Réflexions sur le taux de réussite en 1ère session pour le cours de Physique générale 1 (LBIR1121)

Eric Deleersnijder

Université catholique de Louvain & Delft University of Technology

www.ericd.be

(mars 2017)

Mots-clés: enseignement supérieur, échec en 1ère année, constante macabre, bienveillance, dureté, laxisme, aide à la réussite, étude empirique

Résumé

Dans nombre de pays (dont la Belgique francophone), le taux d'échec en première année de l'enseignement supérieur est très élevé (> 50%) depuis de nombreuses décennies. La “constante macabre” (d'après le titre de l'ouvrage d'André Antibi paru en 2003) est l'expression qui est souvent employée pour désigner cette problématique. Celle-ci interpelle (ou devrait interpeller) toutes les parties prenantes de l'enseignement supérieur (étudiants, professeurs, parents, décideurs).

Le cours de Physique générale 1 (LBIR1121), destiné à des étudiants débutant des études en bioingénierie à l'UCL, connaît depuis plusieurs années un taux de réussite supérieur à 50% lors de la 1ère session d'examens. On utilise des données empiriques et des arguments spéculatifs pour tenter d'expliquer ce résultat favorable.

La méthode de correction des épreuves écrites est empreinte de bienveillance: on récompense ce qui est correct dans chaque réponse en faisant l'hypothèse que les étudiants débutants ont une marge de progression importante. On refuse cependant tout laxisme ou toute forme de dureté qui serait perçue comme étant de nature à décourager les étudiants de bonne volonté. Infliger une note nulle à toute réponse qui n'est pas totalement correcte ferait diminuer le taux de réussite de 16 points de pourcentage dans le cas analysé ici (examen de janvier 2017 de LBIR1121).

La façon de formuler les questions joue sans doute un rôle significatif: les épreuves écrites sont composées de problèmes relativement nombreux (et d'ampleur limitée) qui couvrent une large fraction de la matière et se réfèrent à tous les acquis d'apprentissage du cours. Selon la taxonomie de Bloom, les problèmes à résoudre font appel à des processus cognitifs d'un niveau > 1 et généralement ≤ 4. Cette approche semble être favorable aux étudiants débutants. Par ailleurs, les dispositifs d'aide à la réussite sont évoqués, sans que l'on puisse identifier ceux qui sont les plus efficaces.

La méthode d'enseignement reste très classique avec des adaptations modestes mais régulières (un “petit pas” par an), qui sont conçues en concertation étroite avec les assistants en fonction des difficultés repérées lors de la correction des épreuves écrites.

Réunion de la commission de programme (CP)

Bachelier en sciences de l'ingénieur, orientation bioingénieur (BIR)

Louvain-la-Neuve, le 27 mars 2017

Réflexions sur le taux de réussite en 1ère session pour le cours de Physique générale 1 (LBIR1121)

Eric Deleersnijder

Université catholique de Louvain & Delft University of Technology

www.ericd.be

Statistiques de janvier 2017 en BAC1 bioingénieurs

Réussite en Bac 1 – session de janvier:

cours	# notes	% réussite	moyenne	Écart-type
LBIR1110 Math	294	38	8,43	4,57
LBIR1121 Physique	276	65	10,84	4,11
LBIR1150 Bio cellulaire	307	49	9,01	3,62
LCHM1111 Chimie générale	313	24	6,32	3,95

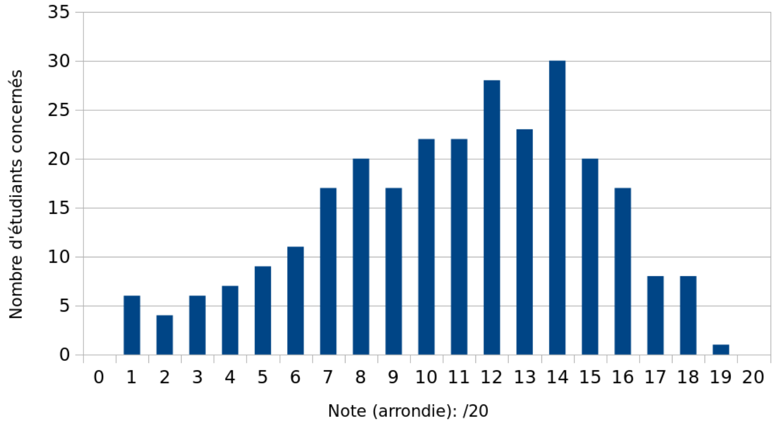
Les très grandes différences d’un cours à l’autre méritent approfondissement des facteurs de réussite ou d’échec

(extrait de la présentation de la Présidente de la CP BIR lors de la réunion du 13/02/2017)

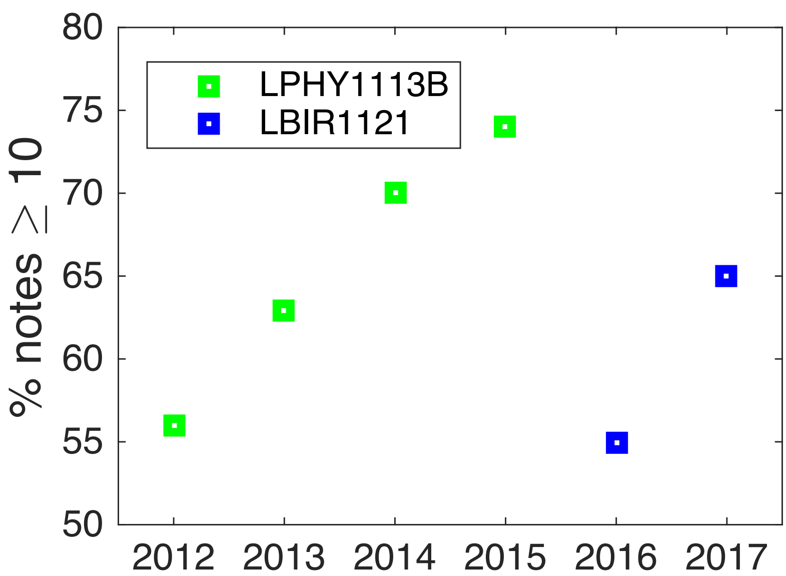
Notes de janvier 2017 pour Physique générale 1 (LBIR1121)

nombre d'étudiants présents	note moyenne	note médiane	écart type	pourcentage de notes		
				≤5	≥10	≥15
276 274	10.8 7.9	11.0 7.5	4.1 4.4	12 30	65 32	20 9

Les chiffres en rouge se rapportent à l'interrogation .



Notes finales en janvier pour Physique générale 1



Les résultats favorables de janvier 2017 ne sont pas exceptionnels.

Contenu:

La constante macabre (I)

• Selon A. Antibi (2003), les parties prenantes de l'enseignement (**étudiants, professeurs, parents, dirigeants**) tendent à **accepter**, voire souhaiter, un **taux d'échec élevé** et d'un **ordre de grandeur immuable**, d'où le concept de "**constante macabre**".

La constante macabre (II)

• Lors d'un débat organisé en septembre 2014 par le journal *Le Soir*[1], Didier Viviers (Recteur ULB) déclare à propos du **taux d'échec** de l'ordre de **60%** en **1ère année** du supérieur:

C'est une constante sociétale. [...] il n'y a pas de forte évolution depuis 50 ans [...] ce que nous faisons est déjà pas mal.

• Par contre, Vincent Blondel (Recteur UCL) affirme:

Le taux d'échec n'est pas de 60% dans tous les pays, ce n'est pas une fatalité. Un échec, ce n'est pas seulement pour les étudiants mais aussi pour les enseignants, pour les institutions et pour la société. L'échec coûte [...] des dizaines de millions d'Euros chaque année.

---

[1] Source: http://www.lesoir.be/652970/article/actualite/belgique/2014-09-12/universite-recteurs-unis-contre-l-echec-constante-macabre-videos

La constante macabre (III)

• Le taux d'échec élevé en 1ère BAC est un problème **multi-factoriel**, qui interpelle (ou devrait interpeller) **toutes** les **partie prenantes** de l'enseignement.

• Chaque année le **passeport pour le BAC** révèle que la **moitié** environ de l'auditoire n'a **pas acquis** dans l'enseignement secondaire les **compétences** nécessaires pour participer valablement à un cours de physique générale en 1ère année à l'université. Les services d'**orientation** n'auraient-il pas une part de responsabilité?

• Je n'ai ni les compétences ni les moyens pour analyser en profondeur le problème du taux d'échec élevé en 1ère année, et encore moins pour proposer des pistes de solution. Je dois me limiter à soumettre à votre attention ce que nous faisons dans le cours de BAC1 dont je suis responsable, Physique générale 1 (LBIR1121).

Evaluation en Physique générale 1 (I)

• Extraits du syllabus 2016-2017:

• La note finale est composée des notes des **épreuves électroniques** ou **écrites** suivantes:

2 mini devoirs :	**10 %** ***(= 2 points sur 20)***
interrogation (semaine "smart") :	**10 %** ***(= 2 points sur 20)***
examen en session :	**80 %** ***(= 16 points sur 20)***

• On visera à produire des **réponses totalement correctes**. Un raisonnement correct n'excuse pas les éventuelles erreurs de calculs. Si les copies seront **corrigées** avec **discernement** et **bienveillance**, les erreurs concernant la **dimension physique** ou les **unités** seront toujours considérées comme **inacceptables**.

Evaluation en Physique générale 1 (II)

• L'interrogation et l'examen sont conçus en fonction de la fiche d'activité du cours de telle manière que:

a. **Tous** les **acquis d'apprentissage** soient concernés;

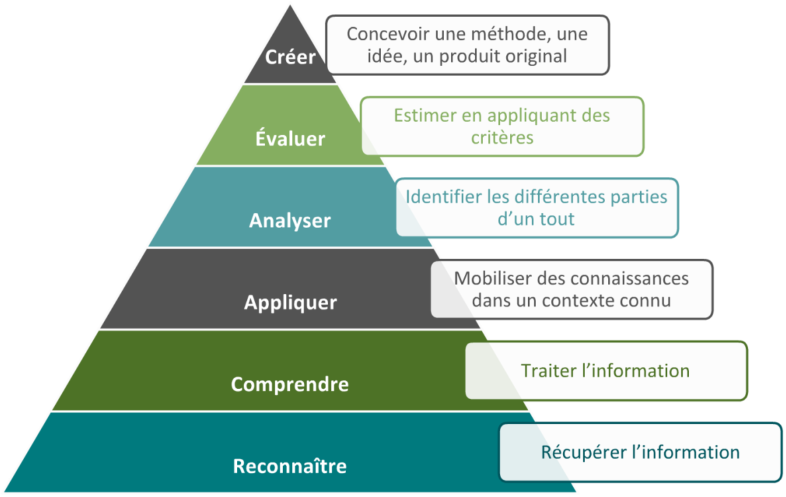
b. La **quasi-totalité des matières** soient concernées;

c. Toute question exige toujours de dépasser le 1er niveau dans la **taxonomie de Bloom** (pas de "question de théorie" ou de simple restitution) (voir-ci-dessous) et excède rarement le 3ème niveau (ce qui ne conviendrait sans doute pas à un cours de BAC1/Q1);

d. Maîtriser les **bases** doit permettre d'obtenir **10/20**, mais pour mériter une note ≥ 15/20, il faut posséder des compétences nettement plus avancées.

Evaluation en Physique générale 1 (III)

Niveaux d'acquisition des connaissances selon B. Bloom



source: http://www.biotechno.fr/IMG/scenari/codifadmob/res/Bloom.png
vu pour la dernière fois le 1er mars 2017

Evaluation en Physique générale 1 (IV)

• Depuis 2017, les examens durent 3 heures au lieu de 4 heures (vu les consignes concernant le manque d'auditoires). L'examen est conçu de telle sorte que les étudiants ne soient **pas excessivement contraints par le temps** (pas de course contre la montre!).

• Les examens comportent **1 ou 2 problèmes ouverts** (avec justification littérale requise) et ≈ **7 problèmes fermés**, pour lesquels on attend uniquement la/les réponse(s) numérique(s) ou symbolique(s).

• Chaque problème donne généralement lieu à de **multiples sous-questions**, qui correspondent aux étapes principales du traitement du problème.

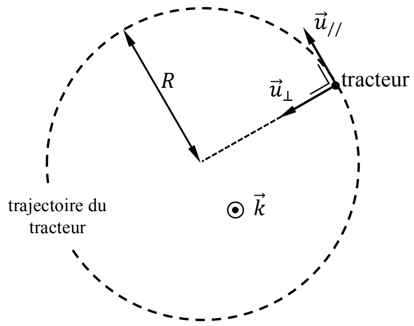
• L'exemple ci-après provient de l'examen de janvier 2017.

Evaluation en Physique générale 1 (V)

4. Sur la piste d'essais de son fabricant, un tracteur agricole de masse $M = 5\times10^3$ kg roule avec une vitesse de norme constante $V = 18$ km/h selon une trajectoire circulaire de rayon $R = 25$ m. L'accélération gravitationnelle vaut $\vec{g} = (-10 \text{ m s}^{-2})\,\vec{k}$, où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire pointant vers le haut.

A tout instant t, on note $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $\vec{F}_{st}(t)$ et $\vec{F}_{ts}(t)$ la vitesse du tracteur (avec $|\vec{v}(t)| = V$), l'accélération du tracteur, la force que le tracteur exerce sur le sol et la force que le sol exerce sur le tracteur. Il est utile d'introduire les vecteurs unitaires suivants:

$$\vec{u}_{//} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad , \quad \vec{u}_{\perp} = \vec{k}\times\vec{u}_{//}$$



Evaluation en Physique générale 1 (VI)

On évaluera les vecteurs $\vec{a}(t)$, $\vec{F}_{st}(t)$ et $\vec{F}_{ts}(t)$ en les projetant sur les vecteurs unitaires $\vec{u}_{//}(t)$, $\vec{u}_{\perp}(t)$ et $\vec{k}$, qui forment une base orthonormée mobile. Ainsi, par exemple, en utilisant ces vecteurs de base, la vitesse du tracteur $\vec{v}(t)$ et son poids $\vec{P}$ s'écrivent

$$\vec{v}(t) = V\,\vec{u}_{//} = (18 \text{ km/h})\,\vec{u}_{//} \quad , \quad \vec{P} = M\,\vec{g} = (-5\times10^4 \text{ N})\,\vec{k}$$

Réponses: $\vec{a}(t) =$ **/1**

$\vec{F}_{st}(t) =$ **/1**

$\vec{F}_{ts}(t) =$ **/1**

nombre maximal de points
pour chaque réponse

Sensibilité du taux de réussite à la méthode de notation (I)

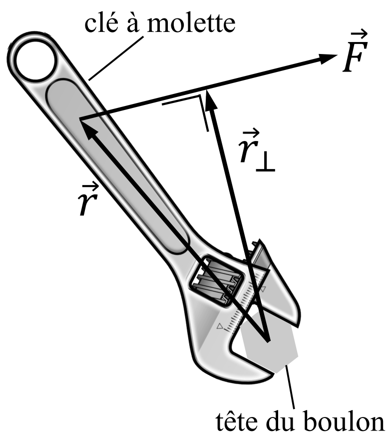
• Nous corrigeons avec **bienveillance**: nous **récompensons ce qui est correct** dans une réponse, en faisant l'hypothèse que l'étudiant **débutant** dispose d'une **marge significative de progression**.

• Nous sommes résolument **opposés**:
- au **laxisme**, qui consisterait à accepter pleinement des réponses qui ne seraient pas totalement correctes;
- à la **dureté**, qui impliquerait d'infliger une note nulle à toute réponse qui ne serait pas totalement correcte.

• On ne peut éviter un certain degré de subjectivité. Toutefois, comme l'illustre l'exemple ci-après (extrait de l'examen de janvier 2017), la bienveillance (accompagnée d'un peu de “bon sens”) conduit à un taux de réussite plutôt favorable.

Sensibilité du taux de réussite à la méthode de notation (II)

7. On doit appliquer à un boulon un couple de serrage d'une norme de $10\,\mathrm{N\,m}$. Dans ce but, on utilise la clé à molette représentée ci-contre. Le fonctionnement de ce dispositif est tel que le couple de serrage appliqué au boulon est égal à $\vec{r}\times\vec{F}$, où $\vec{F}$ désigne la force que l'on exerce sur la clé à molette. Sachant que $|\vec{r}| = 15\ \mathrm{cm}$ et $|\vec{r}_{\perp}| = 10\ \mathrm{cm}$, on demande de calculer la norme de la force $\vec{F}$.



Réponse: $|\vec{F}| =$ **/1.5**

Sensibilité du taux de réussite à la méthode de notation (III)

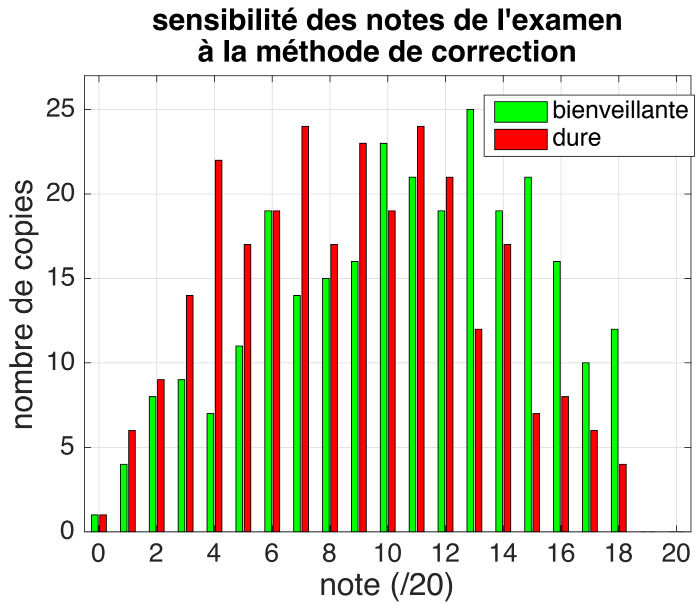
• La réponse correcte est $|\vec{F}| = 100\ \mathrm{N}$. Considérons d'autres réponses et les notes que nous leur attribuons dans un **cadre bienveillant**:

- $|\vec{F}| = 100$ ne fait pas apparaître les unités, mais suggère une bonne compréhension du problème $\Rightarrow$ note: **1.0/1.5** ;
- $|\vec{F}| = 99.89\ \mathrm{N}$ suggère que l'étudiant(e) a mené des calculs trigonométriques pertinents avec sa calculette (d'où une erreur d'arrondi) sans toutefois réaliser qu'une propriété du produit vectoriel permettait de les éviter $\Rightarrow$ note: **1.5/1.5** .

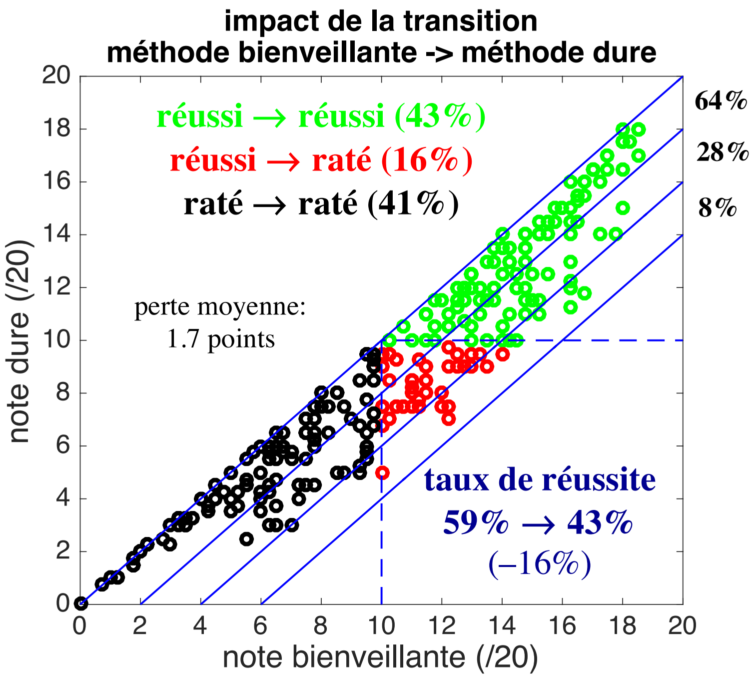
• Le **laxisme** conduirait à attribuer **1.5/1.5** à la première réponse ci-dessus, tandis que la **dureté** conduirait à **0.0/1.5** pour les deux réponses. Naturellement, $|\vec{F}| = 100\ \mathrm{m/s}$ mérite **0.0/1.5** dans **tout système de notation**!

Sensibilité du taux de réussite à la méthode de notation (IV)

• Pour évaluer la sensibilité du taux réussite à la technique de correction, les **copies** de l'examen de **janvier 2017** ont été corrigées une deuxième fois avec **dureté** (sans modifier les notes finales officielles).



Sensibilité du taux de réussite à la méthode de notation (V)



Sensibilité du taux de réussite à la méthode de notation (VI)

• La technique de correction a une influence **importante** mais **pas déterminante** sur le taux de réussite.

• La **conception générale des évaluations** (et la philosophie sous-jacente) joue sans doute aussi un **rôle très significatif**:

- l'adéquation des questions avec les acquis d'apprentissage;
- la fraction de la matière couverte;
- le nombre de questions (peu de question est sans doute défavorable);
- le niveau des processus cognitifs auxquels on fait appel (Bloom).

Rien de tout ceci n'est entièrement objectivable, mais il serait faux de prétendre que tout est subjectif. Des **outils d'"objectivation" existent**.

• Les dispositifs d'aide à la réussite ne peuvent pas non plus être ignorés.

Aide à la réussite (I)

• Le **monitorat**: sauf exception, le professeur et au moins un(e) assistant(e) y participent.

• Le syllabus comprend des informations écrites visant à aider à la réussite:

Annexe A :	Vade-mecum de mathématiques, où **www.auto-math.be** sera recommandé dès la version 2017-2018;
Annexe B :	**Problèmes résolus** de manière très détaillée;
Annexe C :	Exemple d'**interrogation** (avec solutions commentées);
Annexe D :	Exemple d'**examen** (avec solutions commentées);
Annexe E :	**Compilation** des **erreurs** classiques lors de la résolution de problème de mécanique et des conseils pour **détecter** ces erreurs et y **remédier** (voir Appendice II);

Aide à la réussite (II)

• Les **solutions de tous les exercices** sont postées sur Moodle après chaque séance. Idem pour les solutions des épreuves écrites.

• Un r**appel** de **calcul différentiel** et **intégral** est disponible sur le site Moodle du cours (fichier *Rappel_CalculDifferentielIntegral.pdf*).

• On signale le kot à projet **Kotangente** (www.kotangente.be).

• Le syllabus reprend les “10 commandements” **de l'étudiant qui veut réussir à l'Université**, rédigés par la Prof. Françoise Bastin (ULg).

• Il est sans doute crucial que les étudiant(e)s perçoivent que l'équipe enseignante fait preuve de **bienveillance**, d'**empathie** et **sont d'accord sur l'essentiel** (nous ramons dans la même direction...), d'où au moins un debriefing formel par an de l'équipe enseignante (voir Appendice I).

Conclusions

• Le **taux de réussite** en janvier du cours de Physique générale 1 (LPHY1113B devenu LBIR1121) est généralement **supérieur à 50%.**

• La cause de ces résultats favorables n'est pas établie de manière irréfutable, mais on peut penser que les **aides à la réussite** mises en oeuvre, la **conception des examens** (**questions nombreuses** mais courtes, avec un niveau modeste mais >1 dans la taxonomie de Bloom) et la **technique de notation** (**bienveillance** sans **laxisme**, ni **dureté** excessive) sont favorables aux **étudiants débutants**.

• La méthode d'enseignement est **classique** avec des **adaptations** modestes mais **régulières** (un “petit pas” par an), selon une approche librement (et involontairement) inspirée de la boucle OODA[2].

[2] Osinga F., 2005, *Science, Strategy and War - The Strategic Theory of John Boyd*, Eburon Academic Publishers, Deft, The Netherlands, 339 pages, ISBN 90 5972 058 X

Remerciements

Je remercie:

- les assistant(e)s, qui se sont (ou sont encore) grandement impliqués dans tous les aspects de ce cours;
- le Pr Pierre Lermusiaux (Dpt. of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology) pour avoir pris le temps de m'expliquer en détail comment il conçoit et note ses examens;
- Nathalie Kruyts (Louvain Learning Lab) pour ses conseils pédagogiques;
- le Vice-doyen de la Faculté des bioingénieurs (Pr Emmanuel Hanert) pour l'autorisation de mener la partie empirique de cette étude;
- Jaya Naithani pour sa précieuse aide logistique, sans laquelle cette étude n'aurait pas été possible.

Appendice I

Réunion du 05 février 2016 avec les assistants en charge des exercices de LBIR1121 (Physique générale 1) en 2015-2016

Présents: Eric Deleersnijder, Guerric Lemoine, David Vincent

- Impression générale partagée par ED, GL et DV: le cours s'est déroulé dans un meilleur état d'esprit que l'année dernière (étudiants moins indisciplinés, attitude plus positive, résultats encourageants malgré le durcissement notoire des épreuves écrites). Il semble difficile d'expliquer rationnellement ce phénomène.

- GL et DV notent certains problèmes de compréhension au cours magistral, notamment les (trop nombreux?) cas de mouvement oscillatoire et le fait que l'énergie potentielle gravitationnelle est négative en mécanique céleste. Par contre, les dérivées partielles ne semblent pas avoir posé de problème.

- ED signale qu'il s'est engagé à poursuivre la contextualisation du cours. Il s'agit d'une activité chronophage pour lui: a titre d'exemple, il mentionne le temps considérable consacré à se renseigner sur les dendromètres, qui pourraient trouver leur place dans les rappels de trigonométrie. Il signale également la difficulté de trouver des informations d'un niveau adéquat sur les machines agricoles.

- ED se propose de rédiger un syllabus classique, qui remplacerait les “transparents verbeux” qui tiennent actuellement lieu de support de cours. GL et DV signalent que, dans ce cas, le vade-mecum de mathématiques et les problèmes résolus devraient rester des entités séparées. ED signale qu'au rythme auquel il est capable d'écrire (voir le premier chapitre écrit en 2015 à titre d'essai), ce syllabus demanderait plus de 6 mois de travail, de sorte qu'il est quasiment impossible que le nouveau syllabus soit prêt pour la rentrée 2016. Toutefois, on pourrait envisager de conserver provisoirement un support de cours divisé en deux parties. La première partie serait un syllabus classique et serait disponible en septembre 2016, tandis que la seconde partie ne serait convertie en syllabus classique que plus tard (pour l'année académique 2017-2018?).

- Monitorat: environ 5% des étudiants y participent régulièrement. Ces habitués ne sont pas ceux qui en auraient le plus besoin. Il semble que les étudiants accordent la priorité au monitorat de chimie, qui se déroule dans une autre salle. On pourrait envisager de réduire la présence des assistants au monitorat.

- Mini devoirs électroniques (introduits pour la première fois cette année): GL et DV rapportent que certains étudiants ont copié des bonnes réponses sur les autres, mais parfois aussi des mauvaises réponses. ED déclare que cela ne le dérange pas si les étudiants font les mini devoirs en groupe: d'après lui, l'important c'est qu'ils y travaillent.

Appendice I

GL et DV ne partagent pas entièrement cet avis et se demandent s'il ne serait pas possible de faire faire les mini devoirs en salle informatique. Il faudrait se renseigner.

- La disparition des labos ne semble pas avoir suscité de commentaires chez les étudiants.

- Il semblerait que Kotangente propose parfois des approches simplistes, voire fausses. Il faudrait mettre en garde les étudiants contre les approches simplistes, qui ne fonctionnent pas tous les cas. Trouver un exemple percutant? Il est envisagé d'inviter Kotangente à une réunion de concertation. L'idée est séduisante, mais ED signale que Kotangente n'est qu'une des sources d'informations extérieures concernant la mécanique. Il y en a bien d'autres (livres, cours en ligne, cours particuliers, copains, etc.). On ne peut pas tout contrôler. ED est d'avis que le message à faire passer aux étudiants que c'est sous leur seule responsabilité qu'ils vont chercher des informations en dehors du cours LBIR1121 et de son équipe enseignante. Les étudiants doivent développer leur sens critique pour être en mesure de séparer le bon grain de l'ivraie. A cet égard, ED qu'on pense que l'on pourrait aider les étudiants en traitant, par exemple, le cas du pendule conique qui est considérablement plus complexe que le carrousel volant (qui est dans le cours aujourd'hui) et qui est souvent abordé de manière incomplète (voire fausse) dans des exemples disponibles en ligne.

- Le taux de réussite et la distribution des notes sont bien meilleurs en janvier (notes finales) qu'à l'interrogation. On estime que cela est dû au fait que nombre d'étudiants ne commencent à travailler qu'en novembre, voire en décembre. Peut-être serait-il possible de réaliser une étude statistique simple sur ce sujet. A voir...

Ce document a été approuvé par tous les participants à la réunion.

Appendice II

Annexe E: Sur la détection des erreurs

E.1. L'homme qui ne tente rien ne se trompe qu'une fois[1]

Le philosophe romain Cicéron aurait écrit

L'erreur est une chose commune; seul l'ignorant persévère dans l'erreur.

Il ne faut pas craindre outre mesure de se tromper, mais il faut être capable de détecter ses erreurs et y porter remède de manière appropriée. L'expérience suggère qu'il n'est pas toujours aisé pour les étudiants de réaliser que la solution qu'ils proposent pour un problème donné est fausse. C'est la raison pour laquelle quelques conseils en matière de détection des erreurs sont fournis ci-après.

Au cours de la résolution d'un problème, commettre des erreurs est fréquent, voire naturel. S'angoisser pour cette raison est inutile. Par contre, il est capital de mettre en place une stratégie visant à détecter les erreurs, ce qui est la première étape en vue de leur correction.

E.2. La solution est-elle plausible?

Refaire ses calculs de nombreuses fois est une méthode qui s'avère généralement peu fructueuse. Pour réaliser qu'une réponse est fausse, il est bien souvent préférable de prendre du recul et d'adopter une **approche différente** de celle qui a mené à la solution. Ainsi, après avoir établi une solution, la première question qu'il convient de se poser concerne la **plausibilité** de la réponse obtenue. Celle-ci est-elle en accord avec le bon sens? Est-elle crédible?

Pour illustrer ce questionnement, on va réfléchir à certains aspects de la solution du problème posé ci-dessous:

> Une personne ivre installée sur le balcon de son appartement lance une canette de bière. Au moment du lancer, la vitesse de la canette vaut $u(0)\vec{i} + w(0)\vec{k}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire horizontal tandis que $\vec{k}$ désigne un vecteur unitaire vertical qui pointe vers le haut. On sait que $u(0) = 6$ m s^{-1} et $w(0) = 5$ m s^{-1}. Le poids est la seule force qui agit sur la canette durant son vol; en effet, la résistance de l'air est considérée comme négligeable. Si $-g\vec{k}$ désigne l'accélération de la pesanteur, avec $g = 10$ m s^{-2}, on demande d'évaluer le temps T qui sépare l'instant du lancer du moment où la canette repasse par l'altitude à laquelle elle a été lancée. A cet instant, la vitesse de la canette vaut $u(T)\vec{i} + w(T)\vec{k}$. On demande de calculer T, $u(T)$ et $w(T)$.

Il s'agit de trouver la vitesse d'une canette de bière à l'instant $t = T$ où celle-ci repasse par l'altitude à laquelle elle a été lancée. Supposons que l'on effectue des calculs qui nous conduisent à penser que la composante verticale de la vitesse soit $w(T) = 5$ m s^{-1}. A l'évidence, à l'instant $t = T$, la vitesse verticale de la cannette est dirigée vers le bas. Or, l'énoncé du problème stipule que le vecteur unitaire vertical, $\vec{k}$, pointe vers le haut et que la

[1] Cette phrase est généralement attribuée au sage chinois Lao Tseu.

vitesse verticale à l'instant $t = T$ s'écrit $w(T)\vec{k}$. Donc, si $w(T)$ est positif (comme suggéré ici), alors la vitesse verticale est dirigée vers le haut, ce qui n'est pas acceptable. La solution proposée ne peut pas être correcte. Il faut examiner les calculs qui ont conduit à cette réponse et détecter l'erreur — ou les erreurs.

Examiner la plausibilité d'une réponse ne se limite pas à examiner le signe de celle-ci. Il est également nécessaire de s'interroger sur la plausibilité de son ordre de grandeur. Si l'on trouve que la vitesse verticale de la canette est $w(T) = -500\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, le signe de cette solution est correct, mais l'ordre de grandeur est, à l'évidence, aberrant. En effet, $500\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ est une vitesse bien supérieure à celle du son dans l'air; on aurait donc une “canette supersonique”! Il est peu probable qu'une telle réponse soit correcte...

Il faut aussi s'interroger sur la nature **scalaire** ou **vectorielle** de la réponse à fournir. On demande d'évaluer $w(T)$, c'est-à-dire la composante verticale de la vitesse. La réponse à fournir est une quantité scalaire et non un vecteur. Ainsi, $w(T) = (-5\ \mathrm{m\,s^{-1}})\,\vec{k}$ est une réponse inacceptable: l'expression à gauche du signe “=” est un scalaire tandis que celle située à droite de ce signe est un vecteur. En *t*=*T*, la réponse correcte est $w(T) = -5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Par contre, si l'on avait demandé d'évaluer la vitesse verticale, qui est un vecteur (et non un scalaire), alors la réponse correcte aurait été $(-5\ \mathrm{m\,s^{-1}})\,\vec{k}$.

Les considérations ci-dessus s'appliquent à une réponse numérique. Pour les réponses symboliques, le questionnement sur la nature scalaire ou vectorielle de la réponse souhaitée est tout aussi pertinent. Par ailleurs, il faut s'interroger sur la plausibilité du comportement de la fonction obtenue. A cet égard, on considère le problème ci après:

> On étudie une éolienne dont la surface balayée par les pales vaut S. On note ρ et W la masse volumique de l'air (qui s'exprime en $\mathrm{kg\,m^{-3}}$) et la vitesse du vent, qui sont des constantes. Pendant l'intervalle de temps T, l'éolienne fournit une quantité d'énergie électrique qui vaut $E = k\rho^a S W^b T^c$, où k est un coefficient adimensionnel (sans dimension) tandis que a, b et c sont des entiers positifs dont on demande de déterminer la valeur — de telle sorte que la formule précitée soit dimensionnellement homogène/correcte. On demande aussi de calculer la puissance électrique, P, fournie par l'éolienne.

Supposons un instant que les calculs effectués conduisent à $b = -1$, ce qui suggère que l'énergie fournie diminue si la vitesse du vent, W, augmente. En effet, si l'on double la vitesse du vent, l'énergie vaut alors

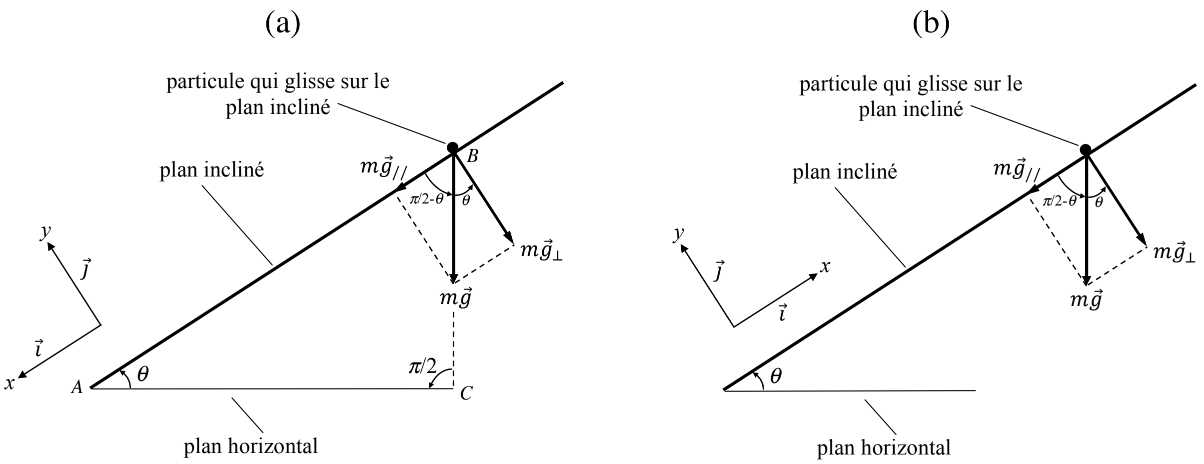
$$k\rho^a S(2W)^b T^c \;=\; k\rho^a S(2W)^{-1} T^c \;=\; k\rho^a S\underbrace{2^{-1}}_{=1/2} W^{-1} T^c \;=\; \frac{k\rho^a S W^{-1} T^c}{2} \;=\; \frac{E}{2} \;. \quad \text{(E.2.1)}$$

En d'autres termes, si $b = -1$, l'énergie électrique produite par l'éolienne est réduite de moitié si la vitesse du vent est multipliée par un facteur 2. Qui peut croire cela? La réponse proposée ne peut pas être correcte. La réponse correcte est $b = 3$. Dans ce cas, l'énergie est une fonction croissante de la vitesse du vent. Ainsi, par exemple, si l'on double la vitesse du vent, on multiplie par huit l'énergie fournie:

$$k\rho^a S(2W)^b T^c \;=\; k\rho^a S(2W)^3 T^c \;=\; k\rho^a S\underbrace{2^3}_{=3} W^3 T^c \;=\; 8[k\rho^a S W^3 T^c] \;=\; 8E \;. \quad \text{(E.2.2)}$$

De nombreuses erreurs sont également commises lors de la décomposition d'un vecteur en deux parties, l'une parallèle à une direction donnée et l'autre perpendiculaire à cette direction.

On peut repérer certaines de ces erreurs en faisant preuve de bon sens. Considérons le panneau (a) de la figure ci-dessous et supposons que l'énoncé du problème stipule que θ soit l'angle formé par le plan incliné et un plan horizontal. On peut alors définir par la pensée le triangle rectangle ABC, dont le côté AC est horizontal tandis que BC est vertical. Il s'ensuit immédiatement que les angles dont les sommets sont A et C valent respectivement θ et $\pi/2$. Comme la somme des angles d'un triangle, qu'il s'agisse ou non d'un triangle rectangle, vaut toujours π, on comprend immédiatement que l'angle dont le sommet est B vaut $\pi/2-\theta$.



On souhaite décomposer le poids de la particule étudiée, $m\vec{g}$, en une partie parallèle au plan incliné et une partie perpendiculaire, que l'on note $m\vec{g}_{//}$ et $m\vec{g}_{\perp}$, avec $m\vec{g} = m\vec{g}_{//} + m\vec{g}_{\perp}$. Il vient

$$m\vec{g}_{//} \;=\; mg\cos(\pi/2-\theta)\vec{i} \;=\; mg\sin\theta\,\vec{i} \tag{E.2.3}$$

et

$$m\vec{g}_{\perp} \;=\; -mg\cos\theta\,\vec{j} \;\;, \tag{E.2.4}$$

avec $g=|\vec{g}|$.

Supposons qu'à la suite d'un raisonnement fautif l'on ait écrit $m\vec{g}_{//} \;=\; mg\cos\theta\,\vec{i}$. Si le plan incliné était vertical, on aurait $\theta=\pi/2$ et donc $\cos\theta=\cos(\pi/2)=0$, ce qui impliquerait $m\vec{g}_{//}=0$ alors qu'à l'évidence on devrait avoir $m\vec{g}_{//}=m\vec{g}=mg\vec{i}$. Considérer un cas limite pour lequel certains aspects de la solution sont triviaux, en l'occurrence $\theta=\pi/2$, permet souvent de repérer une erreur. Bien entendu, l'autre cas extrême potentiellement utile est $\theta=0$ (plan incliné horizontal). Par ailleurs, il convient d'être particulièrement attentif à la définition des vecteurs de base. Dans la disposition du panneau (b) de la figure ci-dessus, la relation (E.2.4) reste valable, alors que (E.2.3) doit être remplacée par

$$m\vec{g}_{//} \;=\; -mg\cos(\pi/2-\theta)\vec{i} \;=\; -mg\sin\theta\,\vec{i} \;\;. \tag{E.2.5}$$

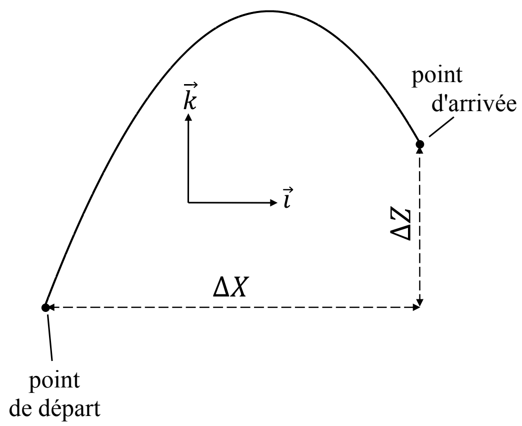
Une inspection minutieuse de la figure permet, en principe, de déterminer le signe qu'il convient d'employer.

E.3. La solution est-elle dimensionnellement homogène?

Après avoir réfléchi à la plausibilité des réponses, il est impératif de vérifier leur

homogénéité dimensionnelle. Une réponse qui n'est **pas dimensionnellement homogène** est **nécessairement incorrecte**. Contrôler l'homogénéité dimensionnelle des réponses est probablement la démarche qui permet de détecter à coup sûr le plus grand nombre d'erreurs. Il ne peut être question d'omettre cette étape de la vérification des réponses. Pour illustrer cela, on considère le problème suivant:

Un obusier tire un projectile qui se déplace au-dessus d'un terrain montagneux sous l'action d'une seule force, son poids. Le temps de vol du projectile vaut $T = 50\ \mathrm{s}$. A l'instant initial, la composante verticale de la vitesse est dirigée vers le haut; celle-ci est négative au moment où l'obus touche le sol. Ceci est illustré dans la figure ci-dessous. L'altitude du point d'arrivée est supérieure à celle du point de départ; la différence d'altitude vaut $\Delta Z = 2.5\times 10^3\ \mathrm{m}$. La constante $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ désigne l'accélération de la pesanteur. Le vecteur qui lie le point de départ de l'obus à son point d'arrivée est $\Delta X\,\vec{i} + \Delta Z\,\vec{k}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire horizontal tandis que $\vec{k}$ est le vecteur unitaire vertical qui pointe vers le haut. Le vecteur $u_0\,\vec{i} + w_0\,\vec{k}$ représente la vitesse initiale de l'obus. Sachant que $\Delta X = 5\times 10^3\ \mathrm{m}$, on demande de calculer la composante horizontale et la composante verticale de la vitesse initiale, c'est-à-dire u_0 et w_0. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, on demande d'expliquer comment on peut calculer la composante verticale de la vitesse au point d'impact, $w(T)$.



Imaginons que l'on trouve que la composante verticale de la vitesse de l'obus au moment de l'impact soit $w(T) = -\sqrt{w_0^2 - 3\Delta Z}$. Evaluons le carré de cette expression: on obtient ainsi $w^2 = w_0^2 - 3\Delta Z$. Cette expression n'est pas dimensionnellement homogène: si les deux premiers termes ont la même dimension $[w^2] = [w]^2 = (LT^{-1})^2 = L^2T^{-2} = [w_0]^2 = [w_0^2]$, force est de constater que la dimension du troisième terme est différente. En effet, celui-ci a la dimension physique $[3\Delta Z] = [3]\times[\Delta Z] = (M^0L^0T^0)\times[\Delta Z] = 1\times[\Delta Z] = [\Delta Z] = L$, ce qui conduit à suspecter que ce terme est entaché d'une erreur. L'expression correcte de la vitesse verticale est $w(T) = -\sqrt{w_0^2 - 2g\Delta Z}$. En élevant cette expression au carré on obtient aisément $w^2 = w_0^2 - 2g\Delta Z$. La dimension du troisième terme est maintenant

$$\begin{aligned}[2g\Delta Z] &= [2]\times[g]\times[\Delta Z] = (M^0L^0T^0)\times[g]\times[\Delta Z] \\ &= 1\times[g]\times[\Delta Z] = [g]\times[\Delta Z] = (LT^{-2})\times L = L^2T^{-2}\end{aligned} \tag{E.3.1}$$

Cette fois, tous les termes ont la même dimension physique, L^2T^{-2}. La réponse est désormais acceptable du point de vue dimensionnel, ce qui ne prouve pas qu'elle soit correcte.

Appendice II

En effet, l'expression $w(T) = -\sqrt{w_0^2 - 3g\Delta Z}$ est également dimensionnellement homogène. Quelle est alors l'expression correcte? Malheureusement, l'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer que c'est $w(T) = -\sqrt{w_0^2 - 2g\Delta Z}$, qui est correcte; l'analyse dimensionnelle permet uniquement de prouver que l'expression $w(T) = -\sqrt{w_0^2 - 3\Delta Z}$ est nécessairement fausse.

On pourrait objecter que vérifier l'homogénéité dimensionnelle n'est pas toujours une opération simple car il se pourrait que l'on ne connaisse pas par coeur la dimension physique (ou les unités) de chacune des variables utilisées en mécanique. Le tableau ci-dessous (que l'on trouve également dans la première leçon de ce support de cours) énumère les équations aux dimensions et les unités des variables habituellement utilisées en mécanique. En inspectant ce tableau, on comprendra facilement qu'il n'est nullement nécessaire de l'apprendre par coeur. Il suffit de connaître la dimension physique d'une vitesse (LT^{-1}) et d'une accélération (LT^{-2}) et de retenir les trois lignes placées à la base du tableau pour être en mesure de reconstituer la dimension (et les unités) de toutes les variables pertinentes.

Equations aux dimensions et unités des variables couramment utilisées en mécanique

variable	***a***	***b***	***c***	**équation aux dimensions**	**unités du Système international (SI)**
masse	1	0	0	$M^1L^0T^0 = M$	kilogramme (kg)
longueur	0	1	0	$M^0L^1T^0 = L$	mètre (m)
temps	0	0	1	$M^0L^0T^1 = T$	seconde (s)
vitesse	0	1	-1	$M^0L^1T^{-1} = LT^{-1}$	m s^{-1}
accélération	0	1	-2	$M^0L^1T^{-2} = LT^{-2}$	m s^{-2}
force	1	1	-2	$M^1L^1T^{-2} = MLT^{-2}$	Newton (N) = kg m s^{-2}
travail, énergie	1	2	-2	$M^1L^2T^{-2} = ML^2T^{-2}$	Joule (J) = kg m^2 s^{-2}
puissance	1	2	-3	$M^1L^2T^{-3} = ML^2T^{-3}$	Watt (W) = kg m^2 s^{-3}

vitesse = longueur / temps • accélération = vitesse / temps
force = masse × accélération • travail ou énergie = force × déplacement
puissance = force × vitesse

E.4. L'énergie mécanique se conserve-t-elle?

Les techniques de vérification évoquées jusqu'ici peuvent être appliquées à la plupart des problèmes. D'autres raisonnements, plus subtils, peuvent également s'avérer utiles, même si le nombre de problèmes pour lesquels ils sont adéquats est sans doute assez réduit. Si l'**énergie mécanique** du système étudié est **conservée**, il importe de vérifier que la réponse fournie est bien compatible avec cette contrainte. Pour illustrer cela, on considère une fois encore le problème posé en page E.1. La canette de bière dont on étudie le mouvement est soumise à une seule force, son poids. Ce dernier est une force conservative: l'énergie mécanique (énergie cinétique + énergie potentielle) de la canette reste constante au cours de son mouvement. Si m et $Z(t)$ désignent respectivement la masse de la canette et son altitude, alors, à tout instant t, l'énergie mécanique de la canette est égale à l'énergie mécanique initiale:

$$\frac{1}{2}m[u(t)^2 + w(t)^2] + mgZ(t) \;=\; \frac{1}{2}m[u(0)^2 + w(0)^2] + mgZ(0) \;. \qquad \text{(E.4.1)}$$

On demande de calculer la vitesse verticale à l'instant t=T où la canette repasse par l'altitude à laquelle elle a été lancée. On a donc $Z(T) = Z(0)$. Comme la canette n'est soumise à aucune force horizontale, la vitesse horizontale ne varie pas, ce qui implique $u(T) = u(0)$. En introduisant ces deux contraintes dans la relation (E.4.1) exprimant la conservation de l'énergie mécanique, il vient

$$\frac{1}{2}mw(T)^2 \;=\; \frac{1}{2}mw(0)^2 \quad\Rightarrow\quad w(T)^2 \;=\; w(0)^2 \quad\Rightarrow\quad w(T) \;=\; \pm w(0) \;. \qquad \text{(E.4.2)}$$

L'énoncé du problème stipule que $w(0) = 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. En conséquence, la conservation de l'énergie mécanique de la canette implique $w(T) = \pm 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Si, en intégrant l'équation différentielle associée à la seconde loi de Newton, on obtient une réponse qui n'est pas compatible avec cette contrainte, alors cette réponse est nécessairement incorrecte. Ainsi, par exemple, l'expression $w(T) = -3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ est nécessairement fausse.

On considère maintenant un problème d'une nature différente. Dans le cas d'une collision élastique, l'énergie cinétique du système est conservée. Toute solution ne respectant pas cette contrainte est nécessairement fausse. Dans les autres types de collision, l'énergie cinétique du système diminue. Si l'on aboutit à une solution dans laquelle l'énergie cinétique du système est conservée ou augmente, alors cette solution est nécessairement incorrecte. Pour illustrer le propos, on considère la collision parfaitement inélastique d'une voiture d'une masse d'une tonne et d'un véhicule utilitaire de deux tonnes. La première est à l'arrêt tandis que le second se déplace à la vitesse de 30 km/h. Avant la collision, l'énergie cinétique du système (la somme de l'énergie cinétique de la voiture et de celle de l'utilitaire) vaut

$$\frac{1}{2}\times(1\ \text{tonne})\times(0\ \mathrm{km\,h^{-1}})^2 + \frac{1}{2}\times(2\ \text{tonne})\times(30\ \mathrm{km\,h^{-1}})^2 \;=\; 900\ \text{tonne}\ \mathrm{km^2\,h^{-2}} \;. \qquad \text{(E.4.3)}$$

Supposons qu'après quelques calculs on aboutisse à une solution stipulant qu'après le choc la vitesse de la voiture et du camion soit 30 km/h. L'énergie cinétique correspondante vaut

$$\frac{1}{2}\times(1\ \text{tonne})\times(30\ \mathrm{km\,h^{-1}})^2 + \frac{1}{2}\times(2\ \text{tonne})\times(30\ \mathrm{km\,h^{-1}})^2 \;=\; 1350\ \text{tonne}\ \mathrm{km^2\,h^{-2}} \;. \qquad \text{(E.4.4)}$$

Cette énergie cinétique est supérieure à l'énergie cinétique qui prévalait avant le choc. La solution est nécessairement inacceptable. D'après la solution correcte, la vitesse des deux véhicules après la collision est de 20 km/h. L'énergie cinétique correspondante est

$$\frac{1}{2}\times(1\ \text{tonne})\times(20\ \mathrm{km\,h^{-1}})^2 + \frac{1}{2}\times(2\ \text{tonne})\times(20\ \mathrm{km\,h^{-1}})^2 \;=\; 600\ \text{tonne}\ \mathrm{km^2\,h^{-2}} \;. \qquad \text{(E.4.5)}$$

Cette valeur est inférieure à celle qui prévalait avant le choc. Par conséquent, cette solution est plausible.

Déterminer si l'énergie mécanique est conservée ou non peut exiger de la perspicacité. On considère un cylindre qui roule sans glissement sur un plan incliné. Cet objet est soumis à son poids, qui est une force conservative, qui n'empêche donc pas la conservation de l'énergie cinétique. C'est grâce au frottement que le roulement sans glissement est possible. En l'absence de frottement, le corps cylindrique glisserait sur le plan incliné — et conserverait son moment cinétique initial. Mais, la vitesse du point de contact du cylindre et du plan incliné est nulle — par définition du roulement sans glissement. Donc, la réaction du plan incliné ne travaille pas, bien qu'une partie de cette réaction soit due au frottement. Justifier la conservation de l'énergie mécanique demande ici un raisonnement assez subtil: c'est le **frottement** qui permet le **roulement sans glissement** et c'est parce qu'il n'y a **pas de glissement** que la **force de frottement ne dissipe pas d'énergie**. Il ne faut donc pas tomber dans le **piège** qui consiste à **affirmer qu'une force due au frottement dissipe nécessairement de l'énergie**. La réalité est plus nuancée...

E.5. Comment aborder les questions à choix multiples?

Les questions à choix multiples constituent une méthode d'évaluation qui est utilisée de plus en plus fréquemment, mais est parfois considérée comme vexatoire par les étudiants. Il convient de réaliser que ces questions ne sont pas si différentes de problèmes plus ouverts. A titre d'illustration, on considère le problème suivant:

On étudie la chute d'un corps en milieu résistif. Si t désigne le temps, la vitesse de ce corps, $\vec{v}(t)$, évolue selon l'expression suivante

$$\vec{v}(t) = e^{-\lambda t}\,\vec{v}_0 + \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\,\vec{g} \qquad \text{(E.5.1)}$$

où λ est une constante positive ($\lambda > 0$); $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$ sont des vecteurs constants. Bien entendu, $\vec{g}$ représente l'accélération gravitationnelle. On se rappellera que l'argument de la fonction exponentielle doit être adimensionnel.

A mesure que le temps progresse, la vitesse tend vers une constante, la vitesse limite, que l'on note $\vec{v}_\infty$:

$$\vec{v}_\infty = \lim_{t\to\infty} \vec{v}(t) \qquad \text{(E.5.2)}$$

Deux forces s'exercent sur le corps étudié, le poids, $m\vec{g}$ (où m désigne la masse) et la traînée, $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ (où μ est une constante positive). Parmi les propositions suivantes, entourez celle qui est totalement correcte.

a. A la limite $t \to \infty$, la vitesse tend vers la constante $\vec{v}_\infty$. L'accélération est alors nulle. En vertu de la seconde loi de Newton, la résultante du poids et de la traînée est nulle. Il s'ensuit que la masse du corps vaut $m = \mu / \lambda$.

b. A la limite $t \to \infty$, la vitesse tend vers la constante $\vec{v}_\infty$. L'accélération est alors nulle. En vertu de la seconde loi de Newton, la résultante du poids et de la traînée est nulle. Il s'ensuit que la masse du corps vaut $m = \lambda / \mu$.

c. La norme de la traînée considérée ici est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse.

d. Les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_\infty$ satisfont toujours la relation $\vec{v}_0 = \vec{v}_\infty$.

Appendice II

L'énoncé stipule que la traînée est égale à $-\mu\vec{v}$ (où μ est une constante): la traînée est proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$. La norme de la traînée est donc proportionnelle à la norme de la vitesse et non au carré de cette norme. A l'évidence, la proposition (c) est fausse.

Les propositions (a), (b) et (d) font intervenir la vitesse limite. Il semble donc naturel d'évaluer cette vitesse. Pour ce faire, on combine (E.5.1) avec (E.5.2) et on effectue les calculs suivants:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\infty &= \lim_{t\to\infty} \vec{v}(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\left(e^{-\lambda t}\,\vec{v}_0 + \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\vec{g} \right)}_{=\vec{v}(t),\text{ voir (E.5.1)}} \\ &= \underbrace{\left(\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} \right)}_{=0,\text{ car }\lambda>0} \vec{v}_0 + \frac{1-\overbrace{\left(\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} \right)}^{=0,\text{ car }\lambda>0}}{\lambda}\vec{g} = \frac{\vec{g}}{\lambda} \end{aligned} \tag{E.5.3}$$

La vitesse limite, $\vec{v}_\infty = \vec{g}/\lambda$, est proportionnelle à l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ et le coefficient de proportionnalité ($1/\lambda$) est positif. Par conséquent, la vitesse limite à la même direction et le même sens que $\vec{g}$: la vitesse imite est verticale et orientée vers le bas.

Comme le montre (E.5.3), la vitesse limite est indépendante de $\vec{v}_0$, qui désigne en fait la vitesse initiale, $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$. On ne peut donc pas affirmer que les vitesses $\vec{v}_\infty$ et $\vec{v}_0$ soient toujours égales; il est cependant envisageable que ces vitesses soient, par hasard, égales. La proposition (d) ne peut donc être acceptée.

L'argument des exponentielles comprises dans l'expression (E.5.1) de la vitesse, c'est-à-dire λt, doit être adimensionnel:

$$1 = [\lambda t] = [\lambda][t] = [\lambda]T \quad \Rightarrow \quad [\lambda] = \frac{1}{T}\ . \tag{E.5.4}$$

Par ailleurs, la dimension physique du coefficient de traînée μ s'établit comme suit:

$$MLT^{-2} = \underbrace{[\vec{f}]}_{=MLT^{-2}} = [-\mu\vec{v}] = [\mu]\underbrace{[\vec{v}]}_{LT^{-1}} = [\mu]LT^{-1}\ , \tag{E.5.5}$$

ce qui implique

$$[\mu] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1} = \frac{M}{T} \tag{E.5.6}$$

Selon la proposition (b), la masse du corps vaut λ/μ. Mais, d'après (E.5.4) et (E.5.6), la dimension physique de ce quotient est $[\lambda/\mu] = [\lambda]/[\mu] = T^{-1}/(MT^{-1}) = 1/M$. Ainsi, le quotient λ/μ n'a pas la dimension physique d'une masse — mais bien celle de l'inverse d'une masse. Donc, la proposition (b) n'est pas entièrement correcte.

Il reste la proposition (a), que l'on peut supposer correcte, les questionnaires à choix multiples n'étant pas censés comporter des pièges. Néanmoins, il n'est pas inutile de vérifier chacun des éléments de cette proposition. A la limite $t\to\infty$, la vitesse tend bien vers une constante, comme le prouve (E.5.3). La vitesse étant constante, l'accélération est nulle. La seconde loi de Newton implique que la résultante des forces doit être nulle. Ainsi, la somme du poids et de la traînée doit être nulle: $m\vec{g} - \mu\vec{v}_\infty = 0$. Or, la relation (E.5.3) indique que $\vec{v}_\infty = \vec{g}/\lambda$. Il vient alors $m\vec{g} - \mu(\vec{g}/\lambda) = 0$, ce qui implique $m = \mu/\lambda$, comme annoncé dans la proposition (a), qui est donc bien entièrement correcte.

E.6. Ne pas répondre à une autre question

Dans les questions partiellement ou totalement ouvertes dans lesquelles on demande de produire une réponse argumentée, il est fréquent de trouver des raisonnements ou des développements mathématiques qui sont parfaitement corrects mais ne répondent pas à la question posée. Ainsi, on considère le problème suivant:

> Un bombardier vole à la vitesse constante $\vec{v}_0$. A l'instant t=0, il se trouve au point $\vec{r}_0$ et il largue une bombe de masse m, qui se déplace ensuite dans l'atmosphère sous l'influence d'une seule force, son poids $m\vec{g}$, où le vecteur $\vec{g}$ représente l'accélération gravitationnelle. L'énergie mécanique de la bombe est conservée au cours de son mouvement. Justifier!

En guise de justification, on trouve fréquemment un texte comme celui-ci:

L'énergie de la bombe est conservée. Par conséquent, à mesure que la bombe perd de l'altitude, son énergie potentielle gravitationnelle diminue. Pour assurer la conservation de l'énergie mécanique, l'énergie cinétique augmente, ce qui implique la croissance de la vitesse. En d'autres termes, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique.

Dans ces quelques lignes, on part de l'hypothèse que l'énergie mécanique est conservée et on énonce certaines des conséquences de cette propriété de conservation. Ce faisant on ne produit pas la justification demandée.

Il arrive également que l'on propose des développements visant à calculer explicitement l'énergie mécanique de la bombe. Dans ce but, on peut commencer par écrire la seconde loi de Newton: $m\vec{a} = m\vec{g}$, où $\vec{a}$ désigne l'accélération de la bombe. Il vient immédiatement $\vec{a} = \vec{g}$. L'accélération de la bombe reste donc constante au cours de son mouvement.

L'accélération de la bombe étant égale à la constante $\vec{g}$, on obtient facilement la vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur position $\vec{r}(t)$ à tout instant t:

$$\vec{a}(t) = \vec{g} = const. \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2} \tag{E.6.1}$$

On trouve des relations de ce type dans le formulaire disponible lors des épreuves écrites. Bien entendu, il est également possible de les ré-établir soi-même en intégrant l'équation de Newton $\vec{a} = \vec{g}$ et en tenant compte des conditions initiales $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ et $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Ces dernières signifient que la position et la vitesse initiales de la bombe sont identiques à celles du bombardier au temps t=0.

Par définition, l'énergie mécanique de la bombe $E(t)$ est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle:

$$E(t) \equiv K(t) + U[\vec{r}(t)] \equiv \overbrace{\frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2}^{\substack{\text{énergie cinétique} \\ =K(t)}} + \overbrace{[-m\vec{g} \bullet \vec{r}(t)]}^{\substack{\text{énergie potentielle} \\ \text{gravitationnelle} \\ =U[\vec{r}(t)]}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m(\vec{v}_0 + \vec{g}t)\bullet(\vec{v}_0 + \vec{g}t)}_{=K(t),\text{ voir (E.6.1)}} + \underbrace{\left[-m\vec{g}\bullet\left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}\right)\right]}_{=U[\vec{r}(t)],\text{ voir (E.6.1)}} \tag{E.6.2}$$

En effectuant les produits scalaires ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m(\vec{v}_0 + \vec{g}t)\bullet(\vec{v}_0 + \vec{g}t) - m\vec{g}\bullet\left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + m(\vec{v}_0 \bullet \vec{g})t + \frac{1}{2}m|\vec{g}|^2 t^2 - m\vec{g}\bullet\vec{r}_0 - m(\vec{g}\bullet\vec{v}_0)t - \frac{1}{2}m|\vec{g}|^2 t^2 \end{aligned} \tag{E.6.3}$$

Cette expression se simplifie immédiatement en

$$E(t) = \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 - m\vec{g}\bullet\vec{r}_0 \equiv E_0 \tag{E.6.4}$$

A tout instant, l'énergie mécanique est égale à la constante E_0, qui représente l'énergie mécanique initiale de la bombe.

Ci-dessus, on a **démontré** que l'énergie mécanique de la bombe se conserve (reste constante) au cours de son mouvement, mais on n'a pas expliqué pourquoi il en allait ainsi. En d'autres termes, on a produit une **démonstration**, qui ne constitue pas la **justification** demandée. La justification demandée fait appel au corpus théorique du Chapitre 6. On y a établit que l'énergie mécanique d'un point matériel soumis à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas se conserve. Dans le cas présent, la bombe est soumise à une seule force, son poids, qui est une force conservative, comme on l'a expliqué dans le Chapitre 6. La justification souhaitée peut alors s'écrire de manière très concise:

> *La bombe est soumise à une seule force, son poids. Celui-ci est une force conservative. Donc, en vertu de la théorie concernant l'énergie d'un point matériel, l'énergie mécanique de la bombe se conserve.*

Cette réponse constitue une justification — et non une démonstration. Elle est brève, mais parfaitement correcte.

Un problème plus complexe peut également illustrer ce propos:

Un skieur, que l'on assimile à un point matériel, dévale une piste sous l'influence de son poids et de la réaction de la piste. On néglige les forces de frottement. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du skieur est conservée.

Le poids est une force conservative: il est compatible avec la conservation de l'énergie mécanique. Les forces de frottement étant négligées, la réaction de la piste est normale à celle-ci et également à la vitesse du skieur qui est tangente à la piste. La réaction de la piste ne travaille pas. En d'autres termes, le skieur est soumis à une force conservative et à une force qui ne travaille pas. Donc, en vertu de la théorie concernant l'énergie d'un point matériel, l'énergie mécanique du skieur se conserve. Aucun calcul n'est nécessaire pour expliquer pourquoi l'énergie mécanique est conservée.

E.7. Distraction

On considère maintenant un problème dont la résolution exige l'utilisation des deuxième et troisième lois de Newton:

> Un bloc de pierre dont la masse vaut une tonne ($=10^3$ kg) est posé dans un monte-charge, qui se déplace verticalement de sorte que le vecteur-position du bloc de pierre considéré soit
>
> $$\vec{r}(t) \ = \ \vec{r}_0 \ + (\alpha t + \beta t^2)\vec{k}$$
>
> où le vecteur $\vec{r}_0$ est indépendant du temps, tandis que $\vec{k}$ est un vecteur unitaire pointant vers le haut. Par ailleurs, α et β sont des constantes, dont les valeurs sont $\alpha = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $\beta = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. L'accélération gravitationnelle vaut $(-10\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\vec{k}$. Le bloc de pierre est soumis à deux forces, son poids $\vec{P}$ et la force que le monte-charge exerce sur lui $\vec{F}_{bm}(t)$. On demande de calculer le poids du bloc de pierre, son accélération $\vec{a}(t)$, la force $\vec{F}_{bm}(t)$ ainsi que la force que le bloc de pierre exerce sur le monte-charge $\vec{F}_{mb}(t)$.

Le poids du bloc de pierre est $\vec{P} = m\vec{g}$, où $m = 10^3$ kg et $\vec{g} = (-10\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\vec{k}$ désignent la masse du bloc et l'accélération gravitationnelle. En conséquence, le poids du bloc de pierre est

$$\vec{P} \ = \ m\vec{g} \ = \ (10^3\ \mathrm{kg})\times[(-10\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\vec{k}] \ = \ -(10^4\ \underbrace{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}}_{=\mathrm{N}})\,\vec{k} \ = \ -(10^4\ \mathrm{N})\,\vec{k} \qquad \text{(E.7.1)}$$

La vitesse du bloc de pierre est la dérivée de son vecteur-position:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) \ &\equiv \ \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \ = \ \frac{d}{dt}\Big[\vec{r}_0 + (\alpha t + \beta t^2)\vec{k}\Big] \ = \ \overbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}^{=0} + \frac{d}{dt}\Big(\alpha t + \beta t^2\Big)\vec{k} + (\alpha t + \beta t^2)\overbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}^{=0} \\ &= \ [\frac{d}{dt}(\alpha t) + \frac{d}{dt}(\beta t^2)]\vec{k} \ = \ [\underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{=0}t + \alpha\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1} + \underbrace{\frac{d\beta}{dt}}_{=0}t^2 + \beta\underbrace{\frac{dt^2}{dt}}_{=2t}]\vec{k} \ = \ (\alpha + 2\beta t)\vec{k}\end{aligned} \qquad \text{(E.7.2)}$$

L'accélération du bloc vaut alors

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) \ &\equiv \ \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \ = \ \frac{d}{dt}\Big[(\alpha + 2\beta t)\,\vec{k}\Big] \ = \ \left[\frac{d}{dt}(\alpha + 2\beta t)\right]\vec{k} + (\alpha + 2\beta t)\overbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}^{=0} \\ &= \ [\underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{d(2\beta)}{dt}}_{=0}t + 2\beta\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1}]\,\vec{k} \ = \ 2\beta\,\vec{k} \ = \ 2\times\underbrace{(2\,\mathrm{m\,s^{-2}})}_{=\beta}\,\vec{k} \ = \ (4\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\vec{k}\end{aligned} \qquad \text{(E.7.3)}$$

On peut maintenant appliquer la seconde loi de Newton au bloc de pierre:

$$\begin{aligned}m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{bm} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{bm} &= m\vec{a} - \vec{P} \\ &= (10^3\ \mathrm{kg})\times(4\,\mathrm{m\,s^{-2}})\vec{k} - \Big[-(10^4\ \mathrm{N})\vec{k}\Big] = (1.4\times10^4\ \mathrm{N})\vec{k}\end{aligned} \qquad \text{(E.7.4)}$$

En vertu de la troisième loi de Newton, la force que le bloc de pierre applique sur le monte-charge vaut

$$\vec{F}_{mb} \ = \ -\,\vec{F}_{bm} \ = \ -\,(1.4\times10^4\ \mathrm{N})\,\vec{k} \qquad \text{(E.7.5)}$$

Dans le passé, ce problème a été soumis à plusieurs reprises à l'attention des étudiants — sous des formes différentes. De nombreuses copies erronées ont été rendues, qui comportaient des valeurs fausses des forces demandées. La cause en était très fréquemment une évaluation inappropriée de la dérivée temporelle de t^2, qui conduisait à t plutôt que $2t$. Dans ce cas,

l'accélération (incorrecte) vaut $\vec{a}(t) = \beta\vec{k} = (2\ \mathrm{m\,s^{-1}})\vec{k}$, ce qui entraîne les valeurs suivantes (incorrectes) des forces $\vec{F}_{bm} = (1.2\times10^4\ \mathrm{N})\vec{k}$ et $\vec{F}_{mb} = -(1.2\times10^4\ \mathrm{N})\vec{k}$.

Les méthodes de détection des erreurs proposées dans les sections précédentes ne permettent pas de repérer les fautes du type de celles mentionnée ci-dessus. Une inspection attentive des calculs devrait permettre de détecter le problème. En toute hypothèse, il faut se souvenir qu'être capable de dériver des polynômes fait partie des prérequis de ce cours.

Se tromper dans la dérivation d'une fonction relève généralement de la distraction. Dans la même catégorie d'erreurs, on trouve des fautes plus difficiles encore à détecter. Ainsi, on va examiner le problème ci-après:

On considère un ressort dont la raideur vaut $k = 40\ \mathrm{N\,m^{-1}}$. Il est monté en parallèle avec un amortisseur dont le coefficient d'amortissement vaut $\gamma = 5\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$. Le système ressort-amortisseur est en position verticale. La partie supérieure est attachée à une structure fixe, tandis qu'un objet de masse $m = 0.2\ \mathrm{kg}$ est attaché à la partie inférieure du système ressort-amortisseur. Si $X(t)$ désigne l'élongation du ressort mesurée par rapport à sa longueur naturelle, alors on peut modéliser les déplacements de l'objet attaché au ressort au moyen de l'équation suivante (seconde loi de Newton):

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + \gamma\frac{dX}{dt} + kX = mg \ , \tag{E.7.6}$$

où t représente le temps tandis que $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ est l'accélération gravitationnelle. On demande de déterminer la position d'équilibre du système, c'est-à-dire $X_{éq}$, l'élongation du ressort qui prévaut lorsque le système est à l'équilibre (ou au repos). On réalisera également un schéma du système étudié en veillant à ce que l'on comprenne bien où se trouve le ressort, l'amortisseur et l'objet suspendu au système masse ressort.

A l'équilibre, la vitesse et l'accélération sont nulles:

$$\left[\frac{d^2X}{dt^2}\right]_{X=X_{éq}} = 0 = \left[\frac{dX}{dt}\right]_{X=X_{éq}} \tag{E.7.7}$$

En combinant (E.7.6) et (E.7.7), on obtient au point d'équilibre

$$kX_{éq} = mg \quad \Rightarrow \quad X_{éq} = \frac{mg}{k} = \frac{(0.2\ \mathrm{kg})\times(10\ \mathrm{m\,s^{-2}})}{40\ \mathrm{N\,m^{-1}}} = 0.05\ \mathrm{m} \ . \tag{E.7.8}$$

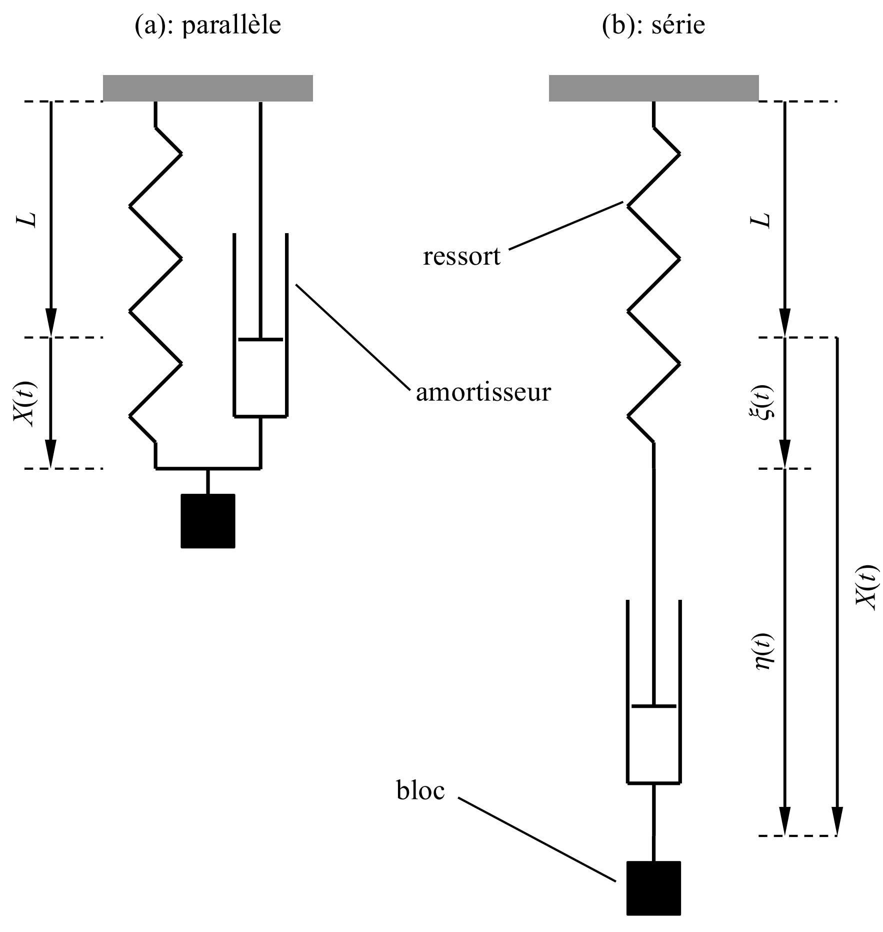
Le montage correct du ressort, de l'amortisseur et du bloc est illustré par le panneau (a) de la figure ci-dessous. Le **ressort** et l'**amortisseur** sont bien installés en **parallèle** et le bilan de quantité de mouvement est correct. On va le montrer. La force que le ressort exerce sur le bloc vaut $F_{br} = -kX$, tandis que celle que l'amortisseur applique sur le bloc s'écrit $F_{ba} = -\gamma\, dX/dt$; $X(t)$ représente l'allongement du ressort (positif vers le bas) mesuré à partir de sa longueur naturelle, L. Ainsi, le bloc se trouve à une distance $L+X$ de la structure fixe à laquelle le ressort et l'amortisseur sont fixés. Par conséquent, en appliquant au bloc la seconde loi de Newton, il vient

Appendice II

$$m\frac{d^2}{dt^2}(L+X) = m\frac{d^2X}{dt^2} = \overbrace{mg + \underbrace{F_{ba}}_{=-\gamma\frac{dX}{dt}} + \underbrace{F_{br}}_{=-kx}}^{\text{résultante des forces agissant sur le bloc}} = mg - \gamma\frac{dX}{dt} - kX \quad . \tag{E.7.9}$$

A l'évidence, cette équation est équivalente à la relation (E.7.6) qui est proposée dans l'énoncé du problème.

Le panneau (b) de la figure ci-dessous illustre un **montage** qui est **incorrect**: le ressort et l'amortisseur sont montés en **série**! Toutefois, ce schéma a été proposé par un certain de d'étudiants, qui étaient sans doute un peu distraits. L'examen du bilan de quantité de mouvement confirme que ce montage est incompatible avec l'équation (E.7.6).



Une simple inspection de la figure ci-dessus permet de réaliser que, selon le montage en série, le bloc se trouve à une distance $L+X = L+\xi+\eta$ du support fixe, où $\xi(t)$ et $\eta(t)$ représentent respectivement l'allongement du ressort (positif vers le bas) et la longueur de l'amortisseur. En appliquant au bloc de masse m la seconde loi de Newton, il vient

$$m\frac{d^2}{dt^2}(L+X) = m\frac{d^2X}{dt^2} = m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m\frac{d^2\eta}{dt^2} = mg + F_{ba} \quad . \tag{E.7.10}$$

La force que l'amortisseur exerce sur le bloc vaut $F_{ba} = -\gamma\, d\eta / dt$. La troisième loi de Newton implique $F_{ba} = -F_{ab}$. Il est de tradition de négliger la masse de l'amortisseur. Donc, la somme des forces agissants sur l'amortisseur doit être nulle: $F_{ab} + F_{ar} = 0$, où $F_{ar} = -k\xi$ est la force que le ressort applique sur l'amortisseur. On peut alors réécrire (E.7.10) sous la forme suivante:

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = mg - \gamma\frac{d\eta}{dt} = mg - k\xi \quad . \tag{E.7.11}$$

Supposons que le bloc soit en équilibre. Son accélération, d^2X / dt^2 , doit être nulle. L'équation ci-dessus implique que l'allongement du ressort soit constant, $\xi = mg / k$, mais aussi que la vitesse d'allongement de l'amortisseur soit constante

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{mg}{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad \eta(t) = \eta(0) + \frac{mgt}{\gamma} \quad . \tag{E.7.12}$$

Il s'ensuit que la distance séparant le bloc du support fixe augmente linéairement dans le temps

$$L + X = L + \frac{mg}{k} + \eta(0) + \frac{mgt}{\gamma} \quad . \tag{E.7.13}$$

Le bloc est donc en mouvement rectiligne uniforme, ce qui ne correspond évidemment pas à un état d'équilibre. Ceci confirme que le second montage est incorrect.

Par ailleurs, ce dispositif, au contraire de celui illustré dans le panneau (a), ne produit aucun amortissement au sens où on l'entend dans la suspension des véhicules automobiles, par exemple.

E. 8. Que faire en pratique?

Les solutions incorrectes examinées dans cette section ne sont pas issues de l'imagination de l'auteur de ces notes de cours. Elles ont été observées sur des copies rendues par les étudiants de cours d'introduction à la mécanique— ou auraient pu l'être.

Se tromper dans le cours de développements mathématiques est quasiment inévitable. Réaliser que l'on a commis des erreurs est la première étape vers la correction de celles-ci. Pour ce faire, il faut **prendre du recul** et porter un **regard différent** sur la solution que l'on a obtenue. En toute hypothèse, il convient de s'interroger sur la **plausibilité** de la solution (**signe**, **ordre de grandeur**, **allure de la fonction,** caractère **scalaire** ou **vectoriel** des variables) et sur son **homogénéité dimensionnelle**. Enfin, dans certains cas, il peut être utile d'examiner l'**évolution** de l'**énergie** (mécanique ou cinétique) **du système**.

Ci-dessus, on a également insisté sur le fait qu'il faut **répondre à la question** qui est posée et **non pas à une autre**. Proposer un raisonnement correct mais non pertinent est une erreur très courante, mais facilement évitable.