

Chapitre 4

LA REPRÉSENTATION SÉMANTIQUE DU NOMBRE : SON DÉVELOPPEMENT ET SES TROUBLES

INTRODUCTION

Dans la vie de tous les jours, nous rencontrons les nombres dans des contextes variés (Fuson, 1992). Dans des contextes non-numériques, ils peuvent servir d'étiquette (par exemple, je prends le bus 72 et je regarde la chaîne de télévision AB3). Dans des contextes numériques, ils peuvent exprimer l'ordinalité (je suis le deuxième enfant de la famille) ou bien la cardinalité (il y a 15 marqueurs dans mon plumier). Ce dernier aspect est primordial et constitue réellement le cœur de la sémantique numérique. Le nombre sert en effet à quantifier un nombre d'éléments (j'ai cinq doigts à une main), d'événements (j'ai sauté trois fois) ou encore un nombre d'unités de mesure (il y a 3 m de ruban). Cette quantification permet aussi de comparer des ensembles (Jules a 7 pommes et Paul en a 3, donc Jules a plus de pommes que Paul), de décomposer des ensembles (j'ai 3 tartines, j'en mangerai 1 ce matin et 2 ce midi) ou de combiner des ensembles (tu as 2 billes et moi j'en ai 4, ensemble on en a 6). Cette représentation de la magnitude du nombre, c'est-à-dire, de la quantité à laquelle il réfère, est donc tout à fait primordiale. Dans ce chapitre, nous tâcherons de comprendre quelle est la nature de la représentation sémantique du nombre, comment celle-ci se développe au cours de l'enfance et, enfin, dans quelle mesure, un déficit au niveau de cette représentation pourrait éventuellement caractériser les enfants dyscalculiques.

1. Unité de Cognition et Développement, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique

UNE REPRÉSENTATION ANALOGIQUE DU NOMBRE

CHEZ LE BÉBÉ

Selon des auteurs comme Gallistel et Gelman (1992), Wynn (1998), ou encore Dehaene (1997), les bébés seraient, dès les premiers mois, capables de se représenter la numérosité et réagiraient à des modifications de numérosité dans des paradigmes d'habituation ou de violation des attentes (voir le chapitre de Rousselle). Leurs capacités de discrimination seraient toutefois limitées. Ils ne pourraient discriminer de manière précise que des petites collections (moins de 4 éléments) et ne percevraient la différence entre deux grandes collections que si celles-ci sont suffisamment distantes numériquement l'une de l'autre. En d'autres termes, leurs performances dépendraient de la taille des ensembles et de la distance numérique entre celles-ci. Ces effets ont été interprétés dans le cadre de modèles supposant une représentation de type analogique de la quantité tel que l'accumulateur (Gallistel et Gelman, 1992). Toutefois, les études portant sur le traitement numérique de collections ont été l'objet de critiques importantes. En effet, dans quasi toutes ces études, la numérosité était confondue avec des variables physiques continues comme la surface occupée par les stimuli, la longueur de leur contour, leur durée etc. (pour une revue, voir, Mix, Huttenlocher & Levine, 2002). Il est donc extrêmement difficile dans ces conditions, de déterminer quel facteur a guidé le comportement du nourrisson. On pourrait ainsi imaginer que les effets rencontrés ne sont pas dus au mécanisme de l'accumulateur numérique mais bien à ceux d'accumulateurs perceptifs codant les variables physiques continues.

CHEZ LE PLUS GRAND ENFANT OU L'ADULTE

Ces problèmes de variables confondues deviennent toutefois caduques dès qu'on propose à l'enfant de traiter non plus des collections mais des nombres symboliques, soit des numéraux verbaux (par exemple, *cinq*) soit des chiffres arabes (5). Pourtant, même avec du matériel symbolique, les temps de comparaison numérique sont curieusement affectés par la taille et la distance entre les nombres. Ainsi, déterminer le plus grand nombre dans la paire 8-9 prend plus de temps que dans la paire 2-9 par exemple (Moyer & Landauer, 1967). En effet, les réponses sont plus rapides si les nombres à traiter sont petits et si la distance numérique entre les deux est grande. Chez l'enfant, cet effet de distance a été observé dès la fin de la maternelle (Sekuler & Mierkiewicz, 1977; Duncan & McFarland, 1980). Cet effet de distance est observé dans la comparaison de paires de chiffres ou de numéraux verbaux (Buckley & Gilman, 1974).

L'observation de ces effets de taille et de distance avec des nombres symboliques a conduit plusieurs auteurs à émettre l'hypothèse suivant laquelle ces nombres seraient représentés non pas de manière discrète et indépendante, mais sous forme d'un continuum analogique. Ainsi, Moyer et Landauer (1967), qui avaient été les premiers à observer l'effet de distance numérique en comparaison de numéraux arabes, proposent que les magnitudes numériques seraient représentées sur un médium analogique de type *ligne numérique*. Dans ce modèle, les représentations numériques seraient d'autant plus

proches sur la ligne numérique qu'elles correspondent à des nombres numériquement proches. Par conséquent, l'effet de distance s'explique aisément en postulant qu'il est d'autant plus aisé de discriminer la grandeur de deux nombres que leurs représentations sont éloignées sur la ligne numérique. Une explication similaire est donnée également dans la perspective du modèle analogique de l'accumulateur proposé par Gallistel et Gelman (1992) : en effet, l'état de l'accumulateur est tout à fait proportionnel à la numérosité qu'il représente. Par conséquent, lorsque deux nombres sont numériquement distants l'un de l'autre, les états correspondant au niveau des accumulateurs le sont aussi et la prise de décision d'un jugement de grandeur est de ce fait plus aisée.

Ces conceptions analogiques de la représentation de la magnitude permettent également de rendre compte de l'effet de taille. Ainsi, dans le modèle de l'accumulateur, la précision des représentations numériques est supposée décroître avec la taille du nombre. En effet, imaginons que devant chaque entité, l'accumulateur se remplisse d'une certaine quantité d'énergie. Il est possible que pour chaque entité comptée, la quantité d'énergie entrant dans l'accumulateur varie légèrement. Par conséquent, plus le nombre considéré est élevé, plus la variation totale de l'état de l'accumulateur risque d'augmenter. Ainsi, la représentation de 4 serait beaucoup plus précise que celle de 12, par exemple. Dès lors, à distance numérique égale, deux petits nombres (par exemple, 4 et 5) sont discriminés plus aisément que deux grands nombres (par exemple, 24 et 25). Dans le modèle de la ligne numérique repris par Dehaene (1992), la précision de la représentation de la magnitude est identique quel que soit le nombre considéré. En revanche, la ligne numérique présenterait une compression croissante avec la taille des nombres. Ainsi, bien que 6-8 et 26-28 soient séparés par la même distance numérique, les représentations des magnitudes correspondant à 6 et 8 seraient plus distantes l'une de l'autre sur la ligne numérique que celles de 26 et 28. En effet, la distance subjective entre les petits nombres (6-8) serait supérieure à celle qui existe entre les grands nombres (26-28), ce qui rendrait la comparaison des premiers plus aisée.

UNE REPRÉSENTATION ORIENTÉE DANS L'ESPACE ?

Par la suite, Dehaene, Bossini et Giraux (1993) feront l'hypothèse supplémentaire d'une orientation spatiale de cette ligne numérique. En effet, dans les tâches de comparaison numérique, les participants qui doivent répondre « plus grand » avec leur main droite sont, globalement, plus rapides que ceux qui doivent répondre « plus petit » avec la main droite (Dehaene, Dupoux & Mehler, 1990). Par ailleurs, lorsqu'un individu doit juger si un chiffre est pair ou impair, il répond plus vite avec la main (ou le côté) droite si le nombre à traiter est grand et avec la main gauche, si le nombre est petit (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993). Cet effet de congruité spatiale (ou SNARC) est interprété par Dehaene et col. (1993) comme le signe d'une orientation dans l'espace de la ligne numérique avec les petits nombres à gauche et les grands nombres à droite. Chez l'enfant, cet effet SNARC a été mis en évidence en 3^{ème} primaire dans une tâche de jugement de parité (Berch, Foley, Hill & McDonough Ryan, 1999). Il est néanmoins possible qu'il soit observable chez des écoliers plus jeunes si

une tâche moins complexe que le jugement de parité était utilisée. On peut cependant se poser la question de l'interprétation de cet effet SNARC. Ainsi, si la ligne numérique est présente dès le départ chez l'enfant, son orientation devrait faire partie de ses caractéristiques initiales. Or, il apparaît que cette orientation dépend de conventions culturelles telles que le sens de la lecture (puisque une tendance à une association inverse a été observée chez des personnes de culture arabe ; Dehaene *et al.*, 1993) et qu'elle peut être modifiée par des instructions expérimentales (Bächtold, Baumüller & Brugger, 1998). Enfin, cet effet se retrouve également lors du traitement de matériel non numérique ordonné comme les lettres de l'alphabet ou les mois de l'année (Gevers, Reynvoet & Fias, 2003). En définitive, cet effet pourrait refléter, non pas l'orientation intrinsèque de la ligne numérique, mais bien l'orientation classique qu'une culture se donne pour représenter les nombres (ou d'autres séries ordonnées linéaires) dans l'espace externe, comme dans les calendriers, les lignes du temps, les graphiques, les outils de mesures...

Quelle soit orientée de gauche à droite ou non, la plupart d'entre nous n'avons pas conscience d'activer une représentation de type accumulateur ou ligne numérique lorsque nous devons, par exemple, sélectionner le plus grand de deux chiffres. Certaines personnes, en revanche, déclarent activer, de manière automatique, une représentation visuo-spatiale des nombres dès la présentation d'un chiffre, d'un numéral verbal ou même dès qu'ils pensent à un nombre (voir Galton, 1880a & b pour les premières descriptions). Certaines de ces représentations sont simples, comme les faces d'un domino, mais d'autres sont très complexes, par exemple, un ruban présentant des courbes et des variations de couleur, sur lequel les nombres sont alignés. L'analyse précise du comportement de deux participants adultes présentant de telles représentations confirme le caractère obligatoire et reproductible de l'activation de ces représentations (Seron, Pesenti, Noël, Deloche & Cornet, 1992). Aucune donnée concernant ce phénomène n'existe à l'heure actuelle chez l'enfant. Il serait pourtant intéressant de savoir si ces représentations existent, à quel âge elles apparaissent, si elles sont plus ou moins fréquentes que chez l'adulte, si elles sont stables au cours du temps et enfin si elles sont utilisées par l'enfant dans ses apprentissages numériques, notamment au niveau du calcul.

UNE ACTIVATION AUTOMATIQUE DE LA SÉMANTIQUE DES NOMBRES ?

Chez l'adulte, plusieurs observations suggèrent que la représentation de la magnitude est automatiquement activée à partir de la présentation d'un nombre et ce, même lorsque la tâche exige seulement un traitement de la forme physique du stimulus. Ainsi, lorsqu'on demande à un individu d'indiquer si deux chiffres sont physiquement identiques ou pas, les réponses sont plus lentes lorsque les deux chiffres différents sont proches sur le plan numérique que s'il s'agit de nombres distants l'un de l'autre (2-3 versus 2-7, par exemple, Dehaene & Akhavein, 1995). Si maintenant la tâche est de déterminer le nombre de symboles dans une séquence (par exemple, répondre « quatre » devant 3333), les individus sont plus lents lorsque la réponse demandée ne

correspond pas à l'identité des chiffres (3333 versus 4444). En outre, cette interférence est d'autant plus importante que la distance entre la réponse et l'identité des chiffres est petite (par exemple, 3333 versus 8888; Pavese & Umiltà, 1998). Ces différents effets suggèrent que la grandeur numérique exprimée par le chiffre est automatiquement activée même lorsqu'elle n'est pas nécessaire pour la tâche en cours.

Quelques études ont posé la question de savoir quand cette activation automatique de la numérosité apparaissait chez l'enfant. La première d'entre elles a été menée par Duncan et McFarland (1980). Ces auteurs observent que, dès 5 ans, les enfants sont sensibles à la distance numérique entre deux chiffres lorsqu'il s'agit de juger s'ils sont identiques ou différents. Des indications d'activation automatique précoce de la numérosité sont également rapportées par Rubinsten, Henik, Berger et Shahar-Shalev (2002). Ces auteurs utilisent un paradigme de type Stroop dans lequel des paires de chiffres sont présentées dans des tailles physiques différentes. Dans les cas dits congruents, le chiffre qui a la plus grande valeur numérique apparaît en grand (2 – 7), dans les cas incongruents, c'est le contraire (2-7). Ces stimuli sont présentés à des enfants qui doivent repérer le chiffre qui a la plus grande taille physique, sans se soucier de la dimension numérique. En début de première année (CP), la performance des enfants est identique dans les conditions congruente et incongruente. Mais dès la fin de la première primaire, les jugements sont plus rapides dans la condition congruente, ce qui suggère que l'information numérique non pertinente a été traitée de manière automatique par les écoliers. Le même paradigme avait été utilisé par Girelli, Lucangeli et Butterworth (2000). Ces auteurs n'avaient pu observer aucun effet de congruité en première année mais bien en 3^{ème} et 5^{ème} années. Deux raisons pourraient expliquer les différences de résultats obtenus par Rubinsten et col. et Girelli et col. D'une part, il se pourrait que l'activation automatique de la numérosité n'apparaisse qu'en fin de 1^{ère} primaire, ce qui expliquerait peut-être l'incapacité de Girelli et col. à observer ces effets chez des enfants de milieu de première année. D'autre part, les stimuli de Girelli et col. présentaient des tailles physiques plus contrastées que ceux de Rubinsten et col. Par conséquent, la différence de taille physique était plus facilement repérée par les enfants dans l'étude de Girelli. Or, dans un paradigme de ce type, l'information numérique ne peut influencer la réponse du participant que si elle est activée avant le moment de prise de décision (Schwarz & Ischebeck, 2003). Si cette prise de décision est trop rapide parce que les deux chiffres sont présentés dans des tailles très contrastées, la dimension numérique ne peut pas interférer parce qu'elle arrive trop tard dans le processus. En conclusion, il apparaît que très tôt, probablement autour de la fin de première primaire, la présentation de chiffres arabes déclenche de manière automatique l'activation de la grandeur numérique correspondante.

En collaboration avec Mussolin (2002), nous avons récemment montré (à nouveau avec un paradigme de type Stroop) que les nombres à un ou à deux chiffres inférieurs à 50 activaient automatiquement le traitement de la magnitude numérique correspondante en 2^e, 3^e et 4^e primaires mais que des nombres à deux chiffres supérieurs à 50 ne montraient une activation automatique qu'à partir de la 3^e année primaire.

UNE REPRÉSENTATION EN BASE 10 DE LA QUANTITÉ ?

DOIT-ON FAIRE L'HYPOTHÈSE D'UNE REPRÉSENTATION DÉCIMALE DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES ?

Pour Dehaene (1992) ou encore Gallistel et Gelman (1992), la représentation analogique des nombres sous forme d'accumulateur ou de ligne numérique, est la seule véritable représentation sémantique du nombre. Celle-ci est activée de la même façon suite à la présentation de numéraux verbaux ou arabes ou même de collections. A l'appui de cette hypothèse, Dehaene et ses collaborateurs ont montré, au moyen de techniques d'imagerie cérébrale (résonance magnétique fonctionnelle et potentiels évoqués) que les effets de distance étaient indépendants de la notation utilisée pour présenter les cibles. Ainsi, dans une tâche de comparaison de nombres de 1 à 9 au standard 5, ou de nombres à deux chiffres au standard 65, Pinel et ses collègues (Pinel, Le Clec'H, van de Moortele, Le Bihan & Dehaene, 1999; Pinel, Dehaene, Rivière, & Le Bihan, 2001) observent que les zones cérébrales dont l'activation varie en fonction de la distance cible-standard (essentiellement des régions pariétales) ne sont pas affectées par la notation utilisée pour présenter les cibles (code arabe ou verbal écrit). Ces résultats seraient donc en faveur de l'hypothèse d'une représentation sémantique unique activée quel que soit le format de présentation des nombres. Toutefois, ces résultats ne disent rien quant à la nature de la représentation en question. Si plusieurs auteurs font l'hypothèse d'une représentation analogique de la quantité, d'autres modélisations sont présentes dans la littérature. Ainsi, par exemple, McCloskey, Caramazza et Basili (1985) supposent également une représentation sémantique unique indépendante du format de présentation des nombres, mais, vu que nos codes numériques verbaux et arabes s'organisent autour de la base 10, celle-ci aurait une structure décimale. Par exemple, la représentation sémantique de 5030 ou de *cinq mille trente* serait du type $< 5 > \times 10 \exp 3$, $< 3 > \times 10 \exp 1$.

Dans la littérature adulte, quelques études ont cherché à tester l'existence d'une telle représentation décimale. Ainsi, Dehaene, Dupoux et Mehler (1990) utilisent une tâche de comparaison de nombres à deux chiffres à un standard (par exemple, les nombres de 11 à 99 comparés à 55) et montrent qu'en dehors de la dizaine du standard (soit, par exemple, les nombres de 11 à 49 puis de 60 à 99), les adultes n'optent pas pour la stratégie la plus économique consistant à comparer uniquement le chiffre des dizaines. Au contraire, ils semblent activer la représentation du nombre en entier et la comparer à celle de la cible. Ainsi, l'effet de distance entre la cible et le standard est continu (par exemple, les temps de réponse pour comparer 41 à 55 sont plus courts que ceux pour comparer 48 à 55) et ne suit pas une courbe en escalier avec des temps similaires pour les nombres appartenant à la même dizaine (comme, par exemple, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49). Ceci semble donc suggérer que la comparaison n'opère pas sur la base des chiffres ou d'une représentation qui garderait la trace de leur structure dizaine-unité, mais qu'au contraire, elle opère sur la base d'une représentation de la magnitude globale du nombre.

Des résultats en faveur de la même thèse sont obtenus par Reynvoet et Brysbaert (1999) dans un paradigme d'amorçage. Un nombre entre 1 et 20 est

présenté comme cible au participant qui doit le dénommer ou indiquer s'il s'agit d'un nombre pair ou impair. Cependant, le nombre cible en question est précédé par la présentation très brève (66 ms) d'un autre nombre (i.e., l'amorce). Les auteurs observent que les réponses sont plus rapides lorsque la cible a été précédée d'une amorce proche numériquement. Cet effet, dit d'amorçage, serait dû au fait que la présentation de l'amorce active la représentation sémantique correspondante ; activation qui se propage ensuite vers les voisins (numériquement) proches et facilite alors le traitement de ces derniers. Mais le résultat majeur de cette étude provient du contraste entre deux conditions : l'une dans laquelle l'amorce et la cible appartiennent à la même dizaine (par exemple, 8-9 ou 11-14) et l'autre dans laquelle ils appartiennent à des dizaines différentes (par exemple, 9-10 ou 8-11). Si les nombres à un et deux chiffres sont traités sur la même ligne numérique, aucune différence entre ces deux conditions ne devrait apparaître. A l'inverse, si la représentation numérique marque une rupture entre les chiffres et les nombres supérieurs à dix, une différence entre ces deux conditions devrait s'observer avec un effet d'amorçage plus important dans la condition « intra-dizaine » que dans la condition « inter-dizaines ». En réalité, aucune différence n'apparaît entre les deux conditions ; ce qui plaide donc en faveur d'une représentation numérique continue sans rupture entre les nombres à un et deux chiffres.

Ces résultats sont toutefois en contradiction avec ceux obtenus par le même auteur quelques années plus tôt. Dans ce cas, Brysbaert (1995) utilise une tâche de comparaison avec un standard variable et montre un effet de distance classique lorsque les deux nombres appartiennent à la même dizaine (réponse plus rapide pour 61-69 que pour 61-63) mais un effet de distance inverse lorsque les deux nombres n'appartiennent pas à la même dizaine (réponse plus rapide pour 59-60 que pour 52-60). Il semblerait donc que l'activation de la représentation sémantique d'un nombre se propage rapidement aux voisins de la même dizaine mais beaucoup moins à ceux qui relèvent d'une dizaine différente.

Pour éclaircir ces données, Nuerk, Weger, et Willmes (2001) vont distinguer la distance des dizaines (1 pour la paire 53 – 69) et celle des unités (6 pour l'exemple précité) et introduisent la notion de compatibilité. Une paire est dite compatible si la comparaison menée sur les dizaines conduit à la même décision que celle menée sur les unités (par exemple, 58-42). Dans le cas contraire, la paire est dite incompatible (par exemple, 52-48). Dans un modèle purement analogique, la compatibilité de la paire ne devrait pas influencer le traitement. Ainsi, comparer 42-57 ou 47-62 devrait prendre environ le même temps¹ puisque la distance absolue entre les deux nombres égale 15 dans les deux cas. Si, par contre, la comparaison n'opère pas uniquement sur une représentation globale de la magnitude du nombre mais se base également sur une représentation séparée des dizaines et des unités, la première paire, compatible, devrait être traitée plus rapidement que la seconde, incompatible. C'est effectivement ce dernier type de profil qui est observé : les temps sont plus

1. Notons seulement la différence de taille entre les deux paires de nombres.

courts pour les paires compatibles que pour les paires incompatibles même lorsque la distance globale, la distance des dizaines et celle des unités et la taille des nombres sont équilibrées dans les deux conditions. Cet effet de compatibilité est accru lorsque la distance des dizaines est petite et/ou lorsque la distance des unités est grande. En d'autres termes, les nombres ne seraient pas uniquement représentés sur une ligne numérique unique et continue. Nuerk et col. postulent en effet que les représentations des quantités suivent une base dix avec les dizaines et les unités représentées séparément sur des lignes numériques distinctes, accompagnées ou non d'une représentation analogique de la grandeur globale du nombre. Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, cette proposition théorique rappelle un peu celle de Resnick (1983) qui supposait également la coexistence d'une représentation unitaire et décimale des nombres.

RÔLE CAPITAL DE LA REPRÉSENTATION DÉCIMALE DU NOMBRE DANS LES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES

Si les preuves expérimentales en faveur d'une représentation numérique en base 10 doivent encore être consolidées, toutes les personnes qui œuvrent au développement numérique de l'enfant, qu'il s'agisse de psychologues du développement, d'instituteurs ou de logopèdes/orthophonistes, savent qu'acquérir une représentation en base 10 du nombre est un défi que doivent absolument résoudre les enfants pour pouvoir faire face aux exigences du cycle d'études primaires.

Développer une représentation en base 10 des nombres et comprendre les liens entre cette structure en base 10 et le système positionnel des nombres arabes est capital pour la réalisation correcte de calculs complexes, par exemple. Selon Fuson, Smith, et Lo Cicero (1997), les enfants qui n'ont pas acquis une conception décimale du nombre, ne peuvent résoudre les calculs de termes supérieurs à 10 qu'en recourant au comptage unité par unité ($58+14 = 58, 59, 60, 61 \dots 72$). En revanche, plusieurs méthodes sont disponibles pour ceux qui maîtrisent la logique décimale. Ils peuvent, par exemple, décomposer le second terme en dizaines et unités et l'additionner au premier terme (par exemple, $58+14 = 58+10+4$), ou bien, séparer les unités des dizaines dans les deux nombres, les additionner de manière distincte et puis regrouper les deux sous-totaux (par exemple, $58+14 = (50+10) + (8+4) = 60+12$) ou enfin, mélanger ces deux stratégies (par exemple, $58+14 = (50+10) = 60+8+4$). Des processus similaires peuvent être décrits pour la soustraction, bien que celle-ci soit souvent plus exigeante puisque l'enfant doit, d'une part transformer des groupes de 10 unités en dizaines, mais aussi réaliser l'opération inverse, soit, décomposer une dizaine en groupe de 10 unités. Généralement, l'école transmet une de ces stratégies à l'enfant. Ceux qui ne comprennent pas le principe sous-jacent à la construction du système numérique ne peuvent qu'appliquer ces règles à la manière d'un algorithme abscons. Le risque d'erreurs de procédure est alors sensible. En revanche, les enfants qui ont une connaissance adéquate de la base 10 développeront, à côté de cette stratégie apprise, d'autres méthodes de calcul qui leur sont propres. Ces enfants comprennent le

sens des décompositions exigées par le calcul et leur risque d'erreurs de procédures est alors très faible (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson, 1997).

Ce lien de causalité entre maîtrise de la base 10 et arithmétique a été mis à l'épreuve par Ho et Cheng (1997). Ces auteurs ont prodigué, pendant 2 mois, un entraînement spécifique du système décimal de position à des enfants chinois en difficultés arithmétiques. Au terme de ce programme, les auteurs notent une amélioration de la compréhension du système décimal mais aussi des capacités de calculs sur des nombres à plusieurs chiffres, en particulier, d'addition et de soustraction (voir aussi Fuson & Briars, 1990). En revanche, aucune amélioration n'était visible à l'issue de ces deux mois chez un groupe contrôle d'enfants également faibles en mathématique mais n'ayant reçu aucune remédiation.

En résumé, la capacité à élaborer une représentation décimale du nombre est primordiale. Un défaut à ce niveau entraîne inévitablement des conséquences importantes sur de nombreuses tâches numériques, telles que le transcodage, le calcul, etc.

DÉVELOPPEMENT DE LA REPRÉSENTATION DÉCIMALE DU NOMBRE CHEZ L'ENFANT

Quelques données

La mise en place d'une représentation décimale du nombre a été étudiée par plusieurs auteurs dont Kamii (1982). Dans ce but, ce chercheur demande à des enfants de dessiner 16 roues et puis d'écrire le nombre arabe correspondant. Ensuite, il entoure le chiffre 1 (puis le chiffre 6) et demande aux enfants d'indiquer si cette partie du 16 a un rapport avec les 16 roues dessinées et de le montrer avec un feutre sur le dessin. A six ans, les enfants sont au plus capables d'entourer une roue pour le chiffre 1 et six roues pour le chiffre « 6 ». Mais la réponse correcte (soit, dix roues pour le chiffre 1 et six roues pour le chiffre 6) n'apparaît que timidement à 7 ans (12 % des enfants), n'est pas encore établie chez la moitié des enfants de 9 ans (42 % de réussite) et n'est donnée que par 78 % des étudiants de 2^{ème} secondaire (voir aussi Kamii, 1985) !

Ces résultats très négatifs semblent en partie liés aux pratiques éducatives. En effet, des différences culturelles importantes existent au sein des pays occidentaux. Ainsi, Sinclair, Garin et Tièche-Christinat (1992) testent une population d'enfants suisses de 5 à 9 ans. Ceux-ci doivent sélectionner le nombre de jetons correspondant à chacun des chiffres composant le nombre. Des décompositions correctes expliquées en termes de dizaines et d'unités apparaissent, en réponse à un item au moins, chez 13 % des enfants de 7 ans, 43 % des enfants de 8 ans et 100 % des enfants de 9 ans, soit, des résultats nettement plus positifs que ceux obtenus par Kamii.

Des résultats encore meilleurs ont été obtenus dans une étude récente menée sur un large échantillon d'enfants belges francophones (100 enfants de

1^{re} primaire et 20 enfants de 2^e primaire). Dans cette recherche, Collet (2004) utilise une tâche proche de celle de Kamii : les enfants construisent une collection équivalente à un nombre arabe puis doivent montrer, dans cette collection, la part correspondant au chiffre des unités puis au chiffre des dizaines. Cependant, seuls des items présentant une structure dizaine-unité régulière (par exemple, 23, 34 ou 42) et non pas des particuliers (comme « 16 » utilisé par Kamii) sont proposés. En première primaire, 44 % des enfants réussissent les trois items présentés dans la tâche et le taux de réussite grimpe à 85 % en 2^{ème} primaire. Par ailleurs, le score moyen de réussite obtenu dans la tâche à partir d'un nombre arabe n'est pas différent de celui obtenu à partir d'un nombre verbal oral (soit, « là il y a vingt-trois jetons, est-ce qu'on peut voir « trois » dans cette quantité ? montre-moi, et est-ce qu'on peut voir « vingt » dans cette quantité ? »).

Enfin, la batterie Tedi-math (Van Nieuwenhoven, Grégoire et Noël, 2002) inclut une tâche dans laquelle les enfants doivent sélectionner les jetons (de valeur dix ou un) correspondant à un numéral verbal de type particulier ou dizaine-unité. Cette épreuve, administrée en 2^e et 3^e primaire, montre des scores de réussite quasi plafonds dès le début de la 2^e primaire, ce qui concorde bien avec les résultats de Collet (2004).

Ces différences culturelles pourraient en partie s'expliquer par des différences de pratique pédagogique. En effet, au sein d'une culture donnée, des modifications spectaculaires de performances peuvent être observées suite à la mise en place d'un projet didactique particulier. Ainsi, Fuson et col. (1997) montrent que 63 % des enfants de première primaire ayant bénéficié d'un programme d'éducation autour de la base 10 réussissent la tâche de Kamii alors que, dans la même école, le taux de réussite est de 32 % chez les enfants de 2^e et de 3^e primaire qui n'ont pas suivi ce programme.

Modèle explicatif

Parmi les modélisations du développement d'une représentation numérique en base 10, celle de Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter et Fennema (1997) est la plus précise et la plus détaillée. Ces auteurs décrivent cinq conceptions différentes que l'enfant peut avoir vis-à-vis des nombres à deux chiffres. Il ne s'agit donc pas à proprement parler de stades développementaux, dans le sens où chaque enfant ne passe pas nécessairement par l'une de ces étapes, mais certaines de ces conceptions sont clairement plus matures que d'autres.

Au départ, l'enfant rencontre les nombres à deux chiffres à la suite des nombres à un chiffre. De manière assez naturelle, il généralise l'apprentissage et les connaissances liés aux premiers, aux seconds. Ainsi, l'enfant associe les premiers nombres de deux chiffres à la quantité correspondante, sans décomposition partie-tout. Le numéral verbal, le numéral arabe ou les quantités sont vus comme un tout, non différencié en sous-groupes. Cette conception est appelée la *conception unitaire des nombres à deux chiffres* (voir figure 1a).

Par le biais, notamment, de l'allongement de la chaîne numérique verbale et de la découverte des principes de composition des nombres, l'enfant reconnaît progressivement l'existence de deux parties dans le nombre (aussi bien dans

le code oral qu'écrit) : une partie décimale et une partie unitaire (par exemple, *quarante* et *cinq* dans *quarante-cinq*) ; chacune étant toutefois vue comme un amas de uns. Ce niveau correspond à la *conception x-ante-unités basée sur la numération verbale* (voir figure 1b). Selon les auteurs, cette conception expliquerait la production de certaines erreurs dans l'écriture de nombres sous dictée où le transcodage de la dizaine et de l'unité sont simplement juxtaposés (par exemple, « cinquante-trois » transcodé comme « 50 » d'une part, et « 3 » d'autre part, soit, 503).

Suite, notamment à la récitation de la chaîne numérique verbale par dix (Fuson, 1998), l'enfant conçoit progressivement les dizaines comme des groupes de dix. C'est ce que Fuson et col. appellent la *conception des séquences de dizaines-unités* (voir figure 1c). Par exemple, vingt-trois est compris comme deux groupes de dix, plus trois.

Au niveau de la *conception dizaines-unités séparées* (voir figure 1d), l'enfant est capable d'un niveau d'abstraction supérieur dans lequel la dizaine n'est plus vue comme un groupe de dix unités mais comme une unité d'un ordre supérieur : « cinquante » est compris comme 5 dizaines. A ce stade, l'enfant conçoit également le nombre arabe comme constitué de deux types d'unités : les unités de dix et les unités de un.

Enfin, lorsque l'enfant peut aisément passer d'une des deux conceptions précédentes à l'autre, Fuson et col. parlent d'une *conception intégrée des séquences de dizaines-unités séparées*.

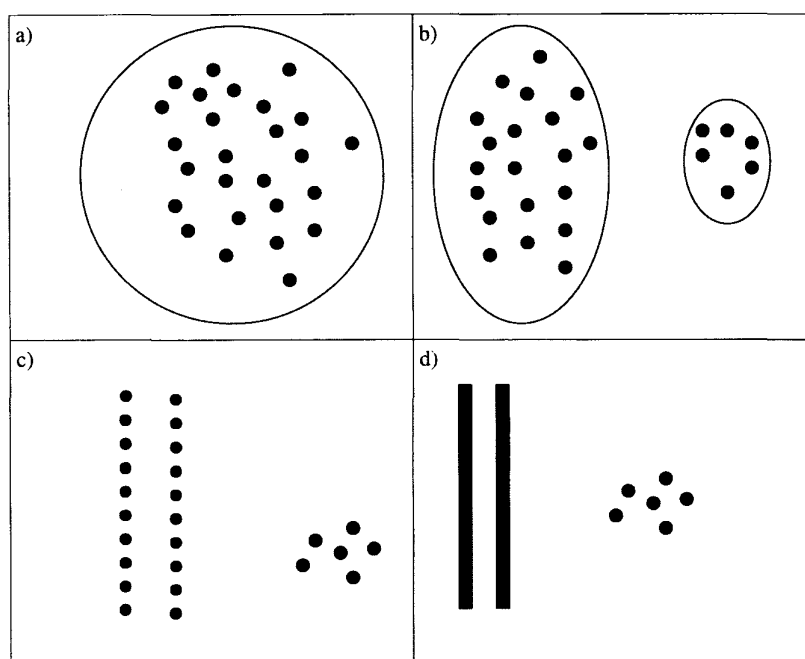


Figure 1. les différentes conceptions du nombre 26 : (a) conception unitaire des nombres à deux chiffres, (b) : conception x-ante unités basée sur la numération verbale, (c) : séquence de dizaines-unités, (d) : conception de dizaines-unités séparées.

Rôle de la langue dans ce développement

Selon Fuson et col. (1997b), certaines langues favoriseraient plus que d'autres le développement de cette représentation décimale. En particulier, les langues asiatiques révèlent de manière limpide la structure en base 10 des nombres. Elles ne comportent pas de particuliers (par exemple, *treize* se traduit littéralement « *dix trois* ») ni de dizaines (par exemple, *soixante* se dit « *six dix* »). Cette transparence du système numérique asiatique permettrait aux enfants de ne pas développer une conception *x-ante-unités basée sur la numération verbale* mais d'acquérir directement une des conceptions plus avancées.

A l'autre extrême, le français semble particulièrement opaque. En effet, comment comprendre la relation entre treize et $10+3$ ou entre *quatre-vingt-dix* et 9×10 ? Ainsi, la conception unitaire serait tout particulièrement favorisée par la structure linguistique de nos numéraux verbaux dans lesquels les premiers mots-nombres correspondant à des structures à deux chiffres, les particuliers, n'indiquent pas de rupture claire après les noms d'unités (neuf, dix, onze, douze...). La présence des dizaines complexes dans le français rendrait ardue l'acquisition de la conception des séquences de dizaines-unités.

Miura et ses collaborateurs (Miura, Kim, Chang & Okamoto, 1988; Miura & Okamoto, 1989; Miura, Okamoto, Kim, Steere & Fayol, 1993; Miura, Okamoto, Kim, Chang, Steere & Fayol, 1994) ont bien montré cette influence de la langue dans une tâche de représentation de quantités. Ils présentent à des enfants de 6-7 ans un nombre arabe et un matériel concret constitué de cubes unitaires et de barres de dix cubes collés et leur demandent de sélectionner le matériel concret correspondant à la valeur du nombre arabe présenté. Dans ces conditions, les enfants asiatiques sélectionnent, en majorité, un nombre de barres de 10 cubes correspondant au nombre de dizaines et un nombre de cubes isolés correspondant au nombre d'unités dans le nombre. Ainsi, pour 12, ils choisissent 1 barre de 10 et 2 cubes isolés. En revanche, les enfants occidentaux utilisent, en majorité, une sélection de cubes isolés uniquement (par exemple, 12 cubes isolés dans l'exemple donné plus haut²).

Des différences subtiles entre deux langues francophones ont également été mises en évidence par Seron et Fayol (1994) dans des tâches de représentations de quantités mais aussi de transcodage. Ces auteurs ont comparé deux groupes d'enfants francophones issus des classes de 2^e primaire (ou CE1) : des Français et des Belges. L'intérêt de cette comparaison portait sur le fait que les Français utilisent des structures verbales très complexes pour exprimer les dizaines 70 et 90 (soit, *soixante-dix* et *quatre-vingt-dix*) alors que les Belges disposent de structures verbales plus simples pour ces nombres (*septante* et *nonante*). Ces auteurs montrent que, pour les dizaines complexes (70 ou 90), les Français produisent typiquement plus d'erreurs que les Belges

2. Ces résultats ont toutefois été critiqués par Towse et Saxton (1997) qui montrent que si on donne comme exemple à l'enfant, non pas un nombre correspondant à une unité (p. ex. 6), mais un particulier (13) pour lequel on prend une barre de 10 cubes et 3 cubes isolés, on provoque une augmentation sensible du nombre de réponses de type barres-unités. Par ailleurs, une augmentation de ce type de réponses est également observée si on ajoute également des plaques de 2×10 cubes.

dans la dictée de nombres arabes par exemple, *soixante-dix-huit* est écrit 6018 ou 618, *quatre-vingt-dix-sept* est écrit 42017 ou 4217 ou 817). En outre, ils sont également moins performants que les Belges lorsqu'il s'agit de sélectionner les jetons (de valeur un ou dix) correspondant à un nombre énoncé à voix haute, si ceux-ci impliquent les dizaines complexes 70 ou 90. Par exemple, en réponse à *soixante-dix-neuf*, ils choisissent 7 jetons de dix et 19 jetons de un ou bien encore, 6 jetons de dix et 9 jetons de un. En résumé, la structure complexe de ces dizaines entraîne, chez les jeunes écoliers français, une difficulté de compréhension de la base 10 se répercutant également sur l'écriture en chiffres arabes.

Ces différences de langues auraient également un impact sur la réalisation des opérations arithmétiques et ce, dès la maternelle. En effet, Ho et Fuson (1998) comparent des petits enfants asiatiques (Chinois) et occidentaux (Anglais et Américains) dans une tâche de calcul : 4 ou 10 objets sont cachés dans une boîte en les comptant un par un ; puis, un autre ensemble de 1 à 9 objets y sont ajoutés en les comptant à nouveau un par un (en recommençant par un). L'enfant doit alors indiquer combien d'objets en tout sont inclus dans la boîte. Ce qui intéresse les auteurs, c'est de voir à partir de quand les enfants sont capables de répondre rapidement à la question « combien y en a-t-il en tout » sans compter pour les calculs « 10 + » alors qu'ils comptent pour résoudre les calculs « 4 + ». Les résultats obtenus indiquent que pratiquement aucun enfant asiatique de 4 ans ne montre une compréhension claire de la décomposition additive dizaine-unité. A 5 ans, cette capacité n'est jamais présente chez les enfants avec un faible niveau de comptage (soit, un comptage correct inférieur à 50) mais est présente chez plus de la moitié (56 %) des enfants qui ont un bon niveau de comptage. Enfin, aucun enfant anglais ou américain de 5 ans ne montre des signes de cette compréhension de la structure dizaine-unité des nombres 11 à 19, même parmi ceux qui ont un bon niveau de comptage. Ces résultats, tout comme ceux décrits plus haut, montrent donc bien l'influence très précoce de la structure de la langue et, plus spécifiquement, de son degré de transparence à la structure décimale dans le développement d'une représentation en base 10 du nombre.

D'UNE REPRÉSENTATION ANALOGIQUE À UNE REPRÉSENTATION EN BASE 10 ?

Au vu de ce qui a été décrit plus haut, il nous semble que trois grandes étapes doivent être distinguées dans le développement de la sémantique numérique. En premier lieu, nous pourrions considérer l'existence d'une étape pré-numérique dans laquelle les bébés traiteraient les collections sur la base de variables physiques continues mais qui, dans la plupart des cas, corrèleraient parfaitement avec la numérosité. Ensuite, une représentation de la magnitude numérique à proprement parler se mettrait en place. Enfin, une représentation décimale du nombre se développerait et serait utilisée non seulement pour comprendre les nombres mais aussi pour résoudre les opérations de calcul. Il y a près de 20 ans, Resnick (1983, 1989) a proposé un modèle du développement

numérique qui reprend ces trois idées en détaillant sept étapes développementales. Nous les présentons ci-dessous.

Au tout début, les bébés peuvent distinguer des collections de tailles différentes et feraient donc preuve de certaines connaissances quantitatives (cfr le chapitre 1 de ce livre). C'est ce que Resnick appelle les connaissances quantitatives préverbales. Il s'agit donc bien de connaissances et de manipulations de la quantité mais pas de la numérosité!

Avec le développement du langage, l'enfant entre dans la seconde étape: il apprend à utiliser des termes quantitatifs non numériques. Ainsi, il dira qu'il veut *beaucoup* de chocolat, qu'il veut *encore* de la panade, que papa est *grand*, que le bébé est *petit* etc. Ces termes quantitatifs lui permettent d'utiliser des schémas de comparaison sur des objets, comparaisons qui portent sur des dimensions perceptives, sans procédé de mesurage. A ce moment, l'enfant peut aussi interpréter des changements en termes d'augmentation ou de diminution, et présente une certaine compréhension des relations partie-tout (le tout étant plus qu'une partie).

La troisième étape est marquée par l'introduction des numéraux verbaux. Les mots nombres sont d'abord utilisés dans le comptage et sont liés entre eux par une relation de succession. Selon Resnick (1983), ces numéraux verbaux constitueraient une espèce de « ligne numérique mentale ». Toutefois, cette ligne numérique mentale n'a pas du tout les propriétés de celle qu'on a mentionnée plus haut. Pour éviter toute ambiguïté et parce qu'il s'agit bien d'une litanie verbale régie par des liens de succession, nous parlerons d'une « suite numérique mentale » (voir figure 2). Avec la pratique du comptage, cette suite numérique mentale se transformerait progressivement pour représenter réellement la quantité: chaque position dans la suite représentant une quantité donnée. Cette étape correspondrait donc à l'intégration de la suite numérique mentale au schéma de comparaison proto-quantitatif développé antérieurement. A partir de ce moment, cette représentation peut servir à comparer des numérosités, si toutefois on suppose l'existence d'un marqueur indiquant que des positions plus lointaines dans la chaîne correspondent à des numérosités plus grandes.

Dans un quatrième temps, et à force d'utiliser le dénombrement d'objets pour résoudre différents problèmes (notamment des petites additions), l'enfant devient progressivement capable d'utiliser les nombres eux-mêmes comme objets à compter. Par exemple, pour additionner 5 et 3, l'enfant pourra compter 3 pas à partir de 5 (6, 7, 8). Il s'agit là d'un basculement important: les nombres ne sont plus seulement des adjectifs qui qualifient des objets (trois pommes) mais ils acquièrent réellement le statut de noms (trois). Les nombres ne sont plus les propriétés d'autres choses mais ils se mettent à posséder eux-mêmes des propriétés (propriétés qui concernent les liens entre les nombres eux-mêmes) et des opérations (addition, soustraction, comparaison etc) peuvent alors être appliquées directement sur les nombres eux-mêmes³.

3. Il est intéressant de noter que le même processus de retournement devra avoir lieu à propos des opérations arithmétiques. Au départ, celles-ci s'appliquent simplement aux nombres. Par la suite, l'enfant devient capable de raisonner sur ces opérations et de découvrir leurs propriétés (par exemple, la multiplication est commutative).

Lorsque l'enfant découvre les nombres supérieurs à dix, une nouvelle étape se met en place. A cette première suite numérique mentale dans laquelle les nombres adjacents sont liés par une relation de succession du type « plus un », s'ajoute une autre suite dans laquelle les nombres sont liés par une relation de succession du type « plus dix » (voir figure 2). Ces deux suites, unitaires et décimales, se coordonnent. Ce développement arriverait d'abord au niveau du comptage verbal. A ce niveau, lorsqu'ils dénombrent des blocs de un et de dix, les enfants commencent par dénombrer ceux des unités supérieures (dix, vingt, trente) puis y ajoutent les unités (trente et un, trente-deux, trente-trois, trente-quatre). Un schéma partie-tout canonique est envisagé par l'enfant avec d'une part la partie « dizaines » et d'autre part, la partie « unités ». Ainsi, s'ils doivent choisir des jetons correspondant à 47, ils choisissent 4 blocs de 10 et 7 blocs de 1 (on est proche ici de la conception des séquences de dizaines-unités décrites par Fuson *et al.*, 1997b).

Par la suite, l'enfant devient progressivement capable de concevoir des partitions multiples : si 47 se représente par 4 blocs de 10 et 7 blocs de 7, il peut également se représenter par 3 blocs de 10 et 17 blocs de un. Des équivalences sont donc possibles.

Enfin, dans une dernière étape, l'enfant devient capable d'appliquer les schémas partie-tout à la résolution des opérations écrites : il n'utilise plus de manière stéréotypée les algorithmes de calcul mais comprend réellement les procédures sous-jacentes comme celles de l'emprunt et du report.

La force de ce modèle est de présenter une vision intégrée des différentes représentations non-numériques et numériques conduisant à l'élaboration

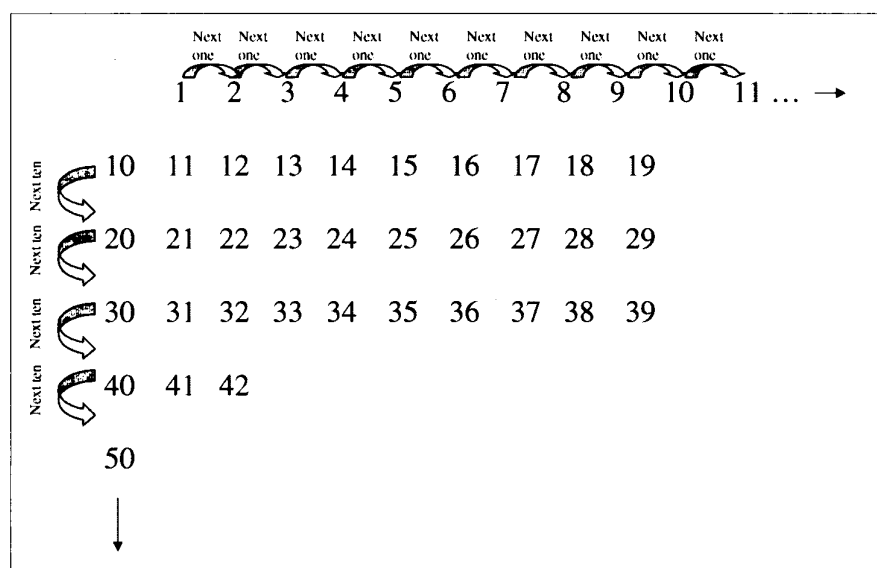


Figure 2. Organisation des suites numériques mentales dans le modèle de Resnick (1983).

d'une représentation sémantique assez aboutie des nombres naturels. On peut bien sûr penser que cette représentation numérique continuera à s'enrichir au fur et à mesure des apprentissages de l'enfant pour inclure par exemple, les nombres négatifs, les nombres fractionnaires, les nombres décimaux etc. Mais ce modèle permet-il de rendre compte des effets classiquement observés dans les tâches sémantiques numériques ? Plus précisément, comment les effets de taille et de distance observés dans la comparaison numérique pourraient-ils être expliqués par la suite numérique mentale basée sur des liens de succession ? De part son caractère ordonné, ce type de représentation permet aisément d'expliquer l'effet de distance : la comparaison de deux nombres est plus aisée si ceux-ci sont numériquement distants l'un de l'autre parce que le nombre de positions entre les 2 nombres dans la suite numérique mentale est plus important. Pour l'effet de taille, en revanche, on pourrait imaginer que le traitement des petits nombres est facilité simplement parce que ceux-ci sont plus fréquents (Dehaene et Melher, 1992) et présentent donc une représentation mentale plus forte et plus précise. D'autre part, l'idée de Resnick est bien que cette suite numérique mentale s'intègre progressivement au schéma proto-quantitatif de comparaison. On pourrait donc penser qu'elle s'intègre à l'accumulateur perceptif qui permet de comparer des surfaces, des longueurs, des masses etc. Cet accumulateur obéissant à la loi de Weber, les effets de taille et de distance seraient automatiquement attendus.

Enfin, nous aimerions souligner une hypothèse importante qui semble se dégager des propos de Resnick : ce serait l'utilisation répétée des numéraux verbaux dans le dénombrement de collections qui amènerait progressivement l'enfant à se représenter la numérosité. En d'autres termes, l'utilisation du symbole numérique aurait un rôle capital dans l'élaboration même du concept de nombre. Dans la section suivante, nous présenterons les données disponibles dans la littérature sur ce lien entre symboles et nombres.

LE RÔLE DU SYMBOLIQUE DANS LA CONSTRUCTION D'UNE REPRÉSENTATION SÉMANTIQUE DU NOMBRE ?

Dans une perspective purement innéiste, le sens du nombre ou encore la représentation sémantique de sa magnitude, est un donné de départ, observable chez le bébé et même, dans certaines espèces animales. Dans cette approche, l'apprentissage des codes symboliques se résume à l'apprentissage d'un lexique, de règles syntaxiques et d'une mise en correspondance entre ces signes et le signifiant, soit, la représentation innée de la magnitude. A l'autre extrême, nous pourrions considérer l'hypothèse suivant laquelle l'apprentissage d'un code symbolique permet véritablement la construction d'une réelle représentation du nombre (voir Wiese, 2003, par exemple, pour une telle position). A l'heure actuelle, le débat entre ces deux positions n'est pas clos. En effet, comme il a été rapporté dans le chapitre de Rousselle, les études menées auprès des bébés humains ou auprès des animaux sont souvent sujettes à la critique d'un manque de contrôle des variables perceptives continues qui covarient avec la numérosité. Dans ce cas, il est difficile d'affirmer

que les comportements des participants démontrent réellement une sensibilité au nombre en tant que tel. Dans cette section, nous présenterons les données issues de trois types de recherches : premièrement, les études menées auprès de peuples qui possèdent un système symbolique oral très limité pour exprimer les numérosités, deuxièmement, les études développementales qui se sont intéressées au moment où l'enfant accède réellement au sens cardinal des symboles numériques et enfin, les études menées auprès des participants adultes qui examinent la mesure dans laquelle le format de présentation des nombres symboliques peut exercer une influence sur la représentation sémantique activée.

LES PEUPLES AVEC TRÈS PEU DE SYMBOLES NUMÉRIQUES

Très récemment, la revue *Science* a publié deux articles sur les compétences numériques de peuples d'Amazonie où les symboles numériques sont extrêmement rudimentaires. Gordon (2004) s'est intéressé aux indiens Pirahas dont le lexique numérique est limité aux mots *un*, *deux*, *beaucoup* alors que Pica, Lemer, Izard et Dehaene (2004) ont mené leurs recherches auprès des indiens Mundurukùs qui n'ont plus de nombres pour exprimer de manière précise les nombres supérieurs à cinq. Dans des tâches variées, comme construire une collection équivalente à une autre, comparer deux collections, additionner ou soustraire des ensembles, les auteurs observent, pour les nombres supérieurs au lexique disponible, des capacités d'approximation « numérique » équivalentes à celles observées chez des occidentaux dans des tâches où le comptage ne peut intervenir (voir par exemple, l'étude de Whalen, Gallistel & Gelman, 1999). Pour Pica et coll., la présence de ces capacités d'approximation démontre l'existence d'une compétence cognitive de base commune à tous les êtres humains (et à certains animaux), qui pourrait être indépendante du langage. En revanche, ces Indiens ne semblent pas avoir développé de représentation exacte, précise du nombre. Par exemple, ils peuvent sélectionner 5 éléments pour construire une collection équivalente à 4 ; ou juger que $6-3 = 2$ est correct. Selon Gordon, le manque de mots pour exprimer les numérosités empêche la formation du concept de nombre exact. Selon Gelman et Gallistel (2004), « les rapports concernant les participants qui semblent indifférents à l'égalité numérique exacte même pour les petits nombres, et qui ne comptent pas verbalement, ajoutent du crédit à l'idée qu'apprendre un système de communication des nombres comportant une référence numérique exacte pourrait jouer un rôle dans l'émergence d'une conception du nombre complètement aboutie » (p. 442-443). Ainsi, « ces rapports suggèrent que l'apprentissage des numéraux verbaux crée un concept d'égalité numérique exacte (...) ou permet l'expansion d'un tel concept (...) ou dirige l'attention vers un tel concept (...) » (p. 442).

Ces observations plaident donc en faveur de l'existence de capacités « non-verbales » approximatives pour traiter des collections mais d'une manipulation numérique précise qui serait clairement limitée aux ensembles dont la

cardinalité peut être représentée par un symbole. La question clé est alors de savoir si cette représentation approximative des quantités peut réellement être considérée comme une représentation numérique ou, si ce n'est pas le cas, la mesure dans laquelle celle-ci constitue une base à l'élaboration de la représentation numérique.

L'ACQUISITION DE LA VALEUR CARDINALE DES SYMBOLES NUMÉRIQUES CHEZ L'ENFANT

Wynn (1992) a très clairement montré que l'acquisition de la valeur cardinale des numéraux verbaux oraux ne coïncidait ni avec la capacité de récitation dans l'ordre de la chaîne numérique verbale, ni même à celle d'une tâche de dénombrement de collection suivie de la question «et alors, combien y en a-t-il en tout ? »⁴. En effet, lorsque Wynn demande à des enfants de maternelle de donner un nombre x d'objets (x étant dans les limites de leurs capacités de comptage), ils obtiennent des performances nettement inférieures à celles qu'ils démontrent dans une tâche de dénombrement suivie de la question portant sur le cardinal de la collection. Ainsi, dans la tâche du «donne-moi», certains enfants réussissent seulement les essais pour le nombre *un*, d'autres pour les nombres *un* et *deux*, d'autres encore pour les nombres jusqu'à *trois*, et ce, même si leurs capacités de dénombrement dépassent ces très petits nombres. Le développement de ces capacités est graduel, séquentiel et lent. En revanche, quand les enfants sont capables de réussir la tâche donne-moi avec *quatre*, ils sont aussi très souvent capables de la réussir pour tous les nombres supérieurs à quatre, pourvu qu'ils ne dépassent pas leurs capacités de dénombrement. A ce moment-là, en effet, les enfants semblent avoir compris le rôle du comptage pour déterminer le cardinal d'un ensemble. Le passage du stade initial de réussite de la tâche pour les nombres *un* ou *deux* à une réussite plus globale pour les nombres connus s'étale sur une période de près d'un an. Il faudrait donc des mois à l'enfant pour découvrir que le dénombrement permet de spécifier la valeur cardinale des numéraux verbaux, alors que ces enfants savent que les nombres font référence à des quantités précises et qu'ils sont capables de réciter les noms de nombres dans l'ordre conventionnel. Selon Wynn, la difficulté de cet apprentissage tiendrait au fait que l'enfant doit créer une analogie entre les relations existant entre les magnitudes et celles qui existent entre les positions des nombres dans la série du comptage. En effet, dans un modèle analogique de la magnitude (comme l'accumulateur, par exemple), la quantité sept correspond à la somme des quantités quatre et trois. Au niveau du comptage en revanche, le mot «sept» ne correspond pas à la somme des mots «quatre» et «trois» mais la position du mot «sept» dans la séquence, est exactement trois places plus loin que celle occupée par le mot «quatre» dans cette même séquence. En d'autres termes, posséder une représentation des quantités et connaître la suite des nombres ne seraient pas des conditions suffisantes à la compréhension de la valeur cardinale des

4. Dans ce cas, la connaissance d'une règle du «dernier mot nombre» permettrait d'obtenir une réponse correcte.

mots-nombres, mais découvrir l'analogie entre les magnitudes et les positions dans la séquence du comptage serait la clé.

Il semble que découvrir la valeur cardinale des mots nombres soit également crucial pour réussir des tâches numériques non symboliques (voir le chapitre de Rousselle). Ainsi, Mix (1999) montre une corrélation entre l'aptitude à juger de l'équivalence numérique d'ensembles dissemblables et les capacités de comptage (à *la Wynn*), alors que ces variables sont non liées lorsque les ensembles à comparer sont perceptivement similaires. Par ailleurs, Brannon et van de Walle (2001) ainsi que Rousselle, Palmers et Noël (2004) montrent que les enfants qui ne possèdent pas une compétence minimale de la cardinalité dans la tâche « montre-moi » de Wynn sont incapables de déterminer, parmi deux, la collection qui est numériquement la plus grande, lorsque les deux collections sont rendues équivalentes sur un certain nombre de variables physiques continues (telles que la longueur du contour, la surface des éléments etc.), alors qu'ils n'ont pas de difficultés avec la même tâche si des variables physiques continues sont confondues avec la numérosité.

Différentes recherches se sont intéressées au développement numérique des enfants dysphasiques, c'est-à-dire d'enfants présentant une difficulté spécifique d'apprentissage du langage oral (tant au niveau lexical que grammatical). Elles ont montré un retard important au niveau de l'acquisition de la chaîne numérique verbale et du dénombrement (Fazio, 1994). Toutefois, ce retard ne semble pas s'accompagner d'une difficulté conceptuelle au niveau numérique. Ainsi, ces enfants (4-5 ans) se débrouillent parfaitement bien dans des tâches non verbales où il s'agit de comparer la taille de collections (Siegel, 1982)⁵ et leurs difficultés de dénombrement s'estompent de manière importante lorsqu'un système de comptage non-verbal est introduit (comptage basé sur le touché successif de différentes parties du corps, Fazio, 1994). En outre, ces enfants semblent à l'aise dans la manipulation des chiffres (tâches de lecture de nombres arabes ; Fazio, enfants de 6-7 ans ou de comparaison numérique de chiffres arabes ; Donlan, Bishop & Hitch, 1998, enfants de 6 ans). Ces études suggèrent donc que les enfants dysphasiques présentent un retard dans le développement du lexique numérique oral, très probablement lié à leurs troubles phonologiques mais que la sémantique numérique ne semble pas atteinte.

Des observations très intéressantes ont également été mises en évidence à propos du développement de la compréhension des symboles numériques écrits. Au cours de l'enfance, ces représentations changent de forme. Pour mettre en évidence cette évolution, Hughes (1986) présente aux enfants des boîtes contenant un certain nombre d'objets et leur demande d'indiquer sur un papier combien d'éléments se trouvent dans la boîte. Ils notent que 10 % des petits de 3-4 ans utilisent des représentations idiosyncrasiques. Ce type de représentation fait ensuite place à des représentations iconiques du type encoches, pictogrammes ou icônes de chiffres (respectivement « /// », « ooo »

5. Notons néanmoins que dans cette étude, la numérosité variait parfaitement avec différentes variables physiques confondues et qu'un jugement physique (plutôt que numérique) suffisait à réussir l'épreuve.

et « 1,2,3 » pour représenter un ensemble de 3 éléments) et à des représentations symboliques (10 % à 3-4 ans, 30 % à 5 ans, et 50 % au-delà).

Pour évaluer la fonction que l'enfant attribue aux symboles utilisés, Munn (1998) propose une seconde étape à la tâche de Hughes : à l'insu de l'enfant, un ours ajoute un objet à une des boîtes et l'enfant doit déterminer la boîte dont le contenu a été transformé. Munn distingue alors une écriture fonctionnelle et non fonctionnelle suivant que la trace écrite est prise, ou non, en considération par l'enfant pour résoudre la tâche.

Sur base d'une étude longitudinale de la première maternelle (3 ans 10 mois) à la première primaire, Munn observe trois faits importants. Premièrement, et comme on pouvait s'y attendre, les représentations idiosyncrasiques sont globalement non fonctionnelles. Deuxièmement, les représentations iconiques sont non fonctionnelles dans 78 % des cas alors qu'elles pourraient très bien être utilisées à bon escient dans cette tâche. Enfin, les représentations conventionnelles, qui pourraient être ignorées, sont en fait fonctionnelles dans 95 % des cas. Selon Munn, l'important ne serait donc pas tant la logique de la structure écrite mais bien l'intégration de cette représentation à un modèle cognitif utilisé pour résoudre une situation problème. Par ailleurs, l'utilisation fonctionnelle des symboles écrits est fortement corrélée avec la réussite à la tâche « donne-moi » de Wynn. Dans les deux cas, il s'agirait, pour l'enfant, de comprendre que des symboles (écrits ou oraux) sont porteurs d'un sens de la numérosité et qu'ils peuvent être utilisés pour résoudre une situation problème. Enfin, une difficulté dans l'utilisation fonctionnelle de l'écriture semble conduire, par la suite, à des difficultés d'apprentissage numérique à l'école (Munn, 1995).

INFLUENCE DES CODES SYMBOLIQUES DANS LA REPRÉSENTATION SÉMANTIQUE DU NOMBRE CHEZ L'ADULTE

Même chez des individus manipulant couramment des systèmes numériques symboliques, on a pu mettre en évidence une influence de la structure lexico-syntaxique du code utilisé pour exprimer le nombre sur des opérations numériques. Ainsi, Noël et Seron (1997) ont montré que vérifier un calcul simple comme $5-1 = 4$ était plus rapide que vérifier $7-1 = 6$ lorsque la réponse était proposée en chiffres romains ($5-1 = IV$ versus $VII-I = VI$) mais pas lorsqu'elle était écrite en toutes lettres ($5-1 = quatre$ versus $7-1 = six$). En effet, dans le premier cas seulement, la structure lexico-syntaxique de la réponse IV pré-activait une représentation des quantités de base (5 et 1) mise en relation de soustraction, soit, la représentation sémantique du calcul présenté.

Par ailleurs, dans la réalisation de calculs oraux du type *mille deux cents plus trois cents* ou *douze cents plus trois cents*, les participants tendent à utiliser une réponse différente selon le format des nombres présentés : ils produisent plus souvent *mille cinq cents* en réponse au premier calcul et *quinze cents* pour le second.

Ces résultats suggèrent que le nombre présenté n'activerait pas seulement la magnitude correspondant à la numérosité globale mais également une

représentation de la composition numérique sous-jacente à la formation du nombre dans le code utilisé. Ainsi, *VI* exprime une relation entre les magnitudes $< 5 >$ et $< 1 >$ qui ne se retrouve pas dans le chiffre *6* ou le mot *six* et *douze cents* exprime une relation entre les magnitudes $< 12 >$ et $< 100 >$ qui ne se retrouve pas dans *mille deux cents*. En d'autres termes, lorsque des nombres sont représentés par une combinaison de primitives lexicales, cette combinaison serait régie par les règles syntaxiques du code en question (voir le chapitre de Lochy & Censabella) mais révéleraient aussi des manières différentes de décomposer le nombre qui évoqueraient alors des représentations sémantiques différentes.

EN CONCLUSION

Les travaux menés auprès des enfants, comme auprès des peuples avec un système symbolique réduit, montrent l'existence de capacités « non-verbales » approximatives pour traiter des collections. Toutefois, les études anthropologiques montrent qu'une manipulation numérique précise serait limitée aux ensembles dont la cardinalité peut être représentée par un symbole. Par ailleurs, les études conduites auprès des enfants montrent que découvrir la valeur cardinale des mots nombres corrèle avec l'utilisation fonctionnelle des symboles écrits et que cette utilisation fonctionnelle des codes symboliques serait cruciale pour réussir des tâches numériques non symboliques quand les variables perceptives sont bien contrôlées. En outre, un retard au niveau de cette acquisition pourrait conduire à des difficultés scolaires d'apprentissage numérique (Munn, 1995). Les recherches sur les enfants dysphasiques sont moins claires : elles mettent en évidence un retard dans le développement du lexique numérique oral mais l'acquisition de la cardinalité n'a pas été étudiée et aucun trouble sémantique clair ne semble apparaître dans les tâches numériques non verbales. Enfin, les codes symboliques semblent également avoir un impact sur les représentations sémantiques activées chez l'adulte puisque la structure lexico-syntaxique utilisée pour exprimer un nombre activerait la composition partie-tout correspondante au niveau sémantique.

UNE REPRÉSENTATION SÉMANTIQUE DYSFONCTIONNELLE CHEZ LES ENFANTS DYSCALCULIQUES ?

Selon Butterworth (1999), une représentation anormale de la magnitude numérique pourrait être à la base de la dyscalculie. Pour illustrer son propos, il décrit de manière assez anecdotique le cas de Charles, un étudiant universitaire qui, bien qu'ayant un niveau intellectuel absolument normal, se plaint de lacunes importantes en mathématique. En effet, il compte sur ses doigts pour réaliser des calculs simples ; les calculs complexes sont très laborieux, et lorsqu'il fait ses courses, il lui est difficile de comparer les prix ou de vérifier la monnaie qui lui est rendue. Selon Butterworth, les problèmes de Charles sont dus à une représentation anormale de la magnitude du nombre. Pour tester son

hypothèse, il propose à Charles une tâche de comparaison de grandeur de paires de chiffres. Il s'avère que Charles est quatre fois plus lent que des participants contrôles pour détecter le plus grand chiffre. Par ailleurs, il montre un effet de distance inversé: au lieu d'être plus rapide pour la comparaison de chiffres numériquement éloignés (comme, 3-8 versus 3-4), il est plus lent. Une analyse de son comportement indique qu'en réalité, il compte sur ses doigts pour réaliser la tâche. Il apparaît donc qu'en amont de ses problèmes de calcul, Charles soit handicapé dans les traitements de base impliquant la représentation de la quantité elle-même⁶.

Pour mettre à l'épreuve leur hypothèse d'un déficit de la représentation de la magnitude numérique chez les enfants dyscalculiques, Landerl, Bevan et Butterworth (2004) comparent, dans une série de tâches numériques, quatre groupes d'enfants de 8-9 ans: des enfants contrôles sans difficultés d'apprentissage, des enfants dyslexiques, des enfants dyscalculiques et des enfants souffrant à la fois de dyslexie et de dyscalculie. Ils montrent que les deux groupes d'enfants dyscalculiques sont plus lents dans une épreuve de lecture de nombres à 1 et 2 chiffres, dans le comptage, dans le dénombrement et dans une comparaison de la magnitude de deux chiffres arabes. Les auteurs concluent alors à un dysfonctionnement de la capacité à représenter les quantités chez les enfants dyscalculiques.

Néanmoins, toutes les tâches sélectionnées mettent en œuvre la production ou la compréhension de nombres symboliques arabes ou verbaux. Une alternative est alors envisageable: ou bien ces enfants ont réellement une difficulté à se représenter la magnitude numérique, ou bien, leur difficulté porte sur l'accès à cette représentation à partir d'un code symbolique. Dans le premier cas, ces enfants devraient aussi être en difficulté lorsque des comparaisons numériques portent sur du matériel non symbolique. Dans le second, la difficulté devrait être restreinte aux tâches impliquant des nombres symboliques.

Pour tester ces hypothèses, Rousselle et Noël (en cours) évaluent trois groupes d'enfants (dyscalculiques, dyscalculiques-dyslexiques ou sans difficultés d'apprentissage) dans différentes tâches de comparaison numérique: l'une portant sur des chiffres arabes (comme l'avaient fait Landerl et col.), l'autre sur des collections contrôlant ou non les variables physiques continues qui covariaient souvent avec le nombre (périmètre total, surface occupée, contour etc.). Les résultats obtenus sont très clairs et indiquent un ralentissement massif des enfants dyscalculiques ou dyscalculiques-dyslexiques dans la tâche de comparaison de nombres arabes mais des temps de réponse tout à fait comparables à ceux des participants contrôles dans les deux tâches de comparaison perceptive. Ces résultats soutiennent donc l'hypothèse d'un ralentissement au

6. Une conclusion similaire est tirée par Tal'ir, Brezner et Ariel (1997) pour un enfant dyscalculique de 11 ans. Cependant, la plupart des épreuves numériques échouées par l'enfant impliquent de traiter des collections. Or, il s'avère qu'il éprouve des difficultés importantes à pointer correctement chaque objet de la collection: sa recherche est désorganisée et il est incapable de pointer une et une seule fois chaque élément lorsque les collections sont importantes. On peut donc se demander si le déficit de base de cet enfant est réellement un déficit de la représentation de la magnitude ou s'il ne s'agit pas plutôt d'une difficulté dans la composante visuelle du dénombrement.

niveau de l'accès à la représentation sémantique des nombres à partir de nombres symboliques mais ne sont pas en faveur de l'hypothèse d'un déficit de la représentation de la magnitude elle-même.

A côté de cette hypothèse d'un dysfonctionnement de la représentation de la magnitude numérique, Landerl *et al.* avaient également voulu tester le caractère automatique de l'activation de cette représentation. A cet effet, ils avaient administré aux enfants un Stroop dans lequel des paires de chiffres de tailles différentes étaient présentées; la tâche étant de pointer vers celui qui avait la plus grande taille physique. Aucun résultat intéressant n'est ressorti de ce paradigme parce que ni les enfants contrôles, ni les enfants dyscalculiques n'ont présenté d'effet de congruité suggérant une activation automatique du nombre.

Une variante de ce Stroop numérique a été utilisée par Rousselle *et al.*. Cependant, pour éviter que l'information relative à la taille physique ne soit traitée beaucoup plus rapidement que celle relative à la taille numérique, la paire de chiffres est d'abord présentée avec une taille physique identique pour les deux stimuli puis, après un laps de temps variable selon les enfants, la taille des chiffres se modifie : celle de l'un augmentant et celle de l'autre diminuant. Le délai s'écoulant avant la modification de taille physique des chiffres correspond à la différence, mesurée pour chaque enfant, entre son temps de comparaison numérique de deux chiffres (de même taille physique) et son temps de comparaison physique de deux chiffres (identiques sur le plan numérique). Dans ces conditions, il apparaît qu'un effet de congruité se produit chez les enfants avec ou sans difficultés d'apprentissages. Ceci démontre que les deux populations présentent un accès automatique à la numérosité. Toutefois, le délai s'écoulant avant la modification de taille physique des nombres est supérieur chez les enfants dyscalculiques que chez les autres ce qui montre, une fois de plus, leur lenteur à accéder à cette représentation de la magnitude.

Par ailleurs, Jordan et Hannich (2003) ont également montré que les enfants faibles en mathématique (scores inférieurs au percentile 15) avaient de moins bonnes performances que les enfants contrôles dans des tâches évaluant la compréhension de la représentation en base 10 des nombres (montrer les jetons correspondant à la valeur des différents chiffres composant un nombre arabe comme 16 ou 43) et que cette difficulté se maintenait au cours de la 2^e et de la 3^e primaire.

Cette difficulté au niveau de l'accès à la représentation de la magnitude numérique pourrait avoir un corollaire anatomo-fonctionnel. En effet, chez l'adulte, les études en neuroimagerie fonctionnelle ont mis en évidence, dans des tâches de comparaison de nombres, une activation du sillon intrapariétal, également sensible à la distance numérique entre les nombres considérés (Le Clec'H, Dehaene, Cohen, Mehler, Duoux, Poline, Lehericy, van de Moortele, & Le Bihan, 2000; Pesenti, Thioux, Seron, & De Volder, 2000). Très récemment, le rôle du cortex pariétal dans la dyscalculie développementale a été objectivé par Isaacs, Edmonds, Lucas et Gadian (2001). Ces auteurs ont montré, chez des adolescents anciens prématurés qui présentaient ou non des résultats faibles en calcul, une densité de matière grise inférieure dans le premier groupe, au niveau du sillon intra-pariétal gauche uniquement.

Une seconde étude réalisée par Molko et coll. (2003) sur des femmes porteuses du syndrome de Turner⁷ qui, typiquement, s'accompagne de difficultés en mathématique, met en évidence des altérations structurales au niveau du sillon intra-pariétal droit (longueur, profondeur et organisation des sillons atypiques) ainsi qu'une modulation anormale de l'activation de ces zones en fonction de la taille des nombres impliqués lors de tâches de calcul. L'ensemble de ces travaux soulignent donc l'importance de l'intégrité anatomico-fonctionnelle du sillon intra-pariétal dans le développement numérique.

En rapport avec ces données neuro-anatomiques, des observations neuropsychologiques méritent d'être mentionnées. En effet, chez l'adulte, une dyscalculie acquise par suite d'une lésion pariétale peut s'accompagner d'une agnosie digitale (incapacité à identifier, sans la vue, le doigt qui vient d'être touché), d'une confusion gauche-droite et d'une dysgraphie (trouble de la formation graphique des lettres suite à un manque de coordination des gestes nécessaires à l'écriture). C'est ce qu'on appelle le *syndrome de Gerstmann*⁸, du nom de celui qui a décrit cette tétrade de signes en 1940. Chez l'enfant, des cas de syndrome de Gerstmann ont également été rapportés (voir Kinsbourne & Warrington, 1963; Grigsby, Kemper & Hagermann, 1987; Suresh & Sebastian, 2000) mais leur description reste très anecdotique. Il y a quelques années, Fayol, Barrouillet et Marinthe (1998) ont montré qu'un test neuropsychologique, évaluant entre autres les gnosies et la discrimination digitale⁹, administré en fin de maternelle prédisait mieux les capacités numériques mesurées un an plus tard que les scores obtenus en fin de maternelle à une épreuve de développement global. De plus, les capacités au test digital restent un prédicteur significatif des performances scolaires en mathématique trois ans plus tard, soit quand les enfants sont âgés de 8 ans ($r = 0,25$) et cette corrélation est plus élevée que celle calculée entre les résultats en mathématique et les scores obtenus à 8 ans à une épreuve d'intelligence non verbale. En revanche, cette dernière épreuve prédit mieux les performances scolaires en français que le test digital (Marinthe, Fayol & Barrouillet, 2001). Des résultats similaires ont été obtenus plus récemment par Noël (sous presse).

Ces travaux intéressants ouvrent donc une nouvelle piste concernant la détection précoce d'enfants à risque de développer des difficultés d'apprentissage en mathématique. Ce risque pourrait en effet être évalué par des tâches, telles que les discriminations digitales, qui reflèteraient le degré de maturité des

7. Trouble génétique lié à une délétion totale ou partielle d'un des chromosomes X.

8. Le statut de syndrome a été critiqué par Benton (1977) qui rapporte des cas de patients présentant trois des signes (le triplet en question pouvant différer selon les individus), et non les quatre.

9. Ce test comprenait des épreuves de gnosies digitales (l'expérimentateur touche un doigt de l'enfant alors qu'il a les yeux clos, ce dernier doit ensuite indiquer le doigt touché), de discrimination digitale (même exercice mais cette fois, deux doigts sont touchés successivement), de simultagnosie (l'examinateur touche simultanément deux parties du corps de l'enfant - par exemple, l'épaule gauche et l'oreille droite - alors que celui-ci garde les yeux fermés. L'enfant doit ensuite pointer les parties du corps stimulées), et de graphesthésie (alors que l'enfant a les yeux clos, l'expérimentateur dessine une forme simple sur le dos de la main de l'enfant qui doit déterminer la forme dessinée).

lobes pariétaux, sièges du traitement de la représentation de la magnitude numérique.

Toutefois, l'interprétation de ces résultats reste un sujet de débat. Ainsi, certains auteurs comme Benton (1977) ou Dehaene, Piazza, Pinel et Cohen (2003) voient l'association des signes de Gerstmann comme résultant simplement de la proximité cérébrale des aires régissant les fonctions cognitives sous-jacentes. En d'autres termes, lesgnosies digitales et autres signes de Gerstmann sont un bon prédicteur des performances arithmétiques parce que tous ces traitements sont supportés par des régions voisines au niveau du lobe pariétal. L'association de troubles serait donc fortuite sur le plan fonctionnel. Butterworth (1999) ou Brissiaud (2003), en revanche, soulignent le rôle crucial des doigts (et de leurs représentations) dans le développement mathématique et ce, aussi bien au niveau du dénombrement (par le pointage des objets), de la représentation de la quantité (par le rôle de collection-témoin) ou des algorithmes de comptage dans la réalisation des additions et des soustractions. Une représentation digitale déficitaire pourrait donc perturber plusieurs acquisitions numériques. Bien sûr, ces deux positions ne sont pas mutuellement exclusives. On pourrait ainsi imaginer, comme le propose Butterworth, que le rôle fonctionnel des doigts dans le traitement du nombre ait conduit, au cours du processus évolutif, à représenter la magnitude numérique dans des zones cérébrales proches de celles responsables de la représentation des doigts. D'autres travaux expérimentaux seront nécessaires pour éclaircir ce débat.

EVALUATION ET PRISE EN CHARGE THÉRAPEUTIQUE

L'évaluation de la capacité à élaborer une représentation sémantique du nombre est multiple. Elle doit inclure une mesure de la capacité de l'enfant à élaborer une représentation de la magnitude du nombre, et ce, pour les différents codes symboliques classiquement rencontrés mais aussi une mesure de sa capacité à construire et à manipuler une représentation en base 10 du nombre. La représentation de la magnitude du nombre est typiquement évaluée au travers de tâches de comparaison de la grandeur numérique de deux nombres. Des tâches de ce type se retrouvent dans la batterie Tedi-math (Van Nieuwenhoven, Grégoire & Noël, 2002) pour des nombres arabes et des nombres verbaux oraux et pour des items simples (correspondant à une primitive lexicale) ou complexes (correspondant à une combinaison de plusieurs mots ou chiffres). Toutefois, ces tâches donnent des mesures d'exactitude mais pas de vitesse. La batterie informatisée mise au point par Butterworth (2003 ; le « dyscalculia screener ») permet une mesure des temps de réponse pour la comparaison de chiffres arabes simples mais pas les nombres plus complexes ni les numéraux verbaux. Enfin, la batterie Tedi-math inclut 6 épreuves qui permettent de tester la capacité à générer et à opérer sur base d'une représentation en base 10 du nombre. Certaines de ces épreuves sont très classiques et utilisent du matériel en base 10 concret (des fagots de 10 bâtonnets). L'enfant est alors amené, soit à produire le nombre verbal correspondant à une série de fagots et de bâtonnets, soit à réaliser l'opération inverse : indiquer combien de fagots et de bâtonnets correspondraient à un numéral verbal oral. D'autres épreuves mettent en œuvre des petits jetons pour

représenter l'unité et des gros jetons pour représenter la dizaine. Le symbole utilisé pour la dizaine est donc plus abstrait puisqu'il ne s'agit plus d'ensembles de 10 éléments visibles. Enfin, les dernières épreuves examinent la mesure dans laquelle l'enfant est capable d'extraire la structure décimale à travers le système positionnel arabe en lui demandant de repérer dans un nombre le chiffre des unités ou celui des dizaines.

Lorsque l'intervenant connaît la trajectoire développementale normale de la construction d'une représentation sémantique du nombre et qu'il peut évaluer le niveau atteint par l'enfant, la planification d'un projet éducatif ou thérapeutique est plus aisée. Un travail de ce type a été réalisé par Sharon Griffin. Celle-ci a publié différents jeux/outils pour développer l'apprentissage du sens du nombre chez l'enfant de maternelle (Griffin, 2000), de 1^{re} et de 2^e primaire (Griffin, 1997 ; 1998). Il s'agit d'une série d'activités (et des objectifs de connaissance associés) qui récapitulent la progression développementale observée entre 3 et 9 ans. Les principes de travail sont les suivants : (1) travailler et construire à partir des connaissances de l'enfant, (2) suivre les étapes du développement normal dans la progression des exercices présentés, (3) enseigner à la fois la compréhension conceptuelle des opérations mais aussi leur fluidité, (4) offrir à l'enfant de nombreuses possibilités d'exploration concrète, de résolution de problèmes et de dialogue et (5) mettre l'enfant en contact avec une variété de formes de représentation des nombres (thermomètres, position sur une ligne numérique, sur un dé etc.).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au vu de la littérature sur le sujet, nous pensons que la représentation sémantique du nombre n'est pas un donné de départ inné mais qu'elle se construit en une série d'étapes. Au début, l'enfant traite les quantités continues (contour, longueur, surface) d'une manière approximative et non verbale. Cette étape correspond à la phase de « raisonnement proto-quantitatif » proposé par Resnick (1983, 1989). L'enfant est alors capable de comparer des quantités et d'inférer les effets liés à des modifications (ajouts ou retraits) opérés sur ces quantités. A cette étape, il n'y a pas de quantification numérique à proprement parler. On observe alors que l'enfant réagit à des modifications de surface ou de contour, plutôt qu'à des modifications numériques pures (Mix, 1999 ; voir aussi chapitre de Rousselle). Ensuite, l'enfant est introduit aux symboles numériques et acquiert progressivement le concept de cardinalité (Wynn, 1992). Il comprend que les nombres ne sont pas seulement des étiquettes qu'on utilise quand on récite la chaîne numérique verbale, ou des étiquettes qu'on applique à des objets dans le dénombrement, mais qu'ils réfèrent à des quantités numériques (tâche du « donne-moi »). L'apprentissage des symboles et du concept de cardinalité (qui est le réel signifiant de ces symboles) permettrait l'émergence de représentations numériques exactes et le raisonnement sur ces représentations (voir, Baroody, Wilkins & Tiilikainen, 2003 pour une description détaillée de cette transition). C'est ainsi qu'à partir d'une certaine maîtrise de la notion de cardinalité (tâche du « donne-moi ») les petits enfants seraient capables de comparer le cardinal de collections qui sont bien contrôlées au

niveau des variables physiques continues (Brannon & van de Walle, 2001 ; Rousselle, Palmers & Noël, 2004). De même, les peuples qui ont des systèmes symboliques rudimentaires pour le domaine numériques ne seraient capables de développer des représentations numériques exactes et précises que pour les nombres qui sont dans le rang de leur espace symbolique numérique (Gordon, 2004 ; Pica *et al.*, 2004). Les représentations numériques liées aux symboles ne se construiraient toutefois pas de manière isolée. Au contraire, elles s'intégreraient aux schémas de raisonnement et aux connaissances logiques apprises à propos des variables physiques continues (à l'étape initiale). Les numéraux seraient donc associés à une représentation continue de la magnitude et cette filiation pourrait expliquer l'apparition des effets de taille et de distance (typique de représentations analogiques) dans les tâches de comparaison de magnitude sur du matériel symbolique. Enfin, cette représentation des nombres entiers, régie par des relations ordinales simples de succession de type « plus un », s'intégrerait à une représentation décimale, comme l'ont proposé Nuerk *et al.* (2001) ou encore Resnick (1983 ; 1989).

Les études menées auprès des enfants en difficulté d'apprentissage mathématique montrent que ceux-ci sont déficients dans toutes les tâches qui exigent l'élaboration et la manipulation de la représentation sémantique des nombres à partir d'un matériel symbolique. Ces difficultés apparaissent lorsque la tâche implique un traitement de la représentation simple de la magnitude (par exemple, la comparaison de deux chiffres, Landerl *et al.*, 2004 ou Rousselle & Noël, en préparation) ou lorsqu'il s'agit d'élaborer une représentation en base 10 du nombre (Jordan & Hannich, 2003). Développer une représentation sémantique du nombre à partir d'un matériel symbolique qui soit riche, constitue donc un défi important pour chaque enfant et une difficulté à ce niveau entraîne, bien évidemment, des problèmes scolaires en mathématiques. Il est donc primordial d'évaluer cette compétence lors du bilan logopédique/orthophonique d'un enfant en difficulté d'apprentissage puis de l'accompagner, le cas échéant, dans cette construction.

RÉFÉRENCES

- Bächtold, D., Baumüller, M. & Brugger, P. (1998). Stimulus-response compatibility in the representational space. *Neuropsychologia*, 36(8), 731-735.
- Baroody, A.J., Wilkins, J.L.M. & Tiilikainen, S. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity: from protoquantitative concept to general concept? In A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise* (pp. 127-160). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Benton, A.L. (1977). Reflections on the Gerstmann syndrome. *Brain and Language*, 4, 45-62.
- Berch, D.B., Foley, E.J.; Hill, R.J. & McDonough Ryan, P. (1999). Extracting parity and magnitude from Arabic numerals: developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 286-308.

- Brannon, E. M., & Van de Walle, G. A. (2001). The development of ordinal numerical competence in young children. *Cognitive Psychology*, 43, 53-81.
- Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Retz, Paris, 287 pp.
- Brysbaert, M. (1995). Arabic number reading: on the nature of the numerical scale and the origin of the phonological recoding. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124, 434-452.
- Buckley, P.B. & Gilman, C.B. (1974). Comparison of digits and dot patterns. *Journal of Experimental Psychology*, 103, 1131-1136.
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: MacMillan.
- Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia screener*. London: Nelson Publishing Company Ltd.
- Carpenter, T.P., Franke, M.L., Jacobs, V.R., Fennema, E. & Empson, S.B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 3-20.
- Collet, M. (2004). *Le développement du système en base dix chez les enfants de 1^{re} et de 2^e primaire*. Thèse de doctorat non publiée (promoteur: J. Grégoire). Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense*. New York: Oxford University Press.
- Dehaene, S. & Akhavein, R. (1995). Attention, automaticity and levels of representation in number processing. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 21, 314-326.
- Dehaene, S., & Mehler, J. (1992) Cross-linguistic regularities in the frequency of number-words. *Cognition*, 43, 1-29
- Dehaene, S., Bossini, S. & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371- 396.
- Dehaene, S., Dupoux, E. & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16, 626-641.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- Donlan, C., Bishop, D.V.M., & Hitch, G.J. (1998). Magnitude comparisons by children with specific language impairments: Evidence of unimpaired symbolic processing. *International Journal of Language and Communication Disorders*, 33, 149-160.
- Duncan, E.M., & McFarland, C.E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance and semantic congruity in comparative judgments: an additive-factors analysis. *Memory & Cognition*, 8, 612-622.

- Fayol, M., Barrouillet, P., & Marinthe (1998). Predicting arithmetical achievement from neuropsychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, 68, B63-B70.
- Fazio, B. (1994). The counting abilities of children with specific language impairments: A comparison of oral and gestural tasks. *Journal of Speech and Hearing Disorders*, 37, 358-368.
- Fuson, K.C. (1992). Relationships between counting and cardinality from age 2 to age 8. In J. Bideaud, C. Meljac & J-P; Fisher (eds). *Pathways to number. Children's developing numerical abilities* (pp. 127-149). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
- Fuson, K.C. (1998). Pedagogical, mathematical, and real-world conceptual-support nets: a model for building children's multidigit domain knowledge. *Mathematical Cognition*, 4(2), 147-186.
- Fuson, K.C. & Briars, D.J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 180-206.
- Fuson, K.C., Smith, S.T. & Lo Cicero, A.M. (1997a). Supporting latino first graders' ten structured thinking in urban classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(6), 738-766.
- Fuson, K.C., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H.G., Human, P.G., Olivier, A.I., Carpenter, T.P. & Fennema, E. (1997b). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.
- Gallistel, C.R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74.
- Galton, F. (1880a). Visualised numerals. *Nature*, 21, 252-256.
- Galton, F. (1880b). Visualised numerals. *Nature*, 21, 494-495.
- Gelman, R. & Gallistel, C.R. (2004). Language and the origin of numerical concepts. *Science*, 306, 441-443.
- Gerstmann, J. (1940). Syndrome of finger agnosia, disorientation for right and left, agraphia and acalculia. *Archives of Neurology and Psychiatry*, 44, 398-408.
- Gevers, W., Reynvoet, B. & Fias, W. (2003). The mental representation of ordinal sequences is spatially organized. *Cognition*, 87, B87-B95.
- Girelli, L., Lucangeli, D., & Butterworth, B. (2000). The development of automaticity in accessing number magnitude. *Journal of Experimental Child Psychology*, 76, 104-122.
- Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science*, 306, 496-499.
- Griffin, S. (1997). *Number Worlds: Grade one level*. Durnham, NH/Number Worlds Alliance Inc.
- Griffin, S. (1998). *Number Worlds: Grade two level*. Durnham, NH/Number Worlds Alliance Inc.

- Griffin, S. (2000). *Number Worlds: Preschool level*. Durnham, NH/Number Worlds Alliance Inc.
- Grigsby, J.P., Kemper, M.B. & Hagerman, R.J. (1987). Developmental Gerstmann syndrome without aphasia in fragile X syndrome. *Neuropsychologia*, 25, 881-891.
- Ho, C.S.-H. & Cheng, F.S.-F. (1997). Training place-value concepts improves children's addition skills. *Contemporary Educational Psychology*, 22, 495-506.
- Ho, C.S.H. & Fuson, K.C. (1998). Children's knowledge of teen quantities as tens and ones: Comparisons of Chinese, British and American kindergartners. *Journal of Educational Psychology*, 90, 536-544.
- Hughes, M. (1986). *Children and number*. Oxford, Blackwell.
- Isaacs, E. B., Edmonds, C. J., Lucas, A., & Gadian, D. G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birthweight. *Brain*, 124, 1701-1707.
- Jordan, N.C. & Hannich, L.B. (2003). Characteristics of children with moderate mathematics deficiencies: a longitudinal perspective. *Learning disabilities Research & Practice*, 18, 213-221.
- Kamii, C. (1982). *Number in preschool and kindergarten*. Washington D.C.: National Association for the Education of Young Children.
- Kamii, C. (1985). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.
- Kinsbourne, M. & Warrington, E.K. (1963). The developmental Gerstmann syndrome. *Annals of Neurology*, 8, 490-501.
- Landerl, K., Bevan, A. & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities. A study of 8-9 years old students. *Cognition*, 93, 99-125.
- Le Clec'H, G., Dehaene, S., Cohen, L., Mehler, J., Duoux, E., Poline, J.B., Lehericy, S., van de Moortele, P.F. & Le Bihan, D. (2000). Distinct areas for names of numbers and body part independent of language and input modality. *Neuroimage*, 12, 3581-391.
- Marinthe, C., Fayol, M. & Barrouillet, P. (2001). Gnosies digitales et développement des performances arithmétiques. In A. Van Hout & C. Meljac (eds). *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*. Masson, Paris (pp.239-254).
- McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171-196.
- Miura, I.T. & Okamoto, Y. (1989). Comparisons of US and Japanese first graders' cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of Educational Psychology*, 81, 109-113.
- Miura, I.T.; Okamoto, Y.; Kim, C.C.; Steere, M. & Fayol, M. (1993). First graders cognitive representation of number and understanding of place-value: cross-national comparisons – France, Japan, Korea, Sweden and the Unites States. *Journal of Educational Psychology*, 85(1), 24-30.

- Miura, I.T., Kim, C.C., Chang, C.-M. & Okamoto, Y. (1988). Effects of language characteristics on children's representation of number: Cross-national comparisons. *Child Development*, 59, 1445-1450.
- Miura, I.T., Okamoto, Y., Kim, C.G., Chang, C.M.; Steere, M. & Fayol, M. (1994). Comparison of children's cognitive representation of number: China, France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *International Journal of Behavioural Development*, 17, 401-411.
- Mix, K.S. (1999). Similarity and numerical equivalence: appearances count. *Cognitive Development*, 14, 269-297.
- Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S.C. (2002). Multiple cues for quantification in infancy: is number one of them? *Psychological Bulletin*, 128, 278-294.
- Molko, N., Cachia, A., Rivière, D., Mangin, J.F., Bruandet, M., Le Bihan, D., Cohen, L., & Dehaene, S. (2003). Functional and structural alterations of the intraparietal sulcus in a developmental dyscalculia of genetic origin. *Neuron*, 40, 847-858.
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519-1520.
- Munn, P. (1995). The role of organised preschool learning environments in literacy and numeracy development. *Research Papers in Education*, 10, 217-252.
- Munn, P. (1998). Symbolic function in pre-schoolers. In C. Donlan (ed.). *The development of mathematical skills*. Hove: Psychology Press, pp. 47-71.
- Mussolin, C. (2002). *L'automatisme de l'accès à la représentation numérique chez l'enfant*. Mémoire non publié de licence en psychologie écrit sous la direction de M.P. Noël, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.
- Noël, M.-P. (sous presse). Finger gnosis: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*.
- Noël, M.-P. & Seron, X. (1997). On the existence of intermediate semantic representations. *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory and Cognition*, 23, 697-720.
- Nuerk, H.C., Weger, U., & Willmes, K. (2001). Decade breaks in the mental number line? Putting the tens and units back in different bins. *Cognition*, 82, B25-B33.
- Pavese, A. & Umiltà, C. (1998). Symbolic distance between numerosity and identity modulates Stroop interference. *Journal of Experimental Psychology, Human Perception & Performance*, 24, 1535-1545.
- Pesenti, M., Thioux, M., Seron, X., & De Volder, A. (2000). Neuroanatomical substrates of arabic number processing, numerical comparison, and simple addition: A PET study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12, 461-479.
- Pica, P., Lemer, C., Izard, W. & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in Amazonian indigene group. *Science*, 306, 499-503.
- Pinel, P., Dehaene, S., Rivière, D., & Le Bihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*, 14, 1013-1026.

- Pinel, P., Le Clech'H, G., van de Moortele, P.F., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (1999). Event-related fMRI analysis of the cerebral circuit for number comparison. *NeuroReport*, 10 (7), 1473-1479.
- Resnick, L.B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H.P. Ginsburg (ed.). *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press, pp. 109-151.
- Resnick, L.B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, 44, 162-169.
- Reynvoet, B. & Brysbaert, M. (1999). Single-digit and two-digit Arabic numerals address the same semantic number line. *Cognition*, 72, 191-201.
- Rousselle, L., Palmers, E., & Noël, M-P. (2004). Magnitude comparison in preschoolers: what counts? Influence of perceptual variables. *Journal of Experimental Child Psychology*, 87, 57-84.
- Rubinsten, O., Henik, A., Berger, A., & Shahar-Shalev, S. (2002). The development of internal representations of magnitude and their association with Arabic numerals. *Journal of Experimental Child Psychology*, 81, 74-92.
- Schwarz, W., & Ischebeck, A. (2003). On the relative speed account of number-size interference in comparative judgments of numerals. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 29(3), 507-522.
- Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. (1977). Children's judgments of numerical inequalities. *Child Development*, 48, 630-633.
- Seron, X. & Fayol, M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology*, 12, 281-300.
- Seron, X., Pesenti, M., Noël, M.P., Deloche, G., & Cornet, J.A. (1992). Images of numbers or «When 98 is upper left and 6 sky blue». *Cognition*, 44, 159-196.
- Siegel, L.S. (1982). The development of quantity concepts: perceptual and linguistic factors. In C.J. Brainerd (ed.). *Children's logical and mathematical cognition. Progress in cognitive developmental Research*. Pp 123-155. New York: Springer-Verlag.
- Sinclair, A., Garin, A. & Tièche-Christinat, C. (1992). Constructing and understanding of place value of numerical notation. *European Journal of Psychology of Education*, 7, 191-207.
- Suresh, P.A. & Sebastian, S. (2000). Developmental Gerstmann syndrome: a distinct clinical entity of Learning disabilities. *Pediatric Neurology*, 22, 267-278.
- Ta'ir, J., Brezner, A. & Ariel, R. (1997). Profound developmental dyscalculia: Evidence for a cardinal-ordinal skills acquisition device. *Brain and Cognition*, 35, 184-206.
- Towse, J.N. & Saxton, M. (1997). Linguistic influence on children's number concepts: methodological and theoretical considerations. *Journal of Experimental Child Psychology*, 66, 362-375.
- Van Nieuwenhoven, C., Grégoire, J. & Noël, M.P. (2002). *Tedi-math: test diagnostique des compétences de base en mathématiques*. ECPA, Paris, France.

- Whalen, J., Gallistel, C.R., & Gelman, R. (1999). Non verbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, 10 (2), 130-137.
- Wiese, H. (2003). *Numbers, language and the human mind*. Cambridge University Press, UK. 346 pp.
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting systems. *Cognitive Psychology*, 24, 220-251.
- Wynn, K. (1998). Psychological foundations of number: numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Science*, 2(8), 296-303.