

Université catholique de Louvain
Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation

L'apprentissage des nombres décimaux, des nombres rationnels représentés par le système décimal de position.

Laetitia Desmet

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur en sciences psychologiques et de l'éducation

Promoteur :	Prof. J. Grégoire, UCL
Comité d'encadrement :	Prof. M.-P. Noël, UCL Prof. C. Ouvrier-Buffet, Université Paris Diderot Prof. N. Rouche †, UCL
Membres du jury	Prof. M. Frenay, présidente, UCL Prof. M.-A. Schelstraete, UCL Prof. L. Verschaffel, KUL

2012

Remerciements

Les années qui se sont écoulées du début de cette thèse à son aboutissement auront été passionnantes. Quelle chance d'avoir pu découvrir le monde de la recherche ! De nombreuses personnes ont joué un rôle dans cette aventure et je tiens ici à les remercier.

Je remercie tout d'abord mon promoteur, Jacques Grégoire, d'avoir accepté la promotion de cette thèse et de m'avoir accordé tant de confiance et de liberté pour la réaliser. Je garde un excellent souvenir de nos discussions à propos de l'apprentissage, de l'enseignement ou de la recherche.

Je remercie également les membres de mon comité d'encadrement, Marie-Pascale Noël et Cécile Ouvrier-Bufferet pour leurs judicieux conseils.

Ma gratitude va également à Mariane Frenay qui a accepté de présider le jury et aux membres du jury, Marie-Anne Schelstraete et Lieven Verschaffel qui m'ont fait l'honneur d'évaluer et de discuter ce travail.

Mes sincères remerciements vont ensuite aux membres du CREM. Je suis reconnaissante au président, Christian Michaux, et aux membres du CA d'avoir accepté que je réalise cette thèse conjointement à mon travail pour le CREM. Sans cela, cette thèse n'aurait pas été possible.

Merci à ... Nicolas, d'avoir accepté d'emblée l'idée de ce projet, d'avoir ensuite fait partie de mon comité d'accompagnement, d'avoir insisté sur l'art d'écrire et d'avoir toujours été disponible pour commenter mes textes. J'aurais aimé que tu puisses découvrir le travail abouti, même si, j'en suis certaine, nous aurions été en désaccord sur de nombreux points.

... Guy, pour sa disponibilité, ses critiques constructives qui reflètent son souhait permanent de faire apprendre et progresser les juniors.

... Marie-France, grâce à toi, j'aurai découvert les formations IFC et j'y aurai même pris goût. Merci aussi à toi et à Valérie d'avoir relu de nombreux textes, même en urgence.

Merci à mes collègues du CREM pour tous les dîners partagés et l'ambiance quotidienne. Merci en particulier à Philippe et Julie qui sont devenus des amis au fil des années. Quel bonheur cela aura été de travailler avec vous deux ! Philippe, merci pour ta curiosité à toute épreuve, ton don pour formuler mille et une questions, ton immense expérience ainsi que ta passion pour l'enseignement et la didactique des maths. Julie, quel plaisir cela a été de partager le bureau avec toi. Le bureau, mais aussi des prises de tête en statistiques, en TeX, en Excel, des petits et des grands cafés, des états d'âmes, des salades au pain quotidien et ... des cuberdons ! J'ai du mal à imaginer que je vais travailler dans un autre bureau que le tien.

Je tiens aussi à remercier les enseignants rencontrés sur mon parcours et qui ont su transmettre leur savoir avec passion. Ils m'ont donné l'envie d'en apprendre toujours plus.

Merci aussi à mes collègues de l'UCL, spécialement à Anne-Sophie et Véronique. Anne-So, sans la gym du lundi soir, il m'aurait été impossible de maintenir le stress de la fin de thèse à un niveau raisonnable. Véro, c'était tellement bien de pouvoir partager avec toi tant un colloque à Budapest et des expériences en recherche que des émotions de femme enceinte que nous tentions de réguler au mieux ;-)) Je suis particulièrement heureuse de vous avoir toutes les deux rencontrées.

Je pense aussi à tous les élèves, leurs parents, les enseignants, les directeurs et les étudiants qui ont fait en sorte que les récoltes de données soient possibles. Merci à vous tous.

Merci à Christine, Marie-France et Taty d'avoir si bien joué le jeu (pas vraiment ludique) de la chasse aux fautes d'orthographe.

Merci à mes amis, en particulier Anne-Sophie et Christelle, pour leur présence depuis tant d'années et tous les bons moments passés ensemble.

Je remercie également mes parents et ma famille pour leur soutien inconditionnel. Papa, merci de m'avoir transmis l'idée que les choses peuvent toujours être remises en cause et que l'on peut se fixer de grands objectifs. Suzanne, merci pour les innombrables coups de main. Maman, merci d'avoir toujours été fière de moi.

Mon Chris, t'avoir rencontré au hasard d'une pause café d'un colloque est certainement la plus belle chose qui me soit arrivée au cours de cette thèse ! Merci de m'avoir soutenue, freinée, critiquée, encouragée... bref, d'avoir toujours tenté de m'apporter ce dont j'avais besoin, au moment où j'en avais besoin, et de m'avoir supportée durant les derniers mois tout en jouant encore plus que d'habitude avec les enfants. Marion, Guillaume et Adeline, mes p'tits loups, j'ai beau connaître deux ou trois théories en psychologie du développement, vous voir chaque jour grandir, apprendre et découvrir le monde reste tout simplement magique ! Je suis si fière et heureuse d'être votre maman. Promis, demain je file déposer cette thèse à l'imprimerie et je serai plus sereine.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Cadres théoriques	3
1.1 Les nombres décimaux	3
1.2 Histoire des nombres décimaux	5
1.2.1 Mise au point du système décimal de position	5
1.2.2 Premières fractions	9
1.2.3 Système décimal de position en Europe	10
1.2.4 Fractions décimales	11
1.2.5 Système métrique	13
1.2.6 Réticences au changement	13
1.3 Représentation et traitement des nombres	16
1.3.1 Représentation mentale des nombres naturels	17
1.3.2 Apprentissage des symboles et du système décimal	18
1.3.3 Traitement des nombres naturels à deux chiffres	21
1.3.4 Les nombres rationnels	23
1.4 Enseignement des nombres décimaux	25
1.5 Apprentissage des nombres décimaux	27
1.5.1 Difficultés relatives aux nombres décimaux	27
1.6 Le changement conceptuel	33
1.6.1 Théorie de Thomas Kuhn	33
1.6.2 Théorie du changement conceptuel	34
1.6.3 Changement conceptuel et enseignement	39
1.6.4 Changement conceptuel en mathématiques	40
1.7 Conclusions	42
2 Études pilotes	47
2.1 Étude A - Comparaison de nombres décimaux	47
2.1.1 Méthodologie	48
2.1.2 Résultats	49
2.1.3 Conclusions	51
2.1.4 Étude B - Addition de nombres décimaux	51

2.1.5	Annexe	56
3	Conceptions of decimal fractions	59
3.1	Introduction	60
3.1.1	Analysis of errors	61
3.1.2	The present study	62
3.1.3	Hypotheses	63
3.2	Method	63
3.2.1	Participants	63
3.2.2	Task and stimuli	63
3.2.3	Procedure	65
3.3	Results	65
3.3.1	Overall analysis	65
3.3.2	The impact of the length of the fractional part	67
3.3.3	The impact of the digit value	70
3.3.4	The impact of zero	72
3.3.5	Cluster analysis on the type of responses across categories	74
3.4	Discussion	76
3.4.1	Initial conceptions about decimal fractions	77
3.4.2	Evolution of the conceptions about decimal fractions	77
3.4.3	Theoretical and practical implications	78
3.4.4	Conclusion	80
3.5	Addendum	82
4	Understanding decimal vs. fraction notation	85
4.1	Introduction	86
4.2	Method	87
4.2.1	Participants	87
4.2.2	Task	87
4.2.3	Procedure	87
4.3	Results	88
4.4	Discussion	90
4.5	Appendix	92
5	Precursors of decimal fractions processing	93
5.1	Introduction	94
5.1.1	The learning of the decimal place-value number system	94
5.1.2	The learning of rational numbers	95
5.1.3	The learning of decimal fractions	96
5.1.4	The present study	96
5.2	Method	97
5.2.1	Participants	97

5.2.2	Measures	97
5.2.3	Procedure	98
5.3	Results	98
5.3.1	Factorial analyses	98
5.3.2	Achievement at the first measurement point	100
5.3.3	Longitudinal analyses	100
5.4	Discussion	102
5.5	Appendix	105
5.5.1	Fraction knowledge	105
5.5.2	Decimal place-value understanding	107
5.5.3	Arithmetic knowledge	109
5.5.4	Decimal fraction knowledge	111
5.5.5	Decimal fraction computation	114
6	The mixed impact of the euro symbol	115
6.1	Introduction	116
6.1.1	The present study	119
6.2	Method	120
6.2.1	Participants	120
6.2.2	Task and stimuli	120
6.2.3	Procedure	121
6.2.4	Results	122
6.3	Discussion	130
6.4	Appendix	133
7	A didactical intervention	135
7.1	Introduction	136
7.1.1	Misconceptions about decimal fractions	136
7.1.2	Conceptual and procedural knowledge	137
7.1.3	Teaching of decimal fractions	138
7.1.4	The present study	138
7.2	Didactical intervention in Grade 4	139
7.2.1	Method	139
7.2.2	Results	143
7.3	Follow-up assessment in Grade 5	147
7.3.1	Method	147
7.3.2	Results	148
7.4	Discussion	149
	Discussion générale	151
	Entre histoire, apprentissage et enseignement	151
	Traitement des nombres décimaux et origines des erreurs	154

Changement conceptuel	160
Perspectives didactiques	166
Conclusions	168
Références	171

Introduction générale

Enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes. (Stevin, 1585)

En 1585, Simon Stevin propose, dans *La Disme*, une méthode pour calculer avec des parties inférieures à l'unité sans recourir aux fractions. Il n'était pas le premier à proposer les fractions décimales, mais son livre aura un impact majeur en Europe et conduira aux *nombres décimaux*. Si les fractions décimales ne permettent pas de représenter l'ensemble des nombres avec autant de précision que les fractions, elles ont néanmoins l'avantage de faciliter sensiblement les opérations. Dans la vie de tous les jours, on peut, la plupart du temps, se contenter d'une approximation des mesures. Par exemple, on peut estimer que 0,33l est assez proche de $\frac{1}{3}l$ et s'en contenter. Additionner 0,33 et 0,25 est alors plus simple qu'additionner $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Les *nombres décimaux* sont donc plus fréquemment utilisés dans la vie quotidienne que les fractions.

Les nombres décimaux sont enseignés dès la 4^e année primaire, mais il apparaît¹ que leur apprentissage est particulièrement difficile pour nos élèves. Parmi les exercices proposés aux élèves de 5^e année primaire lors de l'évaluation externe non certificative du Ministère de la Communauté française (2008), on trouve celui-ci : « Entoure les deux nombres compris entre 2,9 et 4,15 », les nombres proposés étant 2,39 - 4,19 - 2,93 - 4,2 et 3,9. Seuls 53% des élèves réussissent cet exercice. Dans un autre exercice proposé à des élèves de 3^e année secondaire (2005), et consistant à ranger des nombres décimaux et la fraction $\frac{1}{5}$ du nombre le plus petit au nombre le plus grand, seuls 68% des élèves réussissent. L'apprentissage des nombres décimaux est donc particulièrement long et laborieux.

Pourquoi cet apprentissage est-il si difficile ? Les difficultés liées à l'apprentissage des nombres décimaux sont connues depuis longtemps, mais peu d'études récentes abordent ce sujet. Dans ce document, nous traiterons de l'apprentissage des nombres décimaux sous différents angles et selon diverses approches originales.

Dans la partie théorique, après un bref rappel de ce que sont les nombres décimaux, nous commencerons par une section historique. Si, de nos jours, il est évident, pour un adulte ayant de bonnes connaissances mathématiques, que certains nombres rationnels ont la particularité de pouvoir être représentés par une fraction dont le dénominateur

1. Nous utiliserons, dans ce document, la nouvelle orthographe préconisée par la réforme orthographique de 1990.

est une puissance de dix et qu'ils sont alors des nombres décimaux pouvant s'écrire dans le système décimal de position, cela n'a pas toujours été le cas. Les nombres décimaux ont en réalité une longue histoire jalonnée d'obstacles et de changements conceptuels. Cette histoire montre également que les changements radicaux ne se réalisent pas sans réticence.

Nous aborderons alors la représentation et le traitement cognitifs des nombres. Nous tenterons de voir si les difficultés qui apparaissent lors de l'apprentissage des nombres décimaux sont liées à notre représentation mentale des nombres, aux processus de traitement des nombres, et/ou au système symbolique permettant de les représenter. Nous traiterons ensuite de l'enseignement et de l'apprentissage des nombres décimaux. Un parcours de la littérature concernant les erreurs fréquemment observées lors du traitement des nombres décimaux nous amènera à considérer que les erreurs relatives aux nombres décimaux pourraient être liées aux connaissances antérieures que possèdent les élèves lorsqu'ils apprennent ces nombres. Nous envisagerons alors le phénomène de réticence initialement décrit par Thomas Kuhn, dans *La structure des révolutions scientifiques* (1962), avant d'aborder, dans le domaine de l'apprentissage et de l'enseignement, la *théorie du changement conceptuel*.

Dans la partie empirique, nous présenterons d'abord deux études pilotes qui nous apporteront quelques repères quant à l'évolution des performances en comparaison et en addition des nombres décimaux et qui nous permettront de préciser les études suivantes. Nous présenterons ensuite cinq études. Dans une première étude, nous aborderons deux questions : « quelles conceptions les élèves ont-ils des nombres décimaux ? » et « l'apprentissage des nombres décimaux est-il un cas de changement conceptuel ? » Ensuite, en s'orientant progressivement vers l'enseignement des nombres décimaux, nous analyserons, dans une seconde étude, l'impact du format de présentation des nombres dans une tâche de comparaison. Nous verrons si comparer des nombres présentés en fraction ordinaire (par exemple, $\frac{1}{4}$), en fraction décimale ($\frac{25}{100}$) ou en nombre décimal (0,25) conduit à un même taux de réponse correcte. Nous verrons alors, dans une troisième étude, si « la compréhension du système décimal et la compréhension des nombres rationnels représentés par des fractions prédisent l'apprentissage des nombres décimaux ».

Nous envisagerons alors l'enseignement des nombres décimaux. Dans une quatrième étude, nous verrons si utiliser les connaissances de la vie quotidienne, à savoir les connaissances liées à l'euro, peut aider les élèves à mieux comprendre les nombres décimaux. Enfin, dans une cinquième étude, nous présenterons une séquence didactique pour l'enseignement des nombres décimaux, mettant en œuvre l'encadrement des nombres réels dans le système décimal de position et nous objectiverons l'impact de cette séquence didactique. L'ensemble de ces résultats sera alors discuté et de nouvelles perspectives de recherche seront ouvertes.

Chapitre 1

Cadres théoriques

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir ce que nous entendons par *nombre* *décimal*. Nous parcourrons alors l'histoire de ces nombres en recherchant les obstacles apparus lors de la mise au point de ces nombres et en observant les réticences au changement des connaissances établies.

Nous discuterons ensuite de la représentation mentale des nombres, de l'acquisition des symboles permettant de les représenter et du traitement cognitif des nombres.

Nous aborderons enfin l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux. Les difficultés qui peuvent être rencontrées lors de cet apprentissage seront décrites et discutées, notamment à la lumière de la théorie du changement conceptuel. Cette théorie apporte un cadre intéressant pour étudier les apprentissages qui ne sont pas de simples enrichissements des connaissances antérieures mais plutôt des révolutions.

1.1 Les nombres décimaux

Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. (Citation attribuée à Kronecker, 1823-1891).

Il existe différents types de nombres. Sans les citer tous, nous pouvons dire que dans un ordre de généralité croissante, on distingue les *nombre* *naturels*, les *nombre* *décimaux*, les *nombre* *rationnels* et les *nombre* *réels* (Rouche, 2010).

Un *nombre naturel* est « le cardinal ¹ d'un ensemble fini ». C'est un nombre engendré par le comptage des éléments d'un ensemble fini d'objets (Rouche, 2010).

Les nombres naturels peuvent être représentés grâce à un système de numération, soit un ensemble de symboles assorti d'un ensemble de règles (Leveque & Smith, 2012). Le système de numération que nous utilisons majoritairement aujourd'hui est le *système décimal* de position. Le terme décimal provient du latin *décimalis*, formé avec *decem* signifiant dix (Bouvier, George, & Le Lionnais, 1993). Il comporte donc dix symboles

1. Les nombres sont cardinaux lorsqu'ils servent à exprimer la taille d'un ensemble, et ordinaux lorsqu'ils servent à déterminer, dans une suite ordonnée d'objets, si un objet est plus proche ou moins proche qu'un autre de l'origine de la suite (Rouche, 2010).

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0) et des règles syntaxiques. Le *principe multiplicatif* et le *principe de position* accordent une valeur à un chiffre en fonction de sa position. Dans le nombre 200 par exemple, le deux signifie deux fois cent. Le *principe additif* accorde quant à lui une valeur globale à l'ensemble de l'expression, le nombre 15 étant la somme de 10 (représenté par 1) et de 5. Le système décimal permet donc de représenter les nombres naturels et, par extension, les autres nombres. On pourrait alors penser que tout nombre exprimé dans le système décimal est un *nombre décimal*, mais nous verrons que ce n'est pas si simple.

Revenons au dénombrement d'un ensemble fini d'objets. Cette procédure engendre les nombres naturels. Précisons que dans ce cas la grandeur qui est exprimée est une grandeur discrète, mais qu'il existe aussi des grandeurs continues. À l'inverse des quantités discrètes, on ne peut pas compter les quantités continues. On peut néanmoins les mesurer en déterminant leur rapport à une unité convenue. Une longueur par exemple ne peut être comptée. Elle peut être mesurée à l'aide d'une unité (de longueur) choisie. Dans certains cas, on obtient un nombre naturel. Dans d'autres cas, l'unité n'est pas contenue un nombre entier de fois dans la grandeur à mesurer. On se trouve alors face à un reste. Les nombres naturels ne suffisent pas. La figure 1 illustre² que lorsque l'on souhaite mesurer le segment L avec l'unité de longueur l , on constate que la grandeur à mesurer est supérieure à cinq unités mais inférieure à six unités ($5l < L < 6l$). Il est donc nécessaire d'aller au-delà de l'unité l . De cette idée de couper une grandeur en parts égales, puis de prélever des parts, naissent les *fractions*³. Un *nombre rationnel* est, par définition, un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction (Rouche, 2010) de type $\frac{n}{m}$ où n est un entier relatif (c'est-à-dire un entier positif ou négatif) et m un entier relatif non nul, par exemple $\frac{5}{2}$. Chaque nombre rationnel peut être écrit d'une infinité de façons sous la forme d'une fraction : $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \dots$. Si nous revenons à notre exemple de mesure, nous pouvons maintenant dire que le segment L mesure $5l$ et $\frac{1}{2}l$.

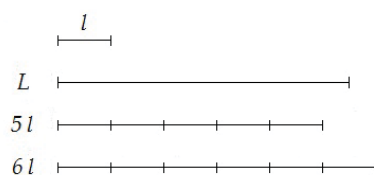


Fig. 1. Une mesure de longueur.

Les *nombres décimaux* sont quant à eux des cas particuliers de nombres rationnels. Certains nombres rationnels ont la particularité de pouvoir s'écrire sous la forme d'une fraction de type $\frac{n}{10^m}$ où n est un entier relatif et m un entier naturel (c'est-à-dire un entier positif). De telles fractions peuvent être intitulées *fractions décimales*. Les

2. Voir aussi (Rouche, 2006) pour de plus amples explications.

3. Dans certains cas, une fraction peut aussi exprimer un rapport de deux grandeurs de même nature, si on peut trouver une unité de mesure pour laquelle ces deux grandeurs peuvent être mesurées par des nombres entiers (Rouche, 2010).

nombres décimaux sont des nombres rationnels qui sont des fractions décimales et qui sont représentés dans le système décimal de position. Par exemple, $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{5}{10}$ et peut s'écrire 0,5. On peut aussi dire qu'un *nombre décimal* est « tout nombre naturel et tout nombre pouvant être écrit avec une virgule, avec un nombre fini de chiffres à gauche de celle-ci et avec un nombre fini de chiffres à droite » (Rouche, 2010). On peut aussi distinguer la partie entière et la *partie décimale* d'un nombre décimal. Le plus grand entier inférieur ou égal à un nombre décimal est sa partie entière. La différence du nombre et de sa partie entière est la partie décimale. Par exemple, la partie entière de 2,15 est 2 et sa partie décimale est 0,15.

Retenons que les fractions décimales peuvent être représentées soit par une fraction, soit dans le système décimal de position. Dans ce document, nous nous centrerons sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux positifs ⁴ ayant une partie décimale, tels que 0,24.

D'autres nombres rationnels, par exemple $\frac{1}{3}$, ne peuvent pas être représentés par une fraction décimale. Ce ne sont donc pas des nombres décimaux, mais ils peuvent malgré tout être représentés dans le système décimal de position. Leur développement contient une infinité de chiffres après la virgule et est périodique. Par exemple $\frac{1}{3}$ peut être représenté par 0,3333..., le 3 se répétant à l'infini. Par contre, des nombres tels que $\sqrt{2}$ ou π sont des *nombres réels* et non des nombres rationnels. Leur représentation dans le système décimal contient aussi une infinité de chiffres après la virgule, mais leur développement n'est pas périodique, par exemple 1,41421356... et 3,141592654....

1.2 Histoire des nombres décimaux

Dans cette section, nous allons aborder l'histoire des nombres décimaux. Nous débuterons donc par la mise au point du système décimal de position et l'apparition des fractions pour aborder ensuite l'adoption du système décimal en Europe, les fractions décimales proposées par Simon Stevin et quelques particularités du système métrique. Enfin, les réticences rencontrées au cours de l'histoire seront mises en évidence.

1.2.1 Mise au point du système décimal de position

Nous avons vu dans la section 1.1 que le système décimal de position permet de représenter les nombres décimaux. Ce système de base dix utilise dix symboles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0) et des règles syntaxiques, telles que les *principes additif, multiplicatif et de position*.

4. Notons que pour les parties rédigées en anglais, nous avons utilisé le label *decimal fractions* pour faire référence aux nombres décimaux exprimés dans le système de position dans les chapitres 3, 5, 6 et 7, alors que dans le chapitre 4 nous avons différencié *decimal fractions* et *decimals* pour distinguer des fractions décimales (par exemple 5/10) et des nombres décimaux exprimés dans le système décimal (par exemple 0,5).

Dès la préhistoire, les hommes ont utilisé certains nombres naturels et les ont représentés. Les premières représentations étaient alors concrètes et il aura fallu des milliers d'années pour que différentes civilisations, ayant rencontré des obstacles similaires dans leurs tentatives de représentation des nombres, mettent au point le principe de la base, les représentations écrites, le principe additif, le principe multiplicatif et enfin le principe de position et le zéro (voir figure 5) (e.a., Guitel, 1975 ; Ifrah, 1994 ; O'Connor & Robertson, 2000a, 2000b, 2001b).

L'apport le plus essentiel aux représentations écrites réside certainement dans le *principe de position*. Ce principe, différent d'une simple convention d'écriture donnant une place à chaque symbole, donne à un même chiffre une valeur variable selon la position qu'il occupe dans l'expression écrite du nombre. Un chiffre est par exemple associé aux unités simples, aux dizaines, ou aux centaines selon qu'il occupe la première, la seconde, ou la troisième place. Grâce à ce principe, il n'est pas nécessaire de disposer d'un grand nombre de symboles, ni de les multiplier lors de l'écriture d'un nombre. L'homme a mis des millénaires avant d'instaurer ce principe de position et des cultures pourtant très avancées, comme les civilisations grecque ou égyptienne, ne l'ont jamais mis au point. Une numération utilisant le principe de position n'a été imaginée que quatre fois au cours de l'histoire (Ifrah, 1994)⁵ : une première fois par les savants de Babylone, au début du II^e millénaire av. J.-C., ensuite, par les mathématiciens chinois un peu avant notre ère⁶, par les astronomes mayas entre le II^e et le III^e siècle et enfin par les mathématiciens indiens vers le V^e siècle.

Prenons un exemple pour aborder un compagnon indispensable du principe de position : le *zéro*. Vers 2000 av. J.-C., le système babylonien était mixte : sexagésimal et positionnel, mais décimal et de type additif à l'intérieur de chaque ordre d'unités (voir la figure 2) (O'Connor & Robertson, 2000a).

𐎶	𐎵	𐎶𐎵	𐎶	𐎶𐎶
1	2	6	10	26

Fig. 2.

𐎶	𐎶𐎶
2	61

Fig. 3.

𐎶	𐎶
1	60

Fig. 4.

La figure 3 illustre que l'utilisation d'un espace vide pour marquer le passage d'un ordre sexagésimal à un autre peut conduire à confondre des nombres tels que 2×60^0 et $1 \times 60^1 + 1 \times 60^0$, et encore plus des nombres tels que 1×60^0 et 2×60^1 . Les Babyloniens n'étaient probablement pas entièrement satisfaits de leur système face ces ambiguïtés (O'Connor & Robertson, 2000a), mais ils n'ont pas d'emblée inventé le zéro.

5. Cette encyclopédie d'Ifrah a été vivement critiquée (Cauty, 1995 ; Filliozat, 1995 ; Guillemot, 1995 ; Lévy, 1995 ; Martzloff, 1995 ; Ritter, 1995). Nous la citons ici avec précaution et uniquement lorsque les faits ont été confirmés par d'autres auteurs.

6. Le système chinois utilisé à partir du IV^e siècle n'était cependant pas strictement positionnel, le symbole variant alternativement d'un rang pair à un rang impair, 333 par exemple étant représenté par Ⅲ≡Ⅲ (O'Connor & Robertson, 2004a).

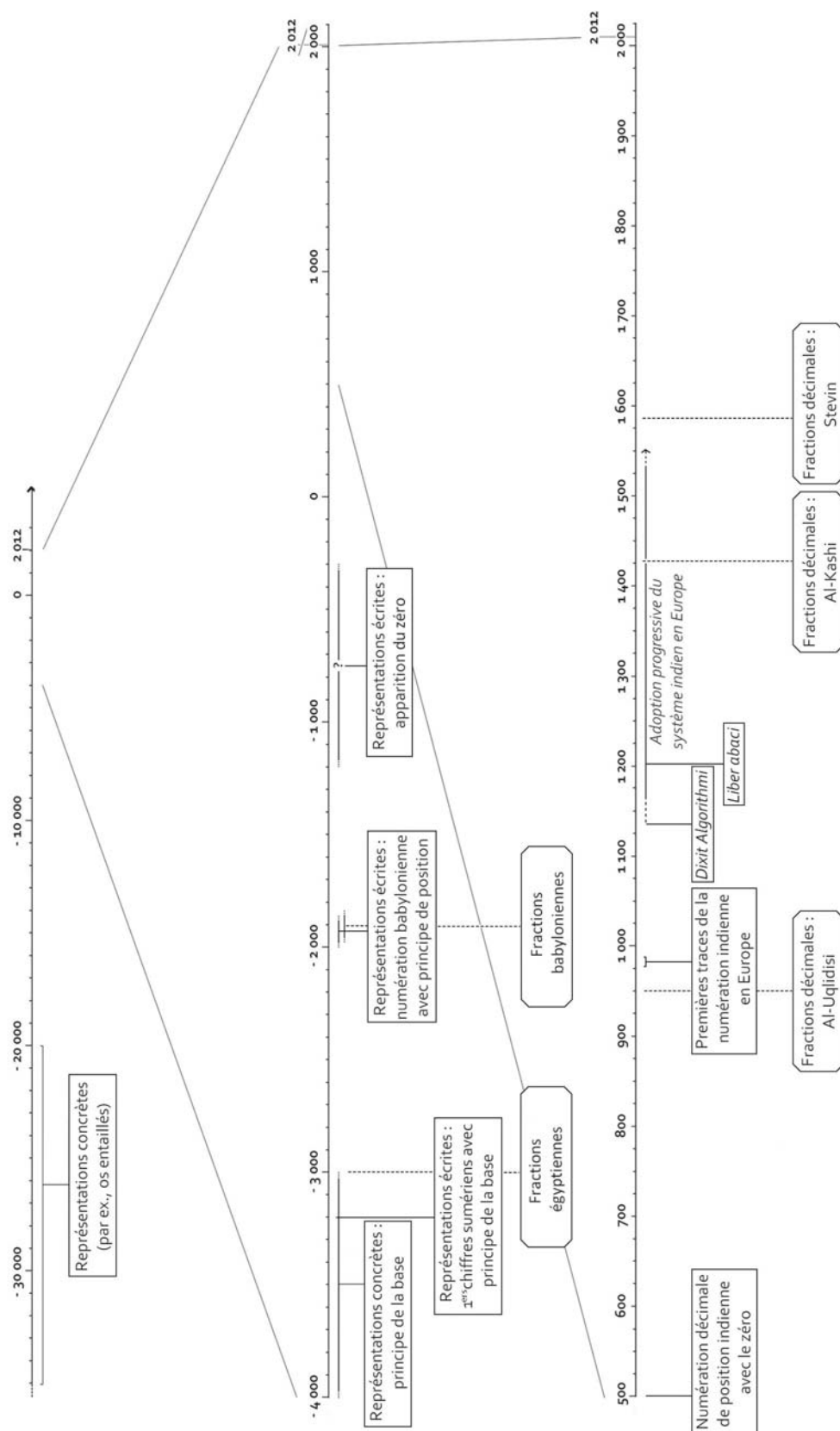


Fig. 5. Moments-clés du développement du système décimal (rectangles) et des fractions décimales (rectangles cornés).

Pendant une longue période ils se sont satisfaits de leur système. Vers 1200 av. J.-C., ils ignoraient encore *le zéro*, mais ils ont néanmoins utilisé de façon transitoire un signe cunéiforme spécifique pour remplacer l'espace vide.

L'apparition proprement dite d'un *zéro* est difficile à situer précisément dans le temps. Les plus vieux documents connus contenant le zéro ne remontent pas au-delà du III^e siècle av. J.-C., mais l'invention du zéro serait antérieure. Ce premier zéro de l'histoire n'était cependant qu'une variante du signe précédemment utilisé pour marquer les séparations, et n'avait pas le statut de nombre. Les mathématiciens chinois utilisaient une numération décimale strictement positionnelle, au moins à partir du II^e siècle av. J.-C. Mais eux aussi ont tardé à découvrir le zéro, leur système basé sur une alternance des symboles entre les rangs pairs et impairs ayant moins besoin de celui-ci. Ce n'est qu'à partir du VIII^e siècle environ qu'ils y ont introduit un signe spécial pour marquer l'absence des unités d'un certain ordre, probablement sous l'influence des mathématiciens indiens. Les prêtres et les astronomes mayas disposaient quant à eux d'un système de base vingt, muni d'un zéro et du principe de position allant du bas vers le haut. L'étage inférieur correspondait aux unités, le deuxième au chiffre des vingtaines et le troisième aux multiples de trois-cent-soixante, ce qui introduisait une irrégularité dans leur système. Pour que chaque chiffre soit correctement positionné, ils inventèrent un signe spécifique, un zéro. Cependant, l'irrégularité des ordres d'unité fit en sorte que le zéro maya soit privé de toute possibilité opératoire.

La civilisation indienne fut donc la seule à avoir eu le génie de mettre au point une numération réunissant différents principes essentiels : le principe de la base, le principe de position, le zéro parfaitement opératoire et ayant le statut de nombre, ainsi que des signes graphiques détachés de toute idéographie. Un graphisme simple, détaché des représentations idéographiques, et distinct pour chaque chiffre est en effet indispensable à la réalisation des opérations écrites. Notre « 8 » actuel est par exemple bien plus commode à tracer que huit points. Avant ce système décimal abouti, les systèmes de numération écrite étaient adéquats pour représenter et retenir les nombres, mais pas pour calculer.

L'histoire montre en effet que pour dépasser les obstacles rencontrés, les systèmes de numération ont le plus souvent été remplacés plutôt que transformés (Chrisomalis, 2010). Et que ces remplacements ont donné place à des systèmes plus efficaces et plus abstraits. Des systèmes positionnels ont, par exemple, été très rarement antérieurs à des systèmes additifs, l'inverse n'étant pas vrai.

Pour conclure, cette portion d'histoire nous montre qu'une très longue histoire collective aura été nécessaire pour que soient mis au point le principe de la base, le principe de position et le zéro sous-tendant l'efficacité de notre système de numération actuel.

1.2.2 Premières fractions

Dès l'Antiquité, l'homme connaissait les rapports entre les nombres. Cependant ces rapports n'avaient pas le statut de nombre (Ifrah, 1994). De plus, leur symbolisation n'était pas homogène, chaque fraction disposait alors d'un symbole spécifique, comme par exemple pour les fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ chez les Sumériens (O'Connor & Robertson, 2000a). Ce manque d'homogénéité permettait difficilement des opérations arithmétiques.

Les Egyptiens utilisaient quant à eux, dès 3000 av. J.-C., un système numérique basé sur les hiéroglyphes (O'Connor & Robertson, 2000b). Le papyrus de Rhind ⁷ atteste du fait que vers 1850 av. J.-C., ils utilisaient aussi des fractions, exclusivement de type unitaire (e.a., O'Connor & Robertson, 2000c), c'est-à-dire de type $\frac{1}{n}$. Celles-ci étaient représentées par le placement du symbole d'une bouche, signifiant « part » au-dessus du nombre représentant le dénominateur (ou au-dessus de la première partie seulement si celui-ci était trop long) (O'Connor & Robertson, 2000b). Seules les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ échappaient à cette généralité. Les autres fractions, par exemple $\frac{2}{5}$, étaient exprimées par des décompositions additives telles que $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Le calcul avec les fractions égyptiennes était laborieux et des tables de conversion telles que celle contenue dans le papyrus de Rhind étaient nécessaires.

Les Babyloniens (2000 - 600 av. J.-C.), en élargissant leur système sexagésimal aux parties inférieures à l'unité (O'Connor & Robertson, 2000a), auraient été les premiers à mettre au point une notation homogène pour les fractions (Ifrah, 1994). Cependant, ils ne disposaient pas d'un signe pour marquer le passage de la partie entière à la partie fractionnaire, ce qui pouvait conduire à de nombreuses confusions (O'Connor & Robertson, 2000a).

La notation actuelle des fractions aurait été mise au point par les Indiens (Ifrah, 1994). Avec leur système décimal de position, ils pouvaient symboliser une fraction en écrivant le numérateur au-dessus du dénominateur comme ci-contre.

5	numérateur
24	dénominateur

Dans le Dixit Algorizmi, une traduction d'un ouvrage d'al-Khwarizmi sur la numération indienne (dont nous parlerons plus en détail dans la section 1.2.3), il est précisé que l'écriture des fractions (sexagésimales) doit se faire verticalement (Schärlig, 2010). Par exemple, 12°30'45'' devait s'écrire comme ci-contre.

12	gradus
30	minuta
45	secunda

Les Arabes auraient donc adopté la notation des fractions des Indiens. Plus tard, ils y auraient ajouté la barre horizontale entre le numérateur et le dénominateur (Ifrah, 1994). Dans son Liber abaci, publié en 1202, Léonard de Pise (mieux connu sous le nom Fibonacci) s'inspire également de l'ouvrage d'al-Khwarizmi, mais utilise déjà une barre de séparation. Il utilise aussi les fractions unitaires, à la façon des Égyptiens, comme

7. Ce papyrus a été acheté à Luxor en 1858 par Henry Rhind. Son auteur, le scribe Ahmes, donne une indication permettant de dater le texte aux environs de 1650 av. J.-C., et de savoir qu'il est une copie d'un original antérieur de 200 ans (O'Connor & Robertson, 2000c).

d'autres Européens au Moyen-Âge (Cajori, 1991). Comme souvent dans l'histoire des numérations, différents systèmes ont donc co-existé.

1.2.3 Système décimal de position en Europe

Le système indien nous a été transmis par les Arabes. L'histoire de cette transmission est particulièrement complexe (O'Connor & Robertson, 2001a). Premièrement, le monde arabe était divisé en une partie occidentale et une partie orientale, et le système indien a connu un développement différent dans ces deux parties, ayant relativement peu d'interactions. Deuxièmement, sur une longue période, le monde arabe a utilisé simultanément différents systèmes de numération. Certains personnages ont néanmoins joué un rôle clé.

La transmission des nombres indiens aurait dans un premier temps été limitée aux sciences exactes (Chrisomalis, 2010). La première trace des nombres indiens dans le monde arabe occidental est une note écrite au VII^e siècle (en 662) par Severus Sebokht (O'Connor & Robertson, 2001a). Au VIII^e siècle, l'empire arabe prend forme et d'autres références aux nombres indiens apparaissent. À la demande du calife al-Mansur, des ouvrages indiens sur la numération décimale de position arrivés à Bagdad sont traduits en arabe (Salah Ould Moulaye, 2004 ; Schärli, 2010). Le système de numération indien se répand alors progressivement chez les Arabes. Un personnage essentiel dans l'expansion de ce système fut un persan, connu sous le nom d'al-Khwarizmi⁸. Il faisait partie de la « Maison de la Sagesse » créée par le calife al-Ma'mun à Bagdad au IX^e siècle. Deux de ses livres, écrits vers 825, furent les premiers manuels d'arithmétique et les plus anciens livres arabes connus décrivant la numération décimale de position des Indiens. Les originaux arabes ont été égarés, une zone d'ombre persiste donc (O'Connor & Robertson, 2001a), mais vraisemblablement ils s'intitulaient « Livre de calcul des nombres indiens » et « Le livre de l'addition et la soustraction d'après le calcul des Indiens » (Salah Ould Moulaye, 2004). Dans ces livres, al-Khwarizmi aurait décrit, de façon systématique et avec de nombreux exemples, les chiffres et les règles du calcul indien, notamment les quatre opérations arithmétiques et le calcul avec des fractions, ainsi que la règle de trois et l'extraction des racines carrées. Ces livres ont contribué avec d'autres écrits postérieurs à faire connaître le système numérique indien aux Arabes. Ceux-ci ont alors répandu cette connaissance jusqu'en Palestine, en Sicile, puis jusqu'en Afrique du Nord et enfin jusqu'en Andalousie (Schärli, 2010).

Ce que nous nommons les *chiffres arabes* sont donc en réalité des chiffres indiens, qui ont évolué différemment selon les régions et les époques (voir par exemple, les chiffres présentés à la figure 6, par ordre croissant de droite à gauche). De nombreux auteurs parlent donc de chiffres indo-arabes. Au X^e siècle, les chiffres indo-arabes font une première apparition en Europe. Les plus anciens manuscrits contenant ces chiffres

8. Au Moyen-Âge, al-Khwarizmi exerça une influence décisive sur les mathématiques et fut un grand savant arabo-musulman. Le mot *algèbre*, branche fondamentale des mathématiques, provient du titre d'un de ses ouvrages, et le mot *algorithme* de la traduction latine de son nom (Salah Ould Moulaye, 2004).

sont le Codex Vigilanus, écrit en 976, et le Codex Emilianus, écrit en 992, l'un et l'autre originaires d'Espagne (Schärlig, 2010). Les neuf chiffres (de 1 à 9) y apparaissent, mais pas le zéro. Une autre tentative d'introduction des chiffres arabes est attribuée à Gerbert d'Aurillac, vers 980. Celui-ci proposa un abaque sur lequel il déplaçait non plus des jetons anonymes, comme c'était le cas à l'époque, mais des jetons sur lesquels figuraient des chiffres arabes. À l'inverse de l'abaque classique utilisé pour la numération romaine, cet abaque permettait des divisions. Celui-ci n'eut malheureusement pas le succès escompté, ne quitta pas les monastères, et tomba dans l'oubli.

Dès le XII^e siècle, quelques érudits européens se sont intéressés aux livres d'al-Khwarizmi et les ont traduits en latin, ce qui a permis l'expansion du calcul écrit en Europe. Aucun texte latin sur al-Khwarizmi ne serait une traduction littérale de l'ouvrage arabe (Allard, 1992), chaque traducteur ayant apporté une touche personnelle à l'ouvrage. Nous disposons de quatre versions latines (Burnett, 2006 ; Schärlig, 2010) qui sont parfois très différentes les unes des autres. Il est dès lors laborieux et complexe d'identifier les filiations entre ces différentes traductions (pour plus de détails, voir Allard, 1992 ; Folkerts, 1997 ; Vogel, 1963). Selon Allard (1992), la première traduction latine aurait été celle d'Adélarde de Bath (Dixit Algorizmi) écrite à Tolède. La date attribuée à cet ouvrage varie néanmoins selon les auteurs : vers 1143 (Allard, 1992), vers 1130 (Salah Ould Moulaye, 2004), ou vers 1126 (voir O'Connor & Robertson, 1999b).

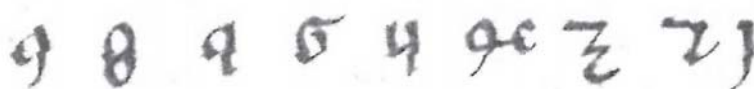


Fig. 6. Chiffres indo-arabes issus du Dixit Algorizmi (Schärlig, 2010).

Sur la base de ces quatre textes latins (et peut-être aussi en partie d'un original en arabe), deux livres devenus célèbres ont répandu la numération indienne dans les écoles monastiques : *Carmen de algorismo* (par Alexander de Villa Dei, vers 1203) et *Algorismus vulgaris* (par Jean de Sacrobosco, vers 1230) (Schärlig, 2010). Ceux-ci se limitaient aux calculs en nombres entiers. Ils ont conquis le public des écoles monastiques et épiscopales (devenues par la suite des universités).

Selon Schärlig (2010), deux axes ont contribué à l'expansion du système indien en Europe. Le premier vient d'être évoqué et concerne les traductions latines d'al-Khwarizmi diffusées dans les écoles monastiques. Le second axe s'est basé sur la pratique des commerçants arabes autour de la Méditerranée plutôt que sur des traductions d'un ancien document et a été porté par le *Liber abaci*, destiné aux commerçants italiens, et écrit en 1202 par Léonard de Pise.

1.2.4 Fractions décimales

Dès la fin du VIII^e siècle, les Arabes ont adopté le système décimal de position des indiens. Ils ont perfectionné ce système et sont allés plus en avant dans l'étude des proprié-

tés des nombres, créant les fondements de la théorie des nombres (Salah Ould Moulaye, 2004). Ce sont eux aussi qui ont systématisé l'étude des fractions décimales ⁹.

Le premier livre traitant des fractions décimales, le Livre des aphorismes du calcul indien, a été écrit par al-Uqlidisi vers 950 (O'Connor & Robertson, 1999a ; Salah Ould Moulaye, 2004). Cette innovation majeure est souvent attribuée à tort à al-Khasi, mathématicien et astronome qui écrivit *Clef de l'arithmétique* en 1427 (Salah Ould Moulaye, 2004). Dans cet ouvrage apparaît néanmoins une étude exhaustive et approfondie des fractions décimales. De plus, al-Khasi a montré comment décomposer toute fraction en une série de fractions décimales et a conçu des tableaux de conversion des fractions sexagésimales babyloniennes en fractions décimales.

À la même époque en Europe, ce sont les fractions unitaires ou les fractions duodécimales des Romains qui sont utilisées (Cajori, 1991). Ce n'est qu'au XVI^e que Simon Stevin fera connaître les fractions décimales en Europe. Il est difficile de savoir si Stevin avait ou non connaissance des travaux antérieurs sur les fractions décimales ou s'il les a imaginées. Quoiqu'il en soit, en 1585, il introduisit l'usage des fractions décimales en Europe dans *De Thiende* (O'Connor & Robertson, 2004b). Dans *La Disme* (traduction française de *De Thiende*) ¹⁰, il indiqua comment calculer avec ces fractions décimales et fit l'éloge de leur utilisation pour le quotidien.

Dans ces livres, Stevin utilisait un chiffre pour indiquer les différentes puissances négatives de dix (voir figure 7 en haut). Les unités apparaissaient à gauche du zéro (37 dans l'exemple), puis les dixièmes à gauche du un (6 dans l'exemple), les centièmes à gauche du deux (7 dans l'exemple) et les millièmes à gauche du trois (5 dans l'exemple), et ainsi de suite. Les chiffres 0, 1, 2, 3, ... représentaient vraisemblablement les puissances de $\frac{1}{10}$. Pour les opérations écrites, ces chiffres sont repris en tête de colonne (voir figure 7 en bas).

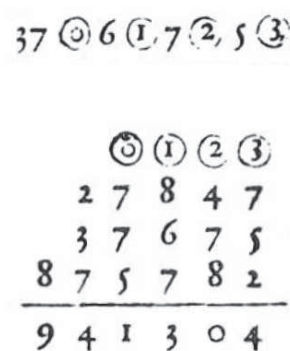


Fig. 7. Notations de Stevin.

Après Stevin, la notation des fractions décimales prit différentes formes. L'origine du point ou de la virgule comme séparation entre les unités et la partie décimale est difficilement attribuable à un auteur en particulier (Cajori, 1991), mais il semblerait que Napier (1550-1617) ait été le premier à l'utiliser (O'Connor & Robertson, 1998).

Jost Bürgi aurait quant à lui simplifié la notation de Stevin en surmontant le chiffre des unités d'un petit rond (Ifrah, 1994). Plus tard, au début du XVI^e, les fractions décimales seront notées avec un point ou une virgule pour séparer les unités de la partie décimale.

9. Les fractions décimales sont définies dans la section 1.1.

10. *De Thiende* sera traduite en anglais par Robert Norton en 1608. Thomas Jefferson s'en inspira pour proposer une monnaie décimale aux États Unis. C'est pourquoi le dixième d'un dollar s'intitule *a dime* (O'Connor & Robertson, 2004b).

1.2.5 Système métrique

Un système métrique décimal a été créé au moment de la révolution française. Il est à la base du Système international d'unités actuel adopté par le Conseil général des poids et des mesures. Il comporte quatre unités de base, le mètre, le kilogramme, la seconde, et l'ampère qui donnent leurs initiales à l'intitulé MKSA. Ce système est international, mais certains pays, comme les États-Unis, ne l'ont pas encore adopté. La plupart des mesures ont donc été décimalisées, mais d'autres pas, comme la mesure du temps ou des angles.

Pourtant, le 22 septembre 1792 a donné place au jour 1 de l'an 1 lorsque le calendrier républicain a été décrété en France (O'Connor & Robertson, 2005). Celui-ci comptait douze mois, comptant chacun trois décades de 10 jours. Le 1 novembre 1795 (ou 11 brumaire de l'an 3), une loi passe également pour la création d'horloges avec 10 heures dans une journée, 100 minutes dans une heure et 100 secondes dans une minute. Les angles étaient décimalisés, l'angle droit contenant 100 degrés et l'angle plein contenant 400 degrés. Ces décimalisations du temps et des angles n'ont cependant pas convaincu. Elles n'ont plus été utilisées au-delà du 1 janvier 1806. D'autres tentatives ont eu lieu, mais devant les résistances, entre autres des pays étrangers consultés, le gouvernement français abandonna ce système en 1900.

De nos jours, dans le monde, cohabitent donc différents systèmes : le système décimal qui s'est majoritairement imposé pour exprimer les nombres et les mesures, dont l'euro en Europe, et le système sexagésimal pour la mesure du temps ou des angles. Aux États-Unis, sont encore utilisés, le Mile (Mile, mi), le pied (Foot, ') et le pouce (Inch, "), que nous utilisons nous aussi pour la mesure de nos écrans, ainsi que d'autres unités pour la mesure du volume et de la masse. Au Royaume-Uni, le système métrique légal est peu utilisé dans la vie quotidienne. Les tentatives de décimalisation complète n'ont donc pas abouti.

1.2.6 Réticences au changement

Selon Thomas Kuhn, l'histoire peut être considérée comme « *autre chose que des anecdotes et des dates* » (Kuhn, 1983, p. 17). Outre les informations concernant l'évolution des systèmes de numération, nous pouvons trouver dans l'histoire des traces de réticences au changement.

Premièrement, la transmission des nombres indiens dans le monde arabe ne s'est pas faite sans heurts. Les mathématiciens arabes ont dans un premier temps eu des opinions assez mitigées : reconnaissant les avantages du système de numération indien, mais souhaitant améliorer leur système plutôt que de le remplacer (Chrisomalis, 2010). Il a même été proposé, par al-Uqlidisi, de concilier les deux systèmes, d'utiliser les principes de la numération indienne, mais avec les neuf premières lettres de l'alphabet grec ou arabe et non les chiffres indo-arabes (Saidan, 1966).

En Europe ensuite, des réticences ont aussi été rencontrées. Au V^e siècle, lorsque

les Indiens mettent au point le système décimal de position, les Européens utilisent le système de numération romain. Et ce n'est qu'à partir du XII^e siècle que les Européens commenceront à utiliser le système indien. L'adoption progressive du nouveau système prendra donc plus d'un demi-millénaire (Schärlig, 2010). D'une part parce que seuls ceux qui calculaient fréquemment en avaient réellement besoin, la majorité des gens se contentant des chiffres romains, et d'autre part parce que l'Europe n'était pas prête à l'époque à accepter des nouvelles idées (O'Connor & Robertson, 2001a).

Cette période de transition se caractérisait par un conflit entre les abacistes, partisans des chiffres romains et donc de l'abaque qui était nécessaire pour opérer avec ces chiffres, et les algoristes, partisans de la nouvelle numération indienne. Dans la *Margarita Philosophica* de Gregorius Reisch, une gravure illustre Dame Arithmétique observant la compétition entre un abaciste (Pythagoras) et un algoriste (Boethius) (voir la figure 8).



Fig. 8. Gravure issue de la *Margarita Philosophica* de Gregorius Reisch (Ifrah, 1994).

Dans le *Arte del Cambio* de 1299, et même plus tard, on interdisait aux vendeurs de Florence d'utiliser les chiffres arabes ; on les obligeait à utiliser les chiffres romains. Ce n'est qu'au XIV^e que les marchands italiens ont commencé à utiliser les chiffres arabes. On trouvait alors des formes intermédiaires telles *IIIIIcXV* pour 2315 (Struik, 1948).

Les mélanges entre le système de numération en place et le système indien proposé ont en réalité été variés et nombreux durant la période de transition (Chrisomalis, 2010).

Burnett (2006) précise que les réticences européennes à l'adoption du système indien au XII^e siècle et au début du XIII^e siècle ont eu différentes origines. La première provenait de l'introduction de neuf symboles totalement nouveaux. Différentes stratégies ont alors été adoptées par les mathématiciens de l'époque : certains remplaçaient par les chiffres indiens seulement les chiffres romains encombrants (comme IIII et VIIII) ou seulement les grands nombres (de quatre chiffres ou plus), d'autres utilisaient un système alpha-numérique, d'autres encore faisaient preuve d'une réticence encore plus marquée, remplaçant les neuf chiffres indiens par les neuf premiers chiffres romains et tentaient d'exécuter les algorithmes du calcul avec ceux-ci. Il est intéressant également de noter que, dans le *Dixit Algorizmi*, les chiffres indo-arabes apparaissent comme des illustrations et que ce sont les chiffres romains qui apparaissent dans le texte et servent aux explications.

Tabl. 1
Nombres indo-arabes en Europe (Chrisomalis, 2010, p. 223)

Lieu	Première apparition connue	Usage commun
Espagne	976 : Codex Vigilanus	1490 : datation de pages dans des textes
Italie	vers 1050-1075 : Pandulf de Capua	vers 1325 : registres banquiers et livres de comptes dans les villes principales
France	de la moitié à la fin du 11 ^e siècle : traités d'abaque	vers 1400 : datation, comptabilité, etc.
Angleterre	vers 1130 : traduction d'al-Khwarizmi par Adélarde de Bath, 13 ^e siècle : Cathédrale de Wells (premier usage épigraphique)	1525 - 1550 : registres d'archives, livre de comptes, 1600-1630 : inventaires après décès
Allemagne/Autriche	1143 : traduction d'al-Khwarizmi en latin à Vienne	1525 - 1550
Grèce	12 ^e siècle : commentaires sur les Éléments d'Euclide	vers 1400 : conquête Ottomane de la plupart des zones de langue grecque
Scandinavie	vers 1275 - 1300 : année comptable de Valdemar	vers 1550 (livres, manuscrits, registres)
Islande	vers 1310 - 1330 : traduction par Haukr Erlendson du Carmen algorismo	vers 1550 (livres, manuscrits, registres)
Portugal	1415 : Livro da Virtuosa Bemfeitoria	1490 - 1510 : récits de voyages, documents scientifiques, 16 ^e -17 ^e siècles : usage général

La seconde provenait de la difficulté de concevoir qu'un même symbole puisse être utilisé pour représenter une infinité de nombres, alors que pour les chiffres romains, différents symboles étaient utilisés pour représenter 1, 10, 100, 1000, ... (i, x, c, m, ...).

Un autre problème encore provenait du zéro et de ce qu'il représente, c'est-à-dire *rien*. Enfin, un autre obstacle était issu du sens de l'écriture : l'arabe s'écrit de droite à gauche, alors que le latin s'écrit de gauche à droite. Il restait donc à savoir si la plus petite valeur se trouvait à droite ou à gauche. Dans certaines traductions latines, les nombres étaient tout simplement écrits en miroir. Dans le *Dixit Algorizmi*, il est précisé que les valeurs débutent à la droite de celui qui écrit et que la première position est celle des unités.

Pour ces différentes raisons, dans certaines régions d'Europe, le système indien n'a été connu que plusieurs siècles après la parution des premiers ouvrages le décrivant (Schärlig, 2010). Chrisomalis (2010) a également montré avec précision et pour différents pays le temps qui s'écoule entre une première apparition des nombres exprimés avec le système indien et un usage commun de ces nombres. Le tableau 1 est une traduction partielle d'un tableau de Chrisomalis.

À notre connaissance, la littérature n'aborde pas d'éventuelles réticences à l'adoption des fractions décimales proposées par Stevin au 16^e siècle. Nous pouvons seulement constater que les fractions décimales avaient déjà été proposées bien plus tôt par des auteurs arabes. Entre la première proposition des fractions décimales et leur adoption, du temps s'est donc écoulé. Nous pouvons aussi constater que toutes les unités de notre système métrique n'ont pas de subdivisions décimales, des mesures comme le temps et les angles ont résisté à la décimalisation et sont restées sexagésimales. De plus, d'autres pays utilisent encore aujourd'hui d'autres mesures qui ne sont pas décimales.

1.3 Représentation et traitement des nombres

Notre système symbolique permet de représenter, à partir de dix chiffres, une infinité de nombres : notamment, les nombres naturels, du plus petit à l'extrêmement grand, en passant par des nombres à plusieurs chiffres ; les nombres rationnels, sous forme de fractions ou sous forme de nombres décimaux, par exemple $\frac{2}{5}$ ou 0,4.

Quelle représentation mentale avons-nous des nombres ? Cette représentation est-elle commune à tous les nombres : naturels, rationnels et décimaux ? Cette représentation mentale est-elle indépendante du système symbolique que nous utilisons ? Comment ce système symbolique est-il appris ? Comment sont traités les nombres à un chiffre et à plusieurs chiffres ? Les difficultés lors de l'apprentissage des nombres rationnels et décimaux pourraient-elles être liées à notre représentation mentale des nombres, aux processus permettant d'accéder à cette représentation mentale, et/ou au système symbolique utilisé pour les représenter ?

Dans cette section, nous aborderons la représentation mentale des nombres naturels et le traitement de ces nombres. Nous examinerons également des données récentes concernant la représentation et le traitement des nombres rationnels.

1.3.1 Représentation mentale des nombres naturels

L'homme dispose d'une capacité à discriminer des collections d'objets en fonction du nombre d'éléments qui les composent. Des comparaisons non-symboliques peuvent être réalisées par l'adulte (Buckley & Gilman, 1974), mais aussi par le nouveau-né (Xu & Spelke, 2000). Cette capacité serait innée, issue de l'évolution et indépendante de tout système symbolique (Dehaene, 1992; Dehaene, Dupoux, & Mehler, 1998), puisqu'elle est également observée chez l'adulte disposant d'un système de représentation restreint (Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, 2004) et même chez l'animal (Flombaum, Junge, & Hauser, 2005).

Cette capacité est basée sur des représentations mentales approximatives des nombres, abstraites et indépendantes des modalités sensorielles (Barth, Beckmann, & Spelke, 2008). Deux systèmes ont été proposés pour rendre compte de ces capacités non symboliques : le système « object file » et le système numérique approximatif (pour une revue, Piazza, 2010). Le système « object file » permet d'appréhender de manière exacte des petites collections de 1 à 3 ou 4 objets. Le système numérique approximatif permet d'appréhender des nombres plus grands de façon approximative. Il serait le plus à même de rendre compte des données neuro-cognitives actuelles (Piazza, 2010).

Ce système approximatif se caractérise principalement par le fait que les performances en discrimination de deux collections dépendent du rapport entre le nombre d'objets dans les deux collections selon une loi de Weber-Fechner. Par exemple deux collections de 2 et 3 éléments, ayant un rapport de 0.66, seront plus facilement et plus rapidement discriminées que des collections de 8 et 9 éléments, ayant un rapport de 0.88 (plus proche de 1). La loi de Weber-Fechner décrit la relation entre une numérosité physique et sa représentation mentale. Cette relation serait logarithmique et proviendrait de la compression des représentations mentales. Un des effets de la loi de Weber-Fechner est l'*effet de distance* (Moyer & Landauer, 1967). Selon cet effet, la comparaison de deux nombres distants (par exemple 2_6) sera plus rapide et moins sujette aux erreurs que la comparaison de deux nombres proches (par exemple 2_3).

Dans certains modèles, les représentations seraient équidistantes, mais avec une variabilité qui augmente avec la grandeur des nombres (Gallistel & Gelman, 1992); pour d'autres la variabilité est fixe, mais les représentations sont logarithmiquement espacées (Dehaene, 2003). Les représentations mentales auraient alors la forme d'une ligne mentale numérique (Dehaene, 1989, 1992), un continuum représentant les nombres de façon analogique et approximative, chaque représentation mentale étant centrée sur la valeur logarithmique du nombre (voir figure 9).

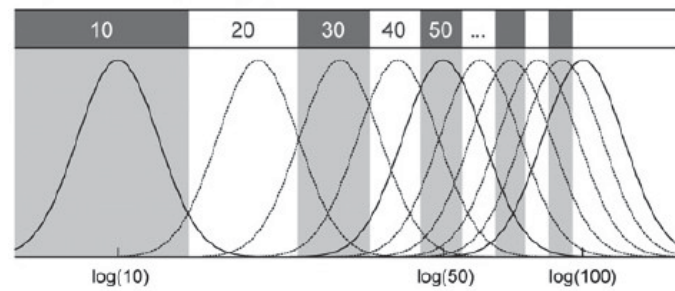


Fig. 9. Représentation logarithmique (Izard & Dehaene, 2008, p. 1238)

Les effets comportementaux propres à la représentation approximative ont aussi été observés lors de comparaisons symboliques, en chiffres arabes (Moyer & Landauer, 1967 ; Dehaene, Dupoux, & Mehler, 1990) ou en mots nombres (Buckley & Gilman, 1974). Les symboles numériques, que nous acquérons grâce au langage, se grefferaient progressivement aux représentations mentales approximatives. Ces représentations serviraient d'appui aux traitements symboliques. Cet accès aux représentations mentales à partir des symboles serait même totalement automatique à partir d'un certain âge. L'effet de distance a en effet été observé, lorsqu'aucun traitement sur les nombres n'était nécessaire pour réaliser la tâche, chez les adultes (Dehaene & Akhavein, 1995), chez l'enfant à partir de 5 ans (Zhou, Chen, Jiang, Zhang, & Dong, 2007) ou de 6 ans pour les nombres à un chiffre (Girelli, Lucangeli, & Butterworth, 2000) et de 7 ans pour les nombres à deux chiffres (Mussolin & Noël, 2007).

1.3.2 Apprentissage des symboles et du système décimal

Nous disposons donc, dès le plus jeune âge, de capacités numériques indépendantes de tout système symbolique. Plus tard dans le développement, les enfants vont acquérir des symboles permettant de représenter les nombres et donner sens à ces symboles.

Cet apprentissage des symboles débute par la rencontre avec les mots représentant les nombres et l'acquisition de la chaîne numérique verbale. L'enfant devra ensuite apprendre les représentations écrites des nombres ; les mots nombres écrits et les nombres arabes, c'est-à-dire les chiffres arabes et le système décimal de position.

Dès 2 ans et demi, débute l'acquisition progressive de la chaîne numérique verbale (voir Fuson, Richards, & Briars, 1982), mais ce n'est qu'à partir de 4 ans et demi environ que les enfants sont capables de reconnaître les mots nombres tout en rejetant des mots qui leur ressemblent (Noël, 2001). Vers 4 ans et demi, les enfants sont également capables de reconnaître les chiffres comme faisant partie d'un lexique spécifique, en rejetant d'autres symboles. Plus tard, les enfants sont capables d'établir des liens entre leurs connaissances des mots nombres et des chiffres arabes, et de passer d'un code à l'autre, c'est-à-dire de faire du transcodage. À 6 ans, ils sont capables de transcoder des nombres arabes à un chiffre. À 7 ans, la grande majorité des enfants transcodent sans erreur des nombres à deux chiffres et obtiennent également 77% de réponses correctes

pour des nombres à trois chiffres. Enfin, à partir de 8 ans, ils peuvent lire et écrire la quasi-totalité des nombres de un à quatre chiffres. Le développement du transcodage entre les mots nombres et les nombres exprimés dans le système décimal de position s'étale donc de 5 ans à 9 ans environ.

Au cours du développement, des erreurs peuvent être commises lors du transcodage. Celles-ci peuvent être *lexicales* ou *syntaxiques*. Les erreurs lexicales sont relatives à une primitive lexicale, *trente-deux* étant par exemple écrit 34. Les erreurs syntaxiques concernent quant à elles les règles syntaxiques, *trente-deux* étant par exemple écrit 302. À 7 ans, les erreurs syntaxiques sont plus fréquentes (87%) que les erreurs lexicales et concernent essentiellement le principe additif (Power & Dal Martello, 1990), par exemple *cent six* écrit 1006 au lieu de 106. Les erreurs syntaxiques peuvent également toucher le principe multiplicatif, par exemple *deux cent* écrit 2100 au lieu de 200 (Seron, Deloche, & Noël, 1991 ; Seron & Fayol, 1994). À 8 ans, seules les erreurs concernant le principe additif sont encore observées (Seron et al., 1991).

Il est évident que lire, écrire et comprendre les nombres à plusieurs chiffres nécessite une compréhension du système décimal. Le modèle du développement de la compréhension du système décimal de position le plus reconnu actuellement est celui développé par Fuson et ses collaborateurs (Fuson, 1998 ; Fuson et al., 1997), même si initialement ce modèle a été conçu pour l'enseignement. Ce modèle détaille les relations existant entre les mots nombres, les nombres écrits et les quantités. Les auteurs définissent une structure conceptuelle comme étant « (a) une structuration des quantités, des mots nombres et des nombres écrits de sorte à ce qu'ils soient compris, comptés, additionnés et soustraits de façon particulière et (b) la connaissance requise pour comprendre, compter, additionner et soustraire de ces façons » (Fuson, 1998, p. 150) et ont identifié cinq structures conceptuelles correctes. Celles-ci, illustrées à la figure 10, sont : la conception *unitaire*, la conception *X-ante groupe et unités*, la conception *compter par dizaines et unités*, la conception *dizaines et unités avec valeur de position* et la conception *dizaines et unités intégrées*. La conception *unitaire* (la plus extérieure sur la figure) est issue de l'expérience du comptage, chaque mot nombre étant associé à une quantité et pouvant être représenté par un symbole écrit. La conception *X-ante groupe et unités* (plus intérieure sur la figure) est, elle aussi, issue du comptage et correspond à une certaine compréhension de la structure décimale à partir des mots nombres en différentes langues européennes. La conception *compter par dizaines et unités*, toujours issue du comptage, met en évidence les dizaines. La conception *dizaines et unités avec valeur de position* (la plus interne sur la figure) provient de la signification des nombres écrits (53 signifiant 5 dizaines et 3 unités). L'acquisition de ces deux conceptions dépendrait aussi en grande partie de l'enseignement reçu. Enfin, la conception la plus élaborée *dizaines et unités intégrées* fait le lien entre cette conception *dizaines et unités avec valeur de position* et la conception la plus avancée issue du comptage.

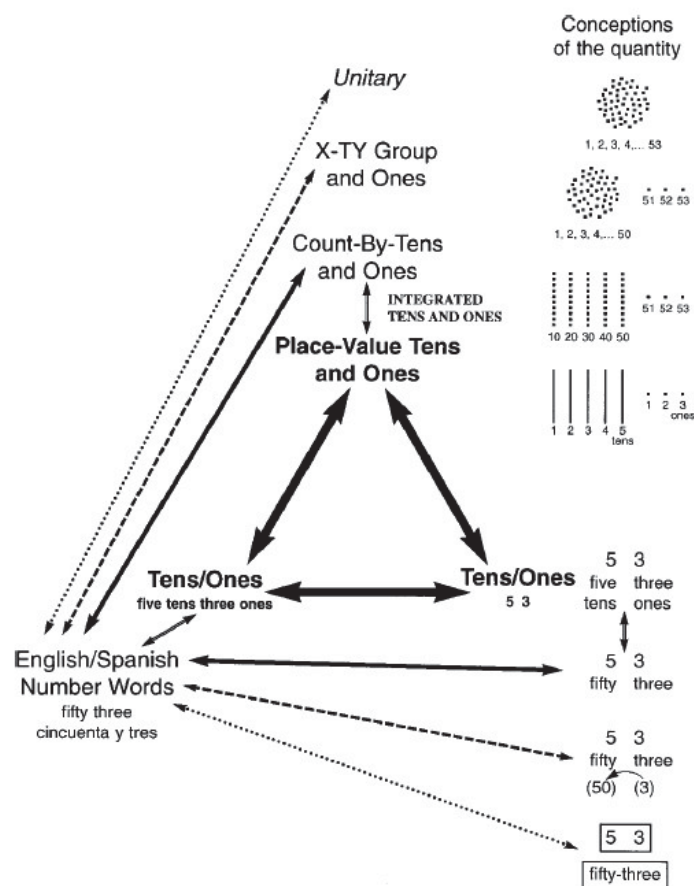


Fig. 10. Séquence développementale des structures conceptuelles pour les nombres à deux chiffres : le *Ct-PIV trial model*. (Fuson, 1998, p. 152)

Les trajectoires développementales dans la construction de ces cinq conceptions peuvent varier. De plus, il peut aussi y avoir des variations individuelles à l'intérieur de chacune des conceptions. Les auteurs mentionnent explicitement que le modèle n'est pas un modèle développemental, que celui-ci trace plutôt les structures conceptuelles nécessaires à une compréhension aboutie des nombres à deux chiffres. Tous les enfants débuteraient néanmoins par une conception unitaire.

Le modèle de Fuson a été mis à l'épreuve pour analyser le développement du système décimal en 1^{re} et 2^e années primaires (Collet, 2004). Trois types de connaissances ont été distingués : les traductions (c'est-à-dire du transcodage d'un mode de représentation à un autre), les liens de structure (concernant la compréhension des relations entre les mots nombres, les quantités et les nombres en chiffres arabes) et les procédures de dénombrement. Les résultats montrent que savoir lire et écrire les nombres à deux chiffres est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour comprendre les liens de structure et le dénombrement en base dix, en tous les cas pour les nombres de deux chiffres. Il est apparu également que certains enfants commencent par la conception unitaire proposée par Fuson en étant capables d'effectuer des traductions. D'autres enfants cependant ne réussissent que certaines traductions, mais commencent pourtant à développer des liens

de structure. Malgré ces différences, la première étape semble être, pour tous les enfants, la capacité à réaliser des traductions. Ensuite, certains enfants comprennent les liens de structure puis commencent à utiliser des procédures de dénombrement en base dix, alors que d'autres dénombrent d'abord en base dix avant de comprendre les liens de structure.

La maîtrise du système symbolique décimal débute donc par l'acquisition des primitives lexicales, qu'il s'agisse du code verbal ou du code arabe. Vers 6 ans, les enfants sont capables de transcoder des nombres à un chiffre. Vers 7 ans, les enfants sont capables de transcoder des nombres à deux chiffres et commencent à comprendre les principes du système décimal de position. À cet âge, les erreurs syntaxiques lors du transcodage sont encore néanmoins fréquentes, surtout en ce qui concerne le principe additif. Vers 8 ans, ils peuvent transcoder des nombres de un à quatre chiffres, même si des erreurs sur le principe additif apparaissent encore.

À des âges équivalents, dans une tâche de comparaison, les élèves de 1^{re} année primaire comparant 80 paires comprises entre 21 et 98, commettent 20,6% d'erreurs. Les élèves de 2^e, 3^e, 4^e et 5^e années primaires comparant eux 237 paires de nombres à deux chiffres, commettent respectivement de 4,6 %, 3,5 %, 2,4 % et 4,7% d'erreurs alors que les adultes ont un taux d'erreur de 2,7 % (Nuerk, Kaufmann, Zoppoth, & Willmes, 2004). Dès la 4^e année primaire, la comparaison de nombres naturels à deux chiffres est donc réalisée avec un taux de réussite semblable à celui des adultes.

1.3.3 Traitement des nombres naturels à deux chiffres

De quelle façon sont traités les nombres à plusieurs chiffres lors d'une tâche de comparaison ? Concernant les nombres à deux chiffres, trois hypothèses ont été proposées et sont toujours débattues. Les nombres arabes pourraient être traités de façon *holistique*, les chiffres d'un nombre à deux chiffres étant traités comme un tout. Ils pourraient également être traités par *décomposition*, le chiffre des dizaines étant traité séparément du chiffre des unités, ou être traités de façon *hybride*, les deux traitements co-existant.

Selon l'hypothèse d'un traitement purement holistique (Dehaene et al., 1990 ; Reynvoet & Brysbaert, 1999), on accèderait à une représentation globale des nombres à deux chiffres lors du traitement des nombres dans une tâche de comparaison. L'observation d'un effet de distance global, le nombre 61 étant comparé moins rapidement au standard 55 (distance de 6) que le nombre 68 (distance de 13), appuie cette hypothèse (Dehaene et al., 1990).

Cependant, les résultats d'autres études indiquent un effet de distance classique à l'intérieur d'une dizaine, par exemple entre des paires telles que 51 _ 54 et 51 _ 57, mais pas entre les paires 58 _ 61 et 58 _ 64, quand les dizaines sont différentes (Verguts & De Moor, 2005). Dans ce dernier cas, l'effet de la distance entre les dizaines dépasse celui de la distance globale. Pour les auteurs, les nombres seraient donc entièrement *décomposés* en respectant les valeurs de position et leur magnitude globale ne serait pas traitée.

Enfin, pour d'autres auteurs, le traitement serait *hybride*, un traitement holistique et un traitement par décomposition opéreraient en parallèle et de façon interactive. L'effet de compatibilité entre les dizaines et les unités appuie cette hypothèse. À distance globale identique, la paire 47_62 est comparée plus lentement que la paire 42_57 parce que dans le premier cas, la comparaison des dizaines 4_6 n'est pas compatible avec celle des unités 7_2, le plus grand chiffre appartenant tantôt à un nombre, tantôt à l'autre (Nuerk, Weger, & Willmes, 2001). La distance globale a néanmoins un impact, ce qui conduit les auteurs à postuler un traitement hybride (Nuerk & Willmes, 2005).

Ces résultats qui semblent contradictoires pourraient néanmoins être réconciliés en tenant compte de la façon dont les nombres sont présentés ou du stade de traitement (Zhang & Wang, 2005 ; Zhou, Chen, Chen, & Dong, 2008). Un traitement holistique aurait lieu lorsque les nombres sont présentés de façon séquentielle et lorsqu'un stockage en mémoire de travail est nécessaire (comme dans Dehaene et al., 1990), mais pas lorsqu'ils sont présentés simultanément (comme dans Nuerk & Willmes, 2005 ; Verguts & De Moor, 2005).

D'un point de vue développemental, l'effet de compatibilité entre les dizaines et les unités sur les temps de réponse est inversé en 2^e année primaire, absent en 3^e et 4^e années primaires et présent dès la 5^e année primaire (Nuerk et al., 2004). Les magnitudes des dizaines et des unités seraient donc traitées automatiquement, et pas uniquement la magnitude globale, même si pour toutes les paires présentées, le traitement des unités n'était pas nécessaire pour prendre une décision. Pour les auteurs, cela indique que le traitement est au départ décomposé et séquentiel pour devenir ensuite décomposé et parallèle. L'expérience du système décimal ferait en sorte que les chiffres soient intégrés à leur valeur de position de plus en plus automatiquement et en parallèle. Ce traitement décomposé débiterait même en 1^{re} primaire (Pixner, Moeller, Zuber, & Nuerk, 2009). Chez l'adulte, le traitement des valeurs de position serait tout à fait automatique et peut interférer avec un autre traitement (Kallai & Tzelgov, 2012). Lors d'une tâche de comparaison de magnitude, il est en effet plus difficile et plus coûteux en temps de comparer la magnitude de deux chiffres si leur position dans une suite de trois chiffres (composée de deux zéro) est incongruente avec leur valeur. Il est par exemple plus difficile de répondre que $5 > 3$ lorsque ces chiffres sont présentés dans la paire incongruente 005 vs. 030 que dans la paire congruente 003 vs. 050.

Les représentations mentales des nombres naturels seraient-elles dépendantes de notre système symbolique, c'est-à-dire structurées selon une base dix ? Selon Dehaene et ses collègues (Dehaene et al., 1990 ; Dehaene, 1992), la représentation analogique (la ligne mentale) est indépendante du système symbolique verbal et du système symbolique arabe. Les représentations symboliques sont associées à des traitements spécifiques et le transcodage assure les liens entre les différentes représentations. Les tâches numériques sont alors sous-tendues spécifiquement par une représentation et un transcodage éventuel vers une autre représentation, comme l'illustre la figure 11. La

structure en base dix n'apparaîtrait donc pas dans les représentations analogiques. Le traitement des nombres à deux chiffres est uniquement sensible à la distance logarithmique entre les deux nombres.

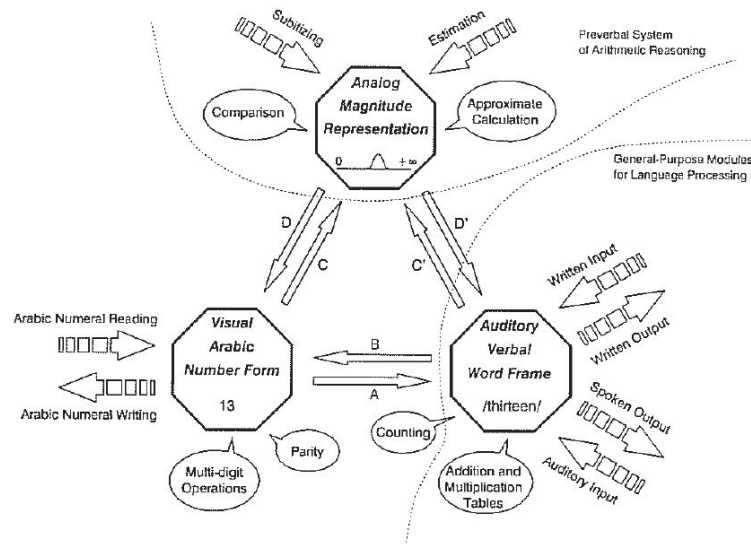


Fig. 11. Modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31)

Pour McCloskey, Caramazza, et Basili (1985) par contre, la représentation sémantique des nombres serait structurée en base dix. Le nombre 345 par exemple serait représenté par $\{3\} * 10^2, \{4\} * 10^1, \{5\} * 10^0$. Pour Power et Dal Martello (1990) la représentation sémantique refléterait non pas la base dix, mais la structure de notre système verbal, le nombre 345 étant représenté par $(C100 \times C3) + (C10 \times C4) + C5$, le C référant au concept sémantique propre à chaque quantité.

Selon un modèle hybride (Nuerk et al., 2001; Nuerk & Willmes, 2005), issu de l'observation d'un effet de compatibilité entre dizaines et unités, il y aurait une interaction entre les représentations globales et les représentations des composants.

1.3.4 Les nombres rationnels

Les nombres rationnels présentés sous forme de fractions, par exemple $\frac{2}{3}$, contiennent eux aussi plusieurs chiffres. On pourrait donc poser, quant à leur représentation sémantique et leur traitement, des hypothèses semblables à celles relatives aux nombres naturels de plusieurs chiffres. Les nombres rationnels pourraient être traités holistiquement, ce traitement étant basé sur une représentation globale de leur magnitude. Mais ils pourraient aussi être décomposés ou traités de façon hybride. Des données récentes tentent de départager ces différentes hypothèses.

Pour certains auteurs, les fractions seraient traitées sans que ne soit activée une représentation holistique de leur magnitude (Bonato, Fabbri, Umiltà, & Zorzi, 2007). Par exemple, lorsque des fractions de numérateur 1 sont comparées au standard $\frac{1}{5}$,

on observe un effet de distance indiquant une comparaison des dénominateurs et non des magnitudes globales. Des résultats similaires apparaissent lorsque le standard 0,2 est utilisé, suggérant que ce dernier a été transformé en la fraction $\frac{1}{5}$. Lorsque des fractions dont les numérateurs varient de 1 à 9 et les dénominateurs de 4 à 6 doivent être comparées au standard 1, c'est la distance entre le numérateur de la fraction et le numérateur du standard transformé en $\frac{5}{5}$ qui prédit le mieux les temps de réponse.

Ces résultats sont cohérents avec l'idée de plusieurs auteurs selon laquelle notre système de représentation de la magnitude des nombres indépendant des symboles ne peut représenter d'autres nombres que les nombres naturels (Butterworth, 2001, 2007 ; Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004).

Néanmoins, d'autres études indiquent que les fractions peuvent être traitées de façon holistique et que les adultes ont une représentation mentale approximative des fractions (Meert, Grégoire, & Noël, 2009, 2010a). La distance globale entre deux fractions semble en effet être le meilleur prédicteur des temps de réponse dans une tâche de comparaison lorsque les fractions ont un numérateur commun (Meert et al., 2009), lorsqu'elles n'ont pas de composants communs (par exemple $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{9}$) (Meert et al., 2010a ; Schneider & Siegler, 2010) et lorsqu'elles sont familières (comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, et $\frac{3}{4}$). De même, lorsque des adultes comparent des fractions unitaires (de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{9}$) aux nombres naturels (de 1 à 9), les temps de réponse semblent dépendre d'une distance entre une valeur constante inférieure à 1, que les auteurs nomment *une fraction généralisée*, et le nombre naturel (Kallai & Tzelgov, 2009). Ce qui suggérerait que cette fraction généralisée serait représentée sur le même continuum que les nombres naturels, mais pas que chaque fraction ait une représentation distincte. Des données issues de la neuro-imagerie vont également dans ce sens (Ischebeck, Schocke, & Delazer, 2009), mais la distance entre les composantes (numérateurs et dénominateurs) influençait également les temps de réaction. D'un point de vue développemental, cette représentation mentale des fractions serait déjà présente chez les enfants de 10 et 12 ans (Meert, Grégoire, & Noël, 2010b).

Il faut toutefois noter que les adultes pourraient utiliser différentes stratégies lors de la comparaison de fractions. Ils pourraient n'activer la représentation mentale approximative des fractions que lorsque la situation l'indique. Lorsque les dénominateurs sont communs, une comparaison des numérateurs suffit et la distance entre les numérateurs est ce qui explique le mieux les temps de réponse (Meert et al., 2009). De même, la magnitude globale des fractions ne serait pas activée dans une tâche de jugement « même/différent », où seuls les composants seraient traités (Gabriel, 2011). Un effet de congruence entre les composants de la fraction et la grandeur de la fraction a également été observé (Meert et al., 2009, 2010b ; Kallai & Tzelgov, 2009). Un accès automatique aux représentations mentales des chiffres composant la fraction créerait une interférence. L'ensemble de ces résultats tend à appuyer un traitement hybride, à la fois holistique et décomposé, des fractions (Gabriel, 2011 ; Meert et al., 2009, 2010a).

Qu'en est-il des nombres décimaux ? À l'heure actuelle, la représentation mentale et le traitement des nombres décimaux n'ont pas encore été réellement investigués. Nous ne savons pas si nous disposons d'une représentation mentale holistique des nombres décimaux, si celle-ci serait activée lorsque nous traitons les nombres décimaux, ou si, comme pour les nombres naturels et les nombres rationnels, nous pourrions en fonction de la tâche à réaliser, activer soit une représentation holistique des nombres décimaux, soit traiter séquentiellement ou en parallèle les différents composants des nombres décimaux en les intégrant en fonction de leur valeur de position. Seule une étude récente auprès d'adultes ($N = 18$) et d'élèves de 6^e année primaire ($N = 19$) et basée sur des tâches de bissection de ligne numérique indique que les enfants, aussi bien que les adultes, ont une représentation linéaire des nombres décimaux (Iuculano & Butterworth, 2011).

Nous savons néanmoins que, bien des années après l'enseignement des nombres décimaux, les erreurs dans le traitement de ces nombres sont encore très fréquentes. En 3^e année secondaire par exemple, seuls 68% des élèves peuvent ordonner sans erreur un ensemble composé de quatre nombres décimaux et de la fraction $\frac{1}{5}$ (Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, 2005).

Nous allons, dans les sections qui suivent, aborder l'enseignement des nombres décimaux ainsi que les études concernant l'apprentissage de ces nombres et tenter de comprendre pourquoi cet apprentissage est si délicat.

1.4 Enseignement des nombres décimaux

Différents types d'enseignement des nombres décimaux ont été proposés. Certains auteurs suggèrent d'axer cet enseignement sur une meilleure connaissance conceptuelle des nombres rationnels, c'est-à-dire sur un travail des rapports, la relation partie/tout ou des pourcentages (Lachance & Confrey, 2001 ; Moss & Case, 1999) et de leur équivalence avec les nombres décimaux. D'autres utilisent du matériel concret, tel que les blocs Dienes (Hiebert & Wearne, 1988 ; Hiebert, Wearne, & Taber, 1991) ou des connaissances mathématiques liées à la vie quotidienne, comme les connaissances de la monnaie (Bonotto, 2005) ou du système métrique (Irwin, 2001).

Une étude menée au États-Unis auprès de vingt-huit enseignants de 3^e année primaire et trente-quatre enseignants de 4^e année primaire indique que la grande majorité des enseignants (près de 90% d'entre eux) utilise la monnaie pour l'enseignement des nombres décimaux, alors que les autres utilisent des supports concrets dessinés, le système métrique, l'équivalence avec les fractions ou les blocs en base dix de type Dienes (Glasgow, Ragan, Fields, Reys, & Wasman, 2000).

Qu'en est-il en Communauté française de Belgique ? Que disent les documents officiels ? Que font réellement les enseignants ?

Les socles de compétences du Ministère de la Communauté française (1999) constituent le document officiel concernant l'enseignement fondamental et le premier degré

de l'enseignement secondaire en Communauté française de Belgique. Les compétences devant être acquises par les élèves à la fin du premier degré de l'enseignement secondaire y sont développées. Une compétence étant une « aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches » selon le décret *missions* (1997).

Cinq compétences mettant en œuvre des nombres décimaux peuvent être certifiées à la fin de la 6^e année primaire :

- Dire, lire et écrire des nombres (des naturels et des décimaux limités au millième) dans la numération décimale de position en comprenant son principe ;
- Classer (situer, ordonner, comparer) des naturels et des décimaux limités au millième ;
- Décomposer et recomposer des nombres naturels et des décimaux limités au millième ;
- Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des nombres naturels et des décimaux limités au millième ;
- Écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Les socles de compétences ne mentionnent donc que des décimaux limités au millième en ce qui concerne l'enseignement primaire. De plus, les nombres rationnels ou les nombres réels ne sont pas évoqués dans le document (Skilbecq & Soille, 2010). En ce qui concerne la didactique, ce document officiel ne préconise pas explicitement aux enseignants une didactique permettant d'atteindre les compétences, mais indique que l'enseignement des nombres décimaux pourrait s'ancrer dans les mesures de grandeurs ou dans les opérations sur les nombres. On peut en effet lire, dans la partie dédiée aux nombres, que « l'inversion des opérations de multiplication et d'addition éclaire certains aspects de la division et de la soustraction » et que « ces opérations élargissent l'univers des nombres, (...) amènent les fractions, les décimaux et les nombres relatifs » (Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, 1999, p. 24). D'autre part, dans la partie dédiée aux grandeurs, on peut aussi lire que « les opérations de mesurage et de fractionnement conduisent aux nombres décimaux et aux fractions » (Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, 1999, p. 28). Le choix entre ces possibilités semble laissé à l'enseignant. Il est donc difficile de connaître précisément les choix didactiques posés par les enseignants de Communauté française. Nous savons seulement que, dans les programmes des quatre réseaux principaux en Communauté française (l'enseignement organisé par la Communauté française, l'enseignement libre catholique, l'enseignement des Communes et Provinces et l'enseignement organisé par la Felsi), l'enseignement des nombres décimaux débute en 4^e année primaire.

Nous avons eu l'occasion de proposer un questionnaire concernant l'enseignement des nombres décimaux à quelques enseignants de 4^e année primaire ($N = 7$). À la question « Pourriez-vous énoncer succinctement comment vous abordez les nombres décimaux avec vos élèves », ceux-ci ont répondu qu'ils débutaient cet enseignement :

- par la construction d'une droite numérique allant de 1 à 2 contenant des intervalles imposés qu'il faut compléter et que l'on peut *zoomer* ($N = 2$);
- par la comparaison, la lecture de températures extérieures ou de cotes contenant des dixièmes et des prix en euro ($N = 1$);
- par les liens entre différents modes de représentation, les fractions décimales, les décimaux, la droite numérique ($N = 1$);
- par les blocs Dienes, le grand cube représentant l'unité et l'abaque ($N = 1$);
- par le placement de fractions sur une ligne numérique et le fractionnement de cette droite en dixièmes, centièmes et millièmes ($N = 1$);
- par les blocs Dienes, l'euro et les mesures de grandeurs ($N = 1$).

Ces quelques réponses nous indiquent, d'une part, une certaine diversité dans les choix didactiques et, d'autre part, que les connaissances de la vie quotidienne, la droite numérique, les fractions ou du matériel concret tel que les blocs de Dienes sont utilisés pour l'enseignement des décimaux. Ces indications sont à prendre avec grande précaution puisqu'elles ne concernent que très peu d'enseignants, mais elles semblent néanmoins correspondre partiellement aux résultats de Glasgow et al. (2000) décrits ci-dessus.

1.5 Apprentissage des nombres décimaux

L'enseignement des nombres décimaux débute donc en 4^e année primaire, en Communauté française de Belgique (voir section 1.4) et dans d'autres pays également. Cet apprentissage semble néanmoins particulièrement difficile pour les élèves, et ce quels que soient le pays et l'époque. Nous présenterons ici, dans un ordre chronologique, un parcours de littérature concernant les difficultés qui apparaissent lors de l'apprentissage de nombres décimaux. Des hypothèses quant à l'origine de ces difficultés seront ensuite avancées.

1.5.1 Difficultés relatives aux nombres décimaux

En 1928, une étude de Brueckner parle déjà du fait que l'apprentissage des nombres décimaux est difficile pour les élèves. Un ensemble de tâches comprenant de l'ordre (1 item), du transcodage entre le code verbal et le code arabe (13 items) ou entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale (4 items), ainsi que de l'addition (12 items), de la soustraction (17 items), de la multiplication (30 items) et de la division (30 items) de nombres décimaux ne conduit en effet qu'à un taux de réussite moyen de 73% pour un échantillon de plus de 300 participants de 6^e année primaire, 1^{re} et 2^e années secondaires. L'auteur tente de classer les différents types d'erreurs et mentionne leur fréquence, mais la méthodologie de cette ancienne étude n'est pas assez explicite pour permettre une interprétation adéquate des résultats. Nous pouvons seulement en retenir que les erreurs les plus fréquentes semblent être liées à une mauvaise compréhension des valeurs de position dans la partie décimale.

À partir des années 1970 et surtout dans les années 1980, de nombreux didacticiens des mathématiques s'intéressent à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres décimaux (e.a., Comiti & Neyret, 1979 ; Neyret, 1973, 1979 ; Coquand, 1980 ; Brousseau, 1980, 1981) et certains relatent des difficultés d'apprentissage de ces nombres. Malheureusement, ces études ne sont soit pas empiriques, soit elles ne sont pas présentées selon un canevas classique d'étude empirique décrivant précisément la méthodologie et les résultats. Or nous ne retiendrons ici que les études empiriques dont la méthodologie est suffisamment transparente.

Comparaison de nombres décimaux

Dans une première étude concernant la comparaison de nombres décimaux, Léonard et Grisvard (1981) proposent à des participants de 2^e année secondaire ($N = 134$) d'ordonner les dix nombres décimaux suivants : 11.98, 12.4, 12, 11.898, 11.09, 12.04, 12.1, 12.113, 11.8, 12.001. Les résultats indiquent que 61% des participants réussissent cette tâche et que les erreurs ne sont pas données au hasard, mais semblent plutôt issues de deux règles implicites reflétant les conceptions des participants. Selon une première règle (règle 1), *le nombre qui a le plus grand « entier » est le plus grand*. Par exemple, 12.113 est considéré comme étant plus grand que 12.4 parce que $113 > 4$. Selon une seconde règle (règle 2), *le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit*. Par exemple, 12.44 est considéré comme étant plus petit que 12.4. L'application de la règle 1 correspond à 62% des erreurs, alors que l'application de la règle 2 correspond à 16% des erreurs. Les 22% d'erreurs restants n'étant conformes à aucune de ces deux règles. Les auteurs décriront ensuite une troisième règle (règle 3) (Grisvard & Léonard, 1983) selon laquelle *le nombre le plus petit est celui dont la première décimale est un zéro, les autres nombres étant rangés selon la règle 1*. Cette règle 3 marque un progrès dans la compréhension des nombres décimaux et conduit à une réponse correcte lorsque seuls deux nombres, dont un a zéro comme première décimale, sont proposés. Par exemple, $4,06 < 4,3$.

Lorsque six triplets de nombres décimaux contenant maximum trois chiffres après la virgule (voir le tableau 2 ci-contre) doivent être ordonnés du plus petit au plus grand par des participants de 4^e ($N = 52$), 5^e ($N = 49$) et 6^e ($N = 57$) années primaires et de 1^{re} ($N = 69$) année secondaire, on constate, d'une part, que les taux de réponses correctes augmentent progressivement d'année en année (42%, 55%, 59% et 77% respectivement) (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985).

Tabl. 2
Items utilisés par Sackur-Grisvard et Leonard (1985).

3.682	3.7	3.53
7.65	7.8	7.087
6.296	6.4	6.07
5.3	5.218	5.19
2.31	2.047	2.5
4.249	4.3	4.06

D'autre part, on observe que la fréquence d'utilisation de la règle 1 diminue d'année en année (43%, 26%, 19%, 11%) alors que les fréquences d'utilisation des règles 2 et 3 augmentent en 5^e année primaire puis diminuent jusqu'en 1^{re} année secondaire (2%, 6%, 6% puis 3% pour la règle 2) (7%, 13%, 10% puis 9% pour la règle 3).

D'autres auteurs ont utilisé les mêmes intitulés de règles implicites et montrent que celles-ci sont également utilisées par des participants de 6^e année primaire ($N = 21$) lorsqu'il s'agit de comparer deux nombres seulement (voir les 20 items dans le tableau 3 ci-contre) (Nesher & Peled, 1986). Les résultats indiquent en effet que 19% des participants réalisent la tâche sans erreur, 19% d'entre eux utilisent la règle 1, 14% la règle 3, 33% la règle 2 alors que les 14% restants sont inconsistants dans les réponses qu'ils fournissent. Des entretiens individuels avec les participants indiquent également que les participants utilisant la règle 1 utilisent leurs connaissances des nombres naturels, choisissant par exemple 4.63 comme étant plus grand que 4.8 en expliquant que 63 est plus grand que 8.

Tabl. 3

Items utilisés par Nesher et Peled (1986).

4.8	4.63
0.36	0.5
2.305	2.35
13/100	0.125
7/10	0.678
4.7	4.08
2.621	2.0687986
2.035	2.35
4/100	0.038
1.067	1.4
0.25	0.100
21/100	0.130
2.350	2.35
23/100	0.230
20/100	2/10
0. -	0. - - -
- . - - -	- . -
3.2	3.47
4.45	4.4502
4/10	0.457

Les participants qui utilisent la règle 2 semblent quant à eux plus influencés par leurs connaissances des fractions. Ils indiquent par exemple que 4.45 est plus grand que 4.4502 car les centièmes sont plus grands que les dix millièmes. Le raisonnement ne tient alors compte que du dénominateur de la fraction décimale. Enfin, ceux qui utilisent la règle 3 indiquent que 0.7 est plus grand que 0.08 parce qu'il y a un zéro avant le 8.

Ces différentes conceptions, ou utilisations de règle, semblent être influencées par le curriculum suivi par les élèves. Des paires de nombres similaires ont été présentées à des participants français de 4^e ($N = 37$) et 5^e ($N = 38$) années primaires, américains de 5^e ($N = 17$) année primaire et israéliens de 6^e ($N = 21$) année primaire (Resnick et al., 1989). Au moment de l'étude, les participants israéliens et américains avaient des notions des fractions ordinaires et des nombres décimaux, les fractions ordinaires étant enseignées au moins 1 an avant les nombres décimaux. Les participants français avaient quant à eux reçu un enseignement des nombres décimaux mais pas encore d'enseignement des fractions ordinaires. Les résultats indiquent des différences de fréquence dans l'utilisation des différentes règles selon les pays (voir le tableau 4). On constate un glissement de la règle 1 vers les règles 2 et 3 avec les années scolaires. D'autre part, la règle 2 est plus utilisée par les participants américains et israéliens, recevant un enseignement des fractions ordinaires avant celui des nombres décimaux.

Tabl. 4

Fréquence d'utilisation des différentes règles selon Resnick et al. (1989).

Échantillon	Règle 1 Naturels	Règle 2 Fractions	Règle 3 Zéro	Expert	Autre
4 ^e primaire, français	41	8	11	30	11
5 ^e primaire, français	18	3	24	53	3
5 ^e primaire, américain	35	18	0	18	29
6 ^e primaire, israélien	19	33	14	19	14

Les deux conceptions selon lesquelles *le nombre le plus long est le plus grand* ou *le nombre le plus court est le plus grand* apparaissent également dans d'autres études ultérieures (Irwin, 2001, 1995 ; Steinle & Stacey, 2004, 2003). Des études qualitatives basées sur des entretiens individuels auprès d'élèves de 5^e, 6^e années primaires et 1^{re} année secondaire (Irwin, 2001, 1995) confirment les conceptions qui seraient à l'origine de l'utilisation des différentes règles (Resnick et al., 1989 ; Nesher & Peled, 1986) et ajoutent que les participants peuvent aussi penser qu'*ajouter un zéro à la fin de la partie décimale rend le nombre dix fois plus grand*, que *les décimaux ont une virgule « décorative »*, que *les décimaux sont en-dessous de zéro ou sont négatifs*, qu'*il y a une colonne d'unités à droite de la virgule*, qu'*un centième s'écrit 0,100* ou encore qu'*1/4 peut s'écrire 0,4 ou 0,25*. Les fréquences de ces conceptions ou leur répartition selon les années scolaires ne sont néanmoins pas communiquées.

Une étude longitudinale, auprès d'un important échantillon australien de participants de la 4^e année primaire à la 4^e année secondaire ($N \simeq 3000$), utilise une tâche de comparaison de 30 items (Steinle & Stacey, 2004, 2003). Le curriculum des participants n'est malheureusement pas précisé, mais les résultats (voir la figure 12) confirment les données précédentes (Resnick et al., 1989 ; Nesher & Peled, 1986) selon lesquelles la fréquence d'utilisation de la règle 1 (le plus long est le plus grand) diminue avec les années scolaires, alors que la fréquence d'utilisation de la règle 2 (le plus court est le plus grand) augmente d'année en année, puis diminue. Les entretiens individuels réalisés dans cette étude indiquent également que le choix du nombre le plus court comme étant le plus grand, peut aussi être basée soit sur un raisonnement qui se focalise sur le dénominateur de la fraction décimale, soit sur un raisonnement réciproque ($1/73 < 1/6$, et donc $0.73 < 0.6$) ou négatif ($-73 < -6$ et donc $0.73 < 0.6$).

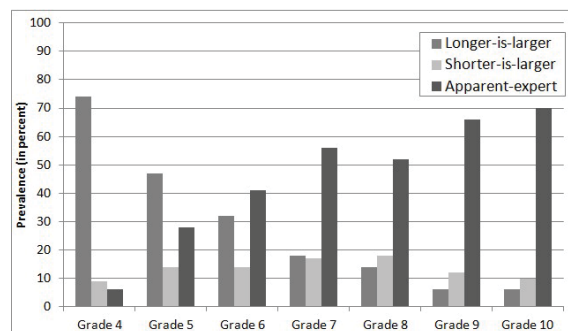


Fig. 12. Fréquence des différentes règles : graphique adapté à partir de Steinle et Stacey (2003)

Pour conclure, ces différentes études apportent des informations importantes quant aux conceptions des nombres décimaux mises en œuvre par les élèves lors d'une tâche de comparaison. Toutes semblent indiquer que deux conceptions sont particulièrement fréquentes : choisir le nombre le plus long comme étant le plus grand, ou choisir le nombre le court comme étant le plus grand. Le premier choix étant influencé par les connaissances des nombres naturels, le second par les connaissances des fractions ou les nombres négatifs. Elles se différencient néanmoins dans les fréquences d'utilisation de ces deux règles, celles-ci semblant être influencées par le curriculum propre à chaque pays.

Il y a cependant des biais méthodologiques majeurs dans ces études :

(a) À l'exception d'une étude (Nesher & Peled, 1986), la consigne donnée aux participants était soit d'ordonner les nombres du plus petit au plus grand, soit de choisir le nombre le plus grand dans une tâche de comparaison. Un élève qui, face à une paire de nombres, pense que les deux nombres sont égaux serait donc *contraint* de choisir un nombre comme étant le plus grand.

(b) Certaines études utilisent aussi des items pour lesquels il est impossible de donner une réponse, comme 0.- vs. 0. - - - (Nesher & Peled, 1986) ou encore 0.□ vs. 0.□□□□ (Resnick et al., 1989).

(c) Des items présentés en fractions décimales ont été mélangés aux nombres décimaux (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989), ce qui pourrait activer les connaissances relatives aux fractions et avoir un impact sur le traitement des nombres décimaux, notamment sur la fréquence d'utilisation de la règle 2.

(d) Certaines variables sont confondues. Dans les différentes études, concernant la règle 1, on parle tantôt du choix du nombre le plus grand basé sur *le nombre qui a le plus grand entier* (Léonard & Grisvard, 1981) ou sur *le nombre le plus long* (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Steinle & Stacey, 2003). La longueur en nombre de chiffres, et la valeur des chiffres sont donc confondues. Si par exemple, 1.14 est choisi comme étant plus grand que 1.7, on ne peut pas savoir si c'est parce que 1.14 contient plus de chiffres après la virgule ou si c'est parce que $14 > 7$.

(e) De manière générale, ces études utilisent peu d'items et restent relativement qualitatives dans l'analyse des résultats, aucune analyse statistique n'est réalisée.

(f) Enfin, les participants de ces études, même les plus jeunes, avaient déjà reçu un enseignement des nombres décimaux au moment de réaliser les tâches proposées. Il est donc impossible d'écarter un éventuel impact de la didactique sur le pattern de réponses observé.

Opérations sur les nombres décimaux

Les opérations sur les nombres décimaux ont également été étudiées. Des additions (5 items), des soustractions (5 items), des multiplications (6 items) et des divisions (6 items) mêlant des naturels et des nombres décimaux de maximum 3 chiffres après la

virgule ont été proposées à des élèves de 5^e ($N = 113$) et 6^e ($N = 55$) années primaires, 1^{re} ($N = 279$) et 3^e ($N = 223$) années secondaires (Hiebert & Wearne, 1985). Peu d'items sont proposés aux participants, mais on peut constater, en ce qui concerne les additions, que l'addition $4,6 + 2,3$ donne pour chaque année scolaire des taux de réussite significativement plus élevés (79% en fin de 5^e, 80% en fin de 6^e années primaires, 90% en fin de 1^{re}, 94 % en fin de 3^e années secondaires) que l'addition $5,3 + 2,42$ (25% en fin de 5^e, 66% en fin de 6^e années primaires, 75% en fin de 1^{re}, 85% en fin de 3^e années secondaires) (pour chaque année scolaire, $p < .01$).

Pour les soustractions, la soustraction $0,60 - 0,36$ est significativement mieux réussie (62% en fin de 5^e, 78% en fin de 6^e années primaires, 85% en fin de 1^{re}, 92% en fin de 3^e années secondaires) que la soustraction $0,86 - 0,3$ (12% en fin de 5^e, 35% en fin de 6^e années primaires, 51% en fin de 1^{re}, 81% en fin de 3^e années secondaires) (pour chaque année scolaire, $p < .01$).

Pour les multiplications, la multiplication $2 \times 3,12$ est mieux réussie (64% en début de 6^e année primaire, 79% en début de 1^{re}, 93% en début de 3^e années secondaires) que $6 \times 0,4$ (40% en début de 6^e année primaire, 54% en début de 1^{re}, 79% en début de 3^e années secondaires) (en 6^e et en 1^{re}, $p < .01$).

Enfin, pour les divisions, la division $2,1 \div 3$ donne des taux de réponses correctes plus élevés (68% en début de 1^{re}, 79% en début de 3^e année secondaire) que la division $0,24 \div 0,03$ (20% en début de 1^{re}, 66% en début de 3^e année secondaire) (en 1^{re}, $p < .01$).

Concernant les types d'erreurs, on constate que pour l'addition $5,3 + 2,42$, l'erreur la plus fréquente en 5^e ou 6^e année primaire est 2,95 ou 29,5 alors qu'en 1^{re} et 3^e secondaire il s'agit de 0,295 ou 7,45. Les élèves, quelle que soit l'année, semblent opérer sur des chiffres alignés à droite. Un constat similaire apparaît pour la soustraction, où l'erreur la plus fréquente pour la soustraction $0,86 - 0,3$ est 0,83 ou 8,3. Concernant la multiplication, l'erreur la plus fréquente pour $6 \times 0,4$ est 0,24 quelle que soit l'année scolaire. Pour la division, l'erreur la plus fréquente pour $0,24 \div 0,03$ est 0,08. Selon les auteurs, toutes ces erreurs peuvent être prédites par un modèle décrivant des procédures algorithmiques, sans que les connaissances conceptuelles ne soient prises en compte. Le processus d'opération sur les nombres décimaux s'articulerait en trois étapes : décider sur quels chiffres opérer ensemble, réaliser l'opération et présenter la réponse.

D'où pourraient provenir ces difficultés liées aux valeurs de position ? Rappelons que les nombres décimaux sont des nombres rationnels particuliers représentés dans le système décimal de position, celui-ci servant initialement à représenter les nombres naturels. Lorsque débute l'enseignement des nombres décimaux, en 4^e année primaire, les élèves connaissent les principes du système décimal de position, ils peuvent transcoder (Noël, 2001) et comparer (Nuerk et al., 2004) des nombres naturels à deux chiffres ou plus.

Les principes du système décimal de position ne changent évidemment pas lorsqu'il s'agit de représenter des nombres décimaux plutôt que les nombres naturels. Certains *traits de surface* peuvent néanmoins différer. Un tableau de Resnick et al. (1989), repris et traduit dans le tableau 5, présente ces différences. Le zéro, par exemple, a toujours un rôle de *gardien de position* mais, s'il est ajouté à droite d'un nombre naturel, il change la valeur globale du nombre alors que, s'il est ajouté à droite du dernier chiffre de la partie décimale, il ne change pas la valeur du nombre.

Tabl. 5

Concept de nombre (traduit de Resnick et al., 1989, p. 10)

Connaissances des nombres décimaux	Connaissances des nombres naturels	Similaire (+) Différent (-)
Valeur des colonnes		
Les valeurs diminuent de gauche à droite	Les valeurs diminuent de gauche à droite	+
Chaque colonne est dix fois plus grande que la colonne de droite	Chaque colonne est dix fois plus grande que la colonne de droite	+
Le zéro sert de <i>gardien de position</i>	Le zéro sert de <i>gardien de position</i>	+
Un zéro ajouté à droite ne change pas la valeur globale	Un zéro ajouté à gauche ne change pas la valeur globale	-
Les valeurs diminuent quand on se déplace à partir de la virgule	Les valeurs augmentent quand on se déplace à partir de la virgule	-
Noms des colonnes		
Se terminent en -ième	Se terminent en -aine	-
Commencent avec les dixièmes	Commencent avec les unités	-
La séquence (dizaine, centaine, ...) se déplace de droite à gauche	La séquence (dixième, centième, ...) se déplace de gauche à droite	-
La séquence de lecture est dixièmes, centièmes, millièmes	La séquence de lecture est milliers, centaines, dizaines, unités	-
Règle de lecture		
L'unité doit être spécifiée et peut varier	Les unités sont implicites et ne changent pas	-

1.6 Le changement conceptuel

De nouvelles connaissances sont donc quelques fois en contradiction avec les connaissances que l'on possède déjà. Nos connaissances conceptuelles doivent dans ce cas être modifiées. Le premier à avoir parlé de *changement conceptuel* serait Thomas Kuhn, philosophe et historien des sciences (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008). Nous présenterons brièvement sa théorie qui a été à la base d'autres théories centrées sur les individus et certains de leurs apprentissages.

1.6.1 Théorie de Thomas Kuhn

La structure des révolutions scientifiques (1962), l'ouvrage célèbre de Thomas Kuhn à propos de l'histoire des sciences, développe les concepts de *science normale*, de *résolution de puzzle*, de *paradigme* et d'*incommensurabilité* (Machamer, 2007). Selon Kuhn, la science est, dans la majorité des cas, une *science normale* pratiquée par une communauté de scientifiques habitués à utiliser des *paradigmes* leur permettant de résoudre des *puzzles* scientifiques. Ces *paradigmes* sont des ensembles de concepts liés les uns aux autres pour former des théories et associés à des outils permettant leur mise en œuvre. Ils posent les

puzzles à résoudre, ils orientent les scientifiques vers ce qu'il faut observer et la façon de conceptualiser les observations.

Dans la pratique de cette science normale, il arrive que soit rencontrée une anomalie, c'est-à-dire « l'impression que la nature, d'une manière ou d'une autre, contredit les résultats attendus dans le cadre du paradigme qui gouverne la science normale » (Kuhn, 1983, p. 83). La conscience d'une anomalie est donc une condition préalable à tout changement (Kuhn, 1983, p. 101-102), mais celle-ci, propre à ébranler les convictions de base, serait dans un premier temps supprimée. Cependant,

quand les spécialistes ne peuvent ignorer plus longtemps des anomalies qui minent la tradition établie dans la pratique scientifique, alors commencent les investigations extraordinaires qui les conduisent finalement à un nouvel ensemble de convictions, une nouvelle base pour la pratique de la science. Les épisodes extraordinaires au cours desquels se modifient les convictions des spécialistes sont qualifiés ... de révolutions scientifiques. (1983, p. 22-23)

Le changement, même inévitable, est donc souvent accompagné de résistance (1983, p. 96). Cette résistance proviendrait de la certitude que l'ancien paradigme parviendra *in fine* à résoudre le problème et que l'on pourra faire entrer l'observation dans la boîte fournie par le paradigme. Selon Kuhn, même si elle peut ressembler à de l'obstination, la résistance serait en réalité nécessaire à la science normale, inévitable et légitime (1983, p. 209).

Le changement d'un paradigme, correspondrait à un *changement conceptuel*. Loin d'être un processus cumulatif, le passage d'un paradigme à un autre serait plutôt une reconstruction (1983, p. 124). Kuhn, qui aurait été influencé par la théorie de la forme (*gestalt* en allemand) (Vosniadou, 2008), considérerait le changement de paradigme comme un changement de type gestaltiste. Les concepts de l'ancien et du nouveau paradigme ont pour lui une signification à ce point différente qu'ils sont incommensurables. Un des exemples repris dans la théorie de Kuhn est la révolution copernicienne : l'héliocentrisme de Copernic remplace totalement et définitivement le géocentrisme d'Aristote et Ptolémée. Cette notion d'incommensurabilité sera cependant vivement critiquée (e.a., Hoddeson, 2007). Plus tard, Kuhn différenciera lui-même une incommensurabilité globale d'une incommensurabilité partielle (2000), cette dernière référant à un changement seulement partiel dans la signification des concepts.

1.6.2 Théorie du changement conceptuel

Kuhn (1962) et d'autres philosophes et historiens des sciences ont décrit les changements qui peuvent avoir lieu dans les théories et les concepts admis par une communauté de scientifiques. Ces travaux ont inspiré certaines théories de l'apprentissage qui s'attachent à décrire la façon dont les concepts évoluent chez l'individu, dont la théorie du *changement conceptuel* qui s'inscrit dans une approche constructiviste.

Si certaines théories du développement et de l'apprentissage, telles que celle de Piaget ou de Vygotsky, sont générales et communes à différents domaines, la théorie du changement conceptuel est, quant à elle, spécifique à un domaine d'apprentissage. Elle n'est cependant pas contradictoire avec les théories globales et pourrait être considérée comme complémentaire (Vosniadou, 2007b).

L'approche classique du changement conceptuel dans le domaine de l'apprentissage et de l'enseignement est issue des travaux de Posner, Strike, Hewson, et Gertzog (1982) sur l'apprentissage des sciences. S'inspirant à la fois des idées de Kuhn et de celles de Piaget sur l'accommodation et l'assimilation (Vosniadou, 2008), Posner et al. (1982) indiquent que les élèves doivent réaliser un changement conceptuel radical lorsqu'ils apprennent certains concepts scientifiques qui leur sont enseignés (tels que les concepts de force ou d'énergie). Selon cette approche classique, le changement conceptuel s'applique à des préconceptions ou des conceptions erronées qui sont spécifiques à l'élève. Comme pour Kuhn, le changement conceptuel se réaliserait dans un laps de temps court, comme un changement gestaltiste. Le nouveau concept serait incommensurable avec l'ancien concept.

Au fil des années, diverses critiques ont été apportées à cette approche classique (voir Vosniadou, 2007b) et la théorie du changement conceptuel a été re-cadrée (e.a., Vosniadou, Baltas, & Vamvakoussi, 2007). Les aspects socio-culturels (e.a., Mason, Gava, & Boldrin, 2008 ; G. Sinatra, 2005) et les stratégies d'enseignement ont été investiguées (e.a., Leach & Scott, 2008), mais nous nous centrons ici sur les aspects cognitifs du changement conceptuel.

Toujours dans le domaine de l'apprentissage des sciences, il ne serait plus question d'incommensurabilité entre l'ancien et le nouveau concept (Vosniadou & Brewer, 1992 ; Vosniadou, 1994) et le changement conceptuel ne serait plus un changement rapide et soudain de type gestaltiste, mais plutôt un changement lent et graduel des connaissances initiales.

Pour Vosniadou (2007b) les connaissances initiales spécifiques à un domaine seraient organisées sous forme de *théories*, c'est-à-dire sous forme d'ensembles relativement cohérents de connaissances. Ces théories implicites, grâce à leur *ontologie* et leur causalité, permettraient de formuler des explications et des prédictions face à un problème non familier. Elles seraient naïves, intuitives, spécifiques à un domaine et construites dans l'enfance sur la base de l'expérience quotidienne. Les apprenants n'auraient pas de conscience méta-conceptuelle associée à ces théories initiales.

La catégorisation *ontologique* des connaissances et son apport dans le cadre du changement conceptuel ont été précisés par Chi (1992, 2008). Prenons deux catégories comme exemple pour préciser ce que pourrait être un changement conceptuel. On peut considérer que l'ensemble des êtres vivants appartiennent à une catégorie qui aurait des caractéristiques propres définissant ses éléments. Les *êtres vivants* « peuvent bouger » et « peuvent se reproduire ». La catégorie des *êtres vivants* contient aussi des sous-catégories, comme celle des *animaux*, contenant elle-même celles des *oiseaux* et des

mammifères. Ces relations entre les catégories et les sous-catégories peuvent être représentées sous forme d'arbres hiérarchiques comportant différentes branches (voir figure 13). En se déplaçant verticalement sur cet arbre hiérarchique, on rencontre des éléments qui ont des caractéristiques identiques. En se déplaçant latéralement, on rencontre des éléments qui se différencient par certaines caractéristiques. La catégorie des *artefacts* par exemple, peut être considérée comme relativement parallèle à celle des *êtres vivants*. Les éléments de cette catégorie se caractérisent par le fait qu'ils « peuvent être bougés » et « ne peuvent pas se reproduire ». Les caractéristiques de catégories latérales sont donc mutuellement exclusives. Un concept attribué à une catégorie n'a donc pas les caractéristiques d'un concept attribué à une catégorie latérale. D'autre part, un concept peut être défini par une caractéristique même s'il ne l'a pas concrètement. Le chien Médor, par exemple, appartiendrait toujours à la catégorie des animaux, même s'il devait être stérilisé.

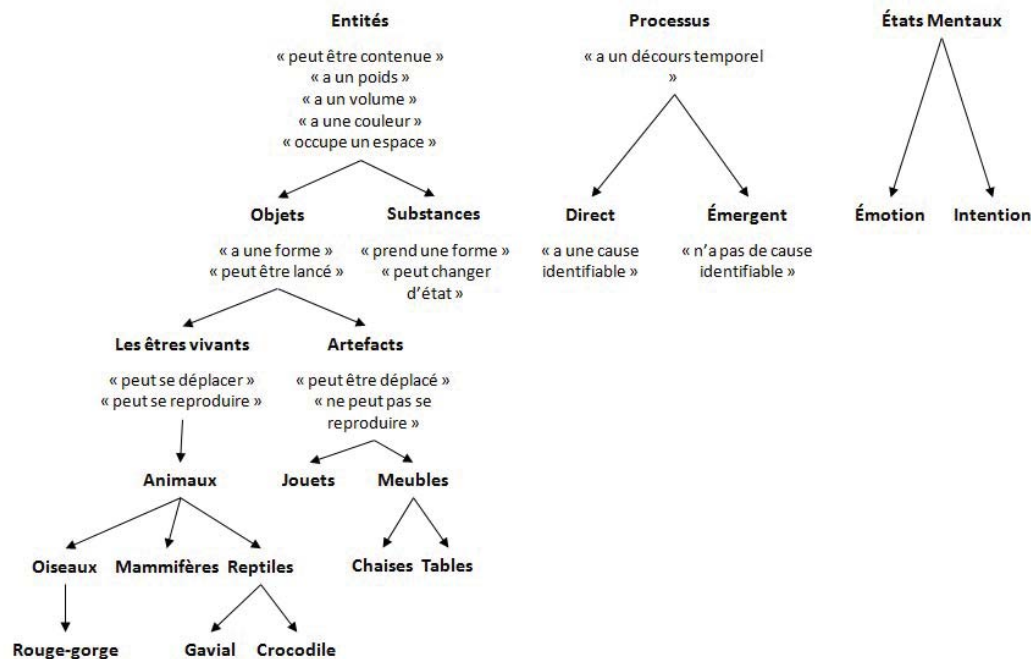


Fig. 13. Arbres ontologiques distincts : catégories hiérarchiques et latérales intra-arbre et inter-arbres (traduction de Chi, 2008, p. 64).

Quelle serait alors la nature d'un changement conceptuel ? Selon Vosniadou et al. (2008), un mécanisme d'enrichissement des connaissances, additif et inconscient, est à l'origine du changement conceptuel. Lorsqu'une nouvelle information issue de l'observation ou de l'enseignement apparaît, elle est ajoutée à la structure des connaissances initiales et donc à une catégorie conceptuelle. Cependant un concept peut être attribué

à une mauvaise catégorie, plus générale ou latérale (Chi, 2008). Ne sachant pas qu'un lézard est un reptile, un enfant pourrait l'attribuer à la catégorie générale des animaux, sans que cela porte à conséquence, ou à la catégorie des mammifères, ce qui conduirait à des conceptions erronées. Les conceptions erronées s'expliqueraient par le fait que les enfants n'ont pas de connaissance explicite de leurs connaissances initiales et ne perçoivent pas les contradictions et les distorsions créées par un ajout inadéquat.

Pour certains auteurs, le changement conceptuel correspondrait donc à des changements dans l'ontologie des concepts, dans l'assignation des concepts aux catégories les définissant. En référence aux arbres hiérarchiques, certains utilisent l'expression « saut de branche » Thagard (1988). D'autres, comme Chi (2008) défendent une théorie de déplacement d'une catégorie à une autre [categorical shift]. Le changement conceptuel correspondrait alors à déplacer latéralement un concept d'une catégorie à une autre, ou à créer une nouvelle catégorie latérale avec un nouvel ensemble de caractéristiques distinctes. Pour l'ensemble de ces auteurs, il ne s'agit donc pas de remplacer une théorie initiale par une nouvelle théorie, incommensurable avec la théorie initiale, mais bien de faire évoluer la théorie initiale.

Ces considérations théoriques s'illustrent par des données empiriques dans le domaine de l'apprentissage des sciences. Les enfants ont des conceptions initiales naïves à propos de la Terre. Celles-ci sont basées sur leur interprétation d'expériences quotidiennes (Vosniadou & Brewer, 1992 ; Vosniadou, 1994). Selon eux, la Terre serait plate, immobile et supporterait les objets. De plus, les objets sur terre obéiraient à une gravité du haut vers le bas, et la Terre serait au centre du système solaire. Ces conceptions indiquent que les enfants attribuent la Terre aux objets physiques (Vosniadou et al., 2008), tout en étant capables de faire la différence entre la catégorie des objets physiques et celle des objets astronomiques. Le concept scientifique de la Terre, étant un objet astronomique, est en conflit avec chacune de ces conceptions initiales. La Terre est en effet sphérique ¹¹, mobile et ne porte pas les objets. La gravité est quant à elle issue du centre de la Terre et celle-ci n'est pas le centre du système solaire. Comprendre le concept scientifique de la Terre tel qu'il est enseigné, nécessiterait donc un changement conceptuel, c'est-à-dire une re-catégorisation de la Terre, des objets physiques vers les objets astronomiques (Vosniadou et al., 2008). Ce processus étant lent et progressif, les élèves développent, à un stade de compréhension intermédiaire, ce que Vosniadou et Brewer (1992) appellent des *modèles synthétiques*. La figure 14 illustre cette progression des conceptions initiales vers le concept scientifique exact, en passant par les *modèles synthétiques*.

11. Plus exactement, la Terre est aplatie aux pôles et sa forme approche un ellipsoïde.

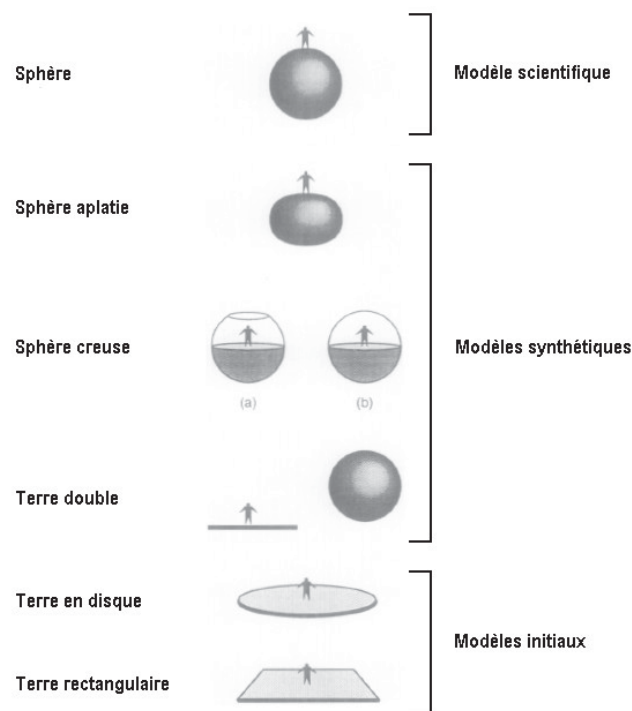


Fig. 14. Modèles mentaux de la Terre (Vosniadou & Brewer, 1992 ; Vosniadou, 1994).

D'importantes questions sont cependant encore ouvertes dans le domaine du changement conceptuel (Vosniadou, 2008). Une première zone d'ombre, non des moindres, est issue du fait que peu d'auteurs s'attachent à définir ce que sont les concepts. La majorité d'entre eux (Carey, 2009 ; Chi, 2008 ; Vosniadou et al., 2008) semble adopter une position selon laquelle les concepts changent et évoluent, et sont structurés sous forme de *théories*, comme suggéré par Murphy et Medin (1985). Les connaissances naïves seraient cohérentes et permettraient d'interpréter de façon consistante les situations nouvelles. D'autres auteurs pensent que les connaissances initiales se composent d'éléments quasiment indépendants (diSessa, 2008 ; Clark, 2006 ; Harrison, Grayson, & Treagust, 1999) et ne sont que peu structurées même s'il existe des liens entre ces éléments. Les connaissances seraient alors appliquées de façon consistante, mais seraient hautement sensibles au contexte. De plus, des idées contradictoires pourraient coexister à un moment donné du développement. Enfin, les termes utilisés pour parler des concepts varient d'un auteur à l'autre.

Une autre zone d'ombre concerne le processus en œuvre lors d'un changement conceptuel. Certains distinguent le changement conceptuel spontané (Inagaki & Hatanoto, 2008) d'un changement conceptuel induit par l'enseignement (Vosniadou et al., 2008). D'autres attirent l'attention sur le fait que des comportements qui ne changent pas peuvent en réalité cacher un changement conceptuel majeur, alors que des changements de comportement qui semblent majeurs en surface, ne le sont pas forcément d'un point de vue conceptuel (Keil & Newman, 2008).

Pour reprendre Psillos (2007, p. 84), qui indique que parler de *changement conceptuel* présuppose que « quelque chose reste » alors « qu'autre chose change », nous ne

savons pas encore précisément, à l'heure actuelle, « ce qui change », « ce qui reste semblable » et quelle est la nature exacte du processus de changement lors d'un changement conceptuel.

1.6.3 Changement conceptuel et enseignement

Selon la première approche du changement conceptuel appliquée à l'apprentissage et l'enseignement des sciences, le changement conceptuel serait un processus rationnel de remplacement d'une théorie de type gestaltique, apparaissant sur une courte période de temps (Posner et al., 1982). Le conflit cognitif serait lui une stratégie efficace pour produire le changement conceptuel. Toujours selon Posner et al. (1982), quatre conditions devraient être remplies pour qu'un changement conceptuel puisse avoir lieu : (a) les conceptions existantes doivent être insatisfaisantes, (b) il doit y avoir une nouvelle conception intelligible, (c) la nouvelle conception doit sembler plausible et (d) la nouvelle conception doit suggérer un programme enrichissant.

Cette approche a été critiquée. D'une part, le changement conceptuel ne devrait pas être limité à un processus individuel, interne et cognitif, car il s'insère dans un monde socio-culturel complexe (e.a., Mason et al., 2008 ; G. Sinatra, 2005). Des facteurs tels que la motivation, l'intérêt pour le domaine et les croyances épistémologiques (Mason & Boscolo, 2004) jouent également un rôle dans le changement conceptuel que peuvent réaliser ou non les élèves.

D'autre part, le conflit cognitif comme stratégie pour susciter un changement conceptuel serait à prendre avec précaution. Un usage intensif de celui-ci mettrait trop l'accent sur les connaissances initiales inappropriées (Smith, diSessa, & Roschelle, 1993). Faire intentionnellement référence aux conceptions erronées et contraster celles-ci avec les conceptions scientifiques exactes semble avoir des effets positifs (Guzzetti, Snyder, Glass, & Gamas, 1993 ; McCloskey, 1983), mais les résultats sont contradictoires (e.a., Dreyfus, Jungwirth, & Eliovitch, 1990 ; Limón & Carretero, 1997). Le conflit cognitif n'a pas toujours de sens pour les élèves, ceux-ci peuvent ignorer ou rejeter les informations contradictoires avec leur conceptions initiales (Chinn & Brewer, 1998) ou avoir une réaction affective négative face au conflit (Dreyfus et al., 1990 ; Stavy & Berkovitz, 1991). Il serait donc indispensable de recourir aux ressources conceptuelles dont les élèves disposent. Certains auteurs suggèrent alors d'utiliser des analogies, l'approche étant plus positive (Stavy & Berkovitz, 1991). Il s'agirait alors de créer des relations entre le concept à acquérir et les connaissances de l'élève assez proches de celui-ci.

Toujours selon une perspective constructiviste, certains ont donc opté pour un travail à partir des conceptions erronées, d'autres pour une exploitation des conceptions appropriées. L'idéal serait en réalité de combiner les deux approches, c'est-à-dire de tenir compte des conceptions erronées mais de construire sur les conceptions initiales pertinentes lorsque c'est possible (diSessa, 1988 ; Clement, Brown, & Zietsman, 1989).

1.6.4 Changement conceptuel en mathématiques

Peut-on appliquer le changement conceptuel à l'apprentissage des mathématiques ?

Dès 1938, Bachelard (1938) indiquait que « la vérité n'a son plein sens qu'au terme d'une polémique. Il ne saurait y avoir de vérité première. Il n'y a que des erreurs premières ». Et qu'« en fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation ». Pour lui, de telles difficultés sont liées à des *obstacles épistémologiques*. Cependant, comme Kuhn, Bachelard pensait que de tels obstacles ne se rencontraient que dans les sciences expérimentales. Néanmoins, dans les années 70, la notion d'obstacle épistémologique de Bachelard sera appliquée aux mathématiques par la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998). Fischbein (1971, 1987) indique lui aussi que les élèves ont des intuitions mathématiques qui peuvent interférer avec les connaissances à acquérir. Des intuitions mathématiques de Fischbein (1971, 1987) aux mathématiques naïves de Vamvakoussi (2007) il n'y a qu'un pas. L'existence de conceptions initiales en mathématiques qui peuvent entraver des apprentissages ultérieurs font de l'apprentissage des mathématiques un candidat au changement conceptuel, même si l'apprentissage des sciences et celui des mathématiques se distinguent à différents points de vue.

Premièrement, le rôle des faits empiriques issus de la vie quotidienne diffère en sciences et en mathématiques (Tsamir & Tirosh, 2007). Il est plus probable d'avoir des expériences quotidiennes de la gravité que des nombres réels. La nature des conceptions initiales diffère donc entre les sciences et les mathématiques. Dans l'apprentissage des sciences, il s'agit davantage de connaissances issues de la vie quotidienne, comme pour le concept de gravité. Dans l'apprentissage des mathématiques, les conceptions initiales ne proviennent pas seulement de l'expérience quotidienne, mais aussi de l'enseignement déjà reçu (Greer, 2004). Certains auteurs appliquant le changement conceptuel à l'apprentissage des mathématiques montrent que les connaissances initiales des nombres naturels, issues d'une expérience débutant avant l'enseignement, interfèrent avec la compréhension de concepts tels que les nombres rationnels (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007), les symboles algébriques (Christou, Vosniadou, & Vamvakoussi, 2007) ou la comparaison d'ensembles infinis (Tsamir & Tirosh, 2007). L'expérience est ici issue tant de l'environnement que des premières années de la scolarité. D'autres études, sur des étudiants du début de l'enseignement supérieur, sont encore plus sujettes à mettre en évidence des conceptions issues de l'enseignement reçu (Biza & Zachariades, 2006). Connaître tant que faire se peut le parcours didactique des élèves est essentiel à l'étude du développement des concepts (Greer & Verschaffel, 2007). Les élèves créent en effet leurs conceptions à partir des situations qu'ils rencontrent (Vergnaud, 2004 ; Thorndike, 1922). Une longue pratique de la multiplication avec les naturels conduit par exemple à l'idée que la multiplication « rend plus grand ».

Deuxièmement, les mathématiques se différencient des sciences par un usage intensif de symboles. Pour un mathématicien, 3 , -3 , 14 , π , $\frac{2}{3}$, $-7i + 6$ sont tous des nombres.

De plus, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, et 0,5 représentent tous le même nombre. Or, il est difficile pour les élèves d'utiliser différents symboles pour représenter un même objet, ou d'accepter l'idée que des symboles qui se ressemblent représentent des objets différents (Markovits & Sowder, 1991). Il est par exemple particulièrement difficile pour eux de comprendre que le symbole moins (—) initialement associé à l'arithmétique (aux soustractions), signifie ensuite qu'un nombre est négatif (—2) ou est utilisé en algèbre (Vlassis, 2004). D'autre part, de façon générale, les représentations sont transparentes pour ceux qui les comprennent et opaques pour les autres (traduit de Greer, 2004, p. 323).

Dans l'histoire des mathématiques, les théories n'ont pas été remplacées. Elles ont été reformulées pour devenir plus générales et ouvrir vers de nouvelles perspectives. Il en va de même dans l'apprentissage des mathématiques. Les concepts mathématiques ne doivent pas être remplacés, mais doivent devenir plus généraux et plus puissants.

Y aurait-il des changements conceptuels durant l'apprentissage des nombres ?

L'apprentissage des nombres débute par la rencontre avec les nombres naturels. Plus tard, d'autres nombres devront être appris : les rationnels, les relatifs, les réels ... Le concept de nombre construit initialement sur les nombres naturels doit alors évoluer, acquérir de nouvelles propriétés et se généraliser. Par exemple, alors qu'il n'y a aucun nombre naturel entre un et deux, il y a une infinité de nombres rationnels. Avec les nombres rationnels, apparaît la propriété de densité. L'acquisition des nombres rationnels serait donc un cas de changement conceptuel (Stafylidou & Vosniadou, 2004 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007), et des modèles synthétiques pourraient apparaître. Par exemple, un élève peut comprendre qu'il y a une infinité de nombres entre deux fractions en se basant sur les fractions équivalentes, mais au même moment penser qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres entre deux décimaux en se basant sur le comptage (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Le tableau 6 (traduit de Vosniadou et al., 2008) tente de mettre en parallèle les caractéristiques du concept de nombre, qui serait celui des élèves avant l'enseignement des nombres rationnels, et les caractéristiques du concept de nombre rationnel ¹². On peut constater d'emblée que les propriétés énoncées dans ce tableau ne sont pas toutes de même nature. Certaines ont trait au symbolisme, c'est-à-dire à la représentation des nombres (5 et 7), d'autres à l'impact de la chaîne numérique verbale (1 et 4) d'autres encore aux propriétés des opérations et non des nombres (6) et certaines se rapprochent plus, à notre sens, des aspects conceptuels du nombre (2 et 3).

12. La colonne de gauche contenant les chiffres a été ajoutée.

Tabl. 6

Concept de nombre (traduit de Vosniadou et al., 2008, p. 11)

Concept de nombre	
Le concept de nombre des élèves (avant l'enseignement des nombres rationnels)	Le concept mathématique de nombre rationnel
1 • Les nombres sont des <i>nombres de comptage</i>	• Non basé sur le comptage
2 • Les nombres sont discrets : Il n'y a pas d'autres nombres entre un nombre et son successeur	• Densité : Entre deux nombres donnés non égaux, il y a une infinité de nombres
3 • Il y a un nombre étant le plus petit (0 ou 1)	• Il n'y a pas de nombre étant le plus petit
4 • Les nombres peuvent être ordonnés en fonction de leur position dans la chaîne numérique verbale	• L'ordre n'est pas basé sur la chaîne numérique verbale
5 • Les nombres les plus longs (qui ont le plus de chiffres) sont les plus grands	• Les nombres les plus longs ne sont pas forcément les plus grands, par exemple, $3,2 > 3,197$
6 • L'addition et la multiplication rendent plus grand. La soustraction et la division rendent plus petit	• La magnitude du résultat dépend des nombres impliqués, par exemple, ajouter un nombre négatif rend plus petit, multiplier par un nombre plus petit que un rend plus petit
7 • Chaque nombre a seulement une représentation	• Chaque nombre peut être représenté par une fraction ou par un nombre décimal. De plus, chaque nombre peut être représenté d'une infinité de façons par une fraction ou un nombre décimal

En ce qui concerne l'apprentissage des nombres décimaux en particulier, il pourrait s'agir d'un cas de changement conceptuel, mais aucune étude à l'heure actuelle n'a investigué rigoureusement les différents types d'erreurs apparaissant lors du traitement des nombres décimaux et les modèles synthétiques pouvant apparaître.

1.7 Conclusions

« Les *nombres décimaux* sont des nombres rationnels particuliers représentés dans le système décimal de position. Ils ont un nombre fini de chiffres à droite de la virgule, comme le nombre 0,6 ». Telle serait, de nos jours, une définition des nombres décimaux. L'histoire montre cependant que l'humanité a eu besoin de milliers d'années pour mettre au point ces nombres. D'abord pour élaborer les principes sous-jacents au système décimal, essentiellement le principe de position et le zéro. Ensuite, une fois le système décimal de position mis au point en Inde, pour que l'Europe adopte ce nouveau système symbolique en surmontant ses réticences au changement. Enfin, pour que les nombres inférieurs à l'unité acquièrent le statut de nombre et que, des milliers d'années plus tard, le système décimal de position soit utilisé pour représenter certains de ces nombres rationnels afin d'en faciliter l'utilisation.

L'histoire de la mise au point laborieuse des nombres décimaux nous conduit à diverses

suppositions. D'une part, à l'instar de la théorie de la récapitulation en biologie qui défend l'idée que l'ontogénèse récapitule la phylogénèse, nous pourrions imaginer, de façon simpliste, que l'apprentissage d'un concept *suit* le développement historique de ce concept. Une première hypothèse serait alors que l'apprentissage des nombres décimaux est précédé par la compréhension des fractions. Ce qui correspondrait également à la définition des nombres décimaux, puisque ceux-ci sont avant tout des nombres rationnels. Ce raisonnement pourrait ensuite s'étendre à la didactique. On pourrait penser que l'enseignement des nombres décimaux doit s'ancrer sur la connaissance des fractions.

D'autre part, l'histoire du système décimal et des nombres décimaux nous montre aussi l'attitude de l'être humain face au changement. Dans le cadre de l'histoire des sciences, Thomas Kuhn a pu observer que lorsqu'une communauté scientifique rencontre une anomalie par rapport aux théories en place, sa première réaction est de tenter d'assimiler ce fait aux théories existantes plutôt que de révolutionner les théories en place. Une révolution des connaissances scientifiques serait toujours précédée d'une période de maintien des acquis et de réticences au changement. Cette théorie, propre aux communautés scientifiques pourrait certainement s'appliquer à d'autres communautés d'individus et à un niveau individuel. Qui n'a jamais été réticent à l'idée de changer, par exemple, de logiciel alors qu'il maîtrise parfaitement son logiciel actuel qui, de plus, réalise parfaitement toute une série de tâches ? Cette théorie de Kuhn a inspiré, en sciences de l'éducation et de l'apprentissage, la théorie du changement conceptuel. Initialement appliquée à l'enseignement et l'apprentissage des sciences, cette théorie a ensuite été appliquée à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il apparaît en effet qu'en sciences comme en mathématiques, les connaissances initiales des apprenants peuvent parfois, lorsqu'elles sont contradictoires avec le savoir à acquérir, être un obstacle à l'apprentissage.

Qu'en est-il de l'apprentissage des nombres décimaux ? Depuis des années, la littérature en sciences de l'éducation relate des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage des nombres décimaux. Ces difficultés semblent être issues de l'implication des connaissances liées aux nombres naturels ou aux fractions dans le traitement des nombres décimaux, ou d'une connaissance imparfaite du système de représentation qu'est le système décimal de position. La théorie du changement conceptuel pourrait-elle s'appliquer à l'apprentissage des nombres décimaux ? Certaines études avancent que l'apprentissage des nombres rationnels relève bien d'un changement conceptuel. Néanmoins, la méthodologie utilisée dans certaines de ces études limite l'interprétation qui peut être faite à partir des résultats et aucune de ces études n'a investigué les conceptions précédant l'enseignement formel des nombres décimaux. Il est donc impossible de distinguer les conceptions initiales des conceptions issues de l'enseignement.

Mieux comprendre l'apprentissage des nombres décimaux et ses difficultés et en tirer certaines conclusions pour l'enseignement de ces nombres seront les objectifs principaux de cette thèse.

Dans un premier temps, deux études pilotes (voir chapitre 2) nous permettront d'une part d'affiner une méthodologie permettant un meilleur contrôle des variables influençant le traitement des nombres décimaux, et d'autre part d'avoir des repères sur l'évolution des performances des élèves en comparaison et en addition des nombres décimaux.

Ensuite, dans une première étude (voir chapitre 3), nous aborderons deux questions : **quelles conceptions les élèves ont-ils des nombres décimaux, avant et après le début de leur enseignement ?** et **l'apprentissage des nombres décimaux est-il un cas de changement conceptuel tel que définit par Vosniadou (1994, 2002) ?** Nous utiliserons une méthodologie permettant de distinguer l'impact, sur le traitement des nombres décimaux, de différentes connaissances liées aux nombres naturels : la longueur, la valeur des chiffres et la présence d'un zéro. Nous observerons alors l'effet de ces différentes variables avant tout enseignement des nombres décimaux, c'est-à-dire en 3^e année primaire, et jusqu'en 6^e année primaire. Nous analyserons alors l'évolution des conceptions et nous verrons s'il existe des stades de compréhension intermédiaires, des modèles synthétiques, tels que suggérés par Vosniadou.

Dans les études suivantes (voir chapitres 5 et 4), nous nous pencherons sur les liens éventuels entre la compréhension des nombres rationnels exprimés par des fractions ordinaires et la compréhension des nombres décimaux. Nous analyserons d'abord (dans le chapitre 4) l'impact du format de présentation des nombres dans une tâche de comparaison. De mêmes nombres seront présentés en fraction ordinaire (par exemple, $\frac{1}{4}$), en fraction décimale ($\frac{25}{100}$) et en nombre décimal (0,25) à des élèves de 3^e, 4^e, 5^e et 6^e années primaires. Nous verrons ensuite (dans le chapitre 5) si **la compréhension des nombres rationnels représentés par des fractions prédit l'apprentissage des nombres décimaux**. Dans cette même étude, nous verrons également si **la compréhension du système décimal prédit l'apprentissage des nombres décimaux**. Pour ce faire, nous utiliserons un design longitudinal. Différentes tâches seront proposées à des élèves de 4^e année primaire, d'abord en début d'année scolaire, avant tout enseignement des nombres décimaux et, ensuite, durant et après cet enseignement. Les résultats nous permettront, d'une part, d'apporter des éléments à la discussion concernant des ressemblances éventuelles entre l'histoire des nombres décimaux et leur apprentissage et, d'autre part, de formuler des hypothèses quant à un enseignement efficace des nombres décimaux.

Nous aborderons alors l'enseignement des nombres décimaux. Différentes possibilités s'offrent à nous concernant l'enseignement des nombres décimaux. Suivant l'histoire du concept ou la définition des nombres décimaux, nous pourrions ancrer l'enseignement des nombres décimaux sur les connaissances des fractions, en l'occurrence, décimales. C'est ce qui est actuellement prescrit en France. On peut lire dans un document d'application des programmes du Ministère de l'Éducation nationale, que « les écritures à virgule prennent sens en étant mises en relation avec les fractions décimales, ce qui correspond à l'introduction historique des décimaux » (*Mathématiques. Cycle des approfondissements (cycle 3)*, 2002, p. 22). Une première question serait donc : **l'enseignement**

des nombres décimaux devrait-il s'ancrer sur la connaissance des fractions ?

En Communauté française, les documents officiels n'indiquent pas précisément la didactique qu'il convient d'adopter. Les enseignants ont le libre choix. Certains d'entre eux indiquent qu'ils utilisent le contexte de la monnaie pour enseigner les nombres décimaux. Une étude menée aux États-Unis indique également que l'utilisation de la monnaie est particulièrement fréquente. Il est tout à fait opportun d'apprendre aux élèves à utiliser la monnaie. Une deuxième question serait néanmoins : **l'enseignement des nombres décimaux devrait-il s'ancrer sur les connaissances de l'euro liées à la vie quotidienne ?** Avant de considérer l'euro comme un élément essentiel de la didactique des nombres décimaux, il serait essentiel de connaître l'effet de ce contexte si particulier sur les conceptions que les élèves peuvent avoir des nombres décimaux. Enfin, étant donné que les erreurs relatives au traitement des nombres décimaux qui sont relatées dans la littérature semblent être en grande majorité liées à une mauvaise compréhension des valeurs de position pour les chiffres de la partie décimale, une troisième question pourrait être : **l'enseignement des nombres décimaux devrait-il s'ancrer sur un approfondissement des connaissances liées au système décimal de position ?**

Dans une quatrième étude (voir chapitre 6), nous examinerons l'impact que peut avoir l'euro sur le traitement des nombres décimaux. Une tâche de comparaison ainsi qu'une tâche sur l'ordre et la densité des nombres décimaux seront proposées à des élèves de 4^e, 5^e et 6^e années primaires et de 1^{re} année secondaire.

Dans une cinquième étude (voir chapitre 7), nous analyserons les effets d'une séquence didactique expérimentale basée sur une situation problème nécessitant l'encadrement des nombres réels par les nombres décimaux, c'est-à-dire la généralisation du système décimal de position et l'introduction de la densité. Un groupe expérimental composé d'élèves de 4^e année primaire sera comparé à un groupe contrôle sur des tâches de comparaison, d'ordre et de densité, de transcodage et d'addition de nombres décimaux.

Chapitre 2

Études pilotes

Dans ce chapitre, nous présenterons deux études pilotes. L'une porte sur la comparaison de deux nombres décimaux, l'autre sur l'addition de deux nombres décimaux. Elles nous permettront d'une part d'avoir des repères quant à l'évolution des performances des élèves selon les années scolaires et d'autre part de mettre en évidence différents facteurs influençant les performances.

2.1 Étude A - Comparaison de nombres décimaux

Les précédentes études sur la comparaison de nombres décimaux, présentées en détail dans la section 1.5.1, indiquent que les élèves de la 4^e année primaire à la 4^e année secondaire ont des conceptions des nombres décimaux qui peuvent les induire en erreur lors d'une tâche de comparaison. Une de ces conceptions serait que *le nombre qui a le plus grand entier* (Léonard & Grisvard, 1981) ou *le nombre le plus long* (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Steinle & Stacey, 2003) est le plus grand. Une autre conception serait, à l'inverse, que le nombre le plus court est le plus grand (Léonard & Grisvard, 1981 ; Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Steinle & Stacey, 2003). Ces études avaient cependant certaines lacunes, également développées dans la section 1.5.1.

Dans cette première étude pilote, nous proposons d'approfondir ces précédentes études, d'une part, en augmentant le nombre d'items utilisés et en répartissant ceux-ci de façon équitable entre différents types de paires de sorte à rendre possible des analyses statistiques, d'autre part, en contrôlant la différence de longueur entre les nombres et la présence d'un zéro dans la partie décimale et en utilisant une consigne permettant aux participants de répondre que les nombres sont égaux. Enfin, aucune étude précédente n'ayant observé les conceptions des élèves avant tout enseignement des nombres décimaux, nous inclurons dans notre échantillon des élèves de 3^e primaire n'ayant pas encore reçu d'enseignement des nombres décimaux étant donné que celui-ci débute en 4^e année primaire.

2.1.1 Méthodologie

Participants

Cent-dix-neuf élèves de 3^e année primaire (61 garçons, âge moyen = 8 ;10 ans, σ = 5,4 mois), 109 de 4^e année primaire (49 garçons, âge moyen = 9 ;9 ans, σ = 5,7 mois), 111 de 5^e année primaire (59 garçons, âge moyen = 10 ;10 ans, σ = 5,3 mois), 116 de 6^e année primaire (57 garçons, âge moyen = 11 ;9 ans, σ = 5,2 mois) ont participé à cette étude. Ils ont été sélectionnés aléatoirement parmi les écoles de la Communauté française de Belgique.

Tâche

Une tâche de comparaison de deux nombres décimaux a été mise au point dans une version papier-crayon. Septante paires ont été créées. Elles appartiennent à 10 catégories représentées chacune par 7 items. Notons que dans une étude précédente nous avons constaté que, lorsque les nombres diffèrent par le chiffre des unités, les taux de réponses correctes plafonnent dès la 3^e année primaire. Toutes les paires utilisées ont donc un même chiffre au rang des unités.

Le tableau 1 illustre les 10 catégories de paires à comparer (pour l'ensemble des items, voir en annexe, page 56). Apparaissent également dans ce tableau différents critères qualifiant les paires à comparer. Le premier critère est celui de la longueur. Par rapport aux connaissances des nombres naturels, la longueur peut être *congruente*, *neutre* ou *incongruente*¹. Lorsque les deux nombres ont une même longueur, la longueur est *neutre*. La décision relative à la grandeur des nombres ne peut pas être basée sur ce critère. Lorsque le nombre le plus grand est également le plus long, ce qui est le cas pour les nombres naturels (par exemple, $123 > 99$), nous dirons donc que la longueur est *congruente*. Une décision basée sur le nombre le plus long conduira à une réponse correcte. Enfin, lorsque le nombre le plus grand est également le plus court, nous dirons que la longueur est *incongruente*. Une décision basée sur le nombre le plus long conduira à une réponse erronée. Cette différence de longueur peut être d'un ou de plusieurs chiffres.

Le second critère est relatif à la présence d'un zéro dans la partie décimale. Celui-ci peut (ou ceux-ci peuvent) débiter la partie décimale, comme dans le nombre 0,03 et jouer un rôle de « gardien de position » ou terminer la partie décimale, comme dans le nombre 0,30.

Un dernier critère est la valeur des chiffres apparaissant dans la partie décimale. Les paires des catégories 6 et 7 ont toutes deux des longueurs incongruentes et contiennent un zéro, mais se différencient par les chiffres utilisés. Pour les parties décimales des paires de la catégorie 6, le plus grand chiffre appartient à la partie décimale du plus petit nombre, alors que pour les paires de la catégorie 7, c'est l'inverse. On peut dire que les chiffres sont congruents pour la catégorie 7 et incongruents pour la catégorie 6.

1. Voir e.a., Besner et Coltheart (1979) pour l'effet de congruence et d'incongruence.

Les valeurs d'une mesure de fiabilité, l' α de Cronbach, apparaissent pour chacune des catégories dans la dernière colonne du tableau 1. L'indice négatif pour la catégorie 1 et l'indice plus faible pour la catégorie 2 s'expliquent par des taux de réussite élevés et des variances faibles pour ces catégories. Les autres catégories affichent un indice de fiabilité correct.

Tabl. 1

Types de paires et critères.

Catégorie et exemple				Critères			Nombre d'items	α
				Longueur	Différence	Zéro		
1	0,24	vs.	0,55	N	/	-	7	-.06
2	0,4	vs.	0,71	C	1	-	7	.77
3	1,39	vs.	1,7	I	1	-	7	.98
4	0,03	vs.	0,3	I	1	+	7	.96
5	0,003	vs.	0,03	I	1	+	7	.97
6	1,05	vs.	1,3	I	1	+	7	.84
7	5,02	vs.	5,3	I	1	+	7	.88
8	2,4	vs.	2,40	I	1	+	7	.94
9	4,45	vs.	4,451	C	1	-	7	.93
10	2,255	vs.	2,254837	I	3	-	7	.95

Note. Dans chaque paire le nombre le plus grand apparaît en gras. C = congruent, I = incongruent, N = neutre, - = absent, + = présent.

Procédure

La tâche a été présentée collectivement aux élèves dans leur classe, mais elle a été réalisée individuellement et en silence par chaque élève dans le courant du mois d'avril. La consigne était « pour chaque paire, entoure le nombre le plus grand, ou place un signe égal (=) si les nombres sont égaux ». Aucun élève n'a eu besoin de plus de trente minutes pour terminer la tâche.

2.1.2 Résultats

Pour chaque sujet, les taux moyens de réponses correctes ont été calculés pour chaque catégorie de paires à comparer. Le sexe des participants n'a pas d'influence significative sur le taux global de réponses correctes ($F(1, 453) = 1.93, p > .05$, partial $\eta^2 < .01$) et n'a pas été pris en compte pour d'autres analyses des résultats. Des analyses de variance (ANOVA) à mesures répétées ont été réalisées avec la Catégorie (1 à 10) comme facteur intra-sujet et l'Année scolaire (3 à 6) comme facteur inter-sujets.

L'effet principal de la Catégorie est significatif ($F(4.87, 2196.01) = 569.15, p < .001$, partial $\eta^2 = .56$), les taux de réponses correctes varient d'une catégorie à l'autre, comme l'illustre la dernière colonne du tableau 2. L'effet principal de l'Année scolaire est lui aussi significatif ($F(3, 451) = 356.17, p < .001$, partial $\eta^2 = .70$), indiquant que, d'année en année, les taux moyens de réponses correctes ne cessent d'augmenter ($p <$

.001 pour toutes les comparaisons). L'interaction entre la Catégorie et l'Année scolaire est également significative ($F(14.61, 2196.01) = 131.65, p < .001$, partial $\eta^2 = .47$).

L'effet de la Catégorie est significatif en 3^e année primaire ($F(4.92, 580.65) = 967.09, p < .001$, partial $\eta^2 = .89$), en 4^e année primaire ($F(3.89, 419.85) = 207.20, p < .001$, partial $\eta^2 = .66$), en 5^e année primaire ($F(3.53, 388.26) = 15.95, p < .001$, partial $\eta^2 = .13$) et en 6^e année primaire ($F(3.49, 401.79) = 9.14, p < .001$, partial $\eta^2 = .07$), mais les différences de taux de réponses correctes entre les catégories diffèrent et se réduisent d'année en année. De plus, les différences inter-catégories changent en fonction de l'année scolaire, comme le montre le tableau 2.

Tabl. 2

Moyennes et écarts-types par catégorie et par année scolaire.

Catégorie et exemple			Année scolaire				Moyenne
			3	4	5	6	
1	0,24	vs. 0,55	99 _e (3)	99 _e (4)	99 _d (4)	99 _c (3)	99 _f
2	0,4	vs. 0,71	99 _e (3)	98 _e (7)	96 _{cd} (15)	99 _c (6)	98 _f
3	1,39	vs. 1,7	4 _a (15)	13 _a (28)	76 _a (38)	89 _a (28)	45 _a
4	0,03	vs. 0,3	9 _c (22)	31 _c (41)	84 _{ab} (32)	96 _{bc} (17)	55 _c
5	0,003	vs. 0,03	5 _{ab} (18)	28 _{bc} (41)	82 _{ab} (36)	96 _{bc} (18)	53 _b
6	1,05	vs. 1,3	6 _{abc} (17)	27 _{bc} (39)	87 _b (29)	96 _{bc} (19)	54 _{bc}
7	5,02	vs. 5,3	8 _d (26)	82 _d (34)	94 _{cd} (18)	100 _c (3)	90 _d
8	2,4	vs. 2,40	8 _{bc} (2)	31 _c (42)	92 _{bc} (21)	96 _{bc} (16)	57 _{bc}
9	4,45	vs. 4,451	99 _e (9)	98 _e (11)	92 _{bc} (24)	91 _{ab} (25)	95 _e
10	2,03	vs. 2,029998	7 _{abc} (20)	17 _{ab} (35)	75 _a (39)	86 _a (32)	46 _a
Moyenne			42	52	88	95	

Note. Dans chaque paire, le nombre le plus grand apparaît en gras. Pour chaque colonne, les moyennes qui ne partagent pas la même lettre souscrite diffèrent significativement ($p < .05$).

Pour apprécier l'impact du critère de longueur, les taux de réponses correctes de la catégorie 1 de longueur neutre peuvent être comparés à ceux de la catégorie 2 de longueur congruente et de la catégorie 3 de longueur incongruente. Il apparaît que ce critère a un effet quelle que soit l'année scolaire. Lorsque la longueur est congruente ou neutre, les taux de réponses correctes sont en effet nettement supérieurs que lorsqu'elle est incongruente, ce qui correspond à la règle 1 précédemment décrite (Léonard & Grisvard, 1981 ; Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Steinle & Stacey, 2003). De plus, on constate qu'il n'y a pas de différence significative entre les taux de réponses correctes pour les catégories 3 et 10, ce qui signifie qu'une différence de longueur de plusieurs chiffres n'est pas plus facile à gérer qu'une différence d'un chiffre.

Cependant, pour ces catégories, la valeur des chiffres est confondue avec le critère de longueur. Par exemple, pour la paire 1.39 vs. 1.7, le nombre le plus grand est le plus court mais 7 est aussi inférieur à 39. L'effet de la longueur pourrait donc être confondu avec un effet de la valeur des chiffres. On constate en effet que quelle que soit l'année scolaire, la comparaison de paires contenant des chiffres congruents, par exemple celles

de la catégorie 7, conduit à des taux de réponses correctes plus élevés que la comparaison de paires contenant des chiffres incongruents, par exemple celles de la catégorie 6.

De plus, des paires contenant un zéro, comme les paires des catégories 4 et 8 par exemple, ne conduisent pas à des taux de réponses satisfaisants avant la 5^e année primaire. La présence d'un zéro pourrait donc aussi avoir un coût. De façon interpellante, on constate également que les élèves les plus jeunes (de 3^e et 4^e années primaires) répondent majoritairement que les paires des catégories 4 et 5 sont des nombres égaux, n'accordant aucun rôle au zéro débutant la partie décimale.

2.1.3 Conclusions

Cette première étude tend à indiquer que les connaissances antérieures basées sur les nombres naturels sont impliquées dans l'apprentissage des nombres décimaux. Lorsque des critères issus des connaissances des nombres naturels, tels que la longueur ou la valeur des chiffres, sont incongruents pour le traitement des nombres décimaux, les taux de réponses correctes dans une tâche de comparaison chutent significativement pour des élèves de la 3^e année primaire à la 6^e année primaire. De même, lorsque le zéro prend un rôle spécifique aux nombres décimaux, se différenciant de certaines conceptions incomplètes liées aux nombres naturels, les taux de réponses correctes sont moins élevés pour les élèves les plus jeunes.

On constate néanmoins que les taux de réponses correctes dans une tâche de comparaison de deux nombres deviennent satisfaisants en 5^e année primaire et encore plus élevés en 6^e année primaire. Les apprenants semblent alors capables de comparer deux nombres décimaux avec une relative efficacité. Néanmoins, dès que la tâche de comparaison se complexifie, notamment lorsqu'il y a plus de nombres à comparer et qu'il faut utiliser la propriété de transitivité, les taux de réponses correctes chutent, même pour des élèves de l'enseignement secondaire (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985 ; Bonotto, 1995). Lorsqu'il s'agit d'ordonner du plus petit au plus grand, les nombres 0,15 ; 1 ; 0,1 ; 1,5 ; 0,5 ; 1,05, les taux d'erreurs sur un échantillon de 145 élèves de 5^e année primaire, 219 élèves de 6^e année primaire et de 234 élèves de 2^e année secondaire, sont respectivement de 80%, 74% et 59% (Bonotto, 1995).

Il reste cependant à différencier l'impact de la longueur de la partie décimale de celui de la valeur des chiffres composant cette partie décimale et à approfondir la compréhension du rôle du zéro dans la partie décimale. Ces objectifs seront poursuivis dans l'étude présentée au chapitre 3.

2.1.4 Étude B - Addition de nombres décimaux

Dans une première étude pilote sur la comparaison nous avons pu observer que les connaissances initiales construites à partir des nombres naturels ont un impact sur la comparaison des nombres décimaux.

Concernant l'addition de nombres décimaux, il apparaît que, pour de élèves de 5^e et 6^e années primaires ainsi que 1^{re} et 3^e années secondaires, l'addition $4,6 + 2,3$ est mieux réussie que l'addition $5,3 + 2,42$ (Hiebert & Wearne, 1985). Concernant les types d'erreurs, pour l'addition $5,3 + 2,42$, l'erreur la plus fréquente en 5^e ou 6^e année primaire est 2,95 ou 29,5 alors qu'en 1^{re} et 3^e années secondaires il s'agit de 0,295 ou 7,45. Les élèves, quelle que soit l'année, semblent opérer sur des chiffres alignés à droite, sans tenir compte des valeurs de position.

Dans cette seconde étude pilote, nous avons souhaité observer si les connaissances procédurales développées pour additionner les nombres naturels ont un impact elles aussi sur l'addition des nombres décimaux. Pour ce faire, nous avons utilisé exclusivement des nombres ayant un zéro au rang des unités, pour limiter l'opération aux parties décimales. Concernant les parties décimales, nous avons manipulé la différence de longueur entre les nombres à additionner ainsi que la nécessité ou non d'un report à l'unité supérieure ou la présence d'un (ou de plusieurs) zéro.

Méthodologie

Participants

Cent-trente-cinq élèves de 3^e année primaire (66 garçons, âge moyen = 8 ;5 ans, $\sigma = 5,2$ mois), 134 de 4^e année primaire (70 garçons, âge moyen = 9 ;6 ans, $\sigma = 6,6$ mois), 132 de 5^e année primaire (68 garçons, âge moyen = 10 ;4 ans, $\sigma = 5,3$ mois), 129 de 6^e année primaire (63 garçons, âge moyen = 11 ;5 ans, $\sigma = 5,9$ mois) ont participé à cette étude. Ils ont été sélectionnés aléatoirement parmi les écoles de la Communauté française de Belgique.

Tâche

Une tâche papier-crayon de 60 additions a été mise au point. Les additions de deux nombres décimaux appartenaient à 12 catégories représentées chacune par 5 additions (pour l'ensemble des items, voir en annexe, page 57).

Les additions peuvent être différenciées selon trois critères. Selon un premier critère, les deux nombres à additionner peuvent avoir ou pas une partie décimale de même longueur, c'est-à-dire contenant un même nombre de chiffres. Pour additionner des nombres naturels, par exemple 12 et 5, il convient d'opérer sur des puissances de dix semblables, c'est-à-dire dans notre exemple d'additionner 2 unités à 5 unités. Dans le cas des nombres naturels, commencer l'opération par les chiffres positionnés à droite conduit à une réponse correcte. Dans le cas des nombres décimaux par contre, opérer sur des puissances de dix semblables nécessite une conscience des valeurs de position. Pour additionner 0,06 à 0,3, il convient d'additionner 0 dixième à 3 dixièmes entre eux et non pas de commencer l'opération par les chiffres de droite. Lorsque les nombres décimaux n'ont pas la même longueur, la procédure pour les additionner doit se différencier d'une procédure qui est correcte lorsqu'elle est appliquée aux nombres naturels.

Selon un second critère, la somme peut nécessiter ou non un report à l'unité supérieure, ce qui la rend plus complexe à réaliser.

Enfin, selon le troisième critère, les nombres à additionner peuvent contenir ou non un ou plusieurs zéro(s) dans leurs parties décimales. Ici aussi, une conscience des valeurs de position s'impose lorsque les parties décimales des nombres contiennent un zéro. Lorsque 0,08 est additionné à 0,03, la somme doit être exprimée en centièmes (0,11) et non en millièmes (0,011).

Une mesure de fiabilité, l' α de Cronbach, dont les valeurs apparaissent pour chacune des catégories dans la dernière colonne du tableau 3, nous indique que les catégories sont fiables.

Tabl. 3
Types de paires et critères.

Catégorie et exemple				Critères			Nombre d'items	α
				Long. $\neq$	Report	Zéro		
1	0,5	+	0,2	-	-	-	5	.92
2	0,9	+	0,4	-	+	-	5	.94
3	0,34	+	0,12	-	-	-	5	.94
4	0,7	+	0,06	+	-	+	5	.96
5	0,6	+	0,03	+	-	+	5	.95
6	0,54	+	0,28	-	+	-	5	.88
7	0,07	+	0,01	-	-	+	5	.94
8	0,08	+	0,03	-	+	+	5	.94
9	0,021	+	0,053	-	-	+	5	.92
10	0,03	+	0,008	+	-	+	5	.96
11	0,05	+	0,002	+	-	+	5	.95
12	0,025	+	0,068	-	+	+	5	.91

Note. Long. = longueur, - = absent, + = présent

Procédure

La tâche a été présentée collectivement aux élèves dans leur classe, mais elle a été réalisée individuellement et en silence par chaque élève, dans le courant du mois de novembre. La consigne était « résous les calculs suivants ». Aucun élève n'a eu besoin de plus de 40 minutes pour terminer la tâche.

Résultats

Les taux moyens de réponses correctes ont été calculés par sujet pour chaque catégorie d'additions. Le sexe des participants n'a pas d'influence significative sur le taux global de réponses correctes ($F(1, 529) < 1$, $p > .05$, partial $\eta^2 < .01$) et n'a pas été pris en compte dans les analyses. Des analyses de variance (ANOVA) à mesures répétées ont été réalisées avec la Catégorie (1 à 12) comme facteur intra-sujet et l'Année scolaire (3 à 6) comme facteur inter-sujets.

L'effet principal de la Catégorie est significatif ($F(3.82, 2008.87) = 48.61, p < .001$, partial $\eta^2 = .09$), les différences significatives de taux de réponses correctes apparaissent dans la dernière colonne du tableau 4.

Tabl. 4

Moyennes et écarts-types par catégorie et par année scolaire.

				Année scolaire				Moyenne
Catégorie et exemple				3	4	5	6	
1	0,5	+	0,2	23 _c (37)	53 _d (38)	90 _c (19)	97 _b (8)	65 _d
2	0,9	+	0,4	7 _b (19)	24 _b (32)	70 _{ab} (39)	90 _a (25)	47 _a
3	0,34	+	0,12	19 _c (37)	40 _c (42)	86 _{bc} (24)	94 _{ab} (16)	59 _c
4	0,7	+	0,06	5 _a (12)	16 _a (26)	74 _{ab} (40)	90 _a (26)	46 _a
5	0,6	+	0,03	4 _a (11)	17 _a (27)	75 _{ab} (37)	90 _a (26)	46 _a
6	0,54	+	0,28	19 _c (32)	52 _d (36)	85 _{bc} (22)	92 _a (14)	61 _c
7	0,07	+	0,01	15 _b (24)	40 _c (39)	89 _c (21)	97 _b (10)	60 _c
8	0,08	+	0,03	14 _b (30)	33 _{bc} (39)	79 _{ab} (33)	91 _a (20)	54 _b
9	0,021	+	0,053	10 _{ab} (25)	32 _b (36)	84 _{bc} (24)	93 _a (14)	54 _b
10	0,03	+	0,008	9 _b (22)	25 _b (35)	76 _{ab} (38)	92 _a (23)	50 _b
11	0,05	+	0,002	7 _{ab} (17)	22 _b (31)	75 _{ab} (37)	91 _a (23)	48 _a
12	0,025	+	0,068	12 _b (25)	36 _c (35)	81 _{ab} (27)	94 _{ab} (13)	55 _b
Moyenne				12	32	80	93	

Note. Pour chaque colonne, les moyennes qui ne partagent pas la même lettre souscrite diffèrent significativement ($p < .05$).

L'effet principal de l'Année scolaire est lui aussi significatif ($F(3, 526) = 501.93, p < .001$, partial $\eta^2 = .74$), les taux de réponses correctes augmentant significativement d'année en année ($p < .001$, pour toutes les comparaisons) et les écarts-types diminuant. Enfin, l'interaction entre la Catégorie et l'Année scolaire ($F(11.46, 2008.87) = 6.37, p < .001$, partial $\eta^2 = .04$) est significative. L'effet de la Catégorie est significatif en 3^e année primaire ($F(2.79, 373.87) = 12.45, p < .001$, partial $\eta^2 = .09$), en 4^e année primaire ($F(3.32, 441.77) = 28.63, p < .001$, partial $\eta^2 = .18$), en 5^e année primaire ($F(3.71, 485.47) = 10.65, p < .001$, partial $\eta^2 = .08$) et en 6^e année primaire ($F(3.78, 483.34) = 3.87, p < .01$, partial $\eta^2 = .03$), mais les différences de taux de réponses correctes inter-catégories changent et s'amenuisent d'année en année (voir le tableau 4).

Conclusions

Cette seconde étude nous indique que les taux de réponses correctes pour l'addition de deux décimaux deviennent satisfaisants à partir de la 5^e année primaire et augmentent encore en 6^e année primaire. Néanmoins, quelle que soit l'année scolaire, les résultats montrent également que les connaissances antérieures basées sur les nombres naturels ont un impact sur l'apprentissage des nombres décimaux. Chez les élèves les plus jeunes, en 3^e année primaire essentiellement, la virgule n'est pas du tout prise en compte. Les réponses données sont des nombres naturels.

Tabl. 5

Fréquence en pourcentage de la réponse correcte et des erreurs les plus courantes.

Catégorie et item				Année scolaire					
				RC	Erreurs par ordre décroissant de fréquence				
1	0,5	+	0,2	72	7 (20)	0,07 (2)	0,007 (1)		
2	0,9	+	0,4	40	0,13 (28)	13 (21)			
3	0,34	+	0,12	70	46 (18)	0,046 (1)	47 (1)		
4	0,7	+	0,06	42	0,13 (20)	13 (19)	0,013 (10)		
5	0,6	+	0,03	42	9 (19)	0,09 (18)	0,9 (12)		
6	0,54	+	0,28	63	82 (17)	0,72 (2)	0,84 (2)	0,082 (1)	
7	0,07	+	0,01	60	8 (20)	0,8 (10)	0,008 (2)		
8	0,08	+	0,03	56	11 (19)	0,011 (12)	0,12 (2)	0,0011 (1)	
9	0,021	+	0,053	58	74 (19)	0,74 (11)	0,0074 (2)		
10	0,03	+	0,008	44	11 (17)	0,11 (11)	0,011 (10)	0,0011 (5)	0,00011 (2)
11	0,05	+	0,002	42	7 (18)	0,007 (15)	0,7 (7)	0,07 (4)	0,0007 (2)
12	0,025	+	0,068	55	93 (15)	0,93 (10)	0,092 (2)	0,0093 (1)	83 (1)

Note. RC = Taux de réponse correcte.

Chez les élèves plus âgés, les résultats indiquent que des connaissances procédurales, construites à partir de l'addition des nombres naturels, sont appliquées aux nombres décimaux. Lorsque ces procédures ne doivent pas se différencier des procédures habituellement utilisées pour additionner les nombres naturels, les taux de réponses correctes sont tout à fait satisfaisants. Par contre, lorsqu'elles doivent se différencier, les taux de réponses chutent significativement et les erreurs sont majoritairement liées aux valeurs de position. Les puissances de dix identiques ne sont pas ajoutées entre elles, ou la réponse n'est pas exprimée dans la bonne puissance de dix. On retrouve donc ici aussi des difficultés liées au rôle du zéro dans la partie décimale.

La littérature et ces deux études pilotes montrent donc que les connaissances conceptuelles et procédurales construites à partir des nombres naturels sont engagées dans l'apprentissage des nombres décimaux. Il ne pourrait pas en être autrement. Ce qui pose problème, ce sont les connaissances initiales qui sont contradictoires avec les caractéristiques propres des nombres décimaux qui sont à acquérir. Dans les sections suivantes, nous allons aborder des théories permettant de mieux comprendre ce qui est en jeu lorsque des connaissances initiales sont en contradiction avec de nouvelles connaissances à acquérir.

2.1.5 Annexe

Items utilisés pour la tâche de comparaison.

Catégorie 1	0,24	0,55	Catégorie 6	1,05	1,3
	1,31	1,62		4,08	4,6
	4,17	4,48		0,07	0,5
	1,22	1,76		1,08	1,6
	0,14	0,68		5,06	5,4
	2,31	2,85		3,03	3,1
	6,13	6,67		0,04	0,2
Catégorie 2	0,4	0,71	Catégorie 7	5,02	5,3
	2,6	2,91		0,04	0,5
	1,3	1,61		3,05	3,6
	6,2	6,51		2,06	2,7
	1,4	1,94		1,03	1,4
	4,1	4,64		4,07	4,9
	0,2	0,74		0,01	0,3
Catégorie 3	1,39	1,7	Catégorie 8	2,40	2,4
	3,19	3,5		1,7	1,70
	0,5	0,19		3,5	3,50
	5,49	5,8		0,6	0,60
	0,36	0,9		4,8	4,80
	1,16	1,7		7,9	7,90
	2,26	2,8		5,2	5,20
Catégorie 4	0,03	0,3	Catégorie 9	4,45	4,4510
	2,05	2,5		2,16	2,1620
	2,06	2,6		1,78	1,7802
	1,07	1,7		3,25	3,2501
	0,01	0,1		0,42	0,4261
	4,08	4,8		5,91	5,9183
	3,04	3,4		6,39	6,3942
Catégorie 5	0,003	0,03	Catégorie 10	2,029998	2,030
	2,005	2,05		4,049213	4,051
	2,006	2,06		7,019714	7,021
	1,007	1,07		0,753928	0,754
	0,001	0,01		1,254837	1,255
	4,008	4,08		3,572984	3,573
	3,004	3,04		4,161893	4,162

Items utilisés pour la tâche d'addition.

Catégorie 1	0,4	+	0,3	Catégorie 7	0,02	+	0,05
	0,7	+	0,1		0,03	+	0,06
	0,1	+	0,4		0,01	+	0,04
	0,2	+	0,5		0,07	+	0,01
	0,3	+	0,6		0,04	+	0,03
Catégorie 2	0,6	+	0,7	Catégorie 8	0,07	+	0,05
	0,6	+	0,8		0,06	+	0,08
	0,8	+	0,3		0,06	+	0,07
	0,9	+	0,4		0,08	+	0,03
	0,7	+	0,5		0,09	+	0,04
Catégorie 3	0,21	+	0,53	Catégorie 9	0,041	+	0,057
	0,41	+	0,57		0,034	+	0,012
	0,45	+	0,32		0,051	+	0,026
	0,34	+	0,12		0,021	+	0,053
	0,51	+	0,26		0,045	+	0,032
Catégorie 4	0,3	+	0,08	Catégorie 10	0,07	+	0,006
	0,4	+	0,09		0,04	+	0,009
	0,5	+	0,07		0,05	+	0,007
	0,7	+	0,06		0,03	+	0,008
	0,8	+	0,06		0,08	+	0,006
Catégorie 5	0,5	+	0,02	Catégorie 11	0,03	+	0,004
	0,1	+	0,07		0,01	+	0,007
	0,4	+	0,01		0,04	+	0,001
	0,6	+	0,03		0,05	+	0,002
	0,3	+	0,04		0,06	+	0,003
Catégorie 6	0,25	+	0,68	Catégorie 12	0,017	+	0,069
	0,36	+	0,57		0,049	+	0,037
	0,17	+	0,69		0,036	+	0,057
	0,54	+	0,28		0,025	+	0,068
	0,49	+	0,37		0,054	+	0,028

Chapitre 3

Conceptions of decimal fractions

*Abstract*¹

Learning about decimal fractions is difficult because it requires an extension of the number concept built on natural numbers. The aim of the present study was to investigate developmental changes in children's misconceptions in decimal fraction processing. A large sample of children from Grades 3 to 6 performed a numerical comparison task on different categories of pairs of decimal fractions. The success rate and the type of error they made varied with age and categories. We distinguished the impact of the value of the digits from the impact of the length of the fractional part on children's pattern of responses. Although both kinds of impact affected the success rate, the digit values had a stronger impact and were mastered later than the length. Our results also showed that a zero just after the decimal point was understood better and earlier than a zero at the end of the fractional part of a number. Cluster analysis was conducted to determine groups of children who answered similarly regarding the response type across the various categories of decimal fractions. To interpret the data the conceptual change framework was used.

1. This research has been conducted in collaboration with Jacques Grégoire and Christophe Mussolin and has been published as Developmental changes in the comparison of decimal fractions, in *Learning and Instruction* 20(2010), 521-532.

3.1 Introduction

Learning is traditionally defined as the acquisition of new knowledge. According to the constructivist approach, children have naïve or prior conceptions and they engage them implicitly or intentionally in learning. Some of these prior conceptions are coherent with the new information and constitute a foundation for learning. However, other prior conceptions can impede further learning when the new information is incompatible with the existing knowledge. This leads to systematic errors or misconceptions. In this case, students have to totally reorganise their knowledge and to face a conceptual change.

The reorganisation of knowledge has been the focus of interest for some philosophers and historians of science (Kuhn, 1962 ; Lakatos, 1970). Kuhn (1962) argued that science is not a cumulative acquisition of knowledge. The revision of a scientific theory depends on conceptual oppositions, which are eventually resolved by a revolution. However, there is frequently a period of crisis, before the revolution takes place, during which some opposing ideas can coexist. Kuhn's (1962) model of the way change occurs in science has been used at an individual level to investigate how concepts evolve in the process of learning (Posner et al., 1982). The conceptual change approach was initially related to scientific learning, such as the development of physical or biological concepts (Hewson, 1981 ; McCloskey, 1983 ; Posner et al., 1982 ; Vosniadou, 1994 ; Vosniadou & Brewer, 1992). Vosniadou (1994, 2002) proposed a theoretical framework according to which: (a) learners have pre-conceptions which can constrain the learning; (b) the process of conceptual change is slow and gradual; and (c) intermediate levels of understanding can be observed. Some misconceptions, at this intermediate level, can be synthetic models (Vosniadou, 1994), which result from learners' attempts to reconcile the new concepts with their pre-existing ideas instead of making a radical reorganisation. Several authors emphasized that prior conceptions are often resistant to teaching (Duit, Roth, Komorek, & Wilbers, 2001 ; Mason, 2001 ; Wiser & Amin, 2001).

The conceptual change model has been applied to other domains than science, such as psychology (Wellman, 2002), general cognitive development (Carey, 1985), and history (Limón, 2002). It has also recently been applied to the learning of mathematics (Vamvakoussi, 2007 ; Vosniadou & Verschaffel, 2004). In this domain, earlier studies have pointed out some similarities to the conceptual change approach. Bachelard (1938) and (Brousseau, 1998) suggested the existence of "epistemological obstacles" in the learning of mathematics. Fischbein (1987) argued that initial mathematical conceptions do not always support further learning. This fact is now widely recognised (Resnick, 2006). Nevertheless, there are some differences between science and mathematics. Although the extension of the conceptual change model to mathematics learning requires some care, it is commonly agreed that mathematics learning and teaching can gain from the conceptual change approach (Greer, 2004 ; Greer & Verschaffel, 2007 ; Vamvakoussi, 2007 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

In the present study, the theory of conceptual change was applied to a specific

domain of mathematics, namely the acquisition of decimal fractions². While several authors (Dole & Sinatra, 1998 ; Limón & Mason, 2002 ; Mason et al., 2008 ; Pintrich, Marx, & Boyle, 1993 ; G. M. Sinatra & Pintrich, 2003) have shown that the affective and motivational characteristics of the learner, as well as various social, instructional and contextual factors, play a role in the adoption of conceptual change, our research was only focused on cognitive aspects of conceptual change (see Vosniadou, 2007a for a discussion).

3.1.1 Analysis of errors

Anyone who has ever been interested in mathematical teaching or learning knows that acquiring rational numbers is particularly difficult for children. Several studies have indicated that the extension of the number concept to rational or real numbers requires a conceptual change (Lehtinen, Merenluoto, & Kasanen, 1997 ; Merenluoto & Lehtinen, 2002 ; Merenluoto & Palonen, 2007 ; Stafylidou & Vosniadou, 2004 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Children have to integrate new concepts about these numbers with their prior knowledge based on natural numbers.

The analysis of errors enables us to trace developmental changes in the acquisition of decimal fractions. Previous studies have investigated misconceptions about these numbers using a variety of methodologies (Nesher, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). Sackur-Grisvard et Leonard (1985) presented an ordering task of three decimal fractions to children from Grades 4 to 7. They showed that many children used three implicit and incorrect rules. Rule 1 is to select as the smaller number the one whose fractional part is the smaller whole number (e.g., $12.4 < 12.17$ because $4 < 17$). Rule 2 is to select as the smaller number the one which has more digits in the decimal portion (e.g., 12.94 and $12.24 < 12.7$, because numbers with a two-digit fractional parts are seen as smaller than numbers with one-digit fractional parts). Rule 3 is to select as the smaller number the one whose fractional part begins with zero (which leads to a correct answer), and to apply Rule 1 in other cases (e.g., $3.09 < 3.8$). These authors used the term *rule*. For them, children's use of rule reflects the underlying concepts that guided the construction and selection of the rules.

Sackur-Grisvard et Leonard (1985) also showed that, although the frequency of use of these rules decreases with age, older children still use them for more difficult tasks (i.e., for ordering five decimal fractions). Nesher et Peled (1986) used a comparison task of two decimal fractions in a written questionnaire. Children from Grade 7 to Grade 9 were allowed to answer that the numbers were equal. The percentage of children using Rule 1 or 3 decreased between Grades 7 and 9, while the percentage of children using Rule 2 increased in Grade 8 and then decreased in Grade 9. These authors also suggested that the task of comparing different numbers is not the same as the task of comparing

2. In the entire article, we consider only positive decimal fractions in the place-value system, e.g., 0.2.

equal ones. All the participants succeeded in identifying the equal numbers.

Resnick et al. (1989) asked participants to compare two decimal fractions and to select the larger one. They established the conceptual sources of the errors, or rules, described by Sackur-Grisvard et Leonard (1985). For them, as for Nesher et Peled (1986), Rule 1 corresponds to an immature conception of decimals, based on a knowledge of natural numbers, whereas Rule 2 stems from the learning of fractions, and can be interpreted as an over-generalisation of a more elaborated idea that a tenth is always bigger than a hundredth.

The results of these descriptive studies are interesting in terms of the pattern of errors exhibited by children. However, further investigation with a more rigorous methodology is needed to investigate the conceptual changes between natural numbers and decimal fractions. First, it is necessary to distinguish errors due to the misconception that the value of the numbers increases with the length of the fractional part (impact of length), from those based on the application of a rule suggesting that the larger number is the one whose fractional part contains the larger digit (impact of the digit values). Rule 1 does not allow us to make this distinction. For example, when children have to choose the bigger of two decimal fractions, 0.03 versus 0.004, and incorrectly select 0.004, the error could be due either to a misconception based on the fact that 0.004 is longer than 0.03, or on the fact that the digit “4” is bigger than the digit “3”. Previous studies have not been able to differentiate between these two possibilities because they only used numbers varying along two dimensions.

Second, in some previous studies, children were asked to compare decimal fractions by choosing the larger one, or to order decimal fractions from the smallest to the largest. This way of proceeding is problematic because it neglects the possibility that the decimal fractions could be equal.

Third, some of the rules described above are based on the role of zero. However, it is important to distinguish between a zero placed on the left of a digit in the fractional part of a number (e.g., 0.01) and a zero placed on the extreme right of the fractional part (e.g., 0.10). Finally, it is interesting to analyse children's initial conceptions of decimal fractions before they study them. To do this we would have to study younger participants than previous studies. Decimal fractions are traditionally taught at the end of Grade 4 in Belgium, so we decided to include Grade 3 and Grade 4 children in our study so as to observe these initial conceptions.

3.1.2 The present study

The aim of the present study was to analyse children's age-related misconceptions about decimal fractions, bearing in mind the four requirements pinpointed above. Children from Grades 3 to 6 performed a comparison task on pairs of decimal fractions. They were asked to select the larger number, or to indicate that the two numbers were equal. The present study enabled the impact of the length of the fractional part of a

number to be distinguished from the impact of the value of the digits in the fractional part. Furthermore, the role of the zero was examined, independently of the impact of the values of the other digits.

3.1.3 Hypotheses

It was hypothesised that both length and digit values would have an impact on the comparison of decimal fractions, reflecting misconceptions based on natural numbers. Children were expected to find it difficult to identify both the shorter number of a pair, and the number with the smaller digit value, as the larger (Hypothesis 1). It was also predicted that the digit values would influence performance more strongly than the length difference, since digit values had been learned early and explicitly, while number length is usually implicit knowledge, which is acquired later in childhood (Hypothesis 2). It was also hypothesised that a correct understanding of the role of the zero would only be exhibited by older children (Hypothesis 3), because it implies an elaborate knowledge of place values. Finally, it was expected misconceptions to be observed in the sense of being synthetic models (Hypothesis 4); these would correspond to intermediate levels of understanding between the prior conceptions in Grade 3 and the correct understanding in Grade 6.

3.2 Method

3.2.1 Participants

Participants were 156 children of Grade 3 (78 girls and 78 boys; mean age 101.47 months, $SD = 5.28$), 128 of Grade 4 (65 girls and 63 boys; mean age 113.66 months, $SD = 6.73$), 149 of Grade 5 (74 girls and 75 boys; mean age 125.25 months, $SD = 5.38$) and 128 of Grade 6 (62 girls and 66 boys; mean age 137.41 months, $SD = 5.85$). The children came from randomly selected schools of the French-speaking Community of Belgium.

3.2.2 Task and stimuli

A paper-and-pencil comparison task was constructed with eighty pairs of decimal fractions. The pairs of decimals fell into eight different categories (10 pairs in each category). In each pair, the two numbers both had a zero in the unit position, so they only differed in the fractional part.

In the category labelled Neutral Length, both numbers had only a single digit in the fractional part. They only varied in the value of the digits (e.g., 0.1 vs. 0.2), so that the decision as to which was larger was only based on digit values and was not influenced by the length. In the category labelled Neutral Digit Value1, the two numbers

involved the same digit, but its position in the decimal differed. The digit was placed first (representing tenths) for the bigger number, but was preceded by a zero in the smaller number (so that it represented hundredths). For pairs like this (e.g., 0.1 vs. 0.01), the numbers only varied in the length of the fractional part, and the correct decision was always incongruent³ with the length difference and could not be based on the digit values. The items in another category labelled Neutral Digit Value2 were similar to those in the first one, except that the digit in the fractional part represented tenths and thousandths (e.g., 0.1 vs. 0.001), meaning that the length difference was two digits.

In the other categories, the pairs of decimal fractions varied in both the digit value and the length of the fractional part. In the category labelled Congruent Length and Digit Value the pairs contained one number with one and one number with two digits in the fractional part (e.g., 0.1 vs. 0.20). The number with two digits in the fractional part always had a digit in the tenths position which was bigger than the digit in the tenths position of the shorter number, followed by a zero in the hundredths position. So, the larger number was also the longer and the one containing the bigger digit, meaning that the correct decision was congruent with both the digit values and the length difference.

In three other categories, the larger number of the pair always had one digit in the fractional part while the other had two digits, so the correct decision was always incongruent with the length of the fractional part. The arrangement of digit values varied between these categories. In the category labelled Incongruent Length and Congruent Digit Value the correct decision was congruent with the digit values, namely the larger number had the larger digit in the tenths position, and the smaller number was constructed so that a smaller digit occurred in the hundredths position, preceded by a zero (e.g., 0.2 vs. 0.01). In the category labelled Incongruent Length and Digit Value the correct decision was incongruent with digit values, namely the pairs were of the same kind as the previous category, but this time the bigger digit was placed in the smaller number (e.g., 0.1 vs. 0.02). In the category labelled Ending in a Zero, the effect of the digit values depended on the strategy used by the participants: the number with two digits in the fractional part was the smaller, and this had a zero in the hundredths position and a digit in the tenths position which was smaller than the digit in the tenths position of the shorter number (e.g., 0.2 vs. 0.10). So, the correct decision was congruent with the digit values if the comparison was based only on the digits in the tenths position, but was incongruent if the comparison was based on the whole of the fractional part (with an incorrect role attributed to the zero).

Finally, in the category labelled Ending in a Zero and Equal, the two numbers were equal and had the same digit in the tenths position, but varied in length because one of them ended with a zero (e.g., 0.3 vs. 0.30). Here, the correct decision was incongruent with the length difference and could only be based on correct knowledge of the position value. Moreover, if the children treated the fractional part as a natural number, this

3. A dimension was considered as congruent if its processing led to the correct answer, while reverse is true for the incongruent dimension (Besner & Coltheart, 1979)

would lead to an incorrect response.

3.2.3 Procedure

The 80 pairs of decimal fractions were randomized and presented in the same order to all the participants. The position of the correct response was counterbalanced across the pairs. The child was asked to “circle the larger number or to place an equals sign between them if the numbers are the same in value.” The task was administrated collectively to the children in their classrooms during the autumn term. Each child worked individually, in silence but without any time constraint. They all took less than twenty minutes.

3.3 Results

3.3.1 Overall analysis

For each participant, the mean rate of correct responses in each category of decimal fraction pairs was calculated. Boys' and girls' performances did not differ significantly, $F(1, 560) < 1$, *ns*. The mean accuracy for each category in each grade is given in Table 1. Cronbach's alpha shows that most of the categories had very good reliability and internal consistency, providing further support for analyses by category rather than by item. The low Cronbach's alpha for the category Neutral Length is explained by its very low variance, nearly all participants succeeding on all items in this category.

Two-way repeated measures ANOVA was conducted on the correct response rates with the Category (1 to 8) as the within subjects factor and the Grade (3 to 6) as the between subjects factor. The main effect of Grade was significant, $F(3, 557) = 787.14$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .81$, showing that the correct response rates increased with grade. Post hoc *t*-tests, adjusted with the Bonferroni correction at alpha level $.05/6 = .008$, showed that all grades differed significantly from each other ($p < .05$ for comparison between Grades 3 and 4; $p < .001$ for the other comparisons). The highest improvement was observed between Grades 4 and 5. The main effect of category was also significant, $F(3.67, 2045.40) = 975.88$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .64$. There were lower success rates for the categories Ending in a Zero, Ending in a Zero and Equal, Incongruent Length and Digit Value, Neutral Digit Value1, and Neutral Digit Value2 as compared to the categories Congruent Length and Digit Value, Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Neutral Length. Post hoc *t*-tests revealed significant differences between the category Ending in a Zero and the categories Neutral Digit Value1 and Neutral Digit Value2 ($p < .01$). Also, the category Ending in a Zero and Equal differed from the category Neutral Digit Value2 ($p < .01$). The success rate in the category Congruent Length and Digit Value was significantly higher than in the category Incongruent Length and Congruent Digit Value ($p < .001$); the category Neutral Length had the highest success rate and differed significantly from all other categories (in all cases $p < .001$).

Tabl. 1

Mean rates of correct responses (in percent) in each category by grade.

Category	Example of pair	Cronbach's α	Grade 3	Grade 4	Grade 5	Grade 6	Mean rates
Neutral Length	0.1 vs. 0.2	0.10	99.0	98.6	99.1	99.3	99.0
Congruent Length and Digit Value	0.1 vs. 0.20	0.86	97.8	96.8	93.3	98.5	96.6
Neutral Digit Value1	0.1 vs. 0.01	0.96	5.7	14.9	88.5	98.5	51.9
Neutral Digit Value2	0.1 vs. 0.001	0.98	5.3	15.9	89.5	98.6	52.3
Incongruent Length and Congruent Digit Value	0.2 vs. 0.01	0.94	79.3	78.8	97.7	99.6	88.9
Incongruent Length and Digit Value	0.1 vs. 0.02	0.99	4.1	15.4	87.3	97.3	51.0
Ending in a Zero	0.2 vs. 0.10	0.98	6.3	8.8	79.8	97.5	48.1
Ending in a Zero and Equal	0.3 vs. 0.30	0.98	6.1	8.8	79.7	98.6	48.3
		Means	38.0	42.3	89.3	98.5	

Tabl. 2

Statistics for main effects and interactions (without Grade) corresponding to the impact of length.

Effect/interaction	df	F	p	partial η^2	Post hoc t-tests
Categories Neutral Length, Congruent Length and Digit Value, and Incongruent Length and Congruent Digit Value (CR)					
Category	1, 32, 735.15	62.66	< .001	.10	Category Incongruent Length and Congruent Digit Value < Category Congruent Length and Digit Value < Category Neutral Length
Grade	3, 557	22.01	< .001	.10	Grade 3 = Grade 4 < Grade 5 = Grade 6
Categories Neutral Digit Value1 and Neutral Digit Value2 (CR)					
Category	1, 557	1.51	ns	< .01	–
Grade	3, 557	616.77	< .001	.77	Grade 3 < Grade 4 < Grade 5 < Grade 6
Categories Neutral Digit Value1 and Neutral Digit Value2 (types of errors)					
Response	1.75, 975.27	132.23	< .001	.19	CR (52.1%) > FE (29.7%) > CL (18.1%) (all *)
Response x Category	1.60, 890.69	4.31	< .05	.01	Difference FE - CL was larger in Category Neutral Digit Value1 (30%; 18%) than Neutral Digit Value2 (29%; 19%)

CR = Correct response; FE = Faulty equality; CL= Choice of the longer number; CS= Choice of the shorter number. * p < .001.

The interaction between category and grade was also significant, $F(11.02, 2045.40) = 247.12$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .57$. To understand this interaction, two-way repeated measures ANOVAs, with Category as the within subjects factor and Grade as the between subjects factor were conducted, separately for groups of categories that addressed the same question, namely the impact of the length, of the digit value, and of zero. For each ANOVA, the data were the mean rate of correct responses or types of responses, that is, responses including errors. Hereafter, we focused on double or triple interactions including grade. Main effects or other interactions are reported in Tables 2, 3, and 4.

3.3.2 The impact of the length of the fractional part

To investigate the impact of the length of a decimal fraction, we compared three categories for which the digit values were always congruent with the correct decision. Variation on performance could thus be due to the length difference which was neutral in category Neutral Length (e.g., 0.1 vs. 0.2), congruent in the category Congruent Length and Digit Value (e.g., 0.1 vs. 0.20), and incongruent in the category Incongruent Length and Congruent Digit Value (e.g., 0.2 vs. 0.01). The interaction between grade and category was significant, $F(3.96, 735.15) = 26.23$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .12$, as illustrated in Figure 1.

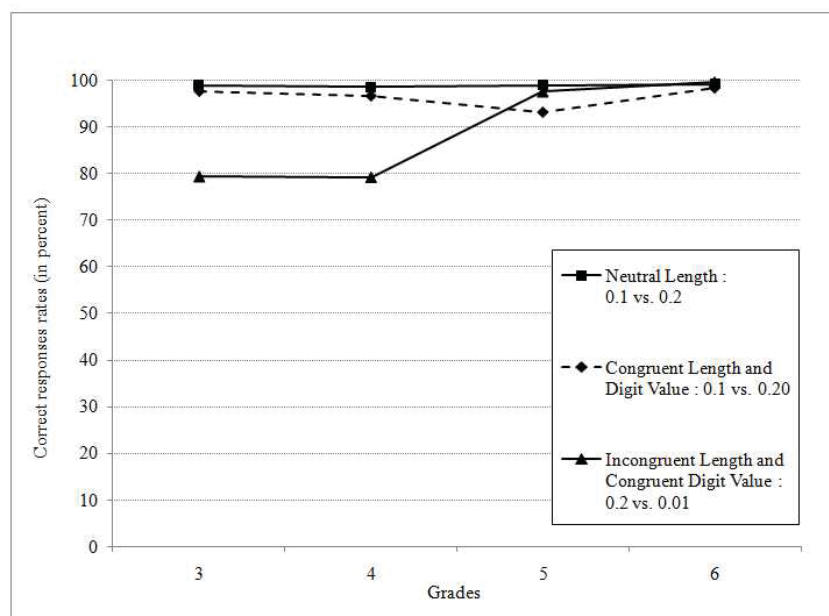


Fig. 1. Mean rates (in percent) of correct response by grade in categories Neutral Length, Congruent Length and Digit Value, and Incongruent Length and Congruent Digit Value.

In Grade 3, scores on the categories Neutral Length and Congruent Length and Digit Value did not differ from each other ($p > .05$), and were significantly higher than on the category Incongruent Length and Congruent Digit Value (in all cases $p < .001$). The pattern was similar in Grade 4; there was no difference between the categories Neutral

Tabl. 3

Statistics for the main effects and interactions (without Grade) corresponding to the impact of digit values.

Effect/interaction	df	F	p	partial η^2	Post hoc t-tests
Categories Neutral Digit Value1, Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Incongruent Length and Digit Value (CR)					
Category	1, 32, 735.06	761.16	< .001	.58	Category Neutral Digit Value1 = Category Incongruent Length and Digit Value < Category Incongruent Length and Congruent Digit Value
Grade	3, 557	518.56	< .001	.74	Grade 3 < Grade 4 < Grade 5 < Grade 6
Categories Neutral Digit Value1, Incongruent Length and Congruent Digit Value and Incongruent Length and Digit Value (types of errors)					
Response	1.51, 843.35	1147.17	< .001	.67	CR (65%) > CL (24.7%) > FE (10.3%) (all *)
Grade	3, 557	1.75	ns	< .01	-
Category	< 1				
Response x Category	2.09, 1166.06	425.33	< .001	.43	CR (52%) > FE (30%) > CL (18%) in Category Neutral Digit Value1, while CR > CL > FE in Categories Incongruent Length and Congruent Digit Value (89%; 11%; 0%) and Incongruent Length and Digit Value (54%; 46%; 0%).

C = Coherent, CR = Correct response; FE = Faulty equality; CL = Choice of the longer number; CS = Choice of the shorter number. * $p < .001$.

Tabl. 4

Statistics for the main effects and interactions (without Grade) corresponding to the impact of zero.

Effect	df	F	p	partial η^2	Post hoc t-tests
Category Ending in a Zero (types of errors)					
Response	1.00, 558.37	727.75	< .001	.57	CR, here CS (51.1%) = CL (48.8%) > FE (0.1%) (both *)
Grade	3, 557	1.74	ns	< .01	-
Category Ending in a Zero and Equal (types of errors)					
Response	1.30, 726.31	715.99	< .001	0.56	CR, here equal (48.3%) = CL (49.3%) > CS (0.2%) (both *)
Grade	3, 557	2.13	ns	0.01	-

CR = Correct response; FE = Faulty equality; CL = Choice of the longer number; CS = Choice of the shorter number. * $p < .001$.

Length and Congruent Length and Digit Value ($p > .05$), and the correct response rates in these two categories were higher than in the category Incongruent Length and Congruent Digit Value (in all cases $p < .001$). In Grade 5, the correct response rate was marginally lower in the category Congruent Length and Digit Value than in the category Incongruent Length and Congruent Digit Value ($p = .06$); however, correct response rate was significantly lower in the category Congruent Length and Digit Value than in the category Neutral Length ($p < .001$). Finally, the categories Neutral Length and Incongruent Length and Congruent Digit Value did not differ significantly from each other ($p > .05$). In Grade 6, there was no significant difference between all the categories ($p > .05$).

The length difference had a weak but significant impact on children's accuracy even when the digit values were congruent with the correct decision. Third- and fourth-grade children tended to think the longer number was also the larger in magnitude, as expected in Hypothesis 1. Despite an increase in accuracy, fifth-grade children were also influenced by the length, but a reverse effect than the one expected in Hypothesis 1 was observed. They tended to think that the shorter number was the bigger. Finally, sixth-grade children were not influenced by the length of the decimal.

When comparing the categories Neutral Digit Value1 and Neutral Digit Value2 (e.g., 0.1 vs. 0.01 and 0.1 vs. 0.001) it was possible to analyze the impact of the size of the length difference (i.e., one or two digits), independent of the digit values. The Grade $\times$ Category interaction was not significant, $F(3, 557) = 1.04$, $p > .05$, which means that there was a similar pattern of responses across grades. Two kinds of errors were found for the categories Neutral Digit Value1 and Neutral Digit Value2. Specifically, the incorrect responses corresponded either to "the choice of the longer" number as the bigger (e.g., the selection of 0.01 instead of 0.1), or to "faulty equality" (e.g., $0.1 = 0.01$). A 4(grade) $\times$ 2(category) $\times$ 3(response type: correct, choice of the longer, or faulty equality) repeated measures ANOVA showed that there was a Response $\times$ Grade interaction, $F(5.25, 975.27) = 202.11$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .52$. As reported in Table 5, separate analyses within each grade showed that the main effect of response type was significant in all grades (in all cases $p < .001$), but the pattern differed across grades.

Specifically, in Grade 3, faulty equality was more frequent than the choice of the longer number which, in turn, was more frequent than the correct answer. The three types of response differed significantly ($p < .001$) from each other. In Grade 4, a similar pattern was observed, but the difference between faulty equality and the choice of the longer number was not significant ($p > .05$), although the difference between the correct response and the other two types of response was significant ($p < .001$). In Grade 5, correct responses were significantly more frequent ($p < .001$) than faulty equality and the choice of the longer number, whereas the latter two incorrect responses did not differ from each other ($p > .05$). The same pattern was observed in Grade 6.

Tabl. 5

Mean rates (in percent) and F values of the type of response in the two categories with neutral digit value by grade

	df	F	CR	CL	FE
Category Neutral Digit Value1 (0.1 vs. 0.01)					
Grade 3	1.28, 198.56	74.79	5.7 _a	31.0 _b	63.1 _c
Grade 4	1.70, 216.28	17.04	14.9 _a	34.6 _b	50.3 _b
Grade 5	1.43, 212.07	413.47	88.5 _a	3.8 _b	7.7 _b
Grade 6	1.09, 138.78	5391.01	98.5 _a	1.0 _b	0.4 _b
Category Neutral Digit Value2 (0.1 vs. 0.001)					
Grade 3	1.25, 193.55	63.02	5.3 _a	33.3 _b	61.4 _c
Grade 4	1.74, 221.26	12.95	15.9 _a	36.3 _b	47.8 _b
Grade 5	1.44, 214.18	461.11	89.5 _a	3.7 _b	6.9 _b
Grade 6	1.01, 128.29	3518.33	98.6 _a	1.3 _b	0.1 _b

CR = Correct response; CL = Choice of the longer number; FE = Faulty equality. For each category, the frequencies in the same row that do not share subscripts differ at $p < .001$ regarding the post hoc tests.

The frequencies of the erroneous choice of the longer decimal when the digit values were congruent or neutral give more evidence to the impact of the length (Hypothesis 1), even in this case “faulty equality” error was much more frequent. Furthermore, it appears that a length difference of one digit was sufficient to have an impact, and that a larger length difference did not result in a greater effect, or lead to a different type of response.

3.3.3 The impact of the digit value

The impact of the digit value was analyzed by comparing the categories Neutral Digit Value1 (e.g., 0.1 vs. 0.01), Incongruent Length and Congruent Digit Value (e.g., 0.2 vs. 0.01), and Incongruent Length and Digit Value (e.g., 0.1 vs. 0.02). The Category $\times$ Grade interaction was significant, $F(3.96, 735.10) = 188.11$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .50$, as illustrated in Figure 2. Separate analyses were conducted within each grade to understand this interaction.

Specifically, in Grade 3, the main effect of category was significant, $F(1.23, 189.91) = 663.30$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .81$, indicating that the category Incongruent Length and Congruent Digit Value yielded more correct responses than either the Neutral Digit Value1 or Incongruent Length and Digit Value (in all cases $p < .001$); the latter two categories did not differ between them ($p > .05$). Although the correct response rates were increased in the other grades, the same pattern of responses was observed in Grade 4, $F(1.15, 146.35) = 298.24$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .70$, and Grade 5, $F(1.63, 240.81) = 17.04$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .10$. In Grade 6, the main effect of category was also significant, $F(1.78, 226.55) = 3.38$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .03$, but the effect size was low.

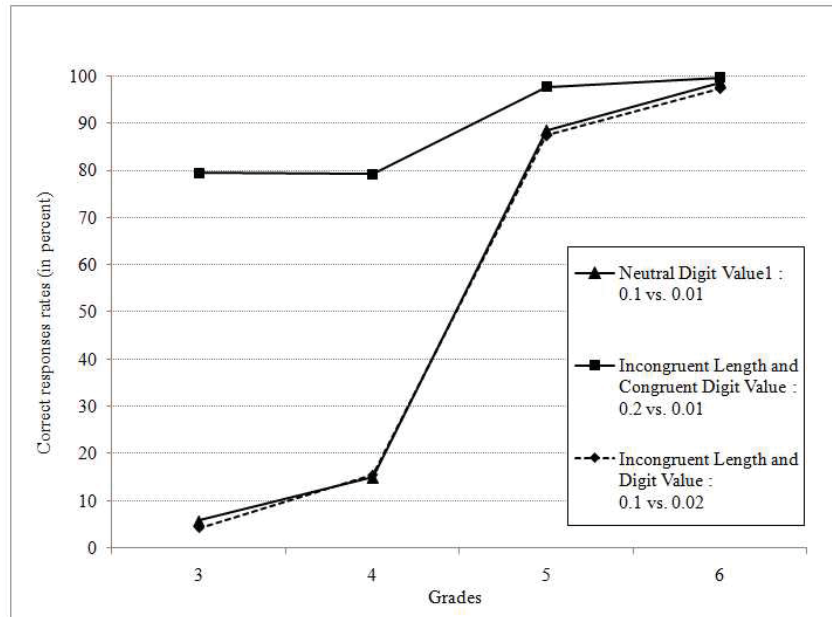


Fig. 2. Mean rates (in percent) of correct response by grade in categories Neutral Digit Value1, Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Incongruent Length and Digit Value.

In brief, third- and fourth-grade children had similar patterns of response, despite a slight increase in accuracy with age, and were strongly affected by digit values. They were generally unable to succeed (below 20% of correct responses) when the digit values were incongruent with the correct decision, supporting Hypothesis 1. Fifth-grade children succeeded well in all the three categories, but digit values still had an impact on their decision. Sixth-grade children did not seem to be influenced by the digit values.

Although the categories Neutral Digit Value1 and Incongruent Length and Digit Value did not differ with respect to the mean rate of correct responses, further analyses were conducted on types of error, with Category (Neutral Digit Value1, Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Incongruent Length and Digit Value) and Response (correct, choice of the longer number, and faulty equality) as within subject factors and grade as between subjects factor. The Response $\times$ Grade interaction was significant, $F(4.54, 843.35) = 350.45$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .65$, as well as the Response $\times$ Category $\times$ Grade interaction, $F(6.28, 1166.06) = 112.57$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .38$. Separate analyses were conducted for each grade to examine this double interaction. As reported in Table 6, the main effect of type of response was significant for each category and in all grades (in all cases $p < .001$). However, the pattern of responses differed across categories and grades.

Regarding the type of response, the Response $\times$ Category interaction was significant in Grade 3, $F(1.63, 251.99) = 458.34$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .75$, in Grade 4, $F(1.86, 235.76) = 131.30$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .51$, and in Grade 5, $F(1.76, 260.88) = 10.12$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .06$, but not in Grade 6, $F(1.49, 188.95) = 1.28$, $p > .05$, partial $\eta^2 = .01$.

Tabl. 6

Mean rates (in percent) and F values of the type of response in the categories Neutral Digit Value1, Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Incongruent Length and Digit Value by grade

	df	F	CR	CL	FE
Category Neutral Digit Value1 (0.1 vs. 0.01)					
Grade 3	1.28, 198.56	74.79	5.7 _a	31.0 _b	63.1 _c
Grade 4	1.70, 216.28	17.04	14.9 _a	34.6 _b	50.3 _b
Grade 5	1.43, 212.07	413.47	88.5 _a	3.8 _b	7.7 _b
Grade 6	1.09, 138.78	5391.01	98.5 _a	1.0 _b	0.4 _b
Category Incongruent Length and Congruent Digit Value (0.2 vs. 0.01)					
Grade 3	1.02, 157.58	259.74	79.3 _a	20.1 _b	0.6 _c
Grade 4	1.00, 127.15	194.52	79.1 _a	20.7 _b	0.1 _c
Grade 5	1.00, 148.84	2591.82	97.5 _a	2.3 _b	0.1 _b
Grade 6	1.00, 127.00	49565.66	99.6 _a	0.4 _b	0.0 _b
Category Incongruent Length and Digit Value (0.1 vs. 0.02)					
Grade 3	1.04, 161.49	1423.56	4.1 _a	95.3 _b	0.5 _a
Grade 4	1.01, 127.61	102.87	26.8 _a	72.5 _b	0.3 _c
Grade 5	1.01, 148.66	372.31	87.5 _a	12.3 _b	0.1 _c
Grade 6	1.00, 127.00	2916.21	98.0 _a	2.0 _b	0.0 _b

CR = Correct response; CL = Choice of the longer number; FE = Faulty equality. For each Category, the frequencies in the same row that do not share subscripts differ at $p < .001$ regarding the post hoc tests.

Further support to the impact of digit values (Hypothesis 1) was given by the fact that, when the digit values were neutral, third- and fourth-grade children tended to think that the numbers were equal. When the digit values were incongruent, they committed "choice of the longer" errors (e.g., the selection of 0.02 instead of 0.1), indicating that their decision were basing on the digit magnitude, irrespective of its place value. Fifth-grade children succeeded well in all the three categories, but still committed errors in the incongruent category.

It was also predicted (Hypothesis 2) that the impact of the digit values on performance would be stronger than the impact of the length. To test this hypothesis, the correct response rate for the incongruent condition was subtracted from the congruent ones for each factor separately. The impact of digit values was computed with the difference between Incongruent Length and Congruent Digit Value category and Incongruent Length and Digit Value category. The impact of the length was obtained by the difference between Congruent Length and Digit Value category and Incongruent Length and Congruent Digit Value. For each grade, paired sample t-tests showed that impact of digit value was stronger than impact of the length ($p < .001$ for Grades 3, 4 and 5; $p < .01$ for Grade 6), supporting Hypothesis 2.

3.3.4 The impact of zero

Some categories with a zero in the tenths position have been already described as part of the investigation of the impact of digit values (categories Neutral Digit Value1, Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Incongruent Length and Digit Value).

In what follows, the categories Incongruent Length and Congruent Digit Value, and Incongruent Length and Digit Value were not taken into account, because the impact of the zero cannot be distinguished from the impact of the digit values. Instead the focus was on the categories Neutral Digit Value1 (e.g., 0.1 vs. 0.01), Ending in a Zero (e.g., 0.2 vs. 0.10) and Ending in a Zero and Equal (e.g., 0.3 vs. 0.30). Differences between categories were expected depending on the position of the zero within the fractional part. In the category Neutral Digit Value1, children who did not properly understand the concept of place value as it relates to the zero would tend to consider the two decimals as equal, because the digit values were identical. Conversely, the decimals in the category Ending in a Zero and Equal would be seen as unequal if the child erroneously concluded that the zero at the end of the number modified the overall magnitude of the fractional part. In the same way, the participants could attribute an erroneous role to the zero in the category Ending in a Zero, leading to an incorrect choice of the larger number, even when the digit values are congruent with the correct decision.

In the category Neutral Digit Value1, third- and fourth-grade children frequently committed errors suggesting that they considered either that the zero had no effect (faulty equality) or that it contributed to the length of the decimal (choice of the longer number). In both cases, the digits were processed without taking into account the place-value of the zero. However, from Grade 5 onwards, children understood the use of the place-holder zero on the left (see Table 6).

In the categories Ending in a Zero and Ending in a Zero and Equal, there were three possible types of response. The first was choice of the longer number, which corresponded to an error in both the above categories. The second corresponded to the choice of the shorter number of the pair, which gave the correct response in the category Ending in a Zero, but an error in the category Ending in a Zero and Equal. The last possible response was the “equal” answer, which gave the correct response in the category Ending in a Zero and Equal, but a faulty equality in the category Ending in a Zero. Two-way repeated measures ANOVA was conducted on the frequencies of these responses within each category, with Response (choice of the longer number, choice of the shorter number, and faulty equality) as the within subjects factor and Grade (3 to 6) as the between subjects factor.

In the category Ending in a Zero, the Response $\times$ Grade interaction was significant, $F(3.01, 558.37) = 468.28$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .72$. As shown in Table 7 the types of response differed between them in all grades (in all cases $p < .001$), but the choice of the longer number was prevalent in Grades 3 and 4, whereas the choice of the shorter number (correct response) in Grades 5 and 6 (in all cases $p < .001$).

In the category Ending in a Zero and Equal, grade also interacted significantly with the type of response, $F(3.91, 726.31) = 560.35$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .75$. The types of response differed in all grades (in all cases $p < .001$).

Tabl. 7

Mean rates (in percent) and F values by grade of the type of response in the categories ending in a zero

	df	F	CR	CL	CS
Category Ending in a Zero (0.2 vs. 0.10)					
Grade 3	1.00, 156.03	1582.79	6.3 _a	93.5 _b	0.1 _c
Grade 4	1.00, 127.40	219.79	8.8 _a	91.0 _b	0.2 _c
Grade 5	1.00, 148.00	271.17	79.8 _a	20.2 _b	0.0 _c
Grade 6	1.01, 128.24	3331.89	97.5 _a	2.4 _b	0.1 _b
Category Ending in a Zero and Equal (0.1 vs. 0.10)					
Grade 3	1.20, 185.83	1384.10	6.1 _a	92.0 _b	1.0 _c
Grade 4	1.10, 140.12	565.77	8.8 _a	89.3 _b	1.1 _c
Grade 5	1.33, 197.05	186.86	79.7 _a	15.2 _{b*}	4.6 _{c*}
Grade 6	1.08, 137.54	6488.17	98.6 _a	0.5 _b	0.9 _b

CR = Correct response; CL = Choice of the longer number; CS = Choice of the shorter number. For each category, the frequencies in the same row that do not share subscripts differ at $p < .001$ (* $p < .05$) regarding the post hoc tests.

In brief, third- and fourth-grade children erroneously considered the decimal fractions ending in a zero as being bigger. Fifth-grade children performed much better with these two categories, but not all of them were yet convinced that the zero on the right had no impact. Only sixth graders consistently understood that the zero ending the decimal part had no impact. These results support Hypothesis 3.

3.3.5 Cluster analysis on the type of responses across categories

A two-step cluster analysis was conducted to determine groups of children who answered in a similar fashion. This two-step cluster analysis was conducted on the type of response given to the eighty items (i.e., pairs of decimal fractions). For each category, there were three types of response: the correct response, and two types of errors. Depending on the category, the possible errors were the following: (a) faulty equality; (b) choice of the longer number; (c) choice of the smaller number; (d) choice of the shorter number (see Table 6). In a first step, pre-clusters were identified. In a second step, the pre-clusters were grouped into the desired number of clusters by hierarchical clustering. A five-cluster solution emerged. The cluster analysis was repeated using random start points and yielded approximately the same solution, supporting the five-cluster solution. The type of response was analyzed for each child. In order to know if the three types of response appeared in equal proportions for the ten items of a category or if a type of response was significantly more frequent than others, chi-square tests were used. It appeared that a type of response could be considered as dominant when it appeared at least seven times on the ten items, $\chi^2(2, N = 10) = 6.21, p < .05$. In all other cases, responses were considered as incoherent. Table 6 reports the frequencies of the response type for each category as a function of cluster membership.

Tabl. 8

Frequencies of types of response for each category as a function of cluster membership

Category Neutral length (0.1 vs. 0.2)				
	CR	CM	FE	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	168	0	0	0
Cluster 2 ($n = 85$)	85	0	0	0
Cluster 3 ($n = 31$)	31	0	0	0
Cluster 4 ($n = 43$)	43	0	0	0
Cluster 5 ($n = 231$)	231	0	0	0
Category Congruent Length and Digit Value (0.1 vs. 0.20)				
	CR	CS	FE	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	168	0	0	0
Cluster 2 ($n = 85$)	85	0	0	0
Cluster 3 ($n = 31$)	18	8	0	5
Cluster 4 ($n = 43$)	41	0	0	2
Cluster 5 ($n = 231$)	230	0	0	1
Category Neutral Digit Value1 (0.1 vs. 0.01)				
	CR	CL	FE	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	0	0	150	18
Cluster 2 ($n = 85$)	0	74	4	7
Cluster 3 ($n = 31$)	23	1	1	6
Cluster 4 ($n = 43$)	22	3	2	16
Cluster 5 ($n = 231$)	231	0	0	0
Category Incongruent Length and Congruent Digit Value (0.2 vs. 0.01)				
	CR	CL	FE	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	162	3	0	3
Cluster 2 ($n = 85$)	31	38	0	16
Cluster 3 ($n = 31$)	30	0	0	1
Cluster 4 ($n = 43$)	38	1	0	4
Cluster 5 ($n = 231$)	231	0	0	0
Category Incongruent Length and Digit Value (0.1 vs. 0.02)				
	CR	CL	FE	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	0	168	0	0
Cluster 2 ($n = 85$)	0	85	0	0
Cluster 3 ($n = 31$)	20	5	0	6
Cluster 4 ($n = 43$)	23	16	0	4
Cluster 5 ($n = 231$)	231	0	0	0
Category Ending in Zero (0.2 vs. 0.10)				
	CR	CL	FE	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	4	158	0	6
Cluster 2 ($n = 85$)	1	84	0	0
Cluster 3 ($n = 31$)	21	6	0	4
Cluster 4 ($n = 43$)	0	40	0	3
Cluster 5 ($n = 231$)	230	0	0	1
Category Ending in Zero and Equal (0.3 vs. 0.30)				
	CR	CL	CS	IN
Cluster 1 ($n = 168$)	6	150	0	12
Cluster 2 ($n = 85$)	0	84	0	1
Cluster 3 ($n = 31$)	17	2	5	7
Cluster 4 ($n = 43$)	0	41	0	2
Cluster 5 ($n = 231$)	230	0	0	1

CR = Correct response, CM = Choice of the smaller, FE = Faulty equality, IN = Incoherent ,
 CS = Choice of the shorter, CL = Choice of the longer.

Cluster 1 comprised children who based their decision on the digit values (the larger digit or the whole fractional part), regardless of the place values. In Cluster 2, children tended to be influenced by the length of the fractional part, frequently selecting the longer number; these children were more incoherent in the category Incongruent Length

and Congruent Digit Value, indicating an interaction between the digit value and the length. Cluster 3 corresponded to children who gave correct responses in most cases but were slightly hesitant. Children of Cluster 4 were nearly expert. They responded correctly in all categories except for those ending in a zero (e.g., 0.2 vs. 0.10 and 0.3 vs. 0.30), where they misunderstood the meaning of the zero. Finally, Cluster 5 comprised participants who gave correct responses in all categories.

The cluster membership distribution in each grade differed significantly from the expected distribution as shown by a chi-square analysis (see Table 9). In Grade 3, $\chi^2(4, N = 156) = 123.75, p < .01$, the great majority of children (64%) belonged to Cluster 1, while 27% of them belonged to Cluster 2. In Grade 3, there were very few children who belonged to more advanced clusters, namely 1% to Cluster 3, 8% to Cluster 4, and 0% to Cluster 5. In Grade 4, $\chi^2(4, N = 128) = 64.92, p < .01$, the majority of children (48%) also belonged to Cluster 1, while 16% of them belonged to Cluster 2. Some fourth-grade children were nearly expert (16% to Cluster 4), hesitant expert (3% to Cluster 3) or expert (3% to Cluster 5). In Grade 5, $\chi^2(4, N = 149) = 146.50, p < .01$, Cluster 1 and 2 had almost disappeared. Most of the children by far were expert (72% to Cluster 5) or have a lot of correct responses (13% to Cluster 3; 7% to Cluster 4). In Grade 6, $\chi^2(4, N = 128) = 297.08, p < .01$, almost all the children were expert (Cluster 5: 95%).

Tabl. 9
Frequencies per grade of each cluster

	Grade 3	Grade 4	Grade 5	Grade 6
Cluster 1 (n = 168)	64	48	5	0
Cluster 2 (n = 85)	27	30	3	0
Cluster 3 (n = 31)	1	3	13	5
Cluster 4 (n = 43)	8	16	7	0
Cluster 5 (n = 231)	0	3	72	95

A large majority of third- and fourth-grade children based their decision exclusively on the digit values and belonged to Cluster 1, while about a quarter of them belonged to Cluster 2 and tended to be influenced by the length of the fractional part, frequently selecting the longer number. These results provided further support to Hypotheses 1 and 2 related to the impact of both length and digit values on children's performance. The responses of nearly expert children (Cluster 4) and hesitant expert (Cluster 3) confirm Hypothesis 4, related to the existence of intermediate levels of understanding.

3.4 Discussion

The present study investigated performances of children from Grade 3 to 6 in comparing pairs of decimal fractions, and how they evolved during learning. To the best of our knowledge, the current study is the first attempt to disentangle the impact of digit values from the impact of the length of the fractional part. The results showed that both length and digit values had an impact on the comparison of decimal fractions (Hypothe-

sis 1). The results provided also some pieces of evidence that the digit values influenced performance more strongly than the length difference in young children (Hypothesis 2). In addition, it appeared that a correct understanding of the role of the zero as a placeholder was only exhibited by older children (Hypothesis 3). Finally, intermediate levels of understanding between the prior conceptions about decimal fractions and the correct understanding were observed (Hypothesis 4).

Here after, the results relating to the initial conceptions of third- and fourth-grade children are discussed, and then the conceptions of fifth-grade and sixth-grade children. Results regarding the impact of the zero as a placeholder are discussed at the same time.

3.4.1 Initial conceptions about decimal fractions

Considering that the teaching of decimal fractions traditionally begins at the end of Grade 4 in Belgium, the analysis of children's performance at the beginning of Grade 3 and 4 has allowed us to investigate the initial conceptions about decimal fractions. These initial conceptions were not investigated in the past despite the fact that they have theoretical implications regarding the conceptual change theory and practical implications for mathematics teaching.

The results of the present study showed that children without formal knowledge of decimal fractions were mainly influenced by knowledge they use to process natural numbers, leading to a low level of correct responses. They were strongly affected by digit values in the fractional part: they only succeeded when the digit values were congruent with the correct decision. The length difference had also a weak but significant impact on their accuracy: they tended to think the longer number was also the larger in magnitude. Third and fourth graders also attributed to the zero the same role as for natural numbers. They erroneously judged that a zero in the tenths position had no impact and that a zero at the end of the fractional part had an impact on the number magnitude.

Cluster analysis has provided further evidence of the impact of both length and digit values on children's performance. A large majority of third and fourth graders based their decision exclusively on the digit values and belonged to Cluster 1, while about a quarter of them belonged to Cluster 2 and tended to be influenced by the length of the fractional part, frequently selecting the longer number. These findings also tend to support that digit values have more impact than length in younger children (Hypothesis 2).

3.4.2 Evolution of the conceptions about decimal fractions

Grade 5 children succeeded well in all categories, but were still affected by the digit values and the length of the decimal fraction. Fifth-grade children also had some difficulty with the role of the zero. They usually answered correctly with pairs which had a zero in the tenth position, although the digit values still had some impact. However, they

still tended to think that a number with a zero at the end of the fractional part was larger than one without it. In fact, these pairs were the most difficult for fifth graders. This suggests that a zero placed just after the decimal point is understood earlier than a zero at the end of the fractional part of the number. In brief, our results show that natural number conceptions still had an impact even for these older children who had more experience with decimal fractions.

However, they tended to choose the shorter number as the larger, the opposite pattern to younger children. It has previously been postulated that this effect is based on fractions knowledge (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985), and can be interpreted as an overgeneralization such as "a tenth is always bigger than a hundredth". In line with this view, we might suggest that this pattern arises because fifth-grade children have more experience with fractions than younger children, especially with the conversion between fractions and decimals. Another possibility is that these results reflect an overgeneralization by children who have learned that the longer decimal is not always the bigger and that decimal fractions differ from the natural numbers.

Cluster analysis has showed that the great majority of fifth-grade children were expert (Cluster 5) or have a lot of correct responses but were still hesitant for all pairs (Cluster 3) or treated erroneously only the pairs ending in a zero (Cluster 4). The results observed in Grade 5 could be interpreted as an interaction between the knowledge about the natural numbers and the knowledge about rational numbers. When confronted with decimal fractions (expressed in the place value system), children seem to apply both kinds of knowledge to the task.

By Grade 6, a ceiling effect was observed. Children showed only a weak facilitation effect for congruent digits, probably due to persistent conceptions based on natural numbers, and the length of the decimal had no effect on their performance. The progression between Grades 5 and 6 corresponded to an improvement in the most difficult categories, that is, sixth graders consistently understood that the zero ending the fractional part had no impact. This suggests that the understanding of decimal fractions becomes more precise at this stage of education. Furthermore, almost all the sixth-grade children were expert (Cluster 5) in this comparison task of decimal fractions.

3.4.3 Theoretical and practical implications

It has been proposed in the past that the selection of the number of which the fractional part is the smaller whole number as being the smaller number (e.g., $12.4 < 12.17$ because $4 < 17$) corresponds to an immature conception of decimal fractions, based on a knowledge of natural numbers (Rule 1 for Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). On the one hand, the current study fit well with the idea that the misconceptions of young children derive from their familiarity with natural numbers. The choice of the longer decimal as the larger is most probably due to

the fact that this strategy consistently yields the correct answer with natural numbers. In the same way, the impact of digit values is consistent with the children treating the fractional part as a natural number. On the other hand, whereas previous studies have not distinguished between the effect of digit values and of length, our findings demonstrate that both factors have an impact on children's conception about decimal fractions, before and during their formal learning. In addition, our cluster analysis showed that some children were exclusively influenced by digit value (Cluster 1) while others were more influenced by the length (Cluster 2).

With respect to fact that another misconception leads to the selection of the shorter number (Rule 2 for Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985, some children in Grade 5 tended to consider the shorter number as the larger number, resulting in a reverse effect of length relative to other children. It has been postulated that this rule is based on fractions knowledge, and can be interpreted as an overgeneralization such as "a tenth is always bigger than a hundredth". In line with this view, we might suggest that this pattern arises because fifth-grade children had more experience with fractions than younger children. Nevertheless, this erroneous strategy did not appear to characterize a particular group of children as the cluster analysis showed. This does not fit well with the frequency of this misconception reported in previous studies (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). The apparent conflict between our results and earlier studies is probably due to differences between countries in the organization of the curriculum. In countries where fractions are taught before decimals, such as Israel (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989) and the United States (Resnick et al., 1989), the frequency of this misconception was higher than in countries where decimal fractions expressed in the place-value system are taught before other fractions, such as France (Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). In countries where the teaching of decimal fractions expressed in the place-value system usually occurs at least a year after the teaching of fractions, we may suppose that it acts upon children's conception of decimal fractions. However, it is important to note that studies reporting a high frequency of the selection of the shorter number as being the bigger (Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989) involved explicit comparisons between fractions and decimal fractions. This could force the participants to translate from the place-value system to fractions, leading to unusual errors.

The impact of the zero within the fractional part could be related to the conception that the smaller number is the one of which the fractional part begins with zero (Rule 3 for Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). However, it appeared that this conception depends strongly on the digits used. Young children in Grades 3 and 4 were able to answer that the number which had a zero just after the decimal point was smaller when the digit value was congruent with the correct answer, but not when it was incongruent.

To conclude, the various conceptions described above need to be refined in the light of our results. It is necessary to control for and/or to manipulate the digit values and

the length so that we are sure about the children's conceptions. To that end, it is useful to be exhaustive in the kind of decimal fraction pairs being compared.

Considering that conceptual change theory has postulated that (a) learners have pre-conceptions which can constrain their learning; (b) the process of conceptual change is slow and gradual; and (c) intermediate levels of understanding can be observed (Vosniadou, 1994, 2002), the results are in line with the application of this approach to mathematics education. The results of the present study showed that initial conceptions of decimal fractions prior the formal teaching were based on both the digit values and the length of the fractional part. Cluster analysis showed that some young children have initial conceptions based exclusively on digit values (Cluster 1), while others are more influenced by the length (Cluster 2). It also appears that conceptions based on the length were less resistant to the teaching than those based on the digit values. However, both conceptions constrain the learning of decimal fractions. It was also observed that the learning of decimal fractions was slow and gradual and that intermediate levels of understanding exist. Before succeeding in the comparison of all pairs of decimal fractions (Cluster 5), some children have correct responses for some pairs, but not for the other more difficult pairs (Cluster 4), or are incoherent, sometimes succeeding in the comparison, sometimes not (Cluster 3). This could be related to synthetic models (Vosniadou, 1994), that is, to learners' attempts to reconcile the new concepts with their pre-existing ideas instead of making a radical reorganisation.

3.4.4 Conclusion

The present study has focused on decimal fractions expressed in the place value system. From a theoretical point of view, in mathematics, the set of decimals is not of the greatest interest. Nevertheless, it is the more convenient system for calculating with rational numbers and it is commonly used in daily life, for example to handle money. The results of the present study suggest that to help children to understand that conceptions based on natural numbers cannot automatically be applied to decimal fractions various pairs of decimal fractions should be presented to them. In particular, children should work with decimal fractions that are congruent, incongruent and neutral with respect to digit values and length. They should also work with decimal fractions including a zero just after the decimal point or at the end of the fractional part.

More generally, the learning of decimal fractions represents a situation among others in which a mathematical entity, here the number system, is extended. Previous studies have applied the conceptual change theory to other mathematical reorganizations, like extensions of number systems (Merenluoto & Lehtinen, 2002 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004 ; Stafylidou & Vosniadou, 2004) or extension of a mathematical symbol and the related operation (Prediger, 2008 ; Vlassis, 2004). Conceptual change in mathematics learning could appear each time when the new knowledge to be acquired comes in conflict with what is already known. In these cases, it is important for the maths teacher

to be careful of the prior conceptions of the students and to not expect immediate results after the instruction.

Further research in mathematics education would gain from the conceptual change approach and from the combination of this approach with other established theoretical frameworks in this field (see Prediger, 2008) like "epistemological obstacles" (Brousseau, 1998).

3.5 Addendum

The eighty pairs of decimal fractions.

Neutral Length

0.1	0.2
0.3	0.4
0.4	0.5
0.5	0.6
0.6	0.7
0.1	0.4
0.2	0.5
0.3	0.6
0.4	0.7
0.5	0.8

Neutral Digit Value1

0.1	0.01
0.2	0.02
0.3	0.03
0.4	0.04
0.5	0.05
0.6	0.06
0.7	0.07
0.8	0.08
0.9	0.09
0.3	0.03

Neutral Digit Value2

0.1	0.001
0.2	0.002
0.3	0.003
0.4	0.004
0.5	0.005
0.6	0.006
0.7	0.007
0.8	0.008
0.9	0.009
0.3	0.003

Congruent Length and Digit Value

0.1	0.20
0.3	0.40
0.4	0.50
0.5	0.60
0.6	0.70
0.1	0.40
0.2	0.50
0.3	0.60
0.4	0.70
0.5	0.80

Incongruent Length and Congruent Digit Value

0.01	0.2
0.03	0.4
0.04	0.5
0.05	0.6
0.06	0.7
0.01	0.4
0.02	0.5
0.03	0.6
0.04	0.7
0.05	0.8

Incongruent Length and Digit Value

0.1	0.02
0.3	0.04
0.4	0.05
0.5	0.06
0.6	0.07
0.1	0.04
0.2	0.05
0.3	0.06
0.4	0.07
0.5	0.08

Ending in Zero

0.10	0.2
0.30	0.4
0.40	0.5
0.50	0.6
0.60	0.7
0.10	0.4
0.20	0.5
0.30	0.6
0.40	0.7
0.60	0.9

Ending in Zero and Equal

0.1	0.10
0.2	0.20
0.3	0.30
0.4	0.40
0.5	0.50
0.6	0.60
0.7	0.70
0.8	0.80
0.9	0.90
0.8	0.80

Additional analysis

Response type has erroneously been considered as an independent variable in repeated measures ANOVA conducted to investigate the impact of the length of the fractional part (p. 69), the impact of the digit value (p. 71) and the impact of zero (p. 73).

Repeated measures ANOVAs were conducted for each response type with Category as the within subjects factor and Grade as the between subjects factor.

For the **impact of the length** of the fractional part, the categories Neutral Digit Value1 and Neutral Digit Value2 (e.g., 0.1 vs 0.01 and 0.1 vs. 0.001) were compared. For correct response, the main effect of Grade was significant, $F(3, 557) = 616.77$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .77$, showing that correct response rates increased with Grade ($p < .01$ between Grades 3 and 4, and between Grades 5 and 6, $p < .001$ for other comparisons). The main effect of Category, $F(1, 557) = 1.51$, $p > .05$, and the Category $\times$ Grade interaction, $F(3, 557) = 1.04$, $p > .05$, were not significant. For the choice of the longer response, the main effect of Category was significant, $F(1, 557) = 3.88$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .01$. The choice of the longer was more frequent for category Neutral Digit Value2 than for category Neutral Digit Value1. The main effect of Grade was also significant, $F(3, 557) = 49.83$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .21$, the choice of the longer significantly decrease from Grade 4, which did not differ from Grade 3, to Grade 5 ($p < .001$), which did not differ from Grade 6. The interaction between Category and Grade was not significant. For faulty equality response, the main effect of Category was significant $F(1, 557) = 5.75$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .01$, showing that faulty equality response was more frequent for category Neutral Digit Value1 than for category Neutral Digit Value2. The main effect of Grade was significant, $F(3, 557) = 124.64$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .40$, the faulty equality response frequency decrease from Grade 3 to Grades 5 ($p < .001$ for all comparisons). The interaction between Category and Grade was not significant. To sum up, a length difference of two digits did not result in a greater effect on correct response rates than a length difference of one digit, but led to more choice of the longer responses and less faulty equality responses.

The **impact of the digit value** was analyzed by comparing the categories Neutral Digit Value1 (e.g., 0.1 vs. 0.01), Incongruent Length and Congruent Digit Value (e.g., 0.2 vs. 0.01), and Incongruent Length and Digit Value (e.g., 0.1 vs. 0.02). For the choice of the longer response, the main effect of Category was significant, $F(1.51, 842.28) = 345.90$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .38$. Category Incongruent Length and Digit Value led to more choice of the longer response, than Neutral Digit Value1, which in turn led to more choice of the longer response than Incongruent Length and Congruent Digit Value ($p < .001$ for all comparisons). The main effect of Grade was also significant, $F(3, 557) = 226.90$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .55$, indicating that the frequency of the choice of the longer response did not differ between Grade 3 and Grade 4, or between Grade 5 and Grade 6, but decreased from Grade 4 to Grade 5. The Category $\times$ Grade interaction was significant, $F(4.54, 842.28) = 92.95$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .33$. The main effect of Category was significant in Grade 3, $F(1.71, 264.84) = 403.90$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .72$, in Grade 4, $F(1.54, 195.36) = 84.93$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .40$, and in Grade 5, $F(1.07, 157.96) = 11.12$, $p = .001$, partial $\eta^2 = .07$, but not in Grade 6, $F(1.44, 182.74) = 1.28$, $p > .05$. In Grades 3 et 4, the category Incongruent Length and Digit Value led to more choice of the longer response than category Neutral Digit Value1, which in turn led to more choice of the longer response than category Incongruent Length and Congruent Digit Value ($p < .001$ for all comparisons), indicating that third- and fourth-grade children committed choice of the longer response when the digit value was incongruent or neutral than when it was congruent. The same pattern was observed in Grade 5 ($p = .001$ between the categories Incongruent Length and Digit Value, and Neutral Digit Value1, $p = .05$ between Neutral Digit Value1 and Incongruent Length and Congruent Digit Value). For the faulty equality response, the main effect of Category was significant, $F(1.01, 561.58) = 468.86$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .46$. The Neutral Digit Value1 category led to more faulty equality responses than the two others categories. The main effect of Grade was significant, $F(3, 557) = 128.66$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .41$. The frequency of the faulty equality response increased from Grade 3 to Grade 5 ($p < .01$ for the

comparison between Grade 3 and Grade 4, $p < .001$ for other comparisons) and did not differ between Grades 5 and 6. The interaction between Grade and Category was also significant, $F(3.03, 561.58) = 124.52$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .40$. The main effect of Category was significant in Grade 3, $F(1.01, 156.88) = 364.75$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .70$, in Grade 4, $F(1.00, 127.51) = 156.57$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .55$, and in Grade 5, $F(1.01, 149.37) = 15.79$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .10$, indicating in all grades the same pattern than describe here above, but was not significant in Grade 6. These analysis did not lead to different conclusions than those presented on page 72.

For the **impact of zero**, the categories Ending in a Zero (e.g., 0.2 vs. 0.10) and Ending in a Zero and Equal (e.g., 0.2 vs. 0.20) were taken into account. For the correct response, the main effect of Category was significant, $F(1, 557) = 5.21$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .01$, the category Ending in a Zero leading to higher correct response rates than the category Ending in a Zero and Equal. The main effect of Grade was significant, $F(3, 557) = 802.67$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .81$, showing that the correct response rate increased from Grade 3 to Grade 6 ($p < .01$ between Grade 3 and 4, $p < .001$ for other comparisons). The Grade $\times$ Category interaction was also significant, $F(3, 557) = 2.62$, $p = .05$, partial $\eta^2 = .01$, showing that the main effect of Category was significant in Grade 4, $F(1, 127) = 10.46$, $p < .01$, partial $\eta^2 = .08$, but was not significant in Grade 3, $F(1, 155) < 1$, $p > .05$, in Grade 5, $F(1, 148) < 1$, $p > .05$, or in Grade 6, $F(1, 127) < 1$, $p > .05$. For the choice of the longer response, the main effect of Category was not significant, but the main effect of Grade was significant, $F(3, 557) = 833.67$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .82$, as well as the interaction between Category and Grade, $F(3, 557) = 2.84$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .02$. The frequency of the choice of the longer decreased with grade ($p < .05$ for the comparison between Grades 3 et 4, $p < .001$ for other comparisons). The effect of Category was not significant in Grade 3, $F(1, 155) = 1.82$, $p > .05$, in Grade 5, $F(1, 148) < 1$, $p > .05$, and in Grade 6, $F(1, 127) = 2.24$, $p > .05$, but was significant in Grade 4, $F(1, 127) = 6.92$, $p = .01$, partial $\eta^2 = .05$. These analysis did not lead to different conclusions than those presented on page 73.

Chapter 4

Understanding decimal vs. fraction notation

*Abstract*¹

The learning of rational numbers represented as the ratio of two integers ($1/2$) or in a decimal form (0.5) is notoriously hard for children. Recent research indicated that children and adults processed differently fraction notation and decimal notation, but no studies investigated the development of fraction and decimal notation. In the present study, the development of three notation formats was investigated. Children from Grade 3 to Grade 6 performed a comparison task across fraction, decimal fraction and decimal notation conditions. Results showed that, before the teaching of decimals, the fraction notations led to higher correct response rates than decimal. From Grade 5, the reverse pattern is observed. Furthermore, equivalent fractions were first better performed than equivalent decimals, but from Grade 5, the equivalence is better understood in the decimal notation. From these results, we conclude that the fraction notation of rational numbers is mastered later than the decimal notation.

1. This research has been conducted in collaboration with Jacques Grégoire and has been submitted as "Decimal notation of rational numbers is easier to understand than fraction notation".

4.1 Introduction

In the 19th century, Howard (1887, cited by Irwin, 2001) stated that “the system of decimal fractions is so eminently simple that when it is generally understood it will entirely displace the clumsy system of common fractions”. The decimal notation of rational numbers (for instance, 0.5) is more convenient for calculations than the fraction notation (for instance, $1/2$), $0.4 + 0.25$ is easier to calculate than $2/5 + 1/4$. The decimal notation of rational numbers was therefore introduced in daily life (Stevin, 1585). But, does it mean that the decimal notation would be mastered easier and earlier than the fraction notation during the development? Mastering fraction notation is notoriously difficult for children (e.g., Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984 ; Post, 1981 ; Stafylidou & Vosniadou, 2004 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2010)

In a recent national assessment (Administration générale de l’enseignement et de la recherche scientifique, 2011), only 56% of Grade 5 children succeed in shading $2/3$ of a disc portioned in six parts. These difficulties contrast with performance on tasks that do not involve fraction notation. It has been showed that proportional reasoning involving continuous quantities develops as early as the preschool years. Five-year-old children were able to made accurate proportional judgments (Singer-Freeman & Goswami, 2001 ; Sophian, 2000 ; Sophian, Garyantes, & Chang, 1997). They also showed high ability when adding or subtracting fractional parts of areas (Mix, Levine, & Huttenlocher, 1999). Therefore, one source of the low performances with fractions may be a difficulty in acquiring understanding of written notation for fractions (Hiebert, 1988). Other studies have shown that children have also difficulties with decimal notation (Desmet, Grégoire, & Mussolin, 2010 ; Nesher & Peled, 1986 ; Resnick et al., 1989 ; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). However, children seemed to use different ways to think about fraction notation and decimal notation and considered different notations of the same number as if they were different numbers (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). For instance, a ninth grader who thinks that there are 9 numbers between 0.005 and 0.006, thinks that if he turns them into fraction notation, he can find infinitely many numbers in between, referring to the infinite representation of one single fraction. The property of density could thus be easier to understand when numbers are presented in fraction notation than when they are presented in decimal notation. In contrast, it has been suggested that decimal notation is easier to understand than fraction notation in other tasks (Schneider & Stern, 2010). Fifth and sixth graders showed relatively good performance in both decimal numbers comparison (87%) and number-line estimation (86%) tasks. In the same line, fraction notation led to more errors and longer reaction times than decimal notation in two number line estimation tasks (from number to position, and from position to number) in sixth graders and even in adults (Iuculano & Butterworth, 2011). However, to the best of our knowledge, no studies investigated the development of fraction notation and decimal notation in younger children, before and just after the formal teaching of decimal fractions.

In the present study, we aim to investigate the age-related changes in rational numbers processing using three notation formats: decimal (for instance, 0.5), decimal fraction ($5/10$) and fraction ($1/2$) notations. In the French community of Belgium, the ability to partition objects (like blocks) in two or four equal-sized subparts is trained from Kindergarten years. From Grade 1, children learned to partition objects, figures, or discrete collections in two or four parts and to express the part-whole relation with “half” or “quarter”. From Grade 3, other partitioning are taught and the fraction notation is taught ($\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$...). From Grade 4, decimal fractions and decimals are taught.

4.2 Method

4.2.1 Participants

Participants were 181 children of Grade 3 (97 boys; mean age 8;10, $SD = 5$ months), 181 children of Grade 4 (90 boys; mean age 9;10, $SD = 6$ months), 177 children of Grade 5 (86 boys; mean age 10;11, $SD = 6$ months), 201 children of Grade 6 (96 boys; mean age = 11;9, $SD = 6$ months). Children came from different schools of the French-speaking community of Belgium. These schools represented various socio-economic groups, but the sample is only representative and voluntary, not randomly selected. Exclusionary criteria concern children who repeated any Grade and children with learning disabilities.

4.2.2 Task

Children were asked to complete a paper and pencil task including 16 pairs of numbers across three notation conditions: Fraction, Decimal Fraction and Decimal. For instance, $[1/2]$ vs. $[1/4]$ was presented in Fraction ($1/2$ vs. $1/4$), Decimal Fraction ($5/10$ vs. $25/100$) and Decimal (0.5 vs. 0.25) notation. For each notation condition, the numbers of each pair were either equal (8 items) or unequal (8 items). Equal pairs were, for instance, $1/2$ vs. $2/4$ in Fraction; $5/10$ vs. $50/100$ in Decimal Fraction; or 0.5 vs. 0.50 in Decimal notation. All pairs were presented in Appendix (see p. 92).

4.2.3 Procedure

The three notations were presented in three separate blocks. Four orders for the blocks of notation condition were used: (a) Fraction-Decimal-Decimal Fraction, (b) Decimal-Decimal Fraction-Fraction, (c) Decimal Fraction-Decimal-Fraction or (c) Decimal-Fraction-Decimal Fraction. The order of the blocks was counterbalanced across participants. The pairs of numbers were pseudo randomized within each block. The position of the correct response, as well as the position of numbers including more digits when the numbers were equals, were counterbalanced across the pairs. The child was asked

to “circle the larger number or to place an equals sign between them if the numbers are the same in value”. During April, children performed the tasks individually in their classrooms. The tasks were administrated without time constraint. Children all took less than twenty minutes.

4.3 Results

For each participant, the accuracy for equal or unequal pairs in each notation condition was computed as the mean rate of correct responses. The mean accuracy for equal and unequal pairs in each notation condition appears in Table 1. Cronbach’s alpha shows that the conditions have good reliability and internal consistency.

Tabl. 1

Scale reliabilities (Cronbach’s α) and mean rates (in percent) of correct response by grade for equal and unequal pairs in Fraction, Decimal Fraction and Decimal notation.

Notation	Example of pair	α	Grade 3	Grade 4	Grade 5	Grade 6	Mean rates
Fraction			11.6 (23)	49.9 (38)	61.7 (35)	85.5 (22)	53.1 (40)
Equal	1/2 vs. 2/4	.94	8.8 (21)	42.7 (40)	54.5 (39)	83.6 (25)	48.4 (42)
Unequal	1/2 vs. 1/4	.97	14.4 (32)	57.2 (44)	68.9 (41)	87.5 (26)	57.8 (45)
Decimal Fraction			12.6 (24)	45.2 (39)	69.3 (33)	88.9 (20)	54.9 (41)
Equal	50/100 vs. 5/10	.98	11.7 (28)	47.9 (45)	75.4 (38)	91.9 (22)	57.7 (46)
Unequal	10/100 vs. 5/10	.96	13.4 (28)	42.5 (44)	63.2 (40)	85.8 (27)	52.2 (44)
Decimal			6.8 (15)	33.9 (38)	79.3 (28)	92.4 (16)	54.2 (43)
Equal	0.5 vs. 0.50	.98	5.9 (21)	39.8 (45)	88.4 (26)	96.5 (24)	58.6 (47)
Unequal	0.5 vs. 0.25	.97	7.7 (20)	28.1 (39)	70.3 (37)	88.4 (25)	49.7 (45)
Mean			10.3 (17)	43.0 (32)	70.1 (28)	88.9 (17)	

Five-way repeated measures ANOVA was conducted on the correct response rates with the Notation (Fraction - Decimal Fraction - Decimal) and the Type (Equal - Unequal) as the within subjects factors and the Order (1-4), the Gender (Boy - Girl) and the Grade (3-6) as the between-subjects factors.

A first ANOVA revealed that the main effect of Order was not significant ($F(3, 708) = 0.47$), did not interact with Notation ($F(5.54, 1306.57) = 1.14$), Grade ($F(9, 708) < 1$) or Gender ($F(3, 708) = 1.54$)². Order was not retained for further analysis.

A second ANOVA was conducted with the Notation and the Type as the within subjects factors, and the Gender and the Grade as the between-subjects factors. The main effects of Gender ($F(1, 732) = 32.14$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .04$) and Grade ($F(3, 732) = 403.31$, $p < .001$, partial $\eta^2 = .62$) were significant. The correct response rates increased with Grade (in all cases, $ps < .001$). The mean of correct responses was higher for the boys (58.5%) than for the girls (47.8%). The Gender $\times$ Grade interaction was

2. The effect of Gender interacted with Type ($F(3, 708) = 3.12$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .01$). The accuracy for equal pairs did not differ from the accuracy for unequal pairs, except for the second order (b), where Decimal were presented before Decimal Fraction, in turn presented before Fraction.

significant, indicating that boys and girls did not differ in Grade 3, but did well in Grade 4 ($p < .001$), Grade 5 ($p < .05$) and Grade 6 ($p < .01$). The Gender also interacted significantly with the Notation ($F(1.85, 1355.57) = 5.03, p < .01, \eta^2 = .01$). Boys and girls differed for Fraction ($p < 0.001$) and Decimal Fraction ($p < 0.05$) notations, but not for Decimal notation.

Neither the main effect of Notation ($F(1.85, 1355.57) = 1.70$), nor the main effect of Type ($F(1, 732) = 3.19$) was significant. More important, the interaction between Notation, Type and Grade was significant ($F(5.87, 1386.02) = 10.15, p < .001, \eta^2 = .04$), including the Notation $\times$ Type ($F(1.96, 1386.02) = 86.50, p < .001, \eta^2 = .11$), Notation $\times$ Grade ($F(5.54, 1306.57) = 23.43, p < .001, \eta^2 = .09$) and Type $\times$ Grade ($F(3, 708) = 3.06, p < .05, \eta^2 = .01$) interactions.

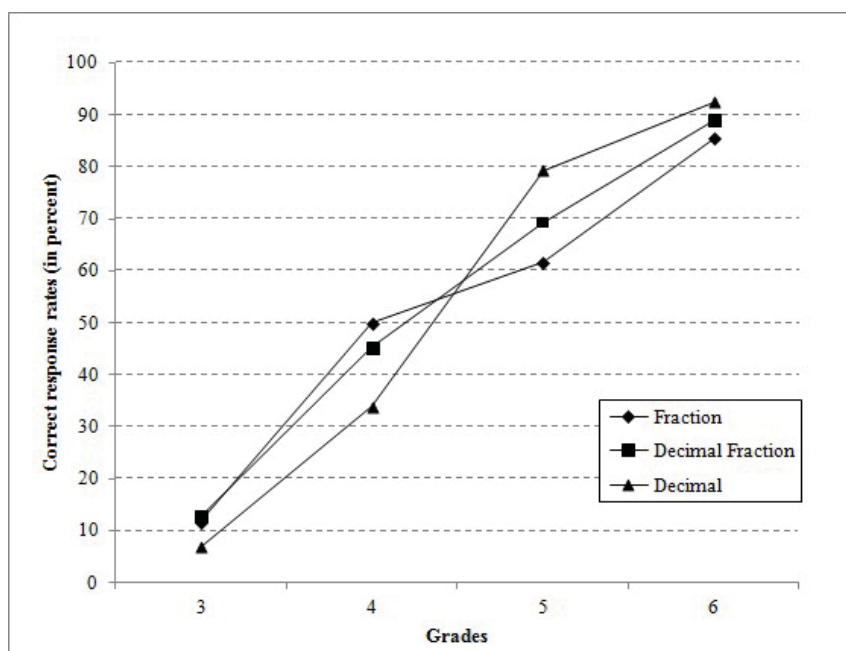


Fig. 1. Mean rates (in percent) of correct response by grade in Fraction, Decimal Fraction and Decimal notation.

To further investigate this interaction, two-way repeated measures ANOVAs were conducted by Grade with the Notation (Fraction - Decimal Fraction - Decimal) and the Type (Equal - Unequal) as the within-subject factors.

In Grade 3, the main effect of Notation was significant ($F(1.71, 308.23) = 7.26, p < .01, \eta^2 = .04$), revealing that the accuracy was lower for Decimal notation than for the two other formats ($p < 0.05$ for comparison with Fraction, $p < 0.01$ for comparison with Decimal Fraction). The main effect of Type was not significant ($F(1, 180) = 3.23$). The Notation $\times$ Type interaction was not significant ($F(1.79, 321.25) = 1.62$).

In Grade 4, the pattern was similar to the pattern observed in Grade 3. The main effect of Notation was significant ($F(2.66, 330.87) = 18.42, p < .001, \eta^2 = .09$). Fraction and Decimal Fraction notations did not differ and led to higher correct response

rates than Decimal notation ($p < 0.001$ for all comparisons). The main effect of Type was not significant ($F(1, 180) < 1$). However, the Notation $\times$ Type interaction was significant ($F(1.97, 355.14) = 29.57, p < .001, \eta^2 = .14$). Equal pairs led to lower correct response than unequal pairs in Fraction Notation ($p < 0.001$), while the reverse is true for Decimal notation ($p < 0.001$). For Decimal Fraction notation the correct response rates for the two types of pairs did not differ.

In Grades 5 and 6, the pattern was rigorously the same. The main effect of Notation was significant (Grade 5 ($F(1.79, 314.29) = 35.13, p < .001, \eta^2 = .17$). Grade 6 ($F(1.97, 397.09) = 14.83, p < .001, \eta^2 = .07$)), showing that Fraction notation led to lower correct response rates than Decimal Fraction ($p < 0.001$ in Grade 5, $p < 0.05$ in Grade 6) and that Decimal notation led to the highest correct response rates ($p < 0.001$ for all comparisons in Grade 5. In Grade 6, $p < 0.001$ for comparison with Fraction, $p = 0.01$ for comparison with Decimal Fraction). The main effect of Type was also significant (Grade 5 ($F(1, 176) = 6.20, p < .05, \eta^2 = .03$). Grade 6 ($F(1, 202) = 7.21, p < .01, \eta^2 = .03$)), indicating that equal pairs were easier than unequal pairs. The Notation $\times$ Type interaction was also significant in both grades ($F(1.97, 344.31) = 52.25, p < .001, \eta^2 = .23$ in Grade 5, $F(1.97, 398.08) = 17.08, p < .001, \eta^2 = .08$ in Grade 6). Equal pairs led to lower performance in Fraction notation ($p < 0.001$ in Grade 5, $p < 0.05$ in Grade 6), but to higher performance in Decimal Fraction ($p < 0.001$ in Grade 5, $p < 0.01$ in Grade 6) and Decimal notation ($p < 0.001$ in Grade 5 and 6).

4.4 Discussion

In the present study, we investigated performances in comparison of rational numbers across three different notation, in children from Grade 3 to Grade 6. Prior research has consistently shown that the understanding of both fraction and decimal notations are difficult for children and even for adults. It has also been suggested that decimal and fraction notations could be treated using different ways. However, current findings are mixed depending on the task. Our results showed that, whatever the notation format, the mean of correct responses was lower than 13% in Grade 3 and lower than 50% in Grade 4. A closer look at the data indicated that fraction and decimal fraction notation led to higher accuracy than decimal notation in both grades. From Grade 5, the reverse pattern was observed. Decimal notation led to a higher rate of correct responses than decimal fraction, which in turn led to a higher level of correct response than fraction notation. The mean of correct responses for each notation was above 61% in Grade 5 and above 85% in Grade 6.

Before the teaching of decimals, children seemed to better understand the fraction and decimal fraction notations than the decimal notation. This is probably due to the teaching of some simple fractions, for instance $1/2$ and $1/4$, starting in Grade 2 and to

the use of these items in the fraction notation block. From Grade 5, after the teaching of decimals from the end of Grade 4, the comparison was better performed in the decimal notation than in the two other notations. This finding is in line with the fact that even for adults decimal notation is more accurate than fraction notation in number lines tasks (Iuculano & Butterworth, 2011). The curriculum is partially confounded with the development, but the difference between decimal and fraction notation remained in Grade 6, when decimals and fractions have been equivalently taught, and even in adults (Iuculano & Butterworth, 2011). Another plausible explanation would be that decimals are more used in daily life than fractions and that this use in daily life makes the understanding of decimals easier, but it is a circular reasoning. More probably, and historically, the use in daily life results from the facility to operate with decimals.

From Grade 5, decimal fractions were also better understood than other fractions. This could be due to the fact that this notation could easily be transcoded in decimal notation, which seemed to be better understood. For instance, 0.2 vs. 0.25 is easier to compare than $2/10$ vs. $25/100$.

Regarding the comparison between equal and unequal pairs, it appeared that equal pairs were more difficult than unequal pairs in fraction notation but not in decimal notation for fourth graders. It is easier to understand for young children that $1/2 = 2/4$, than $0.5 = 0.50$. The decimal parts ending in a zero is actually erroneously considered as being bigger by fourth graders (Desmet et al., 2010). The fact that the zero on the right had no impact on the magnitude of the number is understood from Grade 5 only. For fifth and sixth graders, equal pairs were easier than unequal pairs in decimal notation. Children have understood that the zero ending the decimal part had no impact. Equal pairs were easier than unequal pairs in decimal fraction notation, giving further support to a prospective transcoding between decimal fraction and decimals. Equivalence was still difficult in fraction notation for older children. This is in line with previous studies showing that the concept of fraction equivalence is laborious for children (Ni, 2001).

Results also indicated that the gender had an impact on the understanding of decimals and fractions. These results contrast with meta-analytic findings indicating that boys and girls did not differ in math achievement (Hyde, Lindberg, Linn, Ellis, & Williams, 2008). Other meta-analytic studies of gender differences showed that girls tend to report higher anxiety and lower self-concept about their math abilities (Else-Quest, Hyde, & Linn, 2010 ; Hyde, Fennema, & Lamon, 1990 ; McGraw, Lubinski, & Strutchens, 2006 ; Muzzatti & Agnoli, 2007). It is thus possible that the gender effect observed here is due to the fact that girls experienced more anxiety than boys with fractions, but not with decimals, and consequently performed lower than boys for fraction notations.

To conclude, fraction notation could be more difficult to understand, or at least to be mastered later than the decimal notation. It suggests that the use of fraction for the teaching of decimals (Glasgow et al., 2000 ; Lachance & Confrey, 2001 ; Moss & Case, 1999) corresponds to built on weak foundations.

4.5 Appendix

The sixteen pairs of numbers in the three notation conditions.

	Fraction		Decimal Fraction		Decimal	
Unequal	$\frac{25}{100}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0.5	0.25
	$\frac{5}{10}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0.5	0.20
	$\frac{125}{100}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0.5	0.125
	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0.10	0.5
	$\frac{25}{100}$	$\frac{125}{1000}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0.125	0.25
	$\frac{2}{10}$	$\frac{125}{1000}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	0.125	0.2
	$\frac{2}{10}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	0.10	0.2
	$\frac{5}{10}$	$\frac{375}{1000}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	0.375	0.5
Equal	$\frac{50}{100}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	0.5	0.50
	$\frac{250}{1000}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	0.250	0.25
	$\frac{20}{100}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	0.2	0.20
	$\frac{50}{100}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	0.50	0.5
	$\frac{500}{1000}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}$	0.5	0.500
	$\frac{5}{10}$	$\frac{500}{1000}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$	0.500	0.5
	$\frac{75}{100}$	$\frac{750}{1000}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	0.75	0.750
	$\frac{4}{10}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$	0.40	0.4