

Tores associés à une algèbre étale quartique

Jean-Pierre Tignol *

14 avril 2017

À Max Knus, en hommage amical pour son septante-cinquième anniversaire

Résumé

Cet article met en évidence des homomorphismes entre le groupe multiplicatif d'une algèbre étale de dimension 4 et celui d'une algèbre étale de dimension 6 qui lui est canoniquement associée sur un corps arbitraire. Ces homomorphismes sont utilisés pour mettre en relation différents groupes de normes et pour donner une description de la 2-torsion dans le groupe de Brauer relatif d'une extension de degré 4. Les résultats obtenus étendent aux algèbres étales arbitraires de dimension 4 plusieurs propriétés remarquables des extensions biquadratiques.

À toute algèbre étale L de dimension 4 sur un corps k arbitraire est associée canoniquement (à isomorphisme près) une extension quadratique étale S d'une k -algèbre étale cubique C : dans [12] (où l'on utilise la notation $\Lambda_2(L)$ pour S et $\mathcal{R}(L)$ pour C), les algèbres S et C sont définies comme dans (14) ci-dessous à l'aide de la correspondance entre k -algèbres étales et ensembles finis munis d'une action du groupe de Galois absolu Γ de k . En termes de polynômes, cette construction est très classique : si P est le polynôme minimal (de degré 4) d'un générateur de L , alors C est engendrée par une racine de la cubique résolvante de P , et S est caractérisée par la condition que P se factorise en produit de deux polynômes de degré 2 dans $S[X]$. On peut aussi formuler la définition de S et C en termes de cohomologie galoisienne des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, comme dans [12, §5.2]. En effet, les k -algèbres étales quartiques sont classifiées par l'ensemble de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{S}_4)$, tandis que les extensions quadratiques étales de k -algèbres étales cubiques sont classifiées par $H^1(\Gamma, \mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_3)$, où $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_3$ est le produit couronne de $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$. La correspondance entre algèbres quartiques et extensions quadratiques

*L'auteur remercie Jean-Louis Colliot-Thélène d'avoir attiré son attention sur l'article de Sivatski [19], et d'avoir simplifié sa preuve du théorème 2.1. Il bénéficie de subventions du Fonds de la Recherche Scientifique-FNRS portant les n° J.0014.15 et J.0149.17.

d'algèbres cubiques apparaît alors comme un avatar de la coïncidence de diagrammes de Dynkin $A_3 \equiv D_3$, qui a pour conséquence l'identité des groupes de Weyl associés

$$\mathfrak{S}_4 = W(A_3) = W(D_3) \subset \mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_3.$$

Nous appellerons S/C *l'extension quadratique résolvante* de L .

Le but de ce travail est de décrire les relations entre les k -tores des groupes multiplicatifs de L , S et C . Si l'on note ces tores T_L , T_S et T_C , que l'on désigne par T_L^1 le noyau de la norme $T_L \rightarrow \mathbb{G}_m$ et que l'on définit semblablement T_S^1 et T_C^1 , notre outil principal consiste en deux morphismes

$$\sigma^* : T_L \rightarrow T_S \quad \text{et} \quad \tau^* : T_S \rightarrow T_L$$

qui donnent deux suites exactes

$$1 \rightarrow T_L/\mathbb{G}_m \rightarrow T_S/\mathbb{G}_m \rightarrow T_C/\mathbb{G}_m \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \rightarrow T_C^1 \rightarrow T_S^1 \rightarrow T_L^1 \rightarrow 1.$$

Ces morphismes sont utilisés pour obtenir une description de plusieurs groupes définis par des normes. En notant $N(L/k) = N_{L/k}(L^\times)$ le groupe des normes de L/k , et en définissant de même les groupes de normes $N(S/k)$ et $N(S/C)$, on montre dans la proposition 3.1 :

$$\{x \in k^\times \mid x^2 \in N(L/k)\} = k^{\times 2} \cdot N(S/k) \quad \text{et} \quad k^\times \cap N(S/C) = k^{\times 2} \cdot N(L/k).$$

De plus, on donne dans le corollaire 3.5 une paramétrisation des éléments de 2-torsion déployés par L dans le groupe de Brauer $\text{Br}(k)$: ces éléments sont des corestrictions d'algèbres de quaternions sur C déployées par S :

$${}_2\text{Br}(L/k) = \{\text{cor}_{C/k}(S/C, x) \mid x \in C^\times\}.$$

Ces résultats étendent aux k -algèbres quartiques arbitraires plusieurs énoncés qui sont bien connus dans le cas des extensions biquadratiques, comme le «lemme biquadratique» et le “*Common Slot Theorem*” : voir l'exemple 5.1. Le théorème 4.1 montre comment calculer une forme quadratique d'Albert d'une k -algèbre de biquaternions déployée par L à partir de sa description ci-dessus comme corestriction. À l'aide de ce théorème, on retrouve dans le corollaire 4.4 la paramétrisation des k -algèbres de quaternions déployées par L donnée dans [8, Cor. 22], [9, Th. 6.2]¹ et [18, Cor. 4] (et dans [14, Th. 3.9] pour le cas particulier où L est une 2-extension). Dans le cas où k est un corps global, on obtient un principe de Hasse modulo les carrés pour les normes d'extensions quartiques étales : voir la remarque 3.2. Ce principe de Hasse a été établi par Sivatski [19] par des arguments substantiellement différents.

Les méthodes utilisées n'imposent aucune restriction sur la caractéristique du corps de base. Sauf mention explicite, k désigne un corps de base arbitraire.

1. Hoffmann et Sobiech se limitent à la caractéristique 2, mais ils envisagent aussi le cas où L est une extension inséparable de k .

1 Γ -modules

Soit k_s une clôture séparable de k et $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$ son groupe de Galois. Par définition, un Γ -ensemble est un ensemble fini muni d'une action continue de Γ , et un Γ -module est un $\mathbb{Z}$ -module de type fini muni d'une action continue de Γ . Pour tout Γ -ensemble E , le $\mathbb{Z}$ -module libre de base E , que l'on désigne par $\mathbb{Z}[E]$, hérite de E une action de Γ qui en fait un Γ -module. Les modules de ce type sont appelés Γ -modules de permutation. Ils sont équipés d'homomorphismes équivariants ε_E et ν_E appelés respectivement «augmentation» et «norme»

$$\varepsilon_E: \mathbb{Z}[E] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \nu_E: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[E],$$

définis sur les éléments de base par $\varepsilon_E(e) = 1$ et $\nu_E(1) = \sum_{e \in E} e$. On note

$$I[E] = \ker \varepsilon_E \quad \text{et} \quad J[E] = \text{coker } \nu_E.$$

On peut identifier tout module de permutation $\mathbb{Z}[E]$ à son dual $\text{Hom}(\mathbb{Z}[E], \mathbb{Z})$ de sorte que la base E soit auto-duale. Les homomorphismes ε_E et ν_E apparaissent alors comme duaux l'un de l'autre, et il en est de même des modules $I[E]$ et $J[E]$.

Soit à présent X un Γ -ensemble à quatre éléments. On associe à X le Γ -ensemble $\wedge^2(X)$ dont les éléments sont les paires (non ordonnées) d'éléments de X , et $\mathcal{R}(X)$ le Γ -ensemble dont les éléments sont les partitions de X en sous-ensembles de 2 éléments : si $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, alors

$$\wedge^2(X) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}\}$$

et

$$\mathcal{R}(X) = \{\{\{x_1, x_2\}\{x_3, x_4\}\}, \{\{x_1, x_3\}\{x_2, x_4\}\}, \{\{x_1, x_4\}\{x_2, x_3\}\}\}.$$

L'ensemble X étant fixé dans la suite, on écrira simplement $\wedge^2$ pour $\wedge^2(X)$ et $\mathcal{R}$ pour $\mathcal{R}(X)$, afin d'alléger les notations.

Le complémentaire de toute paire d'éléments de X est aussi une paire d'éléments de X ; on peut donc définir des applications Γ -équivariantes comme suit :

$$\begin{array}{lll} \gamma: \wedge^2 \rightarrow \wedge^2 & \lambda \mapsto X \setminus \lambda & \text{pour } \lambda \in \wedge^2; \\ \pi: \wedge^2 \rightarrow \mathcal{R} & \lambda \mapsto \{\lambda, \gamma(\lambda)\} & \text{pour } \lambda \in \wedge^2. \end{array}$$

La projection $\pi: \wedge^2 \rightarrow \mathcal{R}$ permet de définir des homomorphismes qui sont des analogues relatifs de l'augmentation et de la norme : on pose

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}: \mathbb{Z}[\wedge^2] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{R}] & \lambda \mapsto \pi(\lambda) & \text{pour } \lambda \in \wedge^2; \\ \nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}: \mathbb{Z}[\mathcal{R}] \rightarrow \mathbb{Z}[\wedge^2] & r \mapsto \sum_{\lambda \in r} \lambda & \text{pour } r \in \mathcal{R}. \end{array}$$

On a aussi un automorphisme équivariant

$$Id - \gamma: \mathbb{Z}[\wedge^2] \rightarrow \mathbb{Z}[\wedge^2] \quad \lambda \mapsto \lambda - \gamma(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \in \wedge^2.$$

Choisissons $\{\lambda_r \mid r \in \mathcal{R}\}$ une section (ensembliste) de π , c'est-à-dire un ensemble de trois éléments de $\wedge^2$ tels que $\pi(\lambda_r) = r$ pour tout $r \in \mathcal{R}$. Un élément $\alpha = \sum_{\lambda \in \wedge^2} \alpha_\lambda \cdot \lambda \in \mathbb{Z}[\wedge^2]$ (avec $\alpha_\lambda \in \mathbb{Z}$ pour $\lambda \in \wedge^2$) est dans le noyau de $Id - \gamma$ si et seulement si $\alpha_\lambda = \alpha_{\gamma(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in \wedge^2$. Alors $\alpha = \nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}(\sum_{r \in \mathcal{R}} \alpha_{\lambda_r} \cdot \pi(\lambda_r))$. De plus,

$$\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}(\alpha) = \sum_{\lambda \in \wedge^2} \alpha_\lambda \cdot \pi(\lambda) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \left(\sum_{\pi(\lambda)=r} \alpha_\lambda \right) r,$$

donc $\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}(\alpha) = 0$ si et seulement si $\alpha_\lambda + \alpha_{\gamma(\lambda)} = 0$ pour tout $\lambda \in \wedge^2$. Lorsque cette condition est satisfaite, on a

$$\alpha = (Id - \gamma) \left(\sum_{r \in \mathcal{R}} \alpha_{\lambda_r} \cdot \lambda_r \right).$$

Ces observations permettent d'établir l'exactitude de la suite

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}[\mathcal{R}] \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}} \mathbb{Z}[\wedge^2] \xleftarrow{Id-\gamma} \mathbb{Z}[\wedge^2] \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} \mathbb{Z}[\mathcal{R}] \leftarrow 0. \quad (1)$$

Dès lors, en posant $I[\wedge^2/\mathcal{R}] = \ker \varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}$ et $J[\wedge^2/\mathcal{R}] = \text{coker } \nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}$, on voit que l'homomorphisme $Id - \gamma$ induit un isomorphisme canonique

$$I[\wedge^2/\mathcal{R}] \xleftarrow{\sim} J[\wedge^2/\mathcal{R}]. \quad (2)$$

1.1 L'homomorphisme σ

Avec les notations introduites au début de cette section, on considère l'homomorphisme équivariant

$$\sigma: \mathbb{Z}[\wedge^2] \rightarrow \mathbb{Z}[X], \quad \lambda \mapsto \sum_{x \in \lambda} x \quad \text{pour } \lambda \in \wedge^2.$$

Proposition 1.1. *L'homomorphisme $\bar{\varepsilon}_X: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ composé de ε_X et de la réduction modulo 2 s'insère dans la suite exacte*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\bar{\varepsilon}_X} \mathbb{Z}[X] \xleftarrow{\sigma} \mathbb{Z}[\wedge^2] \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} I[\mathcal{R}] \leftarrow 0. \quad (3)$$

De plus, les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{Z}[X] \\ \uparrow 2 & & \uparrow \sigma \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2}} & \mathbb{Z}[\wedge^2] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \xleftarrow{\nu_X} & \mathbb{Z} \\ \sigma \uparrow & & \uparrow \varepsilon_{\mathcal{R}} \\ \mathbb{Z}[\wedge^2] & \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} & \mathbb{Z}[\mathcal{R}] \end{array} \quad (4)$$

Démonstration. La commutativité des diagrammes résulte de calculs directs ; la nullité de la suite en découle. Comme il est clair que $\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}$ est injective et $\bar{\varepsilon}_X$ est surjective, il reste seulement à établir l'exactitude de la suite (3) en $\mathbb{Z}[\wedge^2]$ et en $\mathbb{Z}[X]$.

Pour $\alpha = \sum_{\lambda \in \wedge^2} \alpha_\lambda \cdot \lambda \in \mathbb{Z}[\wedge^2]$ (avec $\alpha_\lambda \in \mathbb{Z}$ pour tout $\lambda \in \wedge^2$), on a

$$\sigma(\alpha) = \sum_{\lambda \in \wedge^2} \alpha_\lambda \left(\sum_{x \in \lambda} x \right) = \sum_{x \in X} \left(\sum_{\lambda \ni x} \alpha_\lambda \right) x,$$

donc $\sigma(\alpha) = 0$ si et seulement si $\sum_{\lambda \ni x} \alpha_\lambda = 0$ pour tout $x \in X$. Notons $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Comme

$$2\alpha_{\{x_1, x_2\}} - 2\alpha_{\{x_3, x_4\}} = \left(\sum_{\lambda \ni x_1} \alpha_\lambda \right) + \left(\sum_{\lambda \ni x_2} \alpha_\lambda \right) - \left(\sum_{\lambda \ni x_3} \alpha_\lambda \right) - \left(\sum_{\lambda \ni x_4} \alpha_\lambda \right),$$

on voit que $\alpha_{\{x_1, x_2\}} = \alpha_{\{x_3, x_4\}}$ pour $\alpha \in \ker \sigma$. De même, $\alpha_{\{x_1, x_3\}} = \alpha_{\{x_2, x_4\}}$ et $\alpha_{\{x_1, x_4\}} = \alpha_{\{x_2, x_3\}}$ pour $\alpha \in \ker \sigma$, donc $\alpha = \gamma(\alpha)$ si $\sigma(\alpha) = 0$. Vu l'exactitude de la suite (1), on peut donc trouver pour tout $\alpha \in \ker \sigma$ un élément $\beta \in \mathbb{Z}[\mathcal{R}]$ tel que $\alpha = \nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}(\beta)$. La commutativité du diagramme de droite de (4) montre que $\varepsilon_{\mathcal{R}}(\beta) = 0$, donc $\beta \in I[\mathcal{R}]$. La suite (3) est donc exacte en $\mathbb{Z}[\wedge^2]$.

Pour établir l'exactitude en $\mathbb{Z}[X]$, considérons $\xi = \sum_{x \in X} \xi_x \cdot x \in \mathbb{Z}[X]$ (avec $\xi_x \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in X$) tel que $\sum_{x \in X} \xi_x = 2\zeta$ pour un certain $\zeta \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\lambda \in \wedge^2$, posons

$$\alpha_\lambda = \left(\sum_{x \in \lambda} \xi_x \right) - \zeta = \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in \lambda} \xi_x - \sum_{y \in \gamma(\lambda)} \xi_y \right) \in \mathbb{Z}.$$

Alors $\alpha_{\gamma(\lambda)} = -\alpha_\lambda$ pour tout $\lambda \in \wedge^2$, donc l'élément $\alpha = \sum_{\lambda \in \wedge^2} \alpha_\lambda \cdot \lambda$ est dans le noyau de $\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}$. Vu l'exactitude de la suite (1), on peut trouver $\beta = \sum_{\lambda \in \wedge^2} \beta_\lambda \cdot \lambda \in \mathbb{Z}[\wedge^2]$ tel que $\alpha = \beta - \gamma(\beta)$, ce qui signifie que

$$\beta_\lambda - \beta_{\gamma(\lambda)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in \lambda} \xi_x - \sum_{y \in \gamma(\lambda)} \xi_y \right) \quad \text{pour tout } \lambda \in \wedge^2.$$

Pour un élément $z \in X$ fixé on a alors d'une part

$$\sum_{\lambda \ni z} (\beta_\lambda - \beta_{\gamma(\lambda)}) = \sum_{\lambda \ni z} \beta_\lambda - \sum_{\lambda \not\ni z} \beta_\lambda = 2 \left(\sum_{\lambda \ni z} \beta_\lambda \right) - \varepsilon_{\wedge^2}(\beta),$$

et d'autre part

$$\sum_{\lambda \ni z} (\beta_\lambda - \beta_{\gamma(\lambda)}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \ni z} \left(\sum_{x \in \lambda} \xi_x - \sum_{y \in \gamma(\lambda)} \xi_y \right) = \frac{1}{2} (3\xi_z - \sum_{x \neq z} \xi_x) = 2\xi_z - \zeta.$$

En comparant ces équations, on obtient

$$2 \left(\sum_{\lambda \ni z} \beta_\lambda \right) - \varepsilon_{\wedge^2}(\beta) = 2\xi_z - \zeta, \quad (5)$$

ce qui montre que $\varepsilon_{\wedge^2}(\beta) \equiv \zeta \pmod{2}$. Or, la condition $\alpha = \beta - \gamma(\beta)$ ne détermine β qu'à un élément de l'image de $\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}$ près, et $\varepsilon_{\wedge^2}(\text{im } \nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}) = 2\mathbb{Z}$, donc quitte à ajuster β on peut supposer $\varepsilon_{\wedge^2}(\beta) = \zeta$. L'équation (5), qui vaut pour tout $z \in X$, donne alors $\sum_{\lambda \ni z} \beta_\lambda = \xi_z$, donc $\xi = \sigma(\beta)$. $\square$

Corollaire 1.2. *La restriction de σ à $I[\wedge^2]$ est un homomorphisme $\sigma_I: I[\wedge^2] \rightarrow I[X]$ qui s'insère dans la suite exacte suivante :*

$$0 \leftarrow I[X] \xleftarrow{\sigma_I} I[\wedge^2] \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} I[\mathcal{R}] \leftarrow 0. \quad (6)$$

Démonstration. Le diagramme de gauche de (4) s'étend en un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{Z}[X] & \longleftarrow & I[X] \longleftarrow 0 \\
& & \uparrow 2 & & \uparrow \sigma & & \uparrow \sigma_I \\
0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2}} & \mathbb{Z}[\wedge^2] & \longleftarrow & I[\wedge^2] \longleftarrow 0
\end{array}$$

Comme $\text{coker}(2) = \text{coker } \sigma$ et $\ker(2) = 0$, le corollaire s'obtient en appliquant le lemme du serpent à ce diagramme. $\square$

On peut raisonner de même avec le diagramme de droite de (4). On obtient une suite exacte

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow J[X] \leftarrow J[\wedge^2/\mathcal{R}] \leftarrow 0$$

avec des homomorphismes induits par $\bar{\varepsilon}_X$ et par σ . Il est cependant utile d'éliminer les éléments de torsion en modifiant quelque peu σ et ν_X : d'abord, on peut remplacer la suite exacte (3) par la suivante :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{(\varepsilon_X, -2)} \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z} \xleftarrow{\sigma \times \varepsilon_{\wedge^2}} \mathbb{Z}[\wedge^2] \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} I[\mathcal{R}] \leftarrow 0. \quad (7)$$

Ensuite, on peut remplacer le carré de droite de (4) par le suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z} & \xleftarrow{(\nu, 2)} & \mathbb{Z} \\
\sigma \times \varepsilon_{\wedge^2} \uparrow & & \uparrow \varepsilon_{\mathcal{R}} \\
\mathbb{Z}[\wedge^2] & \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} & \mathbb{Z}[\mathcal{R}]
\end{array} \quad (8)$$

Corollaire 1.3. *Soit $J'[X] = \text{coker}(\nu, 2)$. On a une suite exacte*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon'} J'[X] \xleftarrow{\sigma'} J[\wedge^2/\mathcal{R}] \leftarrow 0 \quad (9)$$

où les homomorphismes ε' et σ' sont induits par $(\varepsilon_X, -2)$ et $\sigma \times \varepsilon_{\wedge^2}$ respectivement.

Démonstration. On applique le lemme du serpent au diagramme commutatif suivant, obtenu en étendant le diagramme (8) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & J'[X] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z} & \xleftarrow{(\nu, 2)} & \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \\
& & \uparrow \sigma' & & \uparrow \sigma \times \varepsilon_{\wedge^2} & & \uparrow \varepsilon_{\mathcal{R}} \\
0 & \longleftarrow & J[\wedge^2/\mathcal{R}] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[\wedge^2] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[\mathcal{R}] \longleftarrow 0
\end{array} \quad (10)$$

$\square$

1.2 L'homomorphisme τ

Rappelons que les Γ -modules de permutation sont auto-duaux. On peut donc définir un homomorphisme $\tau: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[\wedge^2]$ en prenant le dual de σ . De manière explicite,

$$\tau(x) = \sum_{\lambda \ni x} \lambda \quad \text{pour } x \in X.$$

Par dualité à partir de (4) (ou par un calcul direct) on obtient les carrés commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\wedge^2] & \xleftarrow{\nu_{\wedge^2}} & \mathbb{Z} \\ \tau \uparrow & & \uparrow 2 \\ \mathbb{Z}[X] & \xleftarrow{\nu_X} & \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\mathcal{R}] & \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}} & \mathbb{Z}[\wedge^2] \\ \nu_{\mathcal{R}} \uparrow & & \uparrow \varepsilon_{\mathcal{R}} \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{Z}[X] \end{array} \quad (11)$$

On a aussi une suite exacte duale de (7) :

$$0 \leftarrow J[\mathcal{R}] \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}} \mathbb{Z}[\wedge^2] \xleftarrow{(\tau, \nu_{\wedge^2})} \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z} \xleftarrow{(\nu_X \times -2)} \mathbb{Z} \leftarrow 0. \quad (12)$$

Proposition 1.4. *L'homomorphisme τ induit un homomorphisme $\tau_J: J[X] \rightarrow J[\wedge^2]$ et la suite suivante est exacte :*

$$0 \leftarrow J[\mathcal{R}] \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}} J[\wedge^2] \xleftarrow{\tau_J} J[X] \leftarrow 0. \quad (13)$$

Démonstration. Le noyau et le conoyau de $(\tau, \nu_{\wedge^2})$ étant donnés par la suite (12), il suffit d'appliquer le lemme du serpent au diagramme suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & J[\wedge^2] & \longleftarrow & \mathbb{Z}[\wedge^2] & \xleftarrow{\nu_{\wedge^2}} & \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \\ & & \tau_J \uparrow & & \uparrow (\tau, \nu_{\wedge^2}) & & \uparrow (2, Id_{\mathbb{Z}}) \\ 0 & \longleftarrow & J[X] & \xleftarrow{(\text{can}, 0)} & \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z} & \xleftarrow{\nu_X \times Id_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \end{array}$$

□

2 Tores

Comme dans la section précédente, on désigne par k un corps arbitraire ; on fixe une clôture séparable k_s de k et on pose $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$. En associant à toute k -algèbre étale A l'ensemble $E(A) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k_s)$ des homomorphismes de k -algèbres de A dans k_s , on définit une anti-équivalence de catégories entre les k -algèbres étales et les Γ -ensembles. De même, on a une anti-équivalence de catégories entre k -tores et Γ -modules, qui associe à tout k -tore T le module de ses caractères $\hat{T} = \text{Hom}(T_s, \mathbb{G}_{m, k_s})$. Ces deux anti-équivalences sont liées de la manière suivante : toute k -algèbre étale A définit d'une part un Γ -ensemble $E(A)$ et d'autre part un k -tore

$$T_A = R_{A/k}(\mathbb{G}_{m, A})$$

obtenu à partir du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,A}$ de A par restriction des scalaires (à la Weil) de A à k . Ces deux constructions sont liées par

$$\widehat{T}_A = \mathbb{Z}[E(A)].$$

La correspondance fonctorielle entre Γ -modules et tores associée à l'augmentation $\varepsilon_{E(A)}$ l'inclusion $i_A: \mathbb{G}_m \rightarrow T_A$, et à la norme $\nu_{E(A)}$ la norme $N_A: T_A \rightarrow \mathbb{G}_m$. Dès lors, le tore correspondant au module $I[E(A)]$ est le quotient $T_A/\mathbb{G}_m$, et $J[E(A)]$ correspond au tore $R_{A/k}^1(\mathbb{G}_{m,A})$ noyau de la norme N_A , que l'on notera simplement T_A^1 .

À partir d'ici, fixons une k -algèbre étale L de dimension 4, et notons simplement X pour le Γ -ensemble $E(L)$, qui a quatre éléments. L'extension quadratique résolvante S/C de L est définie à isomorphisme près par les conditions

$$E(S) = \wedge^2(X) \quad \text{et} \quad E(C) = \mathcal{R}(X). \quad (14)$$

(L'application équivariante $\pi: \wedge^2(X) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ du §1 définit un homomorphisme injectif d'algèbres $C \rightarrow S$ que l'on considère comme une inclusion.) Les homomorphismes σ et τ du §1 donnent des homomorphismes de k -tores

$$\sigma^*: T_L \rightarrow T_S \quad \text{et} \quad \tau^*: T_S \rightarrow T_L,$$

et l'on peut interpréter en termes de tores les suites exactes et les diagrammes commutatifs du §1. On trouve ainsi les diagrammes commutatifs suivants déduits de (4)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m & \xrightarrow{i_L} & T_L \\ 2 \downarrow & & \downarrow \sigma^* \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{i_S} & T_S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_L & \xrightarrow{N_L} & \mathbb{G}_m \\ \sigma^* \downarrow & & \downarrow i_C \\ T_S & \xrightarrow{N_{S/C}} & T_C \end{array} \quad (15)$$

et ceux déduits de (11)

$$\begin{array}{ccc} T_S & \xrightarrow{N_S} & \mathbb{G}_m \\ \tau^* \downarrow & & \downarrow 2 \\ T_L & \xrightarrow{N_L} & \mathbb{G}_m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_C & \xrightarrow{i_{S/C}} & T_S \\ N_C \downarrow & & \downarrow \tau^* \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{i_L} & T_L \end{array} \quad (16)$$

On obtient aussi à partir de (6) et (13) les suites exactes

$$1 \rightarrow T_L/\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sigma_I^*} T_S/\mathbb{G}_m \xrightarrow{N_{S/C}} T_C/\mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

et

$$1 \rightarrow T_C^1 \xrightarrow{i_{S/C}} T_S^1 \xrightarrow{\tau_J^*} T_L^1 \rightarrow 1. \quad (17)$$

Considérons à présent le tore U noyau de l'homomorphisme

$$(N_L, 2): T_L \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Son Γ -module des caractères est le module $J'[X]$ introduit dans le corollaire 1.3. En notant $T_{S/C}^1$ le noyau de $N_{S/C}: T_S \rightarrow T_C$ (dont le module des caractères est $J[\wedge^2/\mathcal{R}]$) on obtient à partir de (9) la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow U \xrightarrow{\sigma'^*} T_{S/C}^1 \rightarrow 1. \quad (18)$$

Théorème 2.1. *Le k -tore U est stablement rationnel.*

Démonstration. Montrons d'abord que le k -tore $T_{S/C}^1$ est stablement rationnel. L'isomorphisme $I[\wedge^2/\mathcal{R}] \simeq J[\wedge^2/\mathcal{R}]$ de (2) entraîne un isomorphisme de tores $T_S/T_C \simeq T_{S/C}^1$ induit par $Id - \gamma$. On a donc une suite exacte

$$1 \rightarrow T_C \rightarrow T_S \xrightarrow{Id-\gamma} T_{S/C}^1 \rightarrow 1.$$

La fibre de $Id - \gamma$ au point générique de $T_{S/C}^1$ est un toreur sous T_C . Or le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert donnent $H^1(k(T_{S/C}^1), T_C) = 1$, donc T_S est birationnellement équivalent à $T_{S/C}^1 \times T_C$. Comme T_S et T_C sont k -rationnels, on voit que $T_{S/C}^1$ est stablement rationnel.

Considérons ensuite la suite exacte (18). Comme $H^1(k(T_{S/C}^1), \mathbb{G}_m) = 1$, le même argument que dans la première partie de la preuve montre que U est birationnellement équivalent à $T_{S/C}^1 \times \mathbb{G}_m$, donc U est stablement rationnel. $\square$

3 Normes et groupe de Brauer relatif

Conservons les notations du §2, et considérons à présent la cohomologie (étale) des tores qui y sont définis. Pour toute k -algèbre étale A , on note $N_{A/k}: A^\times \rightarrow k^\times$ la norme, et

$$A^1 = \ker(N_{A/k}) \subset A^\times, \quad N(A/k) = N_{A/k}(A^\times) \subset k^\times.$$

Le théorème 90 de Hilbert et le lemme de Shapiro entraînent $H^1(k, T_A) = 1$; dès lors de la suite exacte qui définit T_A^1

$$1 \rightarrow T_A^1 \rightarrow T_A \xrightarrow{N_A} \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

on déduit que $H^1(k, T_A^1) = A^\times / N(A/k)$.

Proposition 3.1. *Soit S/C l'extension quadratique résolvante de la k -algèbre étale quartique L . On a*

$$\{x \in k^\times \mid x^2 \in N(L/k)\} = k^{\times 2} \cdot N(S/k) \quad \text{et} \quad k^\times \cap N(S/C) = k^{\times 2} \cdot N(L/k).$$

Démonstration. On a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & T_C^1 & \longrightarrow & T_C & \xrightarrow{N_C} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow i_{S/C} & & \downarrow 2 \\ 1 & \longrightarrow & T_S^1 & \longrightarrow & T_S & \xrightarrow{N_S} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \tau^* & & \downarrow 2 \\ 1 & \longrightarrow & T_L^1 & \longrightarrow & T_L & \xrightarrow{N_L} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \end{array}$$

La première colonne de ce diagramme est exacte par la proposition 1.4 (voir (17)). On en déduit en cohomologie un diagramme commutatif dont la deuxième colonne est exacte

$$\begin{array}{ccc} k^\times & \longrightarrow & k^\times / N(C/k) \\ 2\downarrow & & \downarrow \\ k^\times & \longrightarrow & k^\times / N(S/k) \\ 2\downarrow & & \downarrow \\ k^\times & \longrightarrow & k^\times / N(L/k) \end{array}$$

La première égalité en découle. Pour établir la deuxième, on considère le diagramme commutatif déduit de (10) ; ses lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & T_L \times \mathbb{G}_m & \xrightarrow{(N_L, 2)} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \\ & & \sigma'^* \downarrow & & \downarrow (\sigma, i_S) & & \downarrow i_C \\ 1 & \longrightarrow & T_{S/C}^1 & \longrightarrow & T_S & \xrightarrow{N_{S/C}} & T_C \longrightarrow 1 \end{array} \quad (19)$$

On en déduit la commutativité du carré suivant, où σ^1 est l'application induite par σ'^* :

$$\begin{array}{ccc} k^\times & \longrightarrow & H^1(k, U) \\ i_C \downarrow & & \downarrow \sigma^1 \\ C^\times & \longrightarrow & H^1(k, T_{S/C}^1) \end{array}$$

Par ailleurs, l'exactitude des lignes du diagramme (19) permet d'identifier

$$H^1(k, U) = k^\times / N(L/k) k^{\times 2} \quad \text{et} \quad H^1(k, T_{S/C}^1) = C^\times / N(S/C), \quad (20)$$

donc l'application $\sigma^1: k^\times / N(L/k) k^{\times 2} \rightarrow C^\times / N(S/C)$ est induite par l'inclusion $k \subset C$. Or, le corollaire 1.3 donne la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow U \xrightarrow{\sigma'^*} T_{S/C}^1 \rightarrow 1,$$

qui montre que σ^1 est injective. La deuxième égalité s'en déduit. $\square$

Remarque 3.2. Comme le tore U est stablement rationnel, le principe de Hasse vaut pour $H^1(k, U)$ lorsque k est un corps global : voir [5, §8]. Vu l'interprétation de $H^1(k, U)$ en (20), on a donc un principe de Hasse modulo les carrés pour les normes d'extensions quartiques étales. On retrouve ainsi (en caractéristique arbitraire) le théorème 2.1 de [19].

Considérons à présent les groupes de cohomologie étale (ou galoisienne) de degré 2. Le groupe $H^2(k, \mathbb{G}_m)$ s'identifie au groupe de Brauer $\text{Br}(k)$. Plus généralement,

$$H^2(k, T_A) = \text{Br}(A)$$

pour toute k -algèbre étale A , et la norme $T_A \rightarrow \mathbb{G}_m$ induit la corestriction

$$\text{cor}_{A/k}: \text{Br}(A) \rightarrow \text{Br}(k).$$

Si $A \subset B$ est une extension d'algèbres étales, on note $\text{Br}(B/A)$ le noyau de l'homomorphisme d'extension des scalaires $\text{Br}(A) \rightarrow \text{Br}(B)$, et ${}_2\text{Br}(B/A)$ le sous-groupe de 2-torsion de $\text{Br}(B/A)$.

Théorème 3.3. *Soit L une k -algèbre étale quartique, et soit S/C l'extension résolvente associée. On a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \longrightarrow & C^\times & \longrightarrow & S^\times & \xrightarrow{Id-\gamma} & S^\times & \xrightarrow{N_{S/C}} & C^\times & \xrightarrow{\delta} & \text{Br}(S/C) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow N_{C/k} & & \downarrow \tau^* \times -N_{S/k} & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \text{cor}_{C/k} & & \\
1 & \longrightarrow & k^\times & \xrightarrow{i_L \times -2} & L^\times \times k^\times & \xrightarrow{\sigma^*, i_S} & S^\times & \xrightarrow{N_{S/C}} & C^\times/k^\times & \xrightarrow{\bar{\delta}} & {}_2\text{Br}(L/k) & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{21}$$

Démonstration. Soit X le Γ -ensemble à quatre éléments $E(L)$ canoniquement associé à L . Comme dans le §1, on considère $\wedge^2 = \wedge^2(X)$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}(X)$. On a un diagramme commutatif de Γ -modules, dont les lignes sont exactes (la ligne inférieure est la suite exacte (7)) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & \mathbb{Z}[\mathcal{R}] & \xleftarrow{\varepsilon_{\wedge^2/\mathcal{R}}} & \mathbb{Z}[\wedge^2] & \xleftarrow{Id-\gamma} & \mathbb{Z}[\wedge^2] & \xleftarrow{\nu_{\wedge^2/\mathcal{R}}} & \mathbb{Z}[\mathcal{R}] & \longleftarrow & 0 \\
& & \uparrow \nu_{\mathcal{R}} & & \uparrow \tau, -\nu_{\wedge^2} & & \parallel & & \uparrow & & \\
0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{(\varepsilon_X, -2)} & \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z} & \xleftarrow{\sigma \times \varepsilon_{\wedge^2}} & \mathbb{Z}[\wedge^2] & \longleftarrow & I[\mathcal{R}] & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif de tores, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & T_C & \longrightarrow & T_S & \xrightarrow{Id-\gamma} & T_S & \xrightarrow{N_{S/C}} & T_C & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow N_C & & \downarrow \tau^* \times -N_S & & \parallel & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{i_L \times -2} & T_L \times \mathbb{G}_m & \xrightarrow{(\sigma^*, i_S)} & T_S & \longrightarrow & T_C/\mathbb{G}_m & \longrightarrow & 1
\end{array} \tag{22}$$

Soient

$$T_{S/C}^1 = \ker(N_{S/C}: T_S \rightarrow T_C) \quad \text{et} \quad T = \ker(N_{S/C}: T_S \rightarrow T_C/\mathbb{G}_m).$$

On a un morphisme canonique (d'inclusion) $T_{S/C}^1 \rightarrow T$, et le diagramme (22) se partage en deux :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \rightarrow T_C \rightarrow T_S \rightarrow T_{S/C}^1 \rightarrow 1 & & 1 \rightarrow T_{S/C}^1 \rightarrow T_S \rightarrow T_C \rightarrow 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow T_L \times \mathbb{G}_m \rightarrow T \rightarrow 1 & \text{et} & 1 \rightarrow T \rightarrow T_S \rightarrow T_C/\mathbb{G}_m \rightarrow 1
\end{array} \tag{23}$$

Le diagramme de gauche donne en cohomologie les diagrammes commutatifs suivants, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & C^\times & \longrightarrow & S^\times & \xrightarrow{Id-\gamma} & T_{S/C}^1(k) \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow N_{C/k} & & \downarrow \tau^* \times -N_{S/k} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & k^\times & \longrightarrow & L^\times \times k^\times & \longrightarrow & T(k) \longrightarrow 1
\end{array} \tag{24}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & H^1(k, T_{S/C}^1) & \longrightarrow & \text{Br}(C) & \longrightarrow & \text{Br}(S) \\
& & \downarrow & & \downarrow \text{cor}_{C/k} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & H^1(k, T) & \longrightarrow & \text{Br}(k) & \xrightarrow{i_L \times -2} & \text{Br}(L) \times \text{Br}(k)
\end{array}$$

De l'exactitude des suites de ce dernier diagramme, on déduit des isomorphismes canoniques

$$H^1(k, T_{S/C}^1) = \text{Br}(S/C) \quad \text{et} \quad H^1(k, T) = {}_2 \text{Br}(L/k). \quad (25)$$

Par ailleurs, le diagramme de droite de (23) donne en cohomologie le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & T_{S/C}^1(k) & \longrightarrow & S^\times & \longrightarrow & C^\times & \longrightarrow & H^1(k, T_{S/C}^1) & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & T(k) & \longrightarrow & S^\times & \longrightarrow & C^\times/k^\times & \longrightarrow & H^1(k, T) & \longrightarrow & 1
\end{array} \quad (26)$$

Le théorème se déduit en recollant les diagrammes (24) et (26), et en utilisant (25). $\square$

Remarque 3.4. L'exactitude de la ligne inférieure de (21) en $S^\times$ donne une autre preuve de l'égalité $k^\times \cap N(S/C) = k^{\times 2} \cdot N(L/k)$ de la proposition 3.1, avec une précision supplémentaire : si $y \in S^\times$ est tel que $N_{S/C}(y) \in k^\times$, alors il existe $x \in L^\times$ et $\lambda \in k^\times$ tels que $y = \lambda \sigma^*(x)$ (ce qui entraîne $N_{S/C}(y) = \lambda^2 N_{L/k}(x)$ vu (15)).

Pour décrire les homomorphismes δ et $\bar{\delta}$ qui apparaissent dans le diagramme (21), on introduit la notation suivante : pour une extension quadratique étale $A \subset B$ de k -algèbres étales, dont l'automorphisme non trivial est noté ρ , et pour $a \in A^\times$, on considère la A -algèbre de quaternions

$$(B/A, a) = B \oplus Bz$$

où la multiplication est définie par

$$z^2 = a \quad \text{et} \quad zb = \rho(b)z \quad \text{pour } b \in B.$$

L'algèbre $(B/A, a)$ est une algèbre d'Azumaya sur A ; on désigne encore par $(B/A, a)$ sa classe de Brauer dans $\text{Br}(A)$. Le calcul montre que l'application δ est donnée par

$$\delta(x) = (S/C, x) \quad \text{pour } x \in C^\times.$$

Dès lors, vu la commutativité du diagramme (21), on a

$$\bar{\delta}(xk^\times) = (S/C, x) \quad \text{pour } x \in C^\times.$$

Corollaire 3.5. *Avec les notations du théorème 3.3,*

$${}_2 \text{Br}(L/k) = \{\text{cor}_{C/k}(S/C, x) \mid x \in C^\times\}.$$

De plus, pour $x \in C^\times$ la classe de Brauer $\text{cor}_{C/k}(S/C, x)$ est déployée si et seulement si $x \in k^\times \cdot N(S/C)$.

Démonstration. Vu la définition de $\bar{\delta}$, le corollaire découle immédiatement de l'exactitude de la ligne inférieure du diagramme (21) en ${}_2 \text{Br}(L/k)$ et en $C^\times/k^\times$. $\square$

4 Formes d'Albert

À toute algèbre simple centrale A de degré 4 et d'exposant 2 sur un corps k , Albert associe une forme quadratique q de dimension 6 et de discriminant² trivial sur k , déterminée de manière unique à similitude près, dont l'indice de Witt est directement lié à l'indice de Schur de l'algèbre : A est déployée (resp. est un corps) si et seulement si q est hyperbolique (resp. est anisotrope), et par conséquent A est d'indice 2 si et seulement si q est d'indice 1 ; voir [11, §16.A]. Si L est une k -algèbre étale de dimension 4, les éléments de ${}_2\mathrm{Br}(L/k)$ sont tous représentés par des algèbres simples centrales de degré 4 et d'exposant 2 sur k . On montre dans cette section comment calculer une forme d'Albert associée à une algèbre dont la classe de Brauer est dans ${}_2\mathrm{Br}(L/k)$ à partir d'une représentation de cette classe comme dans le corollaire 3.5. Si k est un corps fini, la question est sans intérêt puisque $\mathrm{Br}(k) = 0$. Dans toute cette section, on suppose donc que k est un corps infini.

Soit S/C l'extension résolvente associée à la k -algèbre L . L'algèbre de Lie du tore T_L s'identifie à L (avec un crochet de Lie nul), et la différentielle du morphisme $\sigma^*: T_L \rightarrow T_S$ est une application linéaire $d\sigma^*: L \rightarrow S$ décrite dans [12, (5.55)] (où l'image de tout $x \in L$ est notée λ_x). Rappelons de [12, Prop. 5.16] qu'il existe un ouvert de Zariski non vide de L dont les éléments ℓ satisfont les propriétés suivantes :

- (i) la k -algèbre engendrée par ℓ est L ;
- (ii) la C -algèbre engendrée par $d\sigma^*(\ell)$ est S ;
- (iii) la k -algèbre engendrée par $N_{S/C}(d\sigma^*(\ell))$ est C .

Fixons un tel élément $\ell \in L$ et notons $c = N_{S/C}(d\sigma^*(\ell)) \in C$. Les éléments $1, c, c^2$ forment donc une base de C sur k . Choisissons une forme linéaire $s: C \rightarrow k$ non nulle telle que $s(1) = s(c) = 0$. Si $\ker s$ contient un idéal non nul de C , alors il contient un idempotent $e \neq 0, 1$. Cet idempotent s'écrit $e = \alpha + \beta c$ pour certains $\alpha \in k, \beta \in k^\times$, et l'égalité $e^2 = e$ entraîne que c est racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans k . C'est impossible puisque c engendre C , donc $\ker s$ ne contient pas d'idéal non nul. On peut alors associer à toute forme quadratique non singulière $q: V \rightarrow C$ sur un C -module libre V une forme quadratique non singulière $s_*(q): V \rightarrow k$ définie par

$$s_*(q)(v) = s(q(v)) \quad \text{pour } v \in V.$$

La forme $s_*(q)$ est appelée *transfert* de q (induit par s) ; voir [6, §20.A] pour les propriétés du transfert des formes quadratiques. Si C n'est pas un corps, une forme quadratique sur C est une collection de formes quadratiques sur les composantes simples de C ; cela ne change rien d'essentiel aux propriétés du transfert.

Pour $x \in C^\times$ on considère en particulier la forme quadratique $\langle x \rangle N_{S/C}: S \rightarrow C$ qui envoie $y \in S$ sur $x \cdot N_{S/C}(y) \in C$.

Théorème 4.1. *Pour tout $x \in C^\times$, la forme quadratique $s_*(\langle x \rangle N_{S/C})$ obtenue par transfert de la forme quadratique $\langle x \rangle N_{S/C}$ au moyen de s est une forme d'Albert de l'algèbre de degré 4 qui représente $\mathrm{cor}_{C/k}(S/C, x)$.*

2. Pour éviter les distinctions de cas, nous appelons *discriminant* d'une forme quadratique sur un corps de caractéristique 2 son invariant d'Arf.

La démonstration est précédée de deux lemmes.

Lemme 4.2. *La forme quadratique $s_*(N_{S/C})$ est hyperbolique.*

Démonstration. Montrons en premier lieu que le sous-espace $k + k \cdot d\sigma^*(\ell) \subseteq S$ est totalement isotrope pour la forme $s_*(N_{S/C})$. En notant $\text{Tr}_{S/C}$ la trace $S \rightarrow C$, on a pour $\alpha, \beta \in k$

$$N_{S/C}(\alpha + \beta d\sigma^*(\ell)) = \alpha^2 + \alpha\beta \text{Tr}_{S/C}(d\sigma^*(\ell)) + \beta^2 c.$$

Or, en prenant les différentielles des morphismes du carré de droite de (15), on voit que

$$\text{Tr}_{S/C}(d\sigma^*(\ell)) = \text{Tr}_L(\ell) \in k. \quad (27)$$

(Voir aussi [12, Prop. 5.16].) Dès lors, $N_{S/C}(\alpha + \beta d\sigma^*(\ell))$ est dans le k -sous-espace de C engendré par 1 et c . Comme $s(1) = s(c) = 0$, la forme quadratique $s_*(N_{S/C})$ s'annule sur $k + k \cdot d\sigma^*(\ell)$.

De cette observation, il résulte que l'indice de Witt de $s_*(N_{S/C})$ est au moins égal à 2, donc $s_*(N_{S/C})$ est Witt-équivalente à une forme quadratique binaire. Pour achever de prouver le lemme, il suffit donc de prouver que le discriminant $\text{disc}(s_*(N_{S/C}))$ est trivial.

Soit $\mathfrak{S}_2$ le groupe à deux éléments. On considère $\text{disc}(s_*(N_{S/C}))$ comme un élément de $H^1(k, \mathfrak{S}_2)$:

$$\text{disc}(s_*(N_{S/C})) \in H^1(k, \mathfrak{S}_2).$$

Pour le calculer, on choisit une forme quadratique hyperbolique $q_0 : S \rightarrow C$. Soit $\mathbf{O}(q_0)$ son groupe orthogonal. La classe d'isométrie de la forme $N_{S/C}$ s'identifie à un élément ν de l'ensemble de cohomologie $H^1(C, \mathbf{O}(q_0))$, et son discriminant à l'image de ν dans $H^1(C, \mathfrak{S}_2)$ sous l'application induite par le déterminant (ou, en caractéristique 2, l'invariant de Dickson [11, (12.12)]) $\delta : \mathbf{O}(q_0) \rightarrow \mathfrak{S}_2$:

$$\text{disc}(N_{S/C}) = \delta(\nu) \in H^1(C, \mathfrak{S}_2).$$

Toute isométrie de q_0 peut être vue comme une isométrie de son transfert $s_*(q_0)$, donc on a un morphisme canonique de k -schémas en groupes $s_\dagger : R_{C/k}(\mathbf{O}(q_0)) \rightarrow \mathbf{O}(s_*(q_0))$. Ce morphisme fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_{C/k}(\mathbf{O}(q_0)) & \xrightarrow{\delta} & R_{C/k}(\mathfrak{S}_2) \\ s_\dagger \downarrow & & \downarrow N_{C/k} \\ \mathbf{O}(s_*(q_0)) & \xrightarrow{\delta} & \mathfrak{S}_2 \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif en cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, R_{C/k}(\mathbf{O}(q_0))) & \xrightarrow{\delta} & H^1(k, R_{C/k}(\mathfrak{S}_2)) \\ s_\dagger \downarrow & & \downarrow N_{C/k} \\ H^1(k, \mathbf{O}(s_*(q_0))) & \xrightarrow{\delta} & H^1(k, \mathfrak{S}_2) \end{array}$$

Comme $s_+(\nu)$ représente la classe d'isométrie de $s_*(N_{S/C})$, il en découle

$$\text{disc}(s_*(N_{S/C})) = N_{C/k}(\text{disc}(N_{S/C})). \quad (28)$$

Pour conclure, on fait le lien avec une autre notion de discriminant : à toute k -algèbre étale E on fait correspondre une classe de cohomologie $\xi_E \in H^1(k, \mathfrak{S}_n)$, où $n = \dim E$ et $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de n lettres (voir [11, (29.9)] ou [20]). Le *discriminant* $\text{disc}(E/k)$ est l'image de ξ_E dans $H^1(k, \mathfrak{S}_2)$ sous l'application déduite de la signature $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_2$. Cette notion s'applique aussi à la C -algèbre S , et on vérifie sans peine que

$$\text{disc}(S/C) = \text{disc}(N_{S/C}) \in H^1(C, \mathfrak{S}_2) = H^1(k, R_{C/k}(\mathfrak{S}_2)). \quad (29)$$

La formule pour le discriminant d'une tour d'extensions [20, Th. 4] donne

$$\text{disc}(S/k) = N_{C/k}(\text{disc}(S/C)).$$

Or, la k -algèbre S a un discriminant trivial d'après [12, Prop. 5.1], donc

$$N_{C/k}(\text{disc}(S/C)) = 1. \quad (30)$$

Le lemme découle de (28), (29) et (30). $\square$

Dans l'énoncé suivant, on désigne par $I_q^2(k)$ le groupe de Witt des formes quadratiques sur k de discriminant trivial et par $\text{Cl}: I_q^2(k) \rightarrow {}_2\text{Br}(k)$ l'homomorphisme induit par l'application qui à chaque forme quadratique associe son algèbre de Clifford. On définit de même le groupe $I_q^2(C)$ et l'homomorphisme $\text{Cl}: I_q^2(C) \rightarrow {}_2\text{Br}(C)$.

Lemme 4.3. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} I_q^2(C) & \xrightarrow{s_*} & I_q^2(k) \\ \text{Cl} \downarrow & & \downarrow \text{Cl} \\ {}_2\text{Br}(C) & \xrightarrow{\text{cor}_{C/k}} & {}_2\text{Br}(k) \end{array}$$

Démonstration. Si la caractéristique est différente de 2, le groupe $I_q^2(C)$ est engendré par les 2-formes de Pfister $\langle 1, -a \rangle \langle 1, -b \rangle$ où $a \in k^\times$ et $b \in C^\times$: voir [15, Lemma 2]. La commutativité du diagramme découle alors aisément de la réciprocity de Frobenius [6, Prop. 20.2] et de la formule de projection. Les mêmes arguments s'appliquent en caractéristique 2 car $I_q^2(C)$ est engendré comme $W(C)$ -module par les 2-formes de Pfister quadratiques $[1, a] \langle 1, b \rangle$ et $[1, b] \langle 1, a \rangle$ où $a \in k^\times$ et $b \in C^\times$. $\square$

Démonstration du théorème 4.1. Vu la caractérisation des formes d'Albert dans [11, (16.3)], il s'agit de prouver que $s_*(\langle x \rangle \cdot N_{S/C}) \in I_q^2(k)$ et

$$\text{Cl}(s_*(\langle x \rangle \cdot N_{S/C})) = \text{cor}_{C/k}(S/C, x) \quad \text{pour tout } x \in C^\times.$$

Du lemme 4.2 on déduit l'égalité suivante dans le groupe de Witt des formes quadratiques non dégénérées de dimension paire :

$$s_*(\langle x \rangle \cdot N_{S/C}) = s_*(\langle 1, x \rangle \cdot N_{S/C}).$$

Comme $\langle 1, x \rangle \cdot N_{S/C} \in I_q^2(C)$, le lemme 4.3 montre d'une part $s_*(\langle x \rangle \cdot N_{S/C}) \in I_q^2(k)$, et d'autre part

$$\mathrm{Cl}(s_*(\langle x \rangle \cdot N_{S/C})) = \mathrm{cor}_{C/k}(\mathrm{Cl}(\langle 1, x \rangle \cdot N_{S/C})).$$

Le théorème résulte alors de l'observation que $\mathrm{Cl}(\langle 1, x \rangle \cdot N_{S/C}) = (S/C, x)$. $\square$

À partir du théorème 4.1 il est aisé de déterminer quelles sont les algèbres de quaternions sur k qui sont déployées par L : celles-ci sont Brauer-équivalentes à des algèbres de degré 4 dont la forme d'Albert est isotrope. Nous allons préciser la forme de ces algèbres, en supposant pour simplifier l'exposé que la caractéristique est différente de 2, hypothèse qui n'est cependant nullement essentielle. Nous utiliserons la notation usuelle $(\alpha, \beta)_k$ pour la k -algèbre de quaternions $(k[\sqrt{\alpha}]/k, \beta)$. Soient $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in k_s$ les racines du polynôme minimal de ℓ sur k , et soit $\rho(X) \in k[X]$ le polynôme unitaire dont les racines dans k_s sont

$$\frac{1}{4}(\ell_1 + \ell_2 - \ell_3 - \ell_4)^2, \quad \frac{1}{4}(\ell_1 - \ell_2 + \ell_3 - \ell_4)^2, \quad \frac{1}{4}(\ell_1 - \ell_2 - \ell_3 + \ell_4)^2.$$

Le polynôme ρ est une cubique résolvante du polynôme minimal de ℓ : voir [12, (5.53)].

Corollaire 4.4. *Les algèbres de quaternions sur k déployées par L sont les algèbres de quaternions qui peuvent s'écrire sous la forme $(\lambda, -\rho(\lambda))_k$ pour un certain $\lambda \in k^\times$ tel que $\rho(\lambda) \neq 0$.*

Démonstration. Le polynôme minimal sur C de $d\sigma^*(\ell) \in S$ est $X^2 - \mathrm{Tr}_L(\ell)X + c$: voir (27) ; on a donc

$$S = C(\sqrt{a}) \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{4}(d\sigma^*(\ell) - \gamma(d\sigma^*(\ell)))^2 = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}_L(\ell)^2 - c \in C.$$

Soit Q une algèbre de quaternions sur k déployée par L . Si Q est déployée, on peut l'écrire sous la forme indiquée en prenant pour λ un élément de $k^{\times 2}$ qui n'est pas racine de ρ . On peut donc supposer dans la suite que Q n'est pas déployée. D'après le corollaire 3.5 on peut trouver $x \in C^\times$ tel que $Q = \mathrm{cor}_{C/k}(S/C, x)$ dans $\mathrm{Br}(k)$. Comme l'indice de Q est 2, la forme d'Albert de $\mathrm{cor}_{C/k}(S/C, x)$ est isotrope, donc le théorème 4.1 montre que la forme quadratique $\langle x \rangle \cdot N_{S/C}$ représente un élément de $\ker s$, c'est-à-dire un élément de la forme $\lambda - \mu a$ avec $\lambda, \mu \in k$ puisque $\ker s = k + ck = k + ak$. Alors $x \cdot (\lambda - \mu a)$ est une norme pour S/C , donc $(S/C, x) = (S/C, \lambda - \mu a)$ et

$$Q = \mathrm{cor}_{C/k}(a, \lambda - \mu a)_C \quad \text{pour certains } \lambda, \mu \in k \text{ tels que } \lambda - \mu a \in C^\times.$$

Si $\mu = 0$, alors le corollaire 3.5 indique que Q est déployée, contrairement à l'hypothèse. Donc $\mu \neq 0$ et puisque $\mathrm{cor}_{C/k}(S/C, \alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in k^\times$ on peut supposer $\mu = 1$. Alors

$$Q = \mathrm{cor}_{C/k}(a, \lambda - a)_C \quad \text{pour un certain } \lambda \in k \text{ tel que } \lambda - a \in C^\times.$$

On a $\lambda \neq 0$, sinon Q est déployée. Comme $\mathrm{cor}_{C/k}(a, \lambda)_C = 0$ on a aussi

$$Q = \mathrm{cor}_{C/k}(a, \lambda(\lambda - a))_C \quad \text{pour un certain } \lambda \in k^\times \text{ tel que } \lambda - a \in C^\times.$$

Or, en changeant de générateurs quaternioniens on voit que

$$(\lambda, a - \lambda)_C = (a, \lambda(\lambda - a))_C,$$

donc finalement

$$Q = \text{cor}_{C/k}(\lambda, a - \lambda)_C = (\lambda, N_{C/k}(a - \lambda))_k$$

pour un certain $\lambda \in k^\times$ tel que $\lambda - a \in C^\times$. Il reste à voir que $-\rho(\lambda) = N_{C/k}(a - \lambda)$. Pour cela, on observe que les images de $d\sigma^*(\ell) \in S$ sous les différents homomorphismes de k -algèbres $S \rightarrow k_s$ sont les $\ell_i + \ell_j$ avec $1 \leq i < j \leq 4$: voir [12, Prop. 5.16]. Comme $a = \frac{1}{4}(d\sigma^*(\ell) - \gamma(d\sigma^*(\ell)))^2$, il en résulte que les images de a sous les homomorphismes de k -algèbres $C \rightarrow k$ sont les racines de ρ , donc $\rho(X) = N_{C/k}(X - a)$ dans $k[X]$.

On a ainsi prouvé que toute algèbre de quaternions sur k déployée par L est de la forme indiquée. Réciproquement, si $Q = (\lambda, -\rho(\lambda))_k$ pour un certain $\lambda \in k^\times$ tel que $\rho(\lambda) \neq 0$, alors les calculs précédents montrent que $Q = \text{cor}_{C/k}(a, \lambda - a)_C$, donc Q est déployée par L vu le corollaire 3.5. $\square$

Le corollaire 4.4 a été prouvé par des méthodes différentes dans [8, Cor. 22], [9, Th. 6.2] et [18, Cor. 4] (et dans [14, Th. 3.9] pour le cas particulier où L est une 2-extension).

5 Exemples

Pour conclure, nous donnons quelques exemples destinés à illustrer les constructions et les principaux résultats de ce travail.

Le cas le plus général est celui où L est un corps, extension séparable de k dont la clôture galoisienne a pour groupe de Galois le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Supposons $L \subset k_s$, et désignons par M la clôture galoisienne de L dans k_s . Identifions le groupe de Galois de M sur k à $\mathfrak{S}_4$ de sorte que L soit le sous-corps de M fixe sous le groupe des permutations de $\{2, 3, 4\}$. Le corps M contient trois sous-corps conjugués isomorphes à S et trois sous-corps conjugués isomorphes à C : on peut choisir

$$S = M^G \quad \text{où} \quad G = \{Id, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}$$

et

$$C = M^H \quad \text{où} \quad H = G \cup \{(1, 3)(2, 4), (1, 3, 2, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 4, 2, 3)\}.$$

Avec ces choix, l'homomorphisme $\sigma^*: L^\times \rightarrow S^\times$ envoie $x \in L^\times$ sur $x \cdot (1, 2)(x)$ et l'homomorphisme $\tau^*: S^\times \rightarrow L^\times$ envoie $y \in S^\times$ sur $y \cdot (2, 3)(y) \cdot (2, 4)(y) \in L^\times$.

Considérons ensuite quelques cas particuliers.

Exemple 5.1 (Extensions biquadratiques). Soit L un corps, extension galoisienne de k de groupe de Galois abélien élémentaire d'ordre 4. Soient L_1, L_2, L_3 les sous-corps de L qui sont quadratiques sur k . Alors

$$C = k \times k \times k \quad \text{et} \quad S = L_1 \times L_2 \times L_3.$$

Les homomorphismes σ^* et τ^* opèrent comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma^*: L^\times &\rightarrow L_1^\times \times L_2^\times \times L_3^\times & x &\mapsto (N_{L/L_1}(x), N_{L/L_2}(x), N_{L/L_3}(x)), \\ \tau^*: L_1^\times \times L_2^\times \times L_3^\times &\rightarrow L^\times & (y_1, y_2, y_3) &\mapsto y_1 y_2 y_3.\end{aligned}$$

La proposition 3.1 prend la forme suivante :

$$\{x \in k^\times \mid x^2 \in N(L/k)\} = k^{\times 2} \cdot N(L_1/k) \cdot N(L_2/k) \cdot N(L_3/k)$$

et

$$k^{\times 2} \cdot N(L/k) = N(L_1/k) \cap N(L_2/k) \cap N(L_3/k).$$

La première égalité a déjà été observée (voir [3, Ex. 5.1, p. 360]) ; la deuxième traduit le «lemme biquadratique» bien connu (voir [7, 2.13], [16, Lemma 3] et les références qui y sont citées). La remarque 3.4 donne une précision supplémentaire : si on se donne $y_i \in L_i^\times$ pour $i = 1, 2, 3$ tels que

$$N_{L_1/k}(y_1) = N_{L_2/k}(y_2) = N_{L_3/k}(y_3),$$

alors on peut trouver $x \in L^\times$ et $\lambda \in k^\times$ tels que

$$y_1 = \lambda N_{L/L_1}(x), \quad y_2 = \lambda N_{L/L_2}(x), \quad y_3 = \lambda N_{L/L_3}(x).$$

Le corollaire 3.5 établit

$${}_2 \text{Br}(L/k) = \{(L_1/k, x_1) + (L_2/k, x_2) + (L_3/k, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in k^\times\},$$

et montre que l'égalité

$$(L_1/k, x_1) + (L_2/k, x_2) + (L_3/k, x_3) = 0 \quad \text{dans } \text{Br}(k)$$

entraîne l'existence d'un élément $\lambda \in k^\times$ tel que

$$(L_i/k, x_i) = (L_i/k, \lambda) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Ces résultats sont connus : le premier est démontré dans [14, Prop. 5.2] et le second est une forme du “*Common Slot Theorem*” [13, Ch. III, Th. 4.13].

Remarque. Vu la description de S dans l'exemple 5.1, le tore coflasque associé par Colliot-Thélène [4, §3] au tore des éléments de norme 1 d'une extension biquadratique est T_S^1 , et le morphisme τ^* apparaît dans la ligne médiane de [4, (3.1)]. (Lorsque L n'est pas biquadratique, le tore T_S^1 n'est pas nécessairement coflasque.)

Exemple 5.2 (Extensions cycliques). Supposons que L soit un corps, extension cyclique de k , et soit K l'unique extension quadratique de k contenue dans L . Soit encore θ un générateur du groupe de Galois de L sur k . Dans ce cas

$$C = k \times K \quad \text{et} \quad S = K \times L,$$

et les homomorphismes σ^* et τ^* sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma^*: L^\times &\rightarrow K^\times \times L^\times & x &\mapsto (N_{L/K}(x), x\theta(x)), \\ \tau^*: K^\times \times L^\times &\rightarrow L^\times & (y_1, y_2) &\mapsto y_1 y_2 \theta^{-1}(y_2).\end{aligned}$$

Par la proposition 3.1 on a

$$\{x \in k^\times \mid x^2 \in N(L/k)\} = N(K/k) \cdot N(L/k) \text{ et } N(K/k) \cap N(L/k) = k^{\times 2} \cdot N(L/k).$$

De plus, vu l'exactitude de la suite inférieure de (21) en $S^\times$, on voit que si $y_1 \in K^\times$ et $y_2 \in L^\times$ satisfont $N_{K/k}(y_1) = N_{L/K}(y_2)$, alors on peut trouver $\lambda \in k^\times$ et $x \in L^\times$ tels que $y_1 = \lambda N_{L/K}(x)$ et $y_2 = \lambda x \theta(x)$. Le corollaire 3.5 donne

$${}_2 \text{Br}(L/k) = \{(K/k, x_1) + \text{cor}_{K/k}(L/K, x_2) \mid x_1 \in k^\times, x_2 \in K^\times\};$$

de plus, il montre que pour $x_1 \in k^\times$ et $x_2 \in K^\times$, la relation

$$(K/k, x_1) + \text{cor}_{K/k}(L/K, x_2) = 0 \quad \text{dans } \text{Br}(k)$$

entraîne l'existence de $\lambda \in k^\times$ tel que

$$(K/k, x_1) = (K/k, \lambda) \quad \text{et} \quad (L/K, x_2) = (L/K, \lambda).$$

Les deux exemples précédents sont des cas particuliers du suivant :

Exemple 5.3 (2-extensions quartiques). On dit que le corps L est une *2-extension quartique* de k s'il est une extension séparable de degré 4 qui contient une extension quadratique K de k . Une telle extension est caractérisée par la condition que l'algèbre C n'est pas un corps ; dans ce cas $C = k \times \Delta(L)$ où $\Delta(L)$ est la k -algèbre quadratique discriminante de L (qui correspond à $\text{disc}(L/k) \in H^1(k, \mathfrak{S}_2)$ par la correspondance entre $H^1(k, \mathfrak{S}_2)$ et les classes d'isomorphisme de k -algèbres quadratiques étales) ; voir [12, Prop. 6.12]. La k -algèbre L est biquadratique si et seulement si $\Delta(L) = k \times k$. Si l'on écarte ce cas (traité en détail dans l'exemple 5.1), l'extension quadratique K est unique, et on associe canoniquement à L (à isomorphisme près) une k -algèbre étale quartique $\check{L}$ «duale» de L (voir [12, (6.19)]). L'algèbre $\check{L}$ contient $\Delta(L)$ et satisfait

$$\Delta(\check{L}) = K \quad \text{et} \quad S = K \times \check{L}.$$

(Le cas particulier où L est une extension cyclique de k est celui où $\check{L} = L$.) La proposition 3.1 donne

$$\{x \in k^\times \mid x^2 \in N(L/k)\} = N(K/k) \cdot N(\check{L}/k)$$

et

$$N(K/k) \cap N(\check{L}/\Delta(L)) = k^{\times 2} \cdot N(L/k).$$

D'autre part, le corollaire 3.5 montre

$${}_2 \text{Br}(L/k) = \{(K/k, x_1) + \text{cor}_{\Delta(L)/k}(\check{L}/\Delta(L), x_2) \mid x_1 \in k^\times, x_2 \in \Delta(L)^\times\}.$$

De plus, si $x_1 \in k^\times$ et $x_2 \in \Delta(L)^\times$ satisfont

$$(K/k, x_1) + \text{cor}_{\Delta(L)/k}(\check{L}/\Delta(L), x_2) = 0 \quad \text{dans } \text{Br}(k),$$

alors il existe $\lambda \in k^\times$ tel que

$$(K/k, x_1) = (K/k, \lambda) \quad \text{et} \quad (\check{L}/\Delta(L), x_2) = (\check{L}/\Delta(L), \lambda).$$

Dans notre dernier exemple, la k -algèbre quartique L n'est pas un corps :

Exemple 5.4. Soit $L = K_1 \times K_2$ où K_1 et K_2 sont des extensions quadratiques séparables de k . On pose $M = K_1 \otimes_k K_2$ et on désigne par K_0 le produit de K_1 et K_2 dans le groupe des extensions quadratiques séparables de k (qui est isomorphe à $H^1(k, \mathfrak{S}_2)$; voir [12, (4.29)]). On a alors

$$S = (k \times k) \times M \quad \text{et} \quad C = k \times K_0.$$

Les homomorphismes σ^* et τ^* opèrent comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma^* : K_1^\times \times K_2^\times &\rightarrow k^\times \times k^\times \times M^\times & (x_1, x_2) &\mapsto (N_{K_1/k}(x_1), N_{K_2/k}(x_2), x_1 \otimes x_2), \\ \tau^* : k^\times \times k^\times \times M^\times &\rightarrow K_1^\times \times K_2^\times & (\lambda_1, \lambda_2, y) &\mapsto (\lambda_1 N_{M/K_1}(y), \lambda_2 N_{M/K_2}(y)). \end{aligned}$$

En l'occurrence, $N(S/k) = k^\times$ et $N(L/k) = N(K_1/k) \cdot N(K_2/k)$, donc $k^{\times 2} \subseteq N(L/k)$. La proposition 3.1 donne simplement

$$\{x \in k^\times \mid x^2 \in N(K_1/k) \cdot N(K_2/k)\} = k^\times \text{ et } N(K_1/k) \cdot N(K_2/k) = N(M/K_0) \cap k^\times.$$

De la remarque 3.4, on tire l'information plus précise suivante : si $\lambda_1, \lambda_2 \in k^\times$ et $m \in M^\times$ sont tels que $N_{M/K_0}(m) = \lambda_1 \lambda_2$, alors on peut trouver $x_1 \in K_1^\times$, $x_2 \in K_2^\times$ et $\mu \in k^\times$ tels que

$$\lambda_1 = \mu N_{K_1/k}(x_1), \quad \lambda_2 = \mu N_{K_2/k}(x_2), \quad m = \mu x_1 \otimes x_2.$$

Le corollaire 3.5 donne

$$\text{Br}(K_1/k) \cap \text{Br}(K_2/k) = \{\text{cor}_{K_0/k}(M/K_0, x) \mid x \in K_0^\times\}$$

et montre que le noyau de la corestriction $\text{cor}_{K_0/k} : \text{Br}(M/K_0) \rightarrow \text{Br}(k)$ est formé des classes d'algèbres de quaternions de la forme $(M/K_0, \lambda)$ où $\lambda \in k^\times$.

Remarque. Soit L une algèbre étale quartique sur un corps global k . Supposons que l'algèbre cubique résolvante C ne soit pas un corps ; elle a donc au moins un facteur isomorphe à k . Si $C \simeq k \times C'$ où C' est une k -algèbre étale quadratique, alors $T_C^1 \simeq T_{C'}$, donc $H^1(k, T_C^1) = 1$ par le théorème 90 de Hilbert et $\text{III}^2(k, T_C^1) = 1$ par le théorème de Brauer–Hasse–Noether–Albert. Dès lors, la suite exacte (17) donne un isomorphisme induit par le morphisme τ_J^* :

$$\text{III}^1(k, T_S^1) \simeq \text{III}^1(k, T_L^1). \quad (31)$$

Si par exemple L est un corps, extension biquadratique de k , et que L_1, L_2, L_3 sont les sous-corps de L qui sont quadratiques sur k , comme dans l'exemple 5.1, alors $\text{III}^1(k, T_S^1)$ mesure l'obstruction au principe de Hasse pour les équations de la forme

$$N_{L_1/k}(y_1) N_{L_2/k}(y_2) N_{L_3/k}(y_3) = a, \quad (32)$$

appelées *équations multinormes*. Vu (31), le principe de Hasse vaut pour l'équation (32) si et seulement s'il vaut pour l'équation $N_{L/k}(x) = a^2$. On sait que ce n'est pas toujours le cas : voir [3, Ex. 5, p. 360], [17, Ex. 2].

Si L est un corps, 2-extension quartique mais non biquadratique de k , comme dans l'exemple 5.3, alors S est un produit direct de deux corps, $S \simeq K \times \tilde{L}$. Dans ce cas, les deux membres de (31) sont triviaux : cela découle d'un résultat de Bayer-Fluckiger–Lee–Parimala [2, Prop. 2.3] sur les équations multinormes pour les produits de deux corps et d'un théorème de Bartels [1, Satz 1] sur les normes d'extensions dont le groupe de Galois est diédral.

Enfin, si $L = K_1 \times K_2$ où K_1 et K_2 sont deux corps, extensions quadratiques de k , comme dans l'exemple 5.4, alors $\text{III}^1(k, T_S^1) = 1$ puisque $N(S/k) = k^\times$. Vu (31), le principe de Hasse vaut pour les équations multinormes de la forme

$$N_{K_1/k}(x_1) N_{K_2/k}(x_2) = a.$$

C'est un cas particulier d'un résultat de Hürlimann [10, Prop. 3.3].

Références

- [1] Hans-Jochen Bartels, *Zur Arithmetik von Diedergruppenerweiterungen*, Math. Ann. **256** (1981), no. 4, 465–473. MR 628228
- [2] Eva Bayer-Fluckiger, Ting-Yu Lee, and Raman Parimala, *Hasse principles for multinorm equations*, preprint arXiv 1507.06277.
- [3] James W. S. Cassels and Albrecht Fröhlich (eds.), *Algebraic number theory*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1986, Reprint of the 1967 original. MR 911121
- [4] Jean-Louis Colliot-Thélène, *Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores*, J. Théor. Nombres Bordeaux **26** (2014), no. 1, 69–83. MR 3232767
- [5] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 2, 175–229. MR 0450280
- [6] Richard Elman, Nikita Karpenko, and Alexander Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 56, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. MR 2427530
- [7] Richard Elman and Tsit Yuen Lam, *Quadratic forms under algebraic extensions*, Math. Ann. **219** (1976), no. 1, 21–42. MR 0401649
- [8] Darrell Haile and Jean-Pierre Tignol, *Algebras with involution that become hyperbolic under a given extension*, J. Algebra **199** (1998), no. 1, 94–115. MR 1489356

- [9] Detlev W. Hoffmann and Marco Sobiech, *Witt kernels and Brauer kernels for quartic extensions in characteristic two*, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), no. 10, 4619–4634. MR 3346508
- [10] Werner Hürlimann, *On algebraic tori of norm type*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 4, 539–549. MR 780075
- [11] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Markus Rost, and Jean-Pierre Tignol, *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, With a preface in French by J. Tits. MR 1632779
- [12] Max-Albert Knus and Jean-Pierre Tignol, *Quartic exercises*, Int. J. Math. Math. Sci. (2003), no. 68, 4263–4323. MR 2037625
- [13] Tsit Yuen Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. MR 2104929
- [14] Tsit Yuen Lam, David B. Leep, and Jean-Pierre Tignol, *Biquaternion algebras and quartic extensions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1993), no. 77, 63–102. MR 1249170
- [15] Alexander S. Merkurjev, *Brauer groups of fields*, Comm. Algebra **11** (1983), no. 22, 2611–2624. MR 733345
- [16] Alexander S. Merkurjev and Jean-Pierre Tignol, *Galois cohomology of biquadratic extensions*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 1, 138–169. MR 1201205
- [17] Timothy P. Pollio and Andrei S. Rapinchuk, *The multinorm principle for linearly disjoint Galois extensions*, J. Number Theory **133** (2013), no. 2, 802–821. MR 2994388
- [18] Alexander S. Sivatski, *The Witt ring kernel for a fourth degree field extension and related problems*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 1, 61–70. MR 2561767
- [19] ———, *Quartic polynomials and the Hasse norm theorem modulo squares*, J. Number Theory **165** (2016), 58–66. MR 3479216
- [20] William C. Waterhouse, *Discriminants of étale algebras and related structures*, J. Reine Angew. Math. **379** (1987), 209–220. MR 903641

Université catholique de Louvain
 Institut ICTEAM
 Avenue G. Lemaître 4, Boite L4.05.01
 B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
 Mél. : Jean-Pierre.Tignol@uclouvain.be