

Remerciements

En premier lieu, Benoit Macq du département TELE de l'UCL m'a permis d'appréhender le fascinant milieu de la recherche avec plaisir et enthousiasme, grand merci.

Je dédie mes remerciements à mes promoteur et co-promoteur de thèse Véronique Dehant et Jean-Pierre Barriot qui m'ont guidé par leurs conseils avisés et accompagné de leur bienveillance. Une note spéciale à l'attention de Véronique Dehant, pour sa confiance sans faille et son travail énorme. Je voudrais aussi dire ma reconnaissance à Pascal Rosenblatt, qui a beaucoup compté dès mes débuts et tout au long de ce travail, merci mille et une fois.

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans d'une part l'investissement de l'Observatoire Royal de Belgique, de l'équipe NEIGE plus particulièrement, et d'autre part le soutien financier de PRODEX (Belspo Space Research), Belgian Science Policy (Belspo, Action 2 project) et European Community's Improving Human Potential Programme sous le contrat RTN2-2001-00414, MAGE. De la même façon, je tiens à remercier l'Observatoire Midi-Pyrénées, en particulier l'équipe GRGS (Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale) du CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) où j'ai pu m'épanouir encore un peu plus. Grand merci donc à Georges Balmino et Richard Biancale.

Je tiens à remercier aussi bien sûr les membres de ces deux équipes. Je citerais côté Observatoire Royal de Belgique, Pascale D., Marie Y., Sarah W., Stéphanie P., Sophie R., Sandrine L., Véronique W., Tim van H., Ozgur K., André S., Olivier V., Olivier de V., Tilio R., Fred R., Mikael B., David H., Seb Le M. (Gollum ou le serbe), Laurent M. et côté GRGS les 2 Nicole (L. et V.), plus spécialement Jean-Charles M. et Jean-Michel L. (jeune papa), Félix P., Sylvain L., Julien V., Sean B., Stavros.

A cet instant, je pense aussi à ma famille - cousin(e)s, tantes et oncles, côté Ausanger et Duron - et belle famille (la famille Albarel). Une pensée aussi pour mes grands-parents, partis (Amanda, Odette et Jean : R.E.P) ou encore parmi nous (Robert).

Je me souviens aussi du dévouement sans relâche de mes parents, Michel et Michèle, et mon frère, Guillaume, lesquels ont eu une totale confiance en mes choix. Je terminerais en félicitant ô combien ma femme, Pauline, car elle a toujours su deviner où je souhaitais aller et m'a chaque jour supporté (dans les deux sens du terme) pendant ses grossesses. A ma fille Inès, mon fils Ismael, je voudrais dédier ce manuscrit, et à mes enfants qui suivront.

Je dédie aussi bien sûr ce manuscrit à ceux qui y ont cru et y croient encore. A mes amis de Toulouse (*KMK Prod.*, *ALPHA B*), Bordeaux, Bruxelles, Djibouti, New York, La Réunion, Paris, Rennes, Angers, Saint-Jean-de-Luz.

Table des matières

Introduction et Motivation scientifique	15
1 Orientation et rotation de Mars	23
1.1 Systèmes de référence et repères	23
1.2 Approche cinématique	24
1.2.1 Les paramètres d'orientation	24
1.2.2 Les paramètres du mouvement du pôle	26
1.2.3 Les paramètres de nutation	27
1.2.4 Les paramètres du temps sidéral	30
1.2.5 Variations des paramètres d'orientation	30
1.2.6 Rotation instantanée vs paramètres d'orientation . . .	31
1.3 Simulations numériques : modèles	31
1.3.1 Le temps sidéral et le mouvement du pôle	32
1.3.2 Les nutations et l'intérieur de Mars	32
1.3.3 Perturbations des modèles a priori	34
2 Equations du mouvement orbital	37
2.1 Orbitographie : éléments orbitaux	37
2.2 Le potentiel gravitationnel - $U_p = \mu/r + \mathcal{R}$	40
2.3 Développement de $\mathcal{R}$ en éléments orbitaux	43
2.4 Les équations de Lagrange	44

3	Perturbations induites par $\mathcal{R}$	47
3.1	Termes séculaires, ψ_{lmpq} constant	47
3.2	Termes périodiques, $\dot{\psi}_{lmpq} \neq 0$	48
3.3	Partie séculaire induite par les zonaux	49
3.4	Longues périodes induites par les zonaux	50
4	Perturbations induites par les marées	53
4.1	Le potentiel de marée - U_{m,k_l}	53
4.2	Partie séculaire induite par U_{m,k_2}	54
4.3	Longues périodes induites par U_{m,k_2}	56
4.3.1	Définition des longues périodes	56
4.3.2	Longue période en $m(\Omega - \Omega_p)$	57
4.3.3	Longue période en $m(\Omega - M_p)$	58
4.3.4	Longue période en $m(\Omega - \Omega_p - M_p)$	61
5	Détermination pratique des zonaux et de k_2	65
5.1	Synthèse sur la contribution des potentiels	65
5.1.1	Les zonaux de gravité	65
5.1.2	k_2 et les zonaux	70
5.2	Difficulté de la restitution des zonaux	71
5.3	Le problème inverse et sa solution	73
5.3.1	Les mesures	73
5.3.2	Les équations d'observation	75
5.3.3	Solution par moindres carrés	76
5.3.4	Le logiciel GINS	78
6	Simulations de missions de radio science	83
6.1	Dynamique atmosphérique	83
6.2	Objectifs	87
6.3	Critères d'évaluation des simulations	87

6.4	La mission NEIGE : justification	88
6.5	Caractéristiques des traitements	90
6.6	Description des expériences : généralités	91
6.7	Analyse de la dynamique d'un satellite seul	92
6.8	Analyse de la combinaison de deux satellites	99
6.9	Apport d'une poursuite depuis Mars	102
6.9.1	Corrélation et estimation des zonaux pairs et de la ro- tation	102
6.9.2	Le champ variable	105
7	Les missions de radio science MGS et MODY	117
7.1	Introduction	117
7.2	Données, caractéristiques de traitement	118
7.3	Orbitographie précise	122
7.4	Le champ variable de Mars	130
7.5	Le nombre de Love k_2 de Mars	132
8	Discussion et conclusion	135
8.1	Discussion	135
8.2	Extension des travaux de recherche	138
8.2.1	Simulations	138
8.2.2	(Re)traitement de données de suivi et combinaison avec d'autres missions de radio science : MEX ... LaRa ...	139
	Bibliographie	141
A	Approche dynamique de la rotation	147
B	Le potentiel gravitationnel	149
B.1	Polynômes et harmoniques sphériques	149
B.1.1	Définition en coordonnées cartésiennes	149
B.1.2	Définition en coordonnées sphériques	150

B.2	Attraction gravitationnelle et potentiel	150
B.2.1	Cas d'un corps ponctuel	150
B.2.2	Cas d'un corps étendu	151
B.2.3	Calcul des premiers termes	152
B.2.4	Calcul de U_2	153
B.2.5	Développement en harmoniques sphériques	154
C	Coefficients de Stokes et moments d'inertie	157
D	Coefficients de Stokes et rotation	159
E	Longues périodes sur $\dot{e}$ et $\dot{\omega}$	161
F	Fonctions d'inclinaison et d'excentricité	165
G	Autre écriture des variations des éléments orbitaux	167
H	Tesséraux et sectoriaux : part longue période	169

Table des figures

1.1	Passage du repère inertiel au repère lié au corps	25
1.2	Description des angles du mouvement du pôle	26
1.3	Description des angles α et δ , paramètres du modèle de nutation utilisé	27
1.4	Description des différents formalismes pour caractériser les angles de nutation (NB : <i>Reasenberg et King</i> [1979] et <i>Folkner et al.</i> [1997b] utilisent la notation I au lieu de ε	28
1.5	Description des angles en (α, δ) nécessaires à l'orientation de l'équateur moyen à une date t par rapport à la date T_0	29
2.1	Paramètres de l'ellipse dans le plan orbital	39
2.2	Paramètres képlériens d'orientation du plan orbital	40
2.3	Représentation des harmoniques sphériques du degré 2 à 10 et ordre 0 à 10	42
5.1	Mesure Doppler 2 (ou 3) voies moyennée. La station E émet pendant l'intervalle de temps $t_{1,d}$ et $t_{2,d}$ et le signal est reçu en R sur une durée T . Les distances ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4 sont respectivement les distances relatives entre la sonde et la station. Dans le cas du Doppler 1 voie, seuls les trajets ρ_3 et ρ_4 sont à considérer et c'est le satellite qui émet un signal à la fréquence F_{ref} (à ajuster en général).	74

5.2	Schéma fonctionnel de GINS : $Q_{\text{théo}}$, l'observable théorique, est calculée à partir du vecteur position/vitesse du satellite et du vecteur position de la station à l'instant de la mesure. Ceci correspond au traitement d'un arc donné, i.e au calcul des paramètres internes. Le cumul des systèmes et la solution pour l'ensemble des paramètres sont effectués par la "chaîne" Dynamo, extérieurement.	79
5.3	Schéma fonctionnel de Dynamo : <i>Dynamo-b</i> permet la réduction de la matrice normale aux seuls paramètres externes par décomposition en groupes, <i>Dynamo-c</i> permet de <i>sommer des équations normales</i> (de chaque arc de trajectoire par exemple), <i>Dynamo-p</i> permet de remettre les inconnues dans un ordre prédéfini (<i>permutation des inconnues</i> , les harmoniques zonaux de gravité par exemple), <i>Dynamo-d</i> permet la <i>résolution</i> d'un système d'équations normales (les méthodes disponibles sont : Choleski, gradients conjugués ou valeurs et vecteurs propres).	80
6.1	Variations saisonnières de (a) $\bar{C}_{20}$ (b) $\bar{C}_{30}$	85
6.2	Variations saisonnières de (a) $\bar{C}_{20,l}$ (b) $\bar{C}_{30,l}$	86
6.3	Déroulement du vol et de l'arrivée sur Mars de l'expérience NEIGE	88
6.4	Schéma de principe de l'expérience NEIGE : les liens électromagnétiques (mesure d'effet Doppler) sont en bande X (rouge), et en bifrquence : bande S (vert) - UHF (bleu)	89
6.5	<i>Longitudes et latitudes pour le réseau Tharsis : une station à l'ouest de Tharsis, deux à l'est de Tharsis et une dans le bassin Hellas (Landing site 3 ou 3 bis), antipodale au triangle de stations autour de Tharsis. La distance minimale entre les stations est d'environ 2200 kms. Ce tableau donne aussi les caractéristiques des ellipses d'incertitude (et les surfaces associées à 3σ) sur le site d'atterrissage au moment du largage. Ce réseau est représenté sur la figure 6.6</i>	92
6.6	<i>Géométrie du réseau d'atterrisseurs (points rouges) dit Tharsis. Les ellipses représentent l'incertitude sur le site d'atterrissage au moment du largage.</i>	93

- 6.7 Variation de l'angle entre la normale du plan orbital et la ligne de visée Terre-orbiteur pour deux des orbites circulaires d'inclinaison 50° et 93.2° . L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES. 95
- 6.8 Matrices de corrélations correspondant à (a) simulations 1, (b) simulation 2 ($\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ sont en fait $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$) et (c) simulation 3. Les éléments de la matrice correspondent aux corrélations entre les zonaux ajustés au cours des 5 premières semaines de mission, 6 solutions pour des recouvrements périodiques à 10 jours, i.e chaque point correspond à 10 jours de données 96
- 6.9 Comparaison entre l'erreur vraie sur $\bar{C}_{20}$ ajusté et $\bar{C}_{40}$ non ajusté i.e ses variations initiales (trait plein). On a représenté les cas où : seuls $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ sont ajustés (+), simulation 2 ; $\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$ sont ajustés (o), simulation 3. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES. 97
- 6.10 Comparaison entre l'erreur vraie sur $\bar{C}_{30}$ ajusté et $\bar{C}_{40}$ non ajusté i.e ses variations initiales (trait plein). On a représenté les cas où : seuls $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ sont ajustés (+), simulation 2 ; $\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$ sont ajustés (o), simulation 3. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES. 98
- 6.11 Comparaisons entre les modèles initiaux (train plein) et les valeurs décadales restituées des zonaux (a) $\bar{C}_{20}$ (b) $\bar{C}_{30}$ (c) $\bar{C}_{40}$ (d) $\bar{C}_{50}$ pour les expériences suivantes : un orbiteur quasi polaire (ronds), un orbiteur quasi polaire et le réseau de 4 stations sur Mars (triangles), 2 orbiteurs (x), 2 orbiteurs et le réseau de 4 stations sur Mars(+). L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES. 99
- 6.12 Variances a posteriori sur la restitution décadaire des zonaux (a) $\bar{C}_{20}$ (b) $\bar{C}_{30}$ (c) $\bar{C}_{40}$ (d) $\bar{C}_{50}$ pour les mêmes expériences que la figure 6.11. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES. 100

6.13	Matrices de corrélations correspondant à : (a) la simulations impliquant les deux orbiteurs, (b) la simulation impliquant un seul orbiteur quasi-polaire et le réseau de stations martiennes et (c) la simulation impliquant les deux orbiteurs et le réseau de stations martiennes. Les éléments de la matrice correspondent aux corrélations entre les zonaux ajustés au cours des 5 premières semaines de mission, 6 solutions pour des recouvrements périodiques à 10 jours	101
6.14	Sur une année martienne : influence de l'inclinaison pour un modèle de nutation perturbé, mauvais a priori (haut) et de la (mé)connaissance de l'effet de la FCN sur la nutation (bas) sur la restitution de $\bar{C}_{20}(t)$ - Modèle de <i>Yoder et al.</i> 1997. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.	107
6.15	Sur une année martienne : apport des mesures NEIGE et des itérations successives sur l'exactitude de la restitution des variations $\bar{C}_{20}$ en présence d'un modèle de rotation perturbé. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.	108
6.16	Sur une année martienne : apport des mesures NEIGE et des itérations successives sur la précision (variance a posteriori) de la restitution des variations de $\bar{C}_{20}$. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.	109
6.17	Itération 1 pour l'orbite quasi-polaire (haut) et celle à 45° (bas), cumul sur 5 semaines	110
6.18	Itération 3 pour l'orbite quasi-polaire (haut) et celle à 45° (bas), cumul sur 50 semaines	111
6.19	Orbite quasi polaire : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie du mouvement du pôle et du temps sidéral- Itération 3. L'unité de l'axe des ordonnées est le <i>mas</i> . Un angle d'une milliseconde d'arc (ou mas) correspond à une distance de 1.6 cm à la surface de Mars.	112
6.20	Orbite quasi polaire : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie de la FCN et du moment angulaire- Itération 3.	113

6.21	Orbite à 45° : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie du mouvement du pôle et du temps sidéral- Itération 3. L'unité de l'axe des ordonnées est le <i>mas</i> . On rappelle qu'un angle d'une milliseconde d'arc (ou mas) correspond à une distance de 1.6 cm à la surface de Mars.	114
6.22	Orbite à 45° : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie de la FCN et du moment angulaire- Itération 3.	115
7.1	MGS et MODY : nombre de données utilisées, rangées par type, pour restituer les harmoniques zonaux variables et k_2 . .	119
7.2	Modèles utilisés en entrée pour les restitutions des orbites précises de MGS et MODY.	120
7.3	Paramètres résolus pendant les restitutions d'orbites de MGS et MODY.	121
7.4	Le repère satellite RTN a pour origine le centre de masse du satellite et forme un trièdre direct.	122
7.5	MGS : recouvrements d'arcs d'un jour sur 6 heures de durée, février 1999, l'axe des abscisses est en jour Julien CNES, qui commence au 01/01/1950.	123
7.6	MGS : recouvrements d'arcs de 2 jours sur 6 heures de durée, février 1999, l'axe des abscisses est en jour Julien CNES, qui commence au 01/01/1950.	124
7.7	MGS : recouvrements d'arcs de 7 jours sur 2 jours, sortie d'occultation de Mars par le Soleil du mois d'août 2000, l'axe des abscisses est en jour Julien CNES, qui commence au 01/01/1950.	125
7.8	MODY : recouvrements d'arcs de 4 jours sur 2 heures, en 2006.	126
7.9	Evolution de l'angle de la normale au plan d'orbite par rapport à la <i>direction satellite-Terre</i> pendant la durée de la période traitée pour MGS - février 1999 à juillet 2006 - et MODY - début 2002 à début septembre 2006.	128
7.10	Evolution de l'angle (en degré) de la normale au plan d'orbite par rapport à la <i>direction satellite-Soleil</i> pendant la durée de la période traitée pour MGS - février 1999 à juillet 2006 - et MODY - début 2002 à début septembre 2006.	128

7.11	MGS (noir) et MODY (rouge) : évolution des facteurs d'échelle FS (haut), FD (bas), sur toute la durée de la période traitée, de février 1999 à juillet 2006 pour MGS et, avril 2002 à septembre 2006 pour MODY.	129
7.12	MGS (noir) et MODY (rouge) : évolution des résidus pour chaque type de mesure : de haut en bas, distance (en mètre), Doppler 2 voies (en Hz) et Doppler 1 voie (en Hz). La période traitée s'étend de février 1999 à juillet 2006 pour MGS et, d'avril 2002 à septembre 2006 pour MODY.	129
7.13	Solutions décadaires de $\bar{C}_{30,l}$ issue du cumul de MGS et MODY, avec en rouge le tracé de l'ajustement en amplitudes annuelle et semi-annuelle.	130
7.14	Comparaison des variations de $\bar{C}_{30}$ comme sortie du modèle de NASA Ames, comme solution extraite des données de HEND, et des variations de $\bar{C}_{30,l}$ comme solutions extraites à partir des données MGS, <i>Lemoine</i> [2006], et à partir des données MGS et MODY, <i>Konopliv et al.</i> [2006], en fonction de l'anomalie moyenne de Mars.	130
7.15	Comparaison des variations de $\bar{C}_{30}$ comme sortie du modèle de NASA Ames, comme solution extraite des données de HEND, et des variations de $\bar{C}_{30,l}$ comme solutions extraites à partir des données MGS sur la période 1, de février 1999 à mi-2002, et à partir des données de MGS et MODY sur la période 2, de mi-2002 à septembre 2006 respectivement, en fonction de l'anomalie moyenne de Mars.	131
7.16	Relation entre la valeur de k_2 et le rayon du noyau (r_{cmb} rayon de Mars jusqu'à la limite noyau-manteau ou cmb, <i>core mantle boundary</i>) via la modélisation de l'intérieur de la planète : en rouge on a la famille des modèles d'intérieur dit à manteau chaud, en bleu celle des modèles d'intérieur dit à manteau froid.	133

Liste des tableaux

2.1	Eléments orbitaux des sondes utilisées en simulation et de MGS, MODY et MEX	40
5.1	Période de l'orbite précessante en année terrestre (fréquence en rd/s), induites par le <i>potentiel gravitationnel statique</i> pour les orbites de MGS et MEX	67
5.2	Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du <i>potentiel gravitationnel variable</i> pour l'orbite de MGS	68
5.3	Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du <i>potentiel gravitationnel variable</i> pour l'orbite de MEX	68
5.4	Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du <i>potentiel gravitationnel variable</i> et <i>de marée</i> pour l'orbite de MGS	70
5.5	Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du <i>potentiel gravitationnel variable</i> et <i>de marée</i> pour l'orbite de MEX	71
6.1	Description des simulations.	94
6.2	Amplitudes (Amp.) et phases (ϕ) annuelles (A.) et semi-annuelles (S.A) de $\bar{C}_{20}$ and $\bar{C}_{30}$ restitués.	94
7.1	Amplitudes des variations saisonnières de $\bar{C}_{30}$	132

Introduction et Motivation scientifique

Dynamique atmosphérique et marée solaire de Mars

Mars est entourée d'une **atmosphère** ténue, composée à **95% de dioxyde de carbone** (CO_2) et de petites quantités d'autres gaz comme l'azote ou l'argon. La **circulation de la masse atmosphérique** suit **une cellule allant d'un pôle vers l'autre**. Au cours d'une année martienne, 687 jours, une **part significative de la masse de CO_2 atmosphérique (jusqu'à 30%)** est échangée au niveau des **calottes polaires**, grâce à un processus de condensation/précipitation l'hiver et de sublimation l'été. ***La distribution de masse à la surface de Mars varie donc au cours des saisons.*** Ces phénomènes climatiques à l'échelle de la planète produisent des **variations temporelles à très grande longueur d'onde du champ du gravité**, notamment des **zonaux $\bar{C}_{10}$** de son développement en harmoniques sphériques (de fait les coefficients "composites" de degrés 2 et 3). Le **potentiel gravitationnel du Soleil** induit **des déformations**, dites **de marée**, du **volume martien**. Ces **déformations** produisent un **potentiel perturbateur** en tout point extérieur à la planète, proportionnel à son **nombre de Love de degré 2 : k_2** . k_2 traduit la **réponse élastique** de la planète **au potentiel solaire** et contribue à **caractériser physiquement le noyau de Mars** (sa nature, solide ou liquide, et son rayon).

Dynamique atmosphérique, marée solaire et radio science

Une manière de **quantifier les transferts de la masse atmosphérique** et l'état du **noyau** de Mars est donc de **déterminer les perturbations inhérentes sur le mouvement d'un (ou plusieurs) satellite(s) artificiel(s)**. En effet, l'**orbite d'un satellite** autour de Mars joue le rôle d'un

capteur pour les forces dérivant d'un potentiel perturbateur. Les **perturbations de position et de vitesse** du satellite induites par k_2 et les variations temporelles du champ de gravité sont obtenues par l'**analyse de données de poursuite** (ou *tracking*) : mesures *Doppler* et mesures de *distance* (ou *range*). La *restitution de paramètres géophysiques* passe donc nécessairement par un *calcul d'orbite* (position et vitesse) *précise*.

La **poursuite**, ou *tracking*, de **satellites en orbite autour de la Terre** permet **une estimation des transports saisonniers de la masse de fluides géophysiques à l'échelle globale**. Ceci revêt un intérêt non seulement pour la géophysique mais aussi pour d'autres sciences de la Terre comme l'hydrologie, l'océanographie ou la météorologie [Chao et al., 2000 ; Chao, 2003]. Les **perturbations induites par les variations des harmoniques zonaux du potentiel gravitationnel sur l'orbite d'un satellite, les plus faciles à suivre à moyen et long terme, a donc été très tôt au centre des préoccupations de la géodésie spatiale**. Une bien *meilleure restitution de position et de vitesse des satellites* est désormais *possible* grâce à des instruments embarqués comme les *accéléromètres*, qui permettent une *évaluation des forces non gravitationnelles* agissant sur le mouvement des sondes. Ainsi, la précision de l'évaluation des variations de la contribution gravitationnelle aux perturbations d'orbite se trouve améliorée. Un exemple, la récente mission *GRACE* permet une détermination de ces variations de masse avec une précision jamais égalée jusqu'ici [Tapley et al., 2004]. Les deux satellites qui composent cette mission, lancés le 17 mars 2002, sont en orbite quasi-circulaire et à une altitude nominale de 500 kms. Ces deux satellites qui se suivent sont équipés d'un système de suivi satellite-satellite avec un lien en bande K (*K-band microwave link*), d'un récepteur GPS, d'un accéléromètre trois axes *SuperSTAR* pour mesurer les forces non-gravitationnelles et d'un senseur d'étoiles pour déterminer leur orientation inertielle. D'un autre côté, la précision des systèmes de poursuite de sonde s'est considérablement améliorée [Barlier et Lefebvre, 2001].

La **possibilité de détecter les variations saisonnières du champ de gravité de Mars via la poursuite d'une sonde** a été envisagée déjà par Chao et Rubincam [1990]. Extraire les variations saisonnières des harmoniques zonaux demande des données de poursuite (Doppler en particulier) très précises [Yoder et al., 1983]. Yoder et Standish [1997] et Smith et al. [1999a] affirment finalement que **la restitution des variations temporelles des harmoniques zonaux à partir de données Doppler de poursuite est possible** puisque la signature Doppler de la partie variable du signal gravitationnel (quelques mHz) sur l'orbite d'un satellite est suffisante. Cependant, **le niveau de bruit des données de poursuite Doppler en bande X (quelques mHz) reste proche de la signature de l'amplitude**

des variations qu'on veut restituer [Karatekin et al., 2005].

Récemment, les variations des premiers harmoniques zonaux de bas degré, $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ (composites), ont été évaluées à partir des données de poursuite (Doppler) de la sonde Mars Global Surveyor, MGS [Smith et al., 2001 ; Smith et Zuber, 2003 ; Lemoine, 2006]. Avec ces mêmes données de poursuite, mais en ajoutant les données de suivi des atterrisseurs martiens Viking et Pathfinder comme contrainte sur la rotation, Yoder et al. [2003] ont donné une estimation de $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ (en composantes annuelles et subannuelles), ainsi qu'une estimation de k_2 (0.153 ± 0.017). Cette valeur de k_2 indique que Mars possède un noyau liquide de rayon voisin de 1700 kms. Konopliv et al. [2006] ont eux travaillé avec un lot de données Doppler supplémentaire, celui de Mars Odyssey (MODY), estimant ainsi une solution combinée (MGS et MODY) de k_2 (0.152 ± 0.009) et des variations de $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$. La conclusion sur l'interprétation de cette nouvelle valeur de k_2 , très proche, reste évidemment inchangée.

Concernant le coefficient zonal pair extrait, ils obtiennent un signal principalement semi-annuel alors que le coefficient impair montre une signature plutôt annuelle. La mission de radio science MGS permet donc pour la première fois une mesure directe du cycle du CO_2 à l'échelle globale. Tous ces auteurs soulignent pourtant que les signaux de gravité restitués contiennent aussi des erreurs dues à la contribution des coefficients des harmoniques zonaux de plus haut degré. En effet, la *théorie des perturbations orbitales* [Kaula, 1966] indique qu'on peut utiliser la *dynamique d'un unique satellite* pour seulement *séparer les coefficients pairs des impairs*. Dans ce cadre là, il est par contre *impossible de séparer les coefficients pairs entre eux et de même pour les impairs*. La part des harmoniques zonaux pairs et impairs de plus de haut degré dans les incertitudes (variance a posteriori comme sorties du processus d'ajustement par moindres carrés) sur la restitution des paramètres $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ (composites) respectivement reste inconnue. Plus important encore, l'**exactitude** de l'expérience utilisée quant à la détermination des variations des harmoniques zonaux est **impossible à évaluer dans une mission réelle de radio science**, seules les **simulations** de missions permettent d'accéder à ce type d'information. Il semble donc important de juger exactement de la pertinence d'une mission de radio science en terme de restitution des coefficients zonaux de gravité via des simulations puis de s'attacher aux traitements des données de suivi de sonde comme MGS, MODY et Mars Express (MEX) afin de voir si la précision obtenue dans un cas favorable permet effectivement de contraindre un modèle de dynamique atmosphérique globale caractérisant la distribution saisonnière de masse de CO_2 .

Dynamique atmosphérique, Modélisation et estimation par d'autres types de mesures

Les **variations du champ de gravité** de Mars peuvent être **simulées via le calcul des variations de distribution de masse en surface à partir des sorties d'un modèle théorique à l'échelle de la planète ou Modèle de Circulation Globale (GCM)**. A partir des **données de pression de surface** des atterrisseurs *Viking*, *Chao et Rubincam*, [1990] ont estimé ces variations saisonnières. Des estimations de meilleure qualité ont été proposées par *Smith et al.* [1999a] qui ont utilisé des sorties de GCM. Cependant, ces résultats de GCM restent des approximations en l'absence de mesures altimétriques précises au niveau des régions polaires. *Dans cette étude*, on utilise la pression de surface et la masse de glace de CO_2 données par **les sorties des GCMs du Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD)** [*Forget et al.*, 1999] et du **centre de recherche NASA Ames** [*Haberle et al.*, 1999]. Il est important de noter que **ces deux modèles récents ont adopté la topographie MOLA** [*Smith et al.*, 1999b].

Une **autre estimation de la distribution saisonnière de la masse de CO_2 surfacique** vient des **mesures de l'instrument HEND** (High Energy Neutron Detector) qui fait partie du spectromètre à rayon gamma à bord **de la sonde MODY**. Il mesure le flux de neutrons depuis le 18 février 2002 [*Mitrofanov et al.*, 2003 ; *Litvak et al.*, 2004]. La présence d'hydrogène en surface ou sous la surface de Mars affecte fortement le flux de neutrons (provenant du bombardement cosmique) à cause de l'atténuation provoquée par les noyaux d'hydrogène avec lesquels il entre en collision. Effectivement, le CO_2 empêche les neutrons cosmiques d'interagir avec les noyaux d'hydrogène entraînant une augmentation du flux de neutrons mesuré i.e celui réémis par la surface de la planète. Les mesures effectuées en été, lorsqu'il n'y a pas de CO_2 en surface, sont utilisées pour déterminer la quantité d'hydrogène sous et en surface. Les variations saisonnières du flux de neutrons sont interprétées en terme de dépôts de CO_2 . Ce flux de neutrons est donc proportionnel à l'épaisseur de la couche de CO_2 surfacique de sorte qu'il devrait être le plus important pour une épaisseur de dépôt maximum. Localement, les variations de dépôt de CO_2 sur une année martienne ont été estimées à partir des données HEND par *Litvak et al.* [2004].

Dynamique atmosphérique, intérieur de Mars et rotation

Le cycle saisonnier du CO_2 et l'état du noyau impliquent aussi des variations de la rotation de Mars. Une autre manière de quantifier les transferts de la masse atmosphérique et l'état du noyau est donc d'observer leurs effets sur la rotation.

Théoriquement l'axe de rotation propre de Mars autour d'elle-même est sujet à des perturbations par rapport soit à un point fixe sur la croûte, on l'appelle alors mouvement du pôle, soit à des objets considérés comme fixes dans l'espace tels que les quasars, on l'appelle précession-nutation. La période du mouvement de précession, 171 000 ans, est en partie fonction de l'aplatissement dynamique de la planète, via $\bar{C}_{20}$. Pour Mars, l'influence des autres planètes ou de Phobos et Deimos, ses lunes, sur sa nutation est considérée comme négligeable. Par contre, le mouvement de rotation d'un possible noyau liquide et aplati au cœur de Mars, associé à la non rigidité de la planète, permet d'envisager une nouvelle source de perturbation en ce qui concerne la nutation. Ce mouvement de rotation peut être détecté en surface par sa résonance inhérente dans les nutations et permet de trancher sur l'état liquide ou solide du noyau. Ainsi s'il est liquide, grâce à l'amplification apportée aux nutations, on peut évaluer le moment d'inertie du noyau et son aplatissement [Folkner et al., 1997a].

Plusieurs études théoriques basées sur des GCM ont été menées sur les perturbations de la rotation de Mars induites par la dynamique atmosphérique [Cazenave et Balmino, 1981; Defraigne et al., 2000; Van den Acker et al., 2002; Sanchez et al., 2003]. Une nouvelle approche basée sur une expérience de science en réseau telle que NEtlander for Ionosphere and Geodesy Experiment, NEIGE [Barriot et al., 2001], a fait l'objet d'une étude analytique par Yseboodt et al. [2003]. Dans ce cadre là, en modélisant le lien radio Doppler entre un orbiteur et des atterrisseurs sur la surface de Mars, ils ont montré que la rotation propre en particulier, mais aussi l'amplification des nutations comme une réponse de Mars avec un noyau liquide, pouvait être déterminées avec précision sur une durée d'observation de 100 semaines.

D'un autre côté, des expériences ont été spécialement dédiées à l'évaluation des paramètres de rotation. A partir de mesures Doppler entre la Terre et des atterrisseurs comme Viking [Yoder et Standish, 1997] et Pathfinder [Folkner et al., 1997a; Folkner et al., 1997b], ce sont principalement les variations temporelles du temps sidéral martien, ou longueur du jour (noté LOD pour *length of day*), et la précession-nutation qui ont été déterminées. Par rapport à Viking, Pathfinder a permis une amélio-

ration significative de la précession essentiellement. Cependant, comme l'ont montré *Chao et Rubincam* [1990], **les variations de $\bar{C}_{20}$ et du LOD sont fortement corrélées** puisque les deux dépendent de la redistribution de la masse atmosphérique. De plus, dans le calcul des **variations du LOD**, en complément de la **redistribution de masse**, il faut tenir compte des **variations du moment angulaire atmosphérique associées aux vents zonaux**.

La finalité de l'estimation de la rotation martienne est bien d'apporter de nouvelles contraintes à la modélisation non seulement de la dynamique atmosphérique via la rotation propre par le calcul des masses mises en jeu dans les échanges avec Mars solide mais aussi de l'intérieur de la planète via les nutations.

Problématique et méthodes

Des signatures géodésiques du cycle saisonnier de dioxyde de carbone existent dans les variations saisonnières à la fois des harmoniques zonaux de gravité, $\bar{C}_{20}$ en particulier, et de la rotation. Dans le cadre d'une mission faisant intervenir des stations martiennes de poursuite d'une sonde, serait-il possible de décorréler ces deux paramètres géophysiques ?

De plus, venant compliquer l'analyse, les variations des vents zonaux participent aussi aux variations du LOD, à hauteur de 5% et 30% pour les amplitudes des variations annuelles et semi-annuelles respectivement [*Van den Acker et al.*, 2002].

Une autre difficulté vient des corrélations physiques [*Kaula*, 1966] qui lient les harmoniques zonaux de gravité entre eux, les pairs d'un côté et les impairs de l'autre, quand ils sont extraits de l'analyse des perturbations induites sur le mouvement d'un seul orbiteur. Existe-t-il des orbites de caractéristiques particulières ou des combinaisons d'orbites qui favoriseraient une décorrélation de ces paramètres géophysiques ?

Enfin, le Soleil est une autre source de perturbations orbitales (par la modification apportée au potentiel martien), caractérisée par k_2 qui est de fait corrélé aux harmoniques zonaux de gravité.

L'*objectif général* de ce travail est de préparer l'analyse des données :

- non seulement d'une possible mission de science en réseau à venir comme NEIGE,
- mais aussi de missions de radio science déjà en vol notamment en établissant la précision et l'exactitude,

dans le cadre certes très favorable de simulations (absence de frottement atmosphérique, de pression solaire directe ...) quant à la restitution des paramètres de rotation, des harmoniques zonaux du potentiel gravitationnel et de k_2 .

Plus précisément, il s'agit dans un premier temps de paramétrer la rotation (chapitre 1) et de rendre compte analytiquement de l'effet induit sur l'orbite d'une sonde autour de Mars par les harmoniques zonaux de gravité (chapitres 2 et 3) et par k_2 (chapitre 4). Le chapitre 5 présente à la fois une synthèse sur la contribution des potentiels étudiés dans les chapitres précédents, les problèmes inhérents à leur détermination en radio science, et enfin une description des outils mathématiques et numériques utilisés dans la suite de notre étude. Puis, vient l'établissement d'une stratégie adaptée à l'estimation des zonaux de gravité et de k_2 par le biais de simulations simples (chapitre 6) d'un certain nombre de configurations de mission de radio science y compris celle incluant une expérience de science en réseau. Il est alors nécessaire de se familiariser avec les variations attendues en terme de champ de gravité [Karatekin *et al.*, 2005] et donc de simuler les variations saisonnières de masse à partir de sorties de Modèles de Circulation Globale (GCMs) du LMD ou du centre NASA Ames. Enfin, on présentera les résultats obtenus à partir des données de poursuite (Doppler et de distance) des sondes MGS et MODY (chapitre 7) ainsi qu'une comparaison avec les variations des harmoniques zonaux de gravité issues des sorties de GCM et des mesures locales de dépôt de CO_2 via HEND.

On trouvera les résultats de cette thèse dans une série d'articles ou de rapports comme Duron [2002a et 2002b], Duron *et al.* [2003], Rosenblatt *et al.* [2004], Vienne *et al.* [2004], Karatekin *et al.* [2005], Balmino *et al.* [2006], Rosenblatt *et Duron* [2006] et Rosenblatt *et al.* [2006].

Chapitre 1

Orientation et rotation de Mars

La réponse de Mars, de par ses propriétés géophysiques, à un certain nombre d'excitations d'origine externe ou interne modifie la rotation quant à sa vitesse ou à la direction de son axe. La détermination des paramètres de rotation, comme le propose une expérience de géophysique telle que NEtlander for Ionosphere and Geodesy Experiment, NEIGE, [Barriot *et al.*, 2001], est donc essentielle dans l'étude et la compréhension de la réponse de Mars à toutes sortes d'interactions. Typiquement, l'étude de la rotation revient à analyser le mouvement de la planète en 3 composantes principales :

- le mouvement de l'axe de rotation de Mars dans l'espace avec une partie séculaire (171000 ans) appelée précession et une composante périodique appelée nutation ;
- le mouvement du pôle de Mars par rapport à un point fixe sur la croûte ;
- le mouvement de rotation propre de Mars autour de son axe.

Il est donc essentiel de faire connaissance avec le formalisme qui décrit la rotation. On rappellera donc dans ce chapitre l'approche cinématique de la rotation de Mars qui se base sur le passage d'un repère céleste à un repère lié à Mars et son lien avec une approche dynamique appliquée à un modèle de Mars considérée rigide.

1.1 Systèmes de référence et repères

En principe, la rotation devrait se résumer à des angles qui permettent d'orienter une planète par rapport à un repère quelconque. Une fois choisi ce référentiel, il suffirait de trois rotations élémentaires (soit trois angles) pour orienter la planète par rapport à ce repère de manière absolue. Et pourtant ce

sont 5 angles qui sont typiquement utilisés dans l'approche cinématique pour connaître l'orientation spatiale de la planète à tout instant. Afin de comprendre pourquoi, il faut regarder les différents référentiels qui seront utilisés dans cette approche. La **description cinématique du mouvement de rotation** de Mars est donnée par l'**ensemble des paramètres permettant de décrire l'orientation d'un repère de référence lié à Mars** (MRF, Martian Reference Frame) **par rapport à un autre repère**, extérieur celui-là (CRF, Celestial Reference Frame), et ce **via une matrice M** tel que $[CRF] = M[MRF]$.

Tout d'abord, on a besoin d'un **référentiel par rapport auquel on désire connaître l'orientation de la planète**. Il est naturel de choisir un **référentiel fixe**, ou quasi fixe par **rapport aux paramètres qui vont décrire la rotation de Mars**. Ce repère, dit **repère inertiel**, est fixe par rapport aux étoiles lointaines supposées fixes elles aussi au moins aux échelles de temps d'une mission spatiale. Il peut être choisi comme un **repère quelconque à une date T_0** . Ce **repère inertiel** fait partie des **repères dit non tournants**. Par exemple, le repère CRF est une **réalisation du système de référence conventionnel céleste** CRS comme l'est le TRF pour la Terre par rapport au TRS défini par les conventions décidées par l'IAU (International Astronomical Union) en 2000.

Puis vient la famille des **repères tournants**. En effet, si nous nous plaçons sur le sol de Mars, ce sont les étoiles qui tournent par rapport à nous. Le repère lié à la planète, dit **repère lié au corps à une date t** , est notre **repère tournant**.

Cependant, on introduit un autre repère, dit **repère intermédiaire**, qui permet de définir l'orientation d'un **axe de rotation moyen** comme l'illustre la figure 1.1. C'est un repère céleste ou inertiel qui peut être la **réalisation d'un système de référence non-tournant à une date T_0** . Pour la Terre par exemple, on choisit un repère céleste moyen (centré sur la Terre), qui précesse autour du pôle de l'écliptique moyen (mouvement du pôle moyen).

1.2 Approche cinématique

1.2.1 Les paramètres d'orientation

En notant $\vec{S}$ le vecteur exprimé dans le repère inertiel céleste, et $\vec{s}$ le même vecteur exprimé dans le repère lié au corps, la matrice de passage (rotation) M se décompose finalement de la manière suivante :

$$\vec{s} = W \ R \ PN \ \vec{S} \quad (1.1)$$

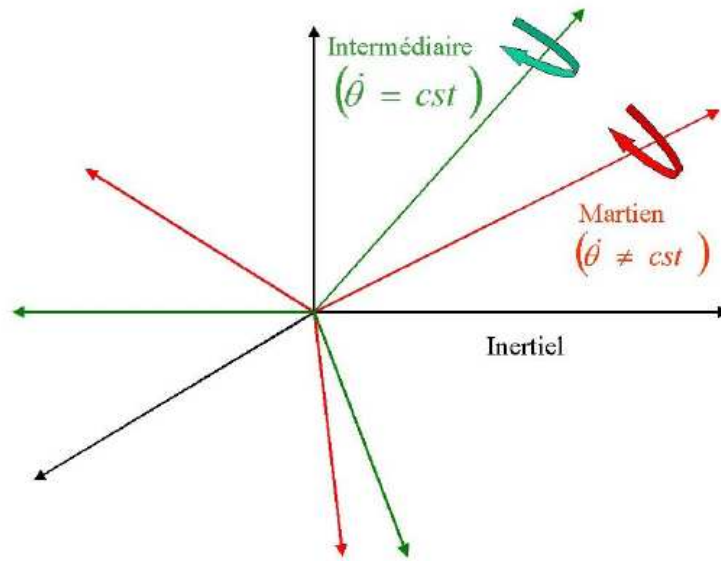


FIG. 1.1 – Passage du repère inertiel au repère lié au corps

avec

PN : Matrice de **précession - nutation**. Elle permet de passer du repère céleste de référence (inertiel) au repère intermédiaire non tournant (céleste vrai) de la date.

R : Matrice du **temps sidéral**, qu'on note **UT** (pour *Universal Time* ou *temps universel*). Elle permet de passer du repère intermédiaire non tournant de la date au repère intermédiaire tournant. C'est la rotation propre de la planète sur elle-même.

W : Matrice du **mouvement du pôle**. Elle permet de passer du repère intermédiaire tournant au repère lié au corps.

Le mouvement de rotation de Mars est historiquement référencé par rapport au repère céleste moyen terrestre. De plus, les sondes en orbite autour de cette planète sont suivies par des stations basées sur Terre. On choisit donc comme **repère inertiel**, le repère **céleste moyen terrestre à T_0** , et il s'agit d'**orienter l'axe de rotation moyen de Mars par rapport à ce repère**. On effectue le passage d'un repère à l'autre à l'aide de deux matrices de rotation élémentaire d'angles notées N et J . Cela permet de repérer l'orbite *moyenne* de Mars à T_0 par rapport à l'équateur moyen terrestre et à l'axe $\vec{Ox}$ du repère céleste (inertiel) moyen terrestre à la date T_0 . Ensuite, deux angles d'ascension droite α_0 et de déclinaison δ_0 permettent de passer à l'équateur de Mars à la date T_0 , ou, de manière équivalente à l'axe de rotation

moyen de Mars à la date T_0 .

Les variations de ces angles au cours du temps (α et δ , accessibles à l'observation), permettent de décrire l'orientation de l'axe instantané de rotation de Mars.

1.2.2 Les paramètres du mouvement du pôle

La matrice de mouvement du pôle permet de passer du repère intermédiaire tournant au repère lié au corps. En effet, l'axe instantané de rotation de la planète n'est pas fixe par rapport au sol. On peut donc définir le mouvement de l'axe du repère lié à la croûte, dit axe de figure, par rapport à l'axe de rotation de la planète, ou l'inverse.

Ainsi le mouvement appelé mouvement du pôle définit l'orientation de l'axe instantané de rotation par rapport à l'axe de figure. Il suffit donc de deux rotations élémentaires, soit deux angles X_p et Y_p représentés sur la figure 1.2 : X_p définit l'angle de rotation effectué autour de l'axe Y, ce qui équivaut donc à un déplacement à la surface suivant la direction X ; et Y_p définit l'angle de rotation effectué autour de l'axe X, ce qui équivaut donc à un déplacement à la surface suivant la direction Y. La matrice de rotation du mouvement du

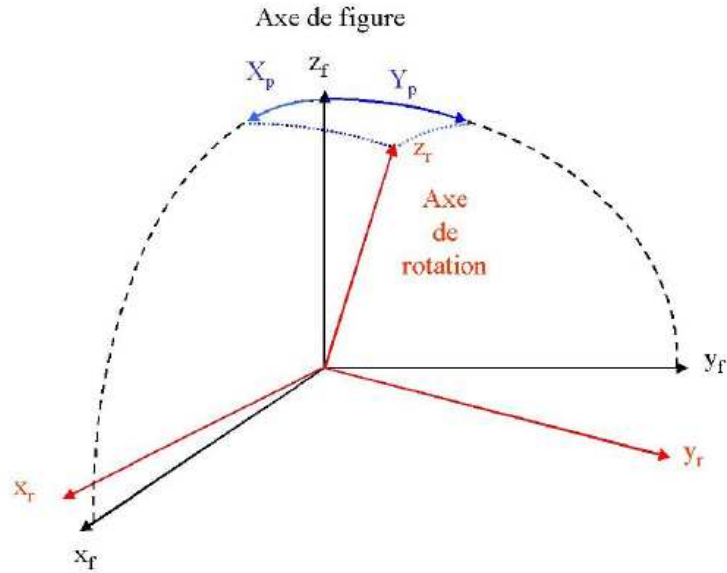


FIG. 1.2 – Description des angles du mouvement du pôle

pôle telle qu'elle a été définie dans la relation 1.1, c'est-à-dire dans le sens

axe de rotation propre vers axe de figure, prend la forme suivante :

$$W = R_2(-X_p) R_1(-Y_p) \quad (1.2)$$

On remarquera que la position des matrices R_1 et R_2 n'a que peu d'importance vue que les angles X_p et Y_p sont très faibles : Les matrices sont commutables.

Ces deux angles de mouvement du pôle X_p et Y_p sont donnés sous forme de séries trigonométriques en cosinus - sinus, possédant principalement 3 fréquences (annuelle, semi-annuelle, et Chandler). Ainsi les paramètres de mouvement du pôle sont les amplitudes de ces séries trigonométriques.

1.2.3 Les paramètres de nutation

La matrice de précession/nutation PN permet de passer du repère inertiel au repère intermédiaire non tournant. Il s'agit donc d'orienter l'axe de rotation de la planète par rapport aux étoiles fixes.

Dans le cas de la **Terre**, les angles de nutation (en obliquité ε et en longitude ψ) sont repérés par rapport à un repère inertiel lié à la Terre qui correspond à l'équateur moyen à une date T_0 . Pour **Mars**, on peut choisir d'orienter l'axe de rotation moyen de Mars par rapport à un repère inertiel terrestre à la date T_0 , grâce aux angles d'ascension droite et de déclinaison α et δ illustrés sur la figure 1.3. Les modèles de nutation rigide de Mars sont quant à eux

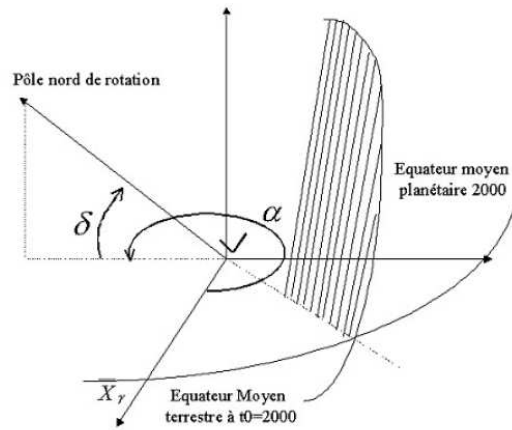


FIG. 1.3 – Description des angles α et δ , paramètres du modèle de nutation utilisé

donnés dans des *repères inertiels martiens et non terrestres*, repères beaucoup plus pratiques pour développer ces théories. Les modèles de nutations

se présentent donc comme des séries trigonométriques pour les angles ε et ψ , obliquité et longitude de l'équateur moyen à la date t par rapport à l'équateur moyen à la date T_0 . Ces angles sont représentés sur la figure 1.4. Il est donc essentiel de comprendre quelle est la correspondance entre ces couples (ε, ψ) et (α, δ) . Ainsi la combinaison des angles ε et ψ permet de connaître la position de l'équateur moyen martien à date t par rapport à l'équateur moyen martien à la date T_0 . Or ce qui nous intéresse ici, c'est cette position mais par rapport à l'équateur moyen terrestre à la date T_0 . On construit donc le passage de l'équateur moyen martien à la date T_0 à l'équateur moyen terrestre à la date T_0 , par les rotations d'angles N et J , illustrés sur la figure 1.4. Les angles de nutation α et δ sont donc obtenus par projection des angles ε et ψ suivant les matrices de rotations N et J . Les correspondances entre tous ces angles sont représentées sur la figure 1.4. Nous utiliserons les angles $(\alpha,$

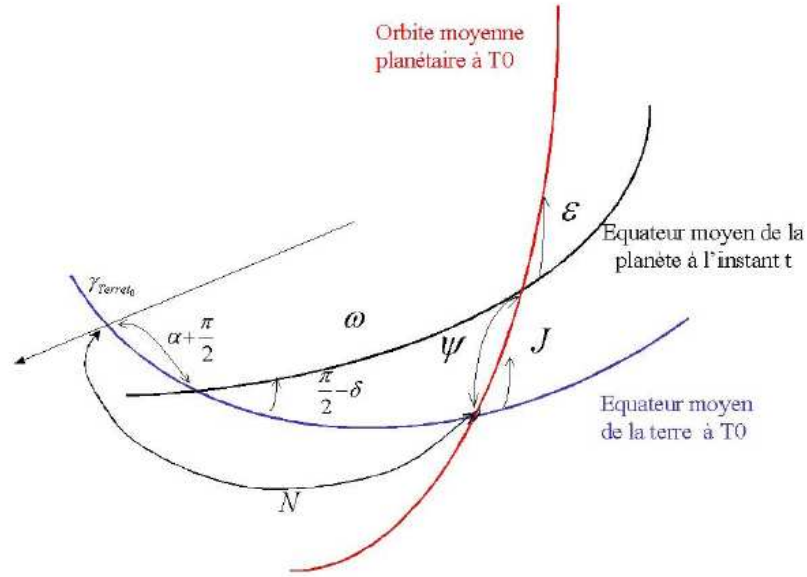


FIG. 1.4 – Description des différents formalismes pour caractériser les angles de nutation (NB : *Reasenberg et King* [1979] et *Folkner et al.* [1997b] utilisent la notation I au lieu de ε

δ) pour nos modèles de nutation. Les angles de nutation qui nous intéressent ne sont pas ces angles (α, δ) qui sont référencés par rapport à la Terre, mais bien les angles de nutation qui donnent l'orientation de l'équateur moyen de Mars à une date t par rapport à l'équateur moyen de Mars à la date T_0 . Afin d'obtenir ces angles avec nos modèles en (α, δ) , nous devons opérer en deux étapes illustrées également sur la figure 1.5 :

$$\begin{pmatrix} \text{Equateur} \\ \text{Mars} \\ \text{date } t \end{pmatrix} \begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{Equateur} \\ \text{Mars} \\ \text{date } T_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Equateur} \\ \text{Mars} \\ \text{date } t \end{pmatrix} \begin{matrix} (\alpha, \delta) \\ \longleftrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{Equateur} \\ \text{Terre} \\ \text{date } T_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\alpha_0, \delta_0) \\ \longleftrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{Equateur} \\ \text{Mars} \\ \text{date } T_0 \end{pmatrix}$$

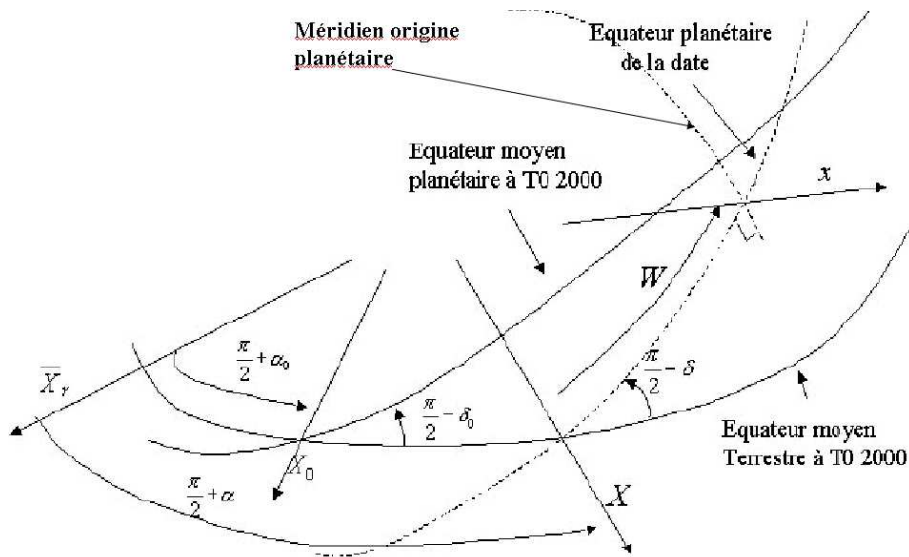


FIG. 1.5 – Description des angles en (α, δ) nécessaires à l'orientation de l'équateur moyen à une date t par rapport à la date T_0

Ainsi la matrice PN prend la forme suivante :

$$PN = R_1\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) R_3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R_3\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) R_1\left(-\frac{\pi}{2} + \delta_0\right) \quad (1.3)$$

avec :

- α : ascension droite à la date t de l'équateur de Mars par rapport à l'équateur Terre (J2000)
- δ : déclinaison à la date t
- α_0 : ascension droite à la date T_0 (J2000)
- δ_0 : déclinaison à la date T_0 (J2000)

1.2.4 Les paramètres du temps sidéral

Les composantes qui nous intéressent dans le temps sidéral sont les variations saisonnières de la **longueur du jour** (définie par $LOD = \dot{UT}$), notées ΔLOD , celles dues au cycle saisonnier du CO_2 notamment. Le temps sidéral est caractérisé par une seule rotation, décomposée en un terme constant ω bien connu et un terme variable $\delta\omega$ inconnu, de la forme :

$$R = R_3(\omega + \delta\omega) \quad (1.4)$$

$\delta\omega$ a pour origine à la fois les échanges saisonniers de masse entre les calottes polaires et une projection sur l'axe de rotation z de l'effet induit par les nutations. Deux rotations autour des axes x et y induisent donc une modification de la rotation propre en z et le terme $\delta\omega$ se décompose en :

$$\delta\omega = \delta\omega_{CO_2} - \delta\omega_{nutations} \quad (1.5)$$

$$\delta\omega = \delta\omega_{CO_2} - \sin \delta_0 \cdot (\alpha - \alpha_0) \quad (1.6)$$

avec α , α_0 et δ_0 les angles de nutations aux dates t et T_0 définis au paragraphe précédent.

C'est bien sûr le terme $\delta\omega_{CO_2}$ qui nous intéresse ici, et que nous exprimons sous la forme d'une série trigonométrique (cosinus, sinus) à 2 fréquences (annuelle et semi-annuelle). Les paramètres du temps sidéral sont donc en partie les amplitudes de cette série trigonométrique.

1.2.5 Variations des paramètres d'orientation

Dans le cadre d'une expérience dédiée à la détermination de la rotation de Mars comme NEIGE, il est intéressant de déterminer les **composantes de périodes annuelles/sub-annuelles** de la **rotation propre** et du **mouvement de l'axe de rotation dans un repère lié à la planète (mouvement du pôle)**, et **dans un repère céleste** (contributions de Mars non-rigide aux **nutations**). Elles contiennent en fait l'information géophysique, c'est à dire les variations saisonnières du CO_2 atmosphérique et celles liées à la structure interne (noyau liquide ou solide). Nous avons en effet les liens suivants :

- les variations de la **rotation propre** correspondent aux variations saisonnières du LOD dues aux phénomènes climatiques saisonniers de condensation/sublimation du CO_2 au niveau des calottes polaires ;
- en plus des variations connues, les variations de **l'orientation de l'axe instantané de rotation** correspondent au mouvement du pôle et aux

nutations pour une planète non-rigide qui modifient la réponse aux excitations gravitationnelles extérieures, et modélisée pour Mars considérée comme rigide.

1.2.6 Rotation instantanée vs paramètres d'orientation

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ (voir annexe A) peut s'écrire à partir de la matrice de passage M (M la matrice de passage définie au paragraphe 1.2.1) qui relie le MRF et le CRF de la manière suivante :

$$\vec{\omega}_{TRF} = M^{-1} \cdot \dot{M} \quad (1.7)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} m = m_1 + im_2 = \frac{1}{LOD} (\omega_1 + i\omega_2) \\ m_3 = \frac{\omega_3}{LOD} - 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

D'après l'annexe A, on peut écrire $\vec{\omega}$ comme suit :

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{X}_p \\ \omega_2 = -\dot{Y}_p \\ \omega_3 = LOD(1 - \frac{\Delta LOD}{LOD}) \end{cases} \quad (1.9)$$

Si on pose $p = X_p - iY_p$ (voir paragraphe 1.2.2), on obtient une expression différentielle des composantes du mouvement du pôle ($\dot{p} = \dot{X}_p - i\dot{Y}_p = \omega_1 + i\omega_2 = LOD.m$) .

1.3 Simulations numériques : modèles

L'expérience NEIGE est dédiée en partie à l'évaluation des paramètres de rotation de Mars. La durée de cette expérience doit donc couvrir une année martienne au minimum (environ 687 jours) si on veut extraire des signatures annuelles et interannuelles. Ainsi nos simulations numériques couvriront une période de 700 jours qu'on aura découpé en arcs d'orbite d'une semaine. Il est plus approprié de limiter le nombre de paramètres décrivant les variations de la rotation en ce sens que le nombre de mesures disponible pendant l'expérience risque d'être limité.

1.3.1 Le temps sidéral et le mouvement du pôle

Au lieu de prendre une série temporelle avec une valeur à chaque pas de temps pour modéliser les **variations saisonnières du temps sidéral**, on a choisi une décomposition plus réduite en **4 paramètres** : une somme de sinus et cosinus caractérisant les amplitudes annuelle et semi-annuelle. Les valeurs **initiales** des amplitudes choisies sont les estimations effectuées par *Yoder et Standish* [1997].

De la même manière, on a considéré le **mouvement du pôle** non pas comme une série temporelle mais comme une somme de sinus et cosinus sur 3 fréquences : annuelle, semi-annuelle et Chandler. On a donc 2 amplitudes associées à chaque fréquence (6 paramètres) pour chacune des 2 composantes X et Y soient **12 paramètres**. Les valeurs **initiales** de ces amplitudes ont été établies à partir d'un modèle de circulation globale [**Van den Aker et al.**, 2002].

1.3.2 Les nutations et l'intérieur de Mars

Concernant les **nutations** de Mars, nous utilisons un modèle de nutation **rigide** [*Roosbeek*, 2000], couplé à une fonction de transfert, tenant compte de la **non rigidité**.

La réponse de la planète, au sens des nutations **rigides**, peut être calculée sur la base du forçage gravitationnel imposé par ses satellites naturels (Phobos et Deimos) et le Soleil. Cette réponse présente donc des périodes identiques aux périodes de révolution de, ou autour de, ces corps qui lui ont donnée naissance (annuelle, semi-annuelle ...). De facto, dans le cadre de nos simulations, nous ne prenons en compte que les six principales nutations solaires du modèle de *Roosbeek* [2000].

Analytiquement, les nutations rigides sont souvent exprimées en longitude ($\delta\psi$) et obliquité (δI^1), mais elles peuvent tout aussi bien s'écrire sous la forme de nutations progrades et rétrogrades en utilisant le formalisme proposé par *Mac Carthy* [1996] soit :

$$p_m e^{i\alpha_m t} + r_m e^{-i\alpha_m t} = \delta I_m + i \sin(I_0) \delta\psi_m$$

Cependant, la réponse de Mars, supposée rigide/solide, à un forçage solaire peut être influencée par la résonance d'un éventuel noyau liquide ou d'une hypothétique élasticité. Ainsi, par l'introduction de **deux paramètres F et σ_0** au sein d'une fonction de transfert [*Sasao et al.* 1980] (on peut aussi se repor-

¹ I est identique à notre angle ε défini en 1.2.3 (cf. aussi figure 1.4)

ter à *Folkner et al.* [1997b] et *Yoder and Standish* [1997]), on peut modéliser les nutations **non-rigides** malgré la limitation que constitue la non-linéarité inhérente à une telle modélisation. On considère un modèle simple de Mars à deux couches : un manteau solide et un noyau liquide. D'après *Sasao et al.* [1977, 1980], nous pouvons écrire, en première approximation, la fonction de transfert des nutations² pour une planète non rigide comme suit :

$$Ft = 1 + \frac{C_f}{C_m} \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_0} \left(1 - \frac{\gamma}{e}\right)$$

Ft est le rapport entre les amplitudes de la nutation non-rigide³ et de la nutation rigide considérée. On remarque la présence de la résonance au dénominateur de la fonction. On peut aussi écrire Ft plus simplement :

$$Ft = 1 + F \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_0}$$

F , le **facteur de moment angulaire** (*Core momentum factor*), traduit l'état physique du noyau (par exemple, $F = 0$ implique un noyau solide) mais aussi sa taille et son aplatissement. Dans la simulation des mesures, on s'attache exclusivement à l'analyse de la non-rigidité et on choisit une **valeur initiale** pour F de 0.02 qui correspond théoriquement à une période de la FCN (voir définition au paragraphe suivant) de 247 jours et **un noyau liquide de 1468 kilomètres de rayon**, plus petit que celui déduit des données de poursuite de la sonde Mars Global Surveyor, MGS, [Yoder et al., 2003] ou de la combinaison des données de suivi de MGS avec celles de Mars Odyssey, MODY, [Konopliv et al., 2006] qui est d'environ 1700 kms.

σ est la fréquence de la nutation considérée dans un référentiel inertiel (avec son signe). Quant à σ_0 , il représente la fréquence de la **FCN**, mode de nutation libre du noyau (ou *Free Core Nutation mode*), rétrograde donc négative, pleinement dépendante des propriétés du noyau elle aussi [Van Hoolst et al., 2000]. On considère que la fréquence de la FCN peut prendre des valeurs dans deux intervalles bien distincts :

- un intervalle compris entre $-(2\pi)/200$ et $-(2\pi)/280$ rad/j qui correspond à un modèle géophysique de noyau liquide sans graine,
- un intervalle compris entre $-(2\pi)/80$ et $-(2\pi)/160$ rad/j qui correspond à un modèle géophysique de noyau liquide avec une grande graine.

²au premier ordre en e

³Par abus de langage, on appelle nutations rigides les nutations calculées en considérant Mars comme rigide et, nutations non rigides les nutations calculées en considérant une élasticité et/ou un noyau liquide pour la planète

Analytiquement, *Sasao et al.* [1980] nous permettent d'exprimer F et σ_0 ⁴ en fonction non seulement des moments d'inertie polaires de la planète C ($C_m = C - C_f$ le moment d'inertie du manteau) et du noyau liquide C_f mais aussi d'un paramètre qui traduit la déformation élastique de la planète γ (du même ordre de grandeur que e_f) et de deux paramètres d'aplatissement dynamique, celui de la planète e (tel que $e = (C - A)/A$) et celui du noyau liquide e_f (tel que $e_f = (C_f - A_f)/A_f$) :

$$F = \frac{C_f}{C - C_f} \left(1 - \frac{\gamma}{e}\right) \quad (1.10)$$

$$\sigma_0 = \Omega_0 \frac{C}{C - C_f} e_f \left(1 - \frac{\beta}{e_f}\right) \quad (1.11)$$

avec γ qui est une fonction de h^f le nombre de Love de déformation à la frontière noyau/manteau (noté *CMB* pour *Core Mantle Boundary*) induit par le potentiel gravitationnel, et de q_0 le rapport entre l'accélération centrifuge et gravitationnelle à l'équateur. β (sans dimension) traduit la contribution de la déformation élastique à la frontière noyau-manteau et est une fonction de h_1^f le nombre de Love de déformation à la *CMB* induit par une pression fluide sur cet interface. γ/e vaut approximativement 0.018 et β/e_f est compris entre 0.02 et 0.04, ils sont donc petit devant 1. Les variations de γ et β en fonction de la taille du noyau peuvent être négligées dans les équations (1.10) et (1.11). En reprenant le modèle simple, à deux couches, de *Folkner et al.* [1997b], on donne ici les expressions des coefficients nominaux r'_m et p'_m et donc de la convolution de nos deux paramètres géophysiques à résoudre :

$$r'_m = r_m \left(1 + F \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \sigma_0}\right)$$

$$p'_m = p_m \left(1 + F \frac{\alpha_m}{\alpha_m - \sigma_0}\right)$$

1.3.3 Perturbations des modèles a priori

Nos connaissances du mouvement du pôle et des variations du *LOD* sont a priori limitées. Donc, dans nos simulations de l'expérience NEIGE, les modèles a priori respectifs sont définis par rapport à un mouvement du pôle d'amplitude nulle et des variations saisonnières du temps sidéral d'amplitudes nulles aussi.

⁴L'expression de la fréquence de la FCN est donné par *Sasao et al.* [1980] dans l'approximation d'un manteau rigide et exprimée dans un repère inertiel.

Comme l'incertitude principale réside dans la nature liquide ou solide du noyau, on s'attachera essentiellement dans la suite de cette étude à perturber le modèle en F et σ_0 .

Chapitre 2

Equations du mouvement orbital

2.1 Orbitographie : éléments orbitaux

Une application du **principe fondamental de la dynamique**, l'étude du mouvement des corps dans l'Univers, se fait toujours par l'établissement d'équations différentielles qui lient les accélérations des corps aux forces agissant sur eux, et mènent à un système d'équations différentielles : les **équations du mouvement**. Le problème le plus simple implique uniquement deux corps isolés en interaction gravitationnelle ; il présente deux avantages principaux : (1) le système d'équations différentielles inhérent est intégrable de manière analytique (la précision dépend de la complexité plus ou moins grande du potentiel mutuel), menant de ce fait à la définition de variables à la signification physique simple ; (2) en première approximation, il décrit de manière réaliste le mouvement, puisque les corps étudiés sont, généralement, soumis principalement à l'attraction gravitationnelle, en l'occurrence l'attraction exercée par Mars sur un satellite artificiel. L'écriture des équations du mouvement, exprimées en coordonnées rectangulaires, mène au système suivant (on note $\mu = GM_{\text{Mars}}$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu}{r} \\ \ddot{y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu}{r} \\ \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{r} \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ le rayon vecteur, $G = 6.6710^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$ la constante de la gravitation universelle et $M_{\text{Mars}} = 6,42.10^{23} \text{ kg}$.

Rappelons qu'en **hypothèse képlérienne**, le mouvement d'un satellite dans un potentiel central en $1/r$ conduit, au sens de la mécanique classique, à 6 **intégrales premières** remarquables. Les 6 quantités associées se calculent à l'aide du rayon vecteur $\vec{r}$, du vecteur vitesse $\vec{V}$ de la sonde, et du temps au point courant t . L'intégration du système non perturbé conduit ainsi à la définition des **éléments elliptiques** traditionnels, **éléments orbitaux**, qui permettent de positionner de manière géométrique un satellite sur son orbite : $a, e, i, \Omega, \omega, M$ (voir leur définition exacte au paragraphe suivant). Les 5 premiers paramètres orbitaux sont *constants*, et sont les valeurs des intégrales premières du mouvement, le sixième M variant linéairement en fonction du temps t .

En présence de **perturbations**, les vecteurs fondamentaux ($\vec{r}$ et $\vec{V}$) diffèrent de ceux d'un mouvement képlérien, de manière lentement variable, entraînant une dérive des éléments orbitaux. Sous l'effet d'une perturbation, l'orbite réelle n'est donc plus une ellipse képlérienne. Pour chaque position orbitale $s(t)$, une orbite képlérienne $o(t)$ proche de l'orbite réelle est définie : c'est l'**orbite osculatrice à l'instant t** obtenue en supposant que, à cet instant, on supprime toutes les forces autres que celles en $1/r^2$ (résultant d'une approximation du corps central par une sphère constituée de couches concentriques homogènes). L'orbite osculatrice est une **ellipse** orientée dans l'espace :

- la **taille** et la **forme** de l'ellipse sont données par le demi-grand axe a et l'excentricité e .
- la **position** du satellite sur l'ellipse est donnée par f , appelée anomalie vraie, qui est une fonction de e et de M , anomalie moyenne (telle que $n = dM/dt$ soit le moyen mouvement).

Ces trois paramètres (voir figure 2.1) donnent donc la **position du satellite dans le plan orbital**.

Trois angles d'Euler caractérisent l'**orientation du plan orbital** par rapport au corps central (voir figure 2.2). Il s'agit d'abord de la longitude du noeud ascendant, Ω . Le plan orbital coupe le plan équatorial de Mars selon une droite appelé *la ligne des noeuds*. Un noeud est l'endroit où le satellite traverse le plan équatorial. Dans son parcours nord-sud, c'est le noeud descendant ; dans son parcours sud-nord c'est le noeud ascendant. Un deuxième angle repère l'inclinaison i du plan orbital par rapport au plan équatorial de la planète. Enfin l'argument du périastre ω (qui joue le rôle de position initiale), permet de connaître la position du point de l'orbite le plus proche de Mars. C'est par rapport au périastre qu'est définie f , l'anomalie vraie dont nous avons parlé plus haut.

La description en éléments orbitaux, dits osculateurs (voir paragraphe 2.4), permet ainsi de caractériser qualitativement l'évolution du plan d'orbite. Ty-

piquement, a , e , i , Ω , ω sont lentement variables et M , l'élément orbital qui évolue le plus rapidement dans le temps, est une fonction linéaire du temps à laquelle se superposent de petites variations (en général).

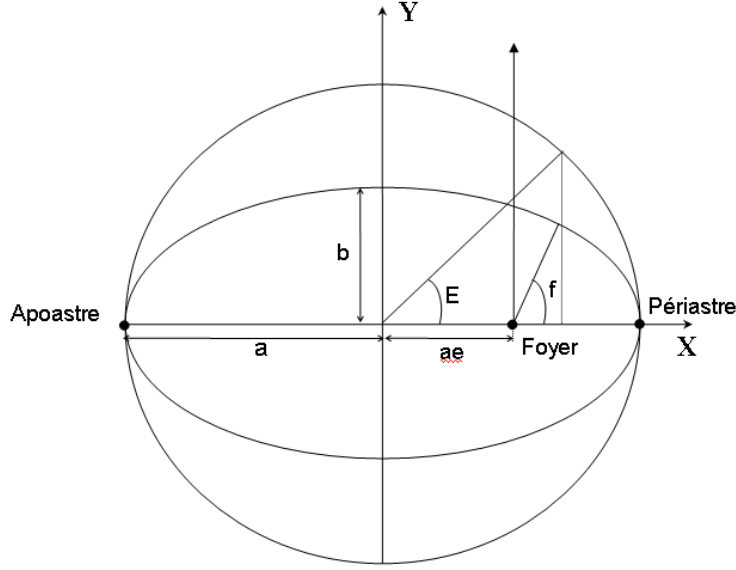


FIG. 2.1 – Paramètres de l'ellipse dans le plan orbital

L'orbite des missions de radio science martienne est en général quasi-circulaire ($e \geq 10^{-3}$) et héliosynchrone (i.e que l'angle entre le plan de l'orbite et la direction du Soleil est quasi-constant¹) donc quasi-polaire (avec $i > \pi/2$). Comme on peut le voir dans la table 2.1, c'est effectivement le cas pour les orbites des sondes MGS et MODY, ou encore du satellite Mars Premier qui était prévu pour la mission de science en réseau NEIGE [Barriot et al., 2001]. La sonde Mars Express (MEX) a elle une orbite excentrique, caractérisée par $e = 0.6$, et d'inclinaison $i = 86.5^\circ$. La table 2.1 donne aussi les valeurs des éléments orbitaux des sondes utilisées en simulation.

¹i.e l'angle entre la ligne des noeuds (qui permet de définir Ω) et le méridien du Soleil (qui permet de définir $\omega_{\text{Soleil/Mars}}$) est constant, autrement dit, la ligne des noeuds dérive autour de l'axe nord-sud à la même vitesse angulaire $\omega_{\text{Soleil/Mars}}$ que le soleil autour de Mars. **L'heure solaire locale au noeud ascendant est constante**

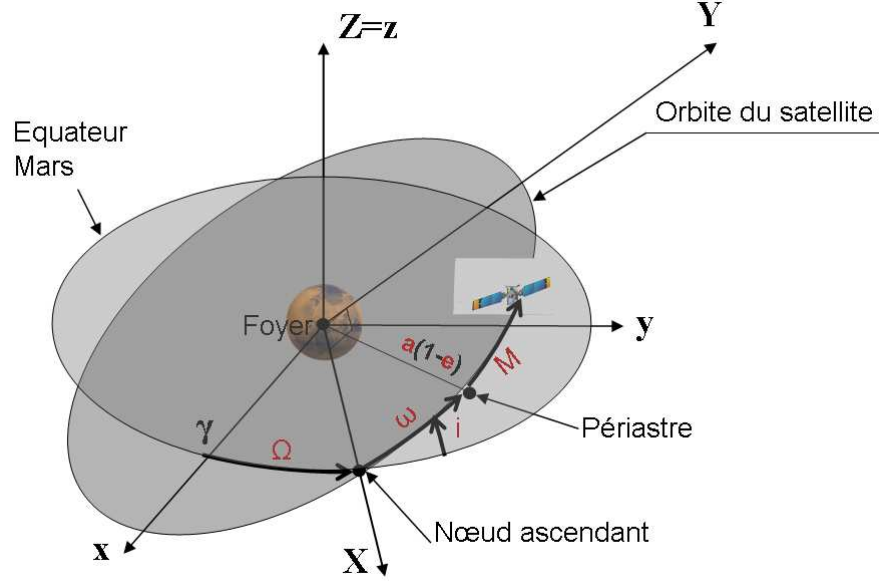


FIG. 2.2 – Paramètres képlériens d'orientation du plan orbital

TAB. 2.1 – Eléments orbitaux des sondes utilisées en simulation et de MGS, MODY et MEX

	Sondes en simulation		Sondes en vol		
	Sonde 1	Sonde 2	MGS	MODY	MEX
a (km)	3896	3796	3768	3796	9355
i (deg)	93.2	50	92.9	93.1	86.5
e	0.001	0.021	0.01	0.01	0.60

2.2 Le potentiel gravitationnel - $U_p = \mu/r + \mathcal{R}$

Les forces qui agissent sur le mouvement d'un satellite autour de Mars sont d'origine gravitationnelle, via le potentiel gravitationnel du corps central, mais aussi non gravitationnelle, via la pression de radiation solaire directe, le rayonnement IR (infra rouge) de la surface de Mars, l'albedo, le freinage atmosphérique, les manoeuvres de désaturation des roues à inertie (non réductibles à des couples purs).

On se place dans un repère inertiel d'origine O le centre de masse de Mars. La planète a une distribution de densité $\rho(P)$ telle que, en chaque point $P(x', y', z')$ intérieur, à la distance r' de O , la masse élémentaire dm' de l'élément de volume dV' s'écrit $dm' = \rho(P)dV'$. La force gravitationnelle en chaque point $M(x, y, z)$ extérieur au volume martien, à la distance r de O ,

dérive d'une fonction de force U_p , le **potentiel gravitationnel** :

$$U_p(x, y, z) = \int \int \int_{V'} \frac{G}{\Delta} dm' = \frac{G}{r} \int \int \int_{V'} W dm'$$

avec Δ la distance du point P de Mars au point M . W est la fonction $\frac{r}{\Delta}$, que l'on développe habituellement en harmoniques sphériques.

On fait maintenant l'hypothèse que l'origine du repère est au centre de gravité de la planète, et l'axe Z du repère inertiel coïncide avec l'axe principal d'inertie lui-même voisin de l'axe de rotation. Le développement du potentiel gravitationnel en harmoniques sphériques (voir le détail des calculs en Annexe B ou *Kaula* [1966]) s'écrit alors :

$$U_p = \frac{GM_{\text{Mars}}}{r} \left(1 - \sum_{l \geq 2} J_l \left(\frac{R_0}{r} \right)^l P_l(\sin \varphi) + \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{R_0}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) \right) \quad (2.1)$$

avec λ et φ les longitude et latitude respectivement, R_0 le rayon équatorial martien et les P_{lm} sont les fonctions de Legendre. Les coefficients (J_l, C_{lm}, S_{lm}) sont les coefficients de Stokes. Les coefficients normalisés, $\bar{C}_{lm}$ et $\bar{S}_{lm}$, sont définis par $(\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}) = \nu_{lm}(C_{lm}, S_{lm})$ avec :

$$\nu_{lm} = \sqrt{(2 - \delta_{0m})(2l + 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!}}$$

Leur sont associées dans ce cas les fonctions de Legendre normalisées $\bar{P}_{lm} = P_{lm}/\nu_{lm}$ telles que :

$$\frac{1}{4\pi} \int \int_{\text{sphère unité}} \bar{P}_{lm}^2(\sin \varphi) \left(\frac{\cos^2 m\lambda}{\sin^2 m\lambda} \right) \cos \varphi d\varphi d\lambda = 1$$

Ceci inclue le cas $m = 0$.

On distingue donc deux **classes** de termes lors de l'intégration :

- ceux qui **ne dépendent pas de la longitude** : les harmoniques **zonaux** J_l , également notées C_{l0} avec $C_{l0} = -J_l$.
- ceux qui **dépendent de la longitude** : d'abord les harmoniques dits **tesséraux** définis par $l \neq m$, l et $m \neq 0$. Enfin, les harmoniques **sectoriaux** définis par $l = m$ et $l, m \neq 0$. Ce sont les termes C_{mm} et S_{mm} . Par abus de langage et lorsqu'on ne le précise pas, on désigne par *harmoniques tesséraux* l'ensemble des coefficients de Stokes (C_{lm} et S_{lm}) d'ordre m non nul.

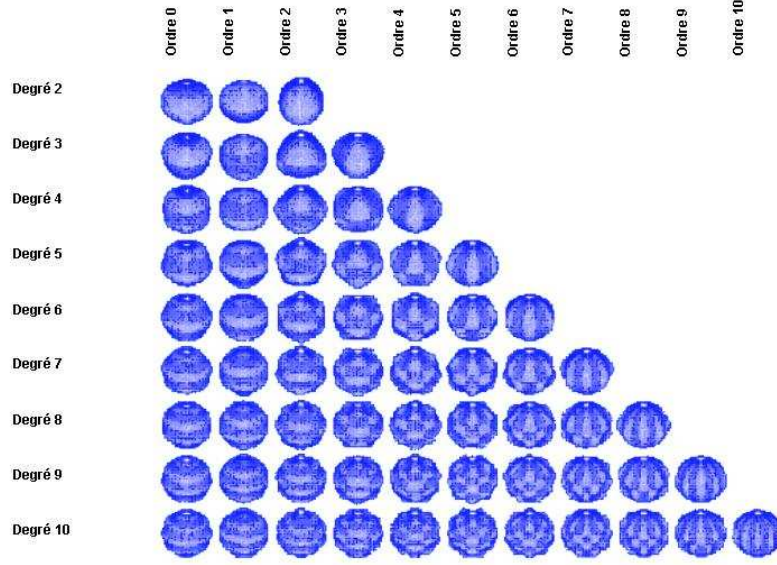


FIG. 2.3 – Représentation des harmoniques sphériques du degré 2 à 10 et ordre 0 à 10

La figure 2.3 donne une représentation classique des fonctions harmoniques associées à ces coefficients.

On peut écrire plus simplement le potentiel U_p comme suit :

$$U_P = \frac{\mu}{r} + \mathcal{R} \quad (2.2)$$

$\mu = GM_{\text{Mars}}$ est le terme central (de degré l et ordre m tous deux nuls). $\mathcal{R}$ est la fonction de force (ou potentiel) perturbatrice (perturbateur) définie ici par l'expression complexe (plus compacte, avec $j = \sqrt{-1}$) :

$$\mathcal{R} = \frac{GM_{\text{Mars}}}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r} \right)^l \sum_{m=-l}^{+l} K_{lm} P_{lm}(\sin \varphi) e^{jm\lambda} \quad (2.3)$$

et

$$K_{lm} = \frac{(-1)^m}{M_{\text{Mars}} R_0^l} \int \int \int_V r'^l P_{l,-m}(\sin \varphi') e^{-jm\lambda'} \rho(r', \varphi', \lambda') dV' \quad (2.4)$$

Les coefficients K_{lm} complexes sont liés aux coefficients réels C_{lm} et S_{lm} $\forall m \geq 0$, précédemment définis, par :

$$K_{lm} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (C_{lm} - jS_{lm}) \quad (2.5)$$

$$K_{l,-m} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (C_{lm} + jS_{lm}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (-1)^m \quad (2.6)$$

où $\delta_{m0} = 0$ si $m \neq 0$ et $\delta_{00} = 1$. Quand $l = 0$, $K_{l0} = C_{l0}$ et $S_{l0} = 0$.

2.3 Développement de $\mathcal{R}$ en éléments orbitaux

Pour pouvoir être utilisée dans les équations de Lagrange (voir plus loin le paragraphe 2.4), $\mathcal{R}$ doit bien évidemment être exprimée en fonction des éléments elliptiques de l'orbite du satellite. *Kaula* [1966] propose une telle solution en transformant le développement en harmoniques sphériques à l'aide de fonctions particulières de l'inclinaison i et de l'excentricité e .

Il faut donc substituer les éléments orbitaux aux coordonnées sphériques en reparamétrant le développement traditionnel de la fonction de force gravitationnelle. Ainsi, on peut écrire le potentiel perturbateur uniquement en fonction des éléments orbitaux du satellite :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{a} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{R_0}{a} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{lpq}(e) \mathcal{S}_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \quad (2.7)$$

avec θ le temps sidéral moyen ou l'angle horaire (qui permet de définir la rotation propre de la planète),

$$\mathcal{S}_{lmpq} = \begin{pmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{pmatrix}_{l-m \text{ impair}}^{l-m \text{ pair}} \cos \psi_{lmpq} + \begin{pmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{pmatrix}_{l-m \text{ impair}}^{l-m \text{ pair}} \sin \psi_{lmpq} \quad (2.8)$$

où on retrouve les coefficients de Stokes non normalisés C_{lm} et S_{lm} et où

$$\psi_{lmpq} = (l - 2p + q)M + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta) \quad (2.9)$$

est l'argument angulaire de perturbation orbitale. $F_{lmp}(i)$ et $G_{lpq}(e)$ sont respectivement les fonctions d'inclinaison et d'excentricité décrites par *Kaula* [1966]. D'après *Balmino* [1992], on peut aussi écrire $\mathcal{R}$ comme suit :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{a} \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^{+L} \sum_{s=k-Q}^{k+Q} \left\{ \sum_{\substack{l=\max(m,2,|k|) \\ l-k \text{ pair}}}^L j^{(l-m)} \bar{K}_{lm} \left(\frac{R_0}{a} \right)^l \right. \quad (2.10) \\ \left. D_{l,m,(l-k)/2}(i) G_{l,(l-k)/2,s-k}(e) \right\} e^{j\psi_{ksm}}$$

avec

$$\psi_{ksm} = k\omega + sM + m(\Omega - \theta) \quad (2.11)$$

et où les fonctions $D_{lmp}(i)$ sont complexes et liées aux fonctions $F_{lmp}(i)$ de Kaula. Il apparaît clairement dans l'expression (2.10) que plusieurs harmoniques vont produire des perturbations de même fréquence. C'est pourquoi, il est nécessaire d'avoir plusieurs satellites avec une altitude mais surtout une inclinaison variées pour obtenir des coefficients bien distincts dans l'expression entre accolades, donc des équations d'observations indépendantes pour les harmoniques.

2.4 Les équations de Lagrange

Lorsque la force dérive d'un potentiel, comme l'attraction gravitationnelle, les variations des éléments orbitaux sont décrites par les équations de Lagrange. Dans le cas contraire, on utilise les équations de Gauss dont il ne sera pas question dans ce travail.

On considère le mouvement d'une sonde, assimilée à une masse ponctuelle, soumise au potentiel central U_0 et à un potentiel perturbateur U . Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_p}{\partial x} \\ \ddot{y} = \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U_p}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U_p}{\partial z} \end{cases}$$

Le cas $U = 0$ permet d'intégrer le système différentiel : c'est le problème des deux corps. Le mouvement du satellite est décrit en fonction du temps t et de 6 constantes d'intégration c_i , les éléments elliptiques. On dit alors que le satellite n'est soumis qu'à une force centrale (cas **képlérien**) et les **éléments képlériens** c_i , i.e a, e, i, Ω, ω , et $n = dM/dt$ (le moyen mouvement) **constants** en sont une **solution** tels que $r = (x(t, c_i), y(t, c_i), z(t, c_i))$.

Quand U est non nul, le système n'est plus intégrable de manière complètement analytique : le mouvement n'est képlérien qu'en première approximation, et l'on peut définir à tout instant une **orbite osculatrice** caractérisée par le fait que les constantes c_i sont dépendantes du temps. L'ajout d'accélération complémentaires génère donc des perturbations de l'orbite elliptique. Les **éléments képlériens** deviennent alors dépendants du temps et leur comportement est régi par les équations de Lagrange (ou de Gauss). Ces

équations de Lagrange, fonctions de U_p , s'écrivent [Kaula, 1966] :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} \quad (2.12)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} \quad (2.13)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial i} \quad (2.15)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial i} \quad (2.16)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e} \quad (2.17)$$

avec $\mathcal{F} = U_p - T$, T étant l'énergie cinétique. Utilisant le fait que $\mathcal{F} = (\mu/2a) + \mathcal{R}$, on obtient alors :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \quad (2.18)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \quad (2.19)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \quad (2.20)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (2.21)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (2.22)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad (2.23)$$

La méthode des perturbations orbitales consiste à calculer les écarts (Δa , Δe , Δi , $\Delta \Omega$, $\Delta \omega$, ΔM) à un mouvement de référence képlérien, en intégrant ces équations par approximations successives. Nous nous limiterons, dans la suite, à la première approximation, suffisante pour décrire ces perturbations dans tous les cas qui nous intéressent.

Chapitre 3

Perturbations induites par $\mathcal{R}$

Nous partons de l'expression de la fonction de force exprimée en éléments orbitaux avec l'équation (2.7).

Il s'agit ensuite d'identifier, pour une orbite donnée, les **types de perturbation** orbitale (voir les paragraphes 3.1 et 3.2) induites par les différentes **classes** de termes de cette fonction de force perturbatrice (voir le paragraphe 2.2). En approximation linéaire, on peut scinder le système d'équations en autant de sous-systèmes indépendants que le nombre de combinaisons des indices contenus dans l'expression (2.7) de cette fonction de force¹. **A partir de l'expression de la fréquence de perturbation orbitale caractérisée par la dérivée temporelle de l'argument angulaire de perturbation orbitale, ψ_{lmpq} , on peut distinguer des sous-ensembles d'effets induits par type de période caractéristique.** L'amplitude de ces perturbations est fonction des éléments orbitaux a , e et i et des coefficients de Stokes du potentiel perturbateur. *On négligera les tesséraux, au sens large (voir paragraphe 2.2), à cause de la symétrie de révolution du phénomène étudié.* On s'intéressera donc principalement ici aux *effets induits par les zonaux* de gravité donc l'indice m a dans ce cas une valeur nulle et ψ_{lmpq} devient alors ψ_{l0pq} .

3.1 Termes séculaires, ψ_{lmpq} constant

Si on suppose que les fréquences ne sont pas commensurables, le terme dit "séculaire" sur les variations des éléments orbitaux est caractérisé par

¹En approximation linéaire, les équations de Lagrange peuvent être intégrées isolément pour chaque jeu d'indices (l, m, p, q) et les résultats sommés.

$\dot{\psi}_{lmpq} = 0$, ce qui est vérifié par le jeu d'indices suivant :

$$\begin{cases} m = 0 & \implies \text{harmoniques zonaux} \\ l - 2p = 0 & \implies l \text{ est pair} \\ q = 0 & \implies \text{effets d'ordre 0 en } e \end{cases} \quad (3.1)$$

D'après l'équation (2.8), on obtient l'égalité $\mathcal{S}_{lmpq} = C_{2p,0} = C_{l0}$ et le potentiel perturbateur s'écrit alors :

$$\mathcal{R}_s = \frac{\mu}{a} \sum_{l, \text{ pair}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^l F_{l0\frac{l}{2}}(i) G_{l\frac{l}{2}0}(e) C_{l0} \quad (3.2)$$

Les **coefficients de Stokes de degré pair** ($m = 0, l = 2p$) i.e les **harmoniques zonaux pairs** produisent des termes dits "**séculaires**", indicés s , sur les variations des éléments orbitaux, qui caractérisent donc **les plus grands écarts au mouvement képlérien**. On dit qu'on a une orbite en précession (ou précessante).

3.2 Termes périodiques, $\dot{\psi}_{lmpq} \neq 0$

Il existe d'autres effets induits par le potentiel perturbateur de sorte que des termes périodiques viennent se superposer aux termes de dérive séculaire. Ils sont le résultat de nouvelles combinaisons de la valeur des indices $lmpq$ dans l'expression de la fréquence de perturbation orbitale comme suit :

- Les **effets à longues périodes**, induits par les zonaux de gravité ($m = 0$), sont obtenus pour $l - 2p + q = 0$ et $l - 2p \neq 0$ de sorte que les variations de ψ_{l0pq} sont données par les variations de ω_s qui sont lentes puisque, en terme de période, $(2\pi/\dot{\omega}_s) \gg (2\pi/\dot{M}_s)$. En effet, dans cette étude, on entend par longues périodes **les périodes les plus longues**, donc les fréquences de perturbation orbitale les plus petites, étant donné un degré l . Ce sont donc exclusivement les **coefficients zonaux de degré impair** qui induisent des termes à longue période, indicés LP , puisque $l \neq 2p$.

- Les **effets à courtes périodes** sont obtenus pour $l - 2p + q \neq 0$ et les variations de ψ_{lmpq} sont données par M_s ou $\Omega_s - \theta$ qui évoluent beaucoup plus rapidement, *proches de la période orbitale* ($2\pi/\dot{M}_s$, environ 2 heures pour MGS et MODY, typiquement quelques heures) car $l - 2p = 0$ ou $\neq 0$ et $m = 0$ ou $\neq 0$. Les fréquences sont donc plus rapides. La partie courte période sur les variations du mouvement orbital est donc due

aux harmoniques zonaux, aux tesséraux et sectoriaux. Il est donc difficile d'extraire une classe de signal gravitationnel en particulier par l'analyse des courtes périodes.

Dans cette étude, ce sont donc essentiellement les termes dits à longue période qui vont être pris en considération, tels que, pour chaque élément orbital, noté EO, $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$, on a dans tous les cas :

$$\frac{dEO}{dt} = \left. \frac{dEO}{dt} \right|_s + \left. \frac{dEO}{dt} \right|_{LP} \quad (3.3)$$

On peut se reporter à l'annexe E pour voir le développement des calculs qui mènent à l'expression du potentiel puis des termes à longues périodes induits par les harmoniques zonaux de degré 3 et 5.

3.3 Partie séculaire induite par les zonaux

On développe d'abord la fonction de force $\mathcal{R}_s$ décrite par l'équation (3.2) pour les degré 2 et 4, puis on substitue cette expression dans les équations de Lagrange (2.18) à (2.23). Ainsi, on obtient :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_s = 0 \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_s = 0 \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_s = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s = & \frac{3n \cos i}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [C_{20} + \\ & \frac{2}{3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\dot{F}_{402}}{\sin i \cos i} \frac{1 + \frac{3}{2}e^2}{(1-e^2)^2} C_{40}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s = & \frac{n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \left[\left(3F_{201} - \cot i \dot{F}_{201} \right) C_{20} + \right. \\ & \left. \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\left(5F_{402} - \cot i \dot{F}_{402} \right) \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right) + 5F_{402}}{(1-e^2)^2} C_{40} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_s = n - \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [3F_{201}C_{20} + \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{6 + \frac{3}{2}e^2}{(1-e^2)^2} F_{402}C_{40}] \quad (3.9)$$

3.4 Longues périodes induites par les zonaux

On rappelle ici que le calcul de la fonction de force perturbatrice développée pour les harmoniques zonaux de degré 3 et 5, notée $\mathcal{R}_{LP}$, à l'origine des termes à longue période sur les variations des éléments orbitaux, est détaillé à l'annexe E. On a développé dans cette même annexe le calcul des variations de e et ω . Pour les éléments orbitaux restants, on suit la même procédure : on substitue $\mathcal{R}_{LP}$ dans les équations de Lagrange (2.18), (2.20), (2.21) et (2.23). Ainsi, on obtient :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{LP} = 0 \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{LP} = \frac{2n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [F_{302}C_{30} - 2 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 F_{502} \frac{1 + \frac{3}{4}e^2}{(1-e^2)^2} C_{50}] \cos \omega \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{LP} = -\frac{2n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \frac{e \cot i}{1-e^2} [F_{302}C_{30} - 2 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 F_{502} \frac{1 + \frac{3}{4}e^2}{(1-e^2)^2} C_{50}] \cos \omega \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{LP} = -\frac{2n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \frac{e}{1-e^2} \left[\frac{\dot{F}_{302}}{\sin i} C_{30} - 2 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\dot{F}_{502}}{\sin i} \frac{1 + \frac{3}{4}e^2}{(1-e^2)^2} C_{50} \right] \sin \omega \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{LP} = -\frac{2n}{e(1-e^2)^3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \left[\left(F_{302} (1 + 4e^2) - e^2 \cot i \dot{F}_{302} \right) C_{30} - \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{F_{502} \left(2 + \frac{41}{2}e^2 + 9e^4 \right) - e^2 \cot i \dot{F}_{502} \left(2 + \frac{3}{2}e^2 \right)}{(1-e^2)^2} C_{50} \right] \sin \omega \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dM}{dt} \right|_{LP} = & \frac{2n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \frac{1}{e(1-e^2)^{1/2}} \left[F_{302} (1+2e^2) C_{30} \right. \\
& \left. - \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 F_{502} \frac{(2+\frac{17}{2}e^2)}{(1-e^2)^2} C_{50} \right] \sin \omega
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Chapitre 4

Perturbations induites par les marées

4.1 Le potentiel de marée - U_{m,k_l}

Globalement, les corps du système solaire, ici *le Soleil* uniquement, induisent sur la surface de ce qu'on appelle le corps central, ici Mars, un potentiel perturbateur dit de troisième corps, $U_{p,\text{Soleil},\text{surface}}$. Dans un repère aréocentrique d'origine O le centre de masse de Mars, le potentiel du Soleil produit sur le volume martien des déformations dites de marée générant un potentiel perturbateur U_{m,k_l} en tout point extérieur à la planète, à la distance r de O, tel que pour chaque degré l du potentiel de troisième corps :

$$U_{m,k_l} = k_l \left(\frac{R_0}{r} \right)^{2l+1} U_{p,\text{Soleil},\text{surface}} \quad (4.1)$$

avec k_l le nombre de Love de potentiel k_l (l étant le degré).

Dans ce paragraphe, il s'agit d'étudier l'effet de cette perturbation sur le mouvement d'une sonde spatiale autour de Mars. Rappelons que cet effet se cumule à celui des coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel du corps central. Au même titre que le potentiel gravitationnel, le potentiel de marée se décompose dans une base d'harmoniques sphériques et peut être développé en fonction des éléments orbitaux de la sonde, mais aussi de ceux du corps

perturbateur [Deleflie, 2000] :

$$U_{m,k_l} = \frac{GM_S}{a_p} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^l \left(\frac{R_0}{a} \right)^{l+1} k_l \sum_{m=0}^l \delta m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \quad (4.2)$$

$$\sum_{p=0}^l \sum_{p'=0}^l \sum_q \sum_{q'} F_{lmp}(i) F_{lmp'}(i_p) G_{lpq}(e) G_{lp'q'}(e_p) \cos \psi'_{lmp p' q q'}$$

avec

$$\delta m = \begin{cases} 1 & , \text{ si } m = 0 \\ 2 & , \text{ si } m \neq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

et $\psi'_{lmp p' q q'}$, l'argument angulaire de perturbation orbitale telle que :

$$\psi'_{lmp p' q q'} = (l-2p+q)M - (l-2p'+q')M_p + (l-2p)\omega - (l-2p')\omega_p + m(\Omega - \Omega_p) \quad (4.4)$$

On a aussi :

- $F_{lmp}(i)$, $F_{lmp'}(i_p)$ et $G_{lpq}(e)$, $G_{lp'q'}(e_p)$ sont respectivement les fonctions d'inclinaison et d'excentricité (voir *Kaula [1966]*) ;
- M_S la masse du corps perturbateur, ici $M_S = 1,989.10^{30}$ kg est la masse du Soleil ;
- k_l le nombre de Love de degré l ;
- a , e , i , ω , Ω , M les éléments orbitaux de la sonde ;
- $a_p = 2,32.10^{11}$ m, $e_p = 0,109$, $i_p = 25^\circ$, ω_p , Ω_p , M_p (avec $\dot{M}_p = 686,98$ jours ou 1,88 ans terrestres) sont les éléments orbitaux du corps perturbateur (ici le Soleil), donc ceux de l'orbite de Mars autour au Soleil sauf pour $\omega_p = \omega_{\text{Soleil/Mars}} = \omega_{\text{Mars/Soleil}} + \pi$.

4.2 Partie séculaire induite par U_{m,k_2}

Dans un premier temps il s'agit d'écrire correctement la fonction de force perturbatrice U_{m,k_2} d'après l'équation (4.2). Pour le degré 2, il vient :

$$U_{m,k_2} = \frac{GM_S}{a_p} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^2 \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 k_2 \sum_{m=0}^2 \delta m \frac{(2-m)!}{(2+m)!} \quad (4.5)$$

$$\sum_{p=0}^2 \sum_{p'=0}^2 \sum_q \sum_{q'} F_{2mp}(i) F_{2mp'}(i_p) G_{2pq}(e) G_{2p'q'}(e_p) \cos \psi'_{2mp p' q q'}$$

avec

$$\psi'_{2mp p' q q'} = (2-2p+q)M - (2-2p'+q')M_p + (2-2p)\omega - (2-2p')\omega_p + m(\Omega - \Omega_p) \quad (4.6)$$

Les termes dits "séculaires" sur les variations des éléments orbitaux sont obtenus pour $\psi'_{2mpp'qq'} = 0$ que vérifie le jeu d'indice suivant :

$$\begin{cases} m = 0 & \implies \text{harmoniques zonaux} \\ 2 - 2p = 0 \text{ et } 2 - 2p' = 0 & \implies p = p' = 1 \\ q = q' = 0 & \implies \text{effets d'ordre 0 en } e \text{ et } e_p \end{cases} \quad (4.7)$$

On peut donc réécrire l'expression (4.5) de la fonction de force perturbatrice de marée pour le degré 2 :

$$U_{m,k_2} = \frac{GM_S}{a_p} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^2 \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 k_2 F_{201}(i) F_{201}(i_p) G_{210}(e) G_{210}(e_p) \quad (4.8)$$

Puis on substitue cette expression dans les équations de Lagrange (2.18) à (2.23). Ainsi, on obtient :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_s^{k_2} = 0 \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_s^{k_2} = 0 \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_s^{k_2} = 0 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s^{k_2} &= \frac{9n}{4(1-e^2)^2(1-e_p^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \\ &\quad \left(\frac{\sin^2 i_p}{2} - \frac{1}{3} \right) k_2 \cos i \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s^{k_2} &= \frac{3n}{16(1-e^2)^2(1-e_p^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \\ &\quad (3 \sin^2 i_p - 2) (3 \sin^2 i - 2 - \cot i \sin 2i) k_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dM}{dt} \right|_s^{k_2} &= \frac{27n}{16(1-e^2)^{3/2}(1-e_p^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \\ &\quad (\sin^2 i_p - 2) (\sin^2 i - 2) k_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

On rappelle ici que ces effets dits "séculaires" s'ajoutent aux effets dits "séculaires" induits par les harmoniques zonaux pairs du potentiel gravitationnel. De fait, l'analyse de la dynamique d'une unique sonde donnera des solutions corrélées entre les paramètres C_{20} et C_{40} (leurs variations saisonnières aussi a fortiori), et, k_2 .

4.3 Longues périodes induites par U_{m,k_2}

4.3.1 Définition des longues périodes

On reprend l'équation (4.4) valide quelque soit la fréquence de perturbation orbitale pour le potentiel perturbateur de marée :

$$\psi'_{lmp p' q q'} = (l - 2p + q)M - (l - 2p' + q')M_p + (l - 2p)\omega - (l - 2p')\omega_p + m(\Omega - \Omega_p)$$

Dans cette étude, on ne s'intéressera qu'aux plus longues **périodes de perturbations de marée** qui sont **les plus proches** des plus longues **périodes du mouvement orbital induites par le potentiel gravitationnel**, de sorte qu'on minimise $\psi'_{lmp p' q q'}$. Dans tous les cas, l'effet induit sur le moyen mouvement M du satellite appartient aux courtes périodes, on choisit donc $l - 2p + q = 0$.

On rappelle ici que la table 5.1 donne en **année terrestre** les périodes séculaires des perturbations induites par les 2 premiers zonaux pairs, valeurs statiques, du potentiel gravitationnel sur les deux sondes MGS et MEX. Pour MGS, on a $2\pi/\dot{\Omega}_s > 2\pi/\dot{\omega}_s$. Il apparaît que la plus grande période est $2\pi/\dot{\Omega}_s$. Il vient :

$$\psi'_{lmp p' q q'} = -(l - 2p' + q')M_p + m(\Omega - \Omega_p)$$

On note qu'on a $2\pi/\dot{\Omega}_s \approx 2\pi/\dot{M}_p$. En effet, $2\pi/\dot{M}_p = 686,98$ jours ou 1,88 ans.

Pour MEX, on a aussi, d'après la table 5.1, la relation $2\pi/\dot{\Omega}_s > 2\pi/\dot{\omega}_s$. Il apparait donc que la plus grande période est $2\pi/\dot{\Omega}_s$. Il vient :

$$\psi'_{lmp p' q q'} = -(l - 2p' + q')M_p + m(\Omega - \Omega_p)$$

On note qu'on a $2\pi/\dot{\omega}_s \approx 2\pi/\dot{M}_p$. Mais le calcul des longues périodes définies par $\omega - M_p$ donne $U_{k_2} = 0$ car les fonctions d'excentricité $G_{222}(e)$ et $G_{20-2}(e)$ sont nulles.

On souligne ici que le calcul des longues périodes définies par $m(\Omega - \Omega_p - \omega_p)$ conduit aussi à $U_{k_2} = 0$ car les fonctions d'excentricité $G_{222}(e_p)$ et $G_{20-2}(e_p)$ sont nulles.

On s'attachera donc dans cette étude au calcul des termes à longues périodes définies par $m(\Omega - \Omega_p)$, $m(\Omega - M_p)$ et par $m(\Omega - \Omega_p - M_p)$.

4.3.2 Longue période en $m(\Omega - \Omega_p)$

On reprend l'équation (4.6) valide quelque soit la fréquence de perturbation orbitale pour le potentiel perturbateur de marée du degré 2 :

$$\psi'_{2mpp'qq'} = (2-2p+q)M - (2-2p'+q')M_p + (2-2p)\omega - (2-2p')\omega_p + m(\Omega - \Omega_p)$$

Les termes dits à longue période sur les variations des éléments orbitaux sont obtenus pour $\psi'_{2mpp'qq'} = m(\Omega - \Omega_p)$, que vérifie le jeu d'indice suivant :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 2-2p=0 \text{ et } 2-2p'=0 \\ 2-2p+q=0 \text{ et } 2-2p'+q'=0 \end{cases} \quad (4.15)$$

La contribution longue période aux variations des éléments orbitaux est donc définie par le jeu d'indices suivant :

$$\begin{cases} m = 1, 2 \\ p = p' = 1 \\ q = q' = 0 \\ \psi'_{2m1100} = m(\Omega - \Omega_p) \end{cases} \implies \text{effets d'ordre 0 en } e \text{ et en } e_p \quad (4.16)$$

On peut donc réécrire l'expression (4.5) de la fonction de force perturbatrice de marée pour le degré 2, en posant $\beta = \Omega - \Omega_p$:

$$U_{k_2}^\beta = \frac{3na^2}{16} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p}\right)^3 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \frac{nk_2}{(1-e^2)^{3/2} (1-e_p^2)^{3/2}} \quad (4.17)$$

$$[\sin 2i \sin 2i_p \cos(\beta) + \sin^2 i \sin^2 i_p \cos(2\beta)]$$

Puis on substitue cette expression dans les équations de Lagrange (2.18) à (2.23). Ainsi, on obtient :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{\beta}^{k_2} = 0 \quad (4.18)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\beta}^{k_2} = 0 \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{\beta}^{k_2} = \frac{3}{8} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{nk_2}{(1-e^2)^2 (1-e_p^2)^{3/2}} \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\beta}^{k_2} = \frac{3}{8} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{nk_2}{(1-e^2)^2 (1-e_p^2)^{3/2}} \quad (4.21)$$

$$\left[\cos i \sin 2i_p \sin(\beta) + \sin i \sin^2 i_p \sin(2\beta) \right]$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\beta}^{k_2} = \frac{3}{8} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{nk_2}{(1-e^2)^2 (1-e_p^2)^{3/2}} \quad (4.22)$$

$$\left[\cot i (-1 + 5 \sin^2 i) \sin 2i_p \cos(\beta) + \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \sin^2 i_p \cos(2\beta) \right]$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{\beta}^{k_2} = \frac{9}{16} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{nk_2}{(1-e^2)^{3/2} (1-e_p^2)^{3/2}} \quad (4.23)$$

$$\left[\sin 2i \sin 2i_p \cos(\beta) + \sin^2 i \sin^2 i_p \cos(2\beta) \right]$$

4.3.3 Longue période en $m(\Omega - M_p)$

On reprend à nouveau l'équation (4.6) valide quelque soit la fréquence de perturbation orbitale pour le potentiel perturbateur de marée du degré 2 :

$$\psi'_{2mpp'qq'} = (2-2p+q)M - (2-2p'+q')M_p + (2-2p)\omega - (2-2p')\omega_p + m(\Omega - \Omega_p)$$

Les termes longue période sur les variations des éléments orbitaux sont obtenus pour $\psi'_{2mpp'qq'} = m(\Omega - M_p)$ que vérifie le jeu d'indice suivant :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 2 - 2p + q = 0 \text{ et } 2 - 2p' + q' = m \\ 2 - 2p = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

qui est valable si et seulement si on a le jeu d'indices suivant :

$$\begin{cases} m = 1, 2 \\ p = 1 \\ q = 0 \implies \text{effets d'ordre 0 en } e \\ q' = m - 2 + 2p' \\ \psi'_{2m1p'0q'} = m\Omega - (2 - 2p' + q') M_p = m(\Omega - M_p) \end{cases} \quad (4.25)$$

Pour $m = 1$ ou 2 , les longues périodes sur les variations des éléments orbitaux sont désormais des fonctions de p' et q' tel que :

$$\begin{cases} m = 1 \\ q' = 2p' - 1 \text{ et } \psi'_{211p'0q'} \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} m = 2 \\ q' = 2p' \text{ et } \psi'_{221p'0q'} \end{cases} \quad (4.27)$$

Finalement, il vient :

$$\begin{cases} m = 1 \\ p' = 1 \text{ et } q' = 1 \text{ et } \psi'_{211101} = \Omega - M_p \\ p' = 0 \text{ et } q' = -1 \text{ et } \psi'_{21100-1} = \Omega - M_p \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} m = 2 \\ p' = 1 \text{ et } q' = 2 \text{ et } \psi'_{221102} = 2(\Omega - M_p) \\ p' = 0 \text{ et } q' = 0 \text{ et } \psi'_{221000} = 2(\Omega - M_p) \end{cases} \quad (4.29)$$

On peut donc réécrire l'expression (4.5) de la fonction de force perturbatrice de marée pour le degré 2, en posant $\alpha = \Omega - M_p$:

$$\begin{aligned} U_{k_2}^\alpha &= \frac{3na^2}{8(1-e^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 nk_2 \\ &\quad \left[-\sin 2i \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \right) \cos(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \right) \cos(2\alpha) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Puis on substitue cette expression dans les équations de Lagrange (2.18) à (2.23). Ainsi, on obtient :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{\alpha}^{k_2} = 0 \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\alpha}^{k_2} = 0 \quad (4.32)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{\alpha}^{k_2} = \frac{3}{4(1-e^2)^2} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 n k_2 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\cos i \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \right) \sin(\alpha) \right. \\ & \left. + \sin i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \right) \sin(2\alpha) \right] \\ \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\alpha}^{k_2} &= \frac{3}{4(1-e^2)^2} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 n K_2 \quad (4.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\cos 2i}{\sin i} \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \right) \cos(\alpha) \right. \\ & \left. + \cos i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \right) \cos(2\alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\alpha}^{k_2} = \frac{3}{4(1-e^2)^2} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 n k_2 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \left[A(i) \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \right) \cos(\alpha) \right. \\ & \left. + B(i) \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \right) \cos(2\alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{\alpha}^{k_2} = \frac{9}{8(1-e^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 n k_2 \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\sin 2i \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \right) \cos(\alpha) \right. \\ & \left. + \sin^2 i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \right) \cos(2\alpha) \right] \end{aligned}$$

avec

$$A(i) = \cos 2i \cot i - \frac{3}{2} \sin 2i$$

$$B(i) = \frac{3}{2} \sin^2 i - \cos^2 i$$

$$\begin{aligned}
G_{20-1}(e_p) &= -\frac{e_p}{2} + \frac{e_p^3}{16} + \dots \\
G_{200}(e_p) &= 1 - \frac{5e_p^2}{2} + \frac{13e_p^4}{16} + \dots \\
G_{211}(e_p) &= \frac{3e_p}{2} + \frac{27e_p^3}{16} + \dots \\
G_{212}(e_p) &= \frac{9e_p^2}{4} + \frac{7e_p^4}{4} + \dots
\end{aligned}$$

4.3.4 Longue période en $m(\Omega - \Omega_p - M_p)$

On reprend une dernière fois l'équation (4.6) valide quelque soit la fréquence de perturbation orbitale pour le potentiel perturbateur de marée du degré 2 :

$$\psi'_{2mpp'qq'} = (2-2p+q)M - (2-2p'+q')M_p + (2-2p)\omega - (2-2p')\omega_p + m(\Omega - \Omega_p)$$

Les termes longue période sur les variations des éléments orbitaux sont obtenus pour $\psi'_{2mpp'qq'} = m(\Omega - \Omega_p - M_p)$ que vérifie le jeu d'indice suivant :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 2-2p+q = 0 \text{ et } 2-2p'+q' = m \\ 2-2p = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

qui est valable si et seulement si on a le jeu d'indices suivant :

$$\begin{cases} m = 1, 2 \\ p = 1 \\ q = 0 \implies \text{effets d'ordre 0 en } e \\ q' = m - 2 + 2p' \\ \psi'_{2m1p'0q'} = m(\Omega - M_p) - [m\Omega_p + (2-2p')\omega_p] \end{cases} \quad (4.38)$$

Pour $m = 1$ ou 2 , les longues périodes sur les variations des éléments orbitaux sont désormais des fonctions de p' et q' tel que :

$$\begin{cases} m = 1 \\ q' = 2p' - 1 \text{ et } \psi'_{211p'0q'} \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\begin{cases} m = 2 \\ q' = 2p' \text{ et } \psi'_{221p'0q'} \end{cases} \quad (4.40)$$

Finalement, il vient :

$$\begin{cases} m = 1 \\ p' = 1 \text{ et } q' = 1 \text{ et } \psi'_{211101} = (\Omega - M_p) - \Omega_p \\ p' = 0 \text{ et } q' = -1 \text{ et } \psi'_{21100-1} = (\Omega - M_p) - (\Omega_p + 2\omega_p) \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} m = 2 \\ p' = 1 \text{ et } q' = 2 \text{ et } \psi'_{221102} = 2(\Omega - M_p) - 2\Omega_p \\ p' = 0 \text{ et } q' = 0 \text{ et } \psi'_{221000} = 2(\Omega - M_p) - 2(\Omega_p + \omega_p) \end{cases} \quad (4.42)$$

On peut donc réécrire l'expression (4.5) de la fonction de force perturbatrice de marée pour le degré 2, en posant $\alpha' = \Omega - \Omega_p - M_p$:

$$\begin{aligned} U_{k_2}^{\alpha'} = & \frac{3na^2}{8(1-e^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p}\right)^3 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 nk_2 \\ & \left[-\sin 2i \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) \cos(\alpha' - 2\omega_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \cos(\alpha') \right) \right. \\ & \left. + \sin^2 i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) \cos 2(\alpha' - \omega_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \cos(2\alpha') \right) \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Puis on substitue cette expression dans les équations de Lagrange (2.18) à (2.23). Ainsi, on obtient :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{\alpha'}^{k_2} = 0 \quad (4.44)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\alpha'}^{k_2} = 0 \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{di}{dt} \right|_{\alpha'}^{k_2} = & \frac{3}{4(1-e^2)^2} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p}\right)^3 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 nk_2 \\ & \left[-\cos i \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) \sin(\alpha' - 2\omega_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \sin(\alpha') \right) \right. \\ & \left. + \sin i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) \sin 2(\alpha' - \omega_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \sin(2\alpha') \right) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\alpha'}^{k_2} &= \frac{3}{4(1-e^2)^2} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 nK_2 \\ &\quad \left[-\frac{\cos 2i}{\sin i} \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) \cos(\alpha' - 2\omega_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \cos(\alpha') \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) \cos 2(\alpha' - \omega_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \cos(2\alpha') \right) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\alpha'}^{k_2} &= \frac{3}{4(1-e^2)^2} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 nk_2 \\ &\quad \left[A(i) \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) \cos(\alpha' - 2\omega_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \cos(\alpha') \right) \right. \\ &\quad \left. + B(i) \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) \cos 2(\alpha' - \omega_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \cos(2\alpha') \right) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dM}{dt} \right|_{\alpha'}^{k_2} &= \frac{9}{8(1-e^2)^{3/2}} \frac{M_S}{M_{\text{Mars}}} \left(\frac{R_0}{a_p} \right)^3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 nk_2 \\ &\quad \left[-\sin 2i \left(\sin i_p \cos^2 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{20-1}(e_p) \cos(\alpha' - 2\omega_p) - \frac{1}{2} \sin 2i_p G_{211}(e_p) \cos(\alpha') \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 i \left(\cos^4 \left(\frac{i_p}{2} \right) G_{200}(e_p) \cos 2(\alpha' - \omega_p) + \frac{1}{2} \sin^2 i_p G_{212}(e_p) \cos(2\alpha') \right) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Chapitre 5

Détermination pratique des zonaux et de k_2

5.1 Synthèse sur la contribution des potentiels

5.1.1 Les zonaux de gravité

Par souci de clarté, on a dans ce paragraphe regroupé les perturbations induites par les zonaux de gravité pour chaque élément orbital. D'après les équations (3.4) à (3.15), on peut écrire :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_s = 0 \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{LP} = 0 \quad (5.2)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_s = 0 \quad (5.3)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{LP} = \frac{3n \sin i}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [f_3 C_{30} + f_5 C_{50}] \cos \omega \quad (5.4)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_s = 0 \quad (5.5)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{LP} = -\frac{3ne \cos i}{2(1-e^2)^3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [f_3 C_{30} + f_5 C_{50}] \cos \omega \quad (5.6)$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s = \frac{3n \cos i}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [f_2 C_{20} + f_4 C_{40}] \quad (5.7)$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{LP} = -\frac{3ne \cot i}{2(1-e^2)^3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [g_3 C_{30} + g_5 C_{50}] \sin \omega \quad (5.8)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s = -\frac{3n}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [f'_2 C_{20} + f'_4 C_{40}] \quad (5.9)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{LP} = \frac{3n \sin i}{2e(1-e^2)^3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [g'_3 C_{30} + g'_5 C_{50}] \sin \omega \quad (5.10)$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_s = n + \frac{3n}{2(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [h'_2 C_{20} + h'_4 C_{40}] \quad (5.11)$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{LP} = \frac{3n \sin i}{2e(1-e^2)^{5/2}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [h'_3 C_{30} + h'_5 C_{50}] \sin \omega \quad (5.12)$$

avec, si on pose $x = \sin^2 i$ et $y = e^2$:

$$f_3 = 1 - \frac{5}{4}x \quad (5.13)$$

$$f_5 = -\frac{15}{16} \frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} (8 - 28x + 21x^2) \left(1 + \frac{3}{4}y\right) \quad (5.14)$$

$$f_2 = 1 \quad (5.15)$$

$$f_4 = -\frac{5}{8} \frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} (4 - 7x) \left(1 + \frac{3}{2}y\right) \quad (5.16)$$

$$g_3 = 1 - \frac{15}{4}x \quad (5.17)$$

$$g_5 = -\frac{15}{16} \frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} (8 - 84x + 105x^2) \left(1 + \frac{3}{4}y\right) \quad (5.18)$$

$$f'_2 = 2f_3 \quad (5.19)$$

$$f'_4 = -\frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} \left[5 - \frac{155}{8}x + \frac{245}{16}x^2 + y \left(\frac{45}{8} - \frac{315}{16}x + \frac{945}{64}x^2 \right) \right] \quad (5.20)$$

$$g'_3 = -\frac{1}{4} \left[4 - 5x - y \left(\frac{4}{x} - 35 + 35x \right) \right] \quad (5.21)$$

TAB. 5.1 – Période de l’orbite précessante en année terrestre (fréquence en rd/s), induites par le *potentiel gravitationnel statique* pour les orbites de MGS et MEX

	MGS		MEX	
EO	C_{20}	$C_{20} + C_{40}$	C_{20}	$C_{20} + C_{40}$
$2\pi/\dot{\Omega}_s$	1.890 (10^{-7})	1.912 (10^{-7})	-15.075 (10^{-8})	-15.185 (10^{-8})
$2\pi/\dot{\omega}_s$	-0.194 (10^{-6})	-0.196 (10^{-6})	- 1.875 (10^{-7})	- 1.887 (10^{-7})

$$g'_5 = \frac{15}{32} \frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} \left[16 - 56x + 42x^2 + y \left(-\frac{16}{x} + 348 - 952x + \frac{1281}{2}x^2 \right) + y^2 \left(-\frac{12}{x} + 210 - \frac{1071}{2}x + \frac{693}{2}x^2 \right) \right] \quad (5.22)$$

$$h'_2 = 1 - \frac{3}{2}x \quad (5.23)$$

$$h'_4 = -\frac{3}{2} \frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} \left(1 - 5x + \frac{35}{8}x^2 \right) \left(1 + \frac{1}{4}y \right) \quad (5.24)$$

$$h'_3 = (1 + 2e^2) f_3 \quad (5.25)$$

$$h'_5 = -\frac{15}{16} \frac{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}{(1-y)^2} (8 - 28x + 21x^2) \left(1 + \frac{17}{4}y \right) \quad (5.26)$$

La table 5.1 donne en **année terrestre** les périodes séculaires des perturbations induites par les 2 premiers zonaux pairs $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{40}$ du potentiel gravitationnel sur les deux sondes MGS et MEX. Ce sont les **valeurs statiques** (valeurs issues du champ *moyen* de *Lemoine et al.* [2001]) de ces **zonaux pairs** qui sont utilisées pour déterminer les périodes $2\pi/\dot{\Omega}_s$ et $2\pi/\dot{\omega}_s$ de l’**orbite précessante** à partir des équations (5.7) et (5.9).

Les tables 5.2 et 5.3 présentent, pour les deux sondes MGS et MEX respectivement, les ordres de grandeur des contributions en amplitude de chacun des types (séculaire et longue période) de perturbations orbitales induites par les **variations saisonnières des 4 premiers zonaux** (soient 2.10^{-09} pour $\bar{C}_{20}$, 3.10^{-09} pour $\bar{C}_{30}$, 10^{-09} pour $\bar{C}_{40}$ et $1,5.10^{-09}$ pour $\bar{C}_{50}$). Il s’agit ici de regarder et comparer pour chacune des deux sondes :

- la période qui va dominer la perturbation d’un élément orbital donné, qui nous donne ce qu’on appelle le **type de perturbation**,
- l’ordre de grandeur de l’amplitude associée au type de perturbation.

TAB. 5.2 – Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du *potentiel gravitationnel variable* pour l'orbite de MGS

	Part séculaire	Part longue période
EO	$C_{20}+C_{40}$	$C_{30}+C_{50}$
i (en rd/s)	0	10^{-15}
$\dot{\Omega}$ (en rd/s)	10^{-13}	10^{-14}
$\dot{\omega}$ (en rd/s)	10^{-12}	10^{-10}
$\dot{e}$ (en Hz)	0	10^{-12}

TAB. 5.3 – Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du *potentiel gravitationnel variable* pour l'orbite de MEX

	Part séculaire	Part longue période
EO	$C_{20}+C_{40}$	$C_{30}+C_{50}$
i (en rd/s)	0	10^{-15}
$\dot{\Omega}$ (en rd/s)	10^{-14}	10^{-13}
$\dot{\omega}$ (en rd/s)	10^{-13}	10^{-12}
$\dot{e}$ (en Hz)	0	10^{-13}

Pour MEX et MGS (ou MODY), on voit d'après les équations (5.1) à (5.12) et les tables 5.2 et 5.3 que les harmoniques zonaux impairs sont essentiellement déterminées à partir de l'observation de la part longue période des variations de ω et à partir de l'observation de la part longue période des variations de e mais dans une moindre mesure (parce que de plus faible amplitude, 1 à 2 ordre de grandeur respectivement). Les variations de e sont intéressantes en ce sens que les zonaux impairs en sont l'unique cause (voir les tables 5.4 et 5.5). Pour MGS (ou MODY) seul, les harmoniques zonaux pairs sont principalement déterminées à partir de l'observation de la part séculaire des variations de Ω . On retiendra aussi que l'écart en amplitude entre les parts séculaire et longue période de $\dot{\Omega}$ est équivalent pour les deux sondes. Pour MGS (et MODY) seul, on note que pour $\dot{\omega}$, l'écart en amplitude entre la part longue période et la part séculaire est un ordre de grandeur plus important que celui sur $\dot{\Omega}$. Autrement dit, $\dot{\omega}$ de MGS (ou MODY) permet de mieux discriminer les impairs (des pairs) que $\dot{\Omega}$ ne le permet pour les pairs (par rapport aux impairs). Suivant le même raisonnement, on peut aussi dire que $\dot{\omega}$ de MGS (ou MODY) permet de mieux discriminer les impairs des pairs que $\dot{\omega}$ de MEX. Enfin, on voit que pour $\dot{e}$, MEX est moins performant que MGS pour la détection des harmoniques zonaux impairs. On souligne ici que dans les équations (5.1) à (5.12), les coefficients de Stokes pairs apparaissent toujours combinés, et de même pour les impairs : un *phénomène général inscrit dans l'équation*

(2.10). Avec certaines orbites, pour lesquelles seul un **type de perturbation** orbitale (voir les paragraphes 3.2 et 3.3) entraîne des variations significatives d'un unique paramètre, il est donc impossible de déterminer séparément tous les coefficients pairs ou tous les coefficients impairs, seule la combinaison linéaire des pairs ou celle des impairs est déterminée. Ainsi, pour une orbite comme celle de MGS ou MODY, on peut définir un coefficient "composite" pair, $C_{20,l}$, et un autre impair, $C_{30,l}$, par les relations suivantes :

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s = \frac{3n \cos i}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 C_{20,l} \quad (5.27)$$

avec $C_{20,l} = f_2 C_{20} + f_4 C_{40}$ et,

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{LP} = \frac{3n \sin i}{2e(1-e^2)^3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \sin \omega C_{30,l} \quad (5.28)$$

avec $C_{30,l} = g'_3 C_{30} + g'_5 C_{50}$

On donne donc ici les coefficients de la combinaison linéaire définissant $C_{20,l}$ et $C_{30,l}$ pour chacune de ces deux sondes. Il nous faut calculer les coefficients f_2 , f_4 , g'_3 et g'_5 d'après les formules (5.15), (5.16), (5.21) et (5.22). On a pour MGS :

$$\begin{aligned} f_2 &= 1 \text{ et } f_4 = 1.49 \\ g'_3 &= 0.25 \text{ et } g'_5 = 0.73 \end{aligned}$$

et pour MEX, on a :

$$\begin{aligned} f_2 &= 1 \text{ et } f_4 = 0.92 \\ g'_3 &= 0.59 \text{ et } g'_5 = 1.49 \end{aligned}$$

La conception d'une mission idéale de radio science implique bien sûr de choisir une inclinaison (ou excentricité) qui permette de minimiser ou mieux annuler les contributions des zonaux de plus haut degré de sorte qu'il ne reste plus que le paramètre $\bar{C}_{20}$ pour les pairs et/ou $\bar{C}_{30}$ pour les impairs. ***Pour une orbite quasi circulaire, l'inclinaison la plus favorable pour extraire le signal de $\bar{C}_{20}$ seulement, soit celle qui annule la contribution de $\bar{C}_{40}$, est d'environ 49.1° et l'inclinaison la plus favorable pour extraire la signature de $\bar{C}_{30}$, soit celle qui annule la contribution de $\bar{C}_{50}$, est d'environ 73°.*** En faisant varier l'excentricité on ne peut pas totalement minimiser l'effet des plus hauts degrés. Toutefois, dans les termes dits "séculaires" et à longue période des variations des éléments

TAB. 5.4 – Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du *potentiel gravitationnel variable* et *de marée* pour l'orbite de MGS

	Part séculaire		Part longue période		
EO	$C_{20}+C_{40}$	k_2	$C_{30}+C_{50}$	k_2 en $m(\Omega - M_p)$	
				$k_2 (m = 1)$	$k_2 (m = 2)$
i (en rd/s)	0	0	10^{-15}	10^{-15}	10^{-13}
$\dot{\Omega}$ (en rd/s)	10^{-13}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}
$\dot{\omega}$ (en rd/s)	10^{-12}	10^{-13}	10^{-10}	10^{-14}	10^{-14}
$\dot{e}$ (en Hz)	0	0	10^{-12}	0	0

orbitaux, les contributions des coefficients zonaux de degré 4 et 5 sont multipliées par $\left(\frac{R_0}{a}\right)^2$ par rapport à celles des zonaux de gravité de degré 2 et 3 respectivement. Par conséquent, pour une inclinaison donnée i , les contributions des coefficients de Stokes de plus haut degré seront d'autant plus petites que a sera grand. Le demi grand axe filtre les hauts degrés. Ainsi, le demi grand axe de la sonde MEX à 9350 kms (voir la table 2.1) permet de mieux décorréler les premiers harmoniques zonaux que celui environ 2.5 fois plus faible de MGS (ou MODY).

5.1.2 k_2 et les zonaux

Les tables 5.4 et 5.5 présentent, pour les deux sondes MGS et MEX respectivement, les ordres de grandeur des contributions en amplitude de chacun des types (séculaire et longue période) de perturbations orbitales induites par :

- les premiers harmoniques zonaux de gravité¹ (valeurs reprises des tables 5.2 et 5.2 pour faciliter la comparaison) d'une part et,
- le nombre de Love de degré 2², d'autre part.

Il s'agit ici de regarder et comparer pour chacune des deux sondes :

- la période qui va dominer la perturbation d'un élément orbital donné,
- l'ordre de grandeur de l'amplitude de ce type de perturbation.

Pour MGS comme pour MEX, si on ne regarde que la part séculaire des perturbations et quelque soit l'élément orbital choisi, la contribution du k_2 est moins importante que celle des zonaux pairs, en moyenne un ordre de

¹on prend l'amplitude des variations saisonnières de ces coefficients soient 2.10^{-09} pour $\bar{C}_{20}$, 3.10^{-09} pour $\bar{C}_{30}$, 10^{-09} pour $\bar{C}_{40}$ et 1, 5.10^{-09} pour $\bar{C}_{50}$.

²à partir des formules (4.32) à (4.35), $m = 1$ correspondant aux termes en α et $m = 2$ à ceux en 2α

TAB. 5.5 – Ordre de grandeur des contributions relatives maximales en fréquence du *potentiel gravitationnel variable* et *de marée* pour l'orbite de MEX

EO	Part séculaire		Part longue période		
	$C_{20}+C_{40}$	k_2	$C_{30}+C_{50}$	k_2 en $m(\Omega - M_p)$ $k_2 (m = 1)$	$k_2 (m = 2)$
i (en rd/s)	0	0	10^{-15}	10^{-16}	10^{-14}
$\dot{\Omega}$ (en rd/s)	10^{-14}	10^{-15}	10^{-13}	10^{-15}	10^{-15}
$\dot{\omega}$ (en rd/s)	10^{-13}	10^{-14}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-13}
$\dot{e}$ (en Hz)	0	0	10^{-13}	0	0

grandeur. Il est remarquable aussi que les amplitudes des perturbations pour MEX perdent un ordre de grandeur par rapport à celles de MGS.

On regarde maintenant les perturbations longue période. Pour MGS, sur Ω , elles sont d'amplitude comparable à celles à la fois induites par les coefficients de Stokes impairs mais aussi de la part séculaire induite par k_2 . Il en est de même pour MEX à cette différence près qu'on note des perturbations induites par les harmoniques zonaux impairs de deux ordres de grandeur supérieures à celle de k_2 . On peut donc affirmer que k_2 n'a que peu d'influence sur $\dot{\Omega}$ de MEX et que $\dot{\Omega}$ de MGS ne permet pas de séparer k_2 des impairs. Pour MGS, les perturbations sur l'inclinaison sont dominées par k_2 , pour $m = 2$. Il en est de même pour MEX avec cette précision que l'amplitude de la perturbations pour MGS est supérieure à celle de MEX, environ un ordre de grandeur. De plus, les perturbations sur i de MGS permettent de mieux discriminer k_2 , pour $m = 2$, des harmoniques zonaux impairs que le permettent celles de MEX (cf. tables 5.4 et 5.5). En effet, pour MGS la contribution des harmoniques zonaux impairs sur les perturbations longue période de i est bien plus petite que celle de k_2 , pour $m = 2$. Enfin, $\dot{\omega}$ de MGS n'est que faiblement influencé par k_2 puisqu'on a 4 ordres de grandeur par rapport à l'amplitude induites par les coefficients de Stokes des harmoniques zonaux impairs. Dans une bien moindre mesure, il est en de même pour $\dot{\omega}$ de MEX. On conclut que k_2 est plus facilement discriminable du champ variable avec MGS qu'avec MEX.

5.2 Difficulté de la restitution des zonaux

La configuration d'observabilité de la sonde depuis la station de poursuite sur Terre joue un grand rôle dans la restitution d'orbite. En effet, la sensibi-

lité de la fonction de mesure dépend de l'angle entre le vecteur ligne de visée et le vecteur normal au plan d'orbite. La détectabilité de la signature des harmoniques zonaux via les variations des éléments orbitaux grâce au Doppler planétaire peut se comprendre à l'aide de deux situations extrêmes qui correspondent à deux configurations ou géométries de sensibilité maximale aux éléments orbitaux (comme le précise aussi *Konopliv et al.* [2006]) :

- lorsque le plan d'orbite est **vu de face** depuis la Terre soit lorsque *la ligne de visée entre une station DSN et le satellite est perpendiculaire au plan d'orbite* : dans ce cas précis, on a une **sensibilité maximum aux perturbations de mouvement perpendiculaires (ou normales) au plan d'orbite** via les variations des éléments orbitaux i et Ω .
- lorsque le plan d'orbite est **vu par la tranche** depuis la Terre soit lorsque *la ligne de visée entre une station DSN et un satellite est parallèle au plan d'orbite* : dans ce cas précis, on a une **sensibilité maximum aux perturbations de mouvement contenues dans le plan orbital** via les variations des éléments orbitaux e , ω , et M .

On peut maintenant comparer la détectabilité de la signature des coefficients de Stokes des harmoniques zonaux via les variations des éléments orbitaux pour deux dynamiques bien distinctes :

- celle de la sonde MGS : en configuration dite **vue de face** (favorable aux éléments orbitaux Ω et i) on a une sensibilité maximum à la signature de la contribution des **coefficients de Stokes pairs** uniquement via la partie séculaire des variations de Ω . En effet, la partie longue période de Ω et i est très petite car directement proportionnelle à e . En configuration dite **vue par la tranche** (favorable aux éléments orbitaux e , ω , et M) on a une sensibilité maximum à la signature de la contribution des **coefficients de Stokes impairs** essentiellement via la partie longue période des variations de ω . De fait, il n'y a pas de corrélations entre les estimations des coefficients de Stokes pairs et celles des impairs.
- celle de la sonde MEX : en configuration dite **vue de face**, bien que la sensibilité à $\dot{\Omega}$ soit maximale, on s'attend à ce que $\dot{\Omega}$ ne permette pas de discriminer les zonaux pairs des zonaux impairs. En configuration dite **vue par la tranche** on a une sensibilité maximum à la signature de la contribution des **coefficients de Stokes impairs**. Des corrélations vont s'exprimer entre les estimations des coefficients de Stokes pairs et celles des impairs.

Une dernière difficulté demeure : la **visibilité** de la sonde depuis une station DSN. Elle dépend des paramètres orbitaux de la sonde et du mouvement relatif Terre-Mars. Il existe 3 circonstances particulières pour lesquelles la sonde n'est plus en visibilité depuis la Terre :

1. **occultation par la Terre** quand le satellite n'est plus dans le ciel de la station ;
2. **occultation par Mars** quand Mars se trouve en travers de la ligne de visée sonde-station.
3. **occultation par le Soleil** quand le Soleil se trouve entre la Terre et Mars. Cette configuration est assez rare mais se produit tous les 2 ans terrestres et pendant un mois les données sont très bruitées.

Dans le cas d'une poursuite de sonde en continu, il est bien évident qu'une occultation par Mars aura moins d'impact sur la quantité de données Doppler récoltées avec une orbite excentrique comme celle de MEX qu'avec une orbite quasi circulaire comme celle de MGS (ou MODY). Plus le demi-grand axe est faible, plus la visibilité diminue.

5.3 Le problème inverse et sa solution

Le calcul des divers paramètres intervenant dans les questions de géodésie spatiale telles que les nôtres constitue un problème inverse de mécanique céleste, dans lequel ces paramètres sont extraits des observations qui reflètent entre autres, les perturbations de la trajectoire du, ou des corps observés.

5.3.1 Les mesures

L'information majoritaire dont nous disposons actuellement pour restituer les trajectoires des satellites autour de Mars comme MGS, MODY ou MEX, est la mesure Doppler. Considérons la mesure dite "**2 voies**" (ou aller-retour) qui est souvent la plus fréquente. Son principe repose sur une onde à une fréquence donnée émise par une station de poursuite sur Terre (celle du réseau DSN, Deep Space Network) qui est reçue, amplifiée (via un facteur de gain g) et réémise par un transpondeur à bord de la sonde vers une station terrestre réceptrice (si la station réceptrice est différente de la station émettrice, la mesure Doppler est dite "**3 voies**"). Le signal alors reçu en station a une fréquence différente car modifiée par l'effet Doppler résultant de la vitesse relative entre la sonde et la station. La mesure Doppler fournit donc une information de vitesse relative projetée sur la ligne de visée sonde-station. L'effet Doppler instantané est donné par :

$$\Delta F = 2 \frac{v_{LOS}}{c} F_{ref} \quad (5.29)$$

avec c la vitesse de la lumière, F_{ref} une fréquence de référence et v_{LOS} la projection de la vitesse de la sonde, exprimée par exemple en éléments orbitaux, sur la ligne de visée.

En pratique, on ne dispose que d'une mesure moyennée d'effet Doppler (voir la figure 5.1) sur un intervalle de temps, appelé temps de comptage (noté T), définie comme suit :

$$\Delta F = \frac{[(\rho_3 + \rho_4) - (\rho_1 + \rho_2)]}{cT} F_{ref} g \quad (5.30)$$

Dans la réalité, F_{ref} est variable (pilotée par la station émettrice) et l'équa-

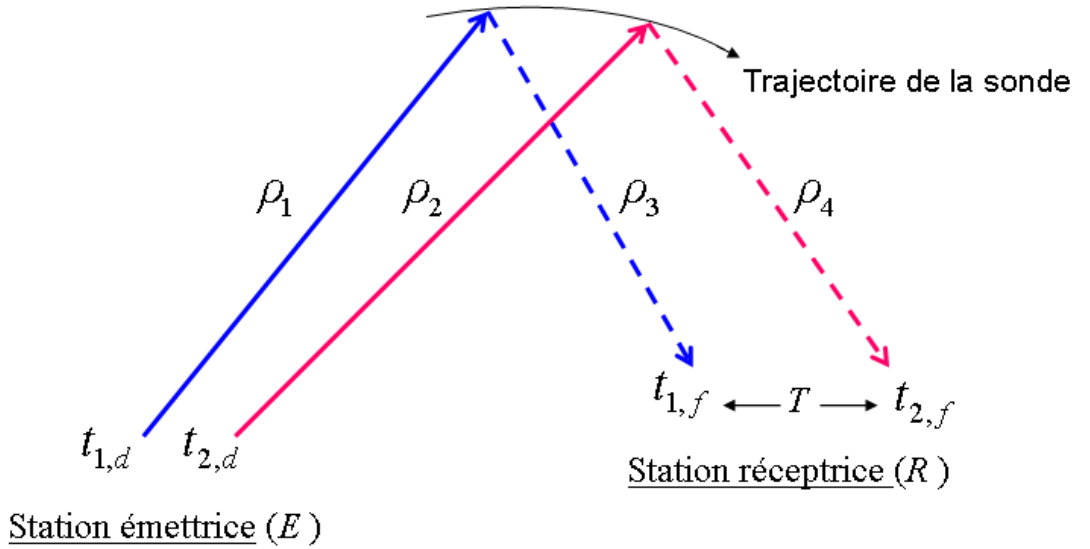


FIG. 5.1 – Mesure Doppler 2 (ou 3) voies moyennée. La station E émet pendant l'intervalle de temps $t_{1,d}$ et $t_{2,d}$ et le signal est reçu en R sur une durée T . Les distances ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4 sont respectivement les distances relatives entre la sonde et la station. Dans le cas du Doppler 1 voie, seuls les trajets ρ_3 et ρ_4 sont à considérer et c'est le satellite qui émet un signal à la fréquence F_{ref} (à ajuster en général).

tion de mesure est nettement plus complexe. De plus, cette mesure ne contient pas seulement la modulation induite par la vitesse relative mais aussi d'autres signaux relatifs aux différentes sources de bruit comme les milieux traversés par l'onde électromagnétique (i.e la troposphère et le plasma solaire), seulement si leurs effets ne sont pas modélisés, ou le bruit instrumental qui est approximativement du même ordre de grandeur que le signal gravitationnel

recherché. Enfin, des termes relativistes doivent être pris en compte pour modéliser correctement les trajets ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4 . Dans la plupart des missions, on bénéficie aussi de mesures Doppler dites "**1 voie**" (cf. figure 5.1), ainsi que des mesures de phases (fournissant une **distance** aller-retour ambiguë). Nous ne détaillerons pas ici ces types de mesures.

5.3.2 Les équations d'observation

Chaque mesure est une fonction de la position du satellite (orbiter) observé et est du type :

$$q = f(\bar{r}, \bar{\dot{r}}, t, \bar{Q})$$

ou

$$q = f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, t_1, t_2, \bar{Q})$$

$\bar{Q}$ est un vecteur de paramètres géométriques (par exemple les coordonnées du pôle martien, les coordonnées de stations/landers d'observation) et/ou d'autres paramètres physiques (e.g. corrections au temps de propagation dans un milieu : troposphère, plasma solaire).

$\bar{r}$, $\bar{\dot{r}}$, $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ sont obtenus par l'intégration numérique des équations du mouvement du satellite ; ils sont fonction de $\bar{Z}$ et $\bar{P}$, avec :

$\bar{Z}$: vecteur comprenant les conditions initiales (vecteur d'état à un instant privilégié t_0 - généralement le début d'une portion de trajectoire, ou "arc" - voir ci-après) plus, dans la plupart des cas, des facteurs empiriques, par exemple des coefficients multiplicatifs des forces de surface ;

$\bar{P}$: vecteur des paramètres dynamiques, par exemple les harmoniques zonaux du champ de gravité (ou leur valeur moyenne sur 10, 30 jours, ...), le nombre de Love k_2 .

Les équations d'observation sont en général non linéaires par rapport à la plupart de ces paramètres. L'approche classique consiste à les linéariser autour de valeurs initiales $\bar{P}_0$, $\bar{Q}_0$ et $\bar{Z}_0$:

$$\Delta q = q^{\text{obs}} - q^{\text{comp}} = \frac{\partial q^{\text{comp}}}{\partial \bar{Z}} \Delta \bar{Z} + \frac{\partial q^{\text{comp}}}{\partial \bar{P}} \Delta \bar{P} + \frac{\partial q^{\text{comp}}}{\partial \bar{Q}} \Delta \bar{Q}$$

avec :

$$\Delta \bar{Z} = \bar{Z} - \bar{Z}_0, \Delta \bar{P} = \bar{P} - \bar{P}_0, \Delta \bar{Q} = \bar{Q} - \bar{Q}_0$$

Les dérivées partielles sont calculées via l'intégration numérique des équations aux variations associées aux équations dynamiques du mouvement lorsque q est une distance, une vitesse, ... entre un point d'observation (station DSN sur la Terre, atterrisseur à la surface de Mars, parfois un autre satellite), ou sont directement évaluées si q peut être exprimée comme une fonction simple

d'un phénomène physique au niveau du satellite (par exemple un gradient de gravité mesuré à bord).

Plus précisément nous avons :

$$\frac{\partial q^{\text{comp}}}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{Q}}$$

$$\frac{\partial q^{\text{comp}}}{\partial(\bar{Z}, \bar{P})} = \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial(\bar{Z}, \bar{P})} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial(\bar{Z}, \bar{P})}$$

(... ou $\partial f/\partial \bar{r}_1, \partial f/\partial \bar{r}_2$ si l'observable implique deux satellites dont les orbites seraient simultanément ajustées). Dans les systèmes d'observation courants, considérés ici, $\partial f/\partial \bar{r}$ n'est pas présent : le seul cas serait celui d'une mesure Doppler instantanée, mais dans la pratique c'est toujours une différence de distances (entre le début et la fin d'un temps de comptage).

Les quantités $\partial f/\partial \bar{Q}$ et $\partial f/\partial \bar{r}$ sont en principe aisées à calculer à l'époque d'observation, mais en réalité il faut tenir compte du temps de propagation du signal (par itérations), des effets relativistes (de courbure du trajet des ondes électromagnétiques, de variations des fréquences), des petits mouvements des stations DSN (effets de marées solides et effets de charge océanique et atmosphérique, mouvements tectoniques) etc.

Finalement, $\partial \bar{r}/\partial(\bar{Z}, \bar{P})$ est tiré des équations aux variations.

5.3.3 Solution par moindres carrés

Les M équations d'observation, linéarisées, conduisent au système :

$$Ax = B$$

où x est le vecteur des inconnues (de dimension N), A est une matrice $M * N$ (nous supposons ici que $M \gg N$) et b est le vecteur des résidus (des écarts Δq). Une matrice de poids Π ($M * M$) est associée aux observations ; elle est toujours diagonale dans notre cas (ses termes sont les inverses des carrés des erreurs estimées).

Ces équations sont résolues par la méthode des moindres carrés, en formant les équations normales :

$$(A^t \Pi A)x = A^t \Pi B$$

à partir desquelles x est calculé ; $N = A^t \Pi A$ est une matrice ($N * N$).

Une procédure de régularisation est souvent employée, pour certains paramètres, lorsque l'observabilité de ceux-ci est jugée insuffisante et/ou leur décorrélation à d'autres paramètres n'est pas garantie (ceci demande une

grande expérience des traitements de ce type ...); N est alors remplacée par $N + \alpha R$, où R est la matrice de régularisation et α un paramètre à ajuster en principe (régularisation de Tikhonov).

Une telle approche est nécessaire, en géodésie planétaire (du fait de la géométrie des problèmes), pour les inconnues dites "internes" (éléments orbitaux initiaux, paramètres empiriques, ...) qui peuvent ne pas être complètement déterminables. R est une matrice diagonale, ses éléments sont les inverses des carrés des valeurs estimées des incertitudes sur les inconnues, voire les valeurs attendues des paramètres eux-mêmes. α est en général fixé à une valeur correspondant à une modification d'une fraction définie (petite) du terme correspondant de N (et ceci pour chaque inconnue régularisée *a priori*).

Pour les paramètres géophysiques, R peut être :

- dérivée d'une loi de comportement *a priori* dans le cas des harmoniques gravitationnels (loi de Kaula, mise à l'échelle pour la planète en question), habituellement à partir d'un certain degré des harmoniques, et α est déterminée par l'expérience,
- assignée à partir d'essais numériques (pour différentes classes de paramètres et différentes valeurs de α) permettant de conclure à la stabilité (et à la vraisemblance) de la solution; cette manière heuristique est souvent la seule praticable, par rapport à des techniques de régularisation permettant de déterminer une valeur acceptable (après balayage systématique - et coûteux, de grandes plages de valeurs de α).

La matrice des variances-covariances de x est finalement :

$$\text{cov}(x) = \sigma_0^2 (N + \alpha R)^{-1}$$

où σ_0 est la variance unité estimée à partir de la solution et de la norme du vecteur résidu.

Une caractéristique essentielle de la méthode est son application non pas à tout l'ensemble des données disponibles (d'un seul coup), mais à des sous-ensembles, relativement courts, correspondant à des "arcs" de trajectoire de quelques jours en général. La raison principale est l'incertitude des paramètres (en particulier dynamiques) initiaux, qui empêchent (à cause de la linéarisation des équations d'observation et malgré un processus itératif) de traiter des cas où les écarts Δq seraient trop grands. Ce faisant le vecteur x lui-même est séparé en deux parties : les paramètres x_{int} "internes" (à chaque arc) et les paramètres x_{ext} "externes" (en général tous les paramètres géophysiques) communs à l'ensemble des arcs.

Pour chaque arc, dans une première étape, les x_{int} sont seuls déterminés (et par itération), les équations d'observation sont ensuite complétées par la partie relatives aux x_{ext} , l'ensemble des équations normales pour chaque arc

est constitué (par addition des systèmes normaux), et enfin la solution est calculée avec :

- le choix des inconnues finalement libérées,
- l'introduction de régularisations comme dit ci-dessus,
- l'introduction éventuelle de liens entre les paramètres (par des équations supplémentaires).

5.3.4 Le logiciel GINS

Le logiciel utilisé pour toute la suite de ce travail est GINS (Géodésie par Intégrations Numériques Simultanées). C'est un logiciel qui permet la simulation et la lecture de tout type d'observable (notée Q_{obs} , simulée ou réelle) utilisée en géodésie spatiale, la restitution d'orbite et de paramètres géophysiques par un système d'équations normales (voir le schéma fonctionnel de GINS, issu d'un des cours de l'école d'été du GRGS 2002, à la figure 5.2). Il a été développé originellement au CNES et il est en constante évolution surtout récemment en ce qui concerne les applications interplanétaires. Ce logiciel est complété par un ensemble de logiciels constituant la "chaîne" Dynamo (cf. figure 5.3), qui permet le cumul de plusieurs systèmes d'équations, la résolution globale de tous les paramètres, la prise en compte de contraintes, etc ... Le repère d'intégration d'orbite est le repère équatorial moyen martien à la date J2000 (*Loyer, 1997*) qui est tout à fait adapté au calcul d'orbite autour de Mars (voir paragraphe 1.1).

GINS permet :

- le calcul d'orbite autour d'un corps du système solaire, voire autour du Soleil lui-même ;
- la détermination de paramètres géophysiques : coefficients du champ de gravité, coefficients des modèles de marée océanique, surface moyenne océanique, coefficients du modèle d'atmosphère (température, densité des différents gaz), coordonnées du pôle et TU, position et vitesse des stations (géocentre) ...
- la simulation de la restitution d'orbite d'un satellite.

Les forces prises en compte dans le calcul d'orbite sont :

- les forces gravitationnelles : attraction gravitationnelle du corps central, attraction gravitationnelle du Soleil, de la Lune et des planètes, marées solides, marées océaniques, pression atmosphérique ;
- les forces non gravitationnelles (pour ces forces le satellite peut être considéré comme sphérique ou décomposé en macromodèle) : frottement atmosphérique, pression solaire directe, albedo, Infra-Rouge (IR), diffusion

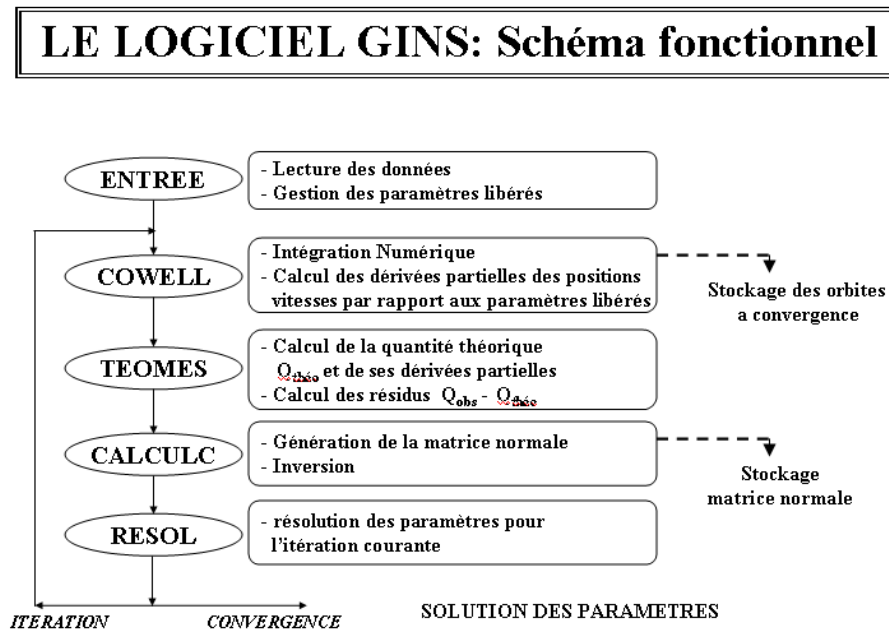


FIG. 5.2 – Schéma fonctionnel de GINS : $Q_{théo}$, l'observable théorique, est calculée à partir du vecteur position/vitesse du satellite et du vecteur position de la station à l'instant de la mesure. Ceci correspond au traitement d'un arc donné, i.e au calcul des paramètres internes. Le cumul des systèmes et la solution pour l'ensemble des paramètres sont effectués par la "chaîne" Dynamo, extérieurement.

thermique ...

Rappelons que les techniques d'intégration numérique demandent la mise du système issu de l'équation fondamentale de la dynamique sous la forme d'un système différentiel d'ordre 2, ou 1 (voir chapitre 2). GINS réalise une intégration numérique (en utilisant un intégrateur numérique à pas liés de type Cowell), éventuellement autour d'une orbite moyenne (technique de Encke) et permet l'extrapolation d'orbite avec comme sorties :

- les bulletins aux dates demandées (position et vitesse du satellite) ;
- les éphémérides du satellite, i.e à chaque pas d'intégration (1) position, vitesse, accélération dans le repère d'intégration (2) position, vitesse dans le repère lié au corps.

Un logiciel, OV (Orbit Visualization), développé au CNES, permet de faire des comparaison d'orbites ou des recouvrements d'orbites successives (voir le paragraphe 7.3 pour les applications).

La partie restitution d'orbite de GINS se décompose en une extrapolation

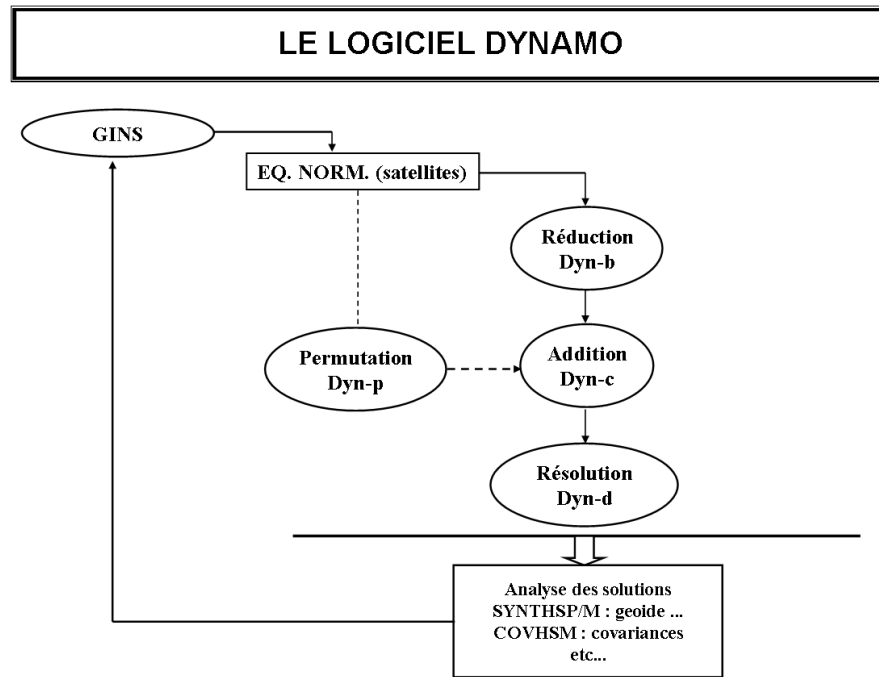


FIG. 5.3 – Schéma fonctionnel de Dynamo : *Dynamo-b* permet la réduction de la matrice normale aux seuls paramètres externes par décomposition en groupes, *Dynamo-c* permet de *sommer des équations normales* (de chaque arc de trajectoire par exemple), *Dynamo-p* permet de remettre les inconnues dans un ordre prédéfini (*permutation des inconnues*, les harmoniques zonaux de gravité par exemple), *Dynamo-d* permet la *résolution* d'un système d'équations normales (les méthodes disponibles sont : Choleski, gradients conjugués ou valeurs et vecteurs propres).

d'orbite et la prise en compte de mesures (de stations sol ou satellites). GINS utilise la méthode des moindres carrés pour minimiser les écarts entre l'orbite calculée et les mesures en ajustant des paramètres : le bulletin initial (toujours libéré), les facteurs multiplicatifs des forces (frottement, portance, albedo, thermique), les coefficients empiriques (biais, termes périodiques ...), les forces stochastiques (les accélérations résiduelles des désaturations des roues à inertie par exemple), plus certains paramètres liés aux mesures (par exemple des biais liés aux instruments). Les sorties de la restitution d'orbite sont : (1) les éphémérides du satellite à convergence, (2) les bulletins aux dates demandées et (3) les paramètres ajustés. GINS enfin procède à une itération dite supplémentaire ou des paramètres inconnus (des paramètres géophysiques par exemple) sont libérés. Si on se réfère à la figure 5.2, l'ité-

ration supplémentaire est une itération complète qui s'arrête au niveau de la génération de la matrice normale (du stockage de la matrice normale).

Les données sont, pour *les missions réelles* (MGS, MODY), des mesures Doppler 1 voie, 2 et 3 voies obtenues par le DSN et, dans le cas du projet NEIGE, des mesures simulées (calculées via des fonctions de mesure théoriques) de Doppler 2 voies de type DSN et de Doppler 2 voies entre un atterrisseur sur Mars et un satellite en orbite autour de Mars (voir paragraphe 6.4). La fonction de mesure, réelle ou théorique, est traitée par un formalisme inspiré de *Moyer* [2000].

Chapitre 6

Simulations de missions de radio science

6.1 Dynamique atmosphérique

Les déplacements de la masse du CO_2 atmosphérique de Mars sont proportionnellement plus importants que sur la Terre [*Chao and Rubincam, 1990*]. En effet, les phénomènes saisonniers liés au CO_2 déplacent à peu près 30% de la masse de l'atmosphère martienne tandis que sur Terre, environ 0,02% de la masse de l'atmosphère est déplacée en fonction des saisons sous forme de vapeur d'eau. Les calottes polaires martiennes ne se comportent pas de manière symétrique. Le taux de matière condensée est plus important au pôle Sud qu'au pôle Nord. De ce fait, en ce qui concerne les coefficients zonaux pairs en particulier, la contribution des deux hémisphères donne une signature inter-annuelle. Les raisons de cette asymétrie Nord-Sud sont multiples. Evidemment la masse, l'étendue et l'albedo respectives des deux calottes polaires jouent un rôle. L'excentricité de l'orbite martienne et l'inclinaison de l'axe de rotation de la planète par rapport à son plan orbital ($25, 19^\circ$) font qu'il y a des saisons comme dans le cas terrestre, mais plus marquées. Les hivers sont plus longs, plus froids et la pression atmosphérique est en moyenne plus basse (3-4 mb) au pôle Sud à cause de sa plus haute altitude (6 km de différence en moyenne dont l'origine est jusqu'alors mal connue) par rapport au pôle Nord (pression moyenne de 8-9 mb). Actuellement, l'été dans l'hémisphère Sud a lieu près du périhélie. Mars est environ 20% plus proche du Soleil que lors de l'été boréal.

Les variations temporelles de pression à la surface et de masse de glace/neige carbonique, utilisées comme illustration de ce paragraphe d'introduction, sont basées sur les sorties des GCMs du Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD) (voir *Forget et al.*, [1999]) et du centre NASA Ames (voir *Haberle et al.* [1999] et *Karatekin et al.* [2005]). Dans ces deux modélisations de la dynamique atmosphérique martienne, la résolution est de 7.5° en latitude et de 9° en longitude. Le facteur déterminant est la température T . Si $T < T_{\text{condensation}}$, on prévoit une transition de phase gaz/solide du CO_2 et il y a formation de CO_2 sous forme de glace. Or T dépend de plusieurs facteurs. Certains, comme l'albedo et l'émissivité de surface des calottes polaires, ne sont pas décrits/paramétrisés de la même façon dans chacun des GCM. Par exemple, le GCM du LMD restitue ces valeurs d'albedo et d'émissivité de sorte que les variations de pression atmosphérique s'ajustent au mieux aux mesures relevées au site Viking (voir *Hourdin et al.*, [1995]). Ces paramètres sont uniquement des paramètres d'entrée non ajustés dans le GCM NASA Ames, ce qui explique en partie, la différence entre la masse de neige carbonique estimée sur la base de ce GCM et celle déterminée à partir de celui du NASA Ames.

Le dépôt saisonnier de CO_2 recouvre en surface des épaisseurs riches en hydrogène ce qui entraîne des variations significatives du flux de neutrons observable entre la période estivale et hivernale. Ces variations ont été mesurées par l'instrument HEND (High Energy Neutron Detector) pour calculer l'épaisseur du dépôt de dioxyde de carbone (voir *Litvak et al.* [2004]). L'épaisseur de neige carbonique a été calculée pour différentes latitudes en utilisant une technique modèle-dépendante restituant donc des valeurs très proches, qualitativement et quantitativement, du modèle impliqué (celui du centre NASA Ames). La densité surfacique saisonnière de CO_2 est obtenue en kg/m^2 dans une bande de latitude comprise entre 60° et 70° , 70° et 80° et, 80° et 90° . Les masses maximales au Nord et au Sud ont été estimées à $3.6 \times 10^{15} kg$ et $6.7 \times 10^{15} kg$ respectivement.

La figure 6.1 montre les variations de chacun des harmoniques zonaux de degré 2 à 5 en fonction de la longitude solaire de Mars estimées à partir des sorties des GCMs du LMD et du centre NASA Ames ainsi qu'à partir des données HEND. Bien que les signaux extraits des ces trois lots de données soient assez similaires, il reste des différences en amplitude, de parfois plus de 30% à une date donnée. Il est important de noter que les degrés 4 et 5 présentent des variations significatives comparées à celles des degrés 2 et 3 respectivement. Cette dernière remarque pose d'ailleurs directement la question sur la pertinence de la restitution conjointe des termes des degrés 4 et 5 par exemple lors de la procédure d'ajustement des variations des degrés 2 et 3 à partir de l'analyse de données Doppler DSN de poursuite d'une sonde. On

rappelle ici qu'un seul orbiteur ne permet pas de déterminer les variations de tous les coefficients zonaux de gravité puisque corrélés dynamiquement par type de perturbation orbitale induite, uniquement les pairs d'un côté et les impairs de l'autre (formules (5.27) et (5.28)). Dans le cas d'un orbiteur unique, on ne détermine classiquement que $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$, les coefficients composites qui sont de facto défini comme deux coefficients qui contiennent une combinaison linéaire unique des contributions des degrés supérieurs ou égaux mais de même nature sur l'élément orbital le plus perturbé. Par exemple, ce sont les perturbations du noeud ascendant qui contiennent l'information sur les variations saisonnières des harmoniques zonaux pairs.

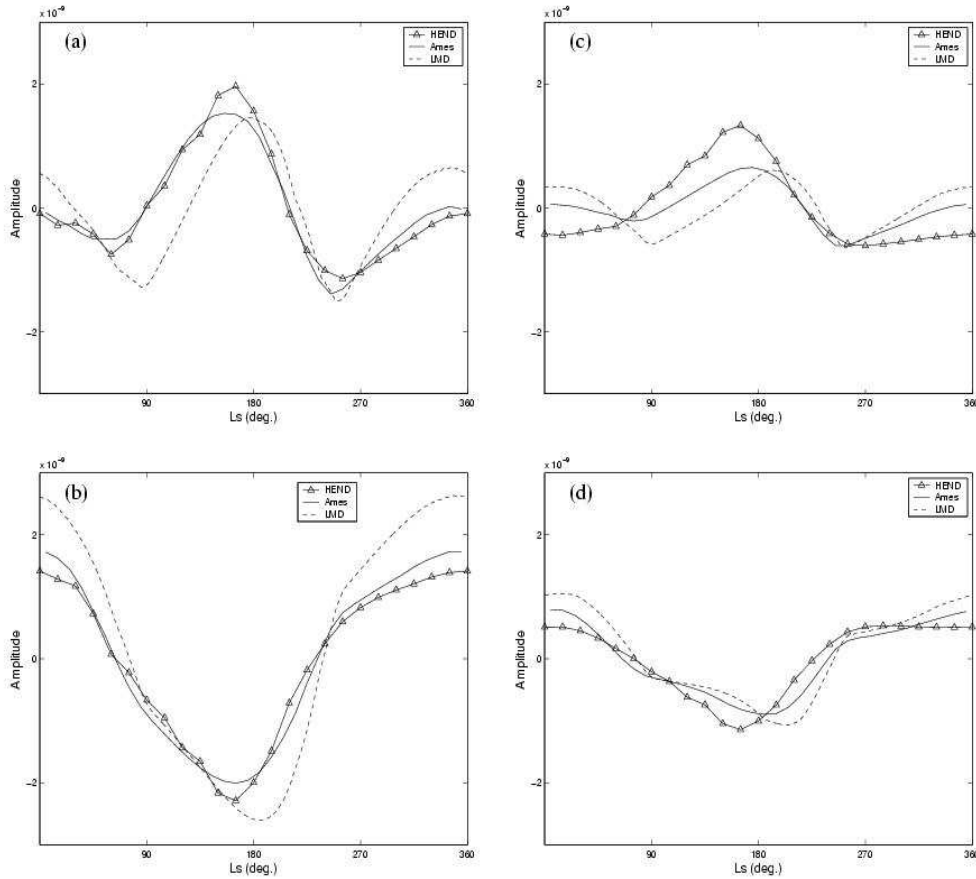


FIG. 6.1 – Variations saisonnières de (a) $\bar{C}_{20}$ (b) $\bar{C}_{30}$ (c) $\bar{C}_{40}$ (d) $\bar{C}_{50}$: prédictions des GCM du LMD et du centre NASA Ames) ainsi qu'à partir des mesures de l'instrument HEND

Une analyse plus détaillée du comportement de $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ est présentée à

la figure 6.2 où on va trouver des résultats issus de l'analyse des données de poursuite de la sonde MGS. A partir des amplitudes et phases annuelles et semi-annuelles [*Smith et al.*, 2001; *Yoder et al.*, 2003] extraites de $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ restitués, les deux signaux ont été reconstruits. Ces résultats sont en accord avec les solutions GCMs et HEND. Ainsi, les simulations fournies par ces GCMs sont en accord avec les tendances temporelles observées, mais elles restent deux déclinaisons distinctes d'une réalité dynamique évidemment plus compliquée. Les données de suivi de sonde fournissent une mesure directe du

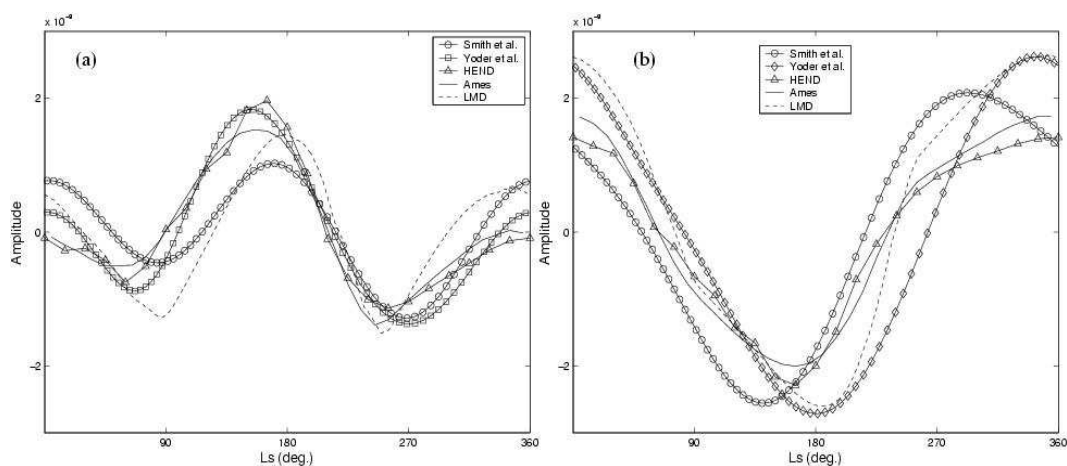


FIG. 6.2 – Variations saisonnières de (a) $\bar{C}_{20,l}$ (b) $\bar{C}_{30,l}$ du GSFC (*Smith et al.*, [2003]) et du JPL (*Yoder et al.*, [2003]), à partir des données de poursuite de la sonde MGS. Comparaisons aux prédictions des variations de $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ via les GCMs du LMD et du centre NASA Ames ainsi qu'à la solutions issue des mesures de l'instrument HEND

cycle du CO_2 à l'échelle de la planète. Cependant, la diversité des méthodes, des modèles, des systèmes de référence et des logiciels utilisés par les différents centres de recherche (JPL, GSFC) pour restituer les dynamiques des sondes explique les écarts constatés sur la détermination des variations des zonaux. On rappelle qu'en plus le faible rapport signal sur bruit se répercute aussi sur les amplitudes des zonaux restituées. On observe jusqu'à 40% de différence entre les centres.

6.2 Objectifs

Les simulations ont deux objectifs principaux qui sont :

- d’explorer les possibilités d’amélioration quant à la détermination des harmoniques zonaux de bas degré, variables, à partir de missions de radio science et/ou de géophysique plus globale (comprenant notamment la détermination de la rotation du corps central) engageant un ou plusieurs satellites et un ou plusieurs systèmes de poursuite (depuis la Terre à partir de stations DSN et/ou depuis Mars à partir d’atterrisseurs),
- de quantifier l’impact des harmoniques zonaux de degré 4 et 5 sur la détermination de ceux de degré 2 et 3 respectivement, dans le cadre des missions décrites ci-dessus.

6.3 Critères d’évaluation des simulations

Principes des simulations

On suppose que nous avons un modèle caractérisant un phénomène quantifiable par notre expérience et que nous puissions simuler des données de cette expérience, tenant compte de ce modèle, c’est la partie **simulation des données**. En **restitution du (ou des) paramètre(s)** caractérisant ce modèle, on fait l’hypothèse que nous n’avons aucune information physique sur ce modèle. Cependant, nous savons que cette information est de toute manière contenue dans les données. Nous pouvons ainsi utiliser les données simulées pour résoudre par **méthode inverse** [Tarantola and Valette, 1982] le(s) paramètre(s) du modèle, considérés alors comme des inconnues.

Critères d’évaluation de l’expérience

La comparaison/**différence** du modèle **solution** avec le modèle **initial**, autrement dit l’**erreur vraie**, traduit l’**exactitude** de l’expérience par rapport au phénomène qu’on veut observer. La **variance a posteriori**, autrement dit l’**erreur formelle** ou **incertitude** traduit quant à elle la **précision** de l’outil mathématique utilisé, c’est-à-dire la **méthode des moindres carrés**, pour obtenir ce modèle solution. Ces deux grandeurs avec la **matrice de covariance associée** forment, comme sorties du processus de restitution, l’ensemble des résultats de la simulation qui nous permet de conclure si la configuration de l’expérience est adaptée pour résoudre ce modèle et en

extraire les paramètres géophysiques ciblés.

6.4 La mission NEIGE : justification

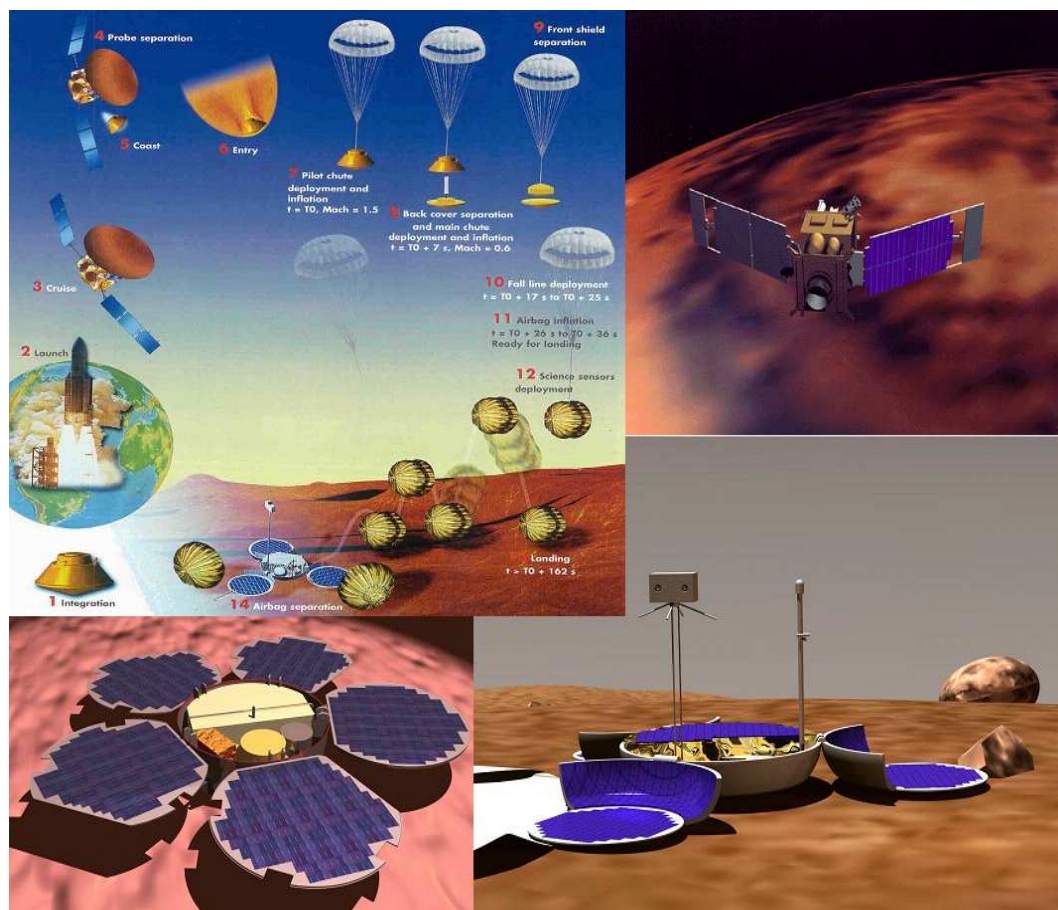


FIG. 6.3 – Déroulement du vol et de l'arrivée sur Mars de l'expérience NEIGE

La mission NEIGE (NEtatterrisseur Ionosphere & Geodesy Experiment) devait être une expérience constituée d'un orbiteur, faisant le relais avec la Terre, et de 4 atterrisseurs posés sur le sol martien comme le montrent les figures 6.3 et 6.4. A bord de ces atterrisseurs devaient être embarquées au plus 9 expériences, dont l'expérience NEIGE, allant de la sismologie à l'étude de la magnétosphère, en passant par l'étude de l'atmosphère en terme de pression, température et vitesse des vents. L'expérience NEIGE s'intéressait quant à elle à deux domaines distincts : la caractérisation de l'ionosphère de

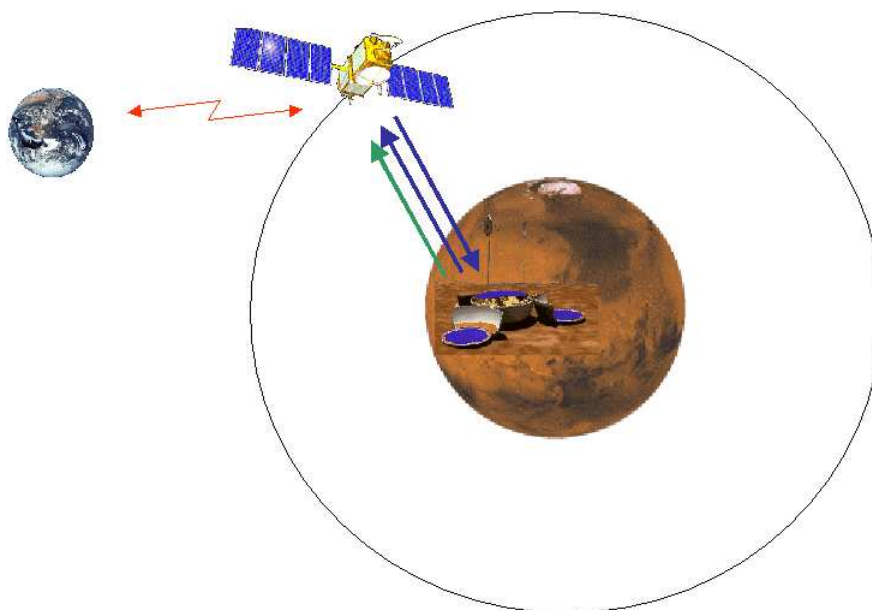


FIG. 6.4 – Schéma de principe de l'expérience NEIGE : les liens électromagnétiques (mesure d'effet Doppler) sont en bande X (rouge), et en bifréquence : bande S (vert) - UHF (bleu)

Mars, par l'évaluation de profil de contenu électronique total (CET), et la géophysique interne de Mars. Dans le cadre de ces simulations, nous ne nous occupons que de l'aspect géodésique de l'expérience.

La principale préoccupation est ici de voir s'il est possible d'évaluer précisément les paramètres de géophysique interne de Mars (noyau liquide ou solide, possédant ou non une graine plus ou moins grande) en regardant leur influence sur les paramètres de nutation martiens, grâce au lien Doppler entre le satellite et le réseau d'atterrisseurs martiens.

Ainsi **deux jeux de mesures** sont nécessaires :

1. un jeu de mesures Doppler 2 voies entre les stations DSN sur Terre et l'orbiteur qui assure le lien dynamique entre le satellite et le référentiel terrestre.
2. un jeu de mesures Doppler 2 voies dites NEIGE entre les atterrisseurs et l'orbiteur (dont on peut restituer les position et vitesse grâce au lien Doppler précédent). Ce jeu de mesures permet d'apprécier/quantifier les variations des paramètres d'orientation martiens via le positionnement du réseau martien de stations au cours du temps.

La question est de savoir si la combinaison de ces deux jeux de mesures peut

permettre de restituer les paramètres de rotation martien avec suffisamment de précision pour descendre sous le seuil d'influence des paramètres qui modélisent l'intérieur de Mars.

D'autre part, NEIGE avait également pour ambition d'estimer les variations temporelles de la masse de dioxyde de carbone qui transite au niveau des calottes polaires, si la configuration orbitale le permet. En effet, la *précision* obtenue sur les paramètres de rotation propre restitués permet ou non de contraindre les modèles de variations saisonnières de la masse au niveau des calottes polaires de CO_2 , via les périodes extraites de ΔLOD .

6.5 Caractéristiques des traitements

Les traitements utilisent la linéarisation des équations de mesure par rapport aux paramètres à déterminer, l'estimation de ceux-ci par la méthode des moindres carrés et le logiciel GINS, le processus a été décrit au chapitre 5.

Les modèles sont d'une part un modèle de rotation de Mars (voir les paragraphes 1.3.1 et 1.3.2) incluant mouvement du pôle, variations saisonnières du temps sidéral et nutations soient 18 paramètres, et d'autre part une modélisation des variations saisonnières des harmoniques zonaux de gravité de degré 2 à 5. Nous avons donc simulé avec GINS des mesures Doppler NEIGE et DSN sur 100 semaines (durée nominale de l'expérience NEIGE car un peu plus d'un an martien) en prenant en compte les variations saisonnières de $\bar{C}_{20}$, $\bar{C}_{30}$, $\bar{C}_{40}$ et $\bar{C}_{50}$. Pour cela, on s'appuie sur les valeurs statiques fournies par le développement en harmoniques sphériques de *Lemoine et al.* [2001] auxquelles on ajoute les séries temporelles pour chaque harmoniques zonaux normalisé, ici les degrés 2 à 5. Cette partie variable (les séries temporelles) a été estimée à partir des sorties du GCM NASA Ames [*Karatekin et al.*, 2005]. On a considéré que le(s) satellite(s) étai(en)t suivi(s) par trois stations DSN (Canberra, Madrid et Goldstone) ce qui assure un suivi DSN quasi continu de la sonde. On a fait l'hypothèse que le satellite impliqué dans l'expérience de science en réseau (en orbite circulaire à 500 km, héliosynchrone (d'inclinaison 93.2°) est suivi par un réseau de quatre atterrisseurs sur Mars (voir le réseau nominal d'atterrisseurs dit *Tharsis*¹ utilisé dans cette étude à la figure 6.6

¹Ce réseau fait partie d'une liste de réseaux proposés et discutés par le *NetLander Landing Site Working Group* en 2001 et 2002. Ces réseaux essaient de tenir compte des objectifs scientifiques de chaque instrument mais sont surtout basés sur des contraintes techniques liées à l'atterrissage (altitude, pente locale, rugosité du sol) ou à l'ensoleillement, pour les panneaux solaires.

(la figure 6.5 donne précisément les positions des stations en longitude et latitude) avec une fréquence de poursuite d'un passage par semaine par atterrisseur. Les observations Doppler en bande X et S/UHF sont intégrées sur des intervalles de 60 et 20 secondes respectivement avec un bilan d'erreur instrumental (exception faite du poste d'erreur à court terme, ou bruit, induit par le multitrajet spéculaire au niveau des atterrisseurs pour l'UHF, environ 3 mm/s) de 0.1 mm/s [Tyler et al., 1992; Barriot et al., 2001; Duron, 2002a et 2002b]. Les positions du Soleil et des autres planètes sont données par les éphémérides planétaires du DE403 (JPL). Les forces non gravitationnelles agissant sur le(s) satellite(s) (les désaturations des roues à inertie, le frottement atmosphérique, la force de pression de radiation solaire directe, l'albedo, IR ...) et la position des atterrisseurs sont supposées parfaitement connues. Vienne et al. [2004] ont montré qu'une détermination précise de la localisation des atterrisseurs est possible dans les 5 premières semaines de mission.

Il faut donc garder à l'esprit que ce jeu d'hypothèses traduit le fait que nos simulations fournissent à chaque fois le meilleur scénario/cas, puisque ne sont pas prises en compte les forces non gravitationnelles, pour l'estimation des harmoniques zonaux de gravité et/ou de la rotation et qu'elles correspondent à une limite supérieure de sensibilité des orbites aux paramètres géophysiques recherchés. Dans un cas réel, une mauvaise modélisation des forces non gravitationnelles pourrait rendre problématique la détermination des paramètres géophysiques recherchés, mais cela ne fait pas l'objet de ce chapitre.

6.6 Description des expériences : généralités

Dans un premier temps, on simule des observables Doppler NEIGE et DSN avec un modèle initial de rotation martienne. Puis, la première phase d'analyse va concerner la *restitution des harmoniques zonaux de gravité* basée sur les mesures Doppler DSN simulées.

Ensuite, il s'agit de mettre en avant l'*impact de la méconnaissance du modèle de rotation sur la restitution de $\bar{C}_{20}$* . On aura recours à ce qu'on appelle un **cas perturbé**, cas où, en restitution, on a perturbé a priori les modèles initiaux de rotation (voir 1.3.3) et un **cas non perturbé**, cas où, en restitution, les modèles de rotation sont les mêmes que ceux utilisés pour simuler les mesures Doppler DSN. Enfin, ayant perturbé a priori les modèles initiaux de rotation, on peut entamer une phase de restitution permettant l'étude de la *détermination simultanée des variations saisonnières du $\bar{C}_{20}$ et des paramètres de rotation* basée sur les mesures Doppler

NetLander landing Sites Proposed networks

Tharsis T1 network

Tharsis T1 Network purple	Target Long (°)	Target Latl (°)	SMAA (km) 1s	SMIA (km) 1s	SMAA (km) 2s	SMIA (km) 2s	SMAA (km) 3s	SMIA (km) 3s	Approx surface (km ²) 3s
Landing site1	-156E	11N	155,0	17,3	336,0	34,5	576,2	51,7	93879
Landing site2	-68E	25N	64,8	30,3	171,2	60,6	261,6	91,0	74791
Landing sites3	66.6E	27S	64,9	35,7	130,4	71,4	197,1	107,3	66400
Landing site3bis	74E	33S	91,0	25,7	163,6	51,5	266,9	77,3	69663
Landing site4	-42E	11N	155,0	17,3	336,0	34,5	576,2	51,7	93879

SMAA: SemiMAjor Axis
SMIA: SemiMinorAxis

FIG. 6.5 – Longitudes et latitudes pour le réseau *Tharsis* : une station à l'ouest de *Tharsis*, deux à l'est de *Tharsis* et une dans le bassin *Hellas* (Landing site 3 ou 3 bis), antipodale au triangle de stations autour de *Tharsis*. La distance minimale entre les stations est d'environ 2200 kms. Ce tableau donne aussi les caractéristiques des ellipses d'incertitude (et les surfaces associées à 3σ) sur le site d'atterrissage au moment du largage. Ce réseau est représenté sur la figure 6.6

DSN et NEIGE simulées.

Pour affiner l'analyse de l'impact de tel ou tel paramètre, on peut aussi se placer dans plusieurs configurations d'expérience en combinant des orbites différentes ou en faisant varier le nombre de stations de poursuite DSN ou d'atterrisseurs martiens.

6.7 Analyse de la dynamique d'un satellite seul

Le premier satellite considéré, qui est notre référence, est sur une orbite quasi circulaire $500 * 500$ (kms), d'excentricité $e = 0.001$ et d'inclinaison $i = 93.2^\circ$, très proches de celle de MGS. Pour un jeu d'éléments orbitaux donnés, les relations (5.27) et (5.28) permettent d'affirmer que leurs pertur-

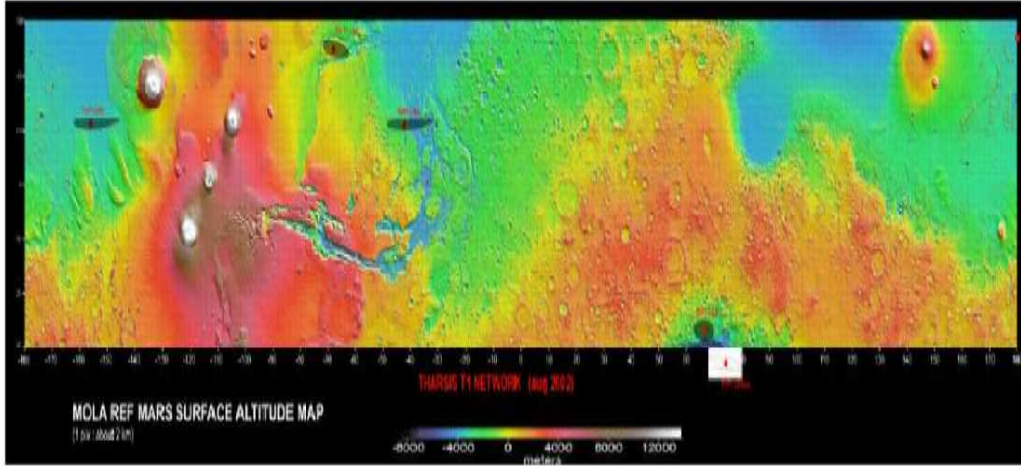


FIG. 6.6 – Géométrie du réseau d’atterrisseurs (points rouges) dit *Tharsis*. Les ellipses représentent l’incertitude sur le site d’atterrissage au moment du largage.

bations dépendent d’un unique système d’harmoniques zonaux de gravité. Ce lot d’équations indique aussi que les deux coefficients de Stokes typiquement résolus, l’un pair ($\bar{C}_{20,l}$) et l’autre impair ($\bar{C}_{30,l}$), à partir des données de poursuite d’un unique orbiteur contiennent les contributions de tous les autres degrés de même type. De plus, les amplitudes des variations des plus hauts degrés sont du même ordre de grandeur [Karatekin et al., 2005], ces termes de plus haut degré ont une contribution significative lors de l’ajustement de $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$. Enfin, pour le **cas MGS**, si on compare les valeurs (f_2, f_4) et (g'_3, g'_5) associées aux équations (5.27) et (5.28), on peut affirmer que **les variations de ω permettent de mieux discriminer les impairs entre eux que ne le permettent les variations de Ω pour les pairs**. Dans le but d’étudier quantitativement l’influence des harmoniques zonaux de plus hauts degrés, nous avons considéré plusieurs types de simulations résumées en table 6.1.

Les matrices de corrélations des trois premières simulations (voir figure 6.8) correspondent aux premières semaines de mission où la position du plan d’orbite n’est ni vraiment vue de face, ni vraiment vue par la tranche (voir la figure 6.7). On **exclut** donc de la discussion qui suit les **cas extrêmes** de configuration **vue par la tranche** et **vue de face** décrits dans le paragraphe 5.2. Concernant la **simulation 1** on a des corrélations relativement basses (inférieures à 0.5) entre les estimations des harmoniques zonaux eux-

TAB. 6.1 – Description des simulations.

Simulation	Lien(s) radio	zonaux initiaux	zonaux restitués
1	1 orbiteur	C_{20}, C_{30}	C_{20}, C_{30}
2	1 orbiteur	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$	$\bar{C}_{20,l}, \bar{C}_{30,l}$
3	1 orbiteur	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$
4	2 orbiteurs	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$
5	1 orbiteur + 4 atterrisseurs	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$
6	2 orbiteurs + 4 atterrisseurs	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$	$\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$

TAB. 6.2 – Amplitudes (Amp.) et phases (ϕ) annuelles (A.) et semi-annuelles (S.A) de $\bar{C}_{20}$ and $\bar{C}_{30}$ restitués.

	$\Delta\bar{C}_{20}$				$\Delta\bar{C}_{30}$			
	A.		S.A		A.		S.A	
	Amp.	ϕ	Amp.	ϕ	Amp.	ϕ	Amp.	ϕ
Initial	8.0E-10	-44	7.5E-10	-44	1.9E-09	-67	2.6E-10	38
Simulation 1	6.8E-10	-42	6.6E-10	-41	2.4E-09	-69	2.9E-10	37
Simulation 2	1.2E-09	-38	1.0E-09	-58	2.9E-09	-71	3.3E-10	40
Simulation 3	8.6E-10	-45	5.4E-10	-26	2.1E-09	-69	6.1E-10	27

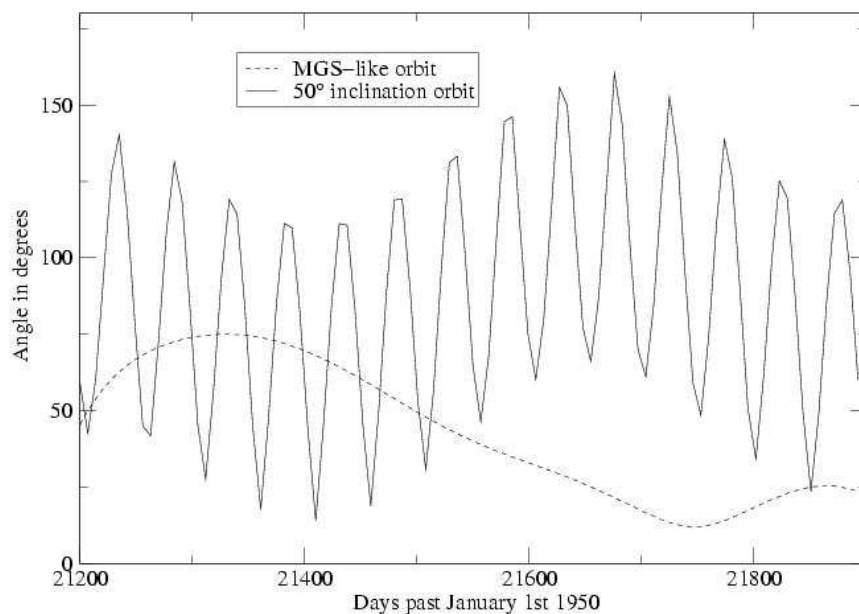


FIG. 6.7 – Variation de l'angle entre la normale du plan orbital et la ligne de visée Terre-orbiteur pour deux des orbites circulaires d'inclinaison 50° et 93.2° . L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

mêmes et entre eux (figure 6.8a). Le problème de cette simulation est qu'elle ne permet pas d'appréhender les difficultés qu'on rencontre réellement dans la restitution de ces deux zonaux à partir de données Doppler de poursuite d'une sonde autour de Mars comme MGS par exemple. C'est un cas référence. En effet, le satellite subit non pas $\bar{C}_{20}$ seul et $\bar{C}_{30}$ seul mais bien une combinaison linéaire des zonaux pairs et une autre des zonaux impairs, comme précisé plus haut. Ce sont alors les coefficients composites $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ qui sont restitués.

La **simulation 2** rend un peu plus compte de cette réalité. Quand on inclut les zonaux de plus haut degrés dans le modèle initial de champ variable, on note (figure 6.8b) que les ajustements de $\bar{C}_{20,l}(t)$ sont très corrélés entre eux (corrélations supérieures à 0.5), alors que les ajustements de $\bar{C}_{30,l}(t)$ le sont beaucoup moins (corrélations inférieures à 0.5). Ceci s'explique par le fait que les variations de ω permettent de mieux discriminer les impairs entre eux que ne le permettent les variations de Ω pour les pairs, comme justifié plus haut dans cette section. On remarque aussi que, par rapport au cas précédent (simulation 1), les corrélations entre les estimations de $\bar{C}_{20,l}(t)$ et $\bar{C}_{30,l}(t)$ ont aussi augmenté. Ceci s'explique par le fait que les variations de ω

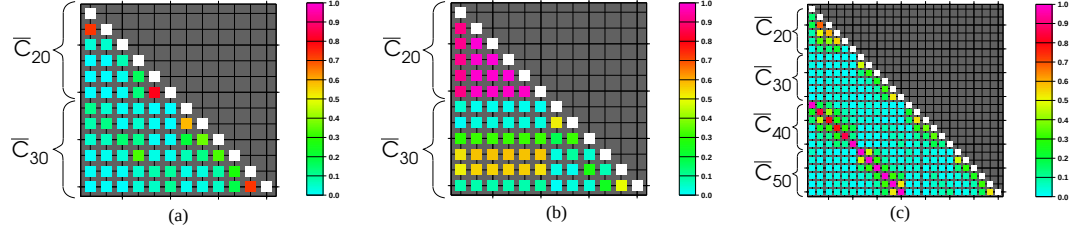


FIG. 6.8 – Matrices de corrélations correspondant à (a) simulations 1, (b) simulation 2 ($\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ sont en fait $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$) et (c) simulation 3. Les éléments de la matrice correspondent aux corrélations entre les zonaux ajustés au cours des 5 premières semaines de mission, 6 solutions pour des recouvrements périodiques à 10 jours, i.e chaque point correspond à 10 jours de données

et Ω sont induites à la fois par $\bar{C}_{20,l}$ (pour la part séculaire) qui est moins bien déterminé (au sens des corrélations) qu'en simulation 1 et par $\bar{C}_{30,l}$ (pour la part longue période). On peut donc physiquement avoir une idée de l'évolution des corrélations entre les pairs et les impairs dans les configurations géométriques extrêmes de poursuite de la sonde. En **vue par la tranche**, on a une **amplification Doppler maximum** des variations de ω , de leur part longue période en particulier (terme de plus forte contribution en amplitude) donc de $\bar{C}_{30,l}$ (voir paragraphe 5.2) On doit donc voir apparaître une **diminution des corrélations** entre $\bar{C}_{20,l}(t)$ et $\bar{C}_{30,l}(t)$. En **vue de face**, on a une **amplification Doppler minimum** de la part longue période des perturbations sur ω donc de $\bar{C}_{30,l}$. Dans ce cas, on doit donc voir apparaître une **augmentation des corrélations** entre $\bar{C}_{20,l}(t)$ et $\bar{C}_{30,l}(t)$.

L'ajustement de tous les coefficients initiaux ($\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$), **simulation 3**, ne donne pas un jeu de solutions complètement décorrélées pour ces 4 paramètres, ce que prévoyait déjà la formule (2.10). En effet, apparaît clairement dans la matrice de corrélation ce que prévoit cette équation (voir la figure 6.8c) : la diagonale dite de "lump", soit une diagonale de corrélations des pairs entre eux et des impairs entre eux. Pour terminer de s'en convaincre, on a représenté sur les figures 6.9 et 6.10 les erreurs vraies issues des ajustements, correspondant à (simulations 2, simulation 3), de $(\bar{C}_{20,l}(t), \bar{C}_{20}(t))$ et $(\bar{C}_{30,l}(t), \bar{C}_{30}(t))$ respectivement. On a aussi tracé les variations initiales modélisées des harmoniques zonaux $\bar{C}_{40}$ et $\bar{C}_{50}$. Il apparaît distinctement que les erreurs vraies sur les ajustements de $\bar{C}_{20,l}(t)$ et $\bar{C}_{30,l}(t)$ de la simulations 2 sont principalement des signatures des zonaux de plus haut degré, $\bar{C}_{40}$ et $\bar{C}_{50}$ respectivement, modélisés mais non ajustés.

L'essai de restitution conjointe de tous les zonaux réalisé par l'analyse de

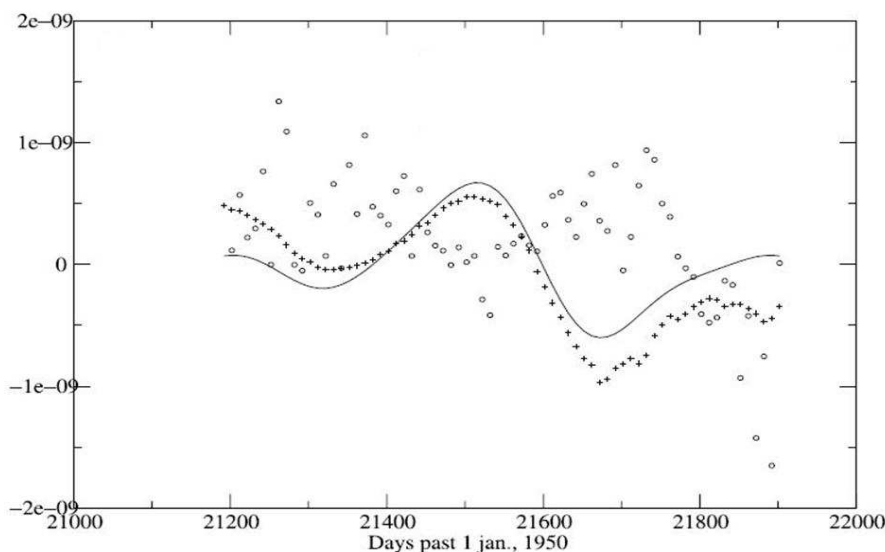


FIG. 6.9 – Comparaison entre l'erreur vraie sur $\bar{C}_{20}$ ajusté et $\bar{C}_{40}$ non ajusté i.e ses variations initiales (trait plein). On a représenté les cas où : seuls $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ sont ajustés (+), simulation 2 ; $\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$ sont ajustés (o), simulation 3. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

la dynamique d'un seul orbiteur (**simulation 3**), de caractéristiques orbitales semblables à celles de MGS, fait disparaître ces signatures dans les variations des zonaux de degré 2 et 3. Cependant, les erreurs vraies restent grandes (voir figures 6.9 et 6.10, petits ronds), dispersées (surtout pour $\bar{C}_{30}$) et de l'ordre de grandeur des amplitudes des signaux recherchés surtout pour $\bar{C}_{30}$. Ceci s'explique par l'équation (5.28) et les valeurs de g'_3 et g'_5 , 0.25 et 0.73 respectivement (1 pour 3), qui traduisent que la contribution principale aux perturbations longues périodes sur ω est celle induite par $\bar{C}_{50}$. Ce rapport est de seulement 1 pour 1.5 entre f_2 et f_4 , on s'aperçoit donc que les harmoniques zonaux de degré pair, notamment $\bar{C}_{20}$, sont mieux restitués en terme de précision (quelques 10^{-10}) et d'exactitude que les impairs comme le montrent les figures 6.11 et 6.12. Il est d'ailleurs remarquable que pour les zonaux impairs ajustés, la valeur moyenne des variances a posteriori est de l'ordre de grandeur des variations attendues (10^{-09}).

La table 6.2 présente les amplitudes restituées pour les trois premières simulations sur la base d'une transformation des séries temporelles en série de Fourier (amplitude et phase annuelles et semi-annuelles). Elle confirme

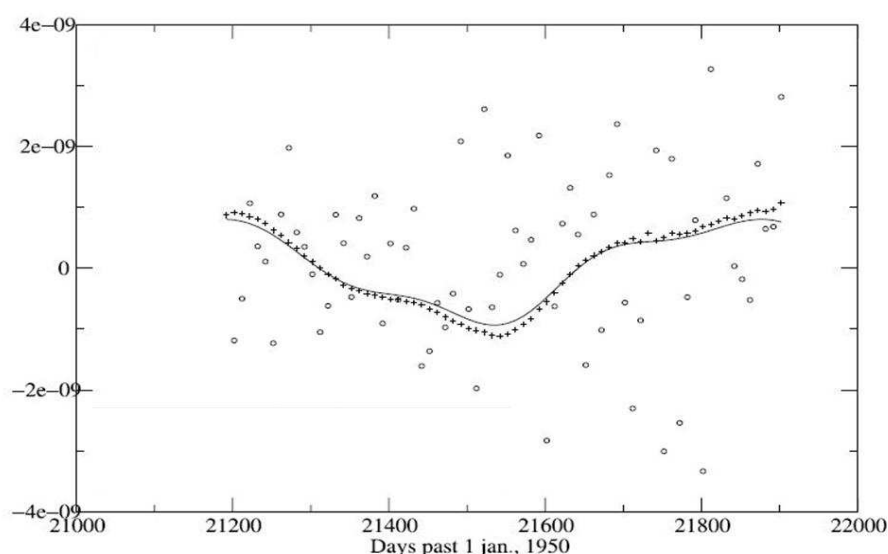


FIG. 6.10 – Comparaison entre l'erreur vraie sur $\bar{C}_{30}$ ajusté et $\bar{C}_{40}$ non ajusté i.e ses variations initiales (trait plein). On a représenté les cas où : seuls $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ sont ajustés (+), simulation 2 ; $\bar{C}_{20}$ à $\bar{C}_{50}$ sont ajustés (o), simulation 3. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

que, en terme d'exactitude sur les amplitudes annuelle et semi-annuelle ajustées, la stratégie de restitution de la *simulation 2* est favorable à $\bar{C}_{30}$ (c'est alors $\bar{C}_{30,l}$ qui est solution) alors que c'est la stratégie de restitution de la *simulation 3* qui présente un intérêt quant à la restitution de $\bar{C}_{20}$. En ce qui concerne $\bar{C}_{20}$ pour la *simulation 2*, donc $\bar{C}_{20,l}$, l'erreur vraie sur l'amplitude annuelle est voisine de **50%** et celle sur l'amplitude semi-annuelle est d'environ **30%**. La variance a posteriori sur la restitution des degrés pairs est stable par rapport à l'évolution de l'orientation du plan d'orbite (par rapport à la ligne de visée). Elle ne dépasse pas 30% de sa valeur moyenne, et ce en début et fin de la période traitée (figure 6.12). La qualité ou précision sur l'ajustement des zonaux de gravité impairs est sensible aux variations de l'orientation du plan d'orbite, avec une dégradation maximale d'un facteur 3 en fin de période de simulation (deuxième moitié de la période sur la figure 6.12) alors que l'orbite est vue de face par rapport à la Terre. En ce qui concerne $\bar{C}_{30}$ pour la *simulation 3*, l'erreur vraie sur l'amplitude annuelle est voisine de **10%** mais celle sur l'amplitude semi-annuelle est **bien au-delà des 100%**.

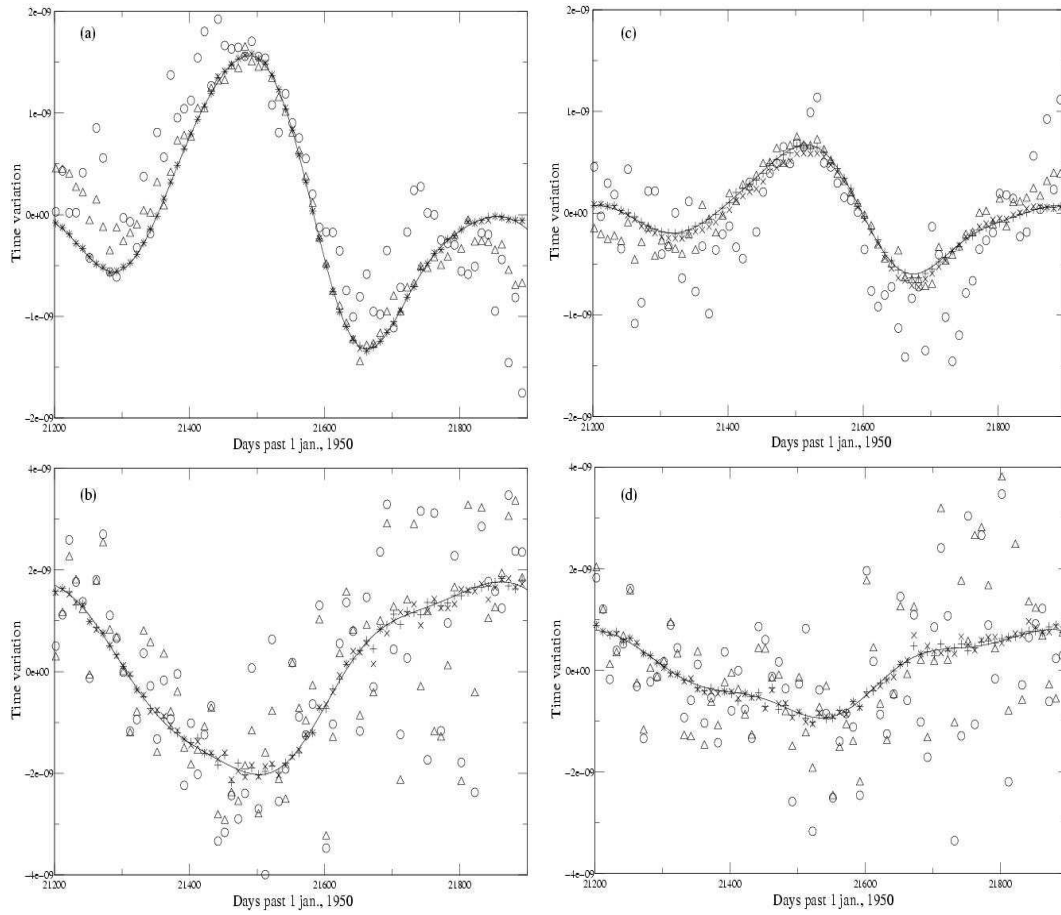


FIG. 6.11 – Comparaisons entre les modèles initiaux (train plein) et les valeurs décadaires restituées des zonaux (a) $\bar{C}_{20}$ (b) $\bar{C}_{30}$ (c) $\bar{C}_{40}$ (d) $\bar{C}_{50}$ pour les expériences suivantes : un orbiteur quasi polaire (ronds), un orbiteur quasi polaire et le réseau de 4 stations sur Mars (triangles), 2 orbiteurs (x), 2 orbiteurs et le réseau de 4 stations sur Mars(+). L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

6.8 Analyse de la combinaison de deux satellites

Une deuxième dynamique implique une nouvelle combinaison linéaire des zonaux de gravité dans le processus de restitution. Il est donc intéressant de voir ce que donne par exemple l'ajout de la dynamique de MEX avec celle de MODY, ou de MGS. On a investigué dans cette partie l'ajout de

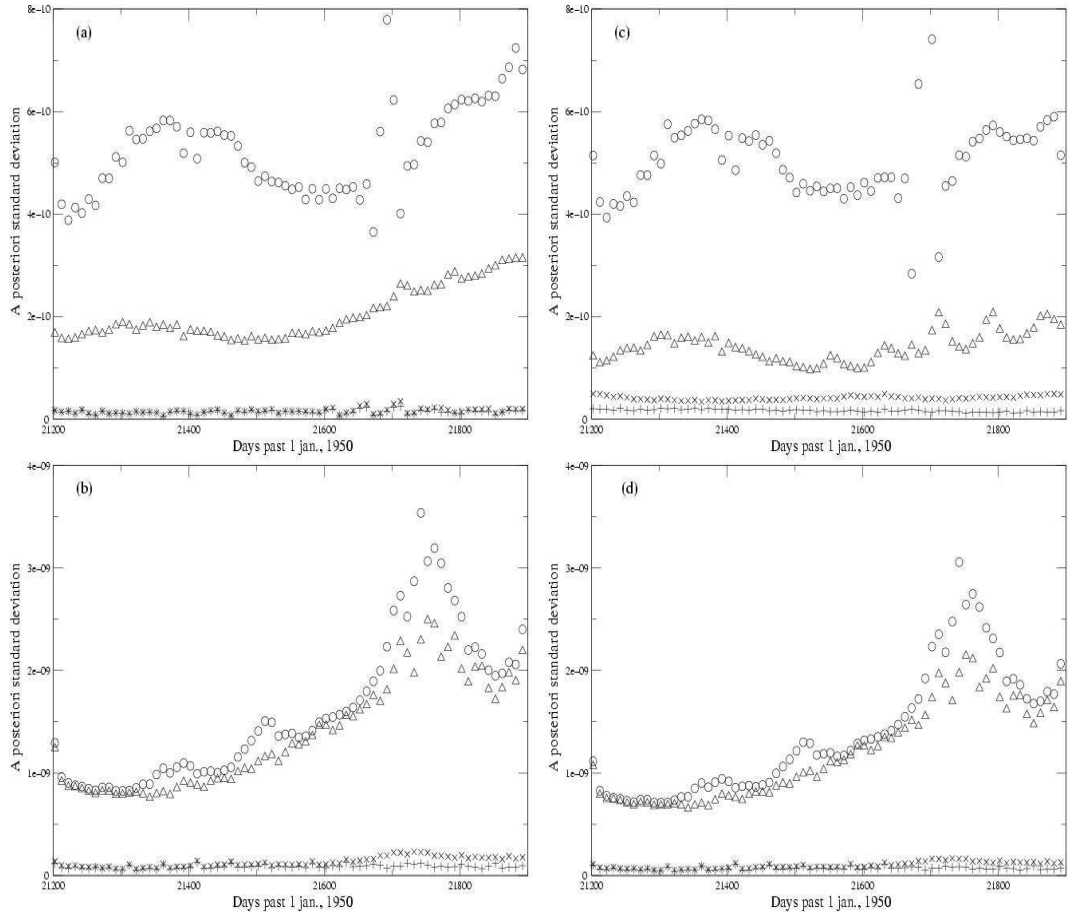


FIG. 6.12 – Variances a posteriori sur la restitution décadaire des zonaux (a) $\bar{C}_{20}$ (b) $\bar{C}_{30}$ (c) $\bar{C}_{40}$ (d) $\bar{C}_{50}$ pour les mêmes expériences que la figure 6.11. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

la dynamique d'un satellite avec une orbite quasi circulaire $400 \times 400\text{km}$, d'excentricité 0.021 et d'inclinaison 50° de sorte que l'on puisse voir l'influence des nouvelles combinaisons linéaires des zonaux impairs et pairs inhérentes sur la restitution de ces mêmes zonaux. En ce qui concerne les pairs, cette combinaison est caractérisée par une différenciation franche (décorrélation) au sens des contributions respectives mais pénalisante pour le degré 4 comme on va le voir.

Par rapport au cas précédent (orbite type MGS seule, petits ronds sur la figure 6.11) on voit finalement que $\bar{C}_{20}$ et, dans une moindre mesure, $\bar{C}_{40}$ se

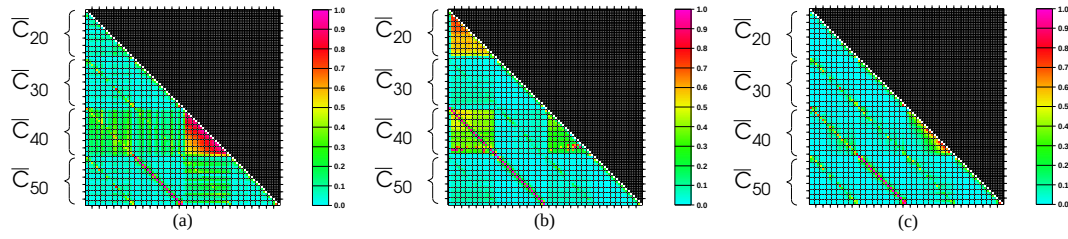


FIG. 6.13 – Matrices de corrélations correspondant à : (a) la simulations impliquant les deux orbiteurs, (b) la simulation impliquant un seul orbiteur quasi-polaire et le réseau de stations martiennes et (c) la simulation impliquant les deux orbiteurs et le réseau de stations martiennes. Les éléments de la matrice correspondent aux corrélations entre les zonaux ajustés au cours des 5 premières semaines de mission, 6 solutions pour des recouvrements périodiques à 10 jours

confondent assez bien avec leur modèle initial (voir figure 6.11, petits x). Si on a un gain sensible en exactitude c'est aussi le cas quant à la qualité ou précision inhérente (figure 6.12). En effet, on a gagné un ordre de grandeur quant aux variances a posteriori sur la restitution de ces deux zonaux. Il apparaît clairement aussi que les corrélations entre les deux zonaux pairs, $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{40}$, ont bien diminué, puisque maintenant inférieures à 0.5 (voir figures 6.8.c et 6.13.a). Ceci s'explique par le fait que cette orbite quasi circulaire a une inclinaison de 50° , proche de l'inclinaison critique (49.1°) qui annule la contribution de $\bar{C}_{40}$ dans les variations de Ω . Cette nouvelle dynamique fournit un nouveau jeu de coefficients devant $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{40}$, 1 et 0.05 respectivement. Si elle favorise une bonne qualité de restitution de $\bar{C}_{20}$, en revanche elle va pénaliser la restitution de $\bar{C}_{40}$ dont la contribution à la variation du noeud ascendant est 20 fois moindre que celle de $\bar{C}_{20}$. C'est ainsi qu'on explique en partie les fortes corrélations entre les estimations de $\bar{C}_{40}$ (voir figure 6.13.a).

En revanche, avec deux orbiteurs, la restitution des zonaux impairs donne des variances a posteriori pour $\bar{C}_{30}$ et $\bar{C}_{50}$ quasi identiques (voir figures 6.12.b et 6.12.d). Plus globalement, on note ici que la combinaison des deux orbites diminue sensiblement l'impact des variations d'orientation du plan d'orbite de notre satellite référence sur justement la qualité ou précision des estimations temporelles des zonaux restitués, les impairs en particulier. De plus, venant confirmer cette bonne restitution des impairs, on gagne aussi un ordre de grandeur sur les variances a posteriori par rapport à celles obtenues dans le cas d'une dynamique orbitale du type MGS seul.

6.9 Apport d'une poursuite depuis Mars

6.9.1 Corrélacion et estimation des zonaux pairs et de la rotation

Cas de référence : influence du modèle a priori de nutation non rigide de Mars sur la restitution des variations du $\bar{C}_{20}$, dans le cas de la poursuite par une station DSN d'une sonde en l'absence de mesure NEIGE

La station DSN choisie est celle de Parkes en Australie. Les deux orbites considérées sont : celle type MGS utilisée jusqu'à présent et une deuxième est quasi circulaire $400 * 400$ km mais caractérisée par une inclinaison à 45° . Par contre seules les variations de $\bar{C}_{20}$ sont impliquées dans la dynamique, en simulation comme en restitution.

Dans un premier temps, nous ne touchons pas aux paramètres de nutation non rigide dans le processus de restitution des variations du $\bar{C}_{20}$. Dans un deuxième temps on modifie ces paramètres de nutation non rigide. Dans ces deux cas, on regarde l'effet de la connaissance des nutations en terme d'exactitude (comparaison au modèle initial des variations de $\bar{C}_{20}$) sur la restitution des variations de $\bar{C}_{20}$.

Le premier point important est donc de voir si pour une orbite telle que celle de MGS, une mauvaise connaissance de la part non rigide des nutations peut ou non influencer la détermination des variations saisonnières du $\bar{C}_{20}$. Le deuxième point est de voir si une inclinaison différente va améliorer significativement la restitution des variations de $\bar{C}_{20}$.

La *courbe bleue* de la figure 6.14 (bas) est basé sur l'hypothèse d'une *parfaite connaissance de la rotation*. L'ajustement a été effectué avec un **même modèle de nutation non rigide en restitution qu'en simulation** (modèle initial, $F = 0.02$). Ce cas très simple, dit **non perturbé**, est considéré comme **la limite supérieure de sensibilité de l'orbite quasi polaire au paramètre $\bar{C}_{20}$** . La *courbe verte* de la figure 6.14 (bas) est basé sur le **cas dit perturbé**, c'est-à-dire en **utilisant dans la restitution un modèle de nutation non rigide différent** (F fixé a priori à 0.05) **du modèle utilisé en simulation** (modèle initial, $F = 0.02$). La comparaison des deux courbes montre qu'un très bon a priori sur la nutation non rigide (ou une très bonne modélisation), permet une bien meilleure détermination des variations saisonnières du $\bar{C}_{20}$. Il apparaît que **l'orientation du plan d'orbite** par rapport à la ligne de visée est un élément d'autant plus **pénalisant** qu'on a une mauvaise connaissance des nutations non rigides, essentiellement **lorsque la**

sonde est vue par la tranche depuis la Terre (premier tiers de la période couverte par la simulation). Ceci s'explique en partie par la corrélation physique via la matrice d'inertie entre la nutation non rigide et $\bar{C}_{20}$. ***La signature de $\bar{C}_{20}$ sur l'orbite est plus faible que le bruit instrumental introduit*** (0.1 mm/s). Dans le cadre d'une analyse des données Doppler de poursuite comme celles de la sonde MGS, la méconnaissance des nutations non rigides de Mars va avoir un impact important dans la restitution des variations $\bar{C}_{20}$ en vue par la tranche si elles sont mal ou non modélisées. Un bon moyen de résoudre ce problème sera donc d'ajuster la rotation et $\bar{C}_{20}$ dans une même restitution à partir de données supplémentaires comme par exemple des données de poursuite d'atterrisseurs sur Mars (envisagé dans la suite).

Le deuxième élément entrant en considération est donc *l'inclinaison du plan d'orbite* et son impact en terme de sensibilité aux variations saisonnières de $\bar{C}_{20}$. On se place dans le **cas dit perturbé**. Par rapport à l'orbite quasi polaire, on notera une bien **meilleure sensibilité de l'orbite à 45°** comme on aurait pu l'envisager via l'équation (5.7). On peut apprécier cette remarquable sensibilité en terme d'exactitude sur la figure 6.14 (haut). En fait, par rapport à une orbite quasi polaire de type MGS, ***la signature de $\bar{C}_{20}$ sur l'orbite est maintenant à un niveau tel que même le bruit instrumental est trop faible pour affecter la restitution du $\bar{C}_{20}$*** . D'un autre côté, il est intéressant de noter que ***les variations de position du plan d'orbite par rapport à la ligne de visée n'ont plus aucun effet dégradant sur la restitution de $\bar{C}_{20}$*** .

Nous allons voir à présent si les mesures NEIGE apportent une information suffisante sur la rotation et/ou l'orbite pour compenser le manque de sensibilité d'une orbite quasi polaire à $\bar{C}_{20}$. Notons cependant qu'on restera confronté à une corrélation importante entre $\bar{C}_{20}$ et LOD, et, $\bar{C}_{20}$ et la part non rigide de la nutation.

Influence de l'a priori sur la rotation de Mars dans la restitution des variations du $\bar{C}_{20}$, poursuite par une station DSN, dans le cadre de l'expérience NEIGE

On considère toujours un suivi depuis la Terre à partir de la même station DSN. On ajoute un lien entre l'orbiteur et chacune des quatre stations sur Mars. Pour la simulation des mesures NEIGE, on rappelle qu'on a fait le choix d'une fréquence de poursuite d'un seul passage de la sonde par semaine et par station, chaque passage dans le ciel de la station durant en moyenne 20 minutes. La première modélisation a priori de la rotation utilisée est celle

décrite aux paragraphes 1.3.1 et 1.3.2. Au cours des itérations successives du processus de restitution des paramètres de rotation étudiés, on prend comme valeur a priori la valeur ajustée de la restitution (l'itération) précédente.

Le cas qui va particulièrement nous intéresser est bien sûr celui de **l'orbite quasi-polaire** où on va apprécier qualitativement l'ajustement conjoint de la rotation et $\bar{C}_{20}$ lors de la restitution. Comparativement au cas dit *perturbé* (et même non perturbé), on constate que les variations saisonnières de $\bar{C}_{20}$ restituées reproduisent mieux, en terme d'exactitude, celles du modèle initial (voir figure 6.15), au cours des itérations successives. Cette *amélioration de la restitution de $\bar{C}_{20}$* , qui se traduit aussi en terme de variance a posteriori (voir figure 6.16), est sans doute due à l'information supplémentaire apportée par les mesures Doppler NEIGE. En effet, *les mesures NEIGE permettent de diminuer l'erreur sur la détermination de l'orbite et offrent une meilleure estimation des forces normales au plan d'orbite comme celles induites par les marées solides ou les zonaux pairs de gravité* [Konopliv et al., 2006]. Cependant, à la première itération, pour cette même orbite, les corrélations de $\bar{C}_{20}$ avec les paramètres de rotation, notamment F et σ_0 , restent assez fortes les premières semaines (voir figure 6.17) sans doute pour les mêmes raisons que celles exposées dans le cas perturbé pour cette période particulière vue par la tranche et aussi à cause de la trop faible quantité de mesures NEIGE cumulées. Il semble donc que dans le cas d'une orbite quasi-polaire, l'apport des mesures NEIGE dans l'observation des phénomènes saisonniers ait un impact en terme d'exactitude favorable.

En ce qui concerne **l'orbite à 45°**, les corrélations sont basses (voir figure 6.17) et ce dès les premières semaines et la première itération. Il n'y a peu ou pas d'amélioration possible si ce n'est en terme de variance a posteriori (voir figure 6.16) puisqu'en terme d'exactitude on a déjà une très bonne qualité de restitution dans le cas perturbé (voir figure 6.15).

Dans les **deux configurations d'orbite**, il est important de souligner une première chose : l'objectif de **décorrélation du $\bar{C}_{20}$ et du LOD** est atteint, et ce dès la première itération. De plus, l'amplitude pic-à-pic du $\bar{C}_{20}$ est d'environ 10^{-9} et la valeur moyenne de la variance a posteriori d'environ 10^{-11} , soit 1% de l'amplitude pic-à-pic. On rappelle que le signal de $\bar{C}_{20}$ contient uniquement la contribution "redistribution des masses" au LOD total. Une fois le signal de $\bar{C}_{20}$ évalué, il peut être soustrait au signal du LOD total (estimé via l'analyse des mesures NEIGE) fournissant ainsi une estimation de l'amplitude de la contribution des vents zonaux (au LOD total). On voit qu'on a donc aussi la possibilité de **quantifier** un phénomène important mais beaucoup plus petit en amplitude (que celui des transports de masse

atmosphérique) : **les vents**, qui contribuent pour environ 5% des variations pour la fréquence annuelle et environ 20% pour la fréquence semi-annuelle du LOD total [Van den Acker et al., 2002].

Au cours des semaines de cumul et des itérations successives (quand on prend les valeurs à convergence de la rotation comme valeurs pour restituer à nouveau cette rotation), on obtient pour les paramètres de rotation une erreur vraie (exactitude) de niveau équivalent à la variance a posteriori (voir les figures 6.19 et 6.20 pour l'orbite quasi polaire et les figures 6.21 et 6.22 pour l'orbite à 45°). On note cependant une convergence à peine plus rapide des paramètres de rotation pour l'orbite à 45° . Tous ces résultats nous amènent à penser que l'expérience NEIGE pourrait permettre en particulier de modéliser plus précisément le phénomène de condensation-sublimation du CO_2 et que la précision sur F et σ_0 serait suffisante pour avancer significativement sur l'étude des propriétés du noyau.

Influence de l'orbite sur l'ajustement des paramètres de rotation à partir des mesures NEIGE - Généralités

Pour une orbite quasi-polaire, la trace du satellite est très proche des méridiens donc on aura une bonne sensibilité au sens d'amplification Doppler (dérivée) en latitude grâce au lien entre les atterrisseurs martiens et la sonde. Pour une orbite à 45° on a une sensibilité équivalente (amplification de $\frac{\sqrt{2}}{2}$) en longitude et latitude, grâce au lien atterrisseur-sonde, offrant ainsi un meilleur compromis pour la détermination de tous les paramètres de rotation.

Ces remarques sont pour l'essentiel issues des conclusions d'une étude analytique [Yseboodt et al., 2003] et de résultats de simulations numériques qui effectivement confirment que le signal Doppler favorisera d'autant la détermination des paramètres de rotation que l'inclinaison de l'orbite est proche de la latitude des atterrisseurs (effet géométrique).

6.9.2 Le champ variable

On considère dans ce paragraphe que la résolution de la rotation a été effectuée. On revient dans la configuration de suivi depuis la Terre à trois stations DSN. Mais la question posée ici est de voir ce que vont apporter les mesures Doppler NEIGE, dans le cas où on ajuste conjointement les quatre premiers zonaux, tous les 10 jours. On va considérer et comparer les résultats obtenus par les simulations 5 et 6 décrites à la table 6.1.

L'utilisation d'un réseau de stations de poursuite martiennes de l'orbiteur quasi polaire suivi depuis la Terre améliore essentiellement la détermination des zonaux pairs comme le montrent les figures 6.11 et 6.12. En effet, si on compare la restitution des zonaux pairs, on a une solution pour ces zonaux nettement plus proche des variations initiales et les variances a posteriori ont diminué d'un facteur 2 en moyenne. Ce résultat est en tout cas consistant avec *Duron et al.* [2003] qui montrent que l'ajustement de $\bar{C}_{20}$ est bien amélioré dans le cadre d'une expérience de science en réseau grâce au lien radio avec les stations martiennes qui permet une meilleure restitution de l'orbite et une meilleure estimation des forces normales au plan d'orbite comme celle induite par $\bar{C}_{20}$. D'un autre côté, l'effet sur la restitution des zonaux impairs est mince et limité à une amélioration de la précision (variance a posteriori) mais pas de l'exactitude, on n'a pas amélioré l'ajustement aux modèles initiaux ni supprimé la dégradation liée à la configuration vue de face.

C'est bien le système à deux orbiteurs (simulation 5) qui apporte une amélioration significative en terme d'exactitude et de précision sur l'ajustement des impairs. L'ajout d'un réseau de stations de poursuite du satellite en orbite quasi polaire (simulation 6) apporte une amélioration substantielle sur la précision (figure 6.11) et un peu sur l'exactitude (figure 6.12) du $\bar{C}_{40}$ par l'information supplémentaire fournie par les nouvelles mesures de poursuite martiennes. Venant conforter ce résultat, on voit en plus que l'information du $\bar{C}_{40}$ est bien plus présente dans le signal cumulé puisque les corrélations entre les estimations décadaires de ce paramètre diminuent comme le montre la comparaison entre la figure 6.13.a et la figure 6.13.c.

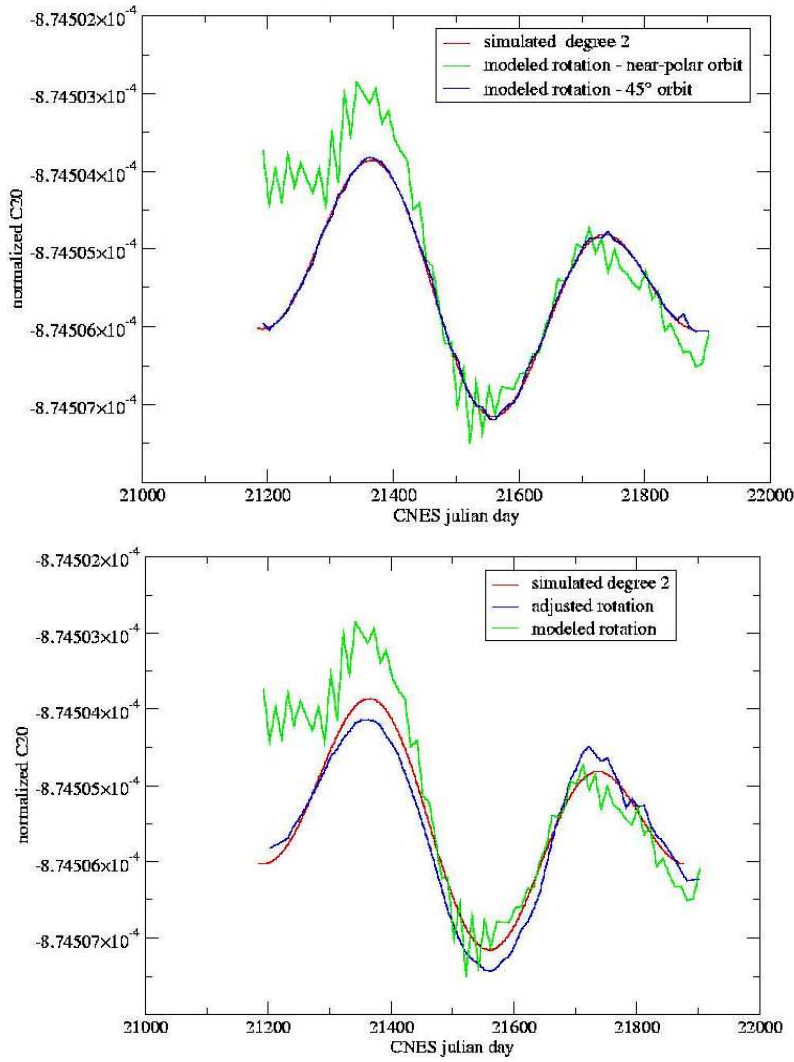
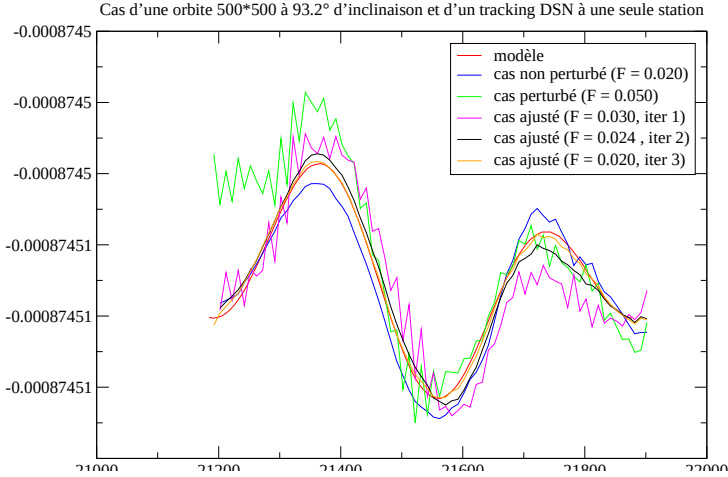


FIG. 6.14 – Sur une année martienne : influence de l’inclinaison pour un modèle de nutation perturbé, mauvais a priori (haut) et de la (mé)connaissance de l’effet de la FCN sur la nutation (bas) sur la restitution de $\bar{C}_{20}(t)$ - Modèle de Yoder *et al.* 1997. L’axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

Comparaison d'ajustements du C20 temporel martien (modèle Yoder 1997)



Comparaison d'ajustements du C20 temporel martien (modèle Yoder 1997)

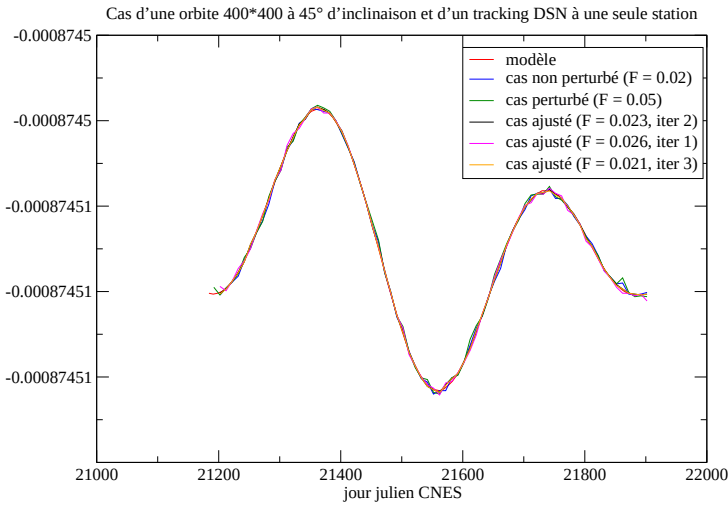
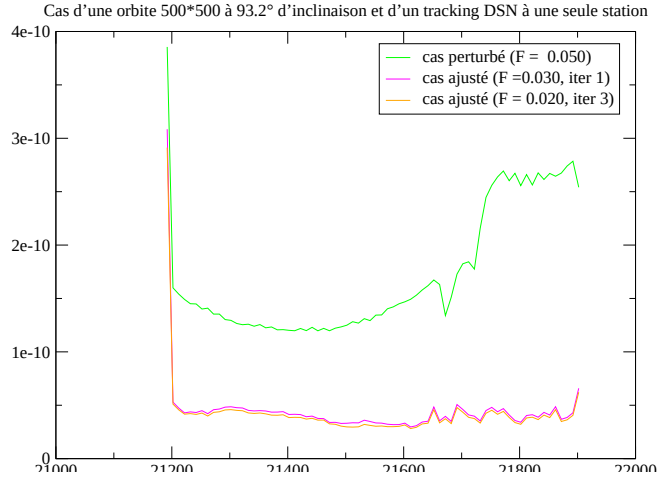


FIG. 6.15 – Sur une année martienne : apport des mesures NEIGE et des itérations successives sur l'exactitude de la restitution des variations $\bar{C}_{20}$ en présence d'un modèle de rotation perturbé. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

Comparaison des variances a posteriori du C20 temporel martien (Yoder 1997)



Comparaison des variances a posteriori du C20 temporel martien (Yoder 1997)

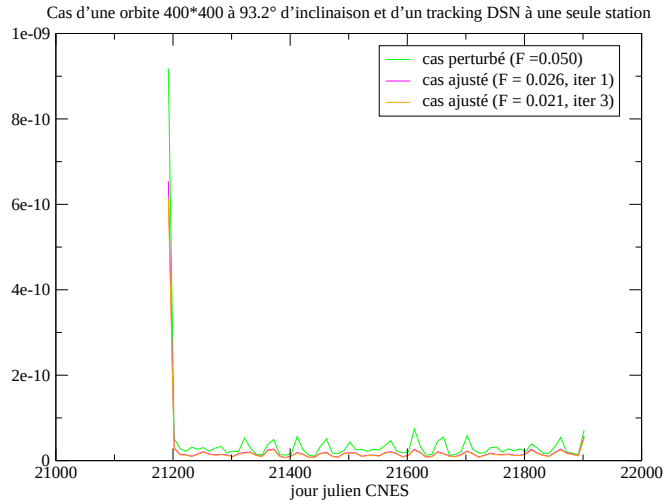


FIG. 6.16 – Sur une année martienne : apport des mesures NEIGE et des itérations successives sur la précision (variance a posteriori) de la restitution des variations de $\bar{C}_{20}$. L'axe des abscisses est en jours passés après le 01 janvier 1950, définition du jour julien CNES.

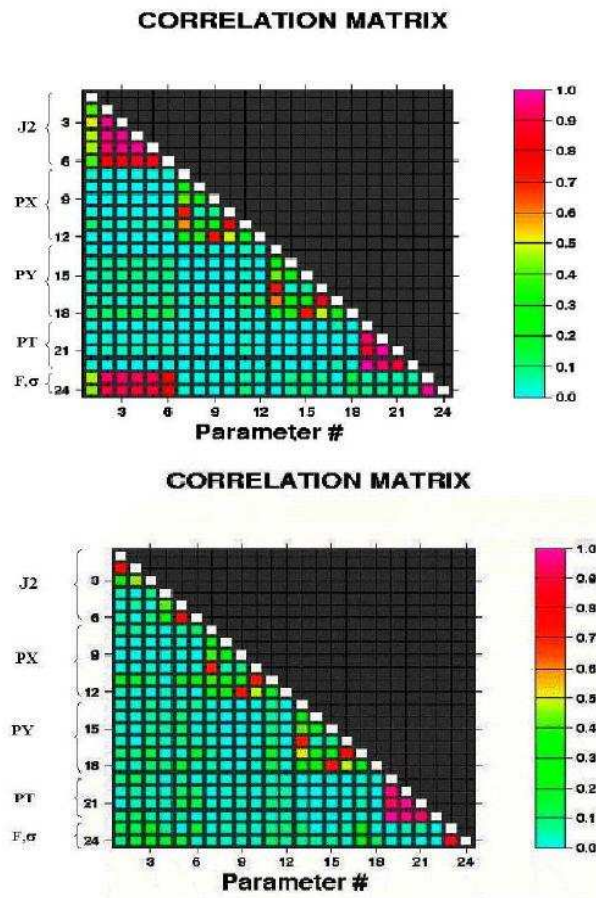


FIG. 6.17 – Itération 1 pour l'orbite quasi-polaire (haut) et celle à 45° (bas), cumul sur 5 semaines

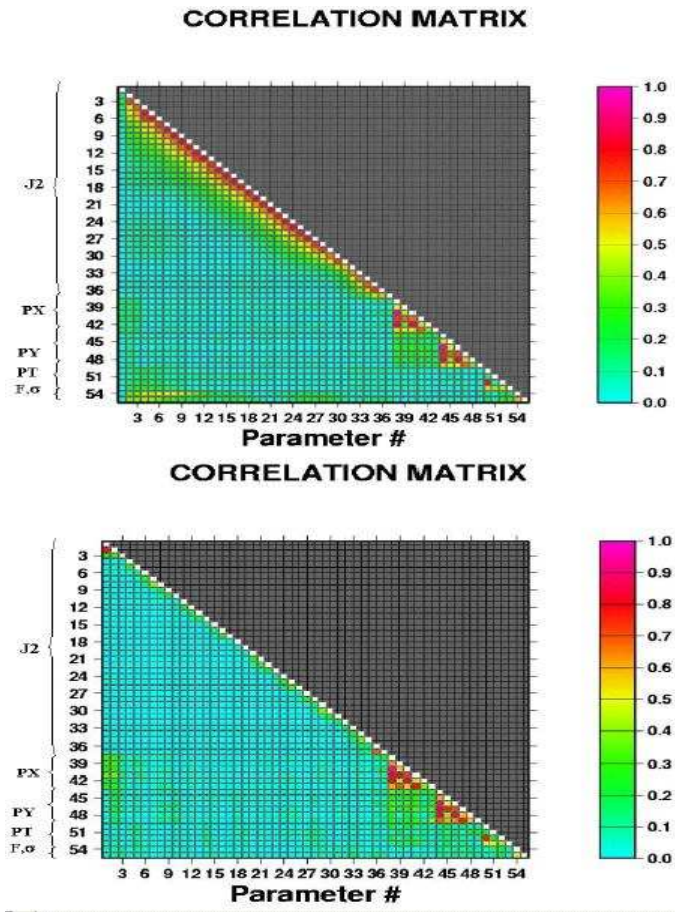


FIG. 6.18 – Itération 3 pour l'orbite quasi-polaire (haut) et celle à 45° (bas), cumul sur 50 semaines

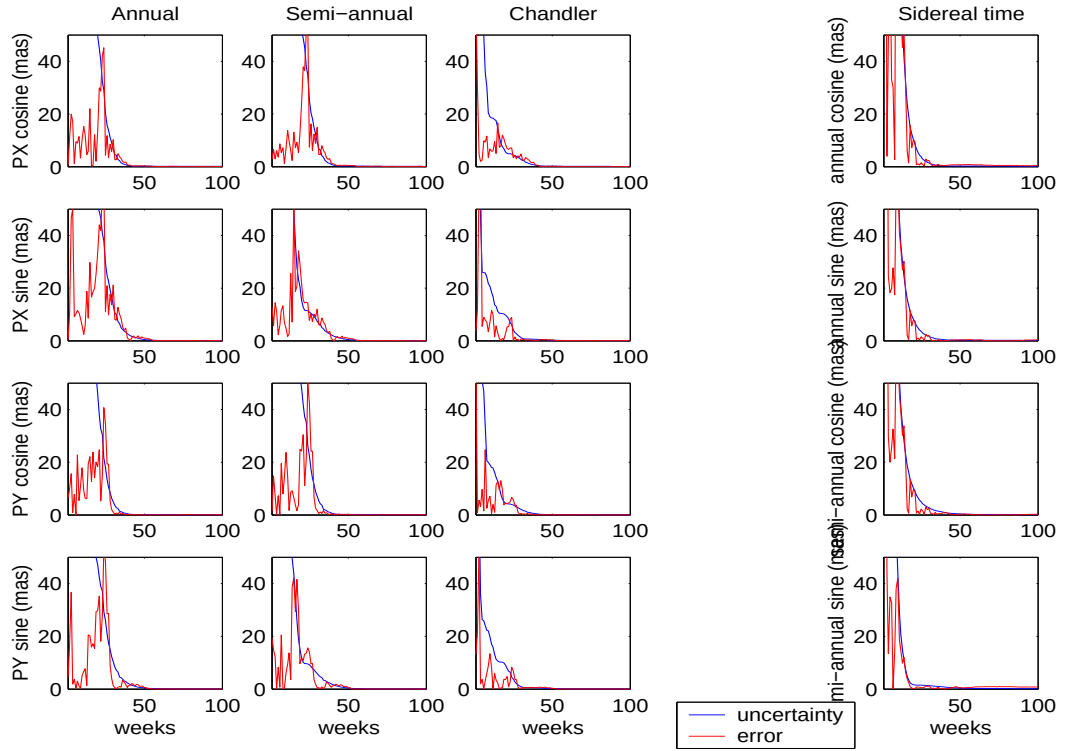


FIG. 6.19 – Orbite quasi polaire : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie du mouvement du pôle et du temps sidéral- Itération 3. L'unité de l'axe des ordonnées est le *mas*. Un angle d'une milliseconde d'arc (ou mas) correspond à une distance de 1.6 cm à la surface de Mars.

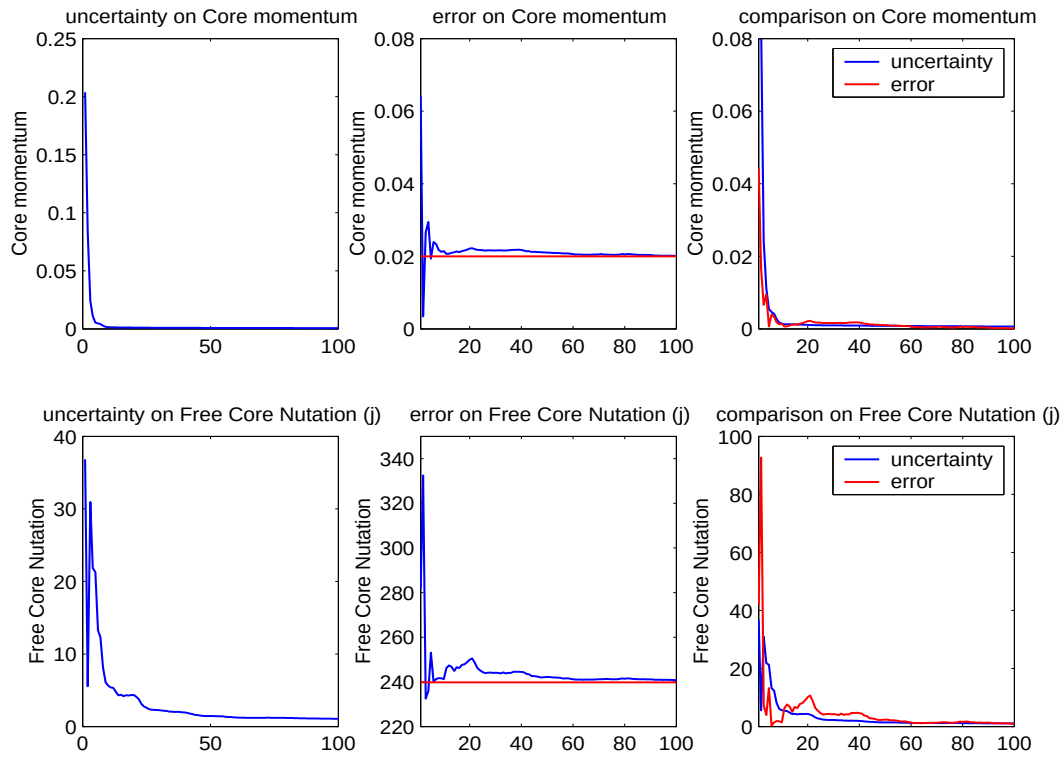


FIG. 6.20 – Orbite quasi polaire : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie de la FCN et du moment angulaire- Itération 3.

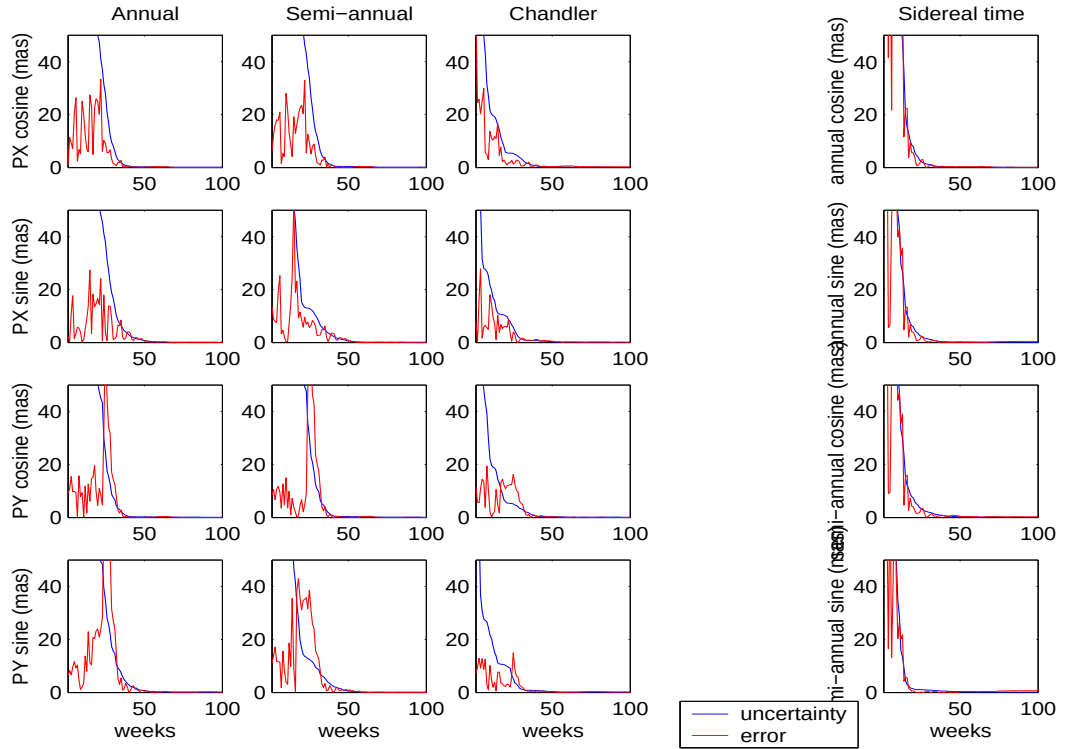


FIG. 6.21 – Orbite à 45° : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie du mouvement du pôle et du temps sidéral- Itération 3. L'unité de l'axe des ordonnées est le *mas*. On rappelle qu'un angle d'une milliseconde d'arc (ou mas) correspond à une distance de 1.6 cm à la surface de Mars.

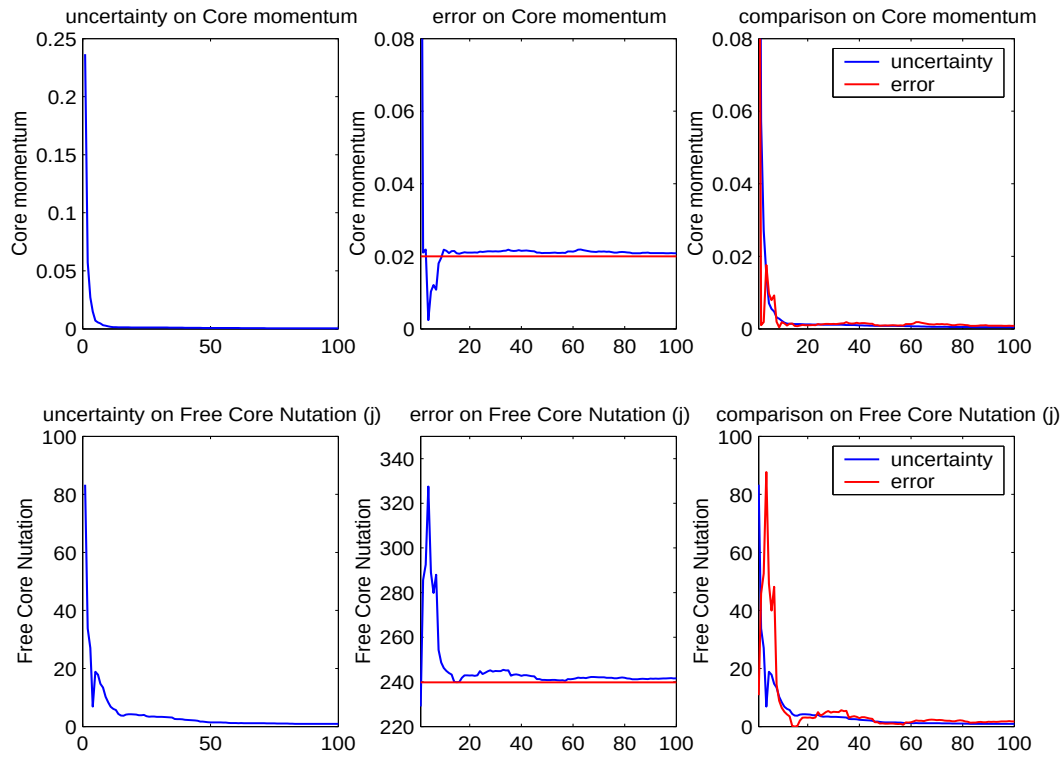


FIG. 6.22 – Orbite à 45° : évolution conjointe de la variance a posteriori et de l'erreur vraie de la FCN et du moment angulaire- Itération 3.

Chapitre 7

Les missions de radio science MGS et MODY

7.1 Introduction

Plusieurs solutions des variations temporelles des deux harmoniques zonaux de gravité composites ont déjà été calculées et publiées notamment par les deux centres de la NASA : le JPL [Yoder *et al.*, 2003 ; Konopliv *et al.*, 2006] et le GSFC [Smith *et al.*, 2001 ; Smith *et al.*, 2003 ; Lemoine *et al.*, 2006]. L'approche du JPL est basée sur une analyse des données MGS seules pour Yoder *et al.* [2003], des données MGS et de MODY pour Konopliv *et al.* [2006]. Le logiciel utilisé au JPL est le DPODP (*Double Precision Orbit Determination Program*). Au GSFC, les résultats sont extraits de l'analyse des données MGS avec le logiciel *GEODYN*. Les solutions du GSFC sont complètement numériques, celles de Konopliv *et al.* [2006] aussi, alors que celles de Yoder *et al.*, [2003] le sont partiellement. Chacune des solutions proposées par ces deux centres couvre une période s'étalant de février 1999 à avril 2002 pour Yoder *et al.* [2003] ou jusque début 2005 pour Konopliv *et al.* [2006], et, de février 1999 à mai 2001 pour Smith *et al.* [2001 et 2003] ou jusque juillet 2005 pour Lemoine [2006].

On a vu dans le chapitre 5 qu'effectivement, pour MGS (ou MODY), c'est via les variations de ω (de Ω) qu'on peut déterminer les variations de $\bar{C}_{30,l}$ ($\bar{C}_{20,l}$). Cependant, les variations de ω permettent de mieux discriminer les impairs entre eux que le permettent les variations de Ω pour les pairs : 1 pour 3 contre 1 pour 1.5, d'après les formles (5.27) et (5.28) et les coefficients f_2 , f_4 , g'_3 et g'_5 associés. Les simulations confirment que dans le cas d'une restitution des $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$, c'est effectivement le signal de $\bar{C}_{30,l}$ qui est le mieux

déterminé. Non pas seulement parce que la contribution qu'il induit sur ω est la plus importante (quelque soit l'élément orbital considéré), de l'ordre de 10^{-10} rd/s, mais aussi parce que les variations sur ω permettent de discriminer correctement les impairs (la comparaison des matrices de corrélations de la simulation 1 et de la simulation 2 confirme cette information). Cependant on note, dans le cadre d'un ajustement des 4 premiers zonaux, une dégradation de la restitution de $\bar{C}_{30}$ par rapport à $\bar{C}_{30,l}$, qui illustre parfaitement ce que montre très clairement les valeurs des coefficients de la combinaison linéaire dans l'expression des variations de ω , un rapport 1 pour 3 par rapport à $\bar{C}_{50}$. En utilisant *un autre logiciel (GINS)* que celui des deux centres de la NASA et un lot de données allant de février 1999 à juillet 2006 pour MGS, donc plus large, et d'avril 2002 à septembre 2006 pour MODY, on se propose donc de *restituer les variations des deux premiers zonaux de gravité, composites*, de les comparer aux solutions publiées ainsi qu'à celles obtenues à partir de GCMs martiens.

7.2 Données, caractéristiques de traitement

Pour **MGS**, on a analysé toutes les données collectées par les stations DSN depuis le début de la phase *SPO, Science Phase Orbit* (1998), jusqu'en juillet 2006, phase dite *EXTENDED 24*. Cependant, pour le champ variable, on a sélectionné la période débutant en février 1999 car l'orbite est à ce moment précis déjà circularisée. Ce sont consécutivement les phases dites *Gravity Calibration Orbit* (GCO), février 1999, puis de *MAPPING* (1 à 8) et *EXTENDED* (1 à 24) qui ont été traitées. On a pris soin d'exclure le mois d'avril et mai 1999 (déploiement de l'antenne à haut gain, HGA), les mois de juillet 2000, d'août 2002 et de septembre 2004 qui sont trois périodes d'occultation de Mars par le Soleil. Les données sont très bruitées pendant ces périodes, voire un peu avant et un peu après (de quelques jours à plusieurs semaines). Pour **MODY**, on a analysé toutes les données collectées par les stations DSN depuis avril 2002 jusque début septembre 2006. On a là aussi pris soin d'exclure les mois d'août 2002 et de septembre 2004, pour les mêmes raisons. La figure 7.1 résume le nombre de données utilisées, rangées par type, pour restituer les harmoniques zonaux variables et k_2 .

(1) La détermination précise d'orbite (POD) puis (2) la restitution des paramètres géophysiques sont basées sur une approche complètement dynamique utilisant l'intégration numérique des équations du mouvement (et des équations aux variations associées) combinée à un ajustement par moindres carrés des inconnues qui entrent dans les équations d'observation linéarisées (voir le

	<u>MGS</u>	<u>ODY</u>
Doppler 1 voie	: 2453466	---
Doppler 2 voies	: 3404147	3678959
Doppler 3 voies	: 136576	418860
Distance 2 voies	: 33430	47680
Nombre d'arcs retenus :	428	304
(longueurs des arcs ~ 4 jours)		

FIG. 7.1 – MGS et MODY : nombre de données utilisées, rangées par type, pour restituer les harmoniques zonaux variables et k_2

chapitre 5). Les modèles utilisés en entrée de GINS pour le calcul des orbites précises de MGS et MODY sont résumés à la figure 7.2. Plus précisément, le traitement des mesures et la modélisation de la dynamique orbitale incluent (*Balmino et al.*, 2006)) :

- Les éphémérides planétaires DE411 [*Konopliv et al.*, 2006], les constantes planétaires IAU 2000 [*Seidelmann et al.*, 2002] et les nutations rigides martiennes [*Reasenberg et King*, 1979], cinématique terrestre, mouvement du pôle, effet de charge des marées océaniques et solides sur la position des stations DSN selon les standards IERS [*McCarthy*, 2003], effet de charge de l'atmosphère terrestre au niveau des stations DSN utilisant la formulation de *Gegout* [1996] avec des grilles de pressions atmosphérique toutes les 6 heures extraites de l'ECMWF.
- Les forces gravitationnelles avec le modèle mgm1041c (GSFC) de champ de gravité complet jusqu'au degré et ordre 90 utilisant l'orientation IAU 2000 [*Seidelmann et al.*, 2002], l'attraction de troisième corps dûe non seulement au soleil et aux autres planètes (en utilisant le DE411 et ses constantes), mais aussi aux lunes naturelles de Mars (pour Phobos et Deimos on a utilisé les éphémérides de l'IMCCE, Institut de Mécanique Céleste et de Calculs des Ephémérides) , et enfin l'effet de marée solide dû à k_2 .
- Les forces de surface dont le frottement atmosphérique évalué à l'aide d'un modèle semi-empirique de température (DTM-Mars, *Bruinsma et al.*, 2002), la pression solaire directe, l'émission thermique (infra rouge) et l'al-

MODELES**Gravité : MGM1041C** (Lemoine et al., GSFC)**Planètes, Soleil, Lune : DE411** (JPL)**Nutation de Mars** (Reasenberg et King)**Frottement, modèle de densité : DTM-Mars** (CNES, GSFC)**Pression solaire****Albedo + émission thermique de Mars** (F. Lemoine)**Marée solide : $k_{2, init}$** (= 0.1)**Phobos + Deimos : éphémérides** (V. Lainey, ORB)**ATTITUDE et EVENEMENTS PARTICULIERS****Désaturation des roues à inertie (AMD)****Attitude satellite : modèle avec quaternions : - bus****- panneaux solaires****- antenne**

FIG. 7.2 – Modèles utilisés en entrée pour les restitutions des orbites précises de MGS et MODY.

bédo de la planète selon *Lemoine et al.* [1992].

- la durée de l'occurrence des accéléralions dues aux poussées estimées sur selon les spécifications fournies par le projet. En fait, on ajuste des résidus entre l'**accéléralion** (ou poussée) **modélisée** de la désaturation des roues à inertie et l'**accéléralion réelle** induite par la désaturation effective et l'effet de cette accéléralion résiduelle est intégré sur un pas, typiquement 20 s pour les traitements en phase MAPPING.

- Les effets relativistes sur les mesures (i.e. les délais induits sur les mesures de distance et d'effet Doppler, et les modifications de fréquence) et sur la dynamique du satellite (e.g. l'effet Schwarzschild) décrits par la formulation post-newtonienne ; les transformations de temps entre le temps coordonnée et le temps atomique faites numériquement selon *Moyer* [2000].

- La modélisation des surfaces du satellite par la décomposition en éléments de surface (macro-modèle) du bus (parallélépipède avec six faces) et des panneaux solaires (les faces avant et arrière) avec leurs propriétés optiques (réflexion spéculaire et diffuse) ; l'attitude du bus du satellite, des panneaux solaires et de l'antenne à haut gain en repère inertiel fournie par

le projet : des jeux de quaternions pour chacun.

– D’autres corrections sur les mesures comme le délai troposphérique qui utilise les données météorologiques collectées au site DSN toutes les demi-heures.

Paramètres :

- internes : . Positions et vitesses

. Coefficient de frottement : 1/jour

. Coefficient de pression solaire : 1/arc

. AMD : 3 accélérations/manoeuvre

. 1 voie-Doppler : 1 biais/station/arc

. 2/3 voies-Doppler & distance : 1 biais/station/arc

- externes : . Les harmoniques de gravité : variations temporelles: jusque (5,0)

→ résolu tous les 10 jours

. Le nombre de Love k_2

FIG. 7.3 – Paramètres résolus pendant les restitutions d’orbites de MGS et MODY.

Finalement, les paramètres qui sont résolus sont (voir la figure 7.3) :

- Le bulletin des coordonnées du satellite pour chaque arc,
- un facteur d’échelle, FD, pour l’accélération de frottement induite par l’atmosphère (un par jour),
- un facteur d’échelle, FS, pour l’accélération de pression solaire directe (un par arc),
- des accélérations résiduelles dues à la désaturation des roues à inertie (ou AMD pour Angular Momentum Desaturation), à la date des poussées,
- un biais par passage dans le ciel des stations DSN pour les mesures Doppler 1 voie, 2 voies Doppler et de range,
- les harmoniques de gravité jusqu’au degré et ordre 5, à des intervalles de 10 jours (ou mensuellement),
- le nombre de Love de marée k_2 .

Les variances a priori (sigma) sont des entrées et interviennent dans la procédure de moindres carrés comme des équations supplémentaires qui viennent stabiliser l’inversion pendant l’étape de détermination précise d’orbite (POD) ainsi que celle de détermination des paramètres géophysiques.

7.3 Orbitographie précise

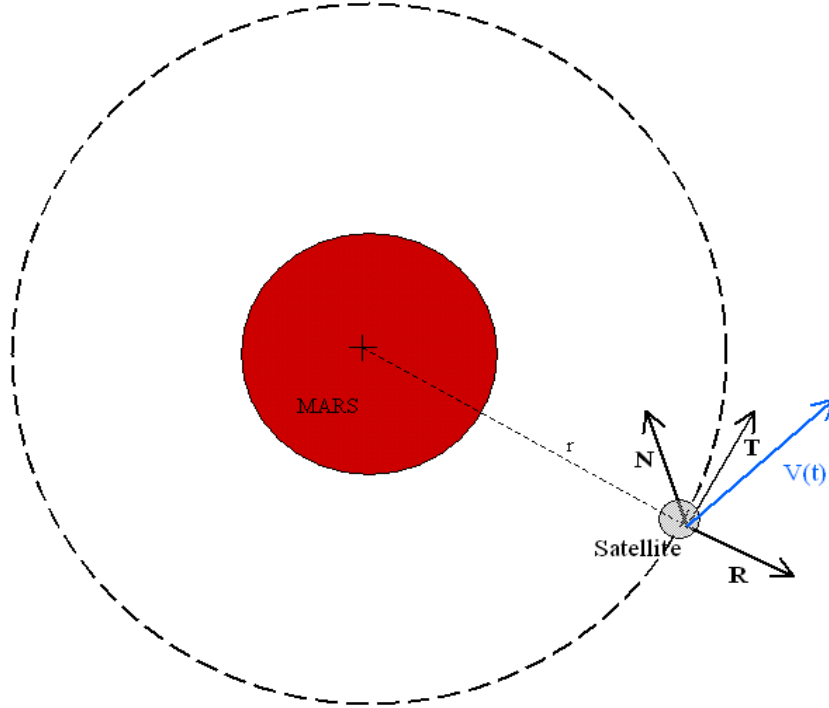


FIG. 7.4 – Le repère satellite RTN a pour origine le centre de masse du satellite et forme un trièdre direct.

Pour évaluer la précision de GINS en terme de restitution d'orbite et la comparer à celle du JPL et du GSFC, on a effectué des tests de recouvrement d'arcs d'orbite consécutifs sur des périodes communes de durée prédéfinie par les résultats publiés [*Lemoine et al.*, 2001 ; *Technical notes JPL et GSFC*, 2001]. Dans un premier temps, les positions, vitesses et accélérations sont calculées numériquement par GINS en coordonnées rectangulaires dans le repère inertiel centré sur Mars. Dans un deuxième temps, grâce au logiciel OV, on choisit de comparer deux à deux les positions relatives des arcs d'orbites (l'une par rapport à l'autre) consécutifs et les résultats sont typiquement projetés en repère satellite, le repère RTN (vecteurs unitaires radial, orthoradial et normal) associé au satellite. Ce nouveau repère a pour origine le centre de masse du satellite et est défini par les vecteurs :

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

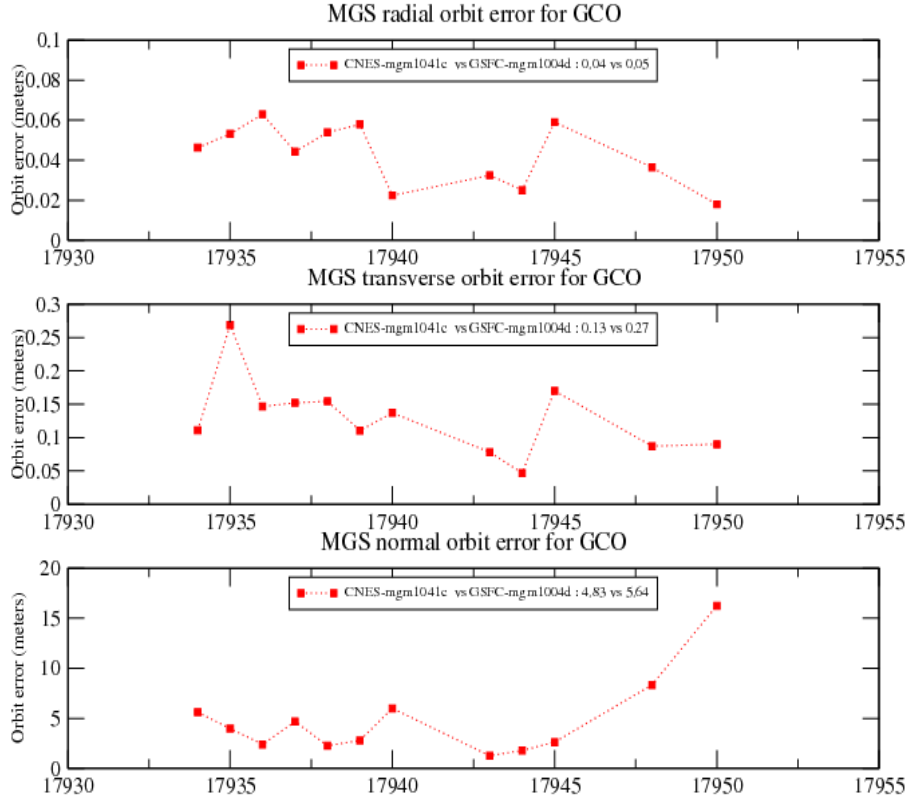


FIG. 7.5 – MGS : recouvrements d’arcs d’un jour sur 6 heures de durée, février 1999, l’axe des abscisses est en jour Julien CNES, qui commence au 01/01/1950.

$$\vec{N} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\vec{r} \times \vec{v}|}$$

$$\vec{T} = \vec{N} \times \vec{R}$$

avec $\vec{R}$ orienté par le rayon vecteur $\vec{r}$ qui a pour direction la droite reliant les centres de masse de la planète et du satellite comme le montre la figure 7.4 (on y a tracé l’orbite réelle), $\vec{N}$ parallèle au vecteur moment angulaire, perpendiculaire au plan orbital et le vecteur $\vec{T}$ est tel que le trièdre $(\vec{R}, \vec{T}, \vec{N})$ soit direct. La direction de la vitesse du satellite dans le cas d’une orbite circulaire est très proche de celle du vecteur $\vec{T}$ car on a une excentricité voisine de 0. Enfin, on remarque qu’en repère RTN il sera plus aisé de voir la possible influence de l’orientation du plan d’orbite par rapport à la ligne de

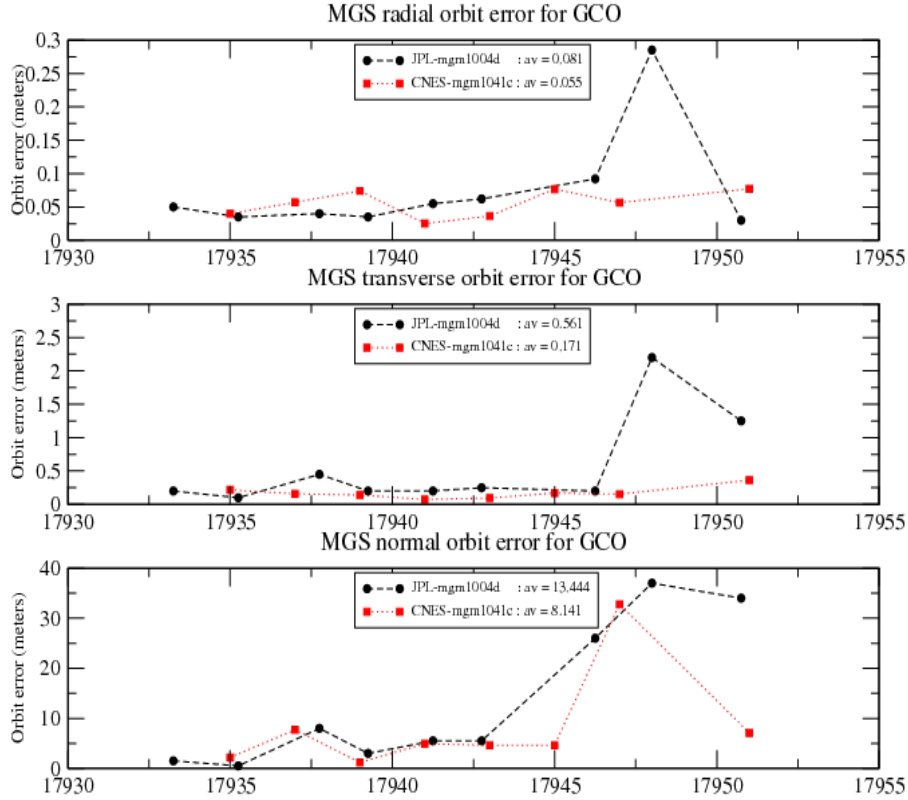


FIG. 7.6 – MGS : recouvrements d’arcs de 2 jours sur 6 heures de durée, février 1999, l’axe des abscisses est en jour Julien CNES, qui commence au 01/01/1950.

visée (voir le paragraphe 5.2) sur la précision des recouvrements.

La limite de cette comparaison de nos recouvrements avec ceux des deux centres de la NASA réside dans le champ de gravité qu’on utilise, mgm1041c, qui est plus récent donc a priori plus raffiné que mgm1004d, de par le cumul de beaucoup plus de données de poursuite. Afin de se comparer au mieux aux résultats publiés, les données utilisées pour les recouvrements relatifs à MGS sont : (1) pour la *phase GCO* (février 1999), des mesures Doppler à 2/3 voies et des mesures de distance à 2 voies (2) pour la *phase MAPPING* 7 (Août 2000), des mesures Doppler à 1 voie et 2/3 voies et des mesures de distance à 2 voies. Pour MODY, ce sont des mesures Doppler à 2/3 voies et des mesures de distance à 2 voies qui sont traitées afin de se comparer à *Konopliv et al.* [2006].

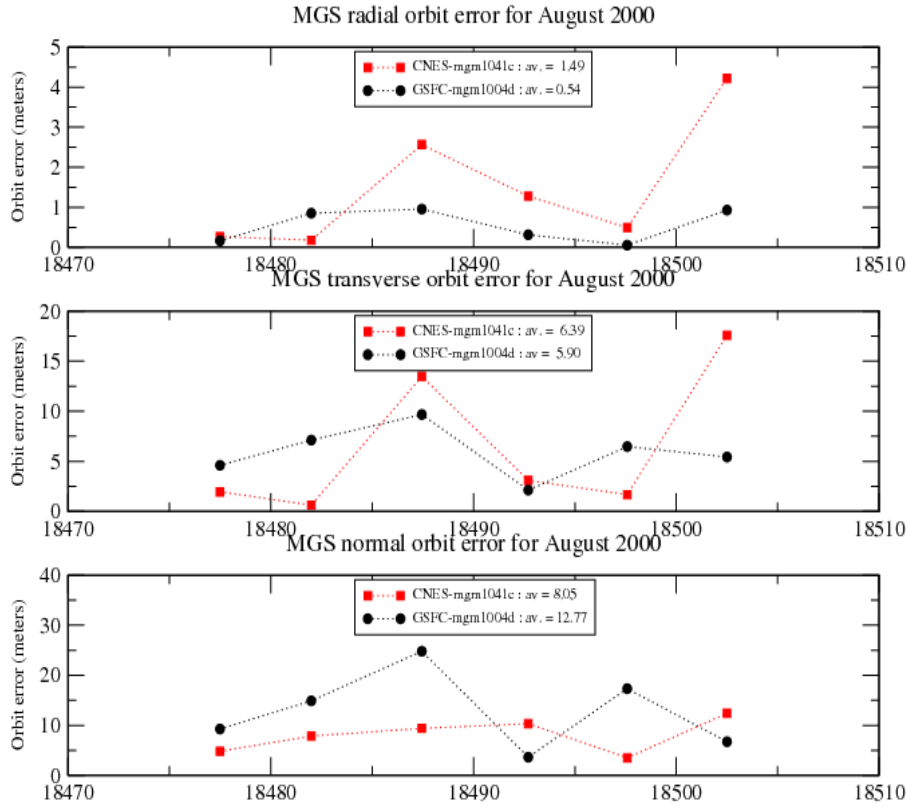


FIG. 7.7 – MGS : recouvrements d’arcs de 7 jours sur 2 jours, sortie d’occultation de Mars par le Soleil du mois d’août 2000, l’axe des abscisses est en jour Julien CNES, qui commence au 01/01/1950.

Tout d’abord, la figure 7.5 et la figure 7.6 présentent des résultats MGS de recouvrements d’arcs de 1 et 2 jours respectivement sur une durée de 6 heures. Soulignons aussi que la phase GCO (février 1999), pendant laquelle ces recouvrements sont effectués, est très calme dynamiquement, donc avec une qualité des données de poursuite exceptionnelle. En effet, pendant cette très courte période, il y a peu d’occurrence de désaturations (AMD), une poursuite quasi permanente et l’antenne à haut gain (HGA) est repliée (ce qui diminue les effets de frottements atmosphériques). La deuxième période traitée pour MGS (voir la figure 7.7), correspondant à Août 2000, est beaucoup plus perturbée dynamiquement puisque c’est une phase de sortie d’occultation de Mars par le Soleil, les AMD sont aussi beaucoup plus fréquentes et l’antenne à haut gain (HGA) est déployée. Notons que la figure 7.6 présente

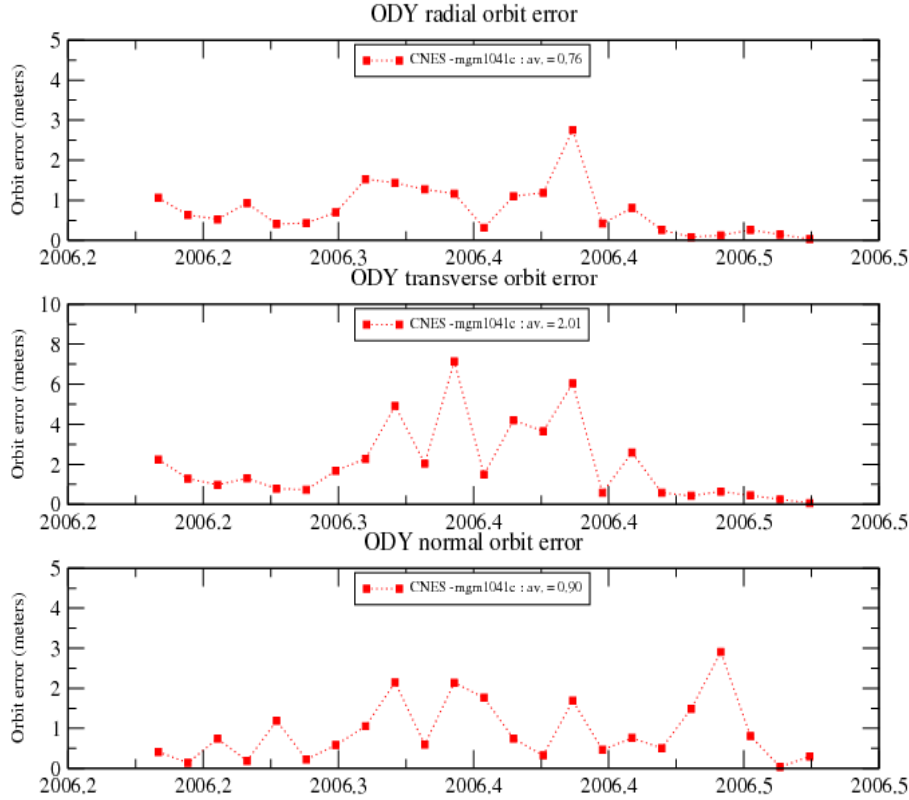


FIG. 7.8 – MODY : recouvrements d'arcs de 4 jours sur 2 heures, en 2006.

à la fois un test de validation externe du logiciel du JPL vis-à-vis du modèle de champ mgm1004d et pour nous, un test de validation externe vis-à-vis du modèle de champ mgm1041c. Pour mgm1041c, on peut affirmer que dans la direction radiale, on a une précision moyenne sous les 10 cm en phase GCO et d'environ 1,5 mètres en sortie d'occultation. En GCO et MAPPING 7, c'est bien évidemment la direction normale qui est la moins bien déterminée puisque l'orbite est à ce moment précis dans une configuration d'observation vue par la tranche depuis la Terre comme le montre la figure 7.9. Les figures 7.5, 7.6 et 7.7 montrent que chacune de nos comparaisons fait apparaître des précisions moyennes dites "3D"¹ plus petites que celles des autres centres (en mètre, 4.83 contre 5.65, 8.14 contre 13.46 et 10.38 contre 14.08 respectivement). Si on compare les valeurs moyennes "3D" des recouvrements

¹la racine carré de la somme des précisions moyennes (des 3 directions) au carré.

GCO de la figure 7.5 et de la figure 7.6, on voit que la longueur de l'arc est un facteur dégradant, mais ce peut être aussi le fait des discontinuités dans la poursuite de la sonde.

En ce qui concerne les recouvrements effectués avec la sonde MODY, on a choisi quelques mois de 2006 (voir figure 7.8), et on a une précision moyenne "3D" à 2.3 mètres, proche des 2 mètres publiés dans *Konopliv et al.* [2006]. Ce choix s'est porté sur 2006 car il y a une variation de l'orientation du plan d'orbite par rapport à la ligne de visée d'amplitude significative sur une courte période de temps (voir la figure 7.9). En effet, la configuration d'observation du plan d'orbite évolue entre deux minima, environ 160 degrés (vue de face), à partir de début 2006, avec un maximum à environ 175 degrés au milieu de la période traitée. Si on compare cette évolution de l'observabilité du plan d'orbite avec, par exemple, celle de la précision des recouvrements dans la direction tangentielle (*transverse*) au plan d'orbite, on voit nettement que la qualité des recouvrements se dégrade autour de ce maximum.

Afin de compléter cette partie qui traite exclusivement de la détermination d'orbite précise, la figure 7.11 représentent, pour MGS et MODY, les facteurs d'échelle ajustés pour la force de pression solaire directe (FS) et pour la force de traînée atmosphérique ou frottement (FD). Les valeurs nominales de ces facteurs d'échelle sont de 1. On constate que l'évolution de FS de MODY présente deux pics très marqués par rapport à celle de MGS, et ce aux premiers semestres de 2003 et de 2005. Cette différence s'explique en partie par des effets d'ombre des panneaux solaire portée sur la surface du bus de MODY [*Konopliv et al.*, 2006] associée à son orientation quasi vue de face par rapport au Soleil (voir figure 7.10) qui sont absorbés dans le FS. En ce qui concerne l'évolution des FD pour chacun des deux satellites, on observe des tendances comparables sur les périodes communes. En fin de période traitée (2005-2006), on remarque une signature de grande amplitude, sans doute d'origine atmosphérique puisqu'elle affecte les FD des deux satellites.

Sur la figure 7.12, on a aussi tracé l'évolution des résidus (rms) pour chaque type de mesure utilisée mais qui n'ont un sens qu'avec l'évolution des paramètres ajustés précédents. Les tendances observées sont à relier aux occultations (occurrence tous les deux ans terrestres : absence de point puisque aucune mesure n'est possible), aux entrées et sorties d'occultations (dégradation des résidus par l'effet du plasma solaire), à l'orientation du plan d'orbite par rapport à la ligne de visée (voir figure 7.9), qui n'est autre que la direction satellite-Terre, ou à l'orientation du plan d'orbite par rapport à la direction satellite-Soleil (voir figure 7.10).

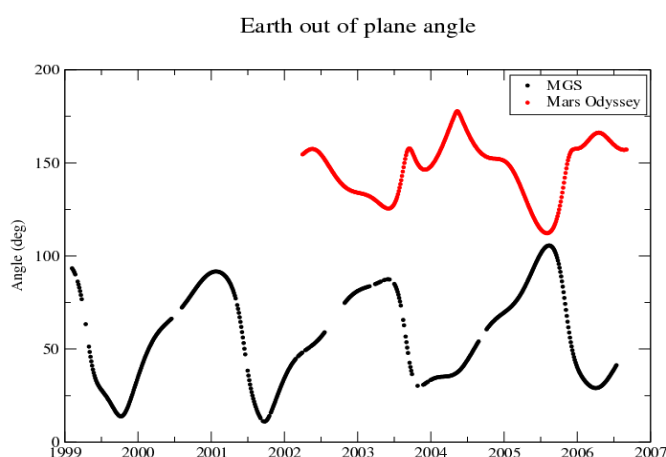


FIG. 7.9 – Evolution de l'angle de la normale au plan d'orbite par rapport à la *direction satellite-Terre* pendant la durée de la période traitée pour MGS - février 1999 à juillet 2006 - et MODY - début 2002 à début septembre 2006.

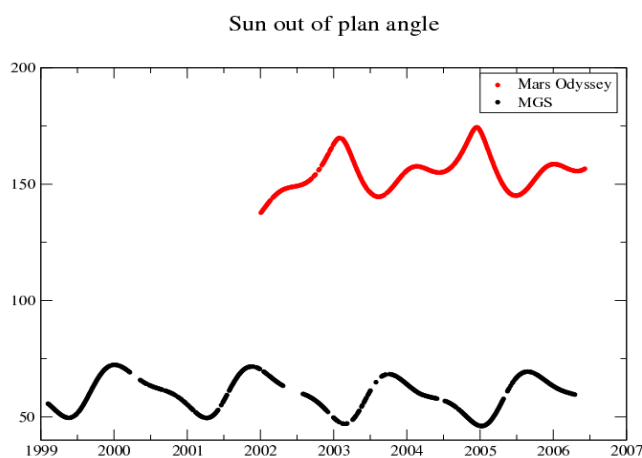


FIG. 7.10 – Evolution de l'angle (en degré) de la normale au plan d'orbite par rapport à la *direction satellite-Soleil* pendant la durée de la période traitée pour MGS - février 1999 à juillet 2006 - et MODY - début 2002 à début septembre 2006.

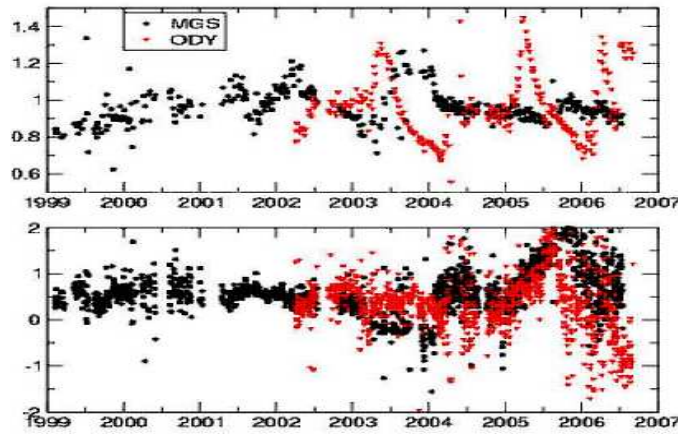


FIG. 7.11 – MGS (noir) et MODY (rouge) : évolution des facteurs d'échelle FS (haut), sur toute la durée de la période traitée, de février 1999 à juillet 2006 pour MGS et, avril 2002 à septembre 2006 pour MODY.

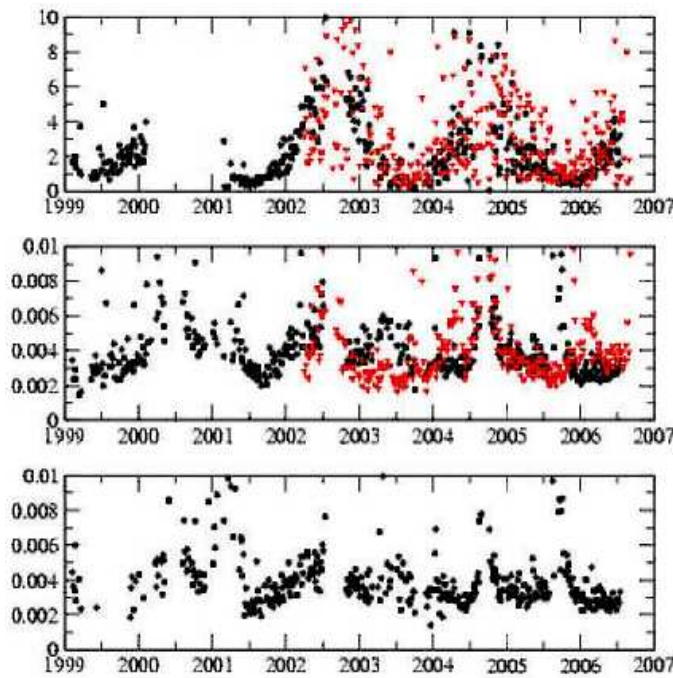


FIG. 7.12 – MGS (noir) et MODY (rouge) : évolution des résidus pour chaque type de mesure : de haut en bas, distance (en mètre), Doppler 2 voies (en Hz) et Doppler 1 voie (en Hz). La période traitée s'étend de février 1999 à juillet 2006 pour MGS et, d'avril 2002 à septembre 2006 pour MODY.

7.4 Le champ variable de Mars

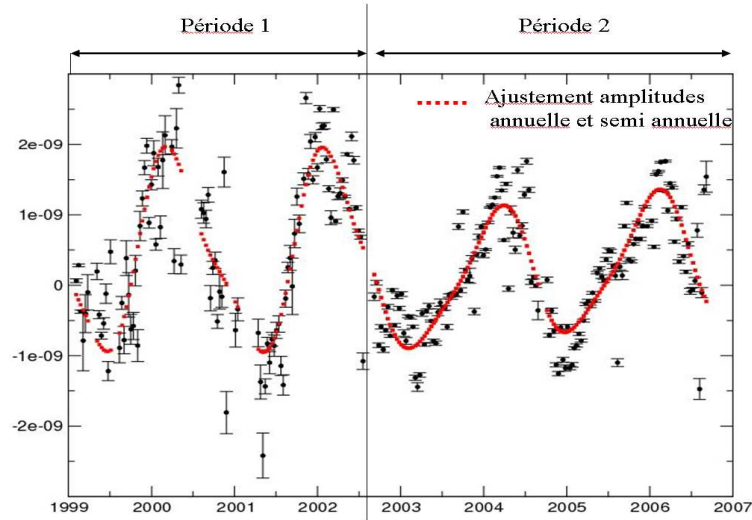


FIG. 7.13 – Solutions décennales de $\bar{C}_{30,l}$ issue du cumul de MGS et MODY, avec en rouge le tracé de l'ajustement en amplitudes annuelle et semi-annuelle.

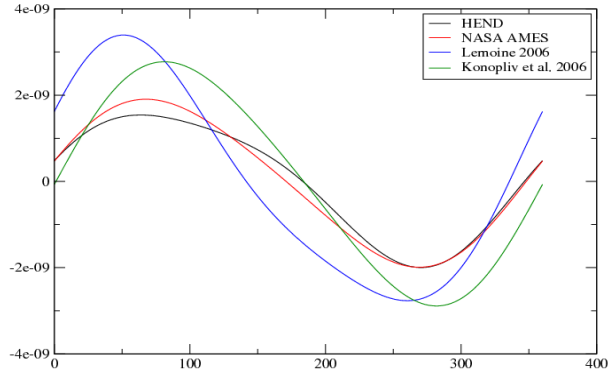


FIG. 7.14 – Comparaison des variations de $\bar{C}_{30}$ comme sortie du modèle de NASA Ames, comme solution extraite des données de HEND, et des variations de $\bar{C}_{30,l}$ comme solutions extraites à partir des données MGS, *Lemoine* [2006], et à partir des données MGS et MODY, *Konopliv et al.* [2006], en fonction de l'anomalie moyenne de Mars.

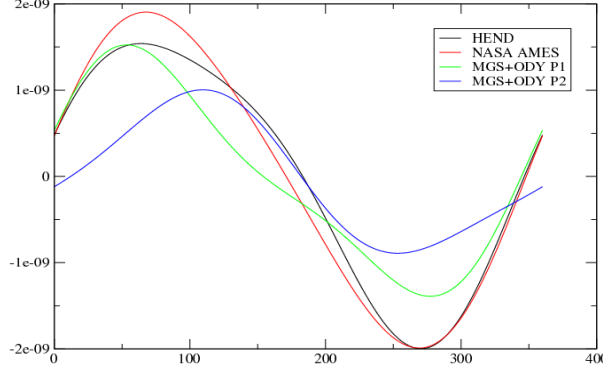


FIG. 7.15 – Comparaison des variations de $\bar{C}_{30}$ comme sortie du modèle de NASA Ames, comme solution extraite des données de HEND, et des variations de $\bar{C}_{30,l}$ comme solutions extraites à partir des données MGS sur la période 1, de février 1999 à mi-2002, et à partir des données de MGS et MODY sur la période 2, de mi-2002 à septembre 2006 respectivement, en fonction de l'anomalie moyenne de Mars.

A partir de l'analyse des données de poursuite de MGS et MODY, soit la phase de détermination d'orbites précises, on a procédé à une visualisation d'un certain nombre de solutions des harmoniques zonaux du potentiel gravitationnel de degré 2, 3 (de fait les coefficients composites) et du coefficient k_2 . On rappelle ici que k_2 est essentiellement détecté via la partie longue période des perturbations sur l'inclinaison comme on l'a montré au paragraphe 5.1.2 (voir la table 5.4).

Le signal obtenu pour $\bar{C}_{20}$ est excessivement fort en amplitude et ne présente pas d'intérêt puisque la variance a posteriori sur les estimations décennales est au mieux du même ordre de grandeur que les valeurs ajustées et ce pour les deux satellites. Le cumul des dynamiques de MGS et MODY n'apporte pas d'amélioration sensible. Le signal obtenu pour $\bar{C}_{30}$ est présenté à la figure 7.13. On voit que globalement deux périodes distinctes se détachent, l'une, période 1, allant de février 1999 à mi-2002, et l'autre, période 2, de mi-2002 à septembre 2006. Il est important de souligner ici que pour *MGS la fréquence et la durée des poussées d'AMD sont sensiblement différentes sur ces deux périodes*. Ainsi que le soulignent Yoder *et al.* [2003] et Konopliv *et al.* [2006], ces occurrences d'AMD très diverses dans le temps sont un facteur très largement dégradant quant à la restitution des zonaux de gravité. Après cette phase d'extraction des séries temporelles des zonaux de degré 2 et 3,

TAB. 7.1 – Amplitudes des variations saisonnières de $\bar{C}_{30}$

	Annuelle		Semi-annuelle	
source	Amplitude	σ	Amplitude	σ
MGS+MODY P2	$0,90.10^{-09}$	$0,06.10^{-09}$	$0,18.10^{-09}$	$0,06.10^{-09}$
MGS+MODY P1	$1,32.10^{-09}$	$0,12.10^{-09}$	$0,34.10^{-09}$	$0,11.10^{-09}$
HEND (2001)	$1,70.10^{-09}$	-	$0,30.10^{-09}$	-
NASA Ames	$1,90.10^{-09}$	-	$0,20.10^{-09}$	-
<i>Konopliv et al.</i> , 2006	$2,80.10^{-09}$	-	$0,27.10^{-09}$	-
<i>Lemoine</i> , 2006	$3,00.10^{-09}$	-	$0,51.10^{-09}$	-

nous avons donc procédé à un ajustement par moindres carrés de termes annuels et semi-annuels (en cos et sin) sur ces deux périodes distinctes (voir la figure 7.13). On trouvera à la table 7.1 les résultats de cet *ajustement* ainsi que les tous derniers résultats publiés (*Konopliv et al.*, 2006 ; *Lemoine*, 2006) pour comparaison. L'**amplitude annuelle**, pour la **période P2**, est un **facteur 2 plus faible** que celle issue du **GCM NASA Ames** (voir la figure 7.15) et un **facteur 3 plus faible** que celles extraites par les **centres NASA**. L'**amplitude annuelle**, pour la **période P1**, est un **facteur 2 plus faible** que celles extraites par les **centres NASA**. Les **amplitudes semi annuelles** sur les deux périodes traitées (**P1 et P2**) sont **équivalentes**, ou presque, à la fois à celle publiée par le **JPL** (*Konopliv*) et extraite du **GCM NASA Ames**. Le résultat remarquable ici est que l'**amplitude annuelle sur la période 1, 1999-mi 2002, traitée est voisine de celle extraite des données HEND, et l'amplitude semi-annuelle est équivalente**. On pourra aussi apprécier ces comparaisons en amplitudes sur les figures 7.14 et 7.15.

7.5 Le nombre de Love k_2 de Mars

La valeur de k_2 sur la durée de la période traitée, soit de février 1999 à septembre 2006, avec les données MGS et MODY est estimée à 0.145 ± 0.002 (à 3 sigma). Cette valeur est plus basse que celle 0.153 ± 0.017 de *Yoder et al.* [2003] et que celle de 0.152 ± 0.009 de *Konopliv et al.* [2006]. En tout état de cause, l'intervalle $[0.145, 0.153]$ des valeurs de k_2 déterminées à partir des observations (cf. figure 7.16) permet de classer l'intérieur de Mars dans la famille des modèles à manteau chaud (associé à une température moyenne supérieure à $2000^\circ K$ d'après *Breuer and Spohn* [2003]) et confirme que **Mars a un noyau liquide et de rayon voisin de 1700 km**. Considérant les

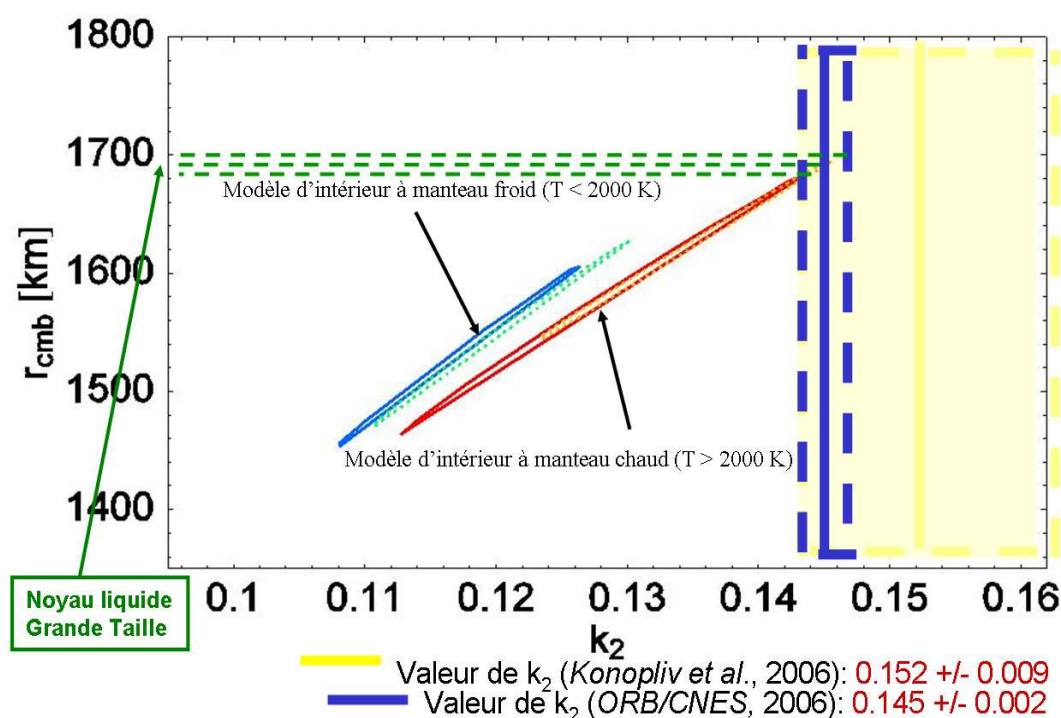


FIG. 7.16 – Relation entre la valeur de k_2 et le rayon du noyau (r_{cmb} rayon de Mars jusqu'à la limite noyau-manteau ou cmb, *core mantle boundary*) via la modélisation de l'intérieur de la planète : en rouge on a la famille des modèles d'intérieur dit à manteau chaud, en bleu celle des modèles d'intérieur dit à manteau froid.

barres d'erreurs (difficiles à calibrer) de ces valeurs, on a choisi de ne pas encore utiliser la valeur de k_2 obtenue pour contraindre les paramètres de modélisation d'intérieur de Mars, mais de la déterminer et de la comparer à un ensemble de valeurs de k_2 associées à autant de modèles possibles. Ces modèles considèrent soit un manteau chaud, soit un manteau froid (associé à une température moyenne d'environ $1800^\circ K$, dans tous les cas inférieure à $2000^\circ K$) pour correspondre aux extrêmes que l'on trouve dans les travaux liés à la convection du manteau. La taille du noyau est variable ainsi que le pourcentage de soufre qu'il contient. Le rapport Fe/Si que l'on considère est celui admis dans les chondrites et le moment d'inertie est fixé par les observations de radio science (dans les barres d'erreur données par ces analyses). Les modèles en accord avec le moment d'inertie et k_2 ont des noyaux de taille assez importantes, i.e d'environ 1700 km, les manteaux sont chauds et les épaisseurs de croûte de 60-150 km. Les valeurs du k_2 obtenues pour les différents modèles sont représentées sur la figure 7.16. Cette figure représente

les différentes valeurs de k_2 en fonction de la taille du noyau. Pour les valeurs élevées de k_2 , on sait clairement dissocier les modèles à manteau froid de ceux à manteau chaud, cependant on ne sait pas départager les minéralogies du manteau. Les modèles en général fixent le rapport Fe/Si comme c'est le cas à la figure 7.16.

Chapitre 8

Discussion et conclusion

8.1 Discussion

Les variations saisonnières des harmoniques zonaux évaluées à partir de deux GCMs de l'atmosphère martienne ainsi qu'à partir des observations du dépôt de CO_2 en surface par l'instrument HEND [Karatekin *et al.*, 2005] ont servi de point de départ à cette étude. Bien que le comportement général de ces trois lots de données soit assez semblable, il apparaît jusqu'à plus de 30% de différence à certains moments de l'année. Ces résultats révèlent une certaine méconnaissance ou un défaut de compréhension de la physique réelle des phénomènes à l'origine de ces variations de masse dans l'atmosphère à l'échelle de la planète. Les données de poursuite de sondes autour de Mars fournissent une mesure directe du cycle du CO_2 . On a donc comparé les valeurs de $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ estimées et publiées (amplitudes et phases annuelles et semi-annuelles) par Smith *et al.* [2001], Yoder *et al.* [2003] obtenues à partir des données de poursuite de MGS. Des différences dans les approches de traitement, combinées à un rapport signal sur bruit assez faible, ne permettent d'obtenir que des solutions finalement très différentes en amplitude. On retrouve ces différences sur les amplitudes évaluées à partir des GCMs et celles issues de l'instrument HEND. Il semble donc bien que les données de poursuite de sonde autour de Mars ne permettent pas pour le moment de donner la préférence à aucun modèle. On peut s'attendre dans les prochaines années, avec la combinaison de plusieurs orbiteurs et l'envoi d'autres missions (Mars Reconnaissance Orbiter, MRO, par exemple), à ce que les modèles bénéficient de nouvelles contraintes par ce type de données.

Notre travail a donc consisté à bien comprendre, par une approche ana-

lytique, les faiblesses actuelles des solutions obtenues à partir des missions MGS, MODY et MEX. Ensuite, nous avons conduit un ensemble de simulations qui nous ont permis à la fois de choisir une stratégie d'ajustement pour notre restitution des zonaux via les mesures de poursuite Doppler et de distance de MGS et/ou MODY, et, dans le cadre de futures missions, devraient contribuer à éclaircir les choix de leurs caractéristiques orbitales. Enfin, nous avons nous-même traité les données des missions MGS et MODY (et même pris en compte un ensemble plus long de mesures) afin de confirmer (ou non) les solutions des équipes américaines. D'une manière générale, le problème de la détermination des zonaux de gravité à partir des données de poursuite d'une sonde unique autour de Mars est que les perturbations orbitales dépendent de deux combinaisons linéaires de ces coefficients, d'un côté les pairs et de l'autre les impairs. Les solutions de $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ à partir des données DSN de poursuite de MGS et MODY contiennent donc l'information de ces combinaisons linéaires paires et impaires respectivement, ces deux coefficients sont dits composites, et notés $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$. Les coefficients de plus haut degré, en particulier 4 et 5, ont des amplitudes de variations de l'ordre de grandeur de celles des degrés 2 et 3 [Karatekin *et al.*, 2005], ce qui pose la question de les ignorer ou non lors de l'analyse de données de poursuite d'une sonde martienne. En fait, nos simulations montrent que, dans le meilleur des cas (vu le jeu d'hypothèses considéré pour nos simulations), une restitution de $\bar{C}_{20,l}$ et $\bar{C}_{30,l}$ donne effectivement un signal $\bar{C}_{30,l}$ de meilleure qualité que celui obtenu pour $\bar{C}_{20,l}$. Non pas seulement parce que la contribution de $\bar{C}_{30,l}$ sur les variations de ω est la plus importante, mais aussi parce que les variations de ω permettent de discriminer correctement les impairs comme le confirme la comparaison des matrices de corrélations des simulations 1 et 2. Cependant on note, dans le cadre d'un ajustement des 4 zonaux, une dégradation de la restitution de $\bar{C}_{30}$ par rapport à $\bar{C}_{30,l}$, qui illustre parfaitement ce que montre très clairement la comparaison des valeurs des coefficients de la combinaison linéaire dans l'expression des variations de ω , le rapport 1 pour 3 par rapport à $\bar{C}_{50}$.

Pour améliorer la restitution de $\bar{C}_{20,l}$, ou si possible $\bar{C}_{20}$, avec une orbite telle que celle de MGS, il y a plusieurs solutions : (a) ajuster $\bar{C}_{40}$ simultanément comme on le montre en simulation 3, puisque $\bar{C}_{40}$ non ajusté perturbe effectivement l'ajustement de $\bar{C}_{20}$, dans un rapport 1 pour 1.5 sur les variations de Ω (b) ajouter un tracking depuis Mars qui permet une meilleure estimation des forces normales au plan d'orbite mais ne résout véritablement le problème que dans le cadre d'un ajustement conjoint avec $\bar{C}_{40}$ (simulation 3), simulation 5 (c) ajuster la rotation puisqu'on montre en simulation que la méconnaissance sur la rotation induit un bruit qui dégrade la restitution

de $\bar{C}_{20}$ et ce d'autant plus que plan d'orbite est vu par la tranche depuis la Terre. De plus, un résultat important des simulations est qu'on parvient à décorréler $\bar{C}_{20}$ et LOD, mais aussi $\bar{C}_{20}$ et F et σ_0 . Finalement, l'expérience NEIGE pourrait permettre d'avoir à la fois des zonaux de gravité restitués de meilleure qualité, pour $\bar{C}_{20}$ en particulier, que tous les résultats publiés et une estimation de la rotation précise comme le montre les simulations. Les simulations nous ont finalement permis d'envisager la combinaison de différents lots de données de poursuite de une ou plusieurs sondes martiennes. Deux sondes martiennes en orbite circulaire mais avec des caractéristiques orbitales bien distinctes peuvent être utilisées pour restituer plus exactement et précisément le champ de gravité variable. On a ajouté à la perturbation d'un orbiteur de caractéristiques proches de celles de MGS, notre cas référence, une autre dynamique caractérisée par une sonde dont l'inclinaison est proche de 50 degrés. Par rapport au cas de référence, les variances a posteriori sur la restitution des zonaux diminuent alors d'un ordre de grandeur. Les caractéristiques orbitales de la deuxième sonde ont permis aussi d'améliorer considérablement l'exactitude de la restitution des zonaux. On a en effet une meilleure discrimination des effets de chacun des zonaux via les perturbations inhérentes sur cette orbite, en particulier pour les degrés pairs et ce grâce aux amplitudes relatives des fonctions d'inclinaison associées aux zonaux. Cette amélioration se traduit au niveau des corrélations entre $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{40}$ qui diminuent sensiblement par rapport au cas de référence. Il est donc aussi possible de trouver des caractéristiques orbitales adéquates, une inclinaison en particulier, qui permettent une différenciation des effets de chacun des zonaux impairs. Cette inclinaison est d'environ 73° pour des orbites quasi circulaires. L'impact d'une deuxième sonde de caractéristiques orbitales proches de celles de MEX, ajoutée à notre cas référence, i.e une sonde de type MGS, a aussi fait l'objet de simulations numériques [Rosenblatt et al, 2004]. Il en résulte une amélioration au mieux d'un facteur 2 sur la précision des zonaux de gravité de degré 2 à 5 restitués. Une mission de radio science comme *Archimède* de la Mars Society, de par son inclinaison nominale de 30°, présenterait elle aussi un intérêt particulier par rapport au lot restreint des dynamiques de sonde en vol disponibles à l'heure actuelle, comme celle de MODY. Finalement, la stratégie choisie pour la restitution de C_{20} et C_{30} est celle de la simulation 2. On restitue $C_{20,l}$ et $C_{30,l}$.

On a aussi étudié le moyen d'ajuster simultanément le zonal pair de degré 2 et la rotation (le LOD et l'effet amplificateur du noyau sur la signature des nutations pour une planète Mars non rigide, i.e les paramètres F et σ_0). Dans ce cadre là, on montre qu'il est effectivement possible de décorréler et de déterminer précisément (sur une année martienne) les variations de

$\bar{C}_{20}$, (variance a posteriori de 1.5% , ou moins) et la rotation propre ou LOD, (variance a posteriori de moins de 2%) [*Duron et al.*, 2003]. Cette expérience pourrait être aussi utilisée pour séparer, dans le signal du LOD, la contribution des vents zonaux de celle de la redistribution des masses. En effet, le signal $\bar{C}_{20}$ contient uniquement la contribution de la redistribution des masses qui, une fois évaluée, peut être soustraite au signal du LOD pour donner l'amplitude de la contribution des vents zonaux. Ceci nous aiderait certainement à mieux comprendre la dynamique atmosphérique martienne.

Pour parachever ce travail, nous avons traité toutes les mesures disponibles des missions MGS et MODY. Les variations saisonnières du zonal de degré 3 composite les plus récentes ont été confirmées par l'analyse de presque 8 ans de données de suivi de MGS et MODY. Notamment, on a obtenu une signature annuelle attendue. L'amplitude résultante vient aussi corroborer les résultats publiés jusqu'à présent. En ce qui concerne le degré 2, il semble qu'il soit excessivement compliqué d'extraire sa signature, surtout du fait de l'inclinaison qui n'est pas adaptée. $C_{20,l}$ n'a aucune signature harmonique claire même si l'amplitude est correcte (quelques 10^{-09}). Enfin, le nombre de Love de marée k_2 , obtenu sur la totalité de la période, a été estimé à 0.145 ± 0.002 . Cette valeur confirme l'hypothèse d'un noyau liquide de rayon voisin de 1700 km, ce qui constitue un résultat géophysique majeur.

8.2 Extension des travaux de recherche

8.2.1 Simulations

On regrette, dans un premier temps, la perte par la NASA de la sonde MGS en novembre 2006, en sortie d'occultation. Cependant, une expérience de radioscience, LaRa (pour LAndeR RAdio science), vient d'être proposée pour la mission *ExoMars/GEP* du programme AURORA de l'ESA. Il s'agit de déposer un transpondeur cohérent en bande X à la surface de Mars et d'utiliser la mesure Doppler du lien direct atterrisseur-Terre pour déterminer la rotation de Mars. L'ajout d'un tel instrument apportera de nouvelles observations des variations de la rotation martienne. Il s'agira alors de faire des simulations numériques qui permettront d'évaluer l'apport d'une telle expérience par rapport à d'anciennes missions similaires comme Viking et Pathfinder.

Un autre axe de recherche serait de considérer un champ de gravité variable incluant en plus les degrés strictement supérieurs à 5. Dans ce cas, la restitution des harmoniques zonaux de degré 2 et 3 via les perturbations de deux

sondes martiennes va dépendre de l'amplitude relative des coefficients (de la combinaison linéaire caractérisant les zonaux composites) de degré $l > 4$ et $l > 5$ relativement à ceux de degré 2 et 3 respectivement. En partant des équations (5.27) et (5.28), on peut améliorer significativement la restitution des zonaux $\bar{C}_{20}$ et $\bar{C}_{30}$ en choisissant les inclinaisons adéquates [Karatekin *et al.*, 2005] comparativement à notre cas référence. Pour déterminer plus d'harmoniques zonaux de gravité, plusieurs orbites distinctes par leur inclinaison sont nécessaires de sorte qu'on puisse séparer les contributions de chaque coefficient zonal individuellement [Balmino, 1986]. Comme pour l'inclinaison, une différence d'excentricité distincte entre deux orbites peut jouer un rôle favorable en terme de précision et peut-être d'exactitude sur la restitution des zonaux de gravité.

Un troisième axe pourrait concerner l'étude de la sensibilité de l'orbite aux forces non-conservatives, accélérations additionnelles dues au rayonnement solaire réfléchi (albedo) et à l'émission thermique de Mars. Cette étude serait menée avec toujours comme objectif la quantification de l'impact de ces forces sur la restitution des paramètres de rotation planétaire et des zonaux de gravité. On attend de ces forces qu'elles aient une signature sur l'orbite corrélée avec les variations saisonnières de $\bar{C}_{20}$, $\bar{C}_{30}$ et de la rotation, le LOD en particulier.

8.2.2 (Re)traitement de données de suivi et combinaison avec d'autres missions de radio science : MEX ... LaRa ...

Dans le cadre d'un traitement des données de poursuite des sondes MGS et MODY avec le nouveau champ statique du JPL, Konopliv *et al* [2006] suggèrent l'utilisation d'un modèle d'orientation de Mars plus abouti/complet incluant les nutations, les variations du LOD et le mouvement du pôle (via les paramètres d'orientation martiens, voir chapitre 1) que le modèle d'orientation IAU 2000 [Seidelmann *et al*, 2002]. Pour tenir compte des erreurs de modélisation des forces non gravitationnelles (frottement et pression solaire directe) qui agissent sur les sondes MGS et MODY, Konopliv *et al* [2006] déterminent, dans leur processus de restitution d'orbite, de petites accélérations dans la direction tangentielle et pour chaque arc de MGS et MODY (avec une valeur a priori de 5.10^{-13} km/s² et 2.10^{-13} km/s² respectivement). Pour tenir compte à la fois de la contribution plus importante de la force induite par la pression solaire directe dans la direction normale et d'une possible er-

reur de modélisation des AMD, ils déterminent aussi de petites accélérations dans la direction normale et ce pour chaque révolution de MODY autour de Mars (avec une valeur a priori de 2.10^{-12} km/s²). Il serait donc intéressant de comparer la qualité des recouvrements, des solutions de champ de gravité variable et de k_2 avec cette nouvelle paramétrisation de la dynamique de MGS et MODY. En ce qui concerne un cumul des informations (données) issues de MGS et/ou MODY avec celles d'une autre mission ayant des caractéristiques orbitales différentes, une solution préliminaire mixte [*Rosenblatt et al*, 2006] utilisant des mesures (DSN) de poursuite de MGS et de MEX sur la période commune 2004-2005 confirme que la précision est bien améliorée lors du cumul des deux dynamiques bien que les deux sondes soient en orbite quasi polaire (MEX dans une moindre mesure). On attend avec impatience la réalisation de l'expérience de radio science LaRa proposant un lien direct atterrisseur-Terre qui devrait nous permettre de mieux contraindre la rotation de Mars (nutation, mouvement du pôle et LOD) en complément aux résultats déjà obtenus par *Yoder et al.* [2003] et *Konopliv et al.* [2006]. On rappelle ici que l'ajustement de la rotation simultanément à celui des zonaux de gravité est favorable à la restitution des zonaux pairs.

Bibliographie

- [1] Balmino, G., Present status and future improvements in measuring the gravity field of the Earth and planets, in *Space Geophysics and Geodynamics*, edited by A. J. Anderson and A. Cazenave, pp. 19-54, Elsevier, New York, 1986.
- [2] Balmino, G., Orbit Choice and the Theory of Radial Orbit Error for Altimetry, in *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography*, edited by Reiner Rummel and Fernando Sanso, pp. 244-315, Springer-Verlag, 1992.
- [3] Balmino, G., J. Duron, J.-C. Marty and O. Karatekin, Mars long wavelength gravity field variations : a new solution from MGS tracking data, *IAG Symposia series, vol. 130*, Springer Verlag, 2006.
- [4] Barlier, F. and M. Lefebvre, A new look at planet Earth : Satellite geodesy and geosciences, in *The Century of Space Science*, edited by J. A. M. Bleeker, J. Geiss, and M. C. E. Huber, pp.1623-1651, Kluwer Academic Pub, 2001.
- [5] Barriot, J.-P., V. Dehant, J.-C. Cerisier, W. Folkner, A. Rhibes, J. Benoist, T. Van Hoolst, R. Warnant, P. Defraigne, R. A. Preston, L. Romans, S. Wu, and A. W. Wernik, NEIGE : NetLander Ionosphere and Geodesy Experiment, *Adv. Space Res.*, vol. 28(8), pp. 1237-1249, 2001.
- [6] Breuer, D., and T. Spohn, Early plate tectonics versus single-plate tectonics on Mars : Evidence from magnetic field history and crust evolution, *J. Geophys. Res.*, vol. 108(E07), 5072, doi : 10.1029/2002JE001999, 2003.
- [7] Bruinsma, S., and F. G. Lemoine, A preliminary Semi empirical Thermosphere Model of Mars : DTM Mars, *J. Geophys. Res.*, vol. 107(E10), 5076, doi : 10.1029/2001JE001508, 2002.
- [8] Cazenave, A., and G. Balmino, Meteorological effects on the seasonal variations of the rotation of Mars, *Geophys. Res. Lett.*, vol. 83, pp. 245-248, 1981.

- [9] Chao, B. F., and D. P. Rubincam, Variations of Mars gravitational field and rotation due to seasonal CO_2 exchange, *J. Geophys. Res.*, vol. 95(B9), pp. 14755-14760, 1990.
- [10] Chao, B. F., V. Dehant, R. S. Gross, R. D. Ray, D. A. Salstein, M. M. Watkins and C. R. Wilson, Space geodesy monitors mass transports in global geophysical fluids, *Eos Trans. AGU*, vol. 81, pp. 247-250, 2000.
- [11] Chao, B. F., Geodesy is not just for static measurements any more, *Eos Trans. AGU*, vol. 84, pp. 145-150, 2003.
- [12] Defraigne, P., O. de Viron, V. Dehant, T. Van Hoolst, and F. Hourdin, Mars rotation variations induced by atmosphere and ice caps, *J. Geophys. Res.*, vol. 105(E10), pp. 24563-24570, 2000.
- [13] Deleflie, F., Développement du potentiel perturbateur de 3^{ème} corps, *Note technique CERGA*, 2000.
- [14] Duron, J., P. Rosenblatt, M. Yseboodt, Ö. Karatekin T. Van Hoolst and J.-P. Barriot, Joint estimation of Martian $\bar{C}_{20}$ and rotation variations from simultaneous geodetic measurements : Numerical simulations of a network science experiment, *Geophys. Res. Lett.*, vol. 30(18), 1971, doi : 10.1029/2003GL018353, 2003.
- [15] Duron, J., Analyse du bilan d'erreur Doppler de l'expérience NEIGE, *CNES Communication*, MARS-NT-00-053-ORB, 2002a.
- [16] Duron, J., Erreur brute due à l'ionosphère et correction par mesures bifréquences. Effet sur la mesure de vitesse radiale dans le cadre de l'expérience NEIGE, *ROB report*, Bruxelles, 2002b.
- [17] Duron, J., J.-C. Marty, G. Balmino, S. Le Maistre, A. Rivoldini and V. Dehant, Time variations of Mars Gravity Field from Mars Global Surveyor and Odyssey data, *AGU*, San Francisco, G12 - Planetary Geodesy P31C-0157, poster, 2006.
- [18] Folkner, W. M., C. F. Yoder, D. N. Yuan, E. M. Standish, and R. A. Preston, Interior structure and seasonal mass redistribution of Mars from Radio tracking of Mars Pathfinder, *Science*, vol. 278, pp. 1749-1751, 1997a.
- [19] Folkner, W. M., R. D. Kahn, R. A. Preston, C. F. Yoder, E. M. Standish, J. G. Williams, C. D. Edwards, and R. W. Hellings, Mars dynamics from Earth-based tracking of the Mars Pathfinder atterrisseur, *J. Geophys. Res.*, vol. 102, pp. 4057-4064, 1997b.
- [20] Forget, F., F. Hourdin, R. Fournier, C. Hourdin, O. Talagrand, M. Collins, S. R. Lewis, P. L. Read, and J. Huot, Improved general circulation models of the Martian atmosphere from the surface to above 80 km, *J. Geophys. Res.*, vol. 104(13), 24, 155-24, 176, : 10.1029/1999JE001025, 1999.

- [21] Haberle, R. M., et al., General circulation model simulations of the Mars Pathfinder atmospheric structure investigation/meteorology data, *J. Geophys. Res.*, vol. 104(E4), pp. 8957-8974, 1999.
- [22] Hourdin, F., F. Forget, and O. Talagrand, The sensitivity of the Martian surface pressure and atmospheric mass budget to various parameters : A comparison between numerical simulations and Viking observations, *J. Geophys. Res.*, vol. 100(9), pp. 5501-5523, 1995.
- [23] Karatekin, Ö., V. Dehant and O. de Viron, Martian global-scale seasonal CO₂ change : Comparison of geodetic observations and numerical simulations, in *Sixth International Conference on Mars*, abstract 3172, 2003.
- [24] Karatekin, Ö., J. Duron, P. Rosenblatt, T. Van Hoolst, V. Dehant and J.-P. Barriot, Mars' Time-Varying Gravity and its Determination : Simulated Geodesy Experiments, *J. Geophys. Res.*, vol. 110, E06001, doi :10.1029/2004JE002378, 2005.
- [25] Kaula, W. M., *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass., 1966.
- [26] Konopliv, A. S., C. F. Yoder, E. M. Standish, D.-N. Yuan, and W. L. Sjogren, A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris, *Icarus*, vol. 182(1), doi :10.1016/j.icarus.2005.12.025, pp. 23-50, May 2006.
- [27] Lemoine, F.G., D.E. Smith, D.D. Rowlands, G.A. Neumann, M.T. Zuber, D.S. Chinn, and D.E. Pavlis, An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor, *J. Geophys. Res.*, vol. 106, 23359-23376, 2001.
- [28] Lemoine, F. G., S. Bruinsma, D. S. Chinn and J.M. Forbes, Thermospheric studies with Mars Global Surveyor, *AIAA/AAS Conference Proceedings*, 2006.
- [29] Litvak, M. L., et al., Seasonal carbon dioxide depositions on the Martian surface as revealed from neutron measurements by the HEND instrument onboard the 2001 Mars Odyssey Spacecraft, *Solar Sys. Res.*, vol. 38, pp. 167-177, doi : 10.1023/B :SOLS.0000030856.83622.17, 2004.
- [30] Loyer, S., Techniques dynamiques d'observation de la rotation de la Terre - Mesures satellites et apport des gravimètres et des gyroscopes, *Thèse de Doctorat*, Université Paul Sabatier, 1997.
- [31] MacCarthy, D.D., IERS Conventions, IERS Technical Note 21, 1996.
- [32] Mitrofanov, I. G., et al., CO₂ Snow depth and subsurface water-ice abundance in the northern hemisphere of Mars, *Science*, vol. 300, pp. 2081-2084, doi : 10.1126/science.1084350, 2003.

- [33] Moyer, T. D., Formulation for observed and computed values of DSN data types for navigation, JPL publication 00-7, 2000.
- [34] Rosenblatt, P., V. Dehant, M. Paetzold, Ö. Karatekin, and J. P. Barriot, Numerical simulations of the estimation of Mars' gravity field variations from the MaRS experiment on board Mars Express, *EGU 1st general assembly*, Nice, EGU04-A-04160, 2004.
- [35] Rosenblatt, P., J. Duron, J.C. Marty, V. Dehant, M. Paetzold, B. Hausler, S. Le Maistre, O. Karatekin, T. Van Hoolst, G. Balmino, Accurate MEX orbit calculations from MaRS radio-tracking data : new constraints on Mars' time-variable gravity field from a joint inversion of MGS and MEX data, *EGU*, Vienne, EGU06-A-07343, poster, 2006.
- [36] Rosenblatt, P. et J. Duron, Perturbations orbitales induites par le potentiel gravitationnel, le nombre de Love k_2 et les satellites naturels de Mars. Application aux missions de radio science MGS et MEX, Rapport ORB, 2006.
- [37] Reasenberg, D. R., and R. W. King, The rotation of Mars, *J. Geophys. Res.*, vol. 84, pp. 6231-6240, 1979.
- [38] Roosbeek, F., Analytical developments of rigid Mars nutation and tide generating potential series, *Cel. Mech. Dyn. Astr.*, vol. 75, pp. 287-300, 2000.
- [39] Sanchez, B. V., D. D. Rowlands, R. M. Haberle, and J. Schaeffer, Atmospheric rotational effects on Mars based on the NASA Ames general circulation model, *J. Geophys. Res.*, vol. 108(E5), doi : 10.1029/2002JE001984, 2002.
- [40] Sasao, T., I. Okamoto, and S. Sakai, Dissipative core-mantle coupling and nutational motion of the Earth, *Publ. Astron. Soc. Japan*, 29, pp. 83-105, 1977.
- [41] Sasao, T., S. Okubo, and M. Saito, A simple theory on dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth, *Proc. AGU Symp. on Nutation and the Earth's Rotation*, 78, Fedorov Ep. et al. (eds), Kiew, D. Reidel, Norwell, Mass., pp. 165-183, 1980.
- [42] Seidelmann, P.K., Abalakin, V.K., Bursa, M., Davies, M.E., de Bergh, C., Lieske, J.H., Oberst, J., Simon, J.L., Standish, E.M., Stooke, P., Thomas, P.C., 2002. Report of the IAU/IAG working group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites : 2000, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 82, pp. 83110.
- [43] Smith, D. E., M. T. Zuber, R. M. Haberle, D. D. Rowlands, and J. R. Murphy, The Mars seasonal CO_2 cycle and the time variation of the

- gravity field : A general circulation model simulation, *J. Geophys. Res.*, vol. 104, pp. 1885-1896, doi : 10.1029/1998JE900024, 1999a.
- [44] Smith, D. E., W. L. Sjogren, G. L. Tyler, G. Balmino, F. G. Lemoine, and A. S. Konopliv, The gravity field of Mars : results from Mars Global Surveyor, *Science*, vol. 286, pp. 94-97, 1999b.
- [45] Smith, D. E., M. T. Zuber, and G. A. Neumann, Seasonal variations of snow depth on Mars, *Science*, vol. 294, pp. 2141-2146, doi : 10.1126/science1066556, 2001.
- [46] Smith, D. E., and M. T. Zuber, Seasonal changes in the masses of the polar ice caps of Mars derived from Mars Global Surveyor gravity, in *Proceedings of the International workshop : Mars atmosphere modelling and observations*, Granada, January 13-15, 2003.
- [47] Smith, M.D., J. C. Pearl, B. J. Conrath, and P. R. Christensen, Thermal Emission Spectrometer results : Mars atmospheric thermal structure and aerosol distribution, *J. Geophys. Res.*, vol. 106, pp. 23929-23945, 2001.
- [48] Tapley, B. D., S. Bettadpur, J. C. Ries, P. F. Thompson and M. M. Watkins, GRACE measurements of mass variability in the Earth system, *Science*, vol. 305, pp. 503-506, doi : 10.1126/science.1099192, 2004.
- [49] Tarantola, A., and B. Valette, Inverse problem = Quest for information, *J. Geophys. Res.*, vol. 50, pp. 159-170, 1982.
- [50] Tyler, G. L., G. Balmino, et al., Radio science investigations with Mars Observer, *J. Geophys. Res.*, vol. 97(E5), pp. 7759-7779, doi10.1029/92JE00513, 1992.
- [51] Van den Acker, E., T. Van Hoolst, O. de Viron, P. Defraigne, F. Forget, F. Hourdin, and V. Dehant, Influence of the winds and of the CO_2 mass exchange between the atmosphere and the polar ice caps on Mars' rotation, *J. Geophys. Res.*, vol. 107, 2002.
- [52] Van Hoolst, T., V. Dehant, and P. Defraigne, Chandler Wobble and Free Core Nutation for Mars, *Planet. Space Sci.*, vol. 48(12-14), pp. 1145-1151, 2000.
- [53] Vienne, J., J.-P. Barriot, P. Rosenblatt, M. Yseboodt, J. Duron and V. Dehant, Numerical simulations of the Netatterrisseur Ionosphere and Geodesy Experiment (NEIGE) : landing site positions determination from Doppler tracking between an orbiter and atterrisseurs, in *ESA SP-544 : Planetary Probe Atmospheric Entry and Descent Trajectory Analysis and Science*, pp. 351-355, 2004.
- [54] Yoder, C. F., J. G. Williams, J. O. Dickey, B. E. Schutz, R. J. Eanes, and B. D. Tapley, Secular variation of Earth's gravitational harmonic J_2

- coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation, *Nature*, vol. 303, pp. 757-762, 1983.
- [55] Yoder, C. F., and E. M. Standish, Martian precession and rotation from Viking atterrisseur range data, *J. Geophys. Res.*, vol. 102, pp. 4065-4080, 1997.
- [56] Yoder, C. F., A. S. Konopliv, D. N. Yuan, E. M. Standish, and W. M. Folkner, Fluid core size of Mars from detection of the solar tide, *Science*, vol. 300, pp. 299-303, doi : 10.1126/science.1079645, 2003.
- [57] Yseboodt, M., J.-P. Barriot and V. Dehant, Analytical modeling of the Doppler tracking between a lander and a Mars orbiter in terms of rotational dynamics, *J. Geophys. Res.*, vol. 108(E7), 5076, doi : 10.1029/2003JE002045, 2003.

Annexe A

Approche dynamique de la rotation

La rotation martienne peut aussi être modélisée par des équations basées sur la théorie d'Euler pour Mars considérée comme un corps ellipsoïdal rigide. On obtient alors le mouvement de l'axe instantané de rotation dans un référentiel lié au corps.

Modélisation pour Mars rigide

Dans un premier temps, on applique le théorème du moment cinétique $\vec{H}$ qui donne les équations régissant la rotation de Mars. Elles permettent une description de la réponse en rotation de la planète à un moment de force $\vec{L}$ dans un repère inertiel dont les axes sont aussi axes principaux d'inertie du système :

$$\dot{\vec{H}} = \vec{L} \quad (\text{A.1})$$

Dans le référentiel tournant lié au corps, on obtient :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{L} \quad (\text{A.2})$$

avec $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ le vecteur instantané de rotation par rapport au repère inertiel. Or on sait que $\vec{H} = I.\vec{\omega}$, avec I le tenseur d'inertie défini par :

$$\begin{cases} I_{ij} = I = \iiint_V X_i.X_j dm & \text{moment d'inertie, nul pour } i \neq j \\ I_{11} = A = \iiint_V (Y^2 + Z^2) dm & \text{moment d'inertie équatorial} \\ I_{22} = B = \iiint_V (Z^2 + X^2) dm & \text{moment d'inertie équatorial} \\ I_{33} = C = \iiint_V (X^2 + Y^2) dm & \text{moment d'inertie polaire} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

d'où le modèle d'équation pour Mars rigide :

$$\frac{d(I.\vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \wedge (I.\vec{\omega}) = \vec{L} \quad (\text{A.4})$$

Il est généralement admis que $\vec{\omega}$ est assez proche d'un vecteur de rotation moyen de sorte qu'on peut écrire :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

avec $\Omega = LOD$ la vitesse de rotation moyenne. m_1 et m_2 caractérisent l'écart dynamique polaire (dans le repère lié au corps) et m_3 l'écart dynamique équatorial par rapport à cette rotation moyenne ($\Delta LOD / LOD$).

Annexe B

Le potentiel gravitationnel

B.1 Polynômes et harmoniques sphériques

Le potentiel gravitationnel d'une planète peut être mathématiquement développé en harmoniques sphériques.

B.1.1 Définition en coordonnées cartésiennes

En effet, si on se place dans un repère euclidien de l'espace à trois dimensions où tout point M est repéré indifféremment par ses coordonnées

rectangulaires $\left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right|$ ou sphériques $\left| \begin{array}{c} r \\ \lambda \\ \varphi \end{array} \right|$ (λ est une longitude, φ une latitude).

Le passage de l'un des systèmes à l'autre se retrouve grâce à la projection des coordonnées sphériques sur les vecteurs fixes :

$$\left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{array} \right|$$

On appelle polynôme harmonique d'ordre n à trois variables un polynôme Π_n de degré n fonction de x, y, z homogène et vérifiant l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial z^2} = 0$$

B.1.2 Définition en coordonnées sphériques

En se référant à la définition, il est possible d'exprimer Π_n en fonction de (r, λ, φ) sous la forme :

$$\Pi_n(r, \lambda, \varphi) = r^n S_n(\lambda, \varphi)$$

En coordonnées sphériques, l'équation de Laplace vérifiée par Π_n s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Pi_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \Pi_n}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial \lambda^2} = 0$$

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par S_n est ainsi :

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial S_n}{\partial \varphi} \right) + n(n+1) S_n = 0 \quad (\text{B.1})$$

Par définition, S_n est dite fonction harmonique sphérique d'ordre n .

B.2 Attraction gravitationnelle et potentiel

B.2.1 Cas d'un corps ponctuel

Dans le cas d'une force créée par la planète Mars sphérique (de masse m_M) constituée de couches concentriques homogènes, une particule S de masse m_S subit une force $\vec{F}$ créée par la masse centrale m_M située en O . Son expression est donnée par la loi de Newton (G est la constante de gravitation universelle) :

$$\vec{F} = -G m_S m_M \frac{\overrightarrow{OS}}{\|\overrightarrow{OS}\|^3}$$

La fonction de force ¹ (ou *potentiel*) associée à $\vec{F}$ est

$$\mathcal{U} = \mu \frac{m_S}{\|\overrightarrow{OS}\|} \quad (\text{B.2})$$

avec $\mu = G.m_M$.

¹définie sans signe '-'

Dans toute la suite, la particule S , assimilée à un satellite, aura une masse unité.

Outre l'avantage de simplifier les écritures, cette convention permet d'obtenir directement les expressions utilisées dans les équations de la dynamique (i.e. les accélérations).

B.2.2 Cas d'un corps étendu

On note le volume V et la masse M .

Par analogie avec ce qui précède, le potentiel créé en un point S (à l'extérieur de Mars) par un point P de Mars de masse dm est égal à :

$$d\mathcal{U} = G \frac{dm}{\rho}$$

avec $\rho = ||\overrightarrow{PS}||$.

Le potentiel créé en S par l'ensemble des points de Mars est ainsi :

$$\mathcal{U} = G \iiint_V \frac{dm}{\rho} \quad (\text{B.3})$$

Notations :

En considérant que le centre de Mars² se trouve en O , on définit :

$$\begin{aligned} \rho &= ||\overrightarrow{PS}|| \\ r_P &= ||\overrightarrow{OP}|| \\ r &= ||\overrightarrow{OS}|| \\ \psi &= \widehat{(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OP})} \end{aligned}$$

Le satellite est repéré indifféremment par ses coordonnées cartésiennes $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$,

ou sphériques $\begin{vmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{vmatrix}$.

²centre de masse dynamique, ou barycentre du système Mars, car c'est par rapport à lui qu'est repérée la position du satellite

De même, les coordonnées du point d'intégration P sont cartésiennes $\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$ ou sphériques $\begin{vmatrix} r_P \\ \lambda_P \\ \varphi_P \end{vmatrix}$.

A l'aide des polynômes de Legendre, P_l , on peut écrire :

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{G}{r} \iiint_V \left(1 + \sum_{l \geq 1} \left(\frac{r_P}{r} \right)^l P_l(\cos \psi) \right) dm \\ &= U_0 + \sum_{l \geq 1} U_l \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2.3 Calcul des premiers termes

Calcul de U_0

Il est immédiat que le terme central s'écrit :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{G}{r} \iiint_V dm \\ U_0 &= \frac{GM}{r} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Calcul de U_1

$$U_1 = \frac{G}{r} \iiint_V \frac{r_P}{r} \cos \psi dm$$

Or $\cos \psi = \frac{xX+yY+zZ}{rr_P}$ d'où

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{G}{r^3} \iiint_V (xX + yY + zZ) dm \\ &= \frac{G}{r^3} \left(x \iiint_V X dm + y \iiint_V Y dm + z \iiint_V Z dm \right) \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant l'origine au centre de gravité, on a :

$$U_1 = 0 \quad (\text{B.6})$$

Remarque : Si l'origine du repère n'est pas au centre de masse, le degré un du développement du potentiel donne accès à la position de ce centre.

B.2.4 Calcul de U_2

On a successivement :

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{G}{r} \iiint_V \left(\frac{r_P}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos \psi^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{G}{r^3} \iiint_V \left(\frac{3(xX + yY + zZ)^2}{2r^2} - \frac{1}{2} r_P^2 \right) dm \text{ avec } r_P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

Si les axes du repère sont aussi les axes principaux d'inertie, $\int XY dm = \int YZ dm = \int ZX dm = 0$, et U_2 s'écrit U_2^0 .

$$\begin{aligned} U_2^0 &= \frac{G}{r^3} \left(\left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \iiint_V X^2 dm \right. \\ &\quad + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \iiint_V Y^2 dm \\ &\quad \left. + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \iiint_V Z^2 dm \right) \end{aligned}$$

On définit maintenant les quantités suivantes :

$$\begin{cases} I = \iiint_V r_p^2 dm & \text{moment d'inertie} \\ I_{11} = A = \iiint_V (Y^2 + Z^2) dm & \text{moment d'inertie équatorial} \\ I_{22} = B = \iiint_V (Z^2 + X^2) dm & \text{moment d'inertie équatorial} \\ I_{33} = C = \iiint_V (X^2 + Y^2) dm & \text{moment d'inertie polaire} \end{cases}$$

Remarque importante :

$$2I = A + B + C$$

on a ainsi :

$$\begin{aligned} U_2^0 &= \frac{G}{r^3} \left(\left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) (I - A) + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) (I - B) + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) (I - C) \right) \\ &= \frac{G}{r^3} \left(\frac{1}{2} (A + B + C) - \frac{3}{2r^2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2) \right) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} U_2^0 &= \frac{G}{r^3} \left(\frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{3}{2r^2}(Ar^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + Br^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + Cr^2 \sin^2 \varphi) \right) \\ &= \frac{G}{r^3} \left(\left(C - \frac{A+B}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) - \frac{3}{4}(A - B) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right) \end{aligned}$$

Dans le cas d'une symétrie de révolution, on a $A = B$, d'où :

$$U_2^0 = \frac{G}{r^3} (C - A) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right)$$

Conclusion : dans le cas d'une symétrie de révolution, et si les axes sont les axes principaux d'inertie, on a :

$$U_2^0 = -\frac{GM}{r} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 J_2 P_2(\sin \varphi) \quad (\text{B.7})$$

avec $J_2 = \frac{C-A}{MR_0^2}$ (R_0 est le rayon équatorial martien)

B.2.5 Développement en harmoniques sphériques

$P_l(\cos \psi)$ dépend de λ , λ_P , φ , φ_P . L'utilisation de cette formule dans l'expression de U_l permet de réaliser une intégration plus explicite, et donc de séparer l'influence du point P sur la position du satellite S :

$$U_l = \frac{G}{r} \iiint_V \left(\frac{r_P}{r} \right)^l P_l(\cos \psi) dm$$

La formule d'addition des polynômes de Legendre montre qu'il y aura deux sortes de termes lors de l'intégration :

- ceux qui ne dépendent pas de la longitude : les harmoniques zonaux ($m=0$),
- ceux qui en dépendent : les harmoniques tesséraux ($l \neq m$, l et $m \neq 0$) et sectoriaux ($l=m$ et $\neq 0$).

On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} U_l &= \frac{GM}{r^{l+1}} P_l(\sin \varphi) \iiint_V r_P^l P_l(\sin \varphi_P) \frac{dm}{M} \\ &+ 2 \frac{GM}{r^{l+1}} \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(\sin \varphi) \cos(m\lambda) \iiint_V r_P^l P_{l,m}(\sin \varphi_P) \cos(m\lambda_P) \frac{dm}{M} \\ &+ 2 \frac{GM}{r^{l+1}} \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(\sin \varphi) \sin(m\lambda) \iiint_V r_P^l P_{l,m}(\sin \varphi_P) \sin(m\lambda_P) \frac{dm}{M} \end{aligned}$$

L'intégrale

$$\iiint_V r_P^l P_l(\sin \varphi_P) \frac{dm}{M}$$

étant une caractéristique de Mars, on peut poser :

$$I_l = \iiint_V r_P^l P_l(\sin \varphi_P) \frac{dm}{M}$$

De plus, l'intégrale étant homogène à la puissance l d'une longueur, on posera :

$$I_l = -J_l(R_o)^l$$

où R_0 est le rayon équatorial martien³. On retrouve l'expression de U_2^0 pour le degré $l = 2$.

De la même manière, on peut définir ⁴ $C_{l,m}$ et $S_{l,m}$, toujours en faisant en sorte que ces coefficients n'aient pas de dimension :

$$\begin{aligned} (R_o)^l C_{l,m} &= 2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \iiint_V r_P^l P_{l,m}(\sin \varphi_P) \cos(m\lambda_P) \frac{dm}{M} \\ (R_o)^l S_{l,m} &= 2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \iiint_V r_P^l P_{l,m}(\sin \varphi_P) \sin(m\lambda_P) \frac{dm}{M} \end{aligned}$$

C'est le jeu de l'ensemble de ces valeurs qui constitue un modèle de champ. En rassemblant tout ceci, on arrive à :

$$\begin{aligned} U_l &= \frac{\mu}{r^{l+1}} P_l(\sin \varphi) (-J_l(R_o)^l) + \frac{\mu}{r^{l+1}} \sum_{m=1}^l P_{l,m}(\sin \varphi) \cos(m\lambda) (R_o)^l C_{l,m} \\ &\quad + \frac{\mu}{r^{l+1}} \sum_{m=1}^l P_{l,m}(\sin \varphi) \sin(m\lambda) (R_o)^l S_{l,m} \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure d'écrire le développement du potentiel martien en harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} \left(1 - \sum_{l \geq 2} J_l \left(\frac{R_0}{r} \right)^l P_l(\sin \varphi) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{R_0}{r} \right)^l P_{l,m}(\sin \varphi) (C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m\lambda)) \right) \end{aligned} \quad (B.8)$$

Sous cette forme, les harmoniques tesséraux, sectoriaux et zonaux se lisent clairement.

En notant que :

³on aurait pu choisir toute autre grandeur caractéristique

⁴cela ne coûte rien d'inclure $2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$ dans les coefficients, et cela dans l'écriture finale

- $P_{l,0} = P_l$
- l'on peut poser $C_{l,0} = -J_l$ et $S_{l,0} = 0$
- l'on peut poser $\bar{C}_{l,0} = -\sqrt{2l+1}J_l$ avec $\bar{C}_{l,0}$ le coefficient de Stokes mais normalisé
- $U_1 = 0$

on aboutit à une formulation plus synthétique :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_0}{r} \right)^l P_{l,m}(\sin \varphi) (C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m\lambda)) \right] \quad (\text{B.9})$$

avec

- r est la distance entre le centre de Mars et le satellite
- λ est la longitude du satellite
- φ sa latitude
- $\mu = G.M$ où G est la constante de gravitation universelle et M la masse de Mars⁵.
- l est appelé le *degré* du développement,
- et m son *ordre*.
- R_0 est le rayon équatorial de Mars⁶.

⁵ $\frac{G.M}{r}$ le potentiel du terme de corps central donné pour $l = 0$

⁶ mieux dit : R_0 est le rayon équatorial de l'ellipsoïde conventionnel de référence

Annexe C

Coefficients de Stokes et moments d'inertie

Les coefficients de Stokes de degré 2 du développement du potentiel peuvent être directement reliés aux moments d'inertie de la planète. Les relations existantes entre les coefficients du potentiel martien et les moments d'inertie découlent simplement de la définition du potentiel en un point extérieur à la masse étendue. L'intégration des principaux termes¹ permet d'exprimer ces coefficients de degré deux en termes de moments et produits d'inertie.

Les relations entre les coefficients de degré 2 et les moments d'inertie sont :

$$C_{20} = -\frac{1}{MR_0^2}(I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2}) \quad (\text{C.1})$$

$$C_{21} = -\frac{I_{13}}{MR_0^2} \quad (\text{C.2})$$

$$S_{21} = -\frac{I_{23}}{MR_0^2} \quad (\text{C.3})$$

$$C_{22} = \frac{1}{4MR_0^2}(I_{22} - I_{11}) \quad (\text{C.4})$$

$$S_{22} = -\frac{I_{12}}{2MR_0^2} \quad (\text{C.5})$$

avec I_{13} , I_{23} et I_{12} les produits d'inertie. L'axe z du repère dans lequel on exprime ces relations, souvent choisi comme l'axe instantané de rotation, se trouve être très proche de l'axe principal d'inertie.

¹voir calcul des moments principaux en annexe A

Réciproquement, on peut tout aussi bien exprimer les moments d'inertie en fonction des coefficients de Stokes de la manière suivante (voir *Gross, 2000*) :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{11} = A + \Delta I_{11} = \frac{1}{3}T_r(I) + \frac{\sqrt{5}}{3}MR_0^2\bar{C}_{20} - \sqrt{\frac{5}{3}}MR_0^2\bar{C}_{22} \\ I_{22} = B + \Delta I_{22} = \frac{1}{3}T_r(I) + \frac{\sqrt{5}}{3}MR_0^2\bar{C}_{20} + \sqrt{\frac{5}{3}}MR_0^2\bar{C}_{22} \\ I_{33} = C + \Delta I_{33} = \frac{1}{3}T_r(I) - \frac{2}{3}\sqrt{5}MR_0^2\bar{C}_{20} \\ I_{12} = \Delta I_{12} = -\sqrt{\frac{5}{3}}MR_0^2\bar{S}_{22} \\ I_{13} = \Delta I_{13} = -\sqrt{\frac{5}{3}}MR_0^2\bar{C}_{21} \\ I_{23} = \Delta I_{23} = -\sqrt{\frac{5}{3}}MR_0^2\bar{S}_{21} \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

avec $T_r(I)$ est la trace du tenseur d'inertie noté I . En ce qui concerne plus précisément les objectifs scientifiques de l'expérience NEIGE, il est important de souligner que le moment d'inertie polaire C est une contrainte essentielle pour les modèles d'intérieur de Mars (voir paragraphe 1.3.2). Malheureusement, le moment d'inertie ne peut pas être directement déduit des coefficients de degré 2. Des hypothèses et des informations complémentaires sont nécessaires comme de supposer la planète en équilibre hydrostatique. D'un autre côté, la mesure de la précession consécutive au couple externe s'exerçant sur le bourrelet équatorial peut donner une estimation du moment d'inertie.

Annexe D

Coefficients de Stokes et rotation

Longueur du jour

La contribution atmosphérique aux variations saisonnières de la longueur du jour est caractérisée par une fonction des variations du moment d'inertie polaire de sorte qu'on a typiquement :

$$m_3 = -\frac{\Delta LOD}{LOD} = \frac{1}{3}\Delta Tr(I)(t) - \frac{2}{3}\sqrt{5}MR_0^2\Delta\bar{C}_{20}(t) \quad (D.1)$$

Or la masse est conservée donc $\Delta Tr(I)(t) = 0$. Finalement, on obtient le lien entre la rotation propre et l'harmonique zonal de degré 2 qui s'écrit :

$$\frac{\Delta LOD}{LOD} = \frac{2}{3}MR_0^2\sqrt{5}\Delta\bar{C}_{20} \quad (D.2)$$

Nutation

Dans le paragraphe 1.3.2, on voit que les expressions de F et σ_0 sont eux aussi fonction du moment d'inertie polaire de la planète qui précisément est fonction de $\bar{C}_{20}$. On s'attend donc, dans le cadre de la mission NEIGE, à rencontrer pour F et σ_0 le même type de problème que pour le LOD i.e de fortes corrélations lors d'un ajustement conjoint des harmoniques zonaux de gravité et de la rotation.

Annexe E

Longues périodes sur $\dot{e}$ et $\dot{\omega}$

L'objectif est ici de montrer les étapes qui conduisent le calcul des (plus) longues périodes sur les variations de e et ω induits par les harmoniques zonaux impairs de degrés 3 et 5 i.e $m = 0$. On doit d'abord se donner l'expression du potentiel pour les harmoniques zonaux impairs de degrés 3 et 5 tel qu'on ne prend en compte **que les perturbations de plus longue période**.

D'après l'expression de l'argument angulaire de perturbation orbitale (2.9), l et m étant fixés, l et m étant fixés, l'indice p varie de 0 à l et l'indice q est tel que $l - 2p + q = 0$ (hypothèse des longues périodes) avec $\psi_{l0pq} = (l - 2p)\omega$.

Pour $l = 3$, on a :

l	m	p	$q = 2p - l$
3	0	3	3
3	0	2	1
3	0	1	-1
3	0	0	-3

Pour $l = 5$, on a :

l	m	p	$q = 2p - l$
5	0	5	5
5	0	4	3
5	0	3	1
5	0	2	-1
5	0	1	-3
5	0	0	-5

La fonction de force inhérente s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{LP} = & \mu \frac{R_0^3}{a^4} \sum_{p=0}^3 F_{3,0,p} G_{3,p,2p-3} \sin [(3-2p)\omega] C_{30} + \\ & \mu \frac{R_0^5}{a^6} \sum_{p=0}^5 F_{5,0,p} G_{5,p,2p-5} \sin [(5-2p)\omega] C_{50} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Comme on ne cherche que la période la plus longue, dans ce cas précis, la fréquence orbitale est donc définie par $\dot{\psi}_{l0pq} = \pm \dot{\omega}$.

On développe donc chacune des deux somme et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{LP} = & \mu \frac{R_0^3}{a^4} [F_{301} G_{31-1} \sin \omega + F_{302} G_{321} \sin (-\omega)] C_{30} + \\ & \mu \frac{R_0^5}{a^6} [F_{502} G_{52-1} \sin \omega + F_{503} G_{531} \sin (-\omega)] C_{50} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Par ailleurs, on a les relations suivantes [Kaula, 1966] :

$F_{301} = -F_{302}$, $F_{502} = -F_{503}$, $G_{31-1} = G_{321}$ et $G_{52-1} = G_{531}$.

La fonction de force qu'on va substituer dans l'expression des variations de e (équation (2.19)) et ω (équation (2.22)) est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{LP} = & \mu \frac{R_0^3}{a^4} [-2F_{302} G_{321} \sin \omega] C_{30} + \\ & \mu \frac{R_0^5}{a^6} [2F_{502} G_{531} \sin \omega] C_{50} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

L'équation de Lagrange (2.19) pour l'excentricité peut maintenant s'écrire :

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{LP} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}_{LP}}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}_{LP}}{\partial M}$$

Mais $\mathcal{R}_{LP}$, équation (E.3), n'est fonction que de i , par les fonctions F_{lmpq} , et de e , par les fonctions G_{lpq} . On a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{LP}}{\partial M} = 0$$

D'où une nouvelle expression pour le terme longue période sur les variations de e :

$$\begin{aligned} \left. \frac{de}{dt} \right|_{LP} = & \frac{2n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 [F_{302} C_{30} \\ & -2 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 F_{502} \frac{1+\frac{3}{4}e^2}{(1-e^2)^2} C_{50}] \cos \omega \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

L'équation de Lagrange (2.22) pour l'argument du périée peut maintenant s'écrire :

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{LP} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}_{LP}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}_{LP}}{\partial i} \quad (\text{E.5})$$

En substituant $\mathcal{R}_{LP}$ par son développement donné par l'équation (E.3), on obtient une nouvelle expression pour le terme longue période sur les variations de ω :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{LP} = & -\frac{2n}{e(1-e^2)^3} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \left[\left(F_{302} (1+4e^2) - e^2 \cot i \dot{F}_{302} \right) C_{30} \right. \\ & \left. - \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{F_{502} (2 + \frac{41}{2}e^2 + 9e^4) - e^2 \cot i \dot{F}_{502} (2 + \frac{3}{2}e^2)}{(1-e^2)^2} C_{50} \right] \sin \omega \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Annexe F

Fonctions d'inclinaison et d'excentricité

On rappelle ici que les fonctions d'excentricité sont des développements finis en e . Les calculs sont donc aussi valables pour de très grand e ($e < 1$). Ne sont répertoriées ici que les fonctions d'inclinaison et d'excentricité, et dérivées inhérentes, qui sont utiles au calcul des termes séculaires et longue période sur les variations des éléments orbitaux induites par les harmoniques zonaux de bas degré pairs ($l = 2, 4$) et impairs ($l = 3, 5$). D'après *Kaula* [1966], on a :

$$F_{201} = \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \quad (\text{F.1})$$

$$\dot{F}_{201} = \frac{3}{2} \sin i \cos i \quad (\text{F.2})$$

$$G_{210} = \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{F.3})$$

$$\dot{G}_{210} = \frac{3e}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (\text{F.4})$$

$$F_{402} = \frac{105}{64} \sin^4 i - \frac{15}{8} \sin^2 i + \frac{3}{8} \quad (\text{F.5})$$

$$\dot{F}_{402} = \frac{105}{16} \sin^3 i \cos i - \frac{15}{4} \sin i \cos i \quad (\text{F.6})$$

$$G_{420} = \frac{1 + \frac{3}{2}e^2}{(1 - e^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (\text{F.7})$$

$$\dot{G}_{420} = \frac{10e + \frac{15}{2}e^3}{(1 - e^2)^{\frac{9}{2}}} \quad (\text{F.8})$$

$$F_{302} = -\frac{15}{16}\sin^3 i + \frac{3}{4}\sin i \quad (\text{F.9})$$

$$\dot{F}_{302} = \left(-\frac{45}{16}\sin^2 i + \frac{3}{4}\right) \cdot \cos i \quad (\text{F.10})$$

$$G_{321} = \frac{e}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (\text{F.11})$$

$$\dot{G}_{321} = \frac{1 + 4e^2}{(1 - e^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (\text{F.12})$$

$$F_{502} = \frac{45}{128}\sin i (8 - 28\sin^2 i + 21\sin^4 i) \quad (\text{F.13})$$

$$\dot{F}_{502} = \frac{45}{128}\cos i (8 - 84\sin^2 i + 105\sin^4 i) \quad (\text{F.14})$$

$$G_{531} = \frac{2e + \frac{3}{2}e^3}{(1 - e^2)^{\frac{9}{2}}} \quad (\text{F.15})$$

$$\dot{G}_{531} = \frac{2 + \frac{41}{2}e^2 + 9e^4}{(1 - e^2)^{\frac{11}{2}}} \quad (\text{F.16})$$

Annexe G

Autre écriture des variations des éléments orbitaux

On reprend les équations (3.7) à (3.8) et (3.11) à (3.14) décrivant les variations des éléments orbitaux. On fait l'hypothèse que $e^2 \approx 0$ et $\cot i \approx \cos i$ car on suppose que $\sin i \approx 1$. On rappelle que $\bar{J}_l = -\frac{C_{l0}}{\sqrt{2l+1}}$. Si on substitue les fonctions d'inclinaison et leurs dérivées par leur expression développée en annexe F dans chacune des expressions, on obtient :

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{LP} = n \left[\frac{3}{8} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \sqrt{7} \bar{J}_3 + \frac{45}{32} \left(\frac{R_0}{a} \right)^5 \sqrt{11} \bar{J}_5 \right] \cos \omega \quad (\text{G.1})$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{LP} = -ne \cos i \left[\frac{3}{8} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \sqrt{7} \bar{J}_3 + \frac{45}{32} \left(\frac{R_0}{a} \right)^5 \sqrt{11} \bar{J}_5 \right] \cos \omega \quad (\text{G.2})$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s = -n \cos i \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \sqrt{5} \bar{J}_2 + \frac{45}{16} \left(\frac{R_0}{a} \right)^4 \sqrt{9} \bar{J}_4 \right] \quad (\text{G.3})$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{LP} = -ne \cos i \left[\frac{33}{8} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \sqrt{7} \bar{J}_3 + \frac{1305}{32} \left(\frac{R_0}{a} \right)^5 \sqrt{11} \bar{J}_5 \right] \sin \omega \quad (\text{G.4})$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s = -n \left[\frac{3}{4} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \sqrt{5} \bar{J}_2 + \frac{45}{32} \left(\frac{R_0}{a} \right)^4 \sqrt{9} \bar{J}_4 \right] \quad (\text{G.5})$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{LP} = -\frac{n}{e} \left[\frac{3}{8} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 \sqrt{7} \bar{J}_3 + \frac{45}{32} \left(\frac{R_0}{a} \right)^5 \sqrt{11} \bar{J}_5 \right] \sin \omega \quad (\text{G.6})$$

Annexe H

Tesséraux et sectoriaux : part longue période

Cette partie ne va donc concerner que les effets induits par les harmoniques tesséraux et sectoriaux de degré 2 du potentiel gravitationnel (soient C_{21} , S_{21} , C_{22} , S_{22}) sur les variations des éléments orbitaux d'une sonde autour de Mars.

Dans un premier temps, il est nécessaire d'avoir une idée de la fréquence de perturbation orbitale qui ensuite permet via les indices $2mpq$ de développer correctement la fonction de force perturbatrice $\mathcal{R}$. Ici aussi, on ne regarde que les plus longues périodes donc celles dominées par $\dot{\Omega}$ car $m \neq 0$. D'après l'expression de l'argument angulaire de perturbation orbitale (2.9), l et m étant fixés, on a :

$$\begin{cases} l - 2p = 0 \\ l - 2p + q = 0 \\ l = 2 \\ m = 1, 2 \end{cases} \implies \begin{array}{l} l \text{ est pair} \\ \\ \\ \text{harmoniques tesseraux} \end{array} \quad (\text{H.1})$$

Donc :

$$\begin{cases} l = 2 \\ m = 1, 2 \\ p = 1 \\ q = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} \text{harmoniques tesseraux} \\ \\ \\ \text{effets d'ordre 0 en } e \end{array} \quad (\text{H.2})$$

Finalement la fréquence de perturbation orbitale, induite par les harmoniques tesséraux, s'écrit :

$$\psi_{2m10} = m(\Omega - \theta) \quad (\text{H.3})$$

D'après l'équation (2.4), on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{2110} = C_{21} \sin(\Omega - \theta) - S_{21} \cos(\Omega - \theta) \\ \mathcal{S}_{2210} = C_{21} \cos 2(\Omega - \theta) + S_{21} \sin 2(\Omega - \theta) \end{cases} \quad (\text{H.4})$$

et le potentiel perturbateur s'écrit alors :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{R_0} \left(\frac{R_0}{a} \right)^3 G_{210} [F_{211} \cdot S_{2110} + F_{221} \cdot S_{2210}] \quad (\text{H.5})$$

On pose $\chi = \Omega - \theta$. Les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (\text{H.6})$$

$$\frac{de}{dt} = 0 \quad (\text{H.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = & \frac{3n \cos i}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [C_{21} \cos \chi + S_{21} \sin \chi \\ & - 2 \tan i (-C_{22} \sin 2\chi + S_{22} \cos 2\chi)] \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = & \frac{3n}{2(1-e^2)^2 \sin i} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [(2 \sin^2 i - 1) (C_{21} \sin \chi \\ & - S_{21} \cos \chi) + 2 \sin i \cos i (C_{22} \cos 2\chi + S_{22} \sin 2\chi)] \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & \frac{3n}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [(\cot i - 5 \cos i \sin i) (C_{21} \sin \chi \\ & - S_{21} \cos \chi) - (2 - 5 \sin^2 i) (C_{22} \cos 2\chi + S_{22} \sin 2\chi)] \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & \frac{9n \sin i}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 [\cos i (C_{21} \sin \chi \\ & - S_{21} \cos \chi) - \sin i (C_{22} \cos 2\chi + S_{22} \sin 2\chi)] \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Pour un satellite comme MGS, on considère que $\sin i = 1$ et e nul. De sorte que les équations (H.8) et (H.9) deviennent :

$$\frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{5}{3}} (\bar{C}_{21} \sin \chi - \bar{S}_{21} \cos \chi) \quad (\text{H.12})$$

$$\frac{1}{n} \frac{di}{dt} = 3 \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{5}{12}} (\bar{C}_{22} \sin 2\chi - \bar{S}_{22} \cos 2\chi) \quad (\text{H.13})$$

On comprend alors que les variations temporelles de l'inclinaison de la sonde MGS sont aussi induites par les variations des coefficients de Stokes de degré 2 et ordre 2 alors que les variations temporelles de Ω sont elles en partie à attribuer aux variations des coefficients de Stokes de degré 2 et ordre 1.