DBU7032_8.fm Page 157 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

CHAPITRE 6
Le développement numérique

Marie-Pascale NOËL *

Sommaire

1. **Introduction** 159
2. **La chaîne numérique verbale** 160
3. **Les processus de quantification** 162
4. **Les nombres écrits et le transcodage** 169
5. **La représentation des grands nombres** 173
6. **La représentation en base 10** 174
7. **Les savoirs arithmétiques** 175
8. **La dyscalculie développementale** 183
9. **En conclusion** 185

* L'auteur remercie le Fond National de la Recherche Scientifique de Belgique, le Fond National de la recherche scientifique et médicale (convention 3.4607.04 F), la Communauté française de Belgique (ARC 05/10-327) et les communautés européennes (MRTN-CT-2003-504927, Numbra project).

DBU7032_8.fm Page 158 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

Dans ce chapitre, vous allez

1. découvrir comment se développent les habiletés numériques élémentaires chez l'enfant
2. apprendre comment l'enfant apprend les premiers mots nombres, comment il devient capable de les réciter dans l'ordre, de les utiliser pour dénombrer des collections et de comprendre la signification cardinale des mots nombres
3. découvrir les autres procédés de quantification dont dispose l'enfant : le subitizing et l'estimation
4. aborder l'entrée dans les apprentissages formels, en particuliers, le code écrit en chiffres arabes et l'arithmétique
5. voir que, pour certains enfants, ces apprentissages posent des problèmes importants, c'est ce qu'on appelle la dyscalculie développementale. Vous apprendrez quelles sont les caractéristiques de ce trouble d'apprentissage et les hypothèses causales envisagées actuellement

DBU7032_8.fm Page 159 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

1 Introduction

Les nombres font partie intégrante de notre vie. Brian Butterworth (1999), un spécialiste de la question s'est amusé à noter la fréquence de traitement des nombres sur une de ses journées et est arrivé à 16000 ! Notre gestion du temps, de l'espace, de l'argent, est intimement liée au traitement numérique. En primaire, une énorme partie du programme scolaire concerne les mathématiques. L'intérêt pour le développement de cette sphère cognitive est donc évident.

Les études menées chez le bébé (voir chapitre 1 de cet ouvrage) ont montré que dès les premiers mois, le petit d'homme était capable de discriminer des collections différant sur le plan numérique. Ces capacités de discrimination sont toutefois limitées. Il n'est capable de discriminer de manière précise que des petites collections (de moins de 4 éléments) et ne perçoit la différence entre deux grandes collections que si celles-ci sont suffisamment distantes numériquement l'une de l'autre. En d'autres termes, les performances des bébés dépendent de la taille des ensembles et de la distance numérique entre ceux-ci. L'interprétation de ces résultats fait néanmoins l'objet de polémique. Pour Gallistel et Gelman (1992), Wynn (1998) ou encore Dehaene (1997), les bébés se représentent la numérosité et réagissent à des différences à ce niveau. Cette représentation serait analogique et sa précision diminuerait au fur et à mesure que les nombres représentés sont grands. D'autres auteurs en revanche pensent que les bébés ne réagissent pas au nombre en tant que tel mais aux variables physiques continues qui covarient avec celui-ci, comme la surface occupée par les éléments, le contour de la collection, sa densité etc. (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002). Faire la part des choses à ce niveau n'est pas simple et n'est pas l'objet de ce chapitre. Celui-ci, en effet, est consacré au développement numérique de l'enfant plus grand, c'est-à-dire dès l'entrée dans le monde du langage. Bien sûr, nous aborderons la question de savoir si la capacité de discrimination « numérique » des bébés guide les premiers apprentissages des noms de nombres. Mais, de manière quelque peu paradoxale, cette question ne se pose en fait que chez des enfants qui maîtrisent déjà les premiers noms de nombres. Par conséquent, notre exposé suivra le plan suivant.

Nous présenterons d'abord le développement de la *chaîne numérique*◆, puis de son application dans le dénombrement. Nous poserons ensuite la question du lien entre les premières utilisations des mots-nombres et la représentation de la numérosité. Enfin, nous décrirons le développement des autres processus de quantification : le *subitizing*◆ et *l'estimation*◆. Nous aborderons ensuite l'entrée dans les apprentissages formels, en particuliers, le code écrit en chiffres arabes (et les processus de *transcodage*◆) et l'arithmétique. Nous terminerons ce chapitre par un bref aperçu des troubles d'apprentissage à ce niveau en présentant à la fois les caractéristiques de la *dyscalculie développementale*◆ et les hypothèses causales envisagées actuellement.

DBU7032_8.fm Page 160 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

2 La chaîne numérique verbale

Selon Gelman et Gallistel (1978), les enfants de deux ans et demi savent déjà que les noms de nombre constituent une catégorie particulière de mots qui peut être utilisée de manière spécifique lorsqu'on leur demande de compter. En effet, à cet âge, on observe très peu d'intrusions d'autres mots dans des tâches utilisant des nombres. Cependant, si on présente à des enfants de maternelle des noms de nombres, des mots de séries ordonnées (comme les jours de la semaine ou les mois de l'année) ou des non-mots ressemblant à des nombres (comme « deuzante »), ceux-ci ont beaucoup de mal à distinguer ceux qui servent ou non à compter. Dans ce type de tâche (Noël, 2005), les enfants de 3 ans ne dépassent pas le niveau du hasard. A 4,5 ans les enfants jugent correctement 70 % des items et acceptent correctement 89 % des noms d'unité (soit, les nombres entre *un* et *neuf*). A 5 ans, la moyenne de réussite dépasse les 80 % mais un score plafond n'est pas encore atteint à 5,5 ans. Nos résultats seraient donc un peu moins optimistes que ceux rapportés par Gelman et Gallistel (1978).

Une des particularités de l'acquisition des noms de nombres est que l'enfant doit également apprendre un ordre de récitation de ce lexique. Cette suite ordonnée s'appelle la chaîne numérique. Celle-ci s'acquièrt entre deux et six ans environ pour les nombres jusqu'à 20 et passe par une succession d'étapes décrites en détail par Fuson, Richards et Briars (1982). La comparaison d'essais successifs de comptage produits par le même enfant, a mis en évidence des régularités dans les séquences au sein desquelles il est possible de distinguer trois parties (voir Tableau 1) :

- une première partie dite *stable et conventionnelle* car elle est produite de manière identique d'un essai à l'autre et qu'elle correspond à la séquence utilisée par les adultes,
- une deuxième partie dite *stable* mais *non conventionnelle* car il y manque des éléments ou parce qu'il s'y trouve des erreurs d'ordre,
- enfin une troisième partie dite *non stable et non conventionnelle*, les nombres sont produits dans le désordre et cette partie n'est pas constante d'un essai au suivant.

Tableau 1

Développement de la chaîne numérique verbale, exemple de 6 comptages successifs d'un enfant.

Essais	Partie stable et conventionnelle	Partie stable et non conventionnelle	Parti non stable et non conventionnelle
1	1..2..3..4	6..8..9	14..16..13..5
2	1..2..3..4	6..8..9	12..15..16..13
3	1..2..3..4	6..8..9	14
4	1..2..3..4	6..8..9	9
5	1..2..3..4	6..8..9	15..13..11
6	1..2..3..4	6..8..9	8..4

DBU7032_8.fm Page 161 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

L'acquisition de la chaîne numérique jusqu'à vingt environ se traduit ainsi par l'accroissement progressif de la partie stable et conventionnelle au détriment des deux autres. Au-delà de vingt, l'apprentissage change de nature suite à la découverte des lois de composition linguistique de la séquence des noms de nombre. L'enfant apprend qu'il doit prononcer (en français) le nom de la dizaine, y accrocher la suite des unités jusqu'à neuf, produire ensuite le nom de la dizaine suivante et recommencer le même cycle. Les erreurs de comptage commises par les enfants pour la récitation au-delà de vingt traduisent cette nouvelle structure à acquérir : ils s'arrêtent le plus souvent à une structure dizaine-unité se terminant par neuf (quarante neuf... ?) ou sautent carrément toute une dizaine (trente huit, trente neuf, *cinquante*, cinquante et un,..) (Siegler & Robinson, 1982).

Dans certaines langues, la structure en base 10 est beaucoup plus transparente qu'en français ou en anglais. Ainsi, dans la plupart des langues asiatiques, 12 se dit littéralement « dix-deux » et 75 « sept-dix-cinq » ... rien à voir avec le « douze » et le « soixante-quinze » du français ! Ces différences linguistiques ont un impact sur la vitesse de développement de la chaîne numérique. Ainsi, Miller, Smith, Zhu et Zhang (1995) ont montré que, dans une tâche d'énonciation de la suite des noms de nombres, les petits chinois et les petits américains avaient un même niveau à 3 ans mais que dès 4 ans, les petits chinois surpassaient les américains : ils comptent en moyenne jusque 40 alors que les américains comptent jusque 12. A 5 ans, cette différence s'accroît : les enfants chinois comptent au-delà de 100 alors que les américains comptent jusque 40. Cette différence inter-culturelle apparaît au-delà de 10 lorsque la structure plus régulière de la langue chinoise favorise l'apprentissage de la suite numérique.

Fuson, Richards et Briars (1982) se sont intéressés à l'utilisation de la suite verbale dans le comptage de collections. Plusieurs stades sont décrits qui correspondent à des degrés d'élaboration différents de la chaîne numérique (voir tableau 2).

Au *niveau chapelet*, les noms de nombre ne sont pas individualisés. L'enfant produit la séquence comme un tout, sans pause entre les mots : « *undeuxtroisquatre...* ». Cette séquence peut certes être prononcée dans un contexte de *dénombrement*◆ (c'est-à-dire, compter les éléments d'une collection), mais sans correspondance terme à terme entre un nom de nombre et un objet à compter.

Au *niveau de la chaîne insécable*, la séquence est produite comme une suite de mots individualisés. Elle est dite *insécable* car l'enfant ne peut la produire qu'à partir du début, il ne peut donc se mettre à compter à partir d'un autre point. La chaîne insécable permet déjà de compter des collections d'objets et l'enfant est aussi capable de compter jusqu'à un nombre donné.

Au *niveau de la chaîne sécable*, les liens de succession entre les différents mots de la chaîne se trouvent mieux établis et l'enfant peut produire la suite de la séquence à partir d'une borne donnée (e.g., compter à partir de trois). Il peut aussi compter de tel nombre à tel autre (e.g., compter de quatre à neuf). À ce niveau de maîtrise se met aussi progressivement en place le comptage à rebours. Au début, l'enfant le réalise en partant du comptage à l'endroit qu'il prononce à voix basse et en conservant en mémoire l'avant dernier terme produit. Le niveau de la chaîne sécable signale donc une plus grande maîtrise de l'enfant, il peut entrer n'importe où dans la chaîne, s'arrêter en un point quel-

DBU7032_8.fm Page 162 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

conque et commencer à la parcourir à rebours. Il est également capable d'indiquer quel nombre vient *avant* ou *après* un autre, ce qui lui permet de déterminer des relations ordinales entre les nombres.

Enfin, au *niveau de la chaîne terminale*, l'enfant considère les nombres de la chaîne comme des entités distinctes qu'il est capable de produire mais aussi de compter. L'enfant est ainsi en mesure de compter à l'endroit ou à rebours *n* éléments à partir d'une borne.

Comme le souligne Fayol (1990), il existe une assez grande variabilité interindividuelle dans ces acquisitions, mais avec la première année primaire, soit entre six et sept ans, la maîtrise de la chaîne numérique est le plus souvent définitivement installée.

3 Les processus de quantification

La récitation isolée de la chaîne numérique verbale n'a pas beaucoup de sens. Sa fonction essentielle est de soutenir le dénombrement. Celui-ci permet de déterminer de manière précise le cardinal d'une collection en mettant en correspondance chacun des nombres prononcés (à voix haute ou mentalement) avec les éléments de la collection. Le dénombrement permet donc de déterminer de façon précise le cardinal d'une collection. Mais, cette procédure est lente surtout si la taille de la collection est importante. Deux autres modes de quantification existent chez l'adulte : le subitizing et l'estimation. Ils sont tous les deux beaucoup plus rapides que le dénombrement. Le premier est précis mais est limité aux très petites collections, l'autre est approximatif mais peut s'appliquer à des grandes collections. Le développement de ces trois processus est décrit dans cette section.

Tableau 2

Récapitulatif des différents niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.

Niveaux de comptage	description	illustration
chapelet	Noms de nombre non individualisés	Undeuxtroisquatre...
chaîne insécable	Mots individualisés Chaîne produite uniquement à partir du début	Un, deux, trois, quatre, ...
chaîne sécable	Chaîne produite à partir de et/ou jusqu'à une borne donnée Peut dire quel nombre vient avant ou après un autre	De 5 à 8 ? cinq, six, sept, huit Après 4 ? cinq
chaîne terminale	Nombres récités à rebours ou dénombrés	3 pas à partir de 8 ? neuf, dix, onze En arrière ? quatre, trois, deux, un

DBU7032_8.fm Page 163 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

3.1 *le dénombrement*

Les activités de dénombrement ont été décrites en situation naturelle dès l'âge de deux ans (Saxe, Guberman, & Gearhart, 1987). On parle de dénombrement lorsque la suite numérique verbale est mise en correspondance avec chaque élément d'une collection en vue de déterminer le cardinal de celle-ci. Selon Gelman et Gallistel (1978), cinq principes implicites soutendraient le dénombrement (voir tableau 3) :

- *Le principe de correspondance terme à terme* selon lequel une étiquette verbale (un nom de nombre) ne peut être attribuée qu'à un et un seul objet (on ne peut compter deux fois le même objet ou omettre d'en compter un),
- *le principe de l'ordre conventionnel* suivant lequel les noms de nombres doivent être émis dans un ordre identique et conventionnel,
- *le principe de cardinalité* qui indique que, lorsque l'activité de dénombrement est terminée, le dernier terme fourni correspond au cardinal de l'ensemble,
- *le principe d'abstraction* qui signifie que le caractère homogène ou hétérogène des collections n'a aucune incidence sur l'activité de comptage et son résultat,
- *le principe de non pertinence de l'ordre* qui correspond au fait que le résultat du dénombrement est identique quelque soit l'ordre dans lequel les éléments de l'ensemble à compter ont été sélectionnés.

Chez les petits, le dénombrement s'accompagne généralement du pointage un à un des différents objets. Ceci permet à l'enfant de garder une trace de son activité, et de distinguer, au fur et à mesure les « objets-déjà-comptés » des « objets-encore-à-compter ». A 4 ans, si on empêche l'enfant de pointer, il produit plus d'erreurs de dénombrement. A 6 ans, en revanche, le pointage n'est plus obligatoire pour garantir la qualité du dénombrement (Saxe & Kaplan, 1981). Si, au départ, les objets sont comptés un par un, d'autres stratégies apparaissent au cours du développement. Ainsi, dès 7 ans, on voit poindre des stratégies de comptage *n* par *n* en fonction de l'organisation spatiale des items de la collection (e.g., comptage par deux si les éléments se présentent par paires) ou encore d'addition des cardinaux de différents sous-groupes d'objets. Cette stratégie de dénombrement par pas serait utilisée dans plus de 20 % des cas à 11 ans et dans près

Tableau 3

Récapitulatif des principes du dénombrement.

Principes du dénombrement	Description
Correspondance terme à terme	Une étiquette pour un seul objet
Ordre conventionnel	Noms de nombres récités dans l'ordre conventionnel
Cardinalité	dernier terme correspond au cardinal de l'ensemble
Abstraction	Chaque élément vaut un, quelle que soit sa nature (collections homogènes ou hétérogènes)
Non-pertinence de l'ordre	Le cardinal est indépendant de l'ordre de comptage des éléments

DBU7032_8.fm Page 164 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

de 50 % des cas à 13 ans (Camos, 2005). Enfin, les erreurs les plus courantes dans le dénombrement sont les erreurs de coordination entre le pointage des objets et l'énonciation de la chaîne numérique (Gelman & Gallistel, 1978).

Si chacun s'accorde sur l'existence de principes sous-tendant le dénombrement, des points de vue divergents existent quant au moment d'apparition de ceux-ci. En effet, selon Gelman et Meck (1983), ces principes sont innés et ils guident le développement des habiletés de dénombrement. C'est le modèle dit « **des principes d'abord** ». Pour d'autres auteurs (Briars et Siegler, 1984, Fuson et coll. 1982) en revanche, les enfants pratiqueraient d'abord le dénombrement sans comprendre réellement le sens de cette activité. Ce ne serait qu'après une certaine pratique qu'ils découvriraient graduellement les principes sous-jacents. C'est le modèle dit des « **procédures d'abord** ».

Gelman et Meck (1983) ont conduit une série d'expériences dans laquelle elles testaient la capacité d'enfants de maternelle à juger les performances de dénombrement d'une poupée. Le jugement, plutôt que la production d'un dénombrement, était choisi pour réduire au maximum les contraintes de la tâche. Les observations ainsi réalisées montrent une maîtrise très précoce des principes de dénombrement. Toutefois, ces résultats n'ont pu être répliqués auprès d'enfants de 3 ans par Briars et Siegler (1984). De même, Grégoire et Van Nieuwenhoven (1995) ont montré que les principes sous-jacents au dénombrement n'étaient ni maîtrisés ni coordonnées par des enfants de 5 ans, ce qui est en faveur de l'hypothèse des procédures d'abord.

3.2 *Le subitizing*

Lorsqu'un individu doit déterminer de manière précise le cardinal de collections et que l'on mesure le temps nécessaire à cette activité, les temps de réponse observés sont typiquement brefs et quasi constants pour les numérosités de 1 à 4 (environ). Puis, ils croissent de manière linéaire au fur et à mesure que la taille de la collection augmente. Cette courbe de temps de réponse est communément interprétée comme suit : pour les collections de petite taille (entre 1 et 4 environ), nous aurions la capacité de percevoir de manière quasi directe, instantanée, la numérosité alors que, pour les collections plus grandes, nous devrions déplacer notre attention tour à tour sur chaque objet et les compter. « Subitizing » est le terme introduit par Kaufman, Lord, Reeve et Volkmann (1949) pour désigner l'appréhension directe du cardinal des petites collections.

Différentes explications ont été proposées pour rendre compte du subitizing. Selon Mandler et Shebo (1982), le subitizing résulterait d'une reconnaissance de formes. En effet, deux points représentent toujours une droite, trois points correspondent souvent à un triangle et quatre points à un quadrilatère. Toutefois, Simon et Cabrera (1995) ont montré que trois points présentés en ligne sont correctement reconnus comme *trois* et non *deux*, ce qui met à mal l'explication en terme de reconnaissance de formes. Enfin, Trick et Pylyshyn (1994) font l'hypothèse que le subitizing serait lié aux capacités de notre système visuo-attentionnel : nous aurions à notre disposition des marqueurs spatiaux qui nous permettent de localiser des éléments dans l'espace et de suivre, en parallèle, leur trajectoire. Ce système de maintien de la trace des objets ne permettrait de suivre qu'un nombre limité d'objets en parallèle (4) ; au-delà, un déplacement du foyer

DBU7032_8.fm Page 165 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

attentionnel serait nécessaire. Ce déplacement est coûteux en temps et engage l'individu dans un traitement séquentiel (typique du dénombrement) plutôt que parallèle (typique du subitizing).

Plusieurs recherches montrent que le subitizing serait présent de manière très précoce dans le développement. En effet, lorsqu'on demande à des enfants d'indiquer le plus vite possible combien d'éléments il y a dans une collection, on observe dès l'âge de 5 ans, un profil similaire à celui de l'adulte, marqué par un saut quantitatif important des temps de réponse à partir de 4 ou 5 éléments. La vitesse globale de réponse est toutefois beaucoup plus importante que chez l'adulte mais se réduit au cours du développement (voir Pesenti & Rousselle, 2005). D'autres études utilisent un paradigme de comparaison, ce qui ne nécessite pas la production d'un nombre verbal oral. Ainsi, Trick, Enns et Brodeur (1996) demandent à des enfants et des adultes de discriminer des paires de collections (1 vs 2 ; 3 vs 4 ; 6 vs 7 ; 8 vs 9) et montrent que c'est surtout en dehors du rang du subitizing (soit, pour les collections entre 6 et 9) que se marquent les plus grands changements développementaux. Starkey et Cooper (1995) montrent que les petits de 2 ans peuvent discriminer correctement des collections de 1 à 3 objets même lorsque l'une des deux est présentée pendant 200 ms seulement. Cette capacité s'étend aux collections de 4 éléments pour les enfants de 3 à 5 ans. Le subitizing serait donc possible avant même que l'enfant ne puisse dénombrer les collections. Les études chez le bébé, utilisant des paradigme d'habituation (voir le chapitre 1 de cet ouvrage) vont également dans le même sens puisque les bébés de moins d'une semaine, perçoivent déjà la différence entre 2 et 3 éléments mais pas celle entre 4 et 6 éléments (Antell & Keating, 1983).

3.3 *L'estimation*

Lorsqu'une collection de taille supérieure aux limites du subitizing est présentée pour un temps bref (ne permettant pas le dénombrement), les sujets sont néanmoins capables d'estimer de manière approximative le cardinal de celle-ci. Chez l'adulte, l'estimation diminue en précision et devient de plus en plus variable au fur et à mesure que la taille de la collection présentée s'accroît. L'erreur d'estimation correspond souvent à une sous-estimation et l'arrangement spatial des points de la collection a un impact sur l'estimation (voir Pesenti & Rousselle, 2005).

Des effets identiques ont été rapportés chez l'enfant. Ainsi, Chillier (2002) présente des collections de 8 à 20 points à des enfants de 6 à 9 ans pendant une durée brève de 300 ms. Les estimations proposées sont généralement des sous-estimations et elles s'écartent de plus en plus de la numérosité réelle au fur et à mesure de l'accroissement de la taille de la collection. Enfin, la précision de ces estimations augmente avec l'âge de l'enfant.

Des enfants plus jeunes, de 5 à 7 ans, ont été testés par Huntley-Fenner (2001). Des collections de 5 à 11 éléments étaient présentées durant 250 ms et les enfants devaient pointer sur une échelle numérique de 0 à 20, l'endroit correspondant à leur estimation numérique. À nouveau, les auteurs ont observé que les réponses n'étaient pas aléatoires mais proportionnelles à la quantité réelle. Le nombre de réponses correctes ou pro-

DBU7032_8.fm Page 166 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

ches (±1) diminuait avec la taille de la collection alors que la variabilité des réponses augmentait. Enfin, la précision des réponses augmente avec l'âge.

Cuneo (1982) s'est intéressé à des enfants encore plus jeunes en leur proposant de pointer leur estimation sur une échelle marquée aux deux extrémités par une collection de points (1 à gauche et le maximum présenté dans l'expérience, à droite). Des collections linaires de points étaient présentées à des enfants de 3 à 9 ans. Les stimuli variaient également en longueur et en densité. Il apparaît que ces deux variables (longueur et densité) influencent l'estimation des enfants à tous les âges. Cependant, l'interaction densité x longueur qui constitue le marqueur d'une réelle prise en compte du nombre n'apparaît qu'à 7 ans. Toutefois, si de plus petites numérosités sont présentées (de 2 à 7 éléments), l'interaction longueur x densité est déjà visible à 3-4 ans.

Enfin, les études d'habituation menées chez le bébé montrent qu'ils sont capables de discriminer des grandes collections pourvu qu'elles soient suffisamment distantes l'une de l'autre sur le plan numérique. Ainsi, Xu et Spelke (2000) observent que les bébés font la différence entre 8 et 16 points mais pas entre 8 et 12. Il apparaît qu'une distance de 8 n'est pas le critère pour distinguer les deux ensembles mais que la distance minimale est relative plutôt qu'absolue. En fait, les petits discriminent deux collections si elles entretiennent un rapport de _ l'une avec l'autre (donc, n et n x 2). Ainsi, 16 et 24 points ne sont pas différenciés par les petits mais 16 et 32 le sont. Certaines données récentes indiquent que ce rapport minimal de discrimination évoluerait au cours du développement. A six mois, les bébés discriminent des séquences de 8 vs. 16 sons (rapport d'1/2) mais pas 8 vs. 12 (rapport de 2/3) alors qu'à 9 mois, ils discriminent 8 vs. 12 (Lipton & Spelke, 2003).

Certaines recherches, notamment celle de Verschaffel, DeCorte, Lamote et Dherdt (1998) se sont consacrées aux aspects plus stratégiques de l'estimation. Ainsi, lorsque la collection à estimer est présentée dans un cadre de référence particulier (e.g., une grille de 10 x 10 cases) et que le participant dispose d'une durée longue pour son estimation (e.g., 20 secondes), différentes stratégies sont observées. En effet, l'individu peut soit utiliser le processus d'estimation globale comme décrit ci-dessus, soit quantifier le nombre d'objets présents, soit quantifier le nombre de cases vides et le déduire du nombre total de cases (e.g., devant une grille 10 x 10, si une dizaine de cases sont vides, on peut rapidement inférer qu'environ 90 points sont présentés). Verschaffel, et col. (1998) ont observé que cette dernière stratégie basée sur la soustraction apparaissait chez certains enfants de 2e primaire mais n'était utilisée à bon escient et de manière consistante qu'en fin de primaire.

En résumé, les recherches actuelles soutiennent l'idée qu'au cours de la première année de vie, les bébés seraient déjà capables de subitizing puisqu'ils pourraient distinguer de manière précise, sans compter, des collections de 1 à 3 éléments. Ils présenteraient également des capacités d'estimation leur permettant de différentier des grandes collections entrant dans un rapport de _. Au cours du développement, le subitizing s'étendrait à 4 ou 5 éléments et l'estimation deviendrait plus précise et plus stratégique. Dès l'entrée dans le langage, l'enfant appliquerait sa chaîne numérique verbale à des collections dans une activité de dénombrement. Celle-ci serait guidée par des principes dont la maîtrise et la coordination évolueraient jusqu'à 6 ou 7 ans. Des stratégies de comptage par pas ou par additions se mettraient ensuite en place pour accélérer le dénombrement.

DBU7032_8.fm Page 167 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

3.4 Rôle du langage dans la représentation du nombre

Un débat existe sur le rôle du langage dans la conceptualisation du nombre par l'enfant. Pour certains, comme Gallistel et Gelman (1992) ou Dehaene (2003), une représentation réellement numérique serait présente chez les bébés. Le développement de la valeur cardinale des mots nombre, l'apprentissage de leur signification, se ferait alors par simple couplage entre les mots appris et la représentation numérique pré-existante. Cet apprentissage des noms de nombre serait intéressant dans la seule mesure où il permettrait à l'enfant de distinguer des représentations numériques qui, sur le plan non symbolique, ne peuvent être discriminées. Ainsi, s'il nous est impossible de discriminer, sans compter, 27 et 28 points, il nous est par contre aisé de décider quel est le plus grand nombre si ceux-ci sont présentés verbalement (ou dans un autre code symbolique).

Suivant cette perspective, dès que l'enfant connaîtrait la suite des noms de nombres et saurait qu'ils servent à compter, il serait capable de les mettre en correspondence avec les quantités. Or, une étude célèbre de Wynn (1992a ; voir encadré dans le Chapitre 1) montre que ce n'est pas le cas et, qu'au contraire, il existe un délai très long entre le moment où les enfants connaissent les noms de nombres et leur position dans la chaîne numérique verbale et le moment où ils comprennent à quelle quantité ces nombres réfèrent. Plus précisément, Wynn (1992a) a montré, chez les petits de 2-3 ans, un décalage considérable entre le moment où ils sont capables de compter des collections de 3 ou 4 objets et le moment où ils étaient réellement capables de comprendre la signification des mots « trois » ou « quatre ». En effet, lorsqu'elle demande à ces enfants de donner un nombre x d'objets (x étant dans les limites de leurs capacités de comptage), ils obtiennent des performances nettement inférieures à celles qu'ils démontrent dans une tâche de dénombrement suivie de la question « et alors, il y en a combien en tout ? ». Ainsi, dans la tâche du « donne-moi », certains enfants réussissent seulement les essais pour le nombre *un*, d'autres pour les nombres *un* et *deux*, d'autres encore pour les nombres jusqu'à *trois*, et ce, même si leurs capacités de dénombrement dépassent ces petits nombres. Le développement de ces capacités est donc graduel, séquentiel et lent. En revanche, quand les enfants réussissent la tâche donne-moi avec *quatre*, ils sont aussi très souvent capables de la réussir pour tous les nombres supérieurs à quatre qu'ils peuvent énoncer correctement dans leur comptage. À ce moment-là, en effet, les enfants semblent avoir compris le rôle du dénombrement pour déterminer le cardinal d'un ensemble. Le passage du stade initial de réussite de la tâche pour les nombres *un* ou *deux* à une réussite plus globale pour les nombres connus s'étale sur une période de près d'un an. Il faudrait donc des mois à l'enfant pour découvrir que la position d'un nombre dans la chaîne numérique correspond à sa valeur cardinale.

Pour Carey (2001 ; 2004 ; Le Corre, Van de Walle, Brannon, & Carey, 2006), cette lenteur tient au fait que le développement de la signification cardinale des mots nombres ne se ferait pas par simple couplage entre des mots et une représentation numérique pré-existante mais correspondrait à la création d'une représentation numérique nouvelle, conceptuellement supérieure aux représentations quantitatives initiales du bébé. En effet, le bébé posséderait deux types de représentations des quantités : un système de représentations précises des petites collections et un système de représentation

DBU7032_8.fm Page 168 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

approximative des grandes collections. Le premier système se base très probablement sur le système de maintien de la trace des objets (intervenant dans le subitizing). Il permet de discriminer de manière précise des petites collections (moins de 4 éléments) de *n* et *n 1* objets. Cette discrimination opère très probablement par correspondance terme-à-terme entre la trace des objets de la collection 1 (e.g., 01, 02, 03 pour trois objets) et la trace des objets de la collection 2 (e.g., 01, 02 pour deux objets) sans représenter la numérosité en tant que telle. Le second système repose sur une représentation analogique de la quantité. Il ne permet la discrimination de deux collections que si elles entretiennent un rapport suffisamment large entre elles (e.g., un rapport d'1/2 chez les tout petits). Or, l'apprentissage du comptage va permettre de créer une représentation d'un autre ordre : une représentation réellement numérique, précise et régie par la fonction de succession *+1* selon laquelle le cardinal d'un mot dans la liste correspond au cardinal du mot nombre précédent dans la liste plus une unité exactement. La création de cette représentation se baserait probablement sur le système de maintien de la trace des objets (puisque son développement commence par la compréhension des petits nombres *un, deux, trois* etc.) ainsi que sur les propriétés morphologiques de la langue (e.g., en français, la marque du singulier / pluriel : *un* lapin, *des* lapins, *le* chat *dort* ; *les* chats *dorment*). Cette nouvelle représentation basée sur le comptage permettrait de représenter de manière exacte toutes les numérosités, même les grandes (*sept* est différent de *huit*). Acquérir ce type de représentation permettrait également de résoudre des tâches numériques non-symboliques, comme prendre un nombre de jetons correspondant à un nombre de sons (Mix, Huttenlocher, & Levine, 1996) ou encore, sélectionner parmi deux, la collection la plus importante sur le plan numérique quand ces collections sont rendues équivalentes sur un certain nombre de variables physiques continues (telles que la longueur du contour, la surface des éléments etc. : Brannon & van de Walle, 2001 ; Rousselle, Palmers, & Noël, 2004).

Bien sûr, le débat en la matière n'est pas clos. Ainsi, Sarnecka et Gelman (2004) et Lipton et Spelke (2005) ont voulu montrer que, même pour les numéraux verbaux dont il ignorait la signification, l'enfant savait qu'ils désignaient une quantité précise et qu'ils ne pouvaient plus être appliqués à une collection si son cardinal était modifié.

Sarnecka et Gelman (2004) testent des enfants de 2-4 ans. Sur base de la tâche « donne-moi », elles distinguent ceux qui maîtrisent les petits nombres (1,2,3) et ceux qui maîtrisent les plus grands nombres (au-delà de 4). Deux tâches sont proposées avec, à chaque fois, des petits (2 et 3) et des plus grands nombres (5 et 6). Dans la première tâche, l'expérimentateur place *n* éléments dans une boîte et indique à l'enfant le cardinal exact « *il y a six étoiles* ». Ensuite, il referme le couvercle et demande à l'enfant « *combien y a-t-il d'étoiles ?* ». Puis, il applique une transformation, secouer la boîte, la faire pivoter de 360 degrés ou l'ouvrir et retirer un des objets. Il demande alors à l'enfant « *maintenant, il y a cinq ou six étoiles ?* ». Quel que soit leur niveau de cardinalité, les enfants réussissent bien l'épreuve pour tous les nombres. Dans la seconde tâche, deux collections linéaires sont mises en correspondance terme à terme. L'une des rangées est celle du lion, l'autre celle de la grenouille. Une fois sur deux, ces collections ne sont pas équivalentes et la position de l'item manquant à l'une des extrémités est entourée pour que cette différence soit flagrante. On s'assure d'abord que l'enfant reconnaît l'équivalence ou la différence. Puis, on pose la question cible : « *la grenouille a cinq fraises ; penses-tu que le lion*

DBU7032_8.fm Page 169 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

a cinq ou six fraises ? ». Les enfants répondent correctement lorsqu'il s'agit de petites numérosités (deux ou trois). En revanche, lorsqu'il s'agit de grands nombres (cinq ou six), seuls les enfants qui les maîtrisent répondent correctement, les autres se comportant au hasard.

Lipton et Spelke (2005) testent des enfants de 5 ans avec une tâche très proche de la première utilisée par Sarnecka et Gelman et montrent que même pour des nombres verbaux oraux qu'ils ne connaissent pas, ils comprennent que celui-ci ne s'applique plus à la collection si son cardinal est modifié. Toutefois, cette étude porte sur des grands enfants de maternelle qui ont déjà acquis la signification cardinale des nombres au-delà de 4 et qui, donc, suivant la théorie de Carey, ont déjà probablement élaboré une représentation exacte du nombre.

Les résultats contradictoires obtenus chez les petits par Sarnecka et Gelman ne permettent pas de tirer de conclusions fortes quant à l'existence d'une représentation numérique précise et exacte avant l'entrée dans un code symbolique numérique. D'autres recherches devront donc éclaircir cette question.

En résumé, même si les bébés sont capables de discriminer (sous certaines conditions), des collections de tailles différentes, l'apprentissage de la valeur cardinale des premiers mots nombre prend beaucoup de temps. Cette lenteur est peut être due au fait que l'apprentissage de la valeur cardinale des mots nombre ne résulte pas d'un simple couplage entre des mots et une représentation numérique pré-existante mais corresponde plutôt à un saut conceptuel caractérisé par la création d'une représentation d'un autre ordre : une représentation numérique exacte.

4 Les nombres écrits et le transcodage

Plusieurs années après la production de ses premiers mots nombres, l'enfant entre en contact avec la numération écrite. Le code arabe écrit exige un apprentissage explicite. Sinclair, Mello et Siegrist (1988) et Hughes (1986) se sont toutefois intéressés aux productions écrites spontanées de l'enfant avant tout apprentissage des notations numériques.

Hughes (1986) présente aux enfants des boîtes contenant un certain nombre d'objets et leur demande d'indiquer sur un papier combien d'éléments se trouvent dans la boîte. Les petits utilisent surtout des représentations idiosyncrasiques. Ensuite, apparaissent des représentations iconiques du type encoches, pictogrammes ou icônes de chiffres (respectivement « /// », « ooo » et « 1,2,3 » pour représenter un ensemble de 3 éléments). Enfin, des représentations symboliques sont observées de manière croissante au cours du développement (10 % à 3-4 ans, 30 % à 5 ans, et 50 % au-delà).

Pour évaluer la fonction que l'enfant attribue aux symboles utilisés, Munn (1998) propose une seconde étape à la tâche de Hughes. À l'insu de l'enfant, un ours ajoute un objet à une des boîtes et l'enfant doit déterminer la boîte dont le contenu a été transformé. Munn distingue alors les écritures fonctionnelles et non fonctionnelles suivant que la trace écrite est prise, ou non, en considération par l'enfant pour résoudre la tâche. Comme on pouvait s'y attendre, les représentations idiosyncrasiques sont globalement

DBU7032_8.fm Page 170 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

non fonctionnelles. De manière surprenante, les représentations iconiques sont également non fonctionnelles dans la plupart des cas (78 %) alors qu'elles pourraient très bien être utilisées à bon escient dans cette tâche. Enfin, les représentations conventionnelles, qui pourraient être ignorées, sont en fait fonctionnelles dans 95 % des cas. Selon Munn, l'important ne serait donc pas tant la logique de la structure écrite mais bien l'intégration de cette représentation à un modèle cognitif utilisé pour résoudre une situation problème. Par ailleurs, l'utilisation fonctionnelle des symboles écrits est fortement corrélée avec la réussite à la tâche « donne-moi » de Wynn. Dans les deux cas, il s'agirait, pour l'enfant, de comprendre que des symboles (écrits ou oraux) sont porteurs d'un sens de la numérosité et qu'ils peuvent être utilisés pour résoudre une situation problème. Enfin, une difficulté dans l'utilisation fonctionnelle de l'écriture semble conduire, par la suite, à des difficultés d'apprentissage numérique à l'école (Munn, 1995).

L'acquisition des numéraux arabes a été essentiellement étudiée à travers des tâches d'écriture sous dictée ou de lecture de nombres. Ces tâches impliquant le passage d'un code numérique à un autre sont appelées « tâche de transcodage ». Ces activités ne sont pas anodines. Elles requièrent la maîtrise des codes sources et de production. Ainsi, pour lire « 1205 », il ne suffit pas d'énoncer les mots correspondants, ce qui donnerait « un, deux, zéro, cinq ». De même, écrire « mille cinq cent trois » dans le code Arabe ne revient pas à produire les chiffres correspondant 1000 5 100 3. Pour comprendre ces acquisitions, une description synthétique de chaque système numérique est nécessaire.

Le système numérique verbal (écrit ou oral) comporte des *primitives lexicales*◆. Ce sont les mots qui, isolément, font référence à une quantité. Il s'agit plus précisément des *unités* (de *un* à *neuf*), des *particuliers* (de *onze* à *seize*), des *dizaines* (de *dix* à *nonante*), des *multiplicateurs* (*cent, mille,* etc) et enfin de *zéro*. Pour représenter l'infinité des nombres, ces primitives se combinent en structures complexes. Toutes les combinaisons ne sont pas autorisées, ainsi, *dix-huit* est correct mais *huit-dix* ou *dix-deux* ne le sont pas. Les règles gérant ces combinaisons correspondent à la syntaxe du système. Certaines combinaisons expriment des rapports additifs entre les quantités exprimées par les primitives lexicales (e.g., *cent deux* égal [cent] plus [deux]) ou multiplicatifs (e.g. : *deux cents* égal [deux] fois [cent]) (voir Power et Longuet-Higgins, 1978, ou Hurford, 1987 pour une description détaillée de ces règles syntaxiques).

Le système de numération arabe se compose de 10 chiffres (de 0 à 9, soit, les primitives lexicales) qui peuvent se combiner les uns avec les autres pour former la multitude des nombres. La quantité représentée par un chiffre varie selon sa position dans le nombre. Ainsi, 2 peut faire référence à deux (dans 42), à vingt (dans 25), à deux cents (dans 245) etc. Il s'agit en fait d'un système strictement positionnel en base 10 : la valeur d'un chiffre est entièrement déterminée par sa position (calculée à partir de la droite) dans la séquence. À chaque position en se décalant vers la gauche, le chiffre augmente sa valeur d'une puissance de dix.

L'entrée dans l'écrit est lente. Lorsqu'on présente à des enfants de maternelle des chiffres (de 1 à 9), des lettres et des symboles (e.g., $) et qu'ils doivent juger s'il s'agit de chiffres (« *ce qui sert à compter* ») ou non, les performances sont au hasard à 3 ans. A 4 ans, les petits jugent correctement 89 % des chiffres mais se comportent au hasard pour les lettres et les symboles. A 5 ans enfin, les chiffres sont jugés correctement (dans 95 % des cas) et les autres symboles sont plus souvent rejetés (dans 74 % des cas). Toutefois,

DBU7032_8.fm Page 171 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

lorsqu'on demande aux enfants d'identifier le chiffre en question, le pourcentage de réponses correctes est de 69 % seulement. Ce n'est qu'à 6 ans que les enfants sont capables de lire mais aussi d'écrire, les chiffres isolés. A 7 ans, les structures à 2 chiffres (particulier, dizaine, dizaine-unité) ne posent plus de problèmes et les nombres à trois chiffres sont en voie de maîtrise (77 % de transcodages corrects). A 8 ans enfin, les écoliers peuvent lire et écrire pratiquement tous les nombres de 1 à 4 chiffres. Quelques erreurs apparaissent encore sur les nombres plus grands. Mais, on peut dire que les processus de transcodage sont quasi en place à cet âge-là (Noël, 2005). Quelques études ont essayé de comprendre les processus sous-tendant le développement de ces activités de transcodage.

Ainsi, Power et Dal Martello (1990) testent des enfants italiens de 7 ans dans une tâche d'écriture de nombres arabes sous dictée. Ils montrent que les erreurs apparaissent surtout sur les nombres à 3 et 4 chiffres. Ces erreurs sont de deux types : les *erreurs lexicales*◆ et les *erreurs syntaxiques*◆. Les erreurs lexicales touchent une primitive lexicale du nombre (un chiffre ou un mot), sans modifier de manière radicale la grandeur du nombre (e.g. : /vingt-huit/ [1] écrit 27, /cent quarante/ écrit 104, /trois cent neuf/ écrit /290/). Les erreurs syntaxiques portent sur les relations entre les primitives lexicales et entraînent une modification du gabarit du nombre (e.g., /vingt-sept/ écrit 207, /trois cents/ écrit 3100, ...). Si on analyse les erreurs produites par ces enfants de 7 ans sur les nombres de 3 ou 4 chiffres, on constate qu'elles sont majoritairement (87 %) de nature syntaxique et qu'elles correspondent, le plus souvent, à l'insertion de zéros supplémentaires dans le nombre arabe (e.g., /trois cent soixante-cinq/ est écrit 30065 ou 3065).

Seron, Deloche et Noël (1991) et Seron et Fayol (1994) ont suivi de manière longitudinale l'évolution de cet apprentissage. Ils observent qu'au début, certains enfants ne maîtrisent aucune règle de combinaison et transcodent chaque mot par la séquence en chiffres arabes correspondante : e.g., /mille nonante/ est écrit 1000 90. Les premières relations maîtrisées sont les relations produit entre une unité et un multiplicateur « cent » (e.g., *trois cents*) ou « mille » (e.g., *trois mille*). Ensuite, les relations additives entre « cent » ou « mille » et une unité peuvent être transcodées (e.g., *cent trois* ou *mille trois*). À ces moments-là, certaines erreurs particulières peuvent apparaître qui, selon les auteurs, proviendraient d'une généralisation abusive, par l'enfant, des règles apprises sur ces formes, à d'autres structures (e.g., /cent trois/ est correctement écrit 103 mais /cent douze/ est écrit 1012, avec le « cent » transcodé « 10 » suivi de la production des chiffres correspondant au mot suivant le « cent »). Les erreurs observées résulteraient donc, au début, de l'absence de prise en compte des relations syntaxiques de somme et de produit et puis, de généralisations abusives de règles correctement construites mais appliquées à des structures pour lesquelles elles sont inadéquates.

Les travaux sur la lecture des numéraux arabes indiquent que celle-ci obéit à un rythme d'évolution différent de la lecture des mots, ce qui suggère l'existence de mécanismes spécifiques (Seron, Van Lil, & Noël, 1995). Les erreurs observées pour les nombres complexes sont essentiellement de nature syntaxique (Seron, Van Lil, & Noël, 1995 ;

1. Lorsque que nous évoquerons des nombres verbaux présentés oralement, nous les écrirons en toutes lettres entre deux obliques.

DBU7032_8.fm Page 172 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

Seron, Noël, & Van der Elst, 1997, Power & Dal Martello, 1997). Il peut s'agir d'une fragmentation du nombre à lire (e.g., 834 est lu /quatre-vingt, trente-quatre/), de la négligence de certains parties du nombre à lire (e.g., 727 lu /septante-sept/), de l'utilisation d'un mauvais multiplicateur (e.g., 404 lu /quatre mille quatre/), ... Le facteur principal rendant compte des erreurs de lecture est la longueur du nombre, alors que la présence de zéros intercalaires (comme dans 309) ne constitue pas une source importante de difficultés. À nouveau, ces erreurs sont interprétées par Seron *et al.* comme résultant de stratégies développées par les enfants à partir des connaissances qu'ils ont acquises à la lecture de nombres plus simples et qu'ils appliquent, de manière inadéquate, aux formes nouvelles.

Les variations inter-langues au niveau de la structure syntaxique du code numérique verbal ont également des répercussions sur le développement du transcodage. Ainsi, Seron et Fayol (1994) ont montré que les petits Français (de 7 ans) produisaient plus d'erreurs que les Belges (francophones également) dans la dictée de nombres arabes incluant les dizaines 70. Par exemple, le nombre 78, présenté comme / soixante-dix-huit / en France était écrit 6018 ou 618 alors que le /septante-huit/ des Belges ne posait pas de problèmes. De la même manière, dans la dizaine 90, /quatre-vingt-dix-sept/ était transcodé 42017, 4217 ou 817 chez les Français mais le /nonante-sept/ était correctement transcodé par les Belges. En revanche, la dizaine 80 qui, dans les deux communautés, se dit /quatre-vingt/ donnait lieu à des erreurs similaires (e.g., / quatre-vingt-deux/ écrit 4202 ou 422). Ces différences semblent liées à une difficulté de comprendre les structures verbales complexes. Ainsi, les petits Français produisent également plus d'erreurs que les Belges lorsqu'il s'agit de sélectionner les jetons (de valeur *un* ou *dix*) correspondant à des nombres incluant les dizaines complexes 70 ou 90 (e.g., pour /soixante-dix-neuf/, ils choisissent 7 jetons de dix et 19 jetons de un ou bien encore, 6 jetons de dix et 9 jetons de un). En résumé, la structure complexe de certaines dizaines entraîne, chez les jeunes écoliers français, une difficulté de compréhension se répercutant sur le transcodage.

Lochy (2003) s'est intéressée à la comparaison des enfants belges et autrichiens et montre que la différence entre l'ordre d'énoncé de la dizaine et de l'unité dans le code oral et l'ordre de leur production dans le code écrit arabe pose problème. Ainsi, en première année primaire, les écoliers autrichiens produisent typiquement des erreurs d'inversion du type suivant : devant « / Dreiundfünfzig/, littéralement /trois et cinquante/, ils produisent 35 au lieu de 53.

Si les processus de transcodage sont normalement maîtrisés aux alentours de 9 ans, certains enfants présentent des difficultés spécifiques dans cet apprentissage. Ainsi, CM, 13 ans (Sullivan, Macaruso, & Sokol, 1996), produit des erreurs syntaxiques dans l'écriture de nombres arabes sous dictée (54 % de réponses correctes) ou à partir de numéraux verbaux écrits (45 % de réponses correctes). Paul (11 ans), en revanche, produit des nombres qui respectent le gabarit attendu mais sélectionne de manière erronée les chiffres ou les numéraux verbaux à produire. Par exemple, /neuf cent vingt-et-un/ conduit bien à la production d'un nombre à trois chiffres (822) mais un « 8 » est écrit à la place d'un « 9 » et le nombre se termine par le chiffre « 2 » au lieu du « 1 » attendu (Temple, 1989).

DBU7032_8.fm Page 173 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

En résumé, l'entrée dans le code écrit arabe se fait progressivement dès la fin de la maternelle. En première année primaire, la plupart des enfants connaissent le nom des chiffres et sont capables de les écrire sous dictée et de les utiliser de manière fonctionnelle pour représenter le cardinal d'une collection. Les capacités de transcodage vont se développer rapidement au cours des trois premières années de primaires avec une très bonne maîtrise des nombres jusqu'à cent à 7 ans et de quasi tous les nombres de 1 à 4 chiffres à 8 ans. Ce développement se caractérise surtout par l'acquisition de la syntaxe des codes d'entrée et de sortie et est plus aisé dans les cultures qui utilisent des systèmes numériques très réguliers.

5 La représentation des grands nombres

Une série d'études se sont intéressées à la représentation de la valeur des nombres en utilisant des tâches d'estimation de la position d'un nombre sur une droite non graduée (pour une revue, voir Siegler, & Booth, 2005). Ces travaux ont montré qu'au cours du développement, les enfants deviennent de plus en plus précis dans ces estimations et que cette précision est plus grande pour les petites échelles que pour les grandes (e.g., 0-10, versus 0-100 ou 0-1000). Ainsi, sur une échelle allant de 0 à 10, le pourcentage d'erreur absolue est de 14 % en fin de première année mais de 4 % seulement en fin de 2e année (Pettito, 1990). Sur une échelle allant de 0 à 100, le pourcentage d'erreur absolue est de 19 % en fin de 1re année et de 8 % en 3e année. Enfin, sur une échelle allant de 0 à 1000, le pourcentage d'erreur absolue est de 21 % en 2e année, de 14 % en 4e, de 7 % en sixième et de 1 % seulement chez les adultes (Siegler, & Opfer, 2003). Cette augmentation de la précision n'est pas seulement liée aux nombres utilisés mais bien aussi à la taille de l'échelle. Ainsi, les enfants sont beaucoup plus précis lorsqu'ils doivent placer les mêmes nombres sur une échelle allant de 0 à 100 que sur une échelle allant de 0 à 1000 (Siegler, & Opfer, 2003).

Différentes stratégies ont été observées pour réaliser ce type de tâche. Les petits comptent à partir de la valeur de la borne inférieure ou à partir de la borne supérieure de l'échelle. Certains comptent ensuite à partir d'un point au milieu de l'échelle. Les plus grands, enfin, utilisent un raisonnement proportionnel en divisant mentalement la ligne en quarts, par exemple, pour mieux placer les nombres (Siegler, & Opfer, 2003). Selon Pettito (1990), les enfants de 1re année considèrent les nombres essentiellement comme des entités entrant dans des relations ordinales, de succession. Ils privilégient donc des stratégies basées sur le comptage pour situer les nombres. Les enfants de 3ième année, par contre, voient davantage les nombres sur une ligne numérique comme des proportions. Ils peuvent dès lors utiliser des marques comme celle du milieu ou celle des quartiles. En fait, on observe que plus le répertoire stratégique de l'enfant est grand, plus sa précision est élevée (Newman, & Berger, 1984). Par ailleurs, la précision dans ce type de tâche corrèle avec le niveau des capacités mathématiques plus globales (Siegler, & Booth, 2004).

L'augmentation de la précision des positionnements rend l'estimation de plus en plus linéaire. En effet, au début du développement, l'enfant produit des estimations qui augmentent de façon logarithmique avec la taille du nombre à placer, entraînant une impré-

DBU7032_8.fm Page 174 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

cision croissante avec la taille des nombres considérés. Un tel comportement est visible pour les échelles de 0 à 100 pour les petites de cours préparatoire, et pour les échelles de 0 à 1000 pour les élèves de deuxième année. Chez les plus grands, en revanche, le positionnement devient plus précis et augmente de façon linéaire avec la taille des nombres cibles. C'est le cas pour les enfants de 2e année lorsqu'ils utilisent des échelles de 0 à 100, et pour les enfants de sixième année s'il s'agit d'échelles de 0 à 1000 (Siegler, & Opfer, 2003 ; Siegler, & Booth, 2004). Un même enfant (de 2e année par exemple) peut donc présenter une estimation linéaire pour une petite échelle (de 0 à 100 par exemple) mais une estimation logarithmique pour une échelle plus grande (de 0 à 1000).

6 La representation en base 10

Au cours de ce chapitre, nous avons évoqué les représentations analogiques de la quantité présentes chez le bébé et avons souligné l'importance du système symbolique numérique pour développer une représentation numérique régie par une règle de succession +1. Nous avons également montré que cette représentation se linéarise progressivement au cours du développement. Néanmoins, nos systèmes symboliques se permettent pas uniquement de représenter la grandeur des nombres et les relations de succession +1. Les codes numériques verbaux et arabes, intègrent tous les deux une autre dimension : celle de la **base 10**. Acquérir une compréhension de la base 10 des nombres est absolument crucial pour l'enfant dès son entrée en deuxième année primaire, notamment, pour réaliser des calculs portant sur des nombres supérieurs à dix.

La mise en place d'une représentation décimale du nombre a été étudiée par plusieurs auteurs dont Kamii (1982). Dans ce but, ce chercheur demande à des enfants de dessiner 16 roues et puis d'écrire le nombre arabe correspondant. Ensuite, il entoure le chiffre 1 (puis le chiffre 6) et demande aux enfants d'indiquer si cette partie du 16 a un rapport avec les 16 roues dessinées et de le montrer avec un feutre sur le dessin. A six ans, les enfants sont au plus capables d'entourer une roue pour le chiffre 1 et six roues pour le chiffre 6. La réponse correcte n'apparaît que chez 12 % des enfants de 7 ans, 42 % des enfants de 9 ans et 78 % des étudiants de 2e secondaire (voir aussi Kamii, 1985) ! Ces résultats très faibles sont en partie liés aux pratiques éducatives. Ainsi, Fuson et coll. (1997) montrent que 63 % des enfants de première primaire ayant bénéficié d'un programme d'éducation autour de la base 10 réussissent la tâche de Kamii alors que, dans la même école, le taux de réussite est de 32 % chez les enfants de 2e et de 3e primaire qui n'ont pas suivi ce programme. En Belgique francophone, Collet (2004) note une réussite de ce type de tâche par 44 % des enfants de 1re primaire et 85 % de ceux de 2e primaire.

Parmi les modélisations du développement d'une représentation numérique en base 10, celle de Fuson et coll. (1997) est la plus précise et la plus détaillée. Ces auteurs décrivent cinq conceptions différentes que l'enfant peut avoir vis-à-vis des nombres à deux chiffres. Il ne s'agit donc pas à proprement parler de stades développementaux, dans le sens où chaque enfant ne passe pas nécessairement par l'une de ces étapes, mais certaines de ces conceptions sont clairement plus matures que d'autres.

DBU7032_8.fm Page 175 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

Au départ, l'enfant rencontre les nombres à deux chiffres à la suite des nombres à un chiffre. De manière assez naturelle, il généralise, aux seconds, l'apprentissage et les connaissances liés aux premiers. Ainsi, il associe les premiers nombres de deux chiffres à la quantité correspondante, sans décomposition partie-tout. Le numéral verbal, le numéral arabe ou les quantités sont vus comme un tout, non différencié en sous-groupes. Cette conception est appelée la *conception unitaire des nombres à deux chiffres* (voir figure 1a).

Par le biais, notamment, de l'allongement de la chaîne numérique verbale et de la découverte des principes de composition des nombres, l'enfant reconnaît progressivement l'existence de deux parties dans le nombre (aussi bien dans le code oral qu'écrit) : une partie décimale et une partie unitaire (e.g., *quarante* et *cinq* dans *quarante-cinq*) ; chacune étant toutefois vue comme un amas de uns. Ce niveau correspond à la *conception x-ante-unité fondée sur la numération verbale* (voir figure 1b). Selon les auteurs, cette conception expliquerait la production de certaines erreurs dans l'écriture de nombres sous dictée où les transcodages de la dizaine et de l'unité sont simplement juxtaposés (e.g., /cinquante-trois/ transcodé comme « 50 » d'une part, et « 3 » d'autre part, soit, 503).

Suite notamment à la récitation de la chaîne numérique verbale par dix (Fuson, 1998), l'enfant conçoit progressivement les dizaines comme des groupes de dix. C'est ce que Fuson et coll. appellent la *conception des séquences de dizaines-unités* (voir figure 1c). Par exemple, vingt-trois est alors compris comme deux groupes de dix, plus trois.

Au niveau de la *conception dizaines-unités séparées* (voir figure 1d), l'enfant est capable d'un niveau d'abstraction supérieur dans lequel la dizaine n'est plus vue comme un groupe de dix unités mais comme une unité d'un ordre supérieur : *cinquante* est compris comme 5 dizaines. À ce stade, l'enfant conçoit également le nombre arabe comme constitué de deux types d'unités : les unités de dix et les unités de un.

Enfin, lorsque l'enfant peut aisément passer d'une des deux conceptions précédentes à l'autre, Fuson et coll. parlent d'une *conception intégrée des séquences de dizaines-unités séparées*.

7 Les savoirs arithmétiques

Il semble que, très précocement, les enfants soient sensibles aux opérations d'ajout et de retrait. Ainsi, Wynn (1992b) a montré que, dès l'âge de cinq mois, les bébés sont surpris lorsqu'un objet ajouté à un autre objet ne donne pas deux objets (1+1=2 et pas 1+1=1 ou 1+1=3) ou que le retrait d'un objet à une paire initiale ne donne pas un objet restant. Starkey (1992) a également montré que des bambins de 24 mois et de 30 mois sont capables de comprendre les effets de l'addition et de la soustraction pour des quantités allant jusqu'à trois pour les premiers et quatre pour les seconds.

Pour Wynn (1992b), ces observations montrent que les bébés sont capables de calculer le résultat précis d'opérations d'additions ou de soustractions. Toutefois, ces résultats n'ont pas toujours été répliqués et plusieurs recherches ont montré que, dans une situation proche de celle de Wynn (1992b), des enfants de 2 ans et demi se comportaient aléatoirement (voir Rousselle, 2005 pour une revue). Par ailleurs, l'interprétation de

DBU7032_8.fm Page 176 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

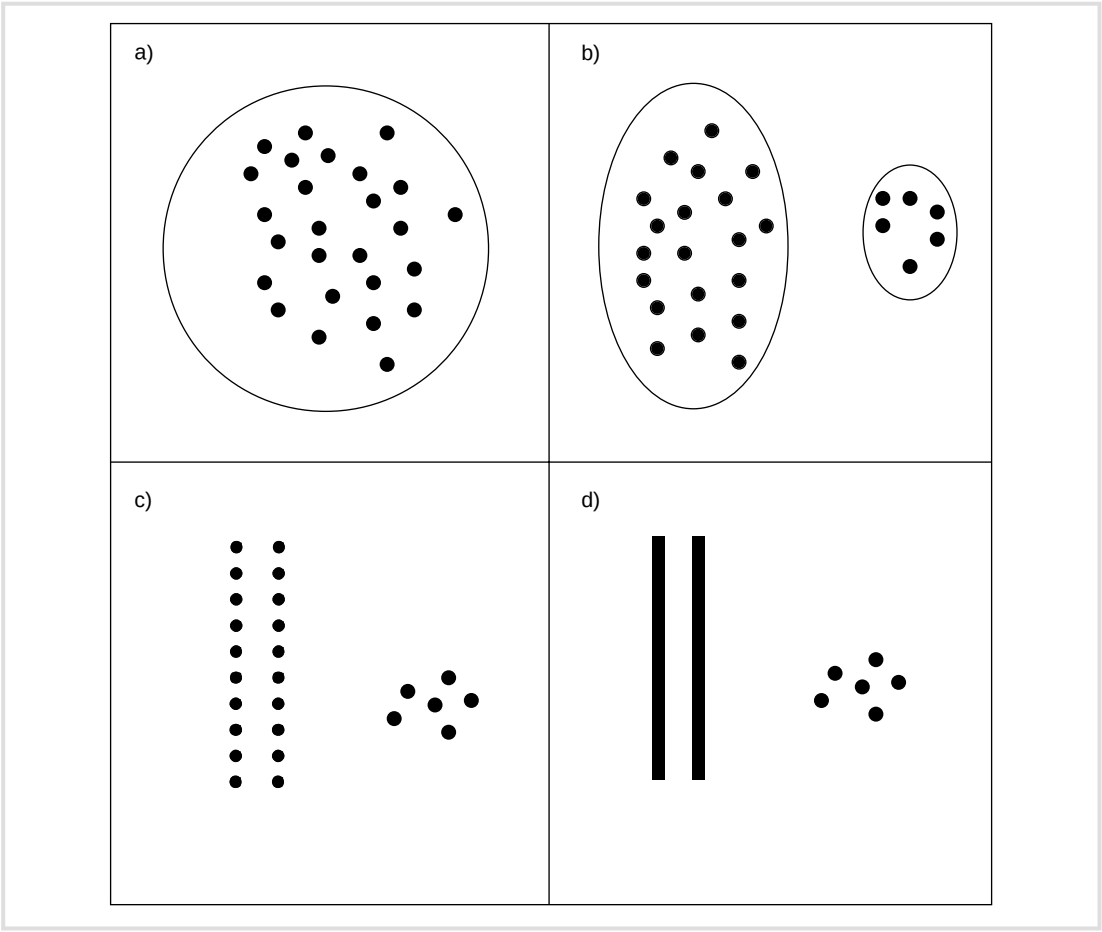

Figure 1

Les différentes conceptions du nombre 26 : (a) conception unitaire des nombres à deux chiffres, (b) : conception x-ante unités ? basée sur la numération verbale, (c) : séquence de dizaines-unités, (d) : conception de dizaines-unités séparées.

ces résultats reste débattue. Il est en effet possible que des représentations non numériques permettent aux enfants de réagir aux résultats impossibles des additions ou soustractions. En particulier, la réaction des bébés pourrait provenir d'une préférence conjointe pour la familiarité et la complexité (Cohen & Marks, 2002) ; ou bien, d'une série de processus généraux comme un mécanisme d'individuation des objets, d'une certaine capacité de mémoire, de capacité de comparaison terme-à-terme et de raisonnement d'ordre spatio-temporel sur les objets (Simon, 1997). En effet, pour ces petites numérosités, les système de maintien de la trace des objets (supposés sous-tendre le subitizing) pourraient être utilisés : devant un objet, l'enfant créerait une représentation 0_1. Quand un second objet est ajouté, il créerait une représentation 0_2. Quand le résultat est dévoilé, l'enfant comparerait, par correspondance terme-à-terme, sa représentation 0_1, 0_2, avec ce qu'il voit et serait surpris si la scène comporte un seul objet ou trois

DBU7032_8.fm Page 177 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

objets. Il y aurait donc surprise de l'enfant quand le résultat de l'opération est incorrect, sans toutefois supposer qu'il ait créé une représentation du cardinal des collections.

D'autres auteurs, comme Mix, Huttenlocher et Levine (2002), considèrent que l'enfant ne traite pas le nombre mais des variables physiques continues qui covarient avec celui-ci (comme la surface occupée par les objets, par exemple). À l'appui de cette dernière hypothèse, Feigenson, Carey et Spelke (2002) ont croisé les dimensions numérique et de surface dans un paradigme d'addition (voir figure 2). Un petit objet plus un petit objet donnait soit un grand objet, soit deux grands objets. Dans le premier cas, le nombre était inférieur au résultat attendu mais la surface du grand objet correspondait à la somme des surfaces des deux petits objets. Dans le second cas, le nombre correspondait à ce qui était attendu mais les surfaces du résultat étaient plus grandes que les surfaces occupées par les deux objets de départ. Il est apparu que les bébés étaient surpris par une incohérence au niveau de la surface mais pas par une incohérence numérique. Un résultat identique a été obtenu pour une soustraction dans laquelle deux grands objets moins un grand objet donnait soit un petit objet soit deux petits objets (dont la surface correspond à celle d'un des grands objets de départ). À l'heure actuelle, le débat reste donc ouvert quant au caractère réellement numérique des représentations qui sous-tendent ces observations sur une possible intuition arithmétique des petits.

Au-delà de cette intuition « mathématique », les premières résolutions d'opérations apparaissent vers 4 ans grâce à la maîtrise du dénombrement. Ainsi, avant d'avoir été soumis à un apprentissage systématique de l'arithmétique, les enfants établissent déjà une connexion entre leurs capacités embryonnaires de dénombrement et les situations qui requièrent l'utilisation de l'addition et de la soustraction. Bien sûr, ces enfants ont encore besoin de supports concrets pour représenter et résoudre les problèmes. Ainsi, Levine, Jordan et Huttenlocher (1992) ont comparé trois modalités de présentation de

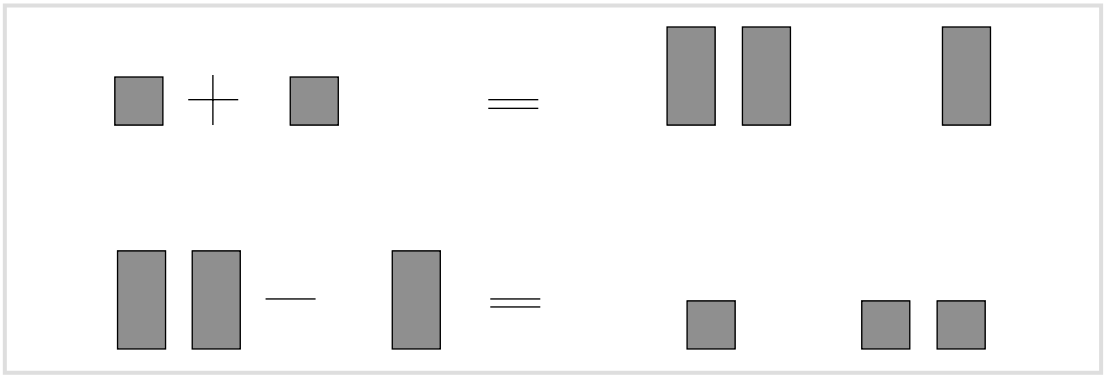

Figure 2

Représentation schématique des situations utilisées par Feigenson, Carey et Spelke (2002). Dans le haut de la figure : Un petit objet plus un petit objet donne soit deux grands objets (situation numériquement correcte mais incorrecte au niveau de la surface) soit un grand objet (situation numériquement incorrecte mais correcte au niveau de la surface). Dans le bas de la figure : Deux grands objets moins un grand objet donnent soit un petit objet (situation numériquement correcte mais incorrecte au niveau de la surface) soit deux petits objets (situation numériquement incorrecte mais correcte au niveau de la surface).

DBU7032_8.fm Page 178 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

calculs à des enfants de 4 à 6 ans. Ces problèmes sont soit présentés sous la forme de manipulation de matériel concret (sans verbalisation : un ensemble d'objets est présenté, puis dissimulé ; un autre ensemble y est ajouté ; les enfants doivent constituer une collection équivalente au résultat), soit sous la forme de petits énoncés verbaux (*Michel avait x balles, il en reçoit y, il en a combien maintenant* ?), soit sous forme de chiffres (x + y = ?). A tous les âges, la présentation concrète donne lieu à de meilleurs résultats que la présentation verbale. Ce n'est que vers 5 ans et demi — 6 ans que les enfants ont des réussites quasi équivalentes pour les trois types de présentation.

Outre cette abstraction croissante, le développement arithmétique se caractérise aussi par la découverte et l'utilisation de stratégies de résolution de plus en plus économiques et rapides. Nous allons considérer cette évolution pour l'addition, la soustraction et la multiplication.

7.1 *L'addition*

Siegler (1987) distingue cinq grands types de stratégies pour réaliser une addition : (1) compter des objets, (2) compter sur les doigts, (3) compter verbalement sans support concret, (4) utiliser des décompositions et (5) récupérer la réponse en mémoire à long terme (voir tableau 4). Autour de 3-4 ans, c'est le premier type de stratégie qui est massivement utilisé. Le comptage sur les doigts est la stratégie préférée de la plupart des enfants de 4-5 ans (Geary, Burlingham-Dubree, 1989). Les objets, comme les doigts ont un rôle important dans le maintien de la trace du comptage. En effet, ces référents externes permettent de distinguer ce qui est déjà compté de ce qui reste encore à compter. Cette capacité de faire mentalement la différence entre ce qui est déjà ou encore à compter, prédira le passage vers une stratégie de comptage verbal sans support concret (Fuson, 1982). Ce détachement d'un support apparaît plus précocement pour les petits calculs que pour les grands calculs. Trois types de comptage peuvent être distingués :

(1) le comptage du tout dans lequel l'enfant compte chacun des termes à partir de 1 (c'est le cas le plus fréquent lorsque le comptage opère directement sur des objets) ;

(2) le comptage à partir du premier terme : pour réaliser 5+6, l'enfant compte à partir de 5 et incrémente 6 fois : 6,7,8,9,10,11,

(3) enfin, la stratégie de comptage la plus rapide consiste à compter à partir du plus grand terme autant de pas qu'indiqué par le petit terme : par exemple, pour additionner 3+8, l'enfant compte à partir du 8 en 3 pas : 9,10,11.

Chaque passage d'une procédure vers une autre plus mature exige la maîtrise d'un certain savoir conceptuel. Ainsi, passer du comptage du tout au comptage à partir du premier terme suppose la notion de cardinalité et la capacité d'entrer dans la chaîne numérique verbale à partir d'un nombre différent de 1. Le passage de cette procédure à la suivante requiert la capacité de comparer la grandeur numérique de deux nombres pour pouvoir sélectionner le plus grand et la notion de commutativité (a+b = b+a). Cette procédure est habituellement utilisée dès la première année primaire (CP). Cette notion de commutativité a été étudiée par Baroody et Gannon (1984). Ils présentaient à des enfants de 1re à 3e primaire, des séries d'additions. Dans certains cas, des additions

DBU7032_8.fm Page 179 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

Tableau 4

Récapitulatif des stratégies de résolution des additions.

Stratégies	Description	Illustration
comptage du tout	Compter chaque terme à partie de 1	3+4=1,2,3,4,5,6,7
comptage à partir du premier terme	Compter à partir du 1er terme, un nombre de fois équivalent au 2e terme	3+4=4,5,6,7
comptage à partir du plus grand terme	Compter à partir du plus grand terme, un nombre de fois équivalents au plus petit terme	3+4=5,6,7
récupération	Récupérer la somme en mémoire à long terme	3+3=6
décomposition	Utiliser un calcul dont on connaît la somme pour raccourcir la procédure de comptage	3+4= [3+3=6] +1 =7

impliquant les mêmes termes mais dans un ordre inverse se succédaient (par exemple, 13+6 après 6+13). Si les enfants avaient une certaine notion de la commutativité, ils pouvaient calculer le résultat du premier calcul (soit, 13+6=14,15,16,17,18,19), mais donner directement la réponse pour le second : « *c'est encore 19 puisque c'est le même calcul !* ». Ce type de comportement était effectivement observé de manière consistante chez 72 % des enfants de première année et 83 % des enfants de seconde ou troisième.

Progressivement, à force de comptages répétés, l'enfant va mémoriser des associations calcul-réponse. C'est ce qu'on appelle un *fait arithmétique*◆. Cette association calcul-réponse sera renforcée chaque fois que la résolution du calcul conduira à produire cette réponse. Les premiers faits arithmétiques mémorisés (en mémoire à long terme) sont les doubles (2+2, 3+3, 4+4, ...) et les petits problèmes (e.g. : 1 + 2 = 3 qui est très proche de la séquence de comptage) (Siegler et Shrager, 1984)) ; le réseau des faits arithmétiques s'étend ensuite, intégrant progressivement les problèmes de plus grande taille (Lemaire, Barrett, Abdi, & Fayol, 1994). Ces faits arithmétiques permettent une résolution quasi immédiate des problèmes par simple récupération en mémoire à long terme de la réponse. Ils permettent également l'émergence d'une autre stratégie de résolution des calculs : la décomposition, dans laquelle un fait arithmétique (e.g., 6+6=12) est utilisé afin de raccourcir la procédure de comptage utilisée pour résoudre un calcul proche (6+7=(6+6)+1=12+1).

Chez les enfants sans difficulté d'apprentissage, la découverte de stratégies plus matures opère de manière naturelle sans aucune instruction explicite de la part des adultes. Néanmoins, le développement ne peut être décrit comme le passage systématique de l'utilisation d'une stratégie à une autre plus efficace. En effet, à tout moment, les enfants recourent à un ensemble varié de stratégies (Lemaire & Siegler, 1995). Ainsi, même les adultes (étudiants universitaires, voir LeFevre, et coll. 1996a, 1996b) ne réalisent pas des additions ou des multiplications simples au moyen exclusif de la récupération en mémoire à long terme mais continuent à utiliser d'autres stratégies comme des procédures de comptage ou de décomposition.

DBU7032_8.fm Page 180 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

Différents modèles de réseaux de faits arithmétiques en mémoire à long terme ont été proposés. Celui de Siegler est le seul qui donne une place à l'aspect développemental. Son modèle du choix stratégique (Adaptative Strategy Choice Model : ASCM ; Siegler & Shrager, 1984 ; Siegler & Shipley, 1995 ; Shrager, & Siegler, 1998) couvre la recherche en mémoire de faits arithmétiques, l'utilisation d'algorithmes de comptage et des structures décisionnelles pour choisir la stratégie adoptée pour résoudre un problème donné.

Le réseau en mémoire à long terme code l'ensemble des réponses qui ont été associées à un problème. Ceci comprend la réponse correcte, mais également les réponses erronées que l'enfant a produites ou rencontrées au cours de ses diverses résolutions du calcul. Chacune de ces associations est caractérisée par une force. Si la réponse 3 a souvent été produite en réponse au problème (2+1) et la réponse 4 quelques fois seulement, alors la force associative entre 3 et (2+1) sera plus importante que celle entre 4 et (2+1). L'intensité de ces associations varie au cours du temps, en fonction de la fréquence des rencontres entre un problème donné et une réponse particulière.

Outre ce réseau de représentations, le modèle décrit **le processus décisionnel** du sujet lors de la résolution d'un problème. Trois phases sont distinguées. Dans la première, l'enfant (ou l'adulte) tente de récupérer en mémoire à long terme la solution. L'issue de cette tentative dépendra de deux paramètres : le critère de confiance interne et le nombre de tentatives acceptées. Pour qu'une réponse soit émise, il faut que la force associative entre cette réponse et le problème soit supérieure au critère de confiance fixé. Par exemple, si la force associative entre (2+1) et (3) est de 79, alors cette réponse peut être donnée si le critère de confiance est de 7 mais ne sera pas produite s'il est de 8. Le nombre de tentatives acceptées correspond au nombre maximal d'essais que le sujet s'autorise pour récupérer en mémoire une réponse. Si, après une ou plusieurs tentatives de récupération (en fonction du nombre maximal d'essais autorisés), le sujet n'a pas pu sélectionner une réponse dont la force d'association avec le problème excédait son degré de confiance, la seconde phase du processus est enclenchée. Celle-ci vise à créer une représentation plus élaborée du problème. Cette représentation peut être interne (e.g., former une image mentale correspondant à (2+1) en visualisant un ensemble de 2 objets et de 1 objet) ou externe (lever le nombre de doigts correspondant au problème : 2 à une main et 1 à l'autre). De façon discutable, Siegler et Shrager font l'hypothèse que cette représentation du problème ajoute une constance à la force d'association entre le problème et les réponses ce qui permet d'atteindre plus facilement le critère de confiance fixé. Si toutefois, le critère n'est pas encore atteint, la troisième phase est initiée. Dans celle-ci, une procédure de comptage est mise en place.

Dans une version plus récente de ce modèle, Shrager et Siegler (1998) font l'hypothèse qu'à chaque résolution d'un problème, l'enfant stockerait en mémoire, non seulement l'association entre le problème et la réponse, mais aussi celle entre le problème et la stratégie utilisée pour le résoudre (y compris, l'efficacité de celle-ci). A force d'être utilisée, une stratégie exigerait de moins en moins de ressources attentionnelles. Lorsque suffisamment de ressources attentionnelles sont libérées par cette automatisation, l'enfant pourrait alors ré-examiner le processus qui s'est déroulé et découvrir de nouvelles stratégies. Cette créativité stratégique est importante car plus l'enfant dispose de stratégies

DBU7032_8.fm Page 181 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

de résolution variées, plus il est capable de choisir celle qui est la plus adaptée au problème qui lui est présenté (pour une présentation plus détaillée de ce modèle, voir Gandini, & Lemaire, 2005).

7.2 La soustraction et la multiplication

Une évolution assez similaire à ce qui a été décrit pour l'addition se retrouve pour la soustraction. Au tout début, l'enfant soustrait à partir de collections d'objets et en recourant à l'usage de ses doigts. Plusieurs stratégies sont également utilisées : retrait du plus petit des deux nombres et comptage du reste, comptage de l'écart entre le plus petit et le plus grand des deux nombres par une addition, etc. Les stratégies de comptage verbal prennent ensuite le relais avec le comptage vers le haut (*comptage en avant* : 9-6 = 7, 8 et 9, trois pas de comptage, réponse = 3) et le comptage à rebours (*comptage en arrière* **:** 7-3 = 6, 5, 4, réponse = 4). L'enfant utilisera aussi l'addition comme référence (8-2 = 6 parce que 6 + 2 = 8). Enfin, comme pour l'addition, se met ensuite en place et progressivement une stratégie de récupération directe en mémoire (Geary, Frensch, & Wiley, 1993).

L'acquisition de la multiplication est plus tardive. Au début, l'enfant recourt à *des stratégies d'additions répétées* (4 x 3 = 4 + 4 + 4) et *de comptage en base n* (5 x 4 = 5, 10, 15, 20). L'apprentissage de la multiplication se fait également par la répétition orale fréquente et systématique des tables. Comme pour l'addition, il semble que les petits produits et les doubles soient acquis plus rapidement que les autres (Lemaire, & Siegler, 1995). Ces produits seraient présentés plus fréquemment dans les manuels scolaires (Ashcraft, & Christy, 1995). L'apprentissage de certains produits se ferait enfin au moyen de règles (i.e. : $n \times 1 = n$ ou $n \times 0 = 0$).

7.3 Les opérations complexes

La résolution, mentale, des additions complexes repose sur la connaissance de l'organisation en base 10 des nombres. En effet, Fuson, Smith, et Lo Cicero (1997) montrent que les enfants qui n'ont pas acquis une conception décimale du nombre, ne peuvent résoudre les calculs de termes supérieurs à 10 qu'en recourant au comptage unité par unité, ce qui est extrêmement laborieux (58+14=58,59,60,61...72). En revanche, plusieurs méthodes sont disponibles pour ceux qui maîtrisent la logique décimale (e.g., 58+14=58+10+4 ; 58+14=(50+10)+(8+4)=60+12, ... ; Lemaire, & Arnaud, sous presse). Généralement, l'école transmet une de ces stratégies. Ceux qui ne comprennent pas le principe sous-jacent à la construction du système numérique ne peuvent qu'appliquer ces règles à la manière d'un algorithme abscons. Le risque d'erreurs de procédure est alors sensible (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1997).

La maîtrise des additions complexes écrites en colonne se fait par un enseignement systématique. L'enfant doit alors apprendre à maîtriser un dispositif spatial particulier, à aligner les nombres sur la droite, à accomplir dans un ordre obligé et à partir de la droite

DBU7032_8.fm Page 182 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

une suite d'additions élémentaires. Dans cet apprentissage, il sera confronté à la maîtrise des procédures de report lorsque l'addition des éléments d'une colonne dépasse dix. La compréhension de l'organisation en base dix des nombres et de l'organisation positionnelle du code arabe est particulièrement critique pour la maîtrise du calcul écrit. Les difficultés des enfants se manifestent spécifiquement pour les reports et à ce niveau il semble qu'interviennent en priorité soit des problèmes de mémoire de travail, soit des problèmes d'ordre conceptuel.

Pour la soustraction écrite, l'apprentissage des procédures d'emprunts peut poser des problèmes spécifiques. Van Lehn (1990) a ainsi décrit des erreurs systématiques à ce niveau ; nous présentons trois d'entre les plus fréquentes. Certains enfants n'appliquent jamais cette procédure : quels que soient les nombres, ils soustraient, dans chaque colonne, le plus petit chiffre du plus grand (figure 3 a). D'autres ajoutent correctement les dix unités pour la procédure d'emprunt mais ne retirent pas 1 de la colonne précédente (figure 3 b). D'autres enfants égalisent la différence entre les deux chiffres et retirent de la colonne précédente la valeur correspondant à cette différence (figure 3 c).

La plupart des travaux se sont donc intéressés au développement du calcul précis dans lequel la réponse exacte doit être produite. Certains auteurs se sont néanmoins intéressés aux capacités d'estimation de résultats d'opération arithmétique. A 5 ans, les petits sont très clairement incapables d'estimer le résultat d'additions simples (Baroody, 1989 ; Dowker, 2003) et produisent des réponses qui ne sont pas liées à la somme réelle. Il s'avère, en fait, que ces capacités d'estimation arithmétique évoluent très lentement. Ainsi, la somme de deux nombres à 3 chiffres est mieux estimée par les adultes et les enfants de 6e année que par les enfants de 4e année (Lemaire, & Lecacheur, 2002). De la même manière, le produit de nombres à plusieurs chiffres est mieux estimé par les adultes que des élèves de 8e année, eux-mêmes étant de meilleurs estimateurs que les élèves de 6ième année (LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993). Au cours du développement, les individus utilisent un nombre croissant de stratégies d'estimation et augmentent également leur capacité à utiliser la plus adaptée au problème présenté (pour une revue, voir Siegler & Booth, 2005). Au-delà du facteur âge, des différences dans les capacités d'estimation apparaissent également en lien avec l'intelligence (Reys *et al.*, 1982) mais aussi des capacités mathématiques et, en particulier, arithmétiques, des individus (Siegler, & Booth, 2004 ; Dowker, 2003 ; LeFevre *et al.*, 1993).

En résumé, au-delà d'une possible « intuition mathématique » de départ, l'enfant utilise le comptage pour résoudre les opérations arithmétiques élémentaires. Par la suite,

Tableau 3

Exemples d'erreurs typiques dans l'utilisation des procédures d'emprunt pour la soustraction. (a), l'enfant n'utilise pas de procédure d'emprunt et soustrait le plus grand chiffre du plus petit, quelque soit sa position ; (b) l'enfant ajoute bien 10 dizaines aux 4 existantes mais ne diminue pas de 1 le nombre de centaines ; (c) pour retirer 6 de 4, l'enfant emprunte 2 à la colonne précédente.

			10		3 2
a)	248	b)	248	c)	548
	− 152		− 152		− 162
	116		196		206

DBU7032_8.fm Page 183 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

l'enfant utilisera de moins en moins de support concret pour soutenir son comptage. Il développera également un répertoire stratégique de plus en plus large, sélectionnant la stratégie la plus adaptée pour résoudre chaque problème. Progressivement, un réseau de faits arithmétiques se constitue en mémoire, permettant une simple récupération de la solution. Les opérations complexes exigent la maîtrise de procédures, souvent facilitée par une bonne compréhension du système positionnel en base 10 du code arabe. Le développement de ces capacités de calcul exact nourrit également les capacités d'estimation arithmétique de l'enfant qui semblent suivre, plutôt que précéder, le calcul exact.

8 La dyscalculie développementale

Pour certains enfants, le développement numérique pose problème. Ces difficultés peuvent être liées à un problème perceptif, comme c'est le cas des enfants atteints de surdité (Leybaert & Van Cutsem, 2002) ou d'infirmité motrice cérébrale présentant typiquement des troubles visuo-praxiques (subitizing réduit et dénombrement plus lent et plus entaché d'erreurs ; Arp & Fagard, 2001 ; Montaru & Camos, 2004) ou encore à des difficultés langagières (comme c'est le cas des enfants dysphasiques ; Fazio, 1994). Évidemment, un retard mental conduit également à des problèmes dans ce développement, même en ce qui concerne les habiletés de base (e.g., subitizing et dénombrement ; Freeman & Camos, 2001). Certaines lésions cérébrales peuvent aussi donner lieu à des difficultés dans le domaine numérique (Ashcraft, Yamashita,, & Aram, 1992 ; Martins, Parreira, Albuquerque,, & Ferro, 1999 ; Van Hout, 2001).

Toutefois, certains enfants qui ne présentent pas de lésion cérébrale, pas de trouble sensoriel ou de retard mental et qui sont élevés dans un milieu socio-économique, familial et scolaire adéquat, peuvent présenter de réelles difficultés d'apprentissage numérique. On parle alors de **dyscalculie développementale**. Les difficultés concernent les processus de base : ces enfants présentent un rang de subitizing réduit, une chaîne numérique verbale moins bien développée, des capacités de dénombrement caractérisées par une lenteur et une moins bonne maîtrise des principes sous-jacents (Geary, Bow-Thomas, & Yao, 1992 ; Geary, 2005 ; Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004). Au niveau des premiers apprentissages scolaires, on relève des difficultés de transcodage et des capacités arithmétiques caractérisées par l'utilisation de stratégies de résolution de calculs immatures, peu de récupération en mémoire à long terme des solutions et, le cas échéant, des temps de réponse variables et plus d'erreurs que les enfants contrôles (Geary, 2004). Toutes ces difficultés ne sont pas nécessairement observées chez chaque enfant dyscalculique et certaines classifications des troubles ont été proposées (e.g., Badian, 1983). Ces difficultés d'apprentissage numérique ne sont pas rares : elles concernent environ 6 % de la population (Gross-Tsur, Manor, & Shalev, 1996). En outre, elles persistent au cours du développement (Shalev, Manor, & Gross-Tsur, 2005).

Une certaine contribution génétique peut être invoquée dans l'apparition de ces troubles. En effet, le taux de problèmes d'apprentissage en mathématique parmi les parents au premier degré d'un enfant dyscalculique est beaucoup plus élevé que le

DBU7032_8.fm Page 184 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

taux observé dans la population générale (Shalev, Manor, Kerem, Ayali, Badichi, ; Friedlander, & Gross-Tsur, 2001). En outre, le jumeau d'un enfant dyscalculique a une probabilité plus élevée d'être lui-même dyscalculique s'il s'agit de jumeaux homozygotes (vrais jumeaux) plutôt que de jumeaux hétérozygotes (Alarcon, DeFries, Light, & Pennington, 1997). Enfin, certains syndromes génétiques sont connus pour présenter d'importantes difficultés dans le domaine numérique (e.g., Syndrome de Turner : Rovet, Szekely, & Hockenberry, 1994 ; syndrome de Williams : Paterson, Brown, Gsold, Johnson, & Karmiloff-Smith, 1999).

Au niveau cognitif, plusieurs hypothèses étiologiques ont été proposées concernant ce trouble. Certaines de ces hypothèses évoquent des facteurs cognitifs généraux. En particulier, il apparaît que les enfants dyscalculiques sont caractérisés par de faibles capacités de mémoire de travail, en particulier en ce qui concerne la composante administrateur central de ce système (McLean & Hitch, 1999 ; Geary, Hoard, & Hamson, 1999). Cette faiblesse de la mémoire de travail pourrait expliquer leur propension à commettre plus d'erreurs de comptage dans la réalisation des calculs et leur besoin d'un soutien externe, comme les doigts, pour contrôler le nombre de pas de comptage à effectuer (Noël, Seron, & Trovarelly, 2004). Par ailleurs, selon Geary (1993), la coactivation en mémoire de travail des représentations du problème (e.g., 4+3) et de la réponse (7) serait nécessaire pour que s'établisse en mémoire à long terme un fait arithmétique. À nouveau, un déficit de la mémoire de travail empêcherait cette coactivation et rendrait compte de la difficulté des enfants dyscalculiques à se constituer un réseau de faits arithmétiques en mémoire à long terme (voir Geary, 2004).

D'autres auteurs pensent que la base de la dyscalculie développementale n'est pas à chercher dans des facteurs cognitifs généraux mais bien au niveau du domaine numérique lui-même. Ainsi, Landerl, Bevan et Butterworth (2004) soutiennent que ces enfants seraient privé du « number sense », c'est-à-dire du sens du nombre ou encore de la représentation de la quantité. Par conséquent, toute activité numérique serait problématique. À l'appui de cette hypothèse, ces auteurs ont montré un ralentissement significatif des enfants dyscalculiques, par comparaison à des enfants contrôles, dans une série de tâches numériques (lire des nombres, dénombrer des collections, calculer), y compris dans une tâche de jugement de la grandeur de deux nombres qui requiert, précisément, d'activer la grandeur numérique correspondant à un chiffre et de la comparer à celle d'un autre chiffre. Rousselle et Noël (2007) notent néanmoins que toutes ces tâches impliquent la compréhension ou la production d'un nombre dans un format symbolique (numéraux arabes ou verbaux oraux). Par conséquent, elles proposent qu'il pourrait s'agir, non pas d'un défaut au niveau de la représentation sémantique des nombres mais bien du passage d'un code symbolique à cette représentation. Pour tester cette hypothèse, les auteurs contrastent des comparaisons de grandeur portant sur du matériel numérique symbolique (nombres arabes) ou non symboliques (collections de bâtons) et montrent que seule cette première tâche donne lieu à une différence entre les groupes ; ce qui est en faveur d'un déficit d'accès à la représentation sémantique du nombre à partir de codes symboliques.

DBU7032_8.fm Page 185 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

9 En conclusion

Le développement numérique est un processus lent (voir Tableau 5). Celui-ci débute probablement avec des processus non spécifiquement numériques comme le système de maintien de la trace des objets (rendant compte du subitizing) et la représentation analogique de la quantité (rendant compte des capacités d'approximation de grandes collections). Avec le langage, l'enfant crée une réelle représentation exacte du nombre et montre une compréhension de la cardinalité aux alentours de 3 ans. L'apprentissage des nombres verbaux oraux et du code arabe écrit exige la maîtrise des aspects lexicaux de ces codes mais aussi, et cela prend plus de temps, celui de leur syntaxe. Cet apprentissage est quasi abouti aux alentours de 9 ans. Au cours de celui-ci, l'enfant développe une représentation sémantique du nombre en base 10, typique de ces systèmes symboliques. L'enfant acquiert également des savoirs arithmétiques. Le développement dans ce domaine est caractérisé par un recours de moins en moins fréquent à du matériel concret, l'utilisation de stratégies de comptage de plus en plus efficaces et économiques et le développement progressif d'un réseau de faits arithmétiques en mémoire à long terme. Les calculs plus complexes portant sur des nombres à plusieurs chiffres mettent en œuvre des procédures qui ne sont véritablement maîtrisées que par les enfants qui ont une compréhension de la base 10 des nombres.

Ce développement numérique pose néanmoins problèmes pour certains enfants. Sans doute des facteurs cognitifs généraux comme une faiblesse de la mémoire de travail contribuent-ils à ces difficultés. Néanmoins, il semble qu'un problème spécifique à la sphère numérique en soit réellement la cause. Il est ainsi probable que ces enfants ont une représentation analogique de la quantité sans particularité mais que la représentation sémantique exacte qui se construit à partir des codes symboliques pose problème et explique leurs difficultés d'apprentissage.

Tableau 5

Synthèse des premiers développements numérique de l'enfant.

bébé	2 ans	3-4 ans	5-6 ans	6-9 ans
Système de maintien de la trace	Début du langage : Entrée dans la chaîne numérique verbale	Représentation de la valeur cardinale des premiers mots nombres (« donne-moi »)	Développement du niveau d'élaboration de la chaîne numérique verbale	Développement du transcodage
Représentation analogique de la quantité	Premières activités de dénombrement	Premiers calculs par dénombrement d'objets	Maîtrise et coordination des principes du dénombrement	Développement d'une représentation numérique de plus en plus précise et en base 10
			Entrée dans le code écrit	Développement des stratégies de calcul, constitution d'un réseau de faits arithmétiques en mémoire

DBU7032_8.fm Page 186 Vendredi, 11. mai 2007 5:12 17

Résumé

- Dans certaines conditions, le bébé est capable de différentier des collections de taille numérique différente, probablement grâce à des processus non spécifiquement numériques (système de maintien de la trace des objets et représentation analogique de la quantité).
- Avec le langage, l'enfant crée une réelle représentation exacte du nombre et montre une compréhension de la cardinalité aux alentours de 3 ans.
- La maîtrise des codes numériques (aspects lexicaux et syntaxiques) et des processus de transcodage est quasi aboutie aux alentours de 9 ans.
- Le développement arithmétique se caractérise par un développement de stratégies de comptage de plus en plus efficaces et par la constitution d'un réseau de faits arithmétiques en mémoire à long terme permettant la récupération des réponses.
- La représentation sémantique du nombre de l'enfant devient de plus en plus précise et inclut également la notion de base 10 (ce qui facilite les calculs sur les nombres complexes).
- La dyscalculie développementale correspond à une difficulté des apprentissages numériques et semble liée à une difficulté d'accès à la représentation sémantique du nombre à partir des codes symboliques.

Des lectures pour aller plus loin

Barrouillet, P. & Camos, V. (2006). *Cognition mathématique chez l'enfant.* Solal, Marseille, 190 pages.

Bideaud, J. & Lehalle, H. (2002). *Le développement des activités numériques de l'enfant.* Lavoisier, Paris, 333 pages.

Dehaene, S. (1997) *La bosse des maths.* Paris : Editions Odile Jacob.

Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development : Research and practical applications.* Washington, DC : American Psychological Association. 327 pages.

Noël, M-P. (2005). *La dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant.* Collection « troubles du developpement psychologique et des apprentissages ». Solal, Marseille, France, 264 pages.

Van Hout, A. ; Meljac, C. & Fischer, JP. (2005). *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* Masson, Paris, 425 pages.

Mots clés

Pouvez-vous définir chacun des termes suivants ?

- Chaîne numérique
- Dénombrement
- Dyscalculie développementale
- Dyscalculie développementale
- Erreurs lexicales
- Erreurs syntaxiques
- Estimation
- Fait arithmétique
- Primitives lexicales
- Subitizing
- Transcodage