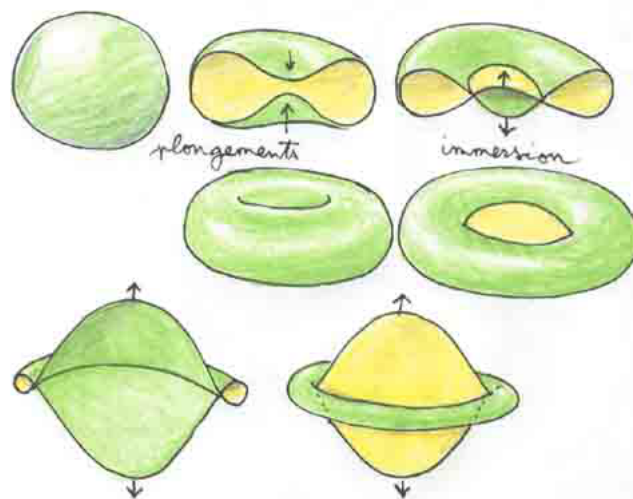


Homotopie rationnelle de l'espace des immersions entre variétés



YACOUBA BARMA ABDOULKADER

Homotopie rationnelle de l'espace des immersions entre variétés

Yacouba Barma Abdoukader

Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences, le 23 juin 2016, à l'Institut de Recherche en Mathématique et Physique de l'Université catholique de Louvain, à Louvain-la-Neuve.

Promoteur : Pascal Lambrechts (UCL) (Promoteur)

Jury : Gregory Arone (Stockholm University, Suède)
Yves Félix (UCL)
Marino Gran (UCL) (Secrétaire)
M.N. Hounkonnou (ICMPA-UNESCO Chair UAC, Bénin)
Michel Willem (UCL) (Président)

AMS Subject Classification (2010) : 55P62 (Rational homotopy theory), 57N35 (Embeddings and immersions), 58D10 (Spaces of imbeddings and immersions)

Dédicace

A mon père **Yacouba Barma**

et

ma mère **Dijé Mai touwo Garba**

*«Le bonheur, c'est avoir une mère
qui vous aime, un père pour vous
conduire, avoir encore ses parents
à l'âge d'homme pour les voir sou-
rire à nos efforts, et voir nos parents
applaudir à nos succès». Henri-
Fredéric Amiel, 1852*

Remerciements

Avant d'entrer dans le développement de ce travail, je tiens à remercier certaines personnes qui sans leurs implications ce travail sera sans doute impossible.

En premier lieu, je tiens à exprimer toute ma gratitude envers mon promoteur le professeur Pascal Lambrechts pour m'avoir donné l'opportunité d'intégrer une équipe de recherche aussi dynamique et motivée que celle de la topologie algébrique de L'UCL et cela malgré mon niveau quasi nul dans ce domaine en fin 2010. Je tiens à le remercier pour sa patience, ses qualités pédagogiques et sa gentillesse. Je lui suis très reconnaissant du sérieux et de l'ouverture avec lesquels il s'est impliqué dans mes travaux de master (en 2011) et thèse (depuis avril 2012), et je garderai des très bons souvenirs.

Je remercie également les membres de mon jury pour une implication sans faille dans l'évaluation de cette thèse. En particulier, je remercie Yves Félix pour le rôle précieux qu'il a joué dans ma formation. Il a été toujours présent pour répondre à mes questions et lire mes travaux. Ses commentaires et remarques resteront graver pour le reste de ma carrière. Je remercie Michel Willem pour avoir accepté d'être président de jury de cette thèse. Je remercie Marino Gran pour sa sympathie et ses sages conseils tout au long de ce travail. Un grand merci à Norbert Houkonnou pour le rôle qu'il a joué pour cette thèse et cela malgré la distance. Je tiens à le remercier pour tout ce qu'il m'a fait lors de mon séjour au Bénin, je garde toujours des bons souvenirs. Je tiens aussi à le remercier pour son soutien indéfectible tout au long de ce travail et pour tout ce qu'il fait pour la science en Afrique. Je remercie Gregory Arone pour avoir accepté d'être membre de jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail .

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes avec qui j'ai eu quelques discussions à des moments clés de cette thèse : Victor Turchin, Géry Debongnie, Pedro Vaz, Urtzi buijs, Pedro Boavido, Federico Cantéro, Paolo Salvatore.....

Je remercie également tous les enseignants du département de mathématique de l'Université de Niamey. En particulier je remercie Issoufou Kouada, Mahamane Bazafanré, Harouna Naroua, Hassirou Mouhamoudou. Je remercie aussi mon grand frère Maman K. Kabir, enseignant chercheur à l'école normale supérieure de Niamey qui a facilité mon départ au Bénin malgré

ses multiples préoccupations. Une autre personne importante dans ma formation et que je tiens à remercier est mon professeur de mathématique du secondaire monsieur Almoustapha Dodo.

Paul Arnaud, Hector et Jose , je n'ai pas assez de mots pour décrire le rôle que vous avez joué dans la réalisation de cette thèse. Durant tout mon séjour vous avez été la scientifiquement et socialement. En un seul mot vous êtes FORMIDABLE! Je suis très reconnaissant envers Paul Arnaud pour m'avoir considéré comme ami, frère et confident. Je le remercie aussi pour nos discussions et les conseils qu'il m'a donné pendant mes travaux de recherche et la rédaction de ce texte.

Je remercie également Cathy, Martine, et Carine pour leurs gentilleses. En particulier, je suis très reconnaissant envers Cathy pour le temps qu'elle a sacrifié afin de rendre ce texte plus propre.

Pour leur encouragement et leur soutien aussi bien matériel que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions, je remercie tous les doctorants de l'institut de recherche en mathématique et physique de l'UCL. Un grand merci à Miradain, Olivette et Demba.

Je remercie mon oncle Moussa Djado et sa femme Mariama Diallo pour leur soutien tout au long de mes études. Un grand merci à tous mes amis pour le soutien permanent et inconditionnel. J'évite de citer des noms au risque de m'en vouloir toute ma vie. Je remercie également toute la communauté nigérienne en Belgique.

Je tiens à remercier ma tendre belle épouse Maimouna pour sa patience, ses sages conseils et son soutien quotidien. Merci aussi à mon Aarif-Sodangui d'amour qui me donne chaque jour le courage et la joie de vivre.

Un BiG UP à tous mes frères et soeurs pour leur soutien : Moustapha, Amina, Mainassara, Ikali, Nasser, Déloulou, Razak, Amsatou, je vous aime!!!

Table des matières

Introduction	1
1 Fibré des repères	9
1.1 Introduction	9
1.2 Notions de base sur les fibrés	10
1.2.1 Définitions	10
1.3 Quelques constructions de fibré	11
1.3.1 Produit fibré "pullback"	12
1.3.2 Complémentaire orthogonal d'un fibré vectoriel	13
1.4 Fibré associé à un fibré principal	13
1.4.1 G -espace	14
1.4.2 Fibré principal	15
1.4.3 Fibré associé à un G -fibré principal	15
1.4.4 Classification de fibré associé au fibré principal	16
1.4.5 Réduction de structure de groupe	17
1.5 Fibré des repères associé à un fibré vectoriel	17
1.5.1 Variété de Stiefel et variété de Grassmann	17
1.5.2 Fibré des repères associé à un fibré vectoriel	18
1.6 Classes de Pontryagin et classe d'Euler du fibré des repères associé à un fibré vectoriel	21
1.7 Espace des fonctions	23
2 Homotopie rationnelle et espace des sections	25
2.1 Introduction	25

2.2	Théorie de l'homotopie rationnelle	26
2.2.1	Modèle de Sullivan pour les objets algébriques	28
2.2.2	Modèle de Sullivan pour les espaces	29
2.3	Modèle d'un fibré	30
2.4	Modèle du produit fibré	32
2.5	Modèle du fibré de Borel	33
2.6	Modèle du fibré associé à un G -fibré principal avec fibre espace homogène	34
2.7	Modèle de $BSO(n)$ et de l'application classifiante du fibré vectoriel	35
2.7.1	Modèle de $BSO(n)$	35
2.7.2	Modèle de l'application de classifiante du fibré vectoriel	36
2.8	Modèle rationnel du fibré des repères	37
2.9	Homotopie rationnelle de l'espace de sections	44
2.9.1	Rationalisation de l'espace des sections	44
2.9.2	Modèle de l'espace des sections	46
3	Construction de Stiefel	49
3.1	Introduction	49
3.2	Définition de la construction de Stiefel	51
3.2.1	Construction de Stiefel associée à un couple de fibrés vectoriels	51
3.2.2	Double fonctorialité de la construction de Stiefel	52
3.3	Construction de Stiefel universelle	59
4	Modèle rationnel du fibré de Stiefel	67
4.1	Introduction	67
4.2	Modèle d'adgc des classifiantes f et g	70
4.3	Modèle d'adgc de l'application Bj	71
4.4	Modèle d'adgc de E Stiefel $(\gamma^m, \eta) \rightarrow Y$	75
4.5	Modèle rationnel du fibré de Stiefel	78
4.6	Trivialité rationnelle du fibré de Stiefel	81
5	Homotopie rationnelle de $Imm(M, N)$	85
5.1	Introduction	85
5.2	Espace des immersions et fibré de Stiefel	87
5.2.1	C^1 -topologie faible	87
5.2.2	Définition de l'espace des immersions	88
5.2.3	Théorème de Smale-Hirsch	89

5.2.4	Immersion, classes de Pontryagin et classe d'Euler . .	91
5.3	Homotopie rationnelle de l'espace des immersions d'une variété dans une autre variété	93
5.4	Homotopie rationnelle de l'espace des immersions d'une variété dans un espace euclidien	94
5.4.1	Cas où la codimension est impaire	95
5.4.2	Cas où la codimension est paire	98
5.5	Croissance des nombres de Betti de $Emb(M, \mathbb{R}^{m+k})$	102
Bibliographie		109

Introduction

Considérons deux variétés différentiables M et N . Nous supposons toujours dans cette introduction que les variétés sont de type fini, c'est-à-dire que leurs nombres de Betti sont finis. Une *immersion* de M dans N est une application différentiable

$$f: M \looparrowright N$$

dont la dérivée en tout point $x \in M$, $d_x f$, est injective. Ce travail est centré sur l'étude de l'*espace des immersions*

$$Imm(M, N)$$

défini comme l'ensemble de toutes les immersions $f: M \looparrowright N$ muni d'une topologie convenable (la topologie C^1 -faible, voir la section 5.2). Un tel espace d'immersions apparaît pour la première fois dans la littérature en 1958 dans l'article [31] de Stephen Smale dans lequel il démontre le célèbre théorème affirmant qu'il est possible de "retourner" la sphère usuelle S^2 dans $\mathbb{R}^3$. Plus précisément Smale établit qu'il existe une famille continue d'immersions (ou "homotopie régulière" dans la terminologie de Smale) reliant le plongement standard f_0 de la sphère dans $\mathbb{R}^3$ à la composée $f_1 = Rf_0$, où R est la réflexion autour du plan Oxy . Smale ne construit pas explicitement une telle homotopie régulière, mais il démontre que l'espace $Imm(S^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe par arcs et donc deux immersions quelconques de S^2 dans $\mathbb{R}^3$ peuvent être reliées par un chemin continu, correspondant exactement à une homotopie régulière. La preuve de la connexité de $Imm(S^2, \mathbb{R}^3)$ se base sur

les techniques de la topologie algébrique ramenant le calcul de l'ensemble des composantes connexes à certains calculs sur des groupes d'homotopie supérieure d'autres espaces.

En généralisant les résultats de l'article original [31] S.Smale et M.Hirsch ont donné dans ([15],[32]) une *description homotopique* de $Imm(M, N)$ pour des variétés plus générales que $M = S^2$ et $N = \mathbb{R}^3$ à partir du type d'homotopie de ces variétés et de leurs fibrés tangents. Cependant *calculer les invariants* de $Imm(M, N)$ reste difficile. Dans ce travail nous utiliserons la puissance calculatoire de l'homotopie rationnelle pour obtenir une description plus explicite de ces espaces d'immersions. Nous obtiendrons ainsi par exemple des formules explicites pour les nombres de Betti rationnels et les rangs des groupes d'homotopies de certains espaces d'immersions.

Une motivation de ce travail vient de l'étude des *espaces de plongements* entre variétés, $Emb(M, N)$. Grâce à des méthodes récentes de Goodwillie-Weiss ([10], [36]), il est possible d'obtenir une description homotopique de $Emb(M, N)$. Pour des raisons techniques il est en fait en général plus facile de décrire le type d'homotopie de

$$\overline{Emb}(M, N)$$

qui est par définition la fibre homotopique

$$\overline{Emb}(M, N) := \text{hofibre}(Emb(M, N) \hookrightarrow Imm(M, N)).$$

On obtient ainsi que le type d'homotopie rationnelle de l'espace $Emb(M, N)$ peut se construire à partir des types d'homotopies rationnelles des espaces $\overline{Emb}(M, N)$ et $Imm(M, N)$ ce qui donne une motivation supplémentaire pour notre travail, sachant qu'il y a des résultats intéressants sur le type d'homotopie rationnelle $\overline{Emb}(M, N)$ (voir entre autres [3],[30],[33]).

Venons-en à la description plus précise de nos résultats et méthodes. Expliquons d'abord la théorie de Smale-Hirsch ([15]) donnant une description homotopique de $Imm(M, N)$. Étant donnée une immersion $f: M \looparrowright N$, on a pour tout point $x \in M$ une injection linéaire

$$d_x f: T_x M \hookrightarrow T_y N, \quad y = f(x), \quad (1)$$

entre les espaces tangents des deux variétés. On peut construire un espace fibré naturel

$$\pi: E \text{ Stiefel}(\tau_M, \tau_N) \longrightarrow M \quad (2)$$

dont la fibre au-dessus de tout point $x \in M$ consiste en des couples (y, λ) , où $y \in N$ et $\lambda: T_x M \hookrightarrow T_y N$ est une injection linéaire (voir chapitre 3 pour les détails sur cette "construction de Stiefel"). On voit alors que la famille d'applications $(d_x f)$ de (1) paramétrée par $x \in M$ définit une section df du fibré (2) :

$$\begin{array}{c} E \text{ Stiefel } (\tau_M, \tau_N) \\ \begin{array}{c} \nearrow df \\ \downarrow \pi \end{array} \\ M \end{array}$$

Si on note

$$\Gamma \left(E \text{ Stiefel } (\tau_M, \tau_N) \xrightarrow{\pi} M \right)$$

l'espace de toutes les sections continues de π (muni de la topologie compacte-ouverte), l'opération de dérivation donne ainsi une application continue

$$\begin{array}{ccc} \Phi: Imm(M, N) & \longrightarrow & \Gamma(E \text{ Stiefel } (\tau_M, \tau_N) \longrightarrow M) \\ f & \longmapsto & (df: x \mapsto d_x f). \end{array}$$

On a alors le théorème remarquable suivant :

Théorème A (Smale-Hirsch,[15]). *Si $\dim M < \dim N$ ou si N n'a pas des composantes compactes alors*

$$\Phi: Imm(M, N) \longrightarrow \Gamma(E \text{ Stiefel } (\tau_M, \tau_N) \longrightarrow M)$$

est une équivalence d'homotopie faible.

L'étude de notre espace des immersions est ainsi ramenée à l'étude d'un espace de sections d'un fibré explicite. D'autre part, des techniques dues à André Haefliger dans[12] permettent de calculer le type d'homotopie rationnelle des différentes composantes connexes d'un espace des sections. Dans notre cas, cet espace de sections dépend des fibrés tangents des deux variétés.

Le type d'homotopie rationnelle du fibré tangent τ_M d'une variété M est complètement déterminé par un modèle rationnel de M et des représentants des classes de Pontryagin et d'Euler du fibré tangent (car la cohomologie rationnelle de l'espace classifiant $BSO(m)$ du fibré vectoriel est une algèbre polynomiale engendrée par les classes de Pontryagin universelles et la classe d'Euler universelle (si m est pair)).

En conséquence il est naturel d'espérer pouvoir déterminer le type d'homotopie rationnelle des composantes connexes de $Imm(M, N)$ à partir des modèles rationnels de M et N et des classes de Pontryagin et d'Euler de ces variétés. Ce sont des résultats de ce type que nous poursuivons dans cette thèse et dont nous énonçons un florilège ci-dessous.

Pour énoncer nos premiers résultats fixons quelques notations. Si X et Y sont deux espaces topologiques,

$$Map(X, Y)$$

est l'espace des applications continues de X dans Y (muni de la topologie compacte-ouverte), et si $\phi: X \rightarrow Y$ est une application continue alors

$$Map(X, Y; \phi)$$

est la composante connexe de $Map(X, Y)$ contenant ϕ . De même si $f: M \looparrowright N$ est une immersion

$$Imm(M, N; f)$$

est la composante connexe de $Imm(M, N)$ contenant f .

D'autre part, on note $E\text{rep}_m(\tau_N)$ l'espace des m -repères de τ_N . Autrement dit on a un espace fibré au-dessus de N

$$E\text{rep}_m(\tau_N) \rightarrow N$$

dont la fibre au-dessus d'un point est la variété de Stiefel des m -repères de $\mathbb{R}^n$, $\text{rep}_m(\mathbb{R}^n)$, avec $n = \dim N$ (voir section 1.5 pour les détails sur la construction de ce fibré des repères).

Rappelons que deux espaces simplement connexes ont le même type d'homotopie rationnelle s'ils sont connectés par un zigzag d'applications continues induisant des isomorphismes en homologie rationnelle. La théorie de Sullivan permet de complètement encoder le type d'homotopie rationnelle d'un espace par un objet algébrique appelé modèle rationnel (voir la section 2.2 pour les détails de cette théorie). Si deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle alors on écrit

$$X \simeq_{\mathbb{Q}} Y.$$

Nous montrons les résultats suivants.

Théorème B (Théorème 5.3.1). *Soient M et N deux variétés simplement connexes de dimension m et $m + k$ respectivement avec $k \geq 2$. Si la classe d'Euler de M est nulle ou k est impair et si toutes les classes de Pontryagin rationnelles de N sont nulles, alors pour toute immersion $f: M \looparrowright N$ nous avons*

$$\mathrm{Imm}(M, N; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \mathrm{Map}(M, E \mathrm{rep}_m(\tau_N); \phi_f),$$

pour une certaine application ϕ_f .

Théorème C (Corollaire 5.3.2). *Si en plus des hypothèses du théorème B, la classe de d'Euler de N est nulle, alors pour toute immersion $f: M \looparrowright N$ il existe deux applications continues $\phi_f^1: M \rightarrow N$ et $\phi_f^2: M \rightarrow \mathrm{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$ telles que*

$$\mathrm{Imm}(M, N; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \mathrm{Map}(M, N; \phi_f^1) \times \mathrm{Map}(M, \mathrm{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}); \phi_f^2).$$

Lorsque la variété d'arrivée est un espace euclidien, $N = \mathbb{R}^{m+k}$, on obtient des résultats plus précis qui dépendent de la parité de la codimension k . Plus précisément dans le cas où la codimension est impaire nous prouvons le résultat suivant.

Théorème D (Théorème 5.4.3). *Soient M une variété simplement connexe de dimension m , et $k \geq 3$ un entier impair. Alors, chaque composante connexe de $\mathrm{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane, qui ne dépendent que de la codimension k et des nombres de Betti rationnels de M .*

De manière surprenante, ce dernier résultat entraîne qu'en codimension impaire suffisamment grande (plus précisément si $k > m$), le type d'homotopie rationnelle de $\mathrm{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ ne dépend que de k et des nombres de Betti rationnels de M , mais pas du tout des classes de Pontryagin de M ! En codimension paire la situation est un peu plus subtile. En effet, le type d'homotopie rationnelle des composantes connexes de l'espace des immersions dans un espace euclidien en basse codimension peut dépendre du choix de la composante connexe. Plus précisément nous avons les résultats suivants.

Théorème E (Théorème 5.4.7). *Soient M une variété simplement connexe de dimension m et $k \geq m + 1$ un entier pair. Si la classe d'Euler de M est*

nulle, alors nous avons l'équivalence d'homotopie rationnelle suivante :

$$\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}\right) \simeq_{\mathbb{Q}} \mathrm{Map}\left(M, S^k\right) \times K,$$

où K est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui ne dépendent que de codimension k et des nombres de Betti rationnels de M .

Il faut noter que lorsque $k \geq m+1$, $\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}\right)$ est connexe. Dans le cas non connexe nous avons le théorème suivant.

Théorème F (Théorème 5.4.8). *Soient M une variété simplement connexe de dimension m et $k \geq 2$ un entier pair. Si la classe d'Euler de M est nulle, alors chaque composante connexe de $\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}\right)$ a le type d'homotopie rationnelle du produit*

$$\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}, f\right) \simeq_{\mathbb{Q}} \mathrm{Map}\left(M, S^k, \tilde{f}\right) \times K.$$

Remarquons qu'on connaît des exemples de variété M (par exemple $M = S^k$) telle que le type d'homotopie rationnel de $\mathrm{Map}\left(M, S^k, \tilde{f}\right)$ dépend de la classe d'homotopie de $\tilde{f}$. Ceci n'est pas possible lorsque $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$. Ceci nous amène au résultat suivant.

Théorème G (Corollaire 5.4.9). *Si en plus des hypothèses du théorème F $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$, alors toutes les composantes connexes de $\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}\right)$ ont le même type d'homotopie rationnelle.*

Les résultats précédents montrent que, lorsque la classe d'Euler de M est nulle ou k est impair, le type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions de M dans un espace euclidien de large codimension ne dépend que de cette codimension et des nombres de Betti rationnels de la variété. Ceci nous permet d'obtenir des formules explicites pour la série génératrice des rangs des groupes d'homotopie de ces espaces des immersions. Nous obtenons ainsi le résultat suivant pour les variétés compactes.

Théorème H (Théorème 5.5.3). *Soient M une variété compacte, simplement connexe, sans bord, de dimension m , et $k \geq 3$ un entier impair. On suppose que $k \geq \frac{m}{2} + 1$. Alors, on a la formule explicite suivante qui donne les rangs des groupes d'homotopie de $\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}, f\right)$ à partir de la série de Poincaré de M et la codimension k . Ainsi la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{rang} \pi_i\left(\mathrm{Imm}\left(M, \mathbb{R}^{m+k}, f\right)\right) x^i$$

est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{x^{2k-m-1}(1-x^{2m+2})}{1-x^4} \cdot P_M(x) & \text{si } m \text{ pair} \\ \frac{x^{3k-m-2}(1-x^{2m+2})}{1-x^4} \cdot (P_M(x))^2 & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}$$

où

$$P_M(x) = \sum_{i=1}^m \dim H_i(M, \mathbb{Q}) x^i \text{ est la série de Poincaré de } M.$$

Dans le cas où la codimension est paire et $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$ nous obtenons.

Théorème I (Théorème 5.5.4). *Soient M une variété compacte sans bord, simplement connexe de dimension m et $k \geq 2$ un entier pair. On suppose que $k \geq \frac{m}{2} + 1$. Si la classe d'Euler de M est nulle et si $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$, alors la série :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{rang } \pi_i \left(\text{Imm} \left(M, \mathbb{R}^{m+k}, f \right) \right) x^i$$

est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{x^{2k-m-1}(1-x^{2m})}{1-x^4} P_M(x) \times K_1 & \text{si } m \text{ impair} \\ \frac{x^{3k-m-2}(1-x^{2m})}{1-x^4} (P_M(x))^2 \times K_1 & \text{si } m \text{ pair} \end{cases}$$

où

$$K_1 = \sum_i \left(\dim H^{k-i}(M, \mathbb{Q}) - \dim H^{2k-i-1}(M, \mathbb{Q}) \right) x^i.$$

Notons que ces résultats impliquent que le rang des groupes d'homotopie rationnelle d'un espace d'immersions dans un espace euclidien sont à croissance polynomiale (voir le corollaire 5.5.5). D'autre part il est montré dans [2] que les nombres de Betti rationnels de $\overline{\text{Emb}}(M, N)$ sont à croissance exponentielle dès que la caractéristique d'Euler $\chi(M) \leq -2$. On déduit dès lors le résultat suivant :

Théorème J (Corollaire 5.5.9). *Soit M une variété simplement connexe de dimension m et de caractéristique d'Euler $\chi(M) \leq -2$. Supposons que la classe d'Euler de M est nulle ou k impair. Si $k \geq m+1$, alors les nombres de Betti rationnels de $\text{Emb}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ sont à croissance exponentielle.*

Plan du travail

- Dans le chapitre 1 on rappelle les notions de base du fibré et de l'espace des fonctions qui seront utilisées dans tout ce travail.
- Dans le chapitre 2 on rappelle les notions de base de l'homotopie rationnelle. Entre autre, on rappelle la construction de modèle d'adgc du fibré, du fibré de Borel et du fibré dont la fibre est un espace homogène. Un nouveau résultat dans ce chapitre est le théorème 2.8.1 qui donne la construction d'un modèle d'adgc du fibré des repères associé à un fibré vectoriel. Ce chapitre sera clôturé par un rappel sur l'homotopie rationnelle de l'espace des sections.
- Dans le chapitre 3 nous introduisons la notion de la construction de Stiefel. On montrera par la suite beaucoup de propriétés importantes de cette construction. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 3.3.2. Enfin, il faut noter que cette construction est cruciale pour la construction du modèle rationnel de l'espace des immersions.
- Dans le chapitre 4 nous construisons un modèle rationnel de la construction de Stiefel. Le principal résultat de ce chapitre est le théorème 4.1.1.
- Dans le chapitre 5 nous étudions le type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions entre deux variétés. Dans ce chapitre on démontre tous les résultats énoncés dans l'introduction.

CHAPITRE 1

Fibré des repères

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on rappelle les propriétés du fibré et de l'espace des fonctions qui sont nécessaires dans cette thèse.

Plan du chapitre

- Dans la section 1.2 on rappelle la définition du fibré, du fibré vectoriel, du morphisme entre fibrés. On termine cette section avec quelques exemples de base.
- Dans la section 1.3 on rappelle des constructions des fibrés qui sont très importantes dans cette thèse. Plus précisément, on parle de produit fibré et du complémentaire orthogonal d'un fibré vectoriel.
- Dans la section 1.4 on rappelle la définition de G -fibré principal, du fibré associé à un G -fibré principal et du fibré Borel. On rappelle entre autre des G -espaces, du théorème de classification de G -fibré principal et des fibrés associés à un G -fibré principal.
- Dans la section 1.5 on rappelle la notion du fibré des repères associé à un fibré vectoriel. Cette construction est très importante pour ce

travail, plus précisément pour la construction du fibré de Stiefel (voir le chapitre 3). On commence avec la définition de variété de Stiefel et de variété de Grassmann.

- Dans la section 1.6 on rappelle la notion des classes de Pontryagin et d'Euler d'un $SO(m)$ -fibré principal. Ces objets sont au centre de cette thèse.
- Dans la section 1.7 on rappelle la notion de l'espace des fonctions et on donne quelques propriétés importantes de cet espace.

1.2 Notions de base sur les fibrés

Dans cette section on rappelle la définition de fibré, de morphisme entre fibré et on donne des exemples de fibrés.

1.2.1 Définitions

Commençons par la définition d'un fibré.

Définition 1.2.1. Soit F un espace topologique. Un fibré ξ de fibre F est un triplet $\xi = (E, p, B)$, où E, B sont des espaces topologiques et $p: E \rightarrow B$ est une application continue vérifiant :

1. Pour tout $b \in B$, $p^{-1}(b) \cong F$.
2. Pour tout $b \in B$, il existe un couple (U, h) appelé carte locale en b , où $U \subset B$ est un voisinage ouvert de b , et $h: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ est un homéomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{h} & p^{-1}(U) \\ & \searrow pr_1 \quad \swarrow p & \\ & U & \end{array}$$

On dira que E est l'espace total, B est l'espace de base, p la projection, et (U, h) la trivialisatation locale. La fibre au-dessus de $b \in B$ sera notée

$$E_b\xi = p^{-1}(b).$$

Si F est un espace vectoriel de dimension m et si pour toute trivialisatation locale (U, h) , l'homéomorphisme h est linéaire, on dira que $\xi = (E, p, B)$ est un fibre vectoriel de rang m .

Notation 1.2.2. Un fibré $\xi = (E, p, B)$ de fibre F sera souvent noté

$$\xi: F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B.$$

Exemple 1.2.3. On commence avec le fibré trivial.

Fibré trivial : Si F et B sont deux espaces, on peut construire un fibré d'espace total $E = B \times F$, de base B , de projection $p = pr_1: B \times F \longrightarrow B$ et de fibre F .

Fibré tangent : Si M est une variété de dimension m , on définit sur celle-ci un fibré vectoriel de rang m , dont la fibre au-dessus d'un point $x \in M$ est l'espace tangent $T_x M$ en ce point. Ce fibré est noté $\tau_M = (TM, p, M)$. Si τ_M est trivial on dit que M est parallélisable.

Définition 1.2.4. Un morphisme de fibrés $\phi: (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$, est la donnée d'une paire d'applications continues $f: E \rightarrow E'$ et $\bar{f}: B \rightarrow B'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

Le morphisme de fibrés ϕ est un isomorphisme s'il existe un autre morphisme

$$\psi: (E', p', B') \longrightarrow (E, p, B)$$

tel que

$$\psi \circ \phi = id_{(E, p, B)} \text{ et } \phi \circ \psi = id_{(E', p', B')}.$$

Si (E, p, B) est isomorphe à (E', p', B') on notera :

$$(E, p, B) \cong (E', p', B').$$

1.3 Quelques constructions de fibré

Dans cette section on rappelle quelques constructions des fibrés qui vont être utilisées dans la suite de notre travail.

1.3.1 Produit fibré "pullback"

Soient $\xi = (E, p, B)$ un fibré de fibre F et $f : X \longrightarrow B$ une application continue. On peut définir un sous espace f^*E de $X \times E$ de la façon suivante

$$f^*E = \{(x, e) \in X \times E \mid p(x) = f(b)\}.$$

On a aussi deux projections $p_1 : f^*E \longrightarrow X$ et $p_2 : f^*E \longrightarrow E$ définies par $p_1(x, e) = x$ et $p_2(x, e) = e$. Ces constructions satisfont la *propriété universelle*, c'est-à-dire pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{p'_2} & E \\ p'_1 \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

il existe une unique application continue $\psi : E' \longrightarrow f^*E$ telle que

$$p_1 \circ \psi = p'_1 \text{ et } p_2 \circ \psi = p'_2.$$

Ce qui peut se traduire par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E' & & & & \\ & \searrow \psi & & \searrow p'_2 & \\ & & f^*E & \xrightarrow{p_2} & E \\ & \searrow p'_1 & \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ & & X & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Proposition 1.3.1. [9, Exemple 1.56] Le triplet $f^*\xi = (f^*E, p_1, X)$ est un fibré de fibre F . On l'appelle produit fibré de ξ le long de f .

Proposition 1.3.2. $f^*\xi = (f^*E, p_1, X)$ a les propriétés suivantes :

- Si $\xi = (E_1, p_1, B_1)$ et $\eta = (E_2, p_2, B_2)$ sont des fibrés et $f : B_1 \longrightarrow B_2$ une application continue alors

$$\xi \cong \eta \Rightarrow f^*\xi \cong f^*\eta.$$

- Si $\xi = (E, p, B)$ est un fibré et $f_0, f_1 : X \longrightarrow B$ sont deux applications homotopes, alors

$$f_0^*\xi \cong f_1^*\xi.$$

1.3.2 Complémentaire orthogonal d'un fibré vectoriel

Dans cette section on rappelle la notion de complémentaire d'un fibré vectoriel. On commence avec la définition de la métrique euclidienne d'un fibré qui est un outil crucial pour la définition du complémentaire d'un fibré vectoriel.

Définition 1.3.3. Soient $\xi = (E, p, B)$ un fibré vectoriel de fibre $\mathbb{R}^n$ et $E(\xi \oplus \xi)$ l'espace de Whitney défini comme suit

$$E(\xi \oplus \xi) = \{(x, y) \in E \times E \mid p(x) = p(y)\}.$$

Une métrique euclidienne sur ξ est une application continue

$$\mu: E(\xi \oplus \xi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que la restriction à chaque fibre est un produit scalaire.

La proposition suivante nous garantit son existence. Elle est immédiate à partir de [17, Théorème 5.5, p 32] et [17, Théorème 9.4, p 38].

Proposition 1.3.4. Tout fibré vectoriel dont l'espace de base est paracompact peut être muni d'une métrique euclidienne.

Convention 1.3.5. Dans toute la thèse on suppose que les fibrés vectoriels sont toujours munis d'une métrique euclidienne.

Si $\xi = (E, p, B)$ est un fibré vectoriel muni d'une métrique μ et $\eta = (E', p', B)$ un sous fibré de ξ , nous pouvons construire le sous-fibré $\eta^\perp$ dont l'espace total est constitué des vecteurs de E orthogonaux à ceux de E' . Nous obtenons ainsi un fibré vectoriel qui vérifie $\eta \oplus \eta^\perp = \xi$.

Définition 1.3.6. $\eta^\perp$ est appelé complément orthogonal de η dans ξ .

1.4 Fibré associé à un fibré principal

Dans cette section on rappelle la construction du fibré associé à un G -fibré principal. Cette construction est utile pour la construction de Stiefel que nous allons introduire dans le chapitre 3. On commence avec la notion de G -espace.

1.4.1 G -espace

Dans cette section on rappelle la notion des G -espaces.

Définition 1.4.1. *Un G -espace à droite est un espace X muni d'une application*

$$X \times G \longrightarrow X$$

qui associe à tout couple (x, g) l'élément xg vérifiant les relations suivantes :

1. $x(g_1g_2) = (xg_1)g_2 \quad \forall x \in X \text{ et } g_1, g_2 \in G,$
2. $x1 = x \quad \forall x \in X.$

Un G -espace à gauche est la donnée d'une application $G \times X \longrightarrow X$

qui associe à tout couple (g, x) l'élément gx vérifiant les relations suivantes :

1. $(g_1g_2)x = g_1(g_2x) \quad \forall x \in X \text{ et } g_1, g_2 \in G,$
2. $1x = x \quad \forall x \in X.$

L'action de G sur X est dite libre si

$$gx = x \Leftrightarrow g = e \quad \forall g \in G, x \in X \text{ et } e \text{ l'élément neutre de } G.$$

L'action de G sur X est dite transitive si

$$\forall (x, y) \in X \times X, \exists g \in G \mid y = gx.$$

Remarque 1.4.2. *Si X est un G -espace à gauche la relation*

$$xs = s^{-1}x,$$

donne à X une structure de G -espace à droite. Comme il y a une bijection entre les G -espace à gauche et les G -espace à droite souvent on ne précisera pas.

Définition 1.4.3. *Une application $f : X \longrightarrow Y$ entre deux G -espaces est dite G -équivariante si on a*

$$f(xg) = f(x)g, \forall x \in X, g \in G.$$

1.4.2 Fibré principal

Définition 1.4.4. *Considérons $\mathcal{P} = (P, p, B)$, où P est un G -espace, B est un espace topologique, et $p: P \rightarrow B$ est une application G -équivariante (ici G agit trivialement sur B). Alors $\mathcal{P} = (P, p, B)$ est un G -fibré principal s'il existe un recouvrement d'ouverts O_α de B et des applications continues $\sigma_\alpha: O_\alpha \rightarrow P$, appelées sections locales, vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $p\sigma_\alpha = \text{id}$,
2. l'application $h_\alpha: O_\alpha \times G \rightarrow p^{-1}(O_\alpha)$ définie par $(y, g) \mapsto \sigma_\alpha(y)g$ est un homéomorphisme.

Un G -fibré principal est dit G -fibré principal universel si son espace total est contractile.

Définition 1.4.5. *Un morphisme de G -fibrés principaux*

$$\phi: (P_1, p_1, B_1) \rightarrow (P_2, p_2, B_2)$$

est un morphisme de fibrés, où $\phi: P_1 \rightarrow P_2$ est G -équivariante.

Proposition 1.4.6. *[17, Théorème 3.2, p 43] Si ϕ est un morphisme entre deux G -fibrés principaux de même base, alors ϕ est un isomorphisme de fibrés.*

Théorème 1.4.7. *[23, Théorème p 197] Soient (EG, p, BG) un G -fibré principal universel et B un CW complexe. Alors on a une bijection naturelle entre l'espace $[B, BG]$ et l'espace de tous les G -fibrés principaux au-dessus de B , que l'on note $P(B)$. On dit que BG est l'espace classifiant des G -fibrés principaux.*

Définition 1.4.8. *Si $f: B \rightarrow BG$ est une fonction continue et $\mathcal{P} = (P, p, B)$ un G -fibré principal tel que $\mathcal{P} = f^*EG$, alors f est appelé application classifiante de $\mathcal{P}$.*

1.4.3 Fibré associé à un G -fibré principal

Dans cette section on rappelle la construction d'un fibré associé à un G -fibré principal. Cette construction est indispensable pour la suite.

Soient $\mathcal{P} = (E, p, B)$ un G -fibré principal et F un G -espace, alors $E \times F$ est aussi un G -espace. L'action est définie par :

$$(e, x)g = (eg, g^{-1}x) \text{ pour } e \in E, x \in F \text{ et } g \in G.$$

Notons par $E \times_G F$ l'espace des orbites de $E \times F$ par cette action et par

$$q : E \times F \longrightarrow E \times_G F$$

la projection correspondante. L'application q détermine une application

$$\rho : E \times_G F \longrightarrow B$$

via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{q} & E \times_G F \\ \text{\scriptsize pr_1} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize ρ} \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Plus précisément nous avons

$$\forall (x, e) \in X \times E, \rho[e, x] = p(e).$$

Proposition 1.4.9. [11, Proposition 1, p.198-199] $\Xi = (E \times_G F, \rho, B)$ un fibré de fibre F .

Définition 1.4.10. Le fibré Ξ est appelé fibré associé à $\mathcal{P}$ de fibre F .

1.4.4 Classification de fibré associé au fibré principal

Dans cette section on va rappeler la définition du fibré de Borel. On déduira ensuite une propriété importante de fibré associé au G -fibré principal. Soit G un groupe de Lie connexe opérant sur un espace topologique F . On considère un G -fibré universel principal (EG, p, BG) .

Définition 1.4.11. Le fibré $(EG \times_G F, p, BG)$ est appelé fibré de Borel de fibre F .

Proposition 1.4.12. Soient $\mathcal{P} = (E, p, B)$ un G -fibré principal et

$$f : B \longrightarrow BG$$

sa classifiante. Si F est un G -espace, on a :

$$E \times_G F \cong f^*(EG \times_G F).$$

Démonstration. Voir [35, Lemme 1]. □

1.4.5 Réduction de structure de groupe

Dans toute cette section G est un groupe de Lie, et H un sous groupe fermé de G .

Définition 1.4.13. *Supposons que $\mathcal{P} = (P, p, B)$ est un G -fibré principal et $\mathcal{Q} = (Q, q, B)$ est un H -fibré principal. Si $f: Q \rightarrow f(Q) \subset P$ est un homéomorphisme vérifiant $f(xg) = f(x)g$ pour $x \in Q$ et $g \in H$, alors $\mathcal{Q} = (Q, q, B)$ est appelé restriction de $\mathcal{P} = (P, p, B)$.*

Proposition 1.4.14. *[17, Théorème 3.1, p. 75] Soient G un groupe de Lie, et H un sous groupe fermé de G . Supposons que F est un G -espace, donc a priori un H espace. Si $\mathcal{P} = (P, p, B)$ est un G -fibré principal, et $\mathcal{Q} = (Q, q, B)$ sa restriction à H . Alors il existe un isomorphisme naturel entre les fibrés associés $(P \times_G F, p_1, B)$ et $(Q \times_H F, q_1, B)$.*

1.5 Fibré des repères associé à un fibré vectoriel

1.5.1 Variété de Stiefel et variété de Grassmann

Dans cette section nous rappelons les définitions de variété de Stiefel et de variété de Grassmann. Nous commençons avec les définitions de m -repère et de m -plan.

Définition 1.5.1. *Soient q et n deux entiers positifs avec $q \leq n$.*

- *Un q -repère dans $\mathbb{R}^n$ est la donnée de q -vecteurs linéairement indépendants.*
- *Un q -plan dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension q .*

Notation 1.5.2. *On note $\text{rep}_q(\mathbb{R}^n)$ l'espace de tous les q -repères dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie produit. C'est-à-dire,*

$$\text{rep}_q(\mathbb{R}^n) = \{(v_1, \dots, v_q) \in (\mathbb{R}^n)^q \mid (v_1, \dots, v_q) \text{ est un } q\text{-repère}\},$$

et $G_q(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tous les q -plans dans $\mathbb{R}^n$. C'est-à-dire

$$G_q(\mathbb{R}^n) = \{\text{l'ensemble de tous les } q\text{-plans de } \mathbb{R}^n\}.$$

Soit

$$\pi : \text{rep}_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_q(\mathbb{R}^n)$$

l'application qui envoie un q -repère sur le q -plan qu'il engendre et donne à $G_q(\mathbb{R}^n)$ la topologie quotient résultante.

Définition 1.5.3. Soient q et n deux entiers positifs avec $q \leq n$. L'espace $\text{rep}_q(\mathbb{R}^n)$ est appelé variété de Stiefel des q -repères de $\mathbb{R}^n$ et $G_q(\mathbb{R}^n)$ est appelé variété de Grassmann.

La variété de Stiefel $\text{rep}_q(\mathbb{R}^n)$ admet une action naturelle du groupe $GL(q)$. L'action est donnée par :

Si $g = (g_{ij}) \in GL(q)$ et si $(v_1, \dots, v_q) \in \text{rep}_q(\mathbb{R}^n)$, alors

$$(v_1, \dots, v_q)g = (w_1, \dots, w_q)$$

où

$$w_j = \sum_{i=1}^m v_i g_{ij}.$$

Pour $q < n$, on peut montrer qu'on a des homéomorphismes suivants :

$$\text{rep}_q(\mathbb{R}^n) \cong \frac{SO(n)}{SO(n-q)} \text{ et } G_q(\mathbb{R}^n) \cong \frac{SO(n)}{SO(n-q) \times SO(q)}, \quad (1.5.1)$$

et que $(\text{rep}_q(\mathbb{R}^n), \pi, G_q(\mathbb{R}^n))$ est un $SO(q)$ -fibré principal.

Remarque 1.5.4. Si $n = \infty$, $\text{rep}_q(\mathbb{R}^n)$ est contractile (voir [24, Lemme 1.20] pour la preuve). Par conséquent, si on pose

$$ESO(q) = \text{rep}_q(\mathbb{R}^\infty) \text{ et } BSO(q) = G_q(\mathbb{R}^\infty),$$

le fibré $(ESO(q), \pi, BSO(q))$ est un $SO(q)$ -fibré principal universel (voir définition 1.4.4 pour la définition du fibré principal universel).

1.5.2 Fibré des repères associé à un fibré vectoriel

Dans cette partie on rappelle brièvement la notion de fibré des repères associé à un fibré vectoriel. Pour plus de détails, nous suggérons la référence [26] ou [11, chapitre 5]. Cette notion de fibré de repère sera largement utilisée dans le chapitre 3. Plus précisément elle sera utile pour la construction de Stiefel.

Etant donné un fibré vectoriel

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E\xi \longrightarrow B$$

de rang n , on peut lui associer naturellement un fibré des m -repères

$$\text{rep}_m(\xi) : \text{rep}_m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E \text{rep}_m(\xi) \xrightarrow{\pi} B$$

dont la fibre est la variété de Stiefel $\text{rep}_m(\mathbb{R}^n)$ et tel que les points de l'espace total au-dessus de $b \in B$ correspondent aux m -repères de la fibre vectorielle $E_b\xi = p^{-1}(b)$. C'est-à-dire,

$$E \text{rep}_m(\xi) = \{(b, V) \mid b \in B \text{ et } V \text{ est un } m\text{-repère de } E_b\xi\}$$

et π est la projection sur la première composante. L'action de $GL(m)$ sur chaque fibre $\text{rep}_m(\mathbb{R}^n)$ s'étend en une action naturelle de $GL(m)$ sur $E \text{rep}_m(\xi)$. Lorsque $m = n$, on a $\text{rep}_n(\mathbb{R}^n) = GL(n)$, et $\text{rep}_n(\xi)$ n'est rien d'autre que le fibré principal

$$\text{prin}(\xi) : GL(n) \longrightarrow E \text{prin}(\xi) \longrightarrow B$$

associé au fibré vectoriel ξ .

Lorsque $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \longrightarrow B$ est muni d'une métrique euclidienne et est orienté, nous pouvons considérer le fibré des m -repères orthonormés

$$\widetilde{\text{rep}}_m(\xi) : \widetilde{\text{rep}}_m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E \widetilde{\text{rep}}_m(\xi) \xrightarrow{\pi} B,$$

où

$$E \widetilde{\text{prin}}(\xi) = \{(b, V), b \in B \text{ et } V \text{ est un } m\text{-repère orthonormé de } E_b\xi\}.$$

Dans ces conditions, lorsque $m = n$ nous avons un $SO(n)$ -fibré principal associé à ξ

$$\widetilde{\text{prin}}(\xi) : SO(n) \longrightarrow E \widetilde{\text{prin}}(\xi) \longrightarrow B.$$

Et on a le résultat suivant.

Proposition 1.5.5. *Soit $\xi : \mathbb{R}^m \longrightarrow E\xi \longrightarrow B$ un fibré vectoriel de rang m , muni d'une métrique euclidienne. Si B est un CW-complexe simplement connexe, alors le $SO(m)$ -fibré principal*

$$\widetilde{\text{prin}}(\xi) : SO(m) \longrightarrow E \widetilde{\text{prin}}(\xi) \longrightarrow B,$$

est la restriction du $GL(m)$ -fibré principal

$$\text{prin}(\xi) : GL(m) \longrightarrow E \text{prin}(\xi) \longrightarrow B.$$

Démonstration. Ce résultat vient de [17, Corollaire 2.4, p.75] en remarquant que

$$\frac{GL(m)}{SO(m)} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

□

Le résultat qui vient est important pour la suite de notre travail.

Proposition 1.5.6. *Le $SO(m)$ -fibré principal universel*

$$\text{prin}_0 : SO(m) \longrightarrow ESO(m) \xrightarrow{\pi_0} BSO(m),$$

est isomorphe au $SO(m)$ -fibré principal associé au fibré canonique γ^m ,

$$\text{prin}(\gamma^m) : SO(m) \longrightarrow E\text{prin}(\gamma^m) \xrightarrow{\pi_{\text{prin}(\gamma^m)}} BSO(m),$$

où

$$E\text{prin}(\gamma^m) = \{(W, w) \in BSO(m) \times ESO(m) \mid w \in W\}$$

et pour $(W, w) \in E\text{prin}(\gamma^m)$ on a

$$\pi_{\text{prin}_0(\gamma^m)}(W, w) = W.$$

Démonstration. Considérons l'application $\psi : E\text{prin}(\gamma^m) \longrightarrow ESO(m)$ définie par $\psi(W, w) = w$. Cette application est $SO(m)$ -équivariante, en effet pour $g \in SO(m)$ et $(W, w) \in E\text{prin}(\gamma^m)$ nous avons

$$\psi((W, w)g) = \psi(W, wg) = wg.$$

D'autre part le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E\text{prin}(\gamma^m) & \xrightarrow{\psi} & ESO(m) \\ & \searrow \pi_{\text{prin}_0(\gamma^m)} & \swarrow \pi_0 \\ & BSO(m) & \end{array}$$

Par conséquent ψ est morphisme entre les $SO(m)$ -fibrés principaux prin et prin_0 . La conclusion vient de la proposition 1.4.6. □

Nous allons clôturer cette partie par un résultat important dans la suite de notre travail. Plus précisément ce résultat sera utilisé pour la preuve de lemme 3.2.4 et lemme 3.2.5 qui sont des résultats techniques pour les principaux résultats de cette thèse.

1.6. Classes de Pontryagin et classe d'Euler du fibré des repères associé à un fibré vectoriel 21

Proposition 1.5.7. *Soit $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E\xi \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang n , avec $n \geq 0$. Soit $f : X' \longrightarrow X$ une application continue. Si $f^*\xi$ est le produit fibré de ξ le long $f^*\xi$, alors pour $r \geq 0$, le fibré $\text{rep}_r(f^*\xi)$ des r -repères associé à $f^*\xi$ est le produit fibré du fibré $\text{rep}_r(\xi)$ des r -repères associé à ξ le long de f .*

Démonstration. Pour la preuve nous suggérons [29, p.52]. □

1.6 Classes de Pontryagin et classe d'Euler du fibré des repères associé à un fibré vectoriel

On commence cette section avec la construction de deux applications qui seront importantes dans la suite. Considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty &\longrightarrow \mathbb{R}^\infty \\ ((x_0, \dots), (y_0, \dots)) &\mapsto (x_0, y_0, \dots), \end{aligned}$$

et observons que si $U \subset \mathbb{R}^\infty$ et $V \subset \mathbb{R}^\infty$ sont des sous espaces de dimension m et k respectivement, l'image de $U \times V \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ est un sous espace $W \subset \mathbb{R}^\infty$ de dimension $m + k$. Ainsi l'isomorphisme l permet de définir un homéomorphisme entre $G_{m+k}(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty)$ et $G_{m+k}(\mathbb{R}^\infty)$. La classe d'homotopie de cet homéomorphisme ne dépend pas du choix de l'isomorphisme l (voir [23, p 186] pour plus de détails). Nous avons donc une application induite

$$\begin{aligned} Bi_{m,k} : BSO(m) \times BSO(k) &\longrightarrow BSO(m+k) \\ (U, V) &\mapsto i(U, V). \end{aligned}$$

De même, en utilisant l'isomorphisme entre $\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^\infty$ on définit une application entre $BSO(m)$ et $BSO(m+1)$ en envoyant un m -plan X sur le $m+1$ -plan $X \oplus \mathbb{R}$ (voir [23, p 186] pour plus de détails). Plus précisément nous avons l'application

$$\begin{aligned} Bi_m : BSO(m) &\longrightarrow BSO(m+1) \\ X &\mapsto X \oplus \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le théorème qui suit est un résultat clé pour la suite.

Théorème 1.6.1. [24, Théorème 7.1] *Il existe des classes uniques p_i dans $H^{4i}(BSO(m), \mathbb{Q})$ appelées classes de Pontryagin universelles et une unique classe e_m dans $H^m(BSO(m), \mathbb{Q})$ appelée classe d'Euler universelle telle que :*

1. $p_0 = 1, p_i = 0$ si $i > [\frac{m}{2}]$ et $e_m = 0$ si m est impair et $e_m^2 = p_l$ si $m = 2l$,
2. $(Bi_m)^*(p_i) = p_i$ et $(Bi_m)^*(e_m) = 0$,
3. $(Bi_{m,k})^*(p_i) = \sum_{r+t=i} p_r \otimes p_s$,
 $(Bi_{m,k})^*(e_{m+k}) = e_m \otimes e_k$.

En plus la cohomologie rationnelle de $BSO(m)$ est l'algèbre polynomiale suivante :

$$\begin{cases} H^*(BSO(m), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_l] & \text{si } m = 2l + 1, \\ H^*(BSO(m), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{l-1}, e_{2l}] & \text{si } m = 2l. \end{cases}$$

A présent on définit les classes de Pontryagin et d'Euler d'un fibré vectoriel. La référence principale est [25].

Définition 1.6.2. Soient $\xi = (E, p, B)$ un fibré vectoriel orienté de rang m et

$$f: B \longrightarrow BSO(m)$$

sa classifiante. Alors :

1. la i -ème classe de Pontryagin rationnelle de ξ est la classe de cohomologie

$$p_i(\xi) = f^*p_i \in H^{4i}(B, \mathbb{Q});$$

2. la classe d'Euler rationnelle de ξ est la classe de cohomologie

$$e(\xi) = f^*e_m \in H^m(B, \mathbb{Q}).$$

Les classes de Pontryagin et d'Euler doivent satisfaire la condition suivante. Si $(\psi, \bar{\psi}): \xi \longrightarrow \xi'$ est un morphisme des fibrés vectoriels on a

$$\psi^*p_i(\xi') = p_i(\xi) \text{ et } \psi^*e(\xi') = e(\xi).$$

Définissons les classes de Pontryagin et la classe d'Euler du fibré principal.

Définition 1.6.3. Soient $\mathcal{P} = (E, p, B)$ un $SO(m)$ -fibré principal et

$$f: B \longrightarrow BSO(m)$$

sa classifiante. Alors :

1. la i -eme classe de Pontryagin rationnelle de $\mathcal{P}$ est la classe de cohomologie

$$p_i(\mathcal{P}) = f^* p_i \in H^{4i}(B, \mathbb{Q});$$

2. la classe d'Euler rationnelle de $\mathcal{P}$ est la classe de cohomologie

$$e(\mathcal{P}) = f^* e_m \in H^m(B, \mathbb{Q}).$$

Remarque 1.6.4. Si $\xi = (E, p, B)$ un fibré vectoriel orienté de rang m et

$$f: B \longrightarrow BSO(m)$$

sa classifiante. D'après la proposition 1.5.7 le $SO(m)$ -fibré principal associé à ξ

$$\text{prin}(\xi) : SO(m) \longrightarrow E \text{prin}(\xi) \longrightarrow B$$

est aussi classifié par f . Dès lors on a

$$p_i(\text{prin}(\xi)) = p_i(\xi) \text{ et } e(\text{prin}(\xi)) = e(\xi).$$

Notation 1.6.5. Dans la suite les classes de Pontryagin et la classe d'Euler de $\text{prin}(\xi)$ seront notées respectivement $p_i(\xi)$ et $e(\xi)$.

1.7 Espace des fonctions

Dans cette section on rappelle quelques notions de base sur l'espace des fonctions continues. Ces notions seront utilisées dans le chapitre 2 et le chapitre 5. Les références sont [14, p.529-532], [17, p.4-5]. On commence avec la définition suivante.

Définition 1.7.1. Considérons X et Y deux espaces topologiques. On note $\text{hom}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y . Pour toute partie compacte K de X et tout ouvert U de Y on définit le sous-ensemble de $\text{hom}(X, Y)$ suivant

$$W(K, U) := \{f \in \text{hom}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

La famille $\{W(K, U)\}_{K, U}$ engendre une topologie sur $\text{hom}(X, Y)$ qu'on appelle topologie compacte-ouverte.

Maintenant on définit l'espace des fonctions.

Définition 1.7.2. Soient X et Y deux espaces topologiques. L'espace des fonctions de X vers Y , noté $\text{Map}(X, Y)$, est $\text{hom}(X, Y)$ muni de la topologie compacte-ouverte.

L'espace des fonctions a les propriétés suivantes.

Proposition 1.7.3. [6, Corollaire 3.9] Soient X, Y, X' et Y' des espaces topologiques séparés. Si X est homotope à X' et Y homotope à Y' alors $\text{Map}(X, Y)$ est homotope à $\text{Map}(X', Y')$. C'est-à-dire

$$X \simeq X' \text{ et } Y \simeq Y' \Rightarrow \text{Map}(X, Y) \simeq \text{Map}(X', Y').$$

Proposition 1.7.4. [6, Proposition 3.6] Si X et $Y_1 \cdots Y_n$ sont des espaces topologiques séparés, on a un homéomorphisme entre $\text{Map}\left(X, \prod_{i=1}^n Y_i\right)$ et $\prod_{i=1}^n \text{Map}(X, Y_i)$. C'est-à-dire

$$\text{Map}\left(X, \prod_{i=1}^n Y_i\right) \cong \prod_{i=1}^n \text{Map}(X, Y_i).$$

CHAPITRE 2

Homotopie rationnelle et espace des sections

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est de rappeler les outils de base de la théorie de l'homotopie rationnelle, qui seront utilisés dans la suite de cette thèse. Nous expliquerons entre autre le modèle du fibré dont la fibre est un espace homogène (section 2.6), ceci va nous permettre de construire un modèle d'adgc du fibré des repères dans la section 2.8. Nous terminerons ce chapitre par une note sur l'homotopie rationnelle de l'espace des sections d'un fibré (section 2.9). Nous rappellerons entre autre la rationalisation de l'espace des sections, puis nous allons rappeler le modèle rationnel introduit d'abord par A. Haefliger dans [12], et plus tard par E. H. Brown, R. H. Szczarba dans [5] et U. Buijs, A. Murillo dans [7]. Ces résultats seront utilisés pour la preuve des principaux résultats de cette thèse (voir le chapitre 5).

Plan du chapitre

- Dans la section 2.2 on rappelle les définitions et résultats de base de la théorie de l'homotopie rationnelle. On parlera entre autres du type d'homotopie rationnelle et de modèle de Sullivan pour les espaces simplement connexes. On finira cette section par un exemple classique qui sera utile dans la suite.
- Dans la section 2.3 on rappellera la construction du modèle de Sul-

livan relatif d'un fibré. On commencera avec la définition d'algèbre relative de Sullivan.

- Dans la section 2.4 on rappellera la construction du modèle d'un fibré produit fibré.
- Dans la section 2.5 on rappellera la construction du modèle de fibré de Borel dont la fibre est un espace homogène.
- Dans la section 2.6 on construira un modèle explicite du fibré dont la fibre est un espace homogène.
- Dans la section 2.7 on rappellera le modèle rationnel de $BSO(n)$ et de l'application classifiante du fibré vectoriel.
- Dans la section 2.8 on construira un modèle d'adgc du fibré des repères associé à un fibré vectoriel. Les résultats obtenus dans cette section sont parmi les nouveaux résultats de cette thèse.
- Dans la section 2.9 on rappellera la construction du modèle de Sullivan de l'espace des sections. On commencera avec la rationalisation de l'espace des sections et on terminera le chapitre avec un exemple.

2.2 Théorie de l'homotopie rationnelle

Dans cette section on rappelle les notions de base de l'homotopie rationnelle. Les principales références sont [8], [9, chapitre 2].

Définition 2.2.1. *Un espace X simplement connexe (c'est-à-dire connexe par arc et tel que $\pi_1(X, x_0) = 0$) est dit rationnel si pour tout entier $n \geq 2$, $\pi_n(X)$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Une rationalisation d'un espace X simplement connexe est la donnée d'un espace rationnel $X_{\mathbb{Q}}$ simplement connexe et d'une application $\Phi: X \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$ qui induit un isomorphisme*

$$\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \pi_*(X_{\mathbb{Q}}).$$

Théorème 2.2.2. *Soit X un espace simplement connexe. Alors, il existe un espace rationnel $X_{\mathbb{Q}}$ et une rationalisation $\Phi: X \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$. De plus, si $Y_{\mathbb{Q}}$ est un espace rationnel simplement connexe, alors pour toute application*

continue $f: X \longrightarrow Y_{\mathbb{Q}}$ il existe une application continue $g: X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_{\mathbb{Q}}$, (unique à l'homotopie près), telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y_{\mathbb{Q}} \\ & \searrow \Phi & \nearrow g \\ & X_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

Notation 2.2.3. Si $f: X \longrightarrow Y$ est une application continue entre deux espaces simplement connexes, le théorème 2.2.2 nous montre qu'il existe une unique application à homotopie près entre les rationalisés. Elle sera notée

$$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_{\mathbb{Q}}.$$

Théorème 2.2.4 (Whitehead-Serre). Si $f: X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces simplement connexes, alors les affirmations suivantes sont équivalentes

- $\pi_*(f) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme ;
- $H_*(f, \mathbb{Q})$ est un isomorphisme ;
- $H^*(f, \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

Dans ce cas on dit que f est une *équivalence d'homotopie rationnelle*.

Définition 2.2.5. Deux espaces simplement connexes X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle s'il existe un zigzag

$$X \xleftarrow{f_0} Z_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xleftarrow{f_k} Z_k \xrightarrow{f_{k+1}} Y,$$

où $Z_0, \dots, Z_k$ sont des espaces simplement connexes et les applications $f_0, \dots, f_k$ sont des équivalences d'homotopie rationnelle. On note alors

$$X \simeq_{\mathbb{Q}} Y.$$

Proposition 2.2.6. Deux CW-complexes simplement connexes X et Y ont le même type de l'homotopie rationnelle si et seulement si leurs rationalisations sont homotopiquement équivalentes,

$$X_{\mathbb{Q}} \simeq Y_{\mathbb{Q}}.$$

2.2.1 Modèle de Sullivan pour les objets algébriques

Dans cette partie on rappelle la notion du modèle de Sullivan qui est un outil indispensable pour la théorie de l'homotopie rationnelle.

Définition 2.2.7. Une algèbre différentielle graduée commutative (*adgc*) (A, d) est la donnée d'une algèbre graduée $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$ sur le corps $\mathbb{Q}$, et d'applications linéaires $d : A^n \rightarrow A^{n+1}$ vérifiant les axiomes suivants :

– commutativité :

$$a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a,$$

– règle de Leibnitz

$$d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{|a|} \cdot d(b),$$

pour tout $a, b \in A$. Ici $|a|$ est le degré de a ($a \in A^n$ si et seulement si $|a| = n$).

– $d \circ d = 0$. On dit que d est la différentielle.

Définition 2.2.8. Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux *adgc*. Un morphisme d'*adgc* $f : A \rightarrow B$ est la donnée d'une famille d'applications $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n : A^n \rightarrow B^n$, telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{d_A} & A^{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ B^n & \xrightarrow{d_B} & B^{n+1} \end{array}$$

commute pour tout n . Un morphisme d'*adgc* est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme en cohomologie.

Définition 2.2.9. Une algèbre commutative libre au-dessus d'un espace vectoriel V , que l'on note ΛV , est le quotient

$$\Lambda V = \frac{TV}{I},$$

où $TV = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$ est l'algèbre tensorielle et $I \subset TV$ est l'idéal engendré

par les éléments de la forme $a \cdot b - (-1)^{|a||b|} b \cdot a$ pour $a, b \in V$.

Définition 2.2.10. Une algèbre de Sullivan est une adgc de la forme $(\Lambda V, d)$ telle que V admet une base bien ordonnée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, où I est un ensemble bien ordonné, tel que $d(x_\alpha) \in \Lambda(x_\beta)_{\beta < \alpha}$. Une algèbre de Sullivan est dite minimale si $d(V) \subset \Lambda^{\geq 2}V$.

Définition 2.2.11. Un modèle de Sullivan d'une adgc (A, d) est la donnée d'une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ et d'un quasi-isomorphisme d'adgc

$$\psi: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\cong} (A, d).$$

Si $(\Lambda V, d)$ est minimal on dit que c'est un modèle minimal de A .

2.2.2 Modèle de Sullivan pour les espaces

La correspondance entre la topologie et l'algèbre se fait grâce à une paire de foncteurs. Le foncteur des PL-formes (PL= "piecewise linear") noté A_{PL} qui va de la catégorie des espaces topologiques, noté **Top**, vers la catégorie des adgc notée **ADGC**, et le foncteur réalisation noté, $|\cdot|$, qui part de **ADGC** vers **Top**.

$$\begin{aligned} A_{PL} : \mathbf{Top} &\rightleftarrows \mathbf{ADGC} : |\cdot| \\ X &\mapsto A_{PL}(X). \end{aligned}$$

La construction de ces foncteurs est due à D. Sullivan, elle se trouve dans [8]. Une propriété importante du foncteur A_{PL} est que pour chaque espace simplement connexe X on a un isomorphisme entre la cohomologie rationnelle de X et celle de $A_{PL}(X)$:

$$H^*(A_{PL}(X), \mathbb{Q}) \cong H^*(X, \mathbb{Q}).$$

Donc $A_{PL}(X)$ encode complètement le type d'homotopie rationnelle de X . Toute adgc faiblement équivalente à $A_{PL}(X)$ est appelée modèle de X .

Définition 2.2.12. Le modèle de Sullivan de $A_{PL}(X)$ est appelé modèle de Sullivan de l'espace X , pour X espace simplement connexe. Il est noté m_X ,

$$m_X: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(X).$$

Le théorème suivant est fondamental en homotopie rationnelle.

Théorème 2.2.13. *Soient X et Y deux espaces simplement connexes dont la cohomologie de chacun est de type finie. Alors X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle si et seulement si $A_{PL}(X)$ et $A_{PL}(Y)$ sont faiblement équivalents. C'est-à-dire,*

$$X \simeq_{\mathbb{Q}} Y \iff m_X \simeq m_Y.$$

Exemple [Modèle des spheres S^n].

La cohomologie rationnelle de S^n est une algèbre extérieure à un générateur en degré n . Si ω dénote le cocycle de $A_{PL}(S^n)$ représentant la classe fondamentale en degré n , on a un morphisme d'adgc

$$\begin{aligned} \psi: (\Lambda(x), 0) &\longrightarrow A_{PL}(S^n) \\ x &\mapsto \omega. \end{aligned}$$

Si n est un entier impair, $\Lambda(x)$ est une algèbre extérieure à un seul générateur et par conséquent ψ un quasi-isomorphisme.

Si n est un entier pair, $\Lambda(x)$ a pour base $1, x, x^2, \dots$ et ψ n'est pas un quasi-isomorphisme. Cependant, pour des raisons de degré, ω^2 est un cobord. C'est-à-dire

$$\omega^2 = d\alpha,$$

pour un certain α en degré $2n - 1$.

On ajoute donc un générateur y de degré $2n - 1$ à $\Lambda(x)$ avec $dy = x^2$, et on définit

$$\psi: (\Lambda(x, y), d) \longrightarrow A_{PL}(S^n)$$

par $\psi(x) = \omega$ et $\psi(y) = \alpha$.

Un calcul simple montre que $1, x$ est une base pour $H^*((\Lambda(x, y), d), \mathbb{Q})$, et par conséquent ψ est un quasi-isomorphisme. Finalement, pour n pair, un modèle de S^n est $(\Lambda(x, y), d)$.

2.3 Modèle d'un fibré

Dans cette section on rappelle la construction du modèle relatif de Sullivan d'un fibré. On commence par la définition suivante.

Définition 2.3.1. *Une algèbre relative de Sullivan est une adgc de la forme $(B \otimes \Lambda V, D)$, où*

- $B = B \otimes 1$ est une sous-adgc avec $H^0(B, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$,

- $1 \otimes V = V = \{V^p\}_{p \geq 1}$,
- $V = \cup_{k=0}^{\infty} V(k)$ où $V(0) \subset V(1) \subset \dots$ est une suite croissante de sous espaces gradués vérifiant la condition de nilpotence, c'est-à-dire

$$D : V(0) \longrightarrow B \text{ et } D : V(k) \longrightarrow B \otimes \Lambda V(k-1).$$

L'algèbre $(B \otimes \Lambda V, D)$ est dite minimale si

$$D(V) \subset B^+ \otimes \Lambda V + B \otimes \Lambda^{\geq 2} V.$$

Définition 2.3.2. Soient $\phi : (A, d_A) \longrightarrow (B, d_B)$ un morphisme d'adgc avec $H^0(A, \mathbb{Q}) = 0$. Un modèle relatif de Sullivan de ϕ est la donnée d'une algèbre relative de Sullivan $(A \otimes \Lambda V, D)$ et d'un quasi-isomorphisme

$$\theta : (A \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\simeq} (B, d_B)$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ & \searrow i & \nearrow \theta \\ & (A \otimes \Lambda V, D) & \end{array}$$

où i est l'inclusion de $A \otimes 1$ dans $A \otimes \Lambda V$.

La proposition qui suit nous garanti l'existence du modèle relatif de Sullivan.

Proposition 2.3.3. [8, Proposition 14.3] Un morphisme d'adgc

$$\phi : (A, d_A) \longrightarrow (B, d_B)$$

admet un modèle relatif de Sullivan si $H^0(A, \mathbb{Q}) = H^0(B, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ et $H^1(\phi)$ injectif.

Soit $\xi = (E, p, B)$ un fibré de fibre F . On suppose que B est simplement connexe et que E est connexe par arc. Nous allons rappeler la construction du modèle relatif de Sullivan de $p : E \longrightarrow B$. Soit $j : F \longrightarrow E$ l'inclusion de la fibre en $y_0 \in B$. En appliquant A_{PL} au digramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \{y_0\} & \longrightarrow & B, \end{array}$$

on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(F) & \xleftarrow{A_{PL}(j)} & A_{PL}(E) \\ \uparrow & & \uparrow A_{PL}(p) \\ \mathbb{Q} & \xleftarrow{\epsilon} & A_{PL}(B) \end{array}$$

où ϵ est l'augmentation correspondant à y_0 .

Comme B est simplement connexe $H^1(A_{PL}(p)) = 0$. D'après la proposition 2.3.3, p admet un modèle relatif de Sullivan de la forme :

$$m : (A_{PL}(B) \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(E).$$

L'augmentation $\epsilon : A_{PL}(B) \rightarrow \mathbb{Q}$ définit une algèbre de Sullivan quotient

$$(\Lambda V, \vec{d}) = \mathbb{Q} \otimes_{A_{PL}(B)} (A_{PL}(B) \otimes \Lambda V, d).$$

Ainsi, on forme le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(F) & \xleftarrow{A_{PL}(j)} & A_{PL}(E) & \xleftarrow{\quad} & A_{PL}(B) \\ \bar{m} \uparrow & & \simeq \uparrow A_{PL}(p) & & \simeq \uparrow m \\ (\Lambda V, \vec{d}) & \xleftarrow{\epsilon \cdot id} & (A \otimes \Lambda V, d) & \xleftarrow{\quad} & (A, d_A), \end{array}$$

où (A, d_A) est un modèle de B .

Théorème 2.3.4. [8, Théorème 15.3]. *Si un des espaces gradués $H_*(B, \mathbb{Q})$, $H_*(F, \mathbb{Q})$ est de type fini, alors*

$$\bar{m} : (\Lambda V, \vec{d}) \longrightarrow A_{PL}(F)$$

est un quasi-isomorphisme.

2.4 Modèle du produit fibré

Dans cette courte section on va rappeler le modèle relatif de Sullivan du produit fibré (voir la section 1.3.1 pour la définition du produit fibré).

Tout d'abord on fixe un fibré $\xi = (E, p, B)$ de fibre F , on suppose que B et F sont simplement connexes. Considérons une application continue $f: X \rightarrow B$ et désignons $p': E' \rightarrow X$ le produit fibré de p le long de f . Si

$$(A \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(E)$$

est un modèle relatif de Sullivan de $A_{PL}(p)$ et $\Phi_f: (A, d) \rightarrow (C, d)$ un modèle de f , alors on a le théorème suivant.

Théorème 2.4.1. *[9, Théorème 2.70] Le modèle relatif de Sullivan de $A_{PL}(p')$ est de la forme*

$$(C \otimes \Lambda W, D) \longrightarrow A_{PL}(E'),$$

où D est la différentielle définie par

$$D(w) = (\Phi_f \otimes 1) d(w)$$

avec $\Phi_f \otimes 1$ la multiplication naturelle

$$\Phi_f \otimes 1: A \otimes \Lambda W \longrightarrow C \otimes \Lambda W.$$

2.5 Modèle du fibré de Borel

Dans cette section on construit un modèle du fibré de Borel, qui a été défini dans la section 1.4.4, dont la fibre est un espace homogène (c'est-à-dire le quotient des groupes de Lie). Cette construction sera très utile dans le chapitre 4.

Soient G et H deux groupes de Lie compacts et simplement connexes. On considère K , un sous groupe fermé de H et $\mu: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie. L'espace homogène $\frac{H}{K}$ admet une action du groupe G définie par :

$$g.hK = (\mu(g)h)K.$$

Cette action définit le fibré de Borel

$$\pi: EG \times_G^\mu \frac{H}{K} \longrightarrow BG.$$

L'inclusion de K dans H , que nous notons par ν , et le morphisme μ induisent respectivement des applications entre les espaces classifiants

$$B\nu: BK \longrightarrow BH, \text{ et } B\mu: BG \longrightarrow BH.$$

Comme G, H et K sont simplement connexes alors les espaces classifiant BG, BH et BK le sont aussi, et d'après [4, Théorème 19.1] leurs co-homologies rationnelles $H^*(BG, \mathbb{Q}), H^*(BH, \mathbb{Q})$ et $H^*(BK, \mathbb{Q})$ sont des algèbres libres qu'on notera $\Lambda V_G, \Lambda V_H$ et ΛV_K . Donc $(\Lambda V_G, 0), (\Lambda V_H, 0)$ et $(\Lambda V_K, 0)$ sont les modèles minimaux de BG, BH et BK respectivement. On notera

$$B\mu^* : (\Lambda V_H, 0) \longrightarrow (\Lambda V_G, 0), \text{ et } B\nu^* : (\Lambda V_H, 0) \longrightarrow (\Lambda V_K, 0),$$

les modèles de $B\mu$ et $B\nu$ respectivement. On note par sV_H la suspension de l'espace vectoriel gradué V_H défini par $(sV_H)^i = V_H^{i+1}$. On définit une adgc $(\Lambda V_G \otimes \Lambda V_K \otimes \Lambda sV_H, d)$, où d est définie par

$$\begin{cases} dx = 0 \text{ si } x \in V_G \oplus V_K, \\ d(sv) = B\mu^*(v) - B\nu^*(v) \text{ si } sv \in sV_H. \end{cases}$$

On a ainsi le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. [22, Proposition 5.1] Avec les notations ci-dessus,

$$(\Lambda V_G, 0) \hookrightarrow (\Lambda V_G \otimes \Lambda V_K \otimes \Lambda sV_H, d)$$

est un modèle relatif de Sullivan du fibré de Borel

$$\pi : EG \times_G^\mu \frac{H}{K} \longrightarrow BG.$$

2.6 Modèle du fibré associé à un G -fibré principal avec fibre espace homogène

Tout d'abord, notons que la notion du fibré associé a été rappelée dans la section 1.4.3. Dans cette section on construit le modèle du fibré associé à un G -fibré principal lorsque la fibre est un espace homogène. Considérons le fibré

$$P \times_G^\mu \frac{H}{K} \longrightarrow B$$

associé au G -fibré principal $P \rightarrow B$. D'après la proposition 1.4.12, il existe $f : B \rightarrow BG$ tel que $P \times_G^\mu \frac{H}{K} \longrightarrow B$ soit le produit fibré de $\pi : EG \times_G^\mu \frac{H}{K} \rightarrow BG$ le long de f . Ce qui se traduit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P \times_G^\mu \frac{H}{K} & \xrightarrow{\bar{f}} & EG \times_G^\mu \frac{H}{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

Si

$$\psi_f : (\Lambda V_G, 0) \longrightarrow (A, d_A)$$

est un modèle de f , le théorème 2.4.1 nous permet de déduire le résultat suivant :

Corollaire 2.6.1. *Le fibré $P \times_G^\mu \frac{H}{K} \longrightarrow B$ admet un modèle de la forme*

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V_K \otimes \Lambda sV_H, D),$$

avec

$$\begin{cases} D|_A = d_A \\ D|_{V_K} = 0 \\ D(sv) = \psi_f((B\mu)^*(v)) - B\nu^*(v) \text{ si } sv \in sV. \end{cases}$$

2.7 Modèle de $BSO(n)$ et de l'application classifiante du fibré vectoriel

2.7.1 Modèle de $BSO(n)$

Rappelons que d'après le théorème 1.6.1 la cohomologie rationnelle de la grassmannienne orientée $BSO(n)$ est l'algèbre

- $H^*(BSO(n), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{\frac{n-1}{2}}]$ si n est impair,
- $H^*(BSO(n), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{\frac{n}{2}-1}, e_n]$ si n est pair.

où $\deg(p_i) = 4i$ et $\deg(e_n) = n$. Donc son modèle minimal est :

- $(\Lambda(p_1, \dots, p_{\frac{n-1}{2}}), 0)$, si n est impair,
- $(\Lambda(p_1, \dots, p_{\frac{n}{2}-1}, e_n), 0)$, si n est pair.

La forme de ce modèle dépend donc de la parité de n . Pour obtenir une formulation uniforme de ce modèle indépendante de la parité de n , nous introduisons la convention suivante dite *convention du générateur optionnel*.

Si n est un entier naturel nous désignerons par e_n :

- un générateur de degré n , si n est pair,
- aucun générateur, si n est impair.

Par exemple, un modèle de Sullivan de $BSO(n)$ est donné par

$$\left(\Lambda \left(\{p_t\} : t \text{ est un entier compris entre } 1 \text{ et } \frac{n-1}{2}, e_n \right), 0 \right)$$

avec $\deg p_t = 4t$. Dans ce modèle, par convention, le générateur e_n n'apparaît que si n est pair. Ainsi un modèle de $BSO(3)$ est donné par $(\Lambda(p_1), 0)$ avec $\deg(p_1) = 4$. Tandis qu'un modèle de $BSO(4)$ est $(\Lambda(p_1, e_4), 0)$ avec $\deg(p_1) = \deg e_4 = 4$.

De manière analogue nous désignerons par $\bar{e}_n$:

- un générateur de degré n , si n est impair,
- aucun générateur, si n est pair.

Ainsi par exemple, un modèle de $SO(n)$ est donné par

$$\left(\Lambda \left(\{x_t\} : t \text{ est un entier compris entre } 1 \text{ et } \frac{n-1}{2}, \bar{e}_{n-1} \right), 0 \right)$$

avec $\deg(x_t) = 4t - 1$. Nous dirons que e_n et $\bar{e}_n$ sont des *générateurs optionnels*, car ils n'apparaissent que pour une certaine parité de n .

2.7.2 Modèle de l'application de classifiante du fibré vectoriel

Soit ξ un fibré vectoriel orienté de rang n au-dessus d'un espace simplement connexe X et

$$f: X \longrightarrow BSO(n)$$

son application classifiante. Notre objectif dans cette section est de rappeler un modèle rationnel de f .

Considérons

$$\left(\Lambda \left(\{p_t\} : t \text{ est un entier compris entre } 1 \text{ et } \frac{n-1}{2}, e_n \right), 0 \right)$$

le modèle minimal de $BSO(n)$ construit dans la section 2.7.1. Supposons que

1. (A, d_A) est un modèle d'adgc de X ,
2. $p_t(\xi) \in A^{4t} \cap \ker d_A$ sont des représentants des classes de Pontrayagin de ξ ,
3. $e(\xi) \in A^n \cap \ker d_A$ est un représentant de la classe d'Euler de ξ (si n est pair).

Alors d'après [8, bas de la page 217] un modèle d'adgc de f est donné par

$$\psi_f: (\Lambda(\{p_t\}, e_n), 0) \longrightarrow (A, d_A)$$

avec

$$\psi_f(p_t) = p_t(\xi) \text{ et } \psi_f(e_n) = e(\xi) \text{ si } n \text{ est pair.}$$

2.8 Modèle rationnel du fibré des repères

Dans cette section nous allons utiliser le corollaire 2.6.1 pour construire un modèle relatif de Sullivan du fibré des m -repères associé à un fibré vectoriel de rang $m + k$ (voir la section 1.5.2 pour la définition). De cette construction nous allons déduire un résultat classique qui est celui du modèle minimal de la variété de Stiefel (corollaire 2.8.5). Ces résultats seront utilisés dans le chapitre 5 pour étudier le type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions.

Soit $\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \longrightarrow Y$ un fibré vectoriel de rang $m + k$ avec Y simplement connexe. Considérons

$$\text{rep}_m(\eta) : \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow E\text{rep}_m(\eta) \longrightarrow Y,$$

le fibré des m -repères qui lui est associé. Notre objectif dans cette section est de construire un modèle rationnel de $\text{rep}_m(\eta)$.

Soit (A, d_A) un modèle d'adgc de Y . Considérons $(\Lambda(\{x_i\}, \bar{e}_{m+k-1}), 0)$ et $(\Lambda(\{b_j\}, e_k), 0)$ les modèles de Sullivan minimaux de $SO(m+k)$ et $BSO(k)$ respectivement et où les générateurs sont définis comme suit :

1. x_i pour $1 \leq i \leq \frac{m+k-1}{2}$ avec i entier et $|x_i| = 4i - 1$,
2. b_j pour $1 \leq j \leq \frac{k-1}{2}$ avec j entier et $|b_j| = 4j$,
3. si k est pair un générateur e_k de degré k ,
4. si $m+k$ est pair un générateur $\bar{e}_{m+k-1}$ de degré $m+k-1$.

Nous allons construire un modèle relatif de Sullivan avec ces générateurs. Par convention si un générateur n'apparaît pas dans cette liste, on considère dans les formules ci-dessous que ce générateur est nul. Entre autres, lorsque k est un entier impair il n'y a pas de générateur e_k et lorsque $m+k$ est impair il n'y a pas de générateur $\bar{e}_{m+k-1}$. De même si $i > \frac{k-1}{2}$ alors par convention $b_j = 0$ dans les formules définissant D ci-dessous.

Soient $p_i(\eta)$ et $e(\eta)$ dans $A \cap \ker d_A$ des représentants des classes de Pontryagin et d'Euler de η respectivement. Définissons un modèle relatif de Sullivan

$$(A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D), \quad (2.8.1)$$

où la différentielle D est définie par :

- $D|_A = d_A$,
- $Dx_i = p_i(\eta) - b_i$ si $2i \neq k$ et $Dx_i = p_i(\eta) - e_k^2$ si $2i = k$,
- $Db_j = 0$,
- $De_k = 0$,
- $D\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta)$.

Il faut noter que les générateurs e_k et $\bar{e}_{m+k-1}$ sont optionnels et n'apparaissent que sous certaines conditions de parité de k et $m+k$.

Théorème 2.8.1. *Soit un fibré vectoriel orienté η de base Y et de rang $m+k$ avec $k \geq 1$. Supposons Y simplement connexe et soit (A, d_A) un modèle d'adgc de Y . Alors un modèle d'adgc du fibré des m -repères associés à η*

$$\text{rep}_m(\eta) : \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow E \text{rep}_m(\eta) \longrightarrow Y,$$

est donné par

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D) \quad (2.8.2)$$

construit en (2.8.1) et où les générateurs e_k et $\bar{e}_{m+k-1}$ n'apparaissent que pour certaines parités de m et $m+k$.

Dans le tableau ci-dessous nous donnons une description complète de

$$(A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D)$$

suivant les parités de m et de k

	$m=2l$	$m=2l+1$
$k=2s$	• $A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, e_k, \bar{e}_{m+k-1})$, • $1 \leq i \leq l + s - 1$ et $1 \leq j \leq s - 1$, • $D _A = d_A$, • $Dx_i = p_i(\eta) - b_i$ si $i \neq s$ et $Dx_s = p_s(\eta) - e_k^2$, • $Db_j = De_k = 0$, • $D\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta)$.	• $A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, e_k)$, • $1 \leq i \leq l + s$ et $1 \leq j \leq s - 1$, • $D _A = d_A$, • $Dx_i = p_i(\eta) - b_i$ si $i \neq s$ et $Dx_s = p_s(\eta) - e_k^2$, • $Db_j = De_k = 0$,
$k=2s+1$	• $A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\})$ • $1 \leq i \leq l + s$ et $1 \leq j \leq s$, • $D _A = d_A$, • $Dx_i = p_i(\eta) - b_i$ • $Db_j = 0$,	• $A \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, \bar{e}_{m+k-1})$, • $1 \leq i \leq l + s$ et $1 \leq j \leq s$, • $D _A = d_A$, • $Dx_i = p_i(\eta) - b_i$, • $Db_j = 0$, • $D\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta)$.

Remarque 2.8.2. le théorème 2.8.1 est utile en ce sens qu'il fournit un modèle de $E\text{rep}_m(\eta)$, qui n'est rien d'autre que la fibre du fibré Stiefel (ξ, η) .

Pour la preuve de ce théorème nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.8.3. On a un isomorphisme de fibré au-dessus de Y entre $\text{rep}_m(\eta)$ et le fibré

$$E\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow E\text{prin}(\eta) \times_{SO(m+k)} E\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow Y,$$

associé au $SO(m+k)$ -fibré principal

$$\text{prin}(\eta) : SO(m+k) \longrightarrow E\text{prin}(\eta) \longrightarrow Y.$$

Démonstration. Définissons une application

$$\psi : E\text{prin}(\eta) \times_{SO(m+k)} \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow E\text{rep}_m(\eta)$$

par

$$\psi([(x, v), y]) = (x, v_m),$$

où v_m est la projection de v sur ces m premières composantes. Cette application est bien définie et est continue. En plus elle admet un inverse ψ^{-1} défini par

$$\psi^{-1}(x, v) = [(x, w), y],$$

où

$$y \in p^{-1}(x) \text{ et } w = v \oplus v^\perp,$$

$v^\perp$ étant le complémentaire orthogonal de v dans $E\text{prin}(\eta)$, □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.8.1.

Démonstration du théorème 2.8.1. Tout d'abord, remarquons que le fibré

$$E\text{prin}(\eta) \times_{SO(m+k)} \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow Y$$

est le produit fibré du fibré de Borel

$$ESO(m+k) \times_{SO(m+k)} \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow BSO(m+k) \quad (2.8.3)$$

le long de

$$f : Y \longrightarrow BSO(m+k).$$

D'après le lemme 2.8.3 le fibré

$$E\text{prin}(\eta) \times_{SO(m+k)} \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow Y$$

est isomorphe à $\text{rep}_m(\eta)$. De ce fait on déduit que

$$\text{rep}_m(\eta) : E\text{rep}_m(\eta) \longrightarrow Y$$

est le produit fibré du fibré de Borel 2.8.3 le long de f . Comme $k \geq 1$, alors $\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$ est homéomorphe à $\frac{SO(m+k)}{SO(k)}$ (voir la proposition 2.8.5). En utilisant la construction de la section 2.6, avec $H = G = SO(m+k)$ et $K = SO(k)$, on trouve un modèle de p_2 de la forme

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V_K \otimes \Lambda sV_H, D),$$

où

$$\begin{aligned} (\Lambda V_K, 0) &\xrightarrow{\cong} A_{PL}(BSO(k)), \\ (\Lambda sV_H, 0) &\xrightarrow{\cong} A_{PL}(SO(m+k)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} D|_A = d_A \\ D|_{V_K} = 0 \\ D(sv) = \psi_f((B\mu)^*(v)) - B\nu^*(v) \text{ si } sv \in sV. \end{cases}$$

L'application ψ_f est le modèle de f , $B\mu^*$ est le modèle de

$$B\mu : BSO(m+k) \longrightarrow BSO(m+k),$$

et $B\nu^*$ est le modèle de

$$B\nu : BSO(k) \longrightarrow BSO(m+k).$$

Pour la suite nous allons discuter en fonction des parités de m et k .

- Si $m = 2l + 1$, $k = 2s + 1$, d'après le théorème 1.6.1,

$$\begin{aligned} H^*(BSO(m), \mathbb{Q}) &= \Lambda(b_1, \dots, b_s) \\ H^*(BSO(m+k), \mathbb{Q}) &= \Lambda(a_1, \dots, a_{l+s}, e_{m+k}) \end{aligned}$$

et les modèles de $B\mu$ et $B\nu$ sont définis par :

$$\begin{aligned} (B\mu)^*(a_i) &= a_i \\ (B\nu)^*(a_i) &= b_i. \end{aligned}$$

D'un autre côté, il faut noter que le modèle rationnel de f est complètement déterminé par les classes de Pontryagin $p_i(\eta)$ et d'Euler $e(\eta)$ de η . Explicitement, on a

$$\psi_f : (\Lambda(a_1, \dots, a_{l+s}, e_{m+k}), 0) \longrightarrow (A, d_A),$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_f(a_i) &= p_i(\eta) \\ \psi_f(e_{m+k}) &= e(\eta). \end{aligned}$$

Par conséquent, le modèle de

$$E \text{ rep}_m(\eta) \longrightarrow Y$$

est

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_{l+s}, \bar{e}_{m+k-1}, b_1, \dots, b_s), D),$$

où

$$\begin{cases} D|_A = d_A \\ Db_i = 0 \\ Dx_i = \psi_f((B\mu)^*(a_i)) - (B\nu)^*(a_i) = p_i(\eta) - b_i \\ D\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta). \end{cases}$$

Pour les autres cas, en procédant de la même manière, on trouve :

- si $m = 2l$, $k = 2s + 1$, alors on a :

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_{l+s}, b_1, \dots, b_s), D),$$

avec

$$\begin{cases} Da = d_A a \text{ si } a \in A \\ Dx_i = p_i(\eta) - b_i \\ Db_i = 0 \end{cases}$$

- si $m = 2l + 1$, $k = 2s$, alors on a :

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_{l+s}, b_1, \dots, b_{s-1}, e_k), D),$$

avec

$$\begin{cases} Da = d_A a \text{ si } a \in A \\ Dx_i = p_i(\eta) - b_i \text{ si } i \neq s \\ Dx_s = p_s(\eta) - e_k^2 \\ De_k = Db_i = 0 \end{cases}$$

- si $m = 2l$, $k = 2s$, alors on a :

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_{l+s-1}, \bar{e}_{m+k-1}, b_1, \dots, b_{s-1}, e_k), D),$$

avec

$$\begin{cases} Da = d_A a \text{ si } a \in A \\ Dx_i = p_i(\eta) - b_i \text{ si } i \neq s \\ Dx_s = p_s(\eta) - e_k^2 \\ D\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta) \\ De_k = Db_i = 0. \end{cases}$$

□

Remarque 2.8.4. *P. Marry [21] à déjà obtenu ce résultat avec une preuve plus longue.*

Dans le théorème 2.8.1 nous avons construit un modèle du fibré des m -repères associé à η . La fibre de ce fibré est pour $k \geq 1$ la variété de Stiefel

$$\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \cong \frac{SO(m+k)}{SO(k)}.$$

Comme la fibre du modèle est un modèle de la fibre, nous retrouvons à partir du théorème 2.8.1 le modèle d'adgc classique de la variété de Stiefel. En effet, la fibre du modèle (2.8.2) est

$$\left(\Lambda(\{x_i\}, \{b_j\}, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), \bar{D} \right)$$

(avec la convention que e_k et $\bar{e}_{m+k-1}$ n'apparaissent que sous certaines parités de k et $m+k$). De plus pour $j \leq \frac{k-1}{2}$ nous avons

$$\bar{D}x_j = -b_j.$$

Donc, les premiers générateurs x_i , pour $i \leq \frac{k-1}{2}$, viennent "tuer" les générateurs b_j . En conclusion nous avons le résultat classique.

Corollaire 2.8.5. *[21, Proposition 3.1] Un modèle d'adgc de la variété de Stiefel*

$$\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \cong \frac{SO(m+k)}{SO(k)}$$

est donné par

$$\left(\Lambda\left(\{x_i\}_{\frac{k}{2} \leq i \leq \frac{m+k-1}{2}}, e_k, \bar{e}_{m+k-1}\right), \bar{D} \right)$$

(où e_k et $\bar{e}_{m+k-1}$ n'apparaissent que si k et $m+k$ sont pairs respectivement) avec

1. $\bar{D}x_{\frac{k}{2}} = e_k^2$ si k est pair,
2. $\bar{D}x_i = \bar{D}e_k = \bar{D}\bar{e}_{m+k-1} = 0$ pour $i > \frac{k}{2}$.

Remarque 2.8.6. *Ce résultat montre que pour $k \geq 1$ la variété de Stiefel $\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères. Il sera utilisé dans le chapitre 5 pour l'étude de type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions.*

2.9 Homotopie rationnelle de l'espace des sections

Soit $\xi: F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré et $s: B \longrightarrow E$ une section de ξ (voir Définition 2.9.1). On suppose que B et F sont simplement connexes et B est de type fini. Notre objectif dans cette partie est de rappeler les résultats bien connus, sur l'homotopie rationnelle de l'espace des sections, qui seront utilisés dans le chapitre 5. Les références principales pour cette partie sont [7], [9, p.367-369] [12].

2.9.1 Rationalisation de l'espace des sections

Dans cette sous-section on rappelle la construction du rationalisé de l'espace des sections. On commence par la définition de section d'un fibré et de l'espace des sections.

Définition 2.9.1. *Une section de $\xi: F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une application continue*

$$s: B \longrightarrow E$$

vérifiant $ps = id$. On note $\Gamma(p)$ l'espace de toutes les sections de ξ muni de la topologie compacte-ouverte. C'est-à-dire,

$$\Gamma(\xi) = \{s: B \longrightarrow E \mid ps = id\}.$$

Si s_0 est une section de ξ on notera $\Gamma_{s_0}(\xi)$ l'espace de toutes les sections de ξ homotopes à s_0 . C'est-à-dire,

$$\Gamma_{s_0}(\xi) = \{s: B \longrightarrow E \mid s \simeq s_0 \text{ et } ps = id\}.$$

Pour la suite de cette section on aura besoin des définitions suivantes.

Définition 2.9.2. [19, Début p.398] *Un fibré ξ de fibre F simplement connexe est dit rationnel si F est un espace rationnel.*

Définition 2.9.3. [19, Définition 3.1] *Soit $\xi: F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré de fibre F simplement connexe. La rationalisation par fibre de ξ est la donnée d'un fibré rationnel $\xi': F' \longrightarrow E' \xrightarrow{p} B$ et d'un morphisme de ξ vers ξ' induisant une rationalisation sur les fibres. Le fibré ξ est appelé rationalisé par fibre de ξ .*

Théorème 2.9.4. [19, Théorème 3.2 et Théorème 6.1] *La rationalisation par fibre d'un fibré existe toujours si la fibre de ce fibré est simplement connexe et est unique à l'homotopie près.*

Notation 2.9.5. Dans la suite le rationalisé par fibre d'un fibré

$$\xi: F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

de fibre simplement connexe sera noté

$$\xi_{(\mathbb{Q})}: F_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E_{(\mathbb{Q})} \xrightarrow{p_{(\mathbb{Q})}} B.$$

Dans le résultat ci-dessous on va montrer que si le rationalisé d'un fibré est trivial alors son rationalisé par fibre est aussi trivial. Le résultat est le suivant.

Corollaire 2.9.6. Soit $\xi: F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré avec F simplement connexe. Si $\xi_{\mathbb{Q}}: F_{\mathbb{Q}} \rightarrow E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{p_{\mathbb{Q}}} B_{\mathbb{Q}}$ est trivial alors $\xi_{(\mathbb{Q})}: F_{\mathbb{Q}} \rightarrow E_{(\mathbb{Q})} \xrightarrow{p_{(\mathbb{Q})}} B$ est trivial.

Démonstration. D'après le théorème 2.9.4 la rationalisation par fibre est unique à l'homotopie près. D'autre part on obtient le fibré $\xi_{(\mathbb{Q})}$ par un produit fibré de $\xi_{\mathbb{Q}}$ le long de la rationalisation $r_{\mathbb{Q}}: B \rightarrow B_{\mathbb{Q}}$. C'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} E_{(\mathbb{Q})} & \longrightarrow & E_{\mathbb{Q}} \\ p_{(\mathbb{Q})} \downarrow & & \downarrow p_{\mathbb{Q}} \\ B & \xrightarrow{r_{\mathbb{Q}}} & B_{\mathbb{Q}}. \end{array}$$

Dès lors si $\xi_{\mathbb{Q}}$ est trivial le rationalisé par fibre $\xi_{(\mathbb{Q})}$ est trivial. □

Le résultat suivant nous donne la rationalisation de l'espace des sections.

Théorème 2.9.7. [27, Théorème 5.3] Soit $\xi = (E, p, B)$ un fibré de fibre F . On suppose que B et F sont simplement connexes et que B est de type fini. Alors pour toute section s de ξ , $\Gamma_s(\xi)$ est nilpotent et si $r: E \rightarrow E_{(\mathbb{Q})}$ est la rationalisation par fibre de ξ l'application

$$\Gamma_s(\xi) \longrightarrow \Gamma_{rs}(\xi_{(\mathbb{Q})})$$

est une rationalisation.

2.9.2 Modèle de l'espace des sections

Soit $\xi = (E, p, B)$ un fibré de fibre F . On Suppose que B et F sont simplement connexes et B est de type fini. Notre objectif dans cette section est de donner une description du modèle de $\Gamma(\xi)$ construit par Haefliger [12]. Plusieurs auteurs [5], [7], [9, p.367-369] ont repris cette construction. Considérons la projection p de ξ et fixons-en un modèle

$$(A, d) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V, D),$$

dans lequel A est de dimension finie. Notons

$$(A^\sharp, \delta) = (\text{hom}(A, \mathbb{Q}), d^\sharp)$$

la coalgèbre différentielle graduée de A et considérons l'algèbre commutative libre $\mathbb{Z}$ -graduée

$$(\Lambda(A \otimes \Lambda V \otimes A^\sharp), \tilde{D}),$$

la différentielle $\tilde{D}$ est induite par D et δ . Soit J l'idéal différentiel engendré par $1 \otimes 1 - 1$ et des éléments de la forme

$$v_1 v_2 \otimes \beta - \sum_j (-1)^{|v_2||\beta'_j|} (v_1 \otimes \beta'_j) (v_2 \otimes \beta''_j), \quad (2.9.1)$$

$$b \otimes \alpha \otimes \beta - \sum_j (-1)^{|\beta'_j|(|\alpha|-1)} \beta'_j(b) \alpha \otimes \beta''_j, \quad (2.9.2)$$

où $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in \Lambda V$, $b \in A$, $\beta \in A^\sharp$ et $\Delta\beta = \sum_j \beta'_j \otimes \beta''_j$. L'inclusion de V dans $A \otimes \Lambda V$ induit un isomorphisme d'algèbre graduée

$$\rho : \Lambda(V \otimes A^\sharp) \longrightarrow \Lambda(A \otimes \Lambda V \otimes A^\sharp) / J,$$

de sorte que $\Lambda(V \otimes A^\sharp)$ hérite d'une différentielle $\tilde{d}$ qui fait de ρ un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées.

Théorème 2.9.8. [12] $(\Lambda(V \otimes A^\sharp), \tilde{d})$ est un modèle de $\Gamma(\xi)$.

A présent on suppose que $\xi = (E, p, B)$ est un fibré trivial de fibre F et choisissons-en un modèle d'adgc

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A, d_A) \otimes (\Lambda V, d),$$

où A est une adgc de dimension finie de B et $(\Lambda V, d)$ un modèle de Sullivan de F . Dans ce cas il est suffisant de considérer l'idéal différentiel J de $\Lambda(\Lambda V \otimes A^\#)$ engendré par $1 \otimes 1^* - 1$ et des éléments de la forme :

$$v_1 v_2 \otimes \beta - \sum_j (-1)^{|v_2||\beta'_j|} (v_1 \otimes \beta'_j) (v_2 \otimes \beta''_j), \quad (2.9.3)$$

où $v_1, v_2 \in V$, $\beta \in A^\#$ et $\Delta\beta = \sum_j \beta'_j \otimes \beta''_j$. Ici aussi,

$$\rho : \Lambda(V \otimes A^\#) \longrightarrow \Lambda(\Lambda V \otimes A^\#) / J \quad (2.9.4)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées qui induit une différentielle $\tilde{d}$ dans $\Lambda(\Lambda V \otimes A^\#)$.

Théorème 2.9.9. $(\Lambda(\Lambda V \otimes A^\#), \tilde{d})$ est un modèle de $\text{Map}(B, F)$.

Exemple 2.9.10 (Modèle de $\text{Map}(S^n, X)$). *Considérons un modèle fini $(A, 0)$ de S^n , où $A = \Lambda a$ si n est impair, et $A = (\Lambda a) / a^2$ si n est pair. Si $(\Lambda V, d)$ est le modèle minimal de X , le modèle de $\text{Map}(S^n, X)$ est l'algèbre de Sullivan relative $(\Lambda(V \oplus s^n V), D)$, où $s^n V = a' \otimes V$ (a' est le dual de a) et*

$$\begin{cases} D|_V = d \\ D(s^n v) = (-1)^n s^n(dx). \end{cases}$$

Remarque 2.9.11. *Pour la construction des modèles d'adgc des composantes connexes de l'espace des sections d'un fibré nous suggérons les références [7] et [12].*

CHAPITRE 3

Construction de Stiefel

3.1 Introduction

Étant donné deux fibrés vectoriels orientés

$$\xi: \mathbb{R}^m \longrightarrow E\xi \xrightarrow{\pi_\xi} X,$$

et

$$\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \xrightarrow{\pi_\eta} Y$$

de rang m et $m+k$ respectivement, avec m et k des entiers positifs, nous pouvons construire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \pi_1 \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

dont les deux applications π_1, π_2 sont des fibrés. Cette construction sera appelée *construction de Stiefel* associée à ξ et η (voir définition 3.2.1 pour la définition précise). L'importance de cette construction dans l'étude des espaces des immersions vient du théorème de Smale-Hirsch (voir le théorème 5.2.7) qui identifie l'espace des immersions d'une variété M dans une autre variété N à l'espace des sections du fibré

$$\pi_1: E \text{ Stiefel}(\tau_M, \tau_N) \longrightarrow M,$$

où τ_M et τ_N sont les fibrés tangents de M et N respectivement. Un résultat fondamental de ce chapitre est le théorème 3.3.2 qui permet d'obtenir le fibré de Stiefel par des produits fibrés itérés à partir des applications classifiantes de ξ et η . Plus précisément, nous démontrons qu'on a le diagramme des produits fibrés suivant (dans lequel γ^m est le fibré vectoriel universel de rang m et f et g sont les applications classifiantes de ξ et η respectivement) :

$$\begin{array}{ccccc}
 E \text{ Stiefel } (\xi, \eta) & \longrightarrow & E \text{ Stiefel } (\gamma^m, \eta) & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow & \xrightarrow{p.b.} & \downarrow g \\
 & & BSO(m) \times BSO(k) & \xrightarrow{Bj} & BSO(m+k) \\
 & \xrightarrow{p.b.} & \downarrow pr_1 & & \\
 X & \xrightarrow{f} & BSO(m) & &
 \end{array} \quad (3.1.1)$$

Dans le chapitre suivant, nous déduisons facilement à l'aide du diagramme (3.1.1) un modèle rationnel de la construction de Stiefel associée à ξ et η à partir des modèles de X et de Y et des classes de Pontryagin et d'Euler rationnelles de ξ et η .

Plan du chapitre

- Dans la section 3.2 nous allons introduire la construction de Stiefel associée à un couple de fibrés vectoriels. Cette construction vient avec deux fibrés dont le fibré de Stiefel. Nous allons aussi donner quelques exemples et propriétés de cette construction qui seront utiles dans la suite de ce travail. Plus précisément nous allons donner l'exemple de la construction de Stiefel dans le cas où les deux fibrés sont triviaux, et nous allons montrer que la construction de Stiefel à une propriété de double fonctorialité (voir section 3.2.2).
- Dans la section 3.3 nous allons étudier un cas intéressant de la construction de Stiefel. Il s'agit de la construction de Stiefel associée aux fibrés vectoriels universels. Son importance vient du fait que la construction de Stiefel associée à un couple de fibrés vectoriels quelconque s'obtient à partir de cette construction par un double produit fibré (théorème 3.3.2). En outre nous allons montrer que cette construction (construction de Stiefel associée aux fibrés vectoriels universels) est homotopiquement équivalente à un diagramme dont le modèle ration-

nel s'avère être beaucoup plus facile (voir le théorème 3.3.1).

3.2 Définition de la construction de Stiefel

Dans cette section nous allons introduire la construction de Stiefel associée à deux fibrés vectoriels. Cette construction vient avec deux fibrés, dont le plus important (dans notre travail) est appelé fibré de Stiefel associé à ξ et η et est noté $\text{Stiefel}(\xi, \eta)$.

3.2.1 Construction de Stiefel associée à un couple de fibrés vectoriels

L'objectif de cette section est d'introduire la *construction de Stiefel* associée à un couple de fibrés vectoriels.

Soient deux fibrés vectoriels orientés

$$\xi: \mathbb{R}^m \longrightarrow E\xi \xrightarrow{\pi_\xi} X,$$

et

$$\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \xrightarrow{\pi_\eta} Y,$$

où m et k sont des entiers positifs. On considère d'une part le fibré des m -repères associé à η (voir la section 1.5.2 pour la définition du fibré des repères)

$$\text{rep}_m(\eta): \text{rep}_m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E\text{rep}_m(\eta) \xrightarrow{\pi_{\text{rep}_m(\eta)}} Y, \quad (3.2.1)$$

et d'autre part le $SO(m)$ -fibré principal associé à ξ (qui est le fibré des m -repères de ξ)

$$\text{prin}(\xi): SO(m) \longrightarrow E\text{prin}(\xi) \xrightarrow{\pi_{\text{prin}(\xi)}} X. \quad (3.2.2)$$

On a une action du groupe $SO(m)$ sur $E\text{prin}(\xi)$ et sur $E\text{rep}_m(\eta)$ (voir la section 1.5.2). Ces actions induisent une action diagonale sur $E\text{prin}(\xi) \times E\text{rep}_m(\eta)$. Considérons $E\text{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E\text{rep}_m(\eta)$ l'espace des orbites de $E\text{prin}(\xi) \times E\text{rep}_m(\eta)$ par l'action diagonale. Posons

$$E\text{Stiefel}(\xi, \eta) = E\text{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E\text{rep}_m(\eta).$$

Nous avons le diagramme des fibrés suivant :

$$\begin{array}{ccc} E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \pi_1 \downarrow & & \\ X & & \end{array} \quad (3.2.3)$$

où les applications π_1 et π_2 sont définies pour tout $[(x, u), (y, v)]$ dans $E \text{ Stiefel}(\xi, \eta)$ par

$$\pi_1[(x, u), (y, v)] = x \text{ et } \pi_2[(x, u), (y, v)] = y.$$

Notons que π_1 est un fibré de fibre $E \text{ rep}_m(\eta)$.

Définition 3.2.1. Soient ξ et η deux fibrés vectoriels orientés de rang m et $m + k$ respectivement, alors

1. Le diagramme (3.2.3) est appelé la construction de Stiefel associée à ξ et η .
2. Le fibré

$$E \text{ rep}_m(\eta) \longrightarrow E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) \xrightarrow{\pi_1} X,$$

est appelé fibré de Stiefel associé à ξ et η . Il est noté $\text{Stiefel}(\xi, \eta)$.

Exemple 3.2.2. Si ξ et η sont des fibrés vectoriels triviaux, alors

$$E \text{ prin}(\xi) = X \times SO(m) \text{ et } E \text{ rep}_m(\eta) = Y \times \text{rep}_m(\mathbb{R}^n).$$

Par conséquent la construction de Stiefel associée à ξ et η est le diagramme des fibrés triviaux

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times \text{rep}_m(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{pr_2} & Y \\ pr_1 \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

3.2.2 Double fonctorialité de la construction de Stiefel

Soient ξ et η deux fibrés vectoriels avec $\text{rang}(\xi) \leq \text{rang}(\eta)$. Dans cette section nous allons montrer que si $f^*\xi$ et $g^*\eta$ sont respectivement les produits fibrés de ξ et η le long de f et g alors, la construction de Stiefel associée à $f^*\xi$ et $g^*\eta$ s'obtient à partir de la construction de Stiefel associée à ξ et η par un double produit fibré le long de f et g . Plus précisément nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.3. *Considérons deux fibrés vectoriels orientés*

$$\xi: \mathbb{R}^m \longrightarrow E\xi \longrightarrow X,$$

$$\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \longrightarrow Y$$

de rang m et $m+k$ respectivement, avec m, k des entiers positifs. Soient $f: X' \longrightarrow X$ et $g: Y' \longrightarrow Y$ deux applications continues et $f^*\xi$ et $g^*\eta$ les produit fibrés de ξ et η le long de f et g respectivement. Alors la construction de Stiefel associée à $f^*\xi$ et $g^*\eta$ s'inscrit dans le diagramme suivant, dans lequel les carrés (1), (2), (3) sont des produit fibrés

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi'_2 & & \\
 & \text{E Stiefel}(f^*\xi, g^*\eta) & \xrightarrow{\quad} & \text{E Stiefel}(\xi, g^*\eta) & \xrightarrow{\quad} Y' \quad (3.2.4) \\
 & \downarrow p.b.(1) & & \downarrow p.b.(2) & \downarrow g \\
 \pi'_1 \curvearrowleft & \text{E Stiefel}(f^*\xi, \eta) & \xrightarrow{\quad} & \text{E Stiefel}(\xi, \eta) & \xrightarrow{\pi_2} Y \\
 & \downarrow p.b.(3) & & \downarrow \pi_1 & \\
 & X' & \xrightarrow{\quad f \quad} & X &
 \end{array}$$

La suite de cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. Pour toute la suite de cette section on fixe ξ , η , f et g comme dans le théorème 3.2.3. Pour la preuve de ce théorème nous allons montrer séparément que chaque carré est un produit fibré.

Nous allons commencer avec le carré (3). D'après la proposition 1.5.7, le $SO(m)$ -fibré principal associé à $f^*\xi$

$$\text{prin}(f^*\xi): SO(m) \longrightarrow E \text{prin}(f^*\xi) \xrightarrow{f^*\pi} X$$

est le produit fibré de $SO(m)$ -fibré principal associé à ξ

$$\text{prin}(\xi): SO(m) \longrightarrow E \text{prin}(\xi) \xrightarrow{\pi} X$$

le long de f . Nous avons donc le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 E \text{prin}(f^*\xi) & \xrightarrow{\text{prin}(f)} & E \text{prin}(\xi) \\
 f^*\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 X' & \xrightarrow{\quad f \quad} & X,
 \end{array}$$

un élément typique de $E \operatorname{prin}(f^*\xi)$ est un couple (x', u) avec $x' \in X'$ et u un m -repère de la fibre de $f^*\xi$ au dessus de x' . Cette fibre s'identifie canoniquement à la fibre de ξ au-dessus de $f(x')$ et il est clair que

$$\operatorname{prin}(f)(x', u) = (f(x'), u).$$

Cette application est $SO(m)$ -équivariante. Dès lors l'application

$$\operatorname{prin}(f) \times id: E \operatorname{prin}(f^*\xi) \times E \operatorname{rep}_m(\eta) \longrightarrow E \operatorname{prin}(\xi) \times E \operatorname{rep}_m(\eta)$$

est $SO(m)$ -équivariante par l'action diagonale. Un passage au quotient nous donne l'application $\operatorname{prin}(f) \times_{SO(m)} id$

$$E \operatorname{prin}(f^*\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \longrightarrow E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta)$$

définie pour tout $[(x', u), (y, v)] \in E \operatorname{prin}(f^*\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta)$ par

$$\operatorname{prin}(f) \times_{SO(m)} id[(x', u), (y, v)] = [(f(x'), u), (y, v)].$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E \operatorname{prin}(f^*\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) & \longrightarrow & E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \quad (3.2.5) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ X' & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

qui s'identifie au carré (3) du diagramme (3.2.4).

Lemme 3.2.4. *Le diagramme (3.2.5) est un produit fibré.*

Démonstration. D'après la proposition 1.5.7

$$\operatorname{prin}(f^*\xi) \cong f^* \operatorname{prin}(\xi)$$

alors

$$\operatorname{prin}(f^*\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \cong f^* \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \quad (3.2.6)$$

et d'après [17, Proposition 6.3, p 47] nous avons

$$f^* \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \cong f^* \left(\operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \right) \quad (3.2.7)$$

De (3.2.6) et (3.2.7) on déduit

$$\operatorname{prin}(f^*\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \cong f^* \left(\operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \right).$$

Ceci achève la preuve. $\square$

Dans le lemme suivant nous montrons que le carré (2) du (3.2.4) est un produit fibré.

Lemme 3.2.5. *Le diagramme suivant est un produit fibré*

$$\begin{array}{ccc}
 E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(g^* \eta) & \longrightarrow & E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \\
 \pi'_2 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y,
 \end{array} \tag{3.2.8}$$

où

- pour tout $[(x, u), (y, v)] \in E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(g^* \eta)$ on a

$$\pi_2 [(x, u), (y, v)] = y$$

- pour tout $[(x, u), (y, v)] \in E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(g^* \eta)$ on a

$$\begin{aligned}
 \pi'_2 [(x, u), (y, v)] &= y \text{ et} \\
 id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) [(x, u), (y, v)] &= [(x, u), (g(y), v)].
 \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(g^* \eta) & \xrightarrow{id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g)} & E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta) \\
 \pi'_2 \downarrow p'_1 & \xrightarrow{\operatorname{rep}_m(g)} & \downarrow p_1 \pi_2 \\
 E \operatorname{rep}_m(g^* \eta) & \xrightarrow{\operatorname{rep}_m(g)} & E \operatorname{rep}_m(\eta) \\
 \pi'_2 \downarrow p'_2 & & \downarrow p_2 \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

(I) (II)

d'après la proposition 1.5.7 le digramme (II) est un produit fibré. Considérons un espace Z et deux applications continues $\alpha: Z \longrightarrow Y'$ et

$$\beta = (\beta_1, \beta_2): Z \longrightarrow E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(\eta)$$

tel que

$$\pi_2 \circ \beta = g \circ \alpha.$$

Nous allons montrer qu'il existe une unique application

$$\Phi: Z \longrightarrow E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(g^* \eta)$$

tel que

$$\pi'_2 \circ \Phi = \alpha \text{ et } id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi = \beta.$$

Existence : Comme $\pi_2 = p_2 \circ p_1$ alors l'égalité

$$\pi_2 \circ \beta = g \circ \alpha,$$

entraîne

$$p_2 \circ (p_1 \circ \beta) = g \circ \alpha. \quad (3.2.9)$$

Comme (II) est un produit fibré de l'égalité (3.2.9) implique l'existence d'une unique application

$$\Phi_2: Z \longrightarrow E \operatorname{rep}_m(g^* \eta)$$

telle que

$$p'_2 \circ \Phi_2 = \alpha \text{ et } \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi_2 = p_1 \circ \beta.$$

Posons $\Phi = (\beta_1, \Phi_2)$. L'application Φ est bien définie et pour $z \in Z$ nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} \pi'_2 \circ \Phi(z) = p'_2 \circ p'_1 \circ \Phi(z) &= p'_2 \circ p'_1 [\beta_1(z), \Phi_2(z)] \\ &= p'_2 \circ \Phi_2(z) \\ &= \alpha(z), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi(z) &= id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) [\beta_1(z), \Phi_2(z)] \\ &= [\beta_1(z), \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi_2(z)]. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi_2 = p_1 \circ \beta$, nous avons donc

$$\operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi_2(z) = \beta_2(z).$$

En conclusion nous avons :

$$\pi'_2 \circ \Phi = \alpha \text{ et } id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi = \beta.$$

Unicité : Supposons qu'il existe une autre application

$$\Phi' = (\Phi'_1, \Phi'_2) : Z \longrightarrow E \operatorname{prin}(\xi) \times_{SO(m)} E \operatorname{rep}_m(g^* \eta)$$

telle que

$$\pi'_2 \circ \Phi' = \alpha \text{ et } id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi' = \beta,$$

donc pour tout $z \in Z$ nous avons :

$$\begin{aligned} \pi'_2 \circ \Phi'(z) = p'_2 \circ p'_1 \circ \Phi'(z) &= p'_2 \circ p'_1 [\Phi'_1(z), \Phi'_2(z)] \\ &= p'_2 \circ \Phi'_2(z) = \alpha(z), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

et

$$\begin{aligned} &\operatorname{rep}_m(g) \circ p'_1 \circ \Phi'(z) \\ &= \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi'_2(z) = \beta_2(z). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Comme (II) est un produit fibré des égalités (3.2.10) et (3.2.11) on a :

$$\Phi_2 = \Phi'_2.$$

Il reste à montrer que

$$\Phi'_1 = \beta_1.$$

Comme

$$\begin{aligned} id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi'(z) &= id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) [\Phi'_1(z), \Phi'_2(z)] \\ &= [\Phi'_1(z), \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi'_2(z)] \\ &= [\Phi'_1(z), \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi_2(z)] \\ &= [\Phi'_1(z), \beta_2(z)] \end{aligned}$$

l'égalité $id \times_{SO(m)} \operatorname{rep}_m(g) \circ \Phi = \beta$ entraîne que

$$[\Phi'_1(z), \beta_2(z)] = [\beta_1(z), \beta_2(z)],$$

par conséquent il existe $g \in SO(m)$ tel que

$$(\Phi'_1(z), \beta_2(z)) = (\beta_1(z)g, g^{-1}\beta_2(z)).$$

Mais l'action de $SO(m)$ sur $E \operatorname{rep}_m(\eta)$ est libre, dès lors :

$$\beta_2(z) = g^{-1}\beta_2(z) \Rightarrow g = 1$$

donc,

$$(\Phi'_1(z), \beta_2(z)) = (\beta_1(z), \beta_2(z)).$$

Ceci achève la preuve. □

A présent nous allons montrer que le carré (a) du diagramme (3.2.4) est un produit fibré. Plus précisément nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.2.6. *Avec les définitions et notations du théorème 3.2.3, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E \text{ Stiefel} (f^* \xi, g^* \eta) & \xrightarrow{\quad pb \quad} & E \text{ Stiefel} (\xi, g^* \eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \text{ Stiefel} (f^* \xi, \eta) & \xrightarrow{\quad} & E \text{ Stiefel} (\xi, \eta) \end{array} \quad (3.2.12)$$

est un produit fibré.

Pour la preuve de ce résultat nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 3.2.7. [20] *Considérons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & (1) \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & (2) \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array}$$

Si le carré (2) est un produit fibré alors le carré (1) est un produit fibré si et seulement si le rectangle entier est un produit fibré.

Nous avons besoin du lemme suivant aussi.

Lemme 3.2.8. *Reprenons les hypothèses et notations de la proposition 3.2.3. Si π' est la projection du $\text{Stiefel} (f^* \xi, g^* \eta)$, fibré de Stiefel associé aux fibrés vectoriels $f^* \xi, g^* \eta$, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} E \text{ Stiefel} (f^* \xi, g^* \eta) & \xrightarrow{id \times_{SO(m)} \text{rep}_m(g)} & E \text{ Stiefel} (f^* \xi, \eta) \\ & \searrow \pi'_1 \quad \swarrow \pi' & \\ & X' & \end{array}$$

Démonstration. Soit $[(x, u), (y, v)] \in E \text{ Stiefel} (f^* \xi, g^* \eta)$, nous avons

$$\begin{aligned} \pi' \circ (id \times_{SO(m)} \text{rep}_m(g)) [(x, u), (y, v)] &= \pi' [(x, u), (g(y), v)] \\ &= x = \pi'_1 [(x, u), (y, v)]. \end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme 3.2.6. Considérons le digramme

$$\begin{array}{ccc}
 E \text{ Stiefel } (f^* \xi, g^* \eta) & \xrightarrow{\quad (1) \quad} & E \text{ Stiefel } (\xi, g^* \eta) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E \text{ Stiefel } (f^* \xi, \eta) & \xrightarrow{\quad (2) \quad} & E \text{ Stiefel } (\xi, \eta) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{\quad} & X
 \end{array}$$

Le carré (1) est commutatif, en effet pour

$$[(x, u), (y, v)] \in E \text{ Stiefel } (f^* \xi, g^* \eta)$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 & \left(id \times_{SO(m)} \text{rep}_m(g) \right) \circ \left(\text{prin}(f) \times_{SO(m)} id \right) [(x, u), (y, v)] \\
 = & \left(id \times_{SO(m)} \text{rep}_m(g) \right) [(f(x), u), (y, v)] \\
 = & [(f(x), u), (g(y), v)],
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{prin}(f) \times_{SO(m)} id \right) \circ \left(id \times_{SO(m)} \text{rep}_m(g) \right) [(x, u), (y, v)] \\
 = & \left(\text{prin}(f) \times_{SO(m)} id \right) [(x, u), (g(y), v)] \\
 = & [(f(x), u), (g(y), v)].
 \end{aligned}$$

Du lemme 3.2.4 et du lemme 3.2.8 on déduit que le grand rectangle est un produit fibré. Comme le carré (2) est un produit fibré (Proposition 3.2.5) de lemme 3.2.7 on conclut que le diagramme (1) est un produit fibré. $\square$

Démonstration du théorème 3.2.3. Il vient des lemme 3.2.4, lemme 3.2.5 et lemme 3.2.6. $\square$

3.3 Construction de Stiefel universelle

Dans la section 3.2.1 nous avons introduit la construction de Stiefel associée à un couple de fibrés vectoriels. Dans cette section nous allons étudier cette construction dans un cas particulier de fibrés vectoriels. Plus précisément nous allons nous intéresser à la construction de Stiefel associée aux

fibres vectoriels universels. Cette construction a une propriété importante en ce sens qu'elle est homotopiquement équivalente à un diagramme dont la construction du modèle rationnel est plus facile (théorème 3.3.1). En plus, du théorème de classification des fibres vectoriels et de la proposition 3.2.3 nous allons montrer que la construction de Stiefel associée à un couple de fibres vectoriels s'obtient à partir de la construction de Stiefel associée aux fibres vectoriels universels par un double produit fibré (voir le théorème 3.3.2).

Soient m et k deux entiers positifs. On rappelle que le fibré vectoriel universel

$$\gamma^m: \mathbb{R}^m \longrightarrow E\gamma^m \longrightarrow BSO(m),$$

est un fibré vectoriel de rang m où

$$E\gamma^m = \{(W, x) \mid W \subset \mathbb{R}^\infty, \dim W = m, \text{ et } x \in W\},$$

et la projection est l'application qui envoie (W, x) sur W . D'après la proposition 1.5.6, le fibré principal associé à γ^m est le $SO(m)$ -fibré principal universel

$$\text{prin}: SO(m) \longrightarrow ESO(m) \longrightarrow BSO(m),$$

et le fibré des m -repères associé à γ^{m+k} est

$$\text{rep}_m(\gamma^{m+k}): \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \longrightarrow E\text{rep}_m(\gamma^{m+k}) \longrightarrow BSO(m+k)$$

où l'espace total $E\text{rep}_m(\gamma^{m+k})$ est

$$\{(W, w) \mid W \subset \mathbb{R}^\infty, \dim W = m+k, w \text{ est un } m\text{-repère de } W\}$$

et la projection est l'application qui envoie $(W, w) \in E\text{rep}_m(\gamma^{m+k})$ sur W . Ainsi la construction de Stiefel associée aux fibres vectoriels γ^m et γ^{m+k} est

$$\begin{array}{ccc} ESO(m) \times_{SO(m)} E\text{rep}_m(\gamma^{m+k}) & \xrightarrow{\pi_2} & BSO(m+k) \\ \pi_1 \downarrow & & \\ & & BSO(m). \end{array} \quad (3.3.1)$$

Dans cette section nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit $m, k \geq 0$. Alors il existe un digramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} BSO(m) & \xleftarrow{pr_1} & BSO(m) \times BSO(k) & \xrightarrow{Bj} & BSO(m+k) \\ \parallel & & \simeq \downarrow \beta & & \parallel \\ BSO(m) & \xleftarrow{\pi_1} & E \text{ Stiefel}(\gamma^m, \gamma^{m+k}) & \xrightarrow{\pi_2} & BSO(m+k), \end{array} \quad (3.3.2)$$

dans lequel

- l'application β est une équivalence d'homotopie,
- l'application Bj est l'application induite par l'inclusion canonique :

$$j: SO(m) \times SO(k) \hookrightarrow SO(m+k),$$

- la ligne du bas est la construction de Stiefel associée aux fibrés vectoriels universels.

Ce théorème et le théorème 3.2.3 nous permettent de démontrer que la construction de Stiefel associée à deux fibrés vectoriels classifiés respectivement par f et g s'obtient par un double produit fibré de la construction de Stiefel universelle le long de ces applications. Plus précisément nous en déduirons le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *Soient m et k deux entiers positifs. Soient ξ et η deux fibrés vectoriels orientés classifiés par $f: X \rightarrow BSO(m)$ et $g: Y \rightarrow BSO(m+k)$ respectivement. Alors la construction de Stiefel associée à ξ et η est donnée par le double produit fibré :*

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\pi_2} & & \\ E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) & \longrightarrow & E \text{ Stiefel}(\gamma^m, \eta) & \xrightarrow{p.b.} & Y \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow & & \downarrow g \\ & & BSO(m) \times BSO(k) & \xrightarrow{Bj} & BSO(m+k) \\ & p.b. & \downarrow pr_1 & & \\ X & \xrightarrow{f} & BSO(m) & & \end{array}$$

La suite de cette section est consacrée à la preuve du théorème 3.3.1.

Nous allons commencer avec la construction de β .

Soit $l: \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ l'isomorphisme linéaire défini par

$$l((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots).$$

Dans la section 1.6 nous avons vu que l induit un homéomorphisme entre $G_m(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty)$ et $G_m(\mathbb{R}^\infty)$ que nous allons noter aussi par l . Considérons deux endomorphismes $j_{\text{odd}}: \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ et $j_{\text{even}}: \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ définis par

$$\begin{aligned} j_{\text{odd}}(x_0, x_1, \dots) &= (0, x_1, 0, \dots), \text{ et} \\ j_{\text{even}}(x_0, x_1, \dots) &= (x_0, 0, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Les applications l, j_{odd} et j_{even} induisent les applications suivantes :

$$\begin{aligned} Ej: ESO(m) \times ESO(k) &\longrightarrow ESO(m+k) \\ (u, v) &\mapsto l(j_{\text{odd}}(u), j_{\text{even}}(v)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Bj: BSO(m) \times BSO(k) &\longrightarrow BSO(m+k) \\ (A, B) &\mapsto l(j_{\text{odd}}(A) \oplus j_{\text{even}}(B)). \end{aligned}$$

Soit le $SO(m)$ -fibré principal, $SO(m) \longrightarrow ESO(m) \xrightarrow{\pi_0} BSO(m)$, où la projection est définie par $\pi_0(e) = \langle e \rangle$. Nous rappelons que $\langle e \rangle$ est le sous-espace engendré par e . D'après la définition d'un fibré principal, il existe un recouvrement d'ouverts $\{O_i\}$ de $BSO(m)$ et des applications continues $\sigma_i: O_i \longrightarrow ESO(m)$, appelées sections locales au-dessus de O_i , vérifiant pour tout i

$$\pi_0 \circ \sigma_i = id,$$

où id désigne l'application identité de O_i .

Par conséquent, si $A \in BSO(m)$, il existe O_i tel que $A \in O_i$. Ainsi $\sigma_i(A) \in ESO(m)$. Pour $(A, B) \in BSO(m) \times BSO(k)$ définissons β par :

$$\beta(A, B) = [\sigma_i(A), (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A)))]. \quad (3.3.3)$$

Maintenant montrons que cette définition de β ne dépend pas du choix de la section locale σ_i . Pour cela supposons que O_r est un autre ouvert du recouvrement contenant A et σ_r une section locale au-dessus de O_r . Comme

$ESO(m) \longrightarrow BSO(m)$ est un $SO(m)$ fibré principal, il existe $g \in SO(m)$ tel que

$$\sigma_r(A) = \sigma_i(A) \cdot g. \text{ (voir [11, section 5.2, p.195])}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & [\sigma_r(A), (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_r(A)))] \\ &= [\sigma_i(A) \cdot g, (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A)g))] \\ &= [\sigma_i(A) \cdot g, g^{-1} \cdot (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A)))] \\ &= [\sigma_i(A), (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A)))] . \end{aligned}$$

Nous avons ainsi le lemme suivant qui est utile pour la preuve du théorème 3.3.1.

Lemme 3.3.3. *Pour tout $A \in BSO(m)$, l'application*

$$\begin{aligned} \beta_A: BSO(k) &\longrightarrow E \text{ rep}_m(\gamma^{m+k}) \\ B &\mapsto (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A))) \end{aligned}$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Considérons le $SO(k)$ -fibré principal universel au-dessus de $BSO(k)$

$$SO(k) \longrightarrow ESO(k) \xrightarrow{\pi_0} BSO(k),$$

où π_0 envoie un k -repère de $\mathbb{R}^\infty$ sur le k plan qu'il engendre. On note $\pi_0(v) = \langle v \rangle$. Considérons le $SO(k)$ -fibré principal

$$SO(k) \longrightarrow E \text{ rep}_{m+k}(\gamma^{m+k}) \xrightarrow{p_0} E \text{ rep}_m(\gamma^{m+k})$$

où l'espace total $E \text{ rep}_{m+k}(\gamma^{m+k})$ est

$$\{(W, w) \mid W \subset \mathbb{R}^\infty, \dim W = m+k, w \text{ est un } m+k\text{-repère de } W\}$$

et la projection est définie pour tout $(W, w) \in E \text{ rep}_{m+k}(\gamma^{m+k})$ par

$$p_0(W, w) = (W, w_1),$$

où w_1 dénote les m premiers vecteurs du $m+k$ -repère w . Pour $A \subset \mathbb{R}^\infty$ un sous espace de dimension m . Définissons

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_A: ESO(k) &\longrightarrow E \text{ rep}_{m+k}(\gamma^{m+k}) \\ v &\mapsto (Bj(A, \langle v \rangle), Ej(\sigma_i(A), v)) . \end{aligned}$$

L'application $\bar{\beta}_A$ est une équivalence d'homotopie car les espaces $ESO(k)$ et $E\text{rep}_{m+k}(\gamma^{m+k})$ sont contractiles. En plus, pour tout $v \in ESO(k)$, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} p_0 \circ \bar{\beta}_A(v) &= p_0(Bj(A, \langle v \rangle), Ej(\sigma_i(A), v)) \\ &= (Bj(A, \langle v \rangle), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A))), \end{aligned}$$

et d'autre part nous avons :

$$\beta_A \circ \pi_0(v) = \beta_A(\langle v \rangle) = (Bj(A, \langle v \rangle), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A))).$$

Par conséquent le diagramme des $SO(k)$ -fibrés principaux suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} ESO(k) & \xrightarrow{\bar{\beta}_A} & E\text{rep}_{m+k}(\gamma^{m+k}) \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow p_0 \\ BSO(k) & \xrightarrow{\beta_A} & E\text{rep}_m(\gamma^{m+k}) \end{array}$$

Autrement dit $(\bar{\beta}_A, \beta_A)$ un morphisme des fibrés principaux. Comme $\bar{\beta}_A$ est une équivalence d'homotopie, il est de même que β_A . $\square$

A présent nous allons donner la preuve du théorème 3.3.1.

Démonstration du théorème 3.3.1. La première partie est directe. En effet pour $(A, B) \in BSO(m) \times BSO(k)$, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \beta(A, B) &= \pi_1([\sigma_i(A), (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A)))]) \\ &= \pi_0(\sigma_i(A)) = A = pr_1(A, B), \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \beta(A, B) &= \pi_2([\sigma_i(A), (Bj(A, B), j_{\text{odd}}(\sigma_i(A)))]) \\ &= Bj(A, B). \end{aligned}$$

Ceci achève la première partie.

Maintenant, montrons que β est une équivalence d'homotopie. De la première partie nous avons :

$$\pi_1 \circ \beta = pr_1.$$

Comme

$$pr_1: BSO(m) \times BSO(k) \longrightarrow BSO(m),$$

et

$$\pi_1: ESO(m) \times_{SO(m)} E\text{rep}_m(\gamma^{m+k}) \longrightarrow BSO(m)$$

sont des fibrés, le couple (β, id) est donc un morphisme des fibrés. Comme $BSO(m)$ est un CW-complexe de type fini, d'après [17, théorème 4.3, p 223] pour que β soit une équivalence d'homotopie, il suffit que sa restriction sur les fibres soit une équivalence d'homotopie. Si $A \in BSO(m)$ la restriction de β sur les fibres au dessus de A est l'application

$$\beta|_A: BSO(k) \longrightarrow \pi_1^{-1}(A) = \{[e, (W, w)] \mid \pi_1(e) = A\},$$

définie pour $B \in BSO(k)$ par $\beta|_A(B) = \beta(A, B)$. Cette application est la composée de

$$\beta_A: BSO(k) \longrightarrow E\text{rep}_m(\gamma^{m+k})$$

qui est une équivalence d'homotopie d'après le lemme 3.3.3 et de l'application

$$\alpha: E\text{rep}_m(\gamma^{m+k}) \longrightarrow \pi_1^{-1}(A),$$

définie pour $(W, w) \in E\text{rep}_m(\gamma^{m+k})$ par $\alpha(W, w) = [\sigma_i(A), (W, w)]$ qui est un homéomorphisme (voir [11, proposition 1, p 198] ou [18, proposition 3.7] pour la preuve). Par conséquent $\beta|_A$ est une équivalence d'homotopie. $\square$

CHAPITRE 4

Modèle rationnel du fibré de Stiefel

4.1 Introduction

Dans tout ce chapitre m et k sont des entiers positifs. Pour tout réel x , on note par $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière par défaut et on note par $\lceil x \rceil$ sa partie entière par excès.

Notre objectif est de construire un modèle d'adgc du fibré de Stiefel associé à un couple du fibré vectoriel que nous avons construit dans le chapitre 3. Considérons deux fibrés vectoriels orientés :

$$\begin{aligned}\xi & : \mathbb{R}^m \longrightarrow E\xi \longrightarrow X, \\ \eta & : \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \longrightarrow Y,\end{aligned}$$

de rang m et $m+k$ respectivement et de bases simplement connexes. L'objectif de ce chapitre est de construire un modèle d'adgc du fibré de Stiefel

$$E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) \xrightarrow{\pi_1} X, \quad (4.1.1)$$

à partir des données suivantes :

- des entiers i, t, ℓ , avec $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor, 1 \leq t \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$,
- un modèle d'adgc (A, d_A) de X ,
- un modèle de Sullivan minimal $(\Lambda V, d)$ de Y ,
- des représentants $p_t(\xi) \in A^{4t} \cap \ker d_A$, des classes de Pontryagin,

- d'un représentant $e(\xi) \in A^m \cap \ker d_A$ de classe d'Euler de ξ (si m est pair).
- des représentants $p_i(\eta) \in (\Lambda V)^{4i} \cap \ker d$ des classes de Pontryagin de η ,
- d'un représentant $e(\eta) \in (\Lambda V)^{m+k} \cap \ker d$ de classe d'Euler de η (si $m+k$ est pair).

Définissons des éléments $\bar{p}_i(\xi) \in A^{4i} \cap \ker d_A, i \geq 1$ à partir de la relation :

$$\left(1 + p_1(\xi) \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\xi)\right) (1 + \bar{p}_1(\xi) + \cdots) = 1.$$

Le modèle d'adgc du fibré de Stiefel sera un modèle de Sullivan relatif de la forme

$$(A, d_A) \hookrightarrow \left(A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda \left(\{x_\ell\}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k\right), D\right) \quad (4.1.2)$$

où

- $\bar{e}_{m+k-1}$ est un générateur de degré $m+k-1$ qui n'apparaît que si $m+k$ est pair,
- e_k est un générateur de degré k qui n'apparaît que si k est pair,
- x_ℓ sont des générateurs de degré $4\ell-1$ qui apparaissent pour tout entier ℓ compris entre $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ et $\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$,
- $D|_A = d_A, D|_V = d$,
- $Dx_{\frac{k}{2}} = 1 \otimes p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}(\xi) \otimes 1 \otimes 1 - e_k^2$ si k est pair et $Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1$ si $\ell > \frac{k}{2}$,
- $D\bar{e}_{m+k-1} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1 - e(\xi) \otimes e_k$.

Le résultat que nous allons montrer s'énonce comme suit :

Théorème 4.1.1. *Un modèle d'adgc du fibré de Stiefel (4.1.1) associé aux fibrés vectoriels orientés ξ et η est donné par le modèle de Sullivan relatif*

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k), D),$$

décrit en (4.1.2).

La suite de ce chapitre est consacrée à la preuve de ce résultat. En voici l'idée. Le théorème 3.3.1 affirme que si ξ et η sont des fibrés vectoriels classifiés respectivement par $f: X \rightarrow BSO(m)$ et $g: Y \rightarrow BSO(m+k)$,

la constuction de Stiefel associée à ξ et η s'obtient par le double produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) & \longrightarrow & E \text{ Stiefel}(\gamma^m, \eta) & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow & \xrightarrow{p.b.} & \downarrow g \\
 & & BSO(m) \times BSO(k) & \xrightarrow{Bj} & BSO(m+k) \\
 & \xrightarrow{p.b.} & \downarrow pr_1 & & \\
 X & \xrightarrow{f} & BSO(m) & &
 \end{array}$$

Comme le modèle d'adgc d'un produit fibré est bien connu en homotopie rationnelle (voir théorème 2.4.1), pour déterminer un modèle d'adgc de

$$E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) \xrightarrow{\pi_1} X$$

nous avons juste besoin :

- d'un modèle d'adgc du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 BSO(m) \times BSO(k) & \xrightarrow{Bj} & BSO(m+k) \\
 \downarrow pr_1 & & \\
 BSO(m) & &
 \end{array} \quad (4.1.3)$$

- d'un modèle d'adgc de $f : X \longrightarrow BSO(m)$ et de $g : Y \longrightarrow BSO(m+k)$.

Plan du chapitre

- Dans la section 4.2 nous allons construire un modèle d'adgc de f et un modèle d'adgc de g .
- Dans la section 4.3 nous allons construire un modèle d'adgc du diagramme (4.1.3).
- Dans la section 4.4 nous allons utiliser le modèle de g construit dans la section 4.2 et le modèle de Bj construit dans la section 4.3 respectivement pour construire un modèle de $E \text{ Stiefel}(\gamma^m, \eta)$.
- Dans la section 4.5 nous allons donner la preuve du théorème 4.1.1.

- Dans la section 4.6 nous allons montrer que sous certaines hypothèses liées aux classes de Pontryagin et d'Euler de ξ et η , le fibré Stiefel (ξ, η) est rationnellement trivial

4.2 Modèle d'adgc des classifiantes f et g

Notre objectif dans cette section est de rappeler les modèles d'adgc des applications classifiantes de ξ et η .

Commençons avec la convention suivante :

Convention 4.2.1. *Dans toute la suite de ce chapitre, nous utiliserons les indices suivants :*

1. i est un entier compris entre 1 et $\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$,
2. ℓ est un entier compris entre $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ et $\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$,
3. t est un entier compris entre 1 et $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$,
4. j est un entier compris entre 1 et $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Soient ξ et η deux fibrés vectoriels orientés de rang m et $m+k$ respectivement et de bases X et Y respectivement. Nous supposons que X et Y sont simplement connexes. Soit $f: X \rightarrow BSO(m)$ la classifiante de ξ et soit $g: Y \rightarrow BSO(m+k)$ la classifiante de η . D'après la section 2.7.2 les modèles d'adgc de f et de g sont complètement déterminés par les classes de Pontryagin et d'Euler de ξ et η respectivement. Pour donner une description explicite pour ces modèles, en vertu de la construction de la section 2.7.1, nous fixons les notations suivantes pour les modèles de Sullivan minimaux de $BSO(m)$ et $BSO(m+k)$:

$$\begin{aligned} (\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0) &\xrightarrow{\simeq} A_{pl}(BSO(m)) \\ (\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0) &\xrightarrow{\simeq} A_{pl}(BSO(m+k)) \end{aligned}$$

où

- $\deg(p_t) = 4t$ et $\deg(a_i) = 4i$ où les entiers i et t prennent les valeurs précisées à la convention 4.2.1,
- e_m et e_{m+k} sont les générateurs optionnels (voir la section 2.7.1) avec $\deg(e_m) = m$ (si m est pair) et $\deg(e_{m+k}) = m+k$ (si $m+k$ est pair).

Pour la suite nous considérons (A, d_A) un modèle d'adgc de X et $(\Lambda V, d)$ un modèle de Sullivan minimal de Y . Choisissons aussi des représentants des classes caractéristiques comme suit :

1. $p_t(\xi) \in A^{4t} \cap \ker d_A$ pour $1 \leq t \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ avec t entier, sont des représentants des classes de Pontryagin de ξ ,
2. $p_i(\eta) \in (\Lambda V)^{4i} \cap \ker d$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$ avec i entier sont des représentants des classes de Pontryagin de η ,
3. $e(\xi) \in A^m \cap \ker d_A$ est un représentant de classe d'Euler de ξ (si m est pair),
4. $e(\eta) \in (\Lambda V)^{m+k} \cap \ker d$ est un représentant de classe d'Euler de η (si $m+k$ est pair).

Alors, d'après la construction de la section 2.7.2, un modèle d'adgc ψ_f de la classifiante f est défini de $(\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0)$ vers (A, d_A) par

$$\psi_f(p_t) = p_t(\xi) \text{ et } \psi_f(e_m) = e(\xi) \text{ si } m \text{ est pair,}$$

de même un modèle d'adgc ψ_g de g est défini de $(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0)$ vers $(\Lambda V, d)$ par

$$\psi_g(a_i) = p_i(\eta) \text{ et } \psi_g(e_{m+k}) = e(\xi) \text{ si } m+k \text{ est pair.}$$

A présent nous définissons des éléments homogène $\bar{p}_i \in H^{4i}(BSO(m), \mathbb{Q})$, vérifiant la relation

$$\left(1 + p_1 + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\right) (1 + \bar{p}_1 + \cdots) = 1.$$

Ainsi pour $i \geq 1$, $\bar{p}_i$ est un polynôme de $p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Dans la suite, $\forall i \geq 1$, on notera par $\bar{p}_i(\xi)$, l'image de $\bar{p}_i$ par ψ_f le modèle de la classifiante de ξ . C'est-à-dire

$$\forall i \geq 1, \bar{p}_i(\xi) = \psi_f(\bar{p}_i).$$

4.3 Modèle d'adgc de l'application Bj

Notre objectif dans cette section est de construire un modèle d'adgc du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} BSO(m) \times BSO(k) & \xrightarrow{Bj} & BSO(m+k) \\ \text{\scriptsize } pr_1 \downarrow & & \\ BSO(m) & & \end{array} \quad (4.3.1)$$

Soient $(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0)$, $(\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0)$ et $(\Lambda(\{b_j\}, e_k), 0)$ les modèles de Sullivan minimaux des espaces $BSO(m+k)$, $BSO(m)$ et $BSO(k)$ respectivement. Considérons les générateurs x_ℓ de degrés $4i-1$ pour $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$, et le générateur optionnels $\bar{e}_{m+k-1}$ degré $m+k-1$ qui n'apparaît que si $m+k-1$ est impair (voir la section 2.7.1). Définissons une algèbre de Sullivan relative :

$$(A_1, D_1) = (\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_1) \quad (4.3.2)$$

où $\bar{e}_{m+k-1}$, e_m , e_k et e_{m+k} sont les générateurs optionnels de degrés $m+k-1$, m , k et $m+k$ respectivement et la différentielle D_1 est définie par :

- $D_1 a_i = D_1 e_{m+k} = D_1 e_m = D_1 p_t = D_1 e_k = 0$,
- $D_1 x_{\frac{k}{2}} = a_{\frac{k}{2}} + e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}$ si k est pair et $D_1 x_\ell = a_\ell - \bar{p}_\ell$ si $\ell > \frac{k}{2}$,
- $D_1 \bar{e}_{m+k-1} = e_{m+k} - e_m e_k$.

Le théorème que nous allons prouver est le suivant :

Théorème 4.3.1. *Considérons (A_1, D_1) l'adgc de Sullivan relative définie en (4.3.2). Considérons $(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0)$ et $(\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0)$ les modèles minimaux de $BSO(m+k)$ et $BSO(m)$ définis plus haut. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (A_1, D_1) & \longleftarrow & (\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0) \\ \uparrow & & \\ (\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0) & & \end{array}$$

est un modèle d'adgc du diagramme (4.3.1).

Pour la preuve de ce théorème nous avons besoin de Lemme suivant

Lemme 4.3.2. *Considérons les générateurs b_j, p_t, e_k, e_m introduits dans la section 4.2 et la section 4.3. Si $f_i = a_i - \sum_{t+j=i} p_t b_j$ et si $\bar{p}_i, i \geq 1$ sont des éléments de degré $4i$ vérifiant*

$$(1 + p_1 + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor})(1 + \bar{p}_1 + \cdots) = 1,$$

alors $\forall \ell > \lceil \frac{k}{2} \rceil$ nous avons la relation suivante

$$a_\ell - \bar{p}_\ell = -(\bar{p}_{\ell-1}(a_1 - f_1) + \cdots + (a_\ell - f_\ell)),$$

et si k est pair

$$a_{\frac{k}{2}} - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}} = -(\bar{p}_{\frac{k}{2}-1}(a_1 - f_1) + \cdots + (a_{\frac{k}{2}} - f_{\frac{k}{2}})).$$

Démonstration. Tout d'abord notons que

$$\begin{aligned}
1 + f_1 + \cdots + f_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} &= 1 + a_1 + \cdots + a_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} \\
&\quad - \left(\sum_{t+r=1} p_t b_j + \cdots + \sum_{t+j=\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} p_t b_j \right) \\
&= 2 + a_1 + \cdots + a_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} - \left(1 + \sum_{t+j=1} p_t b_j + \cdots + \sum_{t+j=\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} p_t b_j \right) \\
&= 2 + a_1 + \cdots + a_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} - \left(1 + p_1 + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right) \left(1 + b_1 + \cdots + b_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right)
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\left(1 + p_1 + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right) \left(1 + b_1 + \cdots + b_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right) \\
&= 1 + (a_1 - f_1) + \cdots + \left(a_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} - f_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} \right)
\end{aligned}$$

Comme

$$(1 + \bar{p}_1 + \cdots) = \left(1 + p_1 + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right)^{-1}$$

on a d'une part $\forall i \geq 1, \bar{p}_i$ est un polynôme de $p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ et d'autre part

$$1 + b_1 + \cdots + b_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \left(1 + (a_1 - f_1) + \cdots + \left(a_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} - f_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor} \right) \right) (1 + \bar{p}_1 + \cdots)$$

En particulier pour $\ell > \frac{k}{2}$ on obtient

$$a_\ell - \bar{p}_\ell = -(\bar{p}_{\ell-1} (a_1 - f_1) + \cdots + (a_\ell - f_\ell)),$$

si k est pair $b_{\frac{k}{2}} = e_k^2$ et par conséquent

$$a_\ell + e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}} = -\left(\bar{p}_{\frac{k}{2}-1} (a_1 - f_1) + \cdots + \left(a_{\frac{k}{2}} - f_{\frac{k}{2}} \right) \right).$$

□

Démonstration. Soit $(\Lambda(\{x_i\}, \bar{e}_{m+k-1}), 0)$ le modèle minimal de $SO(m+k)$, et soient $(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0)$, $(\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0)$ et $(\Lambda(\{b_j\}, e_k), 0)$ les modèles de Sullivan minimaux de $BSO(m+k)$, $BSO(m)$ et $BSO(k)$ respectivement. Comme

$$Bj: BSO(m) \times BSO(k) \longrightarrow BSO(m+k)$$

a pour fibre homotopique l'espace $\frac{SO(m+k)}{SO(m) \times SO(k)}$. D'après [13, Section 3], il admet un modèle de Sullivan relatif de la forme

$$(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{p_t\}, \{b_j\}, e_k, e_m) \otimes \Lambda(\{x_i\}, \bar{e}_{m+k-1}), D_1)$$

où D_1 est la différentielle définie par :

$$\begin{cases} D_1 x_i = id^*(a_i) - Bj^*(a_i) \\ D_1 \bar{e}_{m+k-1} = id^*(e_{m+k}) - Bj^*(e_{m+k}) \\ D_1 a_i = D_1 b_j = D_1 p_t = 0 \\ D_1 e_{m+k} = D_1 e_m = D_1 e_k = 0. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Bj^* est un modèle de Bj . Mais d'après le théorème 1.6.1 Bj^* est défini de $(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0)$ vers $(\Lambda(\{p_t\}, e_m), 0) \otimes (\Lambda(\{b_j\}, e_k), 0)$ par :

$$Bj^*(a_i) = p_i + b_i + \sum_{t+j=i \geq 1} p_t b_j, \text{ et } Bj^*(e_{m+k}) = e_m e_k.$$

En injectant cette définition dans (4.3.3), on trouve

$$\begin{cases} D_1 x_i = a_i - (p_i + b_i + \sum_{t+j=i} p_t b_j) \\ D_1 \bar{e}_{m+k-1} = e_{m+k} - e_m e_k \\ D_1 a_i = D_1 b_j = D_1 p_t = 0 \\ D_1 e_{m+k} = D_1 e_m = D_1 e_k = 0. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Ce modèle n'est pas minimal. En vu d'obtenir un modèle de Sullivan relatif minimal, définissons l'adgc de Sullivan relative suivante

$$(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_1)$$

avec

- $D_1 a_i = D_1 e_{m+k} = D_1 e_m = D_1 p_t = D_1 e_k = 0$,
- $D_1 x_{\frac{k}{2}} = a_{\frac{k}{2}} - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}$ si k est pair et $D_1 x_\ell = a_\ell - \bar{p}_\ell$ si $\ell > \frac{k}{2}$,
- $D_1 \bar{e}_{m+k-1} = e_{m+k} - e_m e_k$.

Nous définissons aussi ϕ de

$$(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_1)$$

vers

$$(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{p_t\}, \{b_j\}, e_k, e_m) \otimes \Lambda(\{x_i\}, \bar{e}_{m+k-1}), D_1)$$

par

1. $\phi(a_i) = a_i, \phi(e_{m+k}) = e_{m+k}, \phi(p_t) = p_t, \phi(e_k) = e_k, \phi(e_m) = e_m,$
2. $\phi(x_\ell) = -(\bar{p}_{\ell-1}x_1 + \bar{p}_{\ell-2}x_2 + \cdots x_\ell)$
3. $\phi(\bar{e}_{m+k}) = \bar{e}_{m+k}.$

Cette application est un quasi-isomorphisme. En effet on a $\phi(D_1 a_i) = D'_1 a_i = 0, \phi(D_1 e_{m+k}) = D'_1 e_{m+k} = 0, \phi(D'_1 p_t) = D'_1 p_t = 0, \phi(D_1 e_k) = D'_1 e_k = 0, \phi(D_1 e_m) = D'_1 e_m = 0, \phi(D_1 x_\ell) = \phi(a_\ell - \bar{p}_\ell) = a_\ell - \bar{p}_\ell$ et

$$\begin{aligned} D'_1(\bar{p}_{\ell-1}x_1 + \bar{p}_{\ell-2}x_2 + \cdots x_\ell) &= (\bar{p}_{\ell-1}D'_1 x_1 + \bar{p}_{\ell-2}D'_1 x_2 + \cdots D'_1 x_\ell) \\ &= \bar{p}_{\ell-1}(a_1 - (p_1 + b_1)) + \cdots + \bar{p}_1(a_\ell - \sum_{t+j=\ell} p_t b_j) \\ &= -(a_\ell - \bar{p}_\ell) \text{ (d'après le lemme 4.3.2).} \end{aligned}$$

donc $\forall \ell > \frac{k}{2}$ on a $\phi(D_1 x_\ell) = D'_1 \phi(x_\ell)$. On montre de façon similaire que

$$\phi\left(D_1 x_{\frac{k}{2}}\right) = a_{\frac{k}{2}} - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}} = D'_1 \phi\left(x_{\frac{k}{2}}\right).$$

Ceci montre que ϕ est un morphisme d'adgc et il est clair qu'il induit un isomorphisme en cohomologie. Ceci achève la partie horizontale de la preuve. $\square$

4.4 Modèle d'adgc de E Stiefel $(\gamma^m, \eta) \longrightarrow Y$

Soit $\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \longrightarrow Y$ un fibré vectoriel de rang $m+k$ et de base simplement connexe. L'objectif de cette section est de construire un modèle d'adgc du fibré

$$E \text{ Stiefel}(\gamma^m, \eta) \xrightarrow{\pi_2} Y$$

à partir des données suivantes :

- un modèle de Sullivan $(\Lambda V, d)$ de Y ,
- des représentants $p_i(\eta) \in (\Lambda V)^{4i} \cap \ker d$ de classe de Pontryagin de η pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$
- d'un représentant $e(\eta) \in (\Lambda V)^{m+k} \cap \ker d$ de la classe d'Euler de η (si $m+k$ est pair).

Notre modèle d'adgc de π_2 est un modèle de Sullivan relatif de la forme

$$(\Lambda V, d) \hookrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_2) \quad (4.4.1)$$

où les générateurs x_i, p_t, e_k, e_m et $\bar{e}_{m+k-1}$ sont ceux introduits dans la section 4.2 et la section 4.3, et la différentielle D_2 est définie par :

- $D_2|_{\Lambda V} = d$,
- $D_2x_\ell = p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell$ si $\ell > \frac{k}{2}$ et $D_2x_{\frac{k}{2}} = p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}$ si k est pair,
- $D_2\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta) \otimes 1 - e_me_k$,
- $D_2p_t = D_2e_m = D_2e_k = 0$.

Le résultat que nous allons montrer est le suivant :

Proposition 4.4.1. *Considérons $\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \longrightarrow Y$ un fibré vectoriel de rang $m+k$, avec Y simplement connexe. Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle d'adgc de Y . Alors le modèle de Sullivan relatif*

$$(\Lambda V, d) \hookrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_2)$$

construit en (4.4.1) est un modèle d'adgc de $\pi_2: E\text{Stiefel}(\gamma^m, \eta) \longrightarrow Y$.

Démonstration. D'après le théorème 3.3.2 le diagramme suivant est un diagramme produit fibré

$$\begin{array}{ccc} E\text{Stiefel}(\gamma^m, \eta) & \longrightarrow & BSO(m) \times BSO(k) \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow Bj \\ Y & \xrightarrow{g} & BSO(m+k). \end{array} \quad (4.4.2)$$

Considérons $p_i(\eta)$ et $e(\eta)$ dans $A \cap \ker d_A$ respectivement des représentants des classes de Pontryagin et de Euler de η . Considérons le modèle minimal de $BSO(m+k)$

$$(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0) \xrightarrow{\cong} A_{pl}(BSO(m+k))$$

avec $\deg(a_i) = 4i$ et e_{m+k} est le générateur optionnel de degrés $m+k$. Dans la section 4.2 nous avons vu que le modèle d'adgc de g est complètement déterminé par les classes de Pontryagin et d'Euler de η . Autrement dit, si ψ_g est le modèle de g , nous avons :

$$\psi_g : (\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0) \longrightarrow (A, d_A),$$

avec

$$\psi_g(a_i) = p_i(\eta) \text{ et } \psi_g(e_{m+k}) = e(\eta).$$

D'autre part, d'après le théorème 4.3.1, un modèle de Sullivan relatif de

$$Bj: BSO(m) \times BSO(k) \longrightarrow BSO(m+k)$$

est donné par

$$(\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}), 0) \hookrightarrow (A_1, D_1)$$

avec

$$(A_1, D_1) = (\Lambda(\{a_i\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_1)$$

et

$$\begin{cases} D_1 x_\ell = a_\ell - \bar{p}_\ell \text{ si } \ell > \frac{k}{2} \\ D_1 x_{\frac{k}{2}} = a_{\frac{k}{2}} - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}} \text{ si } k \text{ est pair} \\ D_1 \bar{e}_{m+k-1} = e_{m+k} - e_m e_k \\ D_1 a_i = D_1 p_t = 0 \\ D_1 e_{m+k} = D_1 e_m = D_1 e_k = 0. \end{cases}$$

Dès lors d'après le théorème 2.4.1 un modèle de Sullivan relatif de π_2 est de la forme :

$$(\Lambda V, d) \hookrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}), D_2)$$

avec

$$D_2 x = (\psi_g \otimes 1)(D_1 x),$$

où $\psi_g \otimes 1$ est défini de

$$\Lambda(\{a_\ell\}, e_{m+k}) \otimes \Lambda(\{x_i\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1})$$

vers

$$\Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \{p_t\}, e_m, e_k, \bar{e}_{m+k-1}).$$

Un calcul simple nous donne :

- $D_2|_{\Lambda V} = d,$
- $D_2 x_\ell = p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell$ si $\ell > \frac{k}{2}$ et $D_2 x_{\frac{k}{2}} = p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}$ si k est pair,
- $D_2 \bar{e}_{m+k-1} = e(\eta) \otimes 1 - e_m e_k,$
- $D_2 p_t = D_2 e_m = D_2 e_k = 0.$

□

Exemple 4.4.2. *Considérons un fibré vectoriel $\eta: \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow E\eta \longrightarrow Y$. Supposons Y simplement connexe. Si $(\Lambda V, d_1)$ est le modèle minimal de Y le modèle relatif de Sullivan de $E\text{Stiefel}(\gamma^m, \eta)$:*

	$m=2$	$m=3$
$k=3$	• $(\Lambda V \otimes \Lambda(x_2, e_2), D_2)$ • $D_2 x_2 = p_2(\eta) \otimes 1$ • $D_2 e_2 = 0$ • $D_2 _V = d_1$	• $(\Lambda V \otimes \Lambda(x_2, p_1, \bar{e}_5), D_2)$ • $D_2 x_2 = p_2(\eta) \otimes 1 - p_1^2$ • $D_2 \bar{e}_5 = e(\eta)$ • $D_2 p_1 = 0$ • $D_2 _V = d_1$
$k=4$	• $(\Lambda V \otimes \Lambda(x_2, e_2, e_4, \bar{e}_5), D_2)$ • $D_2 x_2 = p_2(\eta) \otimes 1 - e_4^2 - e_2^4$ • $D_2 \bar{e}_5 = e(\eta) \otimes 1 - e_2 \cdot e_4$ • $D_2 e_2 = D_2 e_4 = 0$ • $D_2 _V = d_1$	• $(\Lambda V \otimes \Lambda(x_2, x_3, p_1, e_4), D_2)$ • $D_2 x_2 = p_2(\eta) \otimes 1 + e_4^2 - p_1^2$ • $D_2 x_3 = -p_1^3$ • $D_2 \bar{e}_5 = e(\eta) \otimes 1$ • $D_2 e_4 = 0$ • $D_2 _V = d_1$

4.5 Modèle rationnel du fibré de Stiefel

Dans cette section nous allons donner la preuve du théorème 4.1.1 qui donne un modèle d'adgc explicite du fibré de Stiefel.

Démonstration du théorème 4.1.1. D'après la proposition 1.4.12

$$\pi_1: E\text{Stiefel}(\xi, \eta) \longrightarrow X$$

est le produit fibré de

$$\pi: E\text{Stiefel}(\gamma^m, \eta) \longrightarrow BSO(m)$$

le long de $f: X \longrightarrow BSO(m)$. Alors, d'après le théorème 2.4.1 le modèle de π_1 est de la forme :

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda W, D),$$

où

- (A, d_A) est un modèle d'adgc de X , $(\Lambda W, \bar{D})$ est un modèle de $E \operatorname{rep}_m(\eta)$,
- $Dx = (\psi_f \otimes 1)(D_2x)$, où

$$\psi_f \otimes 1 : \Lambda(\{p_t\}, e_m) \otimes \Lambda W \longrightarrow A \otimes \Lambda W$$

avec

$$\Lambda W = \Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, e_k, \bar{e}_{m+k-1}),$$

et d'après le théorème 4.4.1

$$\begin{cases} D_2x_\ell = p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell \text{ si } \ell > \frac{k}{2} \\ D_2x_{\frac{k}{2}} = p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - e_k^2 - \bar{p}_{\frac{k}{2}} \text{ si } k \text{ est pair} \\ D_2\bar{e}_{m+k-1} = e(\eta) \otimes 1 - e_me_k \\ D_{2|V} = d \\ D_2p_t = 0. \end{cases}$$

Par conséquent pour $\ell > \frac{k}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} Dx_\ell &= (\psi_f \otimes 1)(D_2x_\ell) \\ &= (\psi_f \otimes 1)(1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell) \\ &= (\psi_f \otimes 1)(1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1) - (\psi_f \otimes 1)(\bar{p}_\ell) \\ &= 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned} Dx_{\frac{k}{2}} &= 1 \otimes p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}(\xi) \otimes 1 \otimes 1 - e_k^2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ D\bar{e}_{m+k-1} &= e(\eta) \otimes 1 - e(\xi)e_k \\ De_k &= 0 \\ D|_V &= d \\ D|_A &= d_A. \end{aligned}$$

Ainsi suivant les parités de m et k le modèle notre modèle de fibré de Stiefel est donné par la formule suivante :

- Si $m = 2l + 1$ et $k = 2s + 1$, il est de la forme

$$(A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(x_{s+1}, \dots, x_{l+s}, \bar{e}_{m+k-1}), D),$$

avec

$$\begin{cases} Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1 \text{ pour } s+1 \leq \ell \leq l+s \\ D\bar{e}_{m+k-1} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1, \\ D|_V = d \\ D|_A = d_A, \end{cases}$$

– si $m = 2l$ et $k = 2s+1$,

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(x_{s+1}, \dots, x_{l+s}), D),$$

où

$$\begin{cases} D|_A = d_A \\ D|_V = d \\ Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1 \text{ pour } s+1 \leq \ell \leq l+s, \end{cases}$$

– si $m = 2l$ et $k = 2s$,

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(x_s, \dots, x_{l+s-1}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k), D),$$

où

$$\begin{cases} D|_A = d_A \\ D|_V = d \\ Dx_s = 1 \otimes p_s(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_s(\xi) \otimes 1 \otimes 1 - e_k^2, \\ Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1 \text{ si } s+1 \leq \ell \leq l+s-1 \\ D\bar{e}_{m+k-1} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1 - e(\xi)e_k \\ De_k = 0. \end{cases}$$

– si $m = 2l+1$ et $k = 2s$,

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(x_s, \dots, x_{l+s}, e_k), D),$$

où

$$\begin{cases} D|_A = d_A \\ D|_V = d \\ Dx_s = 1 \otimes p_s(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_s(\xi) \otimes 1 \otimes 1 - e_k^2, \\ Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1 \text{ pour } s+1 \leq \ell \leq l+s, \\ De_k = 0. \end{cases}$$

□

4.6 Trivialité rationnelle du fibré de Stiefel

Dans cette section nous allons déduire à partir du théorème 4.1.1 que, sous certaines conditions liées aux classes de Pontryagin de ξ , le fibré de Stiefel associé à ξ et η est rationnellement trivial. Tout d'abord rappelons la définition d'un fibré rationnellement trivial.

Définition 4.6.1. *Considérons un fibré $\xi: F \rightarrow E \rightarrow B$ et son modèle relatif de Sullivan*

$$(A, d_A) \hookrightarrow (A \otimes \Lambda V).$$

Le fibré ξ est dit rationnellement trivial s'il existe un isomorphisme

$$\psi: (A, d_A) \otimes (\Lambda V, d) \xrightarrow{\cong} (A \otimes \Lambda V, D)$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xhookrightarrow{\quad} & (A \otimes \Lambda V) \\ & \searrow & \nearrow \scriptstyle \cong \\ & (A, d_A) \otimes (\Lambda V, d) & \end{array}$$

ψ

Remarque 4.6.2. *Si $\xi: F \rightarrow E \rightarrow B$ est rationnellement trivial son rationalisé*

$$\xi_{\mathbb{Q}}: F_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E_{\mathbb{Q}} \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$$

est trivial. C'est-à-dire $E_{\mathbb{Q}} = F_{\mathbb{Q}} \times B_{\mathbb{Q}}$.

Du théorème 4.1.1 nous déduisons le résultat suivant.

Corollaire 4.6.3. *Soient $\xi: \mathbb{R}^m \rightarrow E\xi \rightarrow X$ et $\eta: \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow E\eta \rightarrow Y$ deux fibrés vectoriels de rang m et $m+k$ respectivement de bases simplement connexes. Si la classe d'Euler de ξ est nulle ou k est impair, et si*

$$\forall \ell \geq \frac{k}{2}, \bar{p}_{\ell}(\xi) = 0,$$

alors le fibré Stiefel (ξ, η) est rationnellement trivial.

Démonstration. Soit (A, d_A) un modèle d'adgc de X et (A, d_A) le modèle de Sullivan minimal de Y . D'après le théorème 4.1.1 le modèle de

$$\pi_1 : E \text{ Stiefel}(\xi, \eta) \longrightarrow X$$

est de la forme

$$(A, d_A) \hookrightarrow \left(A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda \left(\{x_\ell\}_{\frac{k}{2} \leq \ell \leq \frac{m+k-1}{2}}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k \right), D \right)$$

où

1. $D|_A = d_A, D|_V = d,$
2. $Dx_{\frac{k}{2}} = 1 \otimes p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_{\frac{k}{2}}(\xi) \otimes 1 \otimes 1 - e_k^2$ et
 $Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1 - \bar{p}_\ell(\xi) \otimes 1 \otimes 1$ si $\ell > \frac{k}{2},$
3. $D\bar{e}_{m+k-1} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1 - e(\xi) e_k.$
4. $De_k = 0.$

Par conséquent si

$$\forall \ell \geq \frac{k}{2}, \bar{p}_\ell(\xi) = 0 \text{ et } e(\xi) = 0 \text{ ou } k \text{ est impair}$$

on a

1. $D|_A = d_A, D|_V = d,$
2. $Dx_{\frac{k}{2}} = 1 \otimes p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - e_k^2$ et $Dx_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1$ si $\ell > \frac{k}{2},$
3. $D\bar{e}_{m+k-1} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1.$

Des lors

$$\begin{aligned} & \left(A \otimes \Lambda V \otimes \Lambda \left(\{x_\ell\}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor}, \bar{e}_{m+k}, e_k \right), D \right) = \\ & (A, d_A) \otimes \left(\Lambda V \otimes \Lambda \left(\{x_\ell\}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k \right), \bar{D} \right), \end{aligned}$$

où $\left(\Lambda V \otimes \Lambda \left(\{\bar{x}_\ell\}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor}, \bar{e}_{m+k}, e_k \right), \bar{D} \right)$ est le modèle de $E \text{ rep}_m(\eta)$ qui est la fibre du fibré de Stiefel. $\square$

Nous avons aussi le corollaire suivant

Corollaire 4.6.4. *Si la classe d'Euler rationnelle de η est nulle et si toutes les classes de Pontryagin rationnelles de η sont nulles pour des degrés plus grand à $2k - 2$, alors*

$$E \text{ rep}_m(\eta) \simeq_{\mathbb{Q}} Y \times \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}).$$

Démonstration. Comme la fibre du modèle est le modèle de la fibre, d'après le théorème 4.1.1 le modèle de $E \operatorname{rep}_m(\eta)$ est de la forme

$$\left(\Lambda V \otimes \Lambda \left(\{x_\ell\}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq \ell \leq \lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k \right), \bar{D} \right)$$

avec

1. $\bar{D}|_V = d$,
2. $\bar{D}x_{\frac{k}{2}} = 1 \otimes p_{\frac{k}{2}}(\eta) \otimes 1 - e_k^2$ si k est pair et $\bar{D}x_\ell = 1 \otimes p_\ell(\eta) \otimes 1$ si $\ell > \frac{k}{2}$,
3. $\bar{D}\bar{e}_{m+k-1} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1$.

Si $e(\eta) = 0$, et si $\forall \ell \geq \frac{k}{2}$, $p_\ell(\eta) = 0$ alors

1. $\bar{D}|_V = d$,
2. $\bar{D}x_{\frac{k}{2}} = -e_k^2$ si k est pair et $\bar{D}x_\ell = 0$ si $\ell > \frac{k}{2}$,
3. $\bar{D}\bar{e}_{m+k} = 1 \otimes e(\eta) \otimes 1$.

$$\left(\Lambda V \otimes \Lambda(\{x_\ell\}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k), \bar{D} \right) = (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda(\{x_\ell\}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k), d'),$$

où $(\Lambda V, d)$ est le modèle minimal de Y et $(\Lambda(\{x_\ell\}, \bar{e}_{m+k-1}, e_k), d')$ est le modèle minimal de la variété de Stiefel $\operatorname{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$ (voir [21]). $\square$

Remarque 4.6.5. Ces résultats sont très utiles dans la suite de cette thèse. en effet, ils permettent d'identifier sous certaines hypothèses l'espace des immersions à un certain espace des fonctions comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 5

Homotopie rationnelle de l'espace des immersions

5.1 Introduction

Étant donné deux variétés M et N lisses, un problème intéressant est d'étudier les applications lisses entre M et N . Un cas particulièrement intéressant est celui de plongement (voir la définition 5.2.2) de M dans N lorsque $\dim N \geq \dim M$. Comprendre l'espace des plongements de M dans N , $Emb(M, N)$, est un problème très intéressant en mathématique. Cependant, ceci est très compliqué ; car la propriété d'être un plongement est globale sur M . Cependant il existe une classe de fonctions proches des plongements dont la propriété est locale sur M : il s'agit des immersions de M dans N (voir la définition 5.2.2). L'espace des immersions de M dans N , noté $Imm(M, N)$, est l'ensemble de toutes les immersions de M dans N muni de la C^1 -topologie faible. L'étude de l'espace des immersions fournit beaucoup d'informations sur l'espace des plongements. La théorie des immersions va connaître un grand succès dans le monde des mathématiques. Un problème intéressant est de comprendre le type d'homotopie de l'espace des immersions. Cependant l'étude de l'espace des immersions peut s'avérer très compliqué même dans des cas simples. Ce problème va connaître une énorme avancée grâce au travail de thèse de M. Hirsch [16]. M. Hirsch montre que l'espace des immersions entre deux variétés a le type d'homotopie de l'espace des sections d'un certain fibré (voir le théorème 5.2.7). Ce résultat ramène le problème de l'étude de type d'homotopie de l'espace

des immersions à celui de l'espace des sections d'un fibré. L'étude de type d'homotopie de l'espace des sections d'un fibré s'avère être plus abordable, cependant ce problème est en général délicat.

Dans ce chapitre en se basant sur le travaux de M. Hirsch nous allons étudier le type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions d'une variété M simplement connexe et de type fini dans une autre variété N simplement connexe. Dans une première partie (voir la section 5.3) nous allons étudier le type d'homotopie rationnelle de $Imm(M, N)$ (voir la définition 5.2.4), où M et N sont deux variétés avec $\dim M < \dim N$. Nous montrerons que sous certaines conditions liées à la classe d'Euler de M et aux classes de Pontryagin de N , chaque composante connexe de cet espace est rationnellement équivalente à un espace des fonctions (théorème 5.3.1). Des résultats plus intéressants seront obtenus lorsque $N = \mathbb{R}^{m+k}$ (voir la section 5.4). On montrera que dans ce cas, toutes les composantes connexes de l'espace des immersions ont le même type d'homotopie rationnelle qu'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane (voir théorème 5.4.3, théorème 5.4.8, et corollaire 5.4.9). Ces résultats vont nous permettre de donner une formule explicite de la série des groupes d'homotopie rationnelle de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$, ils nous permettront aussi de montrer que les nombres de Betti de l'espace $Emb(M, \mathbb{R}^{m+k})$ des plongements de M dans $\mathbb{R}^{m+k}$ sont à croissance exponentielle (voir le corollaire 5.5.9).

Plan du chapitre

- Dans la section 5.2 on rappelle certaines définitions de base sur les immersions. On définit entre autres la C^1 -topologie faible, l'espace des immersions et l'espace des plongements. Cette section sera clôturée avec le célèbre théorème de Smale-Hirsch (voir théorème 5.2.7) qui identifie l'espace des immersions à l'espace des sections d'un fibré. Nous allons finir cette section avec des résultats classiques qui lient les immersions et les classes caractéristiques.
- Dans la section 5.3 on étudie le type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions d'une variété dans une autre variété. Le résultat fondamental de cette section est le théorème 5.3.1.
- Dans la section 5.4 on étudie le type d'homotopie rationnelle d'une variété M dans un espace euclidien. On distinguera deux cas suivants

la parité de la codimension. On montrera les théorème 5.4.3, 5.4.8 et le corollaire 5.4.9 qui sont les principaux résultats de la section.

- Dans la section 5.5 on va donner quelques applications importantes des résultats de la section 5.3, la section 5.4. Plus précisément nous allons calculer la série de groupes d'homotopie de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ et puis nous montreront que les nombres de Betti de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ sont à croissance polynomiale (corollaire 5.5.5), et puis on verra que les nombres de Betti rationnels de $Emb(M, \mathbb{R}^{m+k})$ sont à croissance exponentielle (corollaire 5.5.9).

5.2 Espace des immersions et fibré de Stiefel

Dans cette section nous rappelons la définition de l'espace des immersions, de l'espace des plongements qui sont les objets centraux de ce travail. Nous rappelons entre autres les résultats importants de la théorie d'immersion qui seront utilisés pour la suite.

5.2.1 C^1 -topologie faible

Commençons par un rappel sur la notion de la C^1 -topologie faible qui est un outil indispensable pour la définition de l'espace des immersions. La référence principale est [16, chapitre 2].

Considérons M et N deux variétés de classe C^1 , et notons $C^1(M, N)$ l'ensemble des applications de M vers N de classe C^1 . Nous allons construire une base de voisinage définissant une topologie appelée la C^1 -topologie faible. Soit donc $f \in C^1(M, N)$. Pour deux cartes (ϕ, U) et (ψ, V) sur M et N respectivement, pour $K \subset U$ un compact vérifiant $f(K) \subset V$, et pour $0 < \epsilon \leq \infty$, désignons par

$$\mathcal{N}^1(f; (\phi, U), (\psi, V), K, \epsilon),$$

l'ensemble des applications $g: M \rightarrow N$ de classe C^1 vérifiant $g(K) \subset V$ et

$$\|D^k(\psi f \phi^{-1}(x)) - D^k(\psi g \phi^{-1}(x))\| < \epsilon$$

pour tout $x \in \phi(K)$, $k = 0, 1$.

Ici $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne standard.

Définition 5.2.1. La C^1 -topologie faible sur $C^1(M, N)$ est la topologie engendrée par la famille des $\mathcal{N}^1(f; (\phi, U), (\psi, V), K, \epsilon)$.

5.2.2 Définition de l'espace des immersions

Le but de cette sous section est de rappeler la définition de l'espace des immersions, qui est l'objet central de cette thèse.

Définition 5.2.2. Une immersion entre deux variétés M et N est une application de classe C^1 $f : M \looparrowright N$, telle que pour tout $x \in M$, la différentielle $T_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$ est injective.

Un plongement est une immersion qui est un homéomorphisme sur son image.

Définition 5.2.3. Deux immersions $f, g : M \looparrowright N$ sont régulièrement homotopes s'il existe une application de classe C^1

$$\begin{aligned} F : M \times [0, 1] &\longrightarrow N \\ (x, t) &\mapsto F_t(x) = F(x, t) \end{aligned}$$

telle que $F_0 = f, F_1 = g$ et chaque F_t est une immersion.

Définition 5.2.4. L'espace des immersions de M dans N , que l'on note $Imm(M, N)$, est l'ensemble de toutes les immersions $f : M \looparrowright N$ muni de la topologie induite par la C^1 -topologie faible de $C^1(M, N)$. C'est-à-dire,

$$Imm(M, N) = \{f : M \looparrowright N \mid f \text{ est une immersion}\}.$$

L'espace des immersions de M dans N n'est pas connexe en général. Si $f : M \looparrowright N$ est une immersion on notera :

$$Imm(M, N; f)$$

la composante connexe de $Imm(M, N)$ contenant f .

Pour la suite faisons la remarque suivante :

Remarque 5.2.5. Si M et N sont deux variétés de classe C^1 alors les classes d'équivalence d'homotopie régulière de M dans N s'identifient aux composantes connexes de l'espace $Imm(M, N)$.

Définition 5.2.6. L'espace des plongements de M dans N est le sous-espace

$$Emb(M, N) = \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ est un plongement}\}.$$

5.2.3 Théorème de Smale-Hirsch

L'objectif de cette section est de rappeler le théorème central de la théorie des immersions : le théorème de Smale-Hirsch (théorème 5.2.7). Ce théorème nous sera d'une grande utilité dans la suite de ce travail en ce sens que c'est le point de départ dans l'étude d'homotopie de $Imm(M, N)$.

En appliquant la construction de Stiefel (voir la définition 3.2.1) aux deux fibrés tangents τ_M et τ_N , on obtient le fibré

$$\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N) : E \text{ rep}_m(\tau_N) \longrightarrow E \text{ Stiefel}(\tau_M, \tau_N) \xrightarrow{\pi_1} M.$$

Un point typique de $E \text{ Stiefel}(\tau_M, \tau_N)$ est une $GL(m)$ -orbite $[(x, v), (y, w)]$ où $v = (v_1, \dots, v_m)$ est un m -repère de l'espace tangent au point $x \in M$ et $w = (w_1, \dots, w_m)$ est un m -repère de l'espace tangent de N au point y et

$$\pi_1[(x, v), (y, w)] = x.$$

Notons $\Gamma(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N))$ l'espace des sections de ce fibré (voir la définition 2.9.1). Nous allons à présent rappeler la construction de "Smale-Hirsch" qui est une application continue

$$\begin{aligned} s : Imm(M, N) &\longrightarrow \Gamma(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)) \\ (f : M \rightarrow N) &\mapsto (s(f) : M \longrightarrow E \text{ Stiefel}(\tau_M, \tau_N)). \end{aligned}$$

Soit $f \in Imm(M, N)$, montrons comment la section $s(f)$ est construite. Si $x \in M, v = (v_1, \dots, v_m)$ est un m -repère dans $T_x M$ alors on pose

$$df_x^{\times m}(v) := (df_x(v_1), \dots, df_x(v_m))$$

(où $df_x : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$ est la différentielle de f en x) qui est un m -repère de f en x . Ceci induit une application

$$\begin{aligned} \phi_f : E \text{ prin}(\tau_M) &\longrightarrow E \text{ prin}(\tau_M) \times E \text{ rep}_m(\tau_N) \\ (x, v) &\mapsto ((x, v), (f(x), df_x^{\times m}(v))) \end{aligned}$$

qui est clairement $GL(m)$ -équivariante, et donc elle induit une application entre les espaces d'orbites

$$\bar{\phi}_f : \frac{E \operatorname{prin}(\tau_M)}{GL(m)} \longrightarrow E \operatorname{prin}(\tau_M) \times_{GL(m)} E \operatorname{rep}_m(\tau_N).$$

Comme $\operatorname{prin}(\tau_M)$ est un $GL(m)$ -fibré principal, il vient que la source de $\bar{\phi}_f$ est canoniquement homéomorphe à M et le but de $\bar{\phi}_f$ est $E \operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)$. Ceci induit donc une application

$$s(f) : M \longrightarrow E \operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N).$$

Il est facile de vérifier que $s(f)$ est une section de π_1 et qu'elle dépend continûment de f (par la C^1 -topologie). Dans [15] Morris Hirsch démontre le résultat suivant :

Théorème 5.2.7 (Smale-Hirsch). *Soient M et N deux variétés de dimensions m et $m+k$ respectivement, avec $k \geq 1$. Alors, l'application*

$$s : Imm(M, N) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N))$$

est une équivalence d'homotopie.

Ce théorème est d'une importance capitale dans la théorie des immersions. En effet, il réduit les calculs des groupes d'homotopie de l'espace des immersions aux calculs des groupes d'homotopie de l'espace des sections qui semble être plus abordable. Une des premières applications de ce théorème est obtenue lorsque M est parallélisable et $N = \mathbb{R}^{m+k}$. En effet dans ces conditions le fibré de Stiefel est trivial, dès lors l'espace des sections est l'espace des fonctions de M dans $\operatorname{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$. Plus précisément nous avons le résultat suivant.

Corollaire 5.2.8. *Soit M une variété de dimension m et k un entier strictement positif. Si M est parallélisable alors*

$$Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}) \simeq Map(M, \operatorname{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})).$$

Une autre application (peut être la plus surprenante) du théorème de Smale-Hirsch est le fameux théorème de Smale, plus connu sous le nom du théorème d'inversion de sphère, qui stipule que deux immersions de S^2 dans $\mathbb{R}^3$ sont isotopes. Plus précisément on a le résultat suivant :

Théorème 5.2.9. [31] *L'espace $Imm(S^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe.*

Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons le théorème de Smale-Hirsch pour étudier le type d'homotopie rationnelle de $Imm(M, N)$.

5.2.4 Immersion, classes de Pontryagin et classe d'Euler

Dans cette section on rappelle des liens importants entre la classe d'Euler, les classes de Pontryagin et les immersions. la plus part des résultats de cette section sont inspirés de [1]. On commence avec la proposition suivante.

Proposition 5.2.10 ([25] corollaire 3.5). *Soient M et N deux variétés de classe C^1 avec $\dim M \leq \dim N$. Alors, pour toute immersion $f: M \looparrowright N$, avec N riemannienne, il existe la decomposition en somme de Whitney*

$$f^* \tau_N \cong \tau_M \oplus \nu_f.$$

Définition 5.2.11. *Si $f: M \looparrowright N$ est une immersion, alors le fibré ν_f est appelé fibré normal de f .*

Pour la suite rappelons que $\bar{p}_i(\tau_M) \in H^{4i}(M, \mathbb{Q}), i \geq 1$ sont des éléments homogènes vérifiant

$$\left(1 + p_1(\tau_M) + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\tau_M)\right) (1 + \bar{p}_1(\tau_M) + \cdots) = 1. \quad (5.2.1)$$

Notons que pour raison de degré, les classes de Pontryagin de M de degré plus grand que m sont nulles. C'est-à-dire

$$\forall i > \frac{m}{4}, p_i(\tau_M) = 0.$$

En vertu de cela l'équation (5.2.1) devient :

$$\left(1 + p_1(\tau_M) + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor}(\tau_M)\right) (1 + \bar{p}_1(\tau_M) + \cdots) = 1.$$

Dans la proposition suivante on montre que sous certaines conditions ces éléments coïncident avec les classes de Pontryagin du fibré normal.

Proposition 5.2.12. *Soient M une variété de dimension m et N une variété riemannienne de dimension $m + k$. Si $f: M \looparrowright N$ est une immersion alors pour tout $i \geq 1$:*

$$\bar{p}_i(\tau_M) = p_i(\nu_f).$$

Démonstration. En effet, d'après la proposition 5.2.10

$$f^* \tau_N \cong \tau_M \oplus \nu_f.$$

Donc pour tout $i \geq 1$ on a l'égalité suivante entre les classes de Pontryagin

$$p_i(f^*\tau_N) = p_i(\tau_M \oplus \nu_f).$$

D'autres part d'après [25, Théorème 15.3]

$$\forall i \geq 1 \text{ on a } p_i(\tau_M \oplus \nu_f) = \sum_{t+j=i} p_t(\tau_M) p_j(\nu_f).$$

donc

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{t+j=1} p_t(\tau_M) p_j(\nu_f) + \cdots + \sum_{t+j=m} p_t(\tau_M) p_j(\nu_f) \\ &= \left(1 + p_1(\tau_M) + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\tau_M)\right) \left(1 + p_1(\nu_f) + \cdots + p_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(\nu_f)\right) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \left(1 + p_1(\tau_M) + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\tau_M)\right) \left(1 + p_1(\nu_f) + \cdots + p_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(\nu_f)\right) \\ &= 1 + p_1(\tau_N) + \cdots + p_{\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor}(\tau_N). \end{aligned}$$

Comme pour tout $i \geq 1, p_i(\tau_N) = 0$ on a

$$\left(1 + p_1(\tau_M) + \cdots + p_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\tau_M)\right) \left(1 + p_1(\nu_f) + \cdots + p_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(\nu_f)\right) = 1.$$

Dès lors

$$1 + p_1(\nu_f) + \cdots + p_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(\nu_f) = 1 + \bar{p}_1(\tau_M) + \cdots .$$

□

De cette proposition on déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.13. *Soient M une variété de dimension m et N une variété riemannienne de dimension $m+k$. Supposons que pour tout $i \geq 1, p_i(\tau_N) = 0$. Si $f: M \looparrowright N$ est une immersion, alors :*

$$\forall i \geq \frac{k}{2}, \bar{p}_i(\tau_M) = 0.$$

5.3 Homotopie rationnelle de l'espace des immersions d'une variété dans une autre variété

Dans toute cette section N est une variété riemannienne. Notre objectif est de démontrer que chaque composante connexe de $Imm(M, N)$ a le type d'homotopie rationnelle d'un espace fonctionnel lorsque la classe d'Euler de M et toutes les classes de Pontryagin de N . C'est le théorème suivant :

Théorème 5.3.1. *Soient M et N deux variétés simplement connexes de dimension m et $m + k$ respectivement. Supposons qu'elles sont de type fini et que $k \geq 2$. Si la classe d'Euler de M est nulle ou k est impair et si toutes les classes de Pontryagin rationnelle de N sont nulles, alors pour toute immersion $f: M \hookrightarrow N$ nous avons une équivalence d'homotopie rationnelle*

$$Imm(M, N; f) \simeq_{\mathbb{Q}} Map(M, E \operatorname{rep}_m(\tau_N); \phi_f)$$

où ϕ_f de M dans $E \operatorname{rep}_m(\tau_N)$.

Démonstration. Comme M est immersible dans N et $\forall i \geq 1, p_i(\tau_N) = 0$, alors d'après le corollaire 5.2.13 on a

$$\forall i \geq \frac{k}{2}, \bar{p}_i(\tau_M) = 0,$$

dès lors si la classe d'Euler de M est nulle ou si k est impair, du corollaire 4.6.3 nous déduisons que le fibré Stiefel (τ_M, τ_N) est rationnellement trivial. Par la suite son rationalisé, $\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)_{\mathbb{Q}}$, est trivial et d'après le corollaire 2.9.6 son rationalisé par fibre, $\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)_{(\mathbb{Q})}$, est aussi trivial. D'un autre côté, du théorème 5.2.7 nous avons :

$$Imm(M, N) \simeq \Gamma(\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)).$$

Par conséquent si $f: M \hookrightarrow N$ est une immersion, il existe une section

$$s(f): M \longrightarrow E \operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)$$

telle que

$$Imm(M, N; f) \simeq \Gamma_{s(f)}(\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)).$$

Vu que $E \operatorname{rep}_m(\tau_N)$ est simplement connexe (car N est simplement connexe et $k > 1$), et que M est simplement connexe et de type fini (par hypothèse), d'après le théorème 2.9.7 nous avons l'équivalence suivante :

$$\Gamma_{s(f)}(\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N))_{\mathbb{Q}} \simeq \Gamma_{rs(f)}(\operatorname{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)_{(\mathbb{Q})}). \quad (5.3.1)$$

où

$$r: E\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N) \longrightarrow E\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)_{(\mathbb{Q})}$$

est la rationalisation par fibre. Comme $\text{lStiefel}(\tau_M, \tau_N)_{(\mathbb{Q})}$ est trivial de (5.3.1) nous avons l'équivalence suivante

$$\begin{aligned} \Gamma_{rs(f)}\left(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)_{(\mathbb{Q})}\right) &\simeq \text{Map}\left(M, (E\text{rep}_m(\tau_N))_{\mathbb{Q}}; \phi_f\right) \\ &\simeq \text{Map}\left(M, E\text{rep}_m(\tau_N); \phi_f\right)_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

où ϕ_f est la composante de $s(f)$ à valeur dans $E\text{rep}_m(\tau_N)$. $\square$

Corollaire 5.3.2. *En plus des hypothèses du théorème 5.3.1, si la classe d'Euler de N est nulle, alors pour toute immersion $f: M \looparrowright N$ il existe deux applications continues $\phi_f^1: M \longrightarrow N$ et $\phi_f^2: M \longrightarrow \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$ telle que*

$$Imm(M, N; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Map}\left(M, N; \phi_f^1\right) \times \text{Map}\left(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}); \phi_f^2\right).$$

Démonstration. Si la classe d'Euler de N est nulle, du corollaire 4.6.4 on a

$$E\text{rep}_m(\tau_N) \simeq_{\mathbb{Q}} N \times \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}).$$

Par conséquent d'après la proposition 1.7.3 et le théorème 5.3.1, nous avons

$$Imm(M, N; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Map}\left(M, N \times \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}); \phi_f\right).$$

La conclusion vient de la proposition 1.7.4. $\square$

5.4 Homotopie rationnelle de l'espace des immersions d'une variété dans un espace euclidien

Dans cette section on s'intéresse au cas $N = \mathbb{R}^{m+k}$. Plus précisément, on étudie le type d'homotopie rationnelle de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$, où $m > 0$ est la dimension de M et $k > 1$ est la codimension. Ce cas est particulièrement intéressant en ce sens que beaucoup de nouveaux résultats (intéressants bien évidemment) vont apparaître. Cette section sera subdivisée en deux sous sections suivant la parité de k . Dans la première partie (section 5.4.1) on étudie le cas où k est impair. On montre ensuite que sous de bonnes hypothèses (liées aux classes de Pontryagin de M), toutes les composantes

connexes de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ ont le même type d'homotopie rationnelle. Mieux, on montre que chaque composante a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui ne dépendent que de la cohomologie rationnelle de M et de k (voir le théorème 5.4.3). Dans la deuxième partie (section 5.4.8), on étudie bien évidemment le cas où k est un entier pair. On montre que dans ce cas le type d'homotopie rationnelle des composantes connexes de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ n'est pas toujours le même (théorème 5.4.8). Mais, on verra qu'avec une hypothèse supplémentaire (liée à la cohomologie rationnelle de M) toutes les composantes connexes ont le même type d'homotopie rationnelle (corollaire 5.4.9). Les résultats obtenus dans cette section (théorème 5.4.3, théorème 5.4.8, corollaire 5.4.9) sont parmi les principaux résultats de cette thèse et font l'objet de [37].

5.4.1 Cas où la codimension est impaire

On commence cette section par la définition d'un espace d'Eilenberg-MacLane et de nombre de Betti rationnel d'un espace.

Définition 5.4.1. Soient G un groupe abélien et $n \geq 2$ un entier. Alors un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, n)$ est un CW -complexe connexe tel que

$$\begin{cases} \pi_i(K(G, n)) = 0 \text{ si } i \neq n \\ \pi_n(K(G, n)) = G. \end{cases}$$

Définition 5.4.2. Le i -ème nombre de Betti rationnel d'un espace X , noté $b_i(X)$, est la dimension de l'espace vectoriel rationnel $H_i(X, \mathbb{Q})$. C'est-à-dire,

$$b_i(X) = \dim H_i(X, \mathbb{Q}).$$

Le i -ème nombre d'Hurewicz d'un espace X , noté $h_i(X)$, est la dimension de l'espace vectoriel rationnel $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$. C'est-à-dire

$$h_i(X) = \dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 5.4.3. Soient M une variété simplement connexe de dimension m , et $k \geq 3$ un entier impair. Si M est de type fini, alors chaque composante connexe de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane, qui ne dépendent que de la codimension k et des nombres de Betti rationnels de M .

Nous avons aussi le résultat suivant.

Corollaire 5.4.4. *Soit f une immersion de M dans $\mathbb{R}^{m+k}$, et soit l'espace $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}, f)$ la composante connexe de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ contenant f . Alors, si $k = 2s + 1$ avec s entier positif, on a l'équivalence d'homotopie rationnelle suivante :*

$$Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}, f) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \prod_{s \leq i \leq l+s} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} A_{i,q} & \text{si } m = 2l \\ \prod_{s \leq i \leq l+s} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} A_{i,q} \times K & \text{si } m = 2l + 1, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{i,q} &= K(H^{4i-1-q}(M, \mathbb{Q}), q), \\ K &= \prod_{1 \leq j \leq m+k-1} K(H^{m+k-1-j}(M, \mathbb{Q}), j). \end{aligned}$$

Lorsque $k \geq m + 1$ l'espace des immersions de M dans $\mathbb{R}^{m+k}$ est simplement connexe. Du théorème 5.4.3 nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 5.4.5. *Soient M une variété simplement connexe de dimension m et k un entier positif impair. Si M est type fini et $k \geq m + 1$, alors l'espace des immersions $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui ne dépendent que de k et des nombres de Betti rationnels de M .*

Ce résultat est surprenant car il montre que lorsque $k \geq m + 1$ le type d'homotopie rationnelle de l'espace des immersions $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ ne dépend que du nombre des Betti rationnels de M et de k , mais pas du tout des classes de Pontryagin de M . En outre il faut noter que ce résultat généralise le corollaire 5.2.8. Pour la démonstration de ces résultats on a besoin du théorème suivant.

Théorème 5.4.6. *[28, Théorème 1] ou [34] Soient X un espace topologique et $n \geq 1$ un entier impair. Alors toutes les composantes de $Map(X, S^n)$ ont le même type d'homotopie rationnelle. Chaque composante connexe a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui ne dépendent que des nombres de Betti rationnels de X . Plus précisément,*

$$Map(M, S^n, f) \simeq_{\mathbb{Q}} \prod_{1 \leq i \leq n} K(H^{n-i}(X, \mathbb{Q}), i).$$

Ici $\text{Map}(M, S^n, f)$ est la composante de $\text{Map}(M, S^n)$ contenant f .

Démonstration du théorème 5.4.3. Soient $f: M \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$ une immersion et

$$s(f): M \longrightarrow E \text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}}),$$

la section de Stiefel (τ_M, τ_N) induite par f (voir équation (5.2.1)). D'après le théorème 5.2.7 on a

$$\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}, f) \simeq \Gamma_{s(f)}(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N))$$

où $\Gamma(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N), s_f)$ est l'espace des sections de Stiefel (τ_M, τ_N) homotopes à s_f . Soit

$$\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_N)_{(\mathbb{Q})}: E \text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}})_{(\mathbb{Q})} \xrightarrow{p_{(\mathbb{Q})}} M$$

le rationalisé par fibre de Stiefel (τ_M, τ_N) et

$$(s(f))_{(\mathbb{Q})}: M \longrightarrow (E \text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}}))_{(\mathbb{Q})}$$

l'application obtenue par composition de $s(f)$ et de

$$E \text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}}) \xrightarrow{r_{(\mathbb{Q})}} (E \text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}}))_{(\mathbb{Q})}.$$

Il faut noter que la classe d'Euler et toutes les classes de Pontryagin rationnelles de $\mathbb{R}^{m+k}$ sont nulles et comme $k > 1$, l'espace $E \text{rep}_m(\tau_{\mathbb{R}^{m+k}})$, qui est la fibre du fibré de Stiefel, est simplement connexe. Comme M est simplement connexe, de type fini et k impair, d'après le corollaire 5.3.2, pour toute immersion

$$f: M \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$$

nous avons l'équivalence rationnelle suivante :

$$\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Map}(M, \mathbb{R}^{m+k}, \phi_f^1) \times \text{Map}(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}), \phi_f^2).$$

Comme $\mathbb{R}^{m+k}$ est contractile, alors $\text{Map}(M, \mathbb{R}^{m+k}, \phi_f^1)$ est contractile. Par conséquent

$$\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Map}(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}); \phi_f^2).$$

Pour terminer, il suffit de montrer que l'espace $\text{Map}(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}); \phi_f^2)$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane

qui ne dépendent que des nombres de Betti rationnels de M . Comme k est impair, d'après le corollaire 2.8.5, $\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane. Plus précisément

$$\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \prod_{s \leq i \leq l+s} K(\mathbb{Q}, 4i-1) & \text{si } m = 2l \\ \prod_{s \leq i \leq l+s} K(\mathbb{Q}, 4i-1) \times K(\mathbb{Q}, n) & \text{si } m = 2l+1, \end{cases}$$

où $n = m + k - 1$.

Par conséquent

$$\text{Map}(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}), \phi_f^2) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \prod_{s \leq i \leq l+s} B_i & \text{si } m = 2l \\ \prod_{s \leq i \leq l+s} B_i \times K_1 & \text{if } m = 2l+1 \end{cases}$$

où $B_i = \text{Map}(M, K(\mathbb{Q}, 4i-1); s_i)$ et $K_1 = \text{Map}(M, K(\mathbb{Q}, n); s_0)$ avec $s_i: M \rightarrow K(\mathbb{Q}, 4i-1)$ sont les composantes de $(\phi_f^2)_{\mathbb{Q}}$.

D'autre part, d'après le théorème 5.4.6 chaque composante connexe de l'espace $\text{Map}(M, K(\mathbb{Q}, 4i-1))$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui dépendent seulement des nombres de Betti rationnels de M . Plus précisément on a :

$$\text{Map}(M, K(\mathbb{Q}, 4i-1), s_i) \simeq \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} K(H^{4i-1-q}(M, \mathbb{Q}), q).$$

En posant

$$A_{i,q} = K(H^{4i-1-q}(M, \mathbb{Q}), q)$$

et

$$K = \prod_{1 \leq j \leq m+k-1} K(H^{m+k-1-j}(M, \mathbb{Q}), j),$$

on obtient :

$$\text{Map}(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}), \phi_f^2) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \prod_{s \leq i \leq l+s} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} A_{i,q} & \text{si } m = 2l \\ \prod_{s \leq i \leq l+s} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} A_{i,q} \times K & \text{si } m = \mathfrak{l} \end{cases}$$

avec $\mathfrak{l} = 2l + 1$. □

5.4.2 Cas où la codimension est paire

Dans cette section nous allons montrer les résultats suivants :

Théorème 5.4.7. *Soient M une variété simplement connexe de dimension m , et $k \geq 2$ un entier pair. On suppose que M est de type fini et que sa classe d'Euler, $e(\tau_M)$, est nulle. Si $k \geq m+1$, $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ est connexe et nous avons l'équivalence d'homotopie rationnelle suivante*

$$\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Map}(M, S^k) \times K,$$

où $\text{Map}(M, S^k)$ est l'espace des fonctions de M dans S^k et K est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui dépendent seulement des nombres de Betti rationnels de M .

Théorème 5.4.8. *Soient M une variété simplement connexe de dimension m et $k \geq 2$ un entier pair. On suppose que M est de type fini et $(\tau_M) = 0$. Si $2 \leq k \leq m$, alors chaque composante connexe de $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ a le type d'homotopie rationnelle du produit*

$$\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}, f) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Map}(M, S^k, \tilde{f}) \times K,$$

où

- $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}, f)$ est la composante connexe de $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ contenant f ,
- K est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui dépendent seulement des nombres de Betti rationnels de M , et
- $\text{Map}(M, S^k, \tilde{f})$ est la composante connexe de l'espace des fonctions de M dans S^k contenant la fonction $\tilde{f}$ induite par l'immersion f .

Démonstration du théorème 5.4.7 et du théorème 5.4.8. De théorème 5.2.7, on a une équivalence d'homotopie entre l'espace des immersions de M dans $\mathbb{R}^{m+k}$ et l'espace des sections de Stiefel $(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}})$

$$\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k}) \simeq \Gamma(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}})).$$

- Si $k \geq m+1$, la connexité de $E \text{rep}_m(\tau_{\mathbb{R}^{m+k}})$, qui est de $k-1$, est plus grande que la dimension de M , par conséquent l'espace des sections de Stiefel $(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}})$ est connexe et donc $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ est connexe. Maintenant on va montrer que $\Gamma(\text{Stiefel}(\tau_M, \tau_{\mathbb{R}^{m+k}}))$ a le type d'homotopie rationnelle du produit de $\text{Map}(M, S^k)$ et d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane. Comme M est simplement connexe, de

type fini et de classe d'Euler nulle, et que $\forall i \geq 1, p_i(\tau_{\mathbb{R}^{m+k}}) = 0$, alors d'après le corollaire 5.3.2 on a :

$$\begin{aligned} Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}) &\simeq_{\mathbb{Q}} Map(M, \mathbb{R}^{m+k}) \times Map(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})) \\ &\simeq_{\mathbb{Q}} Map(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})). \end{aligned}$$

La deuxième équivalence vient du fait que $Map(M, \mathbb{R}^{m+k})$ est contractile. D'après le corollaire 2.8.5 on a

$$\text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k}) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \prod_{s+1 \leq i \leq l+s-1} K(\mathbb{Q}, 4i-1) \times S^k & \text{si } m = 2l+1 \\ \prod_{s+1 \leq i \leq l+s-1} K(\mathbb{Q}, 4i-1) \times B \times S^k & \text{si } m = 2l, \end{cases}$$

où

$$B = K(\mathbb{Q}, m+k-1).$$

Dès lors,

$$Map(M, \text{rep}_m(\mathbb{R}^{m+k})) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} B_{s,l} \times H & \text{si } m = 2l+1 \\ B_{s,l} \times A \times H & \text{si } m = 2l, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} B_{s,l} &= \prod_{s+1 \leq i \leq l+s-1} Map(M, K(\mathbb{Q}, 4i-1)) \\ H &= Map(M, S^k) \\ A &= Map(M, K(\mathbb{Q}, m+k-1)). \end{aligned}$$

Finalement, le théorème 5.4.6 nous donne :

$$Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} A_{s,l} \times H & \text{si } m = 2l+1 \\ A_{s,l} \times H \times K & \text{si } m = 2l, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_{s,l} &= \prod_{s+1 \leq i \leq l+s-1} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} K(H^{4i-1-q}(M, \mathbb{Q}), q) \\ K &= \prod_{1 \leq j \leq m+k-1} K(H^{m+k-1-j}(M, \mathbb{Q}), j). \end{aligned}$$

- Si $2 \leq k \leq m$, dans ce cas $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ n'est pas toujours connexe. Si $f: M \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$ est une immersion, en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 5.4.3, on obtient

$$Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} A_{s,l} \times G & \text{si } m = 2l + 1 \\ A_{s,l} \times G \times K & \text{si } m = 2l, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} G &= Map(M, S^k, \tilde{f}), \text{ et} \\ K &= \prod_{1 \leq j \leq m+k-1} K(H^{m+k-1-j}(M, \mathbb{Q}), j). \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.4.9. *Si en plus des hypothèses du théorème 5.4.8, $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$, alors toutes les composantes connexes de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ ont le même type d'homotopie rationnelle, donc l'application $\tilde{f}$ peut être considérée comme une constante.*

Remarque 5.4.10. *Lorsque $k \geq m + 1$, alors $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$, de ce corollaire et du théorème 5.4.7 on déduit que le type d'homotopie rationnelle de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ ne dépend que de nombre de Betti de M et de k comme dans le cas de la codimension impaire.*

Démonstration du corollaire 5.4.9. D'après le théorème 5.4.8, si $e(\tau_M) = 0$, nous avons

$$Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f) \simeq_{\mathbb{Q}} Map(M, S^k; \tilde{f}) \times K,$$

où

- $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)$ est la composante connexe de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ contenant f ,
- K est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane qui dépendent seulement des nombres de Betti rationnels M , et
- $Map(M, S^k; \tilde{f})$ est la composante connexe de l'espace des fonctions de M dans S^k contenant la fonction $\tilde{f}$ induite par l'immersion f .

Pour finir, il suffit de montrer que :

$$Map(M, S^k; \tilde{f}) \simeq_{\mathbb{Q}} Map(M, S^k; 0).$$

Pour celà, considérons $(\Lambda(x, y), d)$ le modèle minimal de S^k et (A, d_A) un modèle de M de dimension finie. Soit

$$\phi : (\Lambda(x, y), d) \longrightarrow (A, d_A)$$

un modèle de $\tilde{f}$. Comme $H^k(A, d) = 0$, alors ϕ est homotope à une certaine application qui envoie x sur 0. Remplaçons ϕ par cette application. Dès lors $\phi(y) = a$ est un cocycle.

Maintenant considérons le morphisme

$$A \otimes \Lambda(x, y) \xrightarrow{\sigma = id \otimes \phi} A,$$

et procédons à un changement de variables en vue d'avoir :

$$\sigma(x) = \sigma(y) = 0.$$

Posons $y' = y - \phi(y) = y - a$ et $dy' = dy$.

On peut supposer avec la même différentielle que :

$$\sigma(x) = \sigma(y) = 0.$$

Toutes les étapes qui suivent dans la construction du modèle rationnel de $Map(M, S^k; \tilde{f})$ dépendent seulement de $\Lambda(x, y)$, A et σ . Le résultat est le même pour tout $\tilde{f}$. Par conséquent on a :

$$Map(M, S^k; \tilde{f}) \simeq_{\mathbb{Q}} Map(M, S^k; 0).$$

Ainsi toutes les composantes de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)$ ont le même type d'homotopie rationnelle. $\square$

5.5 Croissance des nombres de Betti de l'espace des plongements

Dans cette section on donne quelques applications intéressantes des résultats obtenus dans la section 5.4. Plus précisément, on montrera que si M est une variété satisfaisant à la dualité de Poincaré, la série de Hurewicz-Poincaré (voir Définition 5.5.2) de $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ s'exprime en fonction

de la série de Betti-Poincaré de M (voir le théorème 5.5.3 et le théorème 5.5.4). On déduira le corollaire 5.5.5, qui stipule que les nombres de Betti de l'espace $Imm(M, \mathbb{R}^{m+k})$ sont à croissance polynomiale. Cette section sera clôturée avec le corollaire 5.5.9 qui montre la croissance exponentielle des nombres de Betti de $Emb(M, \mathbb{R}^{m+k})$.

Définition 5.5.1. Une suite de réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à croissance exponentielle s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et des constantes C_1 et C_2 (avec $C_1 \geq C_2 > 1$), tel que pour tout $n \geq N$ on ait :

$$C_2^n \leq \sum_{i=0}^n a_i \leq C_1^n.$$

En se rappelant de la définition des nombres de Betti (Définition 5.4.2), nous avons la définition suivante :

Définition 5.5.2. La série de Betti-Poincaré d'un espace X est la série génératrice des nombres de Betti de X ,

$$Betti_X(x) = \sum_i b_i(X) x^i.$$

La série d'Hurewicz-Poincaré d'un espace X est la série génératrice des nombres de Hurewicz de X

$$Hur(X)(x) = \sum_i h_i(X) x^i.$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 5.5.3. Soient M une variété compacte, simplement connexe, sans bord, de dimension m et $k \geq 3$ un entier impair. Si $k \geq \frac{m}{2} + 1$, alors,
– si m est pair

$$Hur(Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)) = \frac{x^{2k-m-1} (1 - x^{2m+2})}{1 - x^4} Betti_M(x),$$

– si m est impair,

$$Hur(Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)) = \frac{x^{3k-m-2} (1 - x^{2m+2})}{1 - x^4} (Betti_M(x))^2,$$

$$\text{où } \frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + \dots$$

Démonstration. Dans toute la preuve b_i désigne le i -ème nombre de Betti de M .

D'après le corollaire 5.4.4, pour toute immersion f de M dans $\mathbb{R}^{m+k}$ on a :

$$Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}, f) \simeq_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \prod_{s \leq i \leq l+s} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} A_{i,q} & \text{si } m = 2l \\ \prod_{s \leq i \leq l+s} \prod_{1 \leq q \leq 4i-1} A_{i,q} \times K & \text{si } m = 2l + 1, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{i,q} &= K(H^{4i-1-q}(M, \mathbb{Q}), q) \\ K &= \prod_{1 \leq j \leq m+k-1} K(H^{m+k-1-j}(M, \mathbb{Q}), j). \end{aligned}$$

Par conséquent :

– si m est pair on a :

$$Hur(Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)) = \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} \sum_{q=1}^{4i-1} b_{4i-1-q} x^q.$$

En posant $q' = 4i - 1 - q$, on obtient :

$$\begin{aligned} Hur(Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)) &= \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} \sum_{q'=4i-2}^0 b_{q'} x^{4i-1-q'} \\ &= \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} x^{4i-1} \sum_{q'=4i-2}^0 b_{q'} x^{-q'} \end{aligned}$$

On effectue à nouveau un changement de variables en posant $q'' = m - q'$. On obtient dès lors que :

$$Hur(Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)) = \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} x^{4i-1-m} \sum_{q''=m-4i+2}^m b_{m-q''} x^{q''}.$$

Par la dualité de Poincaré, on a $b_{m-i} = b_i$, et par conséquent :

$$Hur(Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}; f)) = \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} x^{4i-1-m} \sum_{q''=m-4i+2}^m b_{q''} x^{q''}.$$

D'un autre côté, comme $\forall i < 0, b_i = 0$ alors

$$\forall i \geq \frac{m+2}{4}, \text{ on a } \sum_{q''=m-4i+2}^m b_{q''} x^{q''} = \sum_{q''=0}^m b_{q''} x^{q''}$$

et comme $k \geq \frac{m}{2} + 1$ (hypothèse) on a donc :

$$\sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} x^{4i-1-m} \sum_{q''=m-4i+2}^m b_{q''} x^{q''} = \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} x^{4i-1-m} \sum_{q''=0}^m b_{q''} x^{q''}.$$

Donc

$$Hur \left(Imm \left(M, \mathbb{R}^{m+k}; f \right) \right) = \frac{(1 + x^4 + \dots + x^{2m-2})}{x^{m+1-2k}} Betti_M(x).$$

Pour finir, il suffit de remarquer que

$$1 + x^4 + \dots + x^{2m-2} = \frac{1 - x^{2m+2}}{1 - x^4}.$$

– Si m est impair, on a :

$$Hur \left(Imm \left(M, \mathbb{R}^{m+k}; f \right) \right) = \sum_{i=\frac{k}{2}}^{\frac{m+k-1}{2}} x^{4i-1-m} \sum_{q''=0}^m b_{m-q''} x^{q''} \times K,$$

où

$$K = x^{k-1} \sum_{j=-k+2}^m b_j x^j = x^{k-1} \sum_{j=0}^m b_j x^j; \text{ car } k \geq 3.$$

Le reste de la preuve est le même que lorsque m est pair.

□

Si la codimension est paire, nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.5.4. *Soient M une variété compacte sans bord, simplement connexe de dimension m et $k \geq 2$ un entier pair. On suppose que $k \geq \frac{m}{2} + 1$. Alors, si $e(\tau_M) = 0$ et $H^k(M, \mathbb{Q}) = 0$ on a*

– Si m est impair

$$Hur\left(Imm\left(M, \mathbb{R}^{m+k}; f\right)\right) = \frac{x^{2k-m-1}(1-x^{2m})}{1-x^4} Betti_M(x) \times K_1,$$

où

$$K_1 = Hur\left(Map\left(M, S^k; 0\right)\right) = \sum_i (b_{k-i}(M) - b_{2k-i-1}(M)) x^i.$$

– Si m est pair

$$Hur\left(Imm\left(M, \mathbb{R}^{m+k}; f\right)\right) = \frac{x^{3k-m-2}(1-x^{2m})}{1-x^4} (Betti_M(x))^2 \times K_1.$$

Démonstration. La preuve se fait de la même manière que dans le cas où la codimension est impaire. On utilise entre autres le corollaire 5.4.9 et [28, Proposition 2.3]. $\square$

Du théorème 5.5.3 et théorème 5.5.4 nous déduisons le résultat suivant.

Corollaire 5.5.5. *Soient M une variété simplement connexe de dimension m , et $k \geq 2$. Si M est de type fini et si $e(\tau_M) = 0$ ou k impair, alors les nombres de Betti rationnels de chaque composante connexe de l'espace des immersions de M dans $\mathbb{R}^{m+k}$ sont à croissance polynomiale.*

En vue d'énoncer le résultat ci-dessous, rappelons les définitions suivantes :

Définition 5.5.6. *La caractéristique d'Euler d'un espace X , notée $\chi(X)$, est*

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Définition 5.5.7. *L'espace $\overline{Emb}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ est la fibre homotopique de l'inclusion*

$$Emb(M, \mathbb{R}^{m+k}) \hookrightarrow Imm(M, \mathbb{R}^{m+k}).$$

Théorème 5.5.8. [2]. *Soit M une variété de dimension m et de caractéristique d'Euler $\chi(M) \leq -2$. Alors, si $k \geq m+1$, les nombres de Betti rationnels de $\overline{Emb}(M, \mathbb{R}^{m+k})$ sont à croissance exponentielle.*

De ce théorème et du corollaire 5.5.5 on déduit le résultat suivant.

Corollaire 5.5.9. *Soit M une variété simplement connexe de type fini de dimension m et de caractéristique d'Euler $\chi(M) \leq -2$. Suppose $e(\tau_M) = 0$ ou k impair. Si $k \geq m+1$, les nombres de Betti rationnels de $Emb(M, \mathbb{R}^{m+k})$ sont à croissance exponentielle.*

Bibliographie

- [1] Masahisa Adachi. *Embeddings and immersions*, volume 124 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. Translated from the 1984 Japanese original by Kiki Hudson.
- [2] Gregory Arone, Pascal Lambrechts, and Daniel Pryor. Exponential growth of the homology of Embedding of manifolds. In preparation.
- [3] Gregory Arone, Pascal Lambrechts, and Ismar Volić. Calculus of functors, operad formality, and rational homology of embedding spaces. *Acta Math.*, 199(2) :153–198, 2007.
- [4] Armand Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. *Ann. of Math. (2)*, 57 :115–207, 1953.
- [5] Edgar H. Brown, Jr. and Robert H. Szczarba. On the rational homotopy type of function spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(12) :4931–4951, 1997.
- [6] R. Brown. Function spaces and product topologies. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 15 :238–250, 1964.
- [7] Urtzi Buijs and Aniceto Murillo. Basic constructions in rational homotopy theory of function spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(3) :815–838, 2006.
- [8] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.

- [9] Yves Félix, John Oprea, and Daniel Tanré. *Algebraic models in geometry*, volume 17 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [10] Thomas G. Goodwillie and Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory. II. *Geom. Topol.*, 3 :103–118 (electronic), 1999.
- [11] Werner Greub, Stephen Halperin, and Ray Vanstone. *Connections, curvature, and cohomology. Vol. II : Lie groups, principal bundles, and characteristic classes*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 47-II.
- [12] Andre Haefliger. Rational homotopy of the space of sections of a nilpotent bundle. *Trans. Am. Math. Soc.*, 273 :609–620, 1982.
- [13] Stephen Halperin and Jean-Claude Thomas. Rational equivalence of fibrations with fibre G/K . *Canad. J. Math.*, 34(1) :31–43, 1982.
- [14] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2002. Autre(s) tirage(s) : 2003,2004,2005,2006.
- [15] M.W. Hirsch. Immersions of manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, 93 :242–276, 1959.
- [16] M.W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.
- [17] Dale H. Husemoller. *Fibre bundles. 3rd ed.* Graduate Texts in Mathematics. 20. Berlin : Springer-Verlag. xix, 353, 1993.
- [18] Chris Kottke. Bundles, classifying spaces and characteristic classes. <http://www.northeastern.edu/ckottke/docs/bundles.pdf>.
- [19] Irene Llerena. Localization of fibrations with nilpotent fibre. *Math. Z.*, 188(3) :397–410, 1985.
- [20] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [21] Pierre Marry. Type d’homotopie rationnelle relative des fibres en variétés de Stiefel. *Compositio Math.*, 34(1) :91–98, 1977.
- [22] Kentaro Matsuo. The Borel cohomology of the loop space of a homogeneous space. *Topology Appl.*, 160(12) :1313–1332, 2013.

- [23] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [24] Robert R. Bruner ; Michael Cantazaro ; J.Peter May ;. Characteristic classes. <http://www.math.uchicago.edu/~may/CHAR/charclasses.pdf>.
- [25] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [26] Stephen A. Mitchell. Notes on principal bundles and classifying spaces. <http://www.math.washington.edu/~mitchell/Notes/prin.pdf>, 2011.
- [27] Jesper Michael Møller. Nilpotent spaces of sections. *Transactions of the American Mathematical Society*, 303 :733–741, 1987.
- [28] Jesper Michael Møller and Martin Raussen. Rational homotopy of spaces of maps into spheres and complex projective spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 292 :721–732, 1985.
- [29] Paolo Piccione and Daniel Tausk. *The theory of connections and G-structures. Applications to affine and isometric immersions*. XIV Escola de Geometria Diferencial. [XIV School of Differential Geometry]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2006.
- [30] Dev P. Sinha. The topology of spaces of knots : cosimplicial models. *Amer. J. Math.*, 131(4) :945–980, 2009.
- [31] Stephen Smale. A classification of immersions of the two-sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 :281–290, 1958.
- [32] Stephen Smale. The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces. *Ann. of Math. (2)*, 69 :327–344, 1959.
- [33] Paul Arnaud Songhafouo Tsopméné. Formality of Sinha’s cosimplicial model for long knots spaces and the Gerstenhaber algebra structure of homology. *Algebr. Geom. Topol.*, 13(4) :2193–2205, 2013.
- [34] René Thom. L’homologie des espaces fonctionnels. *Centre Belge Rech. Math., Colloque de Topologie Algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 29-39 (1957)*.
- [35] Loring W. TU. Computing the gysin map using fixed points. <http://arxiv.org/abs/1507.00283>, 2015.
- [36] Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory. I. *Geom. Topol.*, 3 :67–101 (electronic), 1999.

- [37] Abdoukader Yacouba Barma. Rational homotopy of the space of immersions of manifold into eucliden space. *http ://arxiv.org/abs/1506.05436*, 2015.