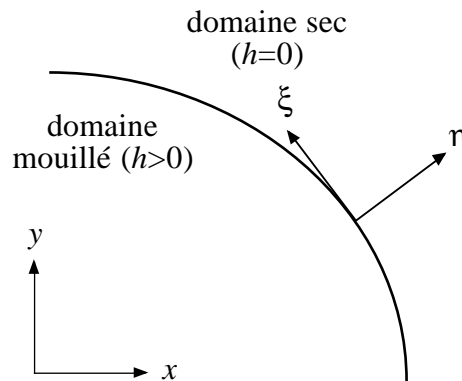
La couche d'eau obéit aux équations des eaux peu profondes non-dissipatives:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(hu_x)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_xu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_yu_x)}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(hu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_yu_y)}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

où  $t$  désigne le temps;  $x$  et  $y$  sont des coordonnées cartésiennes horizontales; les composantes correspondantes de la vitesse de l'eau sont respectivement  $u_x$  et  $u_y$ ;  $h$  symbolise la hauteur d'eau, tandis que la constante  $g$  est l'accélération de la pesanteur.



Pour étudier la solution de (1)-(3) à proximité de la frontière libre, on fixe en un point de cette dernière l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes  $(\eta, \xi)$ . L'axe  $\eta$  est normal à la frontière, et  $\eta$  est positif dans le domaine sec; l'axe  $\xi$  est alors tangent à la courbe séparant le domaine mouillé du domaine sec (voir figure ci-dessus). Si  $\mathbf{e}_s$  dénote le vecteur unitaire associé à l'axe de coordonnée  $s$  — où  $s$  peut être  $x$ ,  $y$ ,  $\eta$  ou  $\xi$  —, alors les composantes de la vitesse de l'eau dans les deux systèmes de coordonnées cartésiennes envisagés ici satisfont la relation

$$u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y = u_\eta \mathbf{e}_\eta + u_\xi \mathbf{e}_\xi. \quad (4)$$

Par ailleurs, on définit une nouvelle coordonnée temporelle:

$$\tau = t + \alpha, \quad (5)$$

où  $\alpha$  est une constante. Si  $w_\eta \mathbf{e}_\eta + w_\xi \mathbf{e}_\xi = [u_\eta \mathbf{e}_\eta + u_\xi \mathbf{e}_\xi]_{\eta=0=\xi}$  est la vitesse de l'origine des coordonnées  $(\eta, \xi)$ , alors on obtient aisément les relations différentielles suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - w_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - w_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\mathbf{e}_x \bullet \mathbf{e}_\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} + (\mathbf{e}_x \bullet \mathbf{e}_\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (\mathbf{e}_y \bullet \mathbf{e}_\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} + (\mathbf{e}_y \bullet \mathbf{e}_\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (8)$$

On peut maintenant réécrire les équations (1)-(3) en utilisant les nouvelles coordonnées spatio-temporelles:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} - w_\eta \frac{\partial h}{\partial \eta} - w_\xi \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(hu_\xi)}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \tau} - w_\eta \frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \eta} - w_\xi \frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu_\eta u_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(hu_\xi u_\eta)}{\partial \xi} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \eta} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial(hu_\xi)}{\partial \tau} - w_\eta \frac{\partial(hu_\xi)}{\partial \eta} - w_\xi \frac{\partial(hu_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu_\eta u_\xi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(hu_\xi u_\xi)}{\partial \xi} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \xi} = 0. \quad (11)$$

Sur le segment de droite défini par  $\eta \rightarrow 0^-$  et  $\xi = 0$ , il semble raisonnable de supposer que toutes les dérivées selon  $\xi$  sont négligeables. En d'autres termes, on propose d'ignorer les variations selon la direction parallèle à la frontière libre sur un segment de droite très court normal à la frontière. Donc, sur ce dernier, les équations (9)-(10) se réduisent asymptotiquement à

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} \sim w_\eta \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \eta}, \quad \eta \rightarrow 0^-, \xi = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \tau} \sim w_\eta \frac{\partial(hu_\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial(hu_\eta u_\eta)}{\partial \eta} - \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \eta}, \quad \eta \rightarrow 0^-, \xi = 0. \quad (13)$$

Ces équations admettent la solution asymptotique

$$h \sim \frac{1}{9g\tau^2} \eta^2, \quad \eta \rightarrow 0^-, \xi = 0, \quad (14)$$

$$u_\eta \sim w_\eta + \frac{2}{3\tau} \eta, \quad \eta \rightarrow 0^-, \xi = 0, \quad (15)$$

où la vitesse de la frontière  $w_\eta$  est, en première approximation, indépendante du temps. Ces relations sont valables quel que soit le signe de  $w_\eta$ , c'est-à-dire que (14)-(15) s'appliquent aussi bien à une frontière qui "avance"<sup>1</sup> ( $w_\eta > 0$ ) et qu'à une frontière qui "recule"<sup>2</sup> ( $w_\eta < 0$ ).

A l'intérieur du domaine mouillé, on calcule par un schéma numérique classique la vitesse et la hauteur d'eau. Ces calculs fournissent les valeurs de ces variables en un nombre approprié de points discrets. Sur l'axe  $\xi=0$ , les points hauteur et vitesse les plus proches de l'origine des axes soient situés à une distance  $L_h$  et  $L_{u_\eta}$  de cette origine. En d'autres termes, on connaît la hauteur  $h_- = h(\tau, \eta = -L_h, \xi = 0)$  et la vitesse  $u_{\eta-} = u_\eta(\tau, \eta = -L_{u_\eta}, \xi = 0)$ . En introduisant ces valeurs dans (14)-(15), on déduit la vitesse la frontière:

<sup>1</sup> On considère que la frontière libre "avance" si la région mouillée tend à augmenter.

<sup>2</sup> On considère que la frontière libre "recule" si la région mouillée tend à régresser.

$$w_{\eta} \sim u_{\eta-} + \frac{2g^{1/2}L_{u\eta}}{L_h} h^{1/2}, \quad L_h, L_{u\eta} \rightarrow 0. \quad (16)$$

On peut répéter les opérations ci-dessus pour tous les points de la frontière libre où il est nécessaire d'estimer la vitesse de celle-ci.

A mon avis, les prochaines étapes de notre entreprise devraient être:

- I. Vérifier les développements permettant d'aboutir au résultat (16);
- II. Utiliser (16) pour résoudre numériquement le problème unidimensionnel classique de rupture de barrage, et comparer la solution discrète à la solution analytique exacte de Ritter;
- III. Répéter l'étape II pour un problème bi-dimensionnel axisymétrique, s'il existe une solution analytique pour ce cas;
- IV. Développer une formule semblable à (16) pour des terrains pentus, et la tester en s'inspirant des étapes I à III.

### Références

- Deleersnijder E., 1994, An ill-designed algorithm for solving a multi-dimensional nonlinear diffusion equation in a domain limited by a moving boundary, *Mathematical and Computer Modelling*, 19 (10), 75-82.
- Deleersnijder E. and M. Roland, 1993, Preliminary tests of a hybrid numerical-asymptotic method for solving nonlinear advection-diffusion equations in a domain limited by a self-adjusting boundary, *Mathematical and Computer Modelling*, 17 (12), 35-47.
- Roland M., 1993, *Développement d'une Méthode Numérico-Asymptotique pour la Résolution d'un Problème Non-Linéaire à Frontière Mobile*, Mémoire de Licence, Département de mathématique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- Soares Frazao S., 2002, *Dam-Break Induced Flows in Complex Topographies - Theoretical, numerical and experimental approaches*, Thèse de doctorat, Faculté des sciences appliquées, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.