

RELAZIONE FINALE SUL CONTRATTO DI LAVORO A PROGETTO

RASSEGNA CRITICA DI MODELLI COSTITUTIVI PER IL CALCESTRUZZO IMPLEMENTATI IN PROGRAMMI DI CALCOLO COMMERCIALI

ING. LUCA SGAMBI

DIPLOMATO PRESSO LA S.S.C.A. "F.LLI PESENTI" DEL POLITECNICO DI MILANO

LUCA.SGAMBI@UNIROMA1.IT - SGAMBI@STRU.POLIMI.IT

DICEMBRE 2004

INDICE

SOMMARIO	3
CAPITOLO 1 – Richiami sui legami costitutivi del calcestruzzo indurito	5
1.1 Introduzione	6
1.2 Comportamento a compressione uniassiale	7
1.3 Comportamento a trazione uniassiale	9
1.4 Resistenza in stati tensionali pluriassiali	11
1.4.1 Risultati sperimentali	11
1.4.2 Il criterio di rottura di Ottosen	13
1.5 Le teorie di Vecchio e Collins: C.F.T. e M.C.F.T.	16
1.5.1 Introduzione	16
1.5.2 La Compression Field Theory (C.F.T.)	17
1.5.3 La Modified Compression Field theory (M.C.F.T.)	24
1.6 Non obiettività della mesh e tecniche di regolarizzazione	31
1.7 Interfacce utente dei codici di calcolo commerciali	33
CAPITOLO 2 – Analisi di alcuni tra i più diffusi codici di calcolo commerciali	37
2.1 Introduzione	38
2.2 Codice di calcolo: ADINA	39
2.3 Codice di calcolo: ALGOR	48
2.4 Codice di calcolo: ANSYS	50
2.5 Codice di calcolo: LUSAS	57
2.5.1 Damage Models	60
2.5.2 Multi-Crack Concrete Model	64
2.6 Codice di calcolo: SAP2000	69
2.7 Codice di calcolo: STRAUS7	71
CAPITOLO 3 – ESEMPI DI APPLICAZIONE	73
3.1 Introduzione	74
3.2 Applicazioni col codice di calcolo ADINA	75
3.2.1 Prove numeriche preliminari	78
3.2.2 Analisi di una trave di copertura <i>shed</i>	82
3.3 Applicazioni con il codice commerciale LUSAS	87
CONCLUSIONI	90
BIBLIOGRAFIA	93

SOMMARIO

CAPITOLO 1

Vengono presentate alcune tra le più importanti caratteristiche del comportamento del calcestruzzo indurito, richiamando alcune tra le più note formulazioni. In particolare la formulazione di Ottosen per il regime tensionale pluriassiale e gli studi di Vecchio e Collins sui comportamenti in campo non lineare di membrane in calcestruzzo armato. Si accenna a problemi specifici della modellazione di strutture in campo non lineare come la localizzazione del danno, e alle tecniche volte a risolvere il problema. Il capitolo si chiude con un accenno alle possibilità di interfaccia dei codici di calcolo moderni con codici utente scritti in opportuni linguaggi di programmazione.

CAPITOLO 2

Si esaminano le possibilità offerta da 6 tra i più diffusi codici di calcolo commerciali nell'analisi di strutture in calcestruzzo armato in campo non lineare. Vengono analizzati i legami costitutivi appartenenti a: ADINA, ALGOR, ANSYS, LUSAS, SAP2000, STRAUS7. Si mette in particolar modo in evidenza l'usabilità di legami costitutivi specifici in accoppiamento a particolari tipologie di elementi finiti, nonché la presenza o meno di tecniche di regolarizzazione del danno.

CAPITOLO 3

Si mostrano alcune applicazioni eseguite con i codici ADINA e LUSAS evidenziandone le potenzialità sia nell'analisi che nella progettazione di strutture in calcestruzzo armato.

CONCLUSIONI

Vengono raccolte le conclusioni del lavoro.

BIBLIOGRAFIA

Si riportano gli studi reperibili in letteratura sui legami costitutivi per il calcestruzzo e sulle metodologie di analisi numerica.

CAPITOLO 1

RICHIAMI SUI LEGAMI COSTITUTIVI DEL CALCESTRUZZO INDURITO

1.1 Introduzione

Si consideri un provino di calcestruzzo: ancor prima di sottoporlo ad una prova di carico qualsiasi, il materiale si presenta fessurato. Il processo chimico - fisico che provoca l'idratazione delle particelle di cemento ed il successivo indurimento dell'impasto, non dà luogo ad una matrice compatta, perfettamente aderente agli inerti ma piuttosto ad un reticolo disordinato di aghi di cemento idratato (C-S-H) che aderisce in maniera non perfetta agli inerti e che lascia al suo interno degli spazi (porosità) che possono contenere particelle di aria o di acqua.

Il comportamento del materiale calcestruzzo, come quello di ogni materiale, è profondamente dipendente dalla sua costituzione fisica. In questo caso il regime microfessurato del materiale ne influenzerà le caratteristiche meccaniche, evidenziando una dissimmetria di comportamento nella risposta del materiale a seconda se è soggetto a carichi di compressione o a carichi di trazione.

Nei paragrafi successivi del capitolo si esaminerà il comportamento del calcestruzzo indurito sottoposto a:

- compressione uniassiale
- trazione uniassiale
- stati tensionali pluriassiali

Si esamineranno inoltre alcuni dei più famosi legami costitutivi per il materiale calcestruzzo e gli studi fondamentali eseguiti da Vecchio e Collins dell'università di Toronto per mettere in luce il comportamento membranale del calcestruzzo armato e poterlo riprodurre con un elaboratore elettronico.

1.2 Comportamento a compressione uniassiale

Un provino di calcestruzzo, come si è accennato nel paragrafo precedente, possiede al suo interno un insieme di microfessure localizzate per la maggior parte lungo l'interfaccia tra la matrice cementizia indurita e gli inerti. Essendo il modulo della matrice cementizia minore dal modulo di rigidità degli inerti, anche se il provino è sottoposto ad uno stato di compressione uniassiale ed uniforme, a livello locale nasce uno stato tensionale pluriassiale e non uniforme. In particolare, in direzione normale al carico si sviluppa un sistema di tensioni di trazione e di compressione complessivamente autoequilibrato. Aumentando il carico di compressione, si osservano nella risposta le seguenti fasi [48].

Per ($0.00 = s/f_c = 0.30$) l'andamento delle deformazioni è pressoché lineare. Lo stato di microfessurazione preesistente al carico resta praticamente invariato e l'energia interna disponibile è inferiore a quella richiesta per la propagazione della frattura a livello microscopico. Il valore $s = 0.30 f_c$, viene difatti indicato come valore soglia per il comportamento elastico del materiale [39].

Per ($0.30 = s/f_c = 0.50$) le microfessure già esistenti iniziano ad accrescersi e a propagarsi a causa delle concentrazioni tensionali localizzate. In questo intervallo di valori di (s/f_c), l'energia interna è confrontabile con quella che si rilascia in fase di frattura. Il processo di propagazione delle fessure è stabile e le stesse risultano distribuite in modo pressoché uniforme all'interno del provino.

Per ($0.50 = s/f_c = 0.70$) le microfessure si accrescono ed iniziano a collegarsi tra loro. Si nota sperimentalmente che, mantenendo il livello di carico costante, le fessure continuano a propagarsi per un determinato periodo, con velocità decrescente, sino a raggiungere una configurazione finale.

Per $s/f_c \sim 0.80$ l'energia interna immagazzinata risulta maggiore di quella rilasciata in fase di frattura. Per tensioni superiori, anche se si mantiene il livello del carico costante, la fessurazione progredisce con un incremento di velocità ed il sistema diventa instabile. Il

valore $s/f_c = 0.80$ viene assunto quale indicatore di soglia per la propagazione instabile delle fratture.

La Figura 1 mostra le varie fasi descritte in termini di deformazione longitudinale (e_l), deformazione trasversale (e_t) e deformazione volumetrica ($e_v = e_l + e_2 + e_3$).

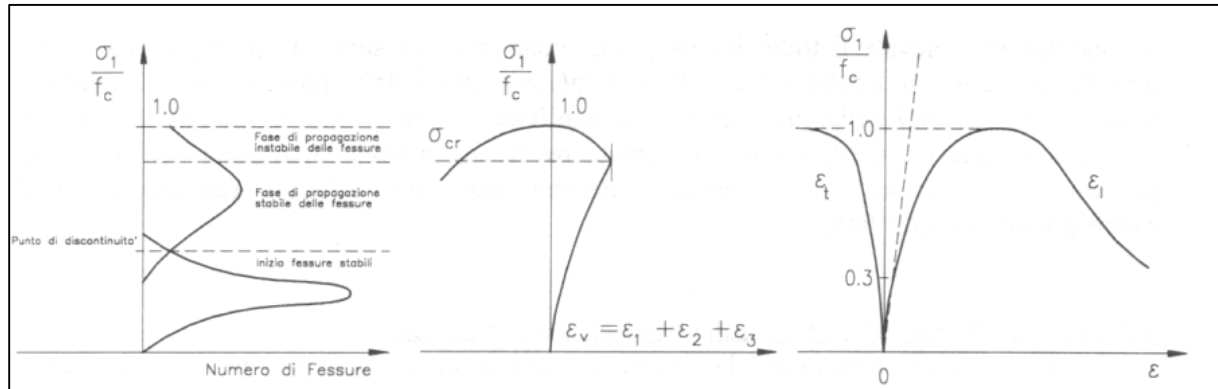


Figura 1: Stadi fessurativi del calcestruzzo [18, 21].

Si noti che il valore $s/f_c = 0.80$ rappresenta anche un valore di soglia per l'andamento della deformazione volumetrica, la quale diminuisce con andamento quasi lineare sino a questo livello di tensione, dopodiché aumenta sino a cambiare segno.

La forma della curva $s = s(e)$ rimane pressoché simile per calcestruzzi a bassa, media ed alta resistenza. La forma di tali curve è strettamente legata all'evoluzione del processo di microfessurazione all'interno del provino. I calcestruzzi ad alta resistenza possiedono in genere un tratto iniziale, con andamento prossimo al lineare, più esteso ed un comportamento ultimo più fragile.

1.3 Comportamento a trazione uniassiale

La conoscenza del comportamento del calcestruzzo a trazione ha grande importanza perché da esso dipendono i meccanismi in base ai quali si sviluppano i comportamenti deformativi degli elementi strutturali a flessione, taglio e torsione. L'analisi sperimentale del comportamento del calcestruzzo a trazione è però più complessa, e per determinarne le caratteristiche di resistenza vengono utilizzate sia prove dirette che prove indirette.

Anche in trazione la non omogeneità del materiale e la presenza di microfessure all'interfaccia tra gli inerti e la matrice cementizia, influenzano in modo determinante il comportamento meccanico del calcestruzzo.

L'applicazione di uno stato tensionale monoassiale ed uniforme di trazione, non dà luogo ad una crescita significativa della microfessurazione sino ad un'intensità del carico pari a circa il 70% della resistenza a trazione. Sino a questo livello del carico il diagramma tensioni-deformazioni si mantiene pressoché lineare.

Con l'aumentare del carico, il sistema microfessurativo inizia a propagarsi. Alcune fessure di maggiore estensione sviluppano una zona cosiddetta di processo, consistente in un sistema di microfessure più o meno parallele tra loro, ma discontinue e normali alla direzione del carico. L'estensione della zona di processo è, nella maggior parte dei casi, limitata. Nel calcestruzzo in trazione è quindi più accentuato che non in compressione, il carattere discreto del processo di rottura.

Aumentando il carico, la zona di processo si sviluppa sino ad uno stato critico in corrispondenza del quale l'espandersi instabile della fessurazione e la frattura del provino improvvisa ed incontrollata possono essere evitate solo riducendo le tensioni esterne applicate. A questo stadio, in corrispondenza alla sezione critica, si manifesta un netto incremento della deformazione, dovuto ad un ulteriore sviluppo della zona di processo ed all'aprirsi delle fessure, mentre nelle zone lontane da tale sezione la tensione di trazione si riduce. La resistenza ultima dipende dalle modalità di propagazione delle microfessure, che si sviluppano fino a congiungersi tra loro ed a formare un fronte continuo.

Una grandezza importante, atta a descrivere la resistenza del calcestruzzo a trazione, è rappresentata dall'energia di frattura G_f [31]. Essa può essere determinata sperimentalmente tramite prove a flessione a 3 punti su provini dotati di intaglio. In questo caso si definisce

energia di frattura l'area sottesa dal diagramma carico-spostamento depurata dagli effetti del peso proprio del provino e divisa per la sezione netta in corrispondenza dell'intaglio.

L'energia G_f dipende da un certo numero di parametri, in particolare dal contenuto di cemento, dal rapporto acqua-cemento, dal tipo e dalla massima dimensione degli inerti e dall'età del calcestruzzo. Secondo il CEB-FIP MC90 l'energia di frattura può essere stimata, in prima approssimazione, con riferimento alla resistenza a compressione del calcestruzzo e tenendo conto la massima dimensione degli inerti.

$$G_f = G_{f0} (f_{cm} / f_{cm0})^{0.7} \quad (1)$$

in cui f_{cm} è la resistenza media a compressione, f_{cm0} è una resistenza media di compressione di riferimento pari a 10 N/mm^2 e G_{f0} è un'energia di frattura di riferimento dipendente dalla dimensione massima degli inerti secondo i valori riportati in Tabella 1.

d_{max}	[mm]	8	16	32
G_{f0}	[N/mm]	0.025	0.030	0.038

Tabella 1: Valori dell'energia di frattura di riferimento in funzione del diametro massimo degli inerti.

La resistenza a trazione del calcestruzzo dipende sostanzialmente dagli stessi paramentri che ne influenzano la resistenza a compressione, ovvero dalle proprietà della pasta di cemento idratata e da quelle di adesione tra matrice cementizia ed inerti. La resistenza a trazione può essere valutata tramite prove dirette o indirette (trazione indotta per flessione o per compressione su opportuni provini), le più comuni sono:

- resistenza a trazione per azione assiale centrata
- resistenza a trazione per flessione (a 3 o 4 punti)
- resistenza a trazione per spacco

La resistenza a trazione, determinata tramite prove dirette (per azione assiale centrata) dei calcestruzzi attuali varia tra 1.5 e 5.0 N/mm^2 . Numerose sono le equazioni proposte per correlare la resistenza a trazione del calcestruzzo con quella a compressione. Tale relazioni hanno carattere empirico e per la loro trattazione si rimanda al CEB-FIP MC90.

1.4 Resistenza in stati tensionali pluriassiali

1.4.1 Risultati sperimentali

La sperimentazione sul comportamento del calcestruzzo in regime di tensione pluriassiale richiede l'impiego di attrezzature particolari per risolvere le molteplici problematiche relative alla realizzazione delle prove, soprattutto per quanto riguarda le sperimentazioni in regime triassiale.

Il comportamento a rottura del calcestruzzo in regime di tensione biassiale venne indagato da Kupfer ed altri [40, 41] e riassunti nel dominio di rottura di Figura 2 e nelle curve tensione-deformazione rappresentate in Figura 3.

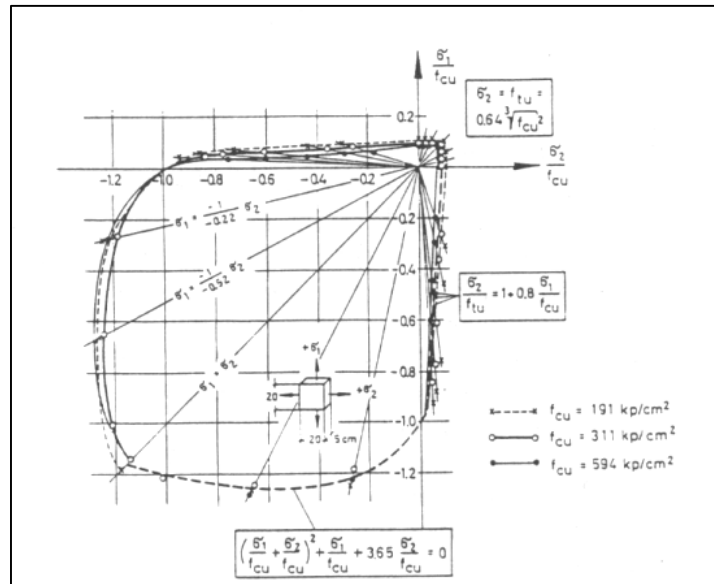


Figura 2: Domini di rottura del calcestruzzo in regime biassiale.

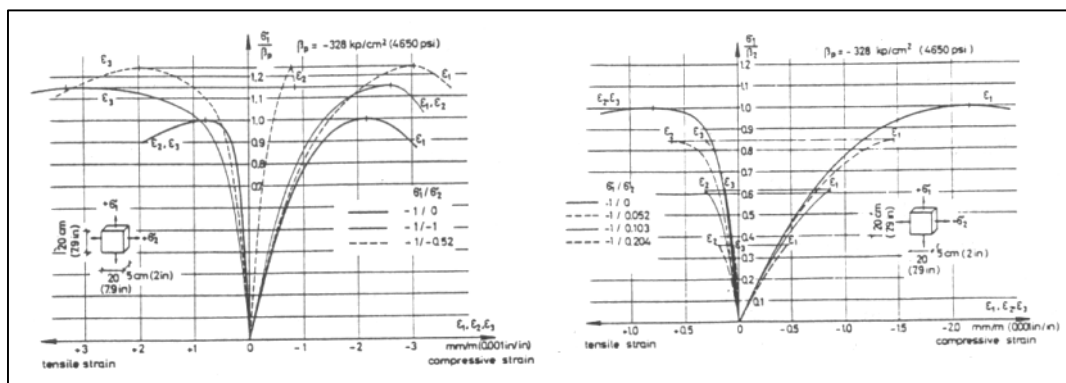


Figura 3: Comportamento deformativo in regime biassiale.

Si osservi che per stati di compressione-compressione la resistenza aumenta e che in particolare per ($s_1 = s_2$) si incrementa di circa il 16% mentre per ($s_1 = 0.5 s_2$) si incrementa di circa il 27%. In trazione-compressione, un'intensità di trazione anche piccola fa diminuire rapidamente la resistenza a compressione in direzione ortogonale. In trazione-trazione l'influenza della tensione ortogonale risulta trascurabile.

Per quanto riguarda il regime triassiale si riportano in Figura 4 le frontiere di resistenza sperimentali di Launay e Gachon [43]. Le diverse curve si riferiscono a rapporti differenti tra le varie tensioni principali.

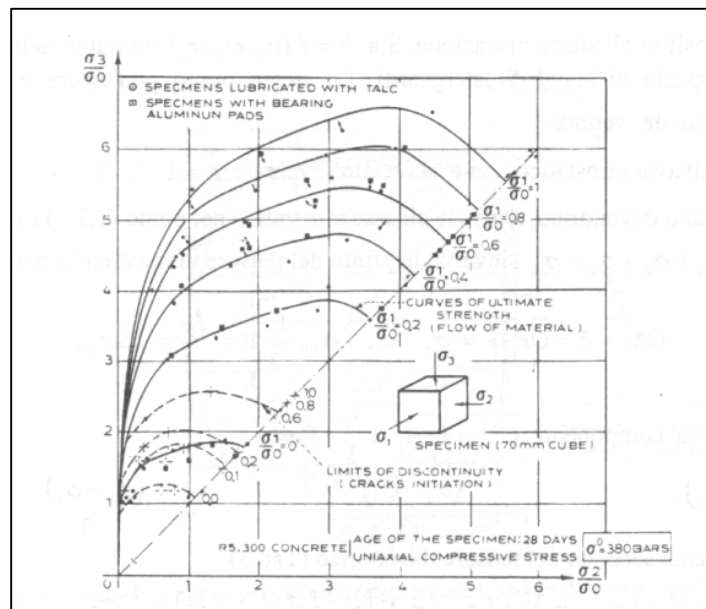


Figura 4: Frontiere di rottura in regime di compressione triassiale.

1.4.2 Il criterio di rottura di Ottosen

Ai fini dell'analisi strutturale sono stati proposti diversi domini e superfici di resistenza cui riferire le condizioni di rottura. Un criterio di rottura in buon accordo con la sperimentazione è dovuto ad Ottosen [53] ed è proposto nel CEB-FIP MC90.

Ritenendo accettabile l'ipotesi di modellare il calcestruzzo come materiale isotropo, ogni corrispondente criterio di rottura deve essere indipendente dal sistema di riferimento adottato per rappresentare lo stato tensionale. Per tale proprietà la superficie di frontiera anziché essere formulata in termini di tensioni principali $g(s_1, s_2, s_3) = 0$ può essere espressa nella terna degli invarianti (I_1, J_2, J) in cui I_1 rappresenta l'invariante primo del tensore idrostatico:

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3 \quad (2)$$

Con J_2 si indica l'invariante secondo del tensore deviatorico:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 \right] \quad (3)$$

mentre J indica un invariante avente come espressione:

$$J = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{(s_1 - s_m)(s_2 - s_m)(s_3 - s_m)}{J_2^{3/2}} \quad (4)$$

in cui s_m rappresenta la tensione principale media. Secondo la formulazione di Ottosen lo stato tensionale non corrisponde ad una condizione di rottura se risulta:

$$a \frac{J_2}{f_{cm}^2} + l \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + g \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 < 0 \quad (5)$$

Si rimanda ai testi di letteratura [48, 53] per la trattazione completa del criterio e per il significato dei simboli dell'Equazione 5. Altri criteri di rottura comunemente utilizzati sono quelli di Coulomb, Coulomb modificato e Willam e Wrake. In Figura 5 viene riportato un confronto fra il criterio di rottura di Ottosen, Coulomb modificato e i risultati sperimentali di Kupfer per il regime delle tensioni biassiali.

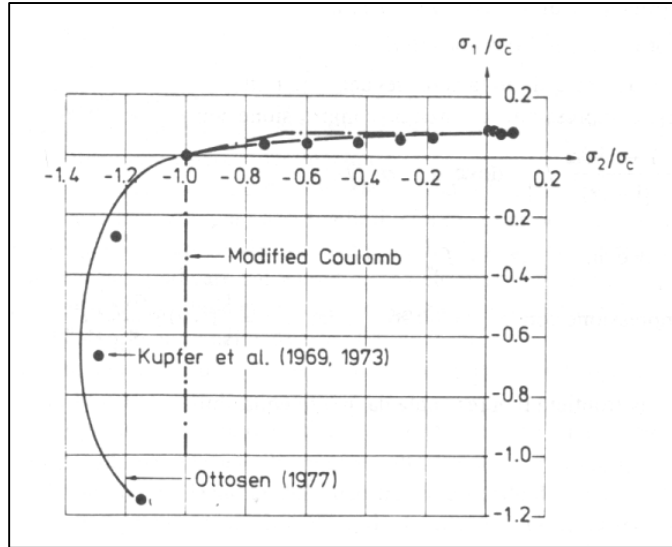


Figura 5: Confronto fra criteri di rottura e risultati sperimentali in regime di tensioni biassiali.

Il legame costitutivo proposto da Ottosen si basa sulla definizione di un indice di non linearità b , come:

$$b = \frac{s_3}{s_{3f}} \quad (6)$$

dove con s_3 si è indicata la tensione principale maggiore, mentre con s_{3f} la tensione a livello della superficie di rottura proposta da Ottosen, ottenuta dall'intersezione della superficie di rottura con la retta passante per il punto rappresentativo dello stato tensionale e la cui equazione prevede una variazione solamente lungo la direzione della s_3 .

Ottosen, basandosi sulla curva proposta da Saenz per modellare il comportamento uniassiale in compressione del calcestruzzo, giunge alla seguente definizione della rigidità secante del materiale:

$$E_s = \frac{E_i}{2} - b \left(\frac{E_i}{2} - E_f \right) \pm \left\{ \left[\frac{E_i}{2} - b \left(\frac{E_i}{2} - E_f \right) \right]^2 - E_f^2 b^2 \right\}^{1/2} \quad (7)$$

in cui E_s è il modulo secante del calcestruzzo, E_i è il modulo di rigidità iniziale, E_f è il modulo del calcestruzzo nel punto di rottura triassiale (stimabile secondo le formule riportate in [48]). In [48] vengono riportate anche le formule per ricavare la variabilità del coefficiente di Poisson in funzione dell'indice di non linearità.

1.5 Le teorie di Vecchio e Collins: C.F.T. e M.C.F.T.

1.5.1 *Introduzione*

Se lo scopo delle analisi è lo studio numerico del comportamento di strutture in calcestruzzo armato (C.A.), i legami costitutivi del calcestruzzo devono essere in grado anche di riprodurre l'accoppiamento di comportamento con le armature di acciaio una volta che il calcestruzzo ha raggiunto lo stato fessurato. Il problema non risulta di semplice soluzione per via dell'ortotropia di comportamento che si viene a creare con la fessurazione stessa.

Vecchio e Collins dell'Università di Toronto furono probabilmente i primi ricercatori che si occuparono dello studio del comportamento di elementi di membrana in C.A. in regime fessurato (1974 - 1990) proponendo valide tecniche numeriche per riprodurre il comportamento tramite codici di calcolo. Le teorie che proposero assunsero i nomi di C.F.T. (Compression Field Theory) e M.C.F.T. (Modified Compression Field Theory). Tali teorie furono e sono applicabili per lo studio di elementi in C.A. soggetti a taglio e/o torsione come pareti di taglio, anime sottili di trave e di cassoni, pareti di gusci a piccola curvatura, nonché strutture bidimensionali in C.A. soggette a fenomeni diffusivi come travi alte e mensole tozze. Queste teorie rappresentarono inoltre un valido punto di partenza per eventuali generalizzazioni in un campo di tensioni tridimensionale sia per strutture soggette a carichi monotoni [62], che ciclici [15].

In questo capitolo si illustrano le teorie proposte da Vecchio e Collins, enfatizzando i problemi di modellazione meccanica che nascono nel trattare il comportamento di strutture in C.A. in campo non lineare.

1.5.2 La Compression Field Theory (C.F.T.)

Nel 1929 Wagner analizzò la pendenza delle ondulazioni da imbozzamento risultanti dall'effetto del taglio in putrelle metalliche con anima sottile. Wagner osservò che dopo l'imbozzamento, l'anima sottile della trave non era più in grado di resistere allo sforzo di compressione e che il taglio si trasmetteva tramite un campo di tensioni diagonali.

Per individuare l'angolo di inclinazione delle tensioni diagonali, Wagner analizzò lo stato deformativo. Concluse che detto angolo coincideva con la direzione degli sforzi principali. Questa teoria si conosce come Teoria del Campo delle Compressioni (C.F.T.).

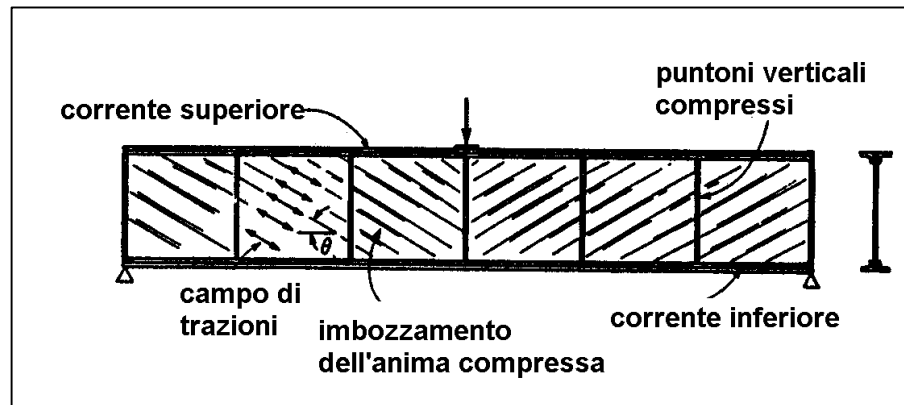


Figura 6: Campi tensionali in una trave metallica ad anima sottile soggetta a taglio.

Il gruppo di ricerca di Vecchio e Collins ebbero l'intuizione di applicare la C.F.T. alle strutture membranali in calcestruzzo armato. Essi assunsero che dopo la fessurazione il calcestruzzo non trasmetta trazioni e che il taglio sia trasmesso tramite un campo diagonale di compressioni, l'angolo J degli sforzi principali (misurato come l'angolo tra l'asse della trave e l'asse delle compressioni principali) può essere ricavato dal cerchio di Mohr delle deformazioni:

$$\tan^2(J) = \frac{e_x + e_2}{e_y + e_2} \quad (8)$$

in cui ϵ_x è la deformazione longitudinale del traliccio, ϵ_y è la deformazione trasversale, ϵ_2 è la deformazione principale di compressione.

Per un assegnato valore di ϑ , l'Equazione 8 può essere interpretata come la relazione di compatibilità fra le tre deformazioni ϵ_x , ϵ_y , e_2 . Se le deformazioni in queste tre direzioni sono note, l'individuazione dello stato deformativo in qualsiasi altra direzione è immediata tramite il cerchio di Mohr delle deformazioni, il quale fornisce le trasformazioni necessarie da utilizzare. Dalla Figura 7 la relazione tra le deformazioni principali del traliccio d'anima è:

$$e_1 + e_2 = e_x + e_y \quad (9)$$

la deformazione principale di trazione è quindi:

$$e_1 = e_x + e_y - e_2 \quad (10)$$

mentre la deformazione di taglio è data da:

$$g_{xy} = 2 \cdot (e_x - e_2) \cdot \cot g(J) \quad (11)$$

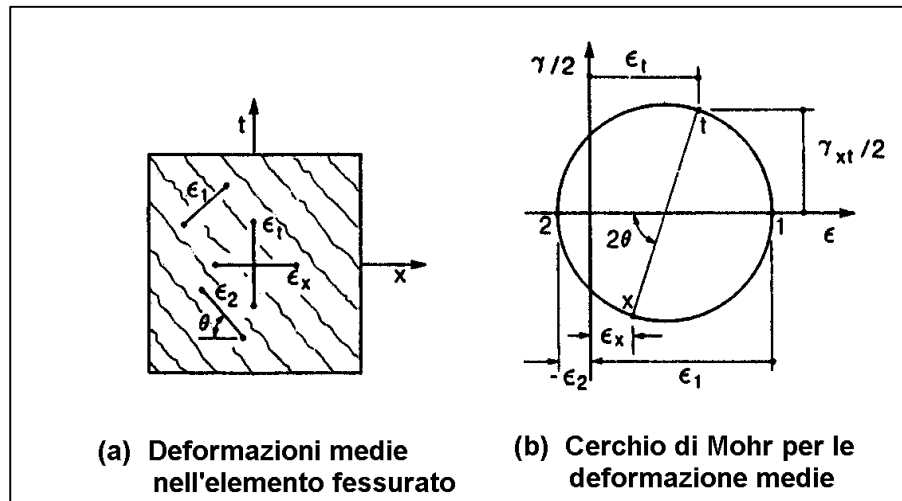


Figura 7: Condizioni di compatibilità per un elemento con fessure d'anima.

Per fessure con inclinazione modeste (J piccolo), lo sforzo di trazione nelle armature longitudinali e lo sforzo di compressione nel calcestruzzo aumentano. Mentre per valori di J maggiori, lo sforzo di trazione sulle armature trasversali aumenta.

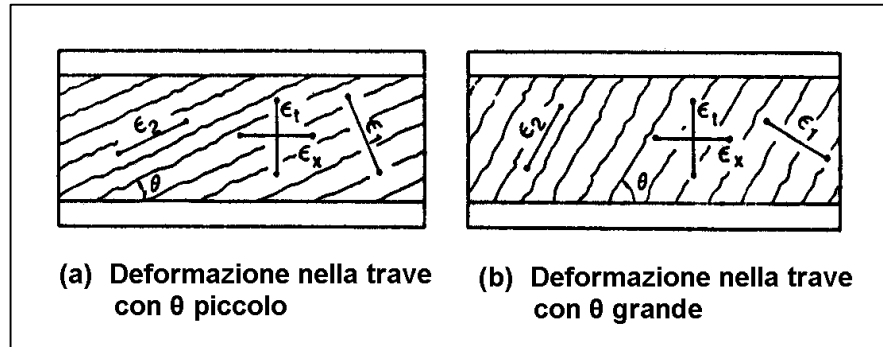


Figura 8: Influenza dell'angolo θ sugli sforzi nelle armature.

Vecchio e Collins considerarono il problema di una trave precompressa, armata simmetricamente e soggetta ad un valore noto di taglio V . Essi considerarono il problema dal punto di vista di un elemento di membrana, simile a quello riportato in Figura 7. Nel problema strutturale evidenziarono 5 incognite:

- Lo sforzo di trazione nell'armatura longitudinale f_{sx} ;
- Lo sforzo di trazione nell'armatura di precompressione f_{px} ;
- Lo sforzo di trazione nelle staffe f_{sy} ;
- Lo sforzo principale di compressione diagonale f_2 ($f_1 = 0$)
- L'inclinazione J delle compressioni f_2 .

Per risolvere il sistema si hanno a disposizione :

Le 3 equazioni di equilibrio ricavabili per il traliccio ad inclinazione variabile [23] sono:

$$f_2 = n[\tan(J) + \cot g(J)] \quad (12)$$

$$f_{cx} = r_x f_{sx} + r_{px} f_{px} + N_x / A_{cx} \quad (13)$$

$$r_y f_{sy} = f_{cy} = n \cdot \tan(J) \quad (14)$$

in cui si è posto:

$$v = \frac{V}{b_w \cdot j_d}; \quad r_x = \frac{A_{sx}}{b_w \cdot j_d}, \quad r_{px} = \frac{A_{px}}{b_w \cdot j_d} \text{ e } A_{cx} = b_w \cdot j_d; \quad (15)$$

Si hanno inoltre le 2 equazioni di congruenza per le deformazioni:

$$\tan^2(J) = \frac{e_x + e_2}{e_y + e_2} \quad (16)$$

$$e_p = e_x + \Delta e_p \quad (17)$$

Se a queste si aggiungono le leggi costitutive dei materiali che trasmettono gli sforzi e le deformazioni (calcestruzzo ed acciaio) si ottiene un quadro completo dello stato di sforzo e deformazione dell'elemento soggetto a taglio.

Basandosi sui risultati di una intensiva serie di prove, Collins (negli anni '70) stabilì la relazione tra la tensione principale di compressione f_2 e la deformazione principale di compressione e_2 in elementi fessurati di calcestruzzo, differiva dalla usuale resistenza cilindrica a compressione.

La legge costitutiva del calcestruzzo tradizionalmente rappresentata dal diagramma $f_c - e_c$ a parabola, oppure da una legge più raffinata, è difatti riferita alla resistenza cilindrica a sola compressione del provino standard, nel quale il massimo valore f'_c corrisponde alla deformazione e'_c . Per formulare la legge costitutiva del calcestruzzo fessurato per un elemento di trave soggetto ad azioni di taglio, le condizioni di sforzo a cui è soggetto sono diverse della prova cilindrica, come si può osservare in Figura 9.

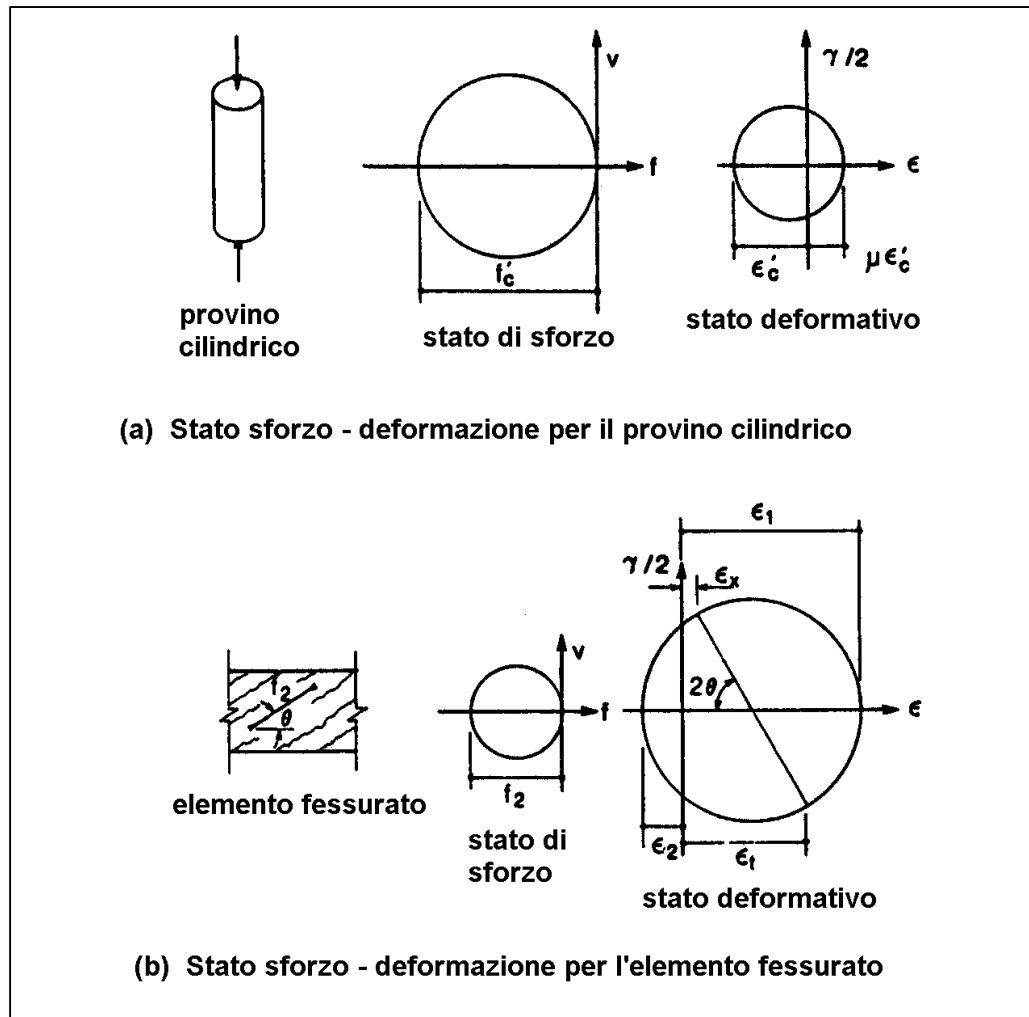


Figura 9: Differenze dello stato tensionale tra la prova a compressione cilindrica ed uno stato fessurato.

Nella prova cilindrica, il calcestruzzo è soggetto soltanto a una modesta deformazione di trazione $\mu \epsilon'_c$ dovuta all'effetto Poisson, mentre nell'elemento fessurato il calcestruzzo è soggetto ad una consistente deformazione di trazione ϵ_1 in concomitanza con l'azione dello sforzo di compressione f_2 anche dopo la comparsa delle prime fessure.

Per questi motivi, in presenza di fessure diagonali, il calcestruzzo ha una minore resistenza a compressione rispetto al valore f'_c del provino cilindrico ($f_2 < f'_c$). Lo sforzo di compressione che origina le fessure nel calcestruzzo è dato dalla relazione (vedere Figura 9):

$$f_{2,\max} = \frac{3.6 f'_c}{1 + 2g_m / e'_c} \quad (18)$$

dove $g_m = e_1 + e_2$ e per valori di f_2 minori di $f_{2,\max}$, $e_2 = f_2 / (f'_c \cdot e'_c)$.

Il calcestruzzo fessurato resiste ad una minore tensione di compressione perché esso deve essere trasmesso attraverso delle fessure relativamente ampie. Le fessure iniziali si formano ad un angolo di 45° con le armature longitudinali. Se J diviene minore di 45° ovvero ($r_v < r_x$), una parte significativa dello sforzo di taglio deve quindi essere trasmesso attraverso le fessure iniziali. La capacità del calcestruzzo di trasmettere lo sforzo di taglio attraverso le fessure dipende dalla apertura delle fessure stesse, le quali a sua volta, sono funzione della deformazione a trazione del calcestruzzo. La deformazione principale a trazione può essere ricavata come:

$$e_1 = e_x + (e_x + e_2) \cot g^2(J) \quad (19)$$

Per sforzi di taglio inferiori al valore del primo snervamento delle armature, è possibile ottenere una espressione semplice per ottenere il valore del corrispondente angolo J , riordinando le equazioni precedenti:

$$\tan^4(J) = \left(1 + \frac{1}{nr_x}\right) / \left(1 + \frac{1}{nr_y}\right) \text{ con } n = E_s / E_c \text{ e } E_c = f'_c / e'_c \quad (20)$$

La Figura 10 illustra le relazioni anteriormente citate che sono alla base della *C.F.T.* Facendo ricorso alle condizioni di equilibrio, di compatibilità e alle leggi costitutive per l'acciaio e il calcestruzzo fessurato, è possibile risalire al diagramma carico – deformazione per l'elemento soggetto a taglio. La teoria del campo delle compressioni *C.F.T.* trascura il contributo a trazione del calcestruzzo e quindi, sovrastima le deformazioni ottenendo valori di carico conservativi.

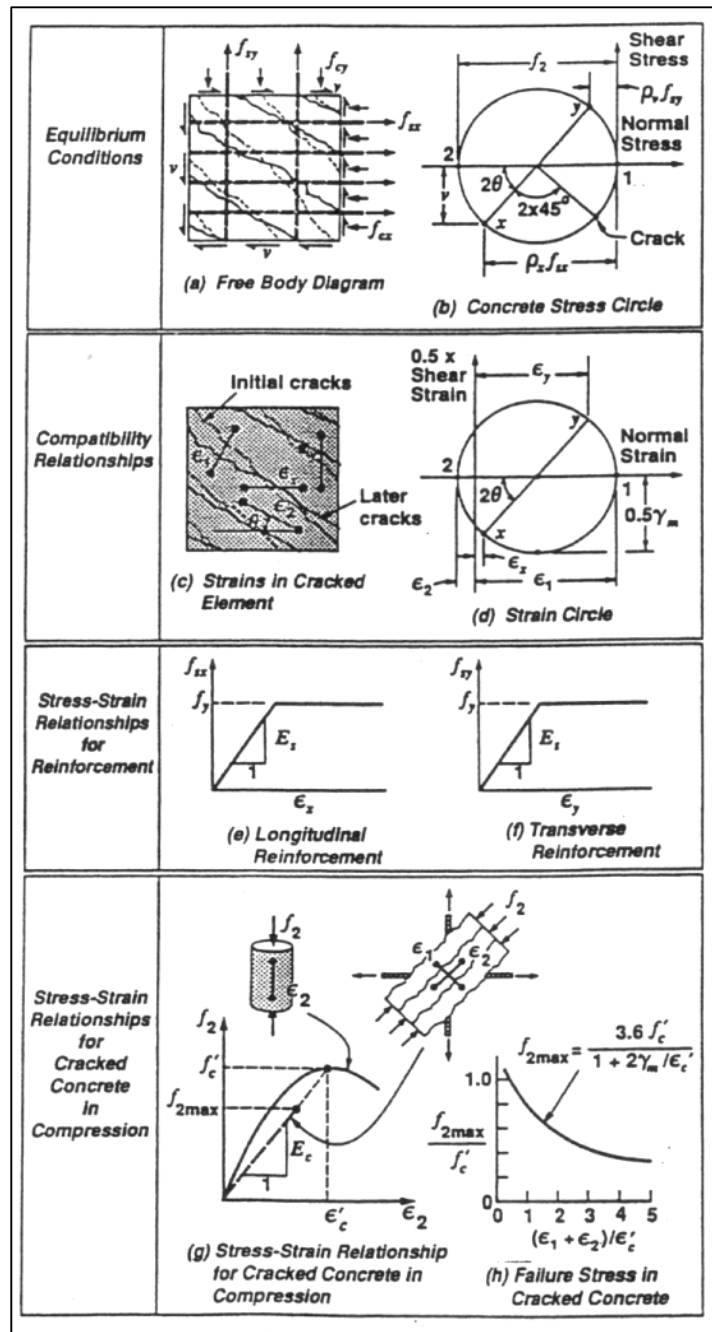


Figura 10: Quadro riassuntivo della Compression Field Theory.

1.5.3 La Modified Compression Field Theory (M.C.F.T.)

Osservando il campo di sforzi generato nella porzione di trave non precompressa della Figura 11, prima della fessurazione il taglio si trasmette in un campo inclinato a 45° di compressioni e trazioni di uguale grandezza ($f_1=f_2=v=0$). Dopo la formazione delle prime fessure, lo sforzo di trazione si riduce. Mentre la C.F.T. assume una resistenza a trazione nulla nel calcestruzzo ($f_1=0$), la M.C.F.T. tiene conto anche del contributo del calcestruzzo a trazione del concio integro rimasto tra due fessure (*Tension Stiffening*).

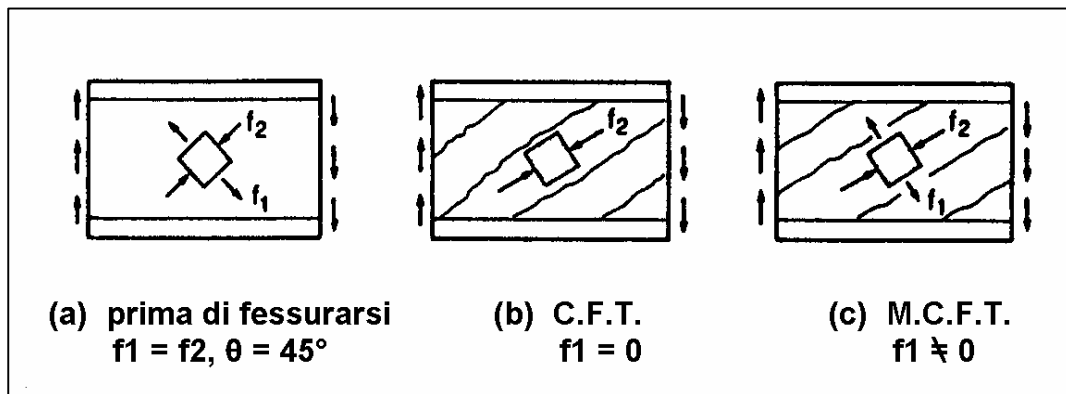


Figura 11: Campi di sforzo presente nell'anima di una trave in C.A.

La teoria proposta da Vecchio e Collins si basa ancora sul rispetto di un certo numero di equazioni di equilibrio e di congruenza per risolvere il problema di un elemento di membrana in C.A. soggetto ad un campo tensionale di taglio. Le equazioni sono ora più numerose e devono essere risolte con procedimenti iterativi. Per la trattazione completa di questa formulazione si rimanda ai testi di bibliografia [22, 48, 70]. In questa sede si vuole invece porre l'attenzione sui legami costitutivi.

Dopo la prima pubblicazione della teoria C.F.T., seguì un notevole lavoro di ricerca per determinare le caratteristiche sforzo – deformazione del calcestruzzo fessurato. Le prove si concentrarono su elementi di membrana in C.A. soggetti ad uno stato di sforzo uniforme nel piano, in appositi banchi di prova.

Vecchio e Collins svilupparono un legame $s - e$ per il calcestruzzo fessurato e soggetto a taglio in cui lo sforzo di compressione nella direzione principale f_2 è funzione non solo di e_2 ma anche di e_1 tramite le seguenti relazioni (Figura 12):

$$f_2 = f_{2\max} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{e_2}{e'_c} \right) - \left(\frac{e_2}{e'_c} \right)^2 \right] \quad (21)$$

$$f_{2\max} = \frac{f'_c}{0.8 + 170e_1} \leq f'_c \quad (22)$$

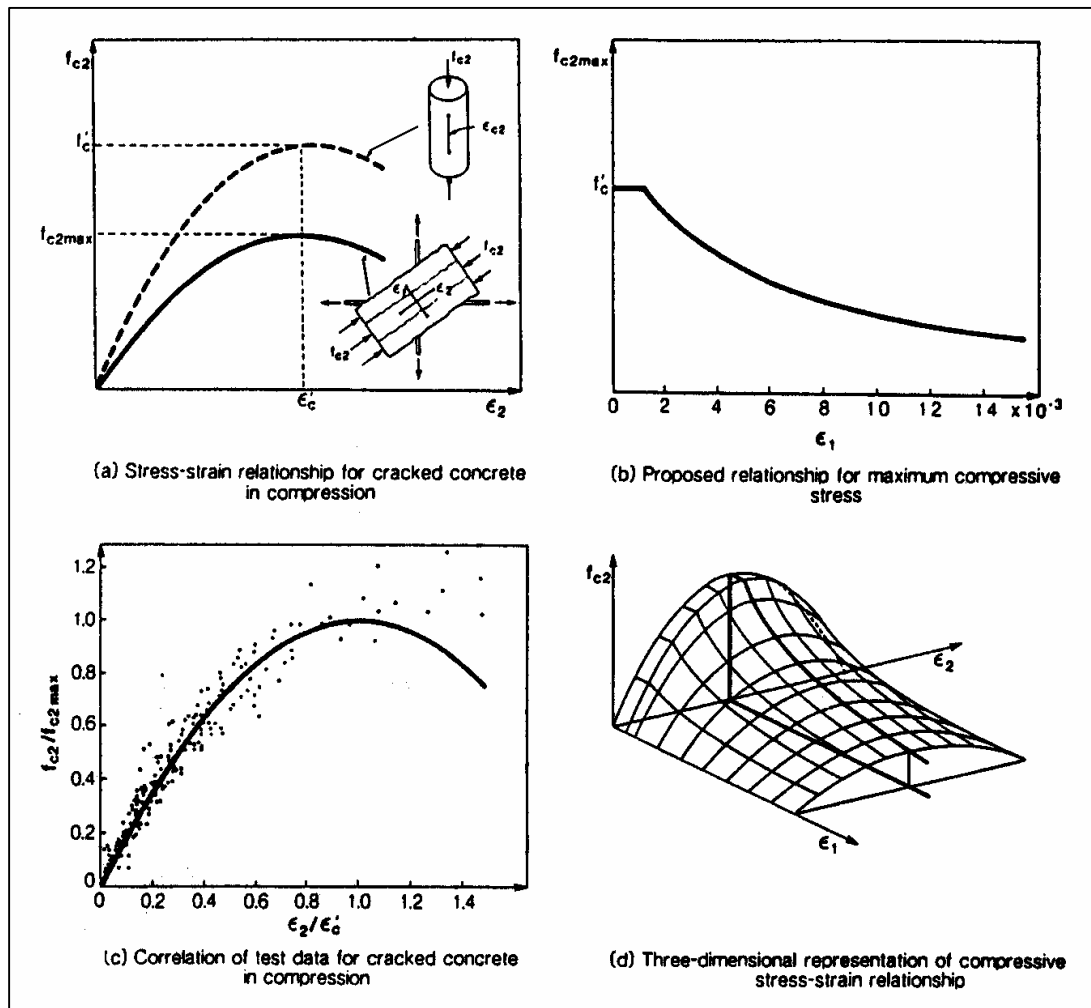


Figura 12: Legame costitutivo per il calcestruzzo fessurato in compressione.

Dalle analisi sperimentali Vecchio e Collins definirono anche la seguente relazione sperimentale tra lo sforzo medio di trazione nel calcestruzzo e la deformazione e_1 (Figura 13):

$$f_1 = E_c \cdot e_1 \text{ per } e_1 \leq e_{cr} \quad (23)$$

$$f_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \cdot e_1}} = \frac{0.33 \cdot \sqrt{f'_c}}{1 + \sqrt{500 \cdot e_1}} \text{ per } e_1 \geq e_{cr} \quad (24)$$

dove a_1 è un coefficiente che tiene conto delle caratteristiche di aderenza delle armature ($a_1 = 1.0$ per barre ad aderenza migliorata e 0.7 per barre lisce, fili e cavi di precompressione) e a_2 è il coefficiente che tiene conto del tipo di carico applicato ($a_2 = 1.0$ per carichi monotoni di breve durata e 0.7 per carichi quasi permanenti o ciclici).

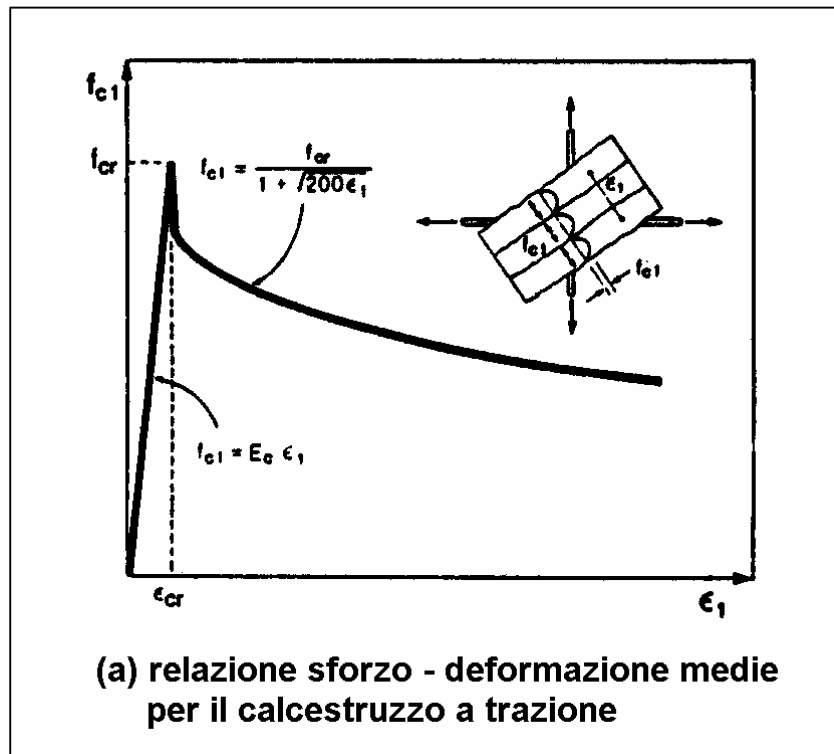


Figura 13: Legge costitutiva per il calcestruzzo fessurato in trazione.

Da sottolineare che l'apparentemente eccessiva resistenza residua del calcestruzzo teso fessurato che si nota in Figura 13, venne utilizzata per simulare l'effetto irrigidente del *Tension Stiffening*.

Nella trattazione precedente si è fatto riferimento a tensioni e deformazioni medie, non tenendo conto degli effetti locali. Lo sforzo effettivamente generato all'interno della fessura può essere diverso da quello "medio".

La rottura dell'elemento di calcestruzzo armato non è più governata dalle tensioni medie ma da sforzi locali nella zona di fessura. Nella zona di fessura, lo sforzo di trazione del calcestruzzo diventa nullo mentre sull'armatura diventa massimo. La resistenza a taglio di un elemento è limitata dalla sua capacità di trasmettere il taglio attraverso le fessure. Per valori modesti, lo sforzo di taglio si trasmette attraverso le fessure con locali incrementi di trazione nelle armature, tuttavia quando le armature raggiungono lo snervamento, il taglio si continua a trasmettere localmente lungo le due superfici scabre della fessura (Figura 14) tramite il fenomeno dell'ingranamento.

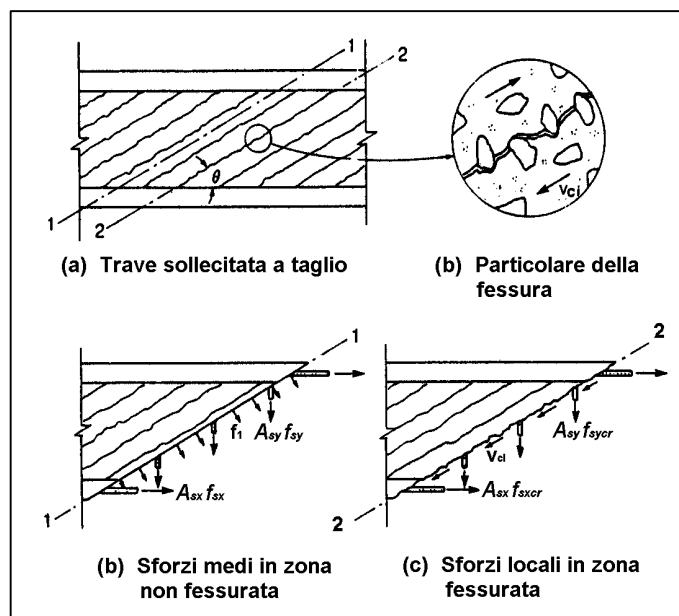


Figura 14: Trasmissione degli sforzi attraverso le fessure.

Il massimo possibile valore dello sforzo locale (v_{ci}) trasmesso attraverso le fessure è funzione dell'ampiezza di fessure w e del diametro dell'aggregato a secondo la seguente espressione:

$$v_{ci} = \frac{0.18 \cdot \sqrt{f'_c}}{0.3 + \frac{24 \cdot w}{a + 16}} \quad (25)$$

L'apertura delle fessure w viene definita come il prodotto tra la deformazione principale di trazione ε_1 e la distanza media tra le fessure diagonali, quindi:

$$w = \varepsilon_1 \cdot s_{mq} \quad (26)$$

La situazione locale di fessurazione è stata idealizzata come una serie di fessure parallele inclinate di un angolo J riferito alle armature longitudinali con passo s_{mq} , ovvero, la distanza media convenzionale tra le fessure in funzione delle distanze caratteristiche di fessurazione dell'armatura longitudinale e trasversale:

$$s_{mq} = \left[\frac{1}{\frac{\sin(J)}{s_{mx}} + \frac{\cos(J)}{s_{mv}}} \right] \quad (27)$$

con s_{mx}, s_{mv} le distanze caratteristiche di fessurazione dell'armatura longitudinale e trasversale (Figura 14). s_{mx} e s_{mv} aumentano proporzionalmente con l'incremento della distanza fra gli assi delle armature s_x e s_y ; essendo noto il valore del copriferro c , le distanze c_x e c_y dal bordo dell'armatura all'asse orizzontale e verticale geometrico della sezione di calcestruzzo, il passo delle staffe s , i diametri dell'armatura longitudinale e trasversale d_{bx} e d_{by} e considerando una distribuzione uniforme delle trazioni ($k_2=0.25$), il CEB propone:

$$s_{mx} = 2 \cdot \left(c_x + \frac{s_x}{10} \right) + 0.25 \cdot k_1 \cdot \frac{d_{bx}}{r_x} \quad (28)$$

$$s_{mv} = 2 \cdot \left(c_v + \frac{s}{10} \right) + 0.25 \cdot k_1 \cdot \frac{d_{bv}}{r_v} \quad (29)$$

$$\text{dove } r_v = \frac{A_v}{b_w \cdot s}, \quad r_x = \frac{(A_{sx} + A_{px})}{A_c} \quad (30)$$

K_1 è il coefficiente di aderenza ($K_1=0.8$ per cavi di precompressione e barre lisce, 0.4 per barre ad aderenza migliorata). In presenza di armatura di precompressione e barre lente, K_1 adotterà un valore convenzionale pari a:

$$k_1 = \frac{0.4 \cdot A_{sx} + 0.8 \cdot A_{px}}{A_{sx} + A_{px}} \quad (31)$$

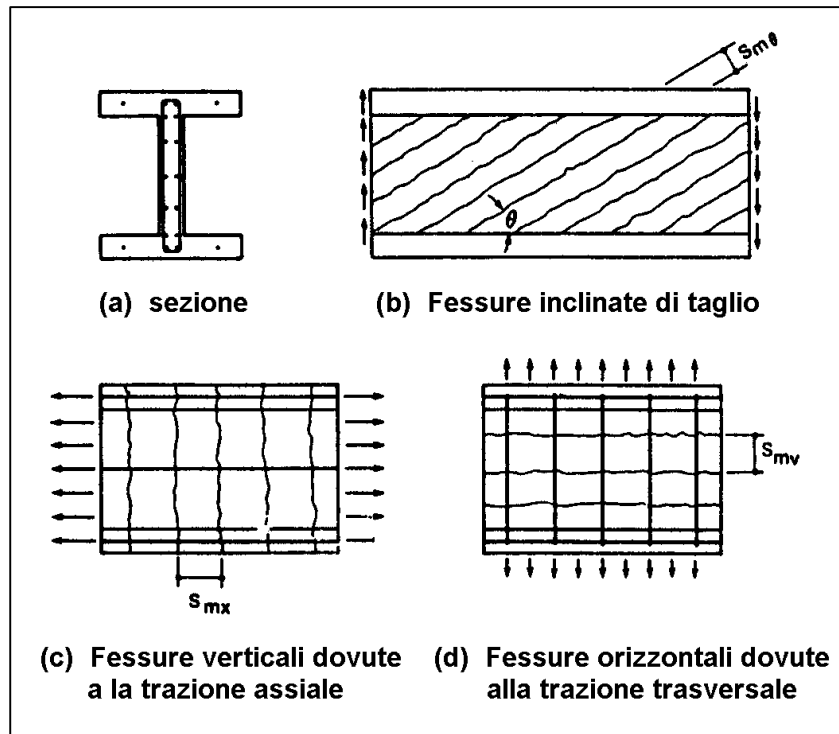


Figura 15: Distanze caratteristiche tra le fessure inclinate.

Le teorie di Vecchio e Collins, furono implementate da diversi ricercatori in codici di calcolo, ottenendo ottimi riscontri numerici [11, 63, 70] ed influenzarono anche la normativa americana di quegli anni. Come precedentemente accennato sono inoltre un valido punto di

partenza per la generalizzazione tridimensionale del comportamento del calcestruzzo [62], nonché per la modellazione dello stesso in campo ciclico [15, 71].

L'eccessiva resistenza apparente in trazione, ed il modo in cui fu introdotto l'effetto di ingranamento suscitarono numerose polemiche, specialmente da parte di Hsu dell'Università di Huston che propose altri metodi di calcolo sotto il nome di RA-STM e FA-STM. La critica principale riguardava la presenza di una tensione (Equazione 25) interna ad una fessura formatasi in direzione normale alla direzione principale di trazione, tensione che non avrebbe dovuto esistere per le caratteristiche proprie del sistema di riferimento principale delle tensioni. Hsu propone quindi teorie diverse in cui tutti gli effetti legati alla fessurazione (*tension stiffening*, *ingranamento*, *effetto bietta* etc.) sono assegnati ai legami costitutivi dell'acciaio da lui formulati grazie ad un'estesa campagna sperimentale.

Tuttavia ciò non portò ad un effettivo miglioramento della risposta numerica, per cui le teorie sono considerate tutt'oggi ugualmente valide [45].

Da notare infine come il comportamento delle strutture in calcestruzzo armato sia di non facile riproduzione numerica, per i molti fenomeni che si vengono a creare durante la fessurazione del calcestruzzo. Per questo motivo non vi è un solo modello costitutivo all'interno dei vari codici di calcolo, ma è abbastanza comune trovare legami differenti in codici di calcolo differenti. L'esperienza maturata dalle Università e dai programmatori di detti codici negli ultimi anni, ha tuttavia evidenziato che molti problemi (*non linearità del calcestruzzo in compressione*, *effetto bietta*, *ingranamento*, *scorrimento delle armature* etc.) possono essere considerati in maniera approssimata o non considerati affatto senza pregiudicare, nella maggior parte dei casi, l'accuratezza delle analisi. I codici di calcolo commerciali moderni, forniscono legami basati sui domini di rottura evidenziati precedentemente, riuscendo in questo modo a fornire buone risposte in prossimità del carico ultimo della struttura. Rimane tuttavia all'analista numerico, il compito di decidere se le approssimazioni introdotte dal codice sono o meno corrette in funzione della struttura da esaminare.

1.6 Non obiettività della mesh e tecniche di regolarizzazione

L'implementazione di un codice di calcolo che studi il ramo di "softening" di un materiale presenta numerose difficoltà. Una di queste è la localizzazione del danneggiamento in determinati elementi della mesh, quando il diagramma sforzi deformazioni manifesta una pendenza negativa.

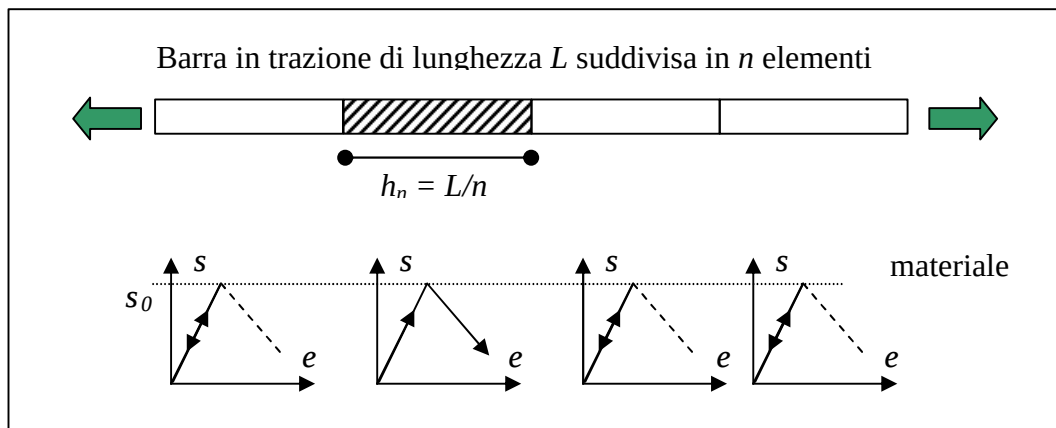


Figura 16: Localizzazione delle deformazioni nell'elemento più debole.

Si consideri ad esempio una barra in trazione suddivisa in n elementi finiti. Il materiale con cui è costituita la barra è elastico lineare sino ad un certo valore di tensione (s_0), dopodiché presenta un ramo di softening, assunto per semplicità ancora lineare. Se un elemento della discretizzazione è leggermente più debole degli altri, appena il materiale entra nel ramo di softening le deformazioni si localizzano in quell'unico elemento, e la risposta globale risulta dipendente dalla dimensione della discretizzazione (Figura 17).

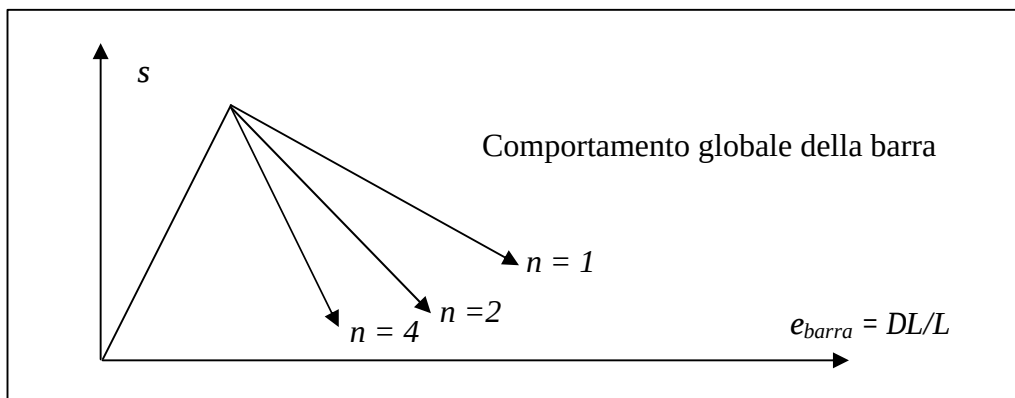


Figura 17: Influenza della discretizzazione sul comportamento globale della barra.

Il problema riveste notevole importanza nella meccanica numerica, in quanto la debolezza di un elemento rispetto ad altri può essere causata anche da approssimazioni numeriche. Per ovviare questo inconveniente si sono studiati dei metodi di regolarizzazione [13]. I più comuni rientrano nelle seguenti tipologie:

- Regolarizzazione basata sull'energia di frattura. In questo caso i parametri che governano il softening del materiale vengono modificati al variare delle dimensioni della discretizzazione, in modo che l'energia di frattura associata all'elemento finito rimanga costante.
- Modello di danno non locale. L'evoluzione del danno in un elemento, invece che dipendere solamente da dei parametri interni all'elemento stesso, è governata da una media pesata degli stessi parametri su di un volume rappresentativo di materiale.
- Modello di danno con gradiente di ordine superiore. Si assume che il comportamento del materiale in un punto dipenda non solo dal valore del danno in quel punto, ma anche dal suo gradiente.
- Regolarizzazione viscosa. Si introduce nel modello una dipendenza dal tempo mediante un parametro di viscosità fittizia.

Molti codici di calcolo commerciali moderni, hanno recepito il problema ed hanno implementato metodi di regolarizzazione della risposta (LUSAS, ADINA). Gli approcci a danno non locale e a gradiente, sono i metodi che in genere forniscono i risultati migliori. Tuttavia essi richiedono importanti modifiche in un usuale codice di calcolo agli elementi finiti non lineare, per cui in genere non si trovano nei codici di calcolo commerciali. Il metodo più utilizzato risulta essere la regolarizzazione basata sull'energia di frattura.

Appare corretto evidenziare che il problema della regolarizzazione della risposta è molto importante nel momento in cui si trattano materiali fragili, come può essere una struttura di calcestruzzo poco o non armata. La presenza dell'armatura, in strutture ordinarie in calcestruzzo armato, rende il materiale assimilabile ad un composito (ANSYS) ed il problema della localizzazione del danno può non essere di rilevanza primaria ai fini della correttezza dell'analisi.

1.7 Interfacce utente dei codici di calcolo commerciali

Molti codici di calcolo commerciali offrono la possibilità di interfacciarsi con codici scritti dall'utente in linguaggio C o in FORTRAN. La possibilità di utilizzare un codice commerciale accoppiato con un codice utente può essere di vitale importanza nello studio di particolari aspetti quali:

- Interazioni
- Ottimizzazioni
- Controllo
- Trattamento delle incertezze
- Legami costitutivi particolari
- ...

Non sempre infatti i codici commerciali sono in grado di adempiere adeguatamente alle necessità del progettista che in caso di strutture complesse può decidere di utilizzare particolari metodologie (reti neurali, algoritmi genetici, fuzzy, approcci probabilistici...) in grado di focalizzare meglio l'effettivo comportamento della struttura o di ottimizzarne alcune parti. I codici di calcolo commerciali più diffusi consentono tuttavia una certa libertà di interfaccia con codici esterni, in modo che l'utente possa sopperire alle mancanze del codice commerciale tramite un codice utente proprio. La possibilità di interfaccia tra codice commerciale e codice utente può essere di varia natura. Possiamo definire tre livelli di interfaccia: il codice aperto, le user subroutines e la modalità batch.

Il codice aperto è una modalità di interfaccia che si può definire di basso livello. In questo caso il codice commerciale viene fornito anche in versione sorgente e l'utente può modificarne le subroutines, aggiungendo i passaggi di suo interesse. Al termine delle modifiche il codice deve essere ricompilato e riassembleato in modo che l'utente possa utilizzare i passaggi da lui scritti. Chiaramente, in questo caso il codice utente entra a far parte del codice commerciale che si può ritrovare migliorato o danneggiato dalle modifiche operate dall'utente. Questo tipo di interfaccia è stata definita di basso livello poiché per essere utilizzata l'utente deve possedere un'elevata conoscenza del codice sorgente del programma per poter apportare le modifiche desiderate (in analogia con il linguaggio di programmazione *assembler*). Tali modifiche sono specifiche per quel codice commerciale ed in generale non possono essere riutilizzate all'interno di un altro codice.

Sicuramente ad un livello superiore vi è la possibilità di interfaccia tramite user subroutines o user supplies. In questo caso l'utente può scrivere un piccolo codice che viene di seguito richiamato all'interno del codice commerciale.

```

*****
SUBROUTINE VUMAT(Subroutine di materiale per ABACUS. Considera un
materiale ortotropo ed effettua carichi ciclici con deformazioni
residue lungo la direzione principale delle compressioni)
*****
SUBROUTINE VUMAT(
1  NBLOCK, NDIR, NSHR, NSTATEV, NFIELDV, NPROPS, LANNEAL,
2  STEPTIME, TOTALTIME, DT, CMNAME, COORDMP, CHARLENGTH,
3  PROPS, DENSITY, STRAININC, RELSPININC,
4  TEMPOLD, STRETCHOLD, DEFGRADOLD, FIELDOLD,
5  STRESSOLD, STATEOLD, ENERINTERNOLD, ENERINELASOLD,]
6  TEMPNEW, STRETCHNEW, DEFGRADNEW, FIELDNEW,
7  STRESSNEW, STATENEW, ENERINTERNNEW, ENERINELASNEW)
INCLUDE 'VABA_PARAM.INC'
DIMENSION PROPS(NPROPS), DENSITY(NBLOCK), COORDMP(NBLOCK,*),
1  CHARLENGTH(NBLOCK), STRAININC(NBLOCK, NDIR+NSHR),
2  RELSPININC(NBLOCK, NSHR), TEMPOLD(NBLOCK),
3  STRETCHOLD(NBLOCK, NDIR+NSHR),
4  DEFGRADOLD(NBLOCK, NDIR+NSHR+NSHR),
5  FIELDOLD(NBLOCK, NFIELDV), STRESSOLD(NBLOCK, NDIR+NSHR),
6  STATEOLD(NBLOCK, NSTATEV), ENERINTERNOLD(NBLOCK),
7  ENERINELASOLD(NBLOCK), TEMPNEW(NBLOCK),
8  STRETCHNEW(NBLOCK, NDIR+NSHR),
9  DEFGRADNEW(NBLOCK, NDIR+NSHR+NSHR),
FIELDNEW(NBLOCK, NFIELDV)

```

Figura 18: Maschera di inizio di una user subroutine di materiale per ABAQUS Explicit.

In questo caso la conoscenza del codice sorgente è minima e riguarda solamente i dati che la user subroutine deve scambiare con il resto del codice. In genere questi dati sono predeterminati all'interno di una maschera (Figura 18) che l'utente deve rispettare nella scrittura della user subroutine. La possibilità di causare danni all'interno del codice per una non buona conoscenza del codice sorgente è minima, tuttavia sono ridotte anche le possibilità applicative dovendo rispettare le regole prefissate dai programmatori del codice commerciale. Generalmente vi è la possibilità di creare user subroutines di materiale (da utilizzare per legami costitutivi particolari) e user subroutines di carico (da utilizzare in problemi di interazione o controllo).

Nella pagina seguente vengono brevemente mostrati i risultati ottenuti tramite una user-subroutine di materiale con il codice commerciale ABAQUS Explicit nella riproduzione del comportamento di una parete in C.A. soggetta a carichi di taglio ciclici [15].

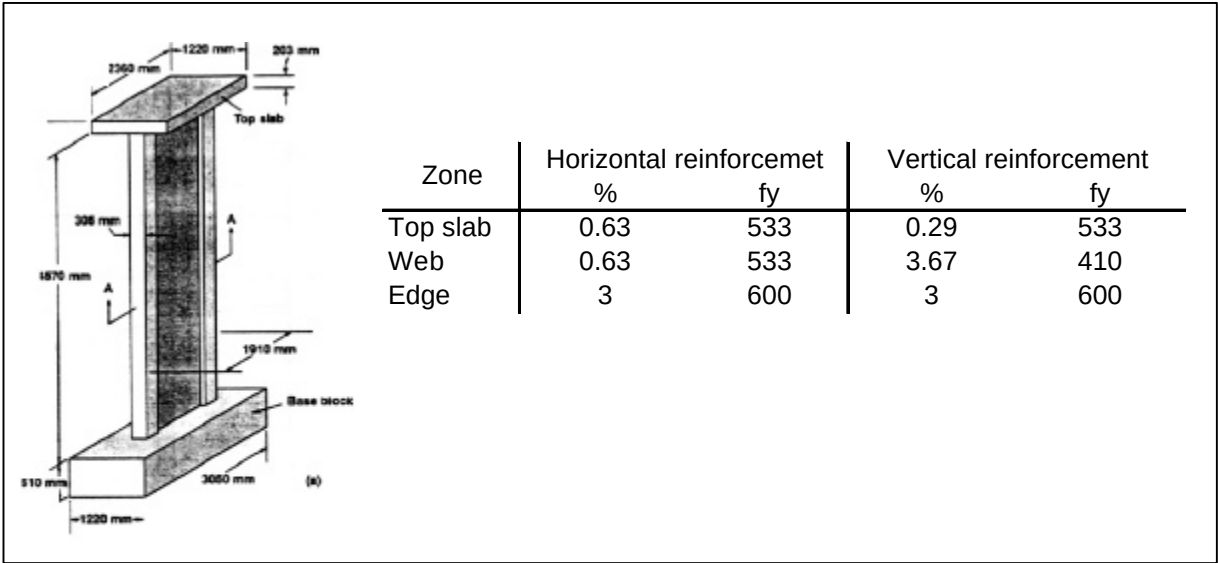


Figura 19: Geometria della struttura in esame.

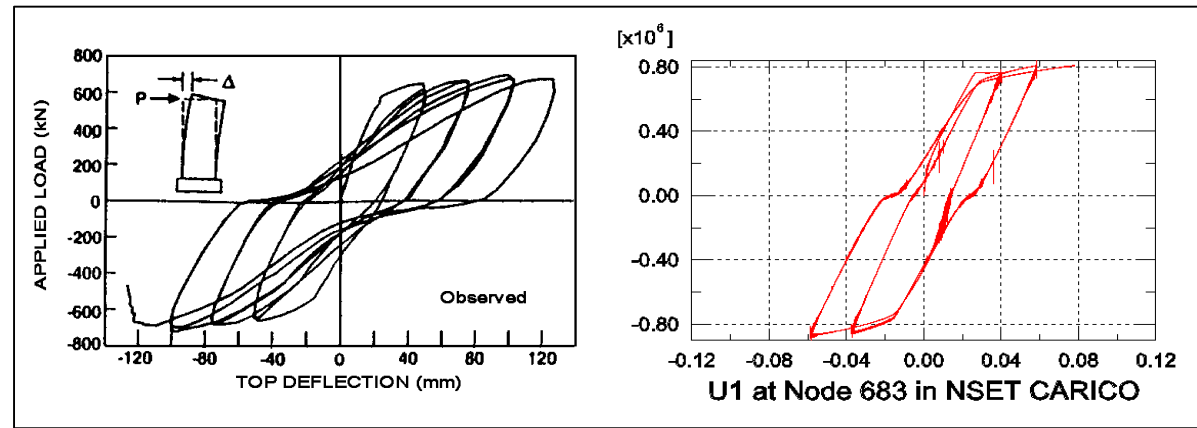


Figura 20: Risultati sperimentali e numerici in termini di curva carico-spostamento.

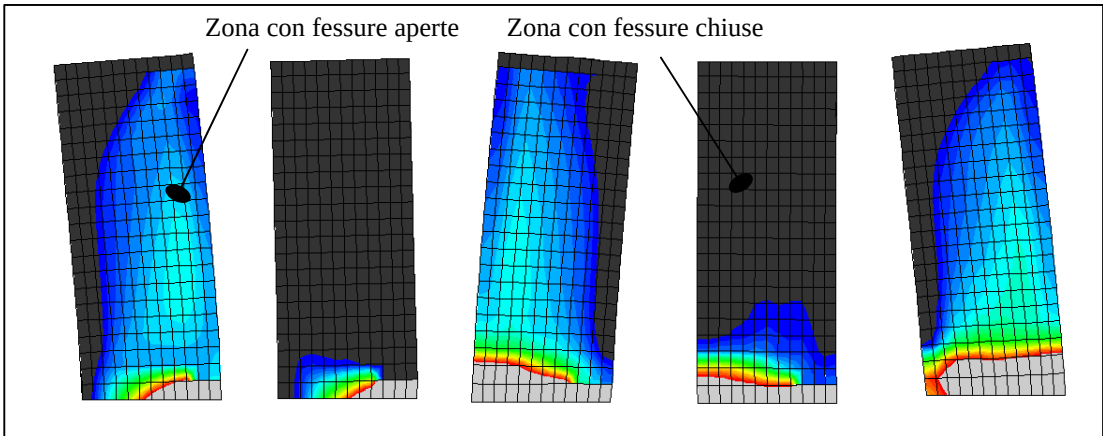
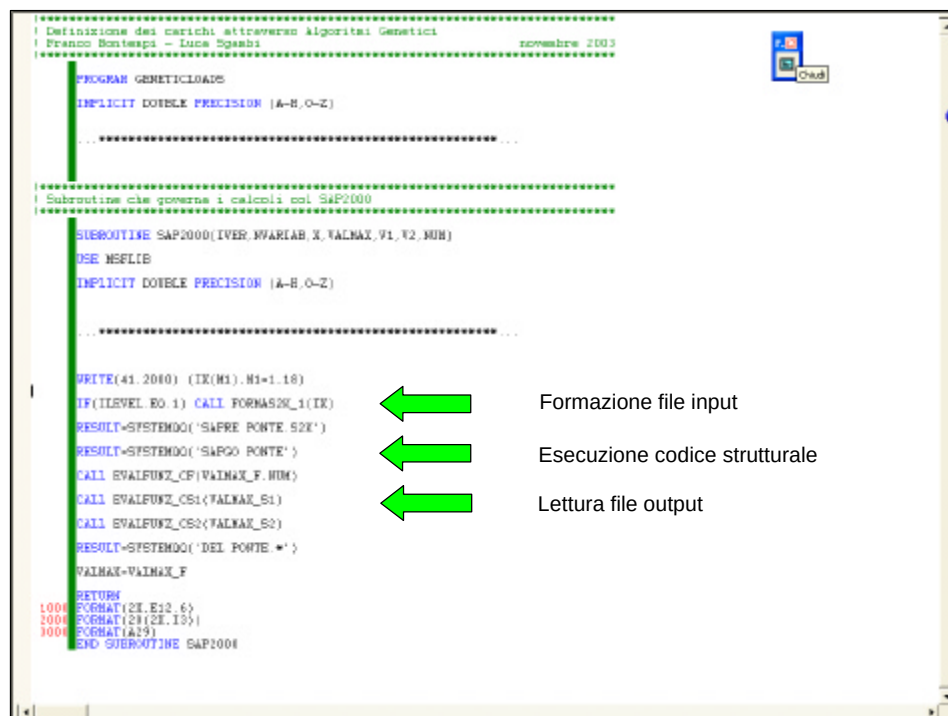


Figura 21: Risultati numerici in termini di apertura e richiusura delle fessure.

Infine si può definire la modalità batch come interfaccia di alto livello. Utilizzando questo meccanismo di interfaccia l'utente può creare un suo codice di supporto che svolga un compito qualsiasi (ottimizzazione, analisi fuzzy...) e delegare al codice commerciale il compito di effettuare le analisi strutturali. La conoscenza richiesta sul codice sorgente è nulla, tuttavia non tutti i codici commerciali possono essere utilizzati in questo modo. Il codice deve poter essere avviato anche da riga di comando e non solo in modalità grafica, in modo da poter essere richiamato all'interno del codice di supporto.



```
*****  
! Definizione dei carichi attraverso Algoritmi Genetici  
! Franco Nottarpi - Luca Sgambi  
! novembre 2003  
*****  
  
PROGRAM GENETICLOADS  
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
  *****  
  
  ! Subroutine che governa i calcoli col SAP2000  
  ! *****  
  
  SUBROUTINE SAP2000(IVER, NVARIAB, X, VALMAX, V1, V2, NUM)  
    USE NSELIB  
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
    *****  
  
    WRITE(41,2010) (IX(M1),M1=1,18)  
    IF(LEVEL.EQ.1) CALL FORMAS2K_1(IX)  
    RESULT=SYSTEMDO('SAPRE PONTE.S2X')  
    RESULT=SYSTEMDO('SARGO PONTE')  
    CALL EVALFUNZ_CF(VALMAX_F,NUM)  
    CALL EVALFUNZ_CS1(VALMAX_S1)  
    CALL EVALFUNZ_CS2(VALMAX_S2)  
    RESULT=SYSTEMDO('DEL PONTE *')  
    VALMAX=VALMAX_F  
  
    RETURN  
  1000 FORMAT(2X,E12.6)  
  2000 FORMAT(2X,(2X,I3))  
  3000 FORMAT(A29)  
  END SUBROUTINE SAP2000
```

Figura 22: Estratto di codice che governa la modalità batch per un algoritmo di ottimizzazione genetica.

In questa modalità all'utente viene richiesta la scrittura di un codice di supporto in grado di compilare il file di input necessario all'analisi strutturale e di leggere il file di output stampato dal codice di calcolo.

Da notare che il codice commerciale viene utilizzato alla stregua di una normale subroutine del codice di supporto. Il codice creato dall'utente possiede in questo caso un'elevata portabilità in quanto per essere utilizzato con codici commerciali differenti è necessario cambiare solamente i formati di stampa e di lettura dei files di input e di output.

CAPITOLO 2

ANALISI DI ALCUNI TRA I PIÙ DIFFUSI CODICI DI CALCOLO COMMERCIALI

2.1 Introduzione

In questo capitolo si esaminano le possibilità offerta da 6 tra i più diffusi codici di calcolo commerciali nell'analisi di strutture in calcestruzzo armato in campo non lineare. Vengono analizzati i legami costitutivi appartenenti a:

- ADINA
- ALGOR
- ANSYS
- LUSAS
- SAP2000
- STRAUS7

Si mette in particolar modo in evidenza l'usabilità di legami costitutivi specifici in accoppiamento a particolari tipologie di elementi finiti, nonché la presenza o meno di tecniche di regolarizzazione del danno.

2.2 Codice di calcolo: ADINA

Il codice di calcolo ADINA viene sviluppato dalla ADINA R&D di Boston, MA, USA. La versione corrente, per ADINA è la 8.2, mentre la versione esaminata è la 8.0.7. Il sito internet di riferimento è <http://www.adina.com>.

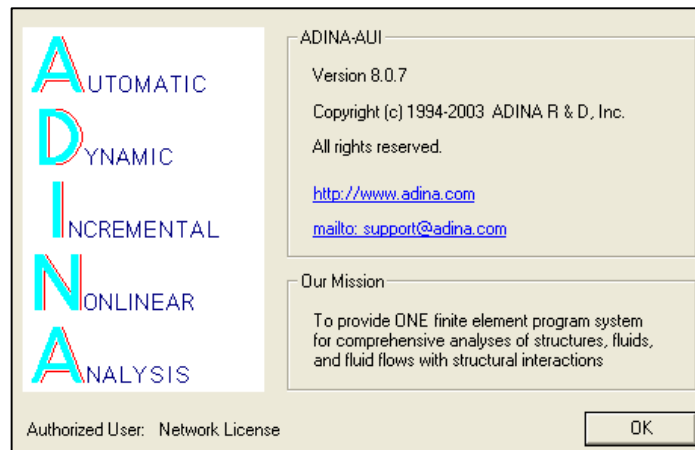


Figura 23: Finestra di informazioni del codice di calcolo ADINA.

Il codice di calcolo ADINA si presenta come un codice ad elementi finiti completo, in grado di analizzare praticamente tutti i comuni problemi dell'ingegneria civile. In particolar modo è possibile eseguire analisi di:

- Statica lineare
- Analisi modale
- Dinamica in regime transitorio lineare e non-lineare
- Dinamica per sovrapposizione modale
- Statica non-lineare
- Analisi di instabilità

Le non linearità modellabili si riferiscono ai materiali, ai vincoli ed alla geometria. Per quanto riguarda i legami di materiale implementati all'interno del codice sono:

- Legame elastico lineare (sia isotropo che ortotropo)
- Legame elastico non lineare uniassiale (definibile dall'utente per elementi *truss*)
- Modelli di plasticità (*von Mises* con incrudimento, plasticità ortotropa, modello di *Ilyushin* per le piastre, modello di *Gurson* per problemi di danneggiamento/frattura)

- Modello termo-elastico (sia isotropo che ortotropo)
- Modello termo-easto-plastico con *creep*
- Concrete Material Model
- Modelli per gomme (Mooney-Rivlin, Ogden, Arruda-Boyce, *hyper-foam model*)
- Geotechnical material model
- User-supplied material model

Il codice ADINA dispone inoltre di un'ampia casistica di formulazioni di elementi finiti (Figura 24 e Figura 25) e fornisce la possibilità di eseguire analisi in piccoli o in grandi spostamenti (secondo l'approccio Lagrangiano Totale o Lagrangiano Aggiornato).

Naturalmente l'utilizzo dei legami sopra citati è soggetto a limitazioni sul loro accoppiamento con determinate tipologie di elementi finiti e determinati approcci cinematici. Nel seguito si evidenzierà la formulazione e le possibilità di utilizzo del *Concrete Material Model*.

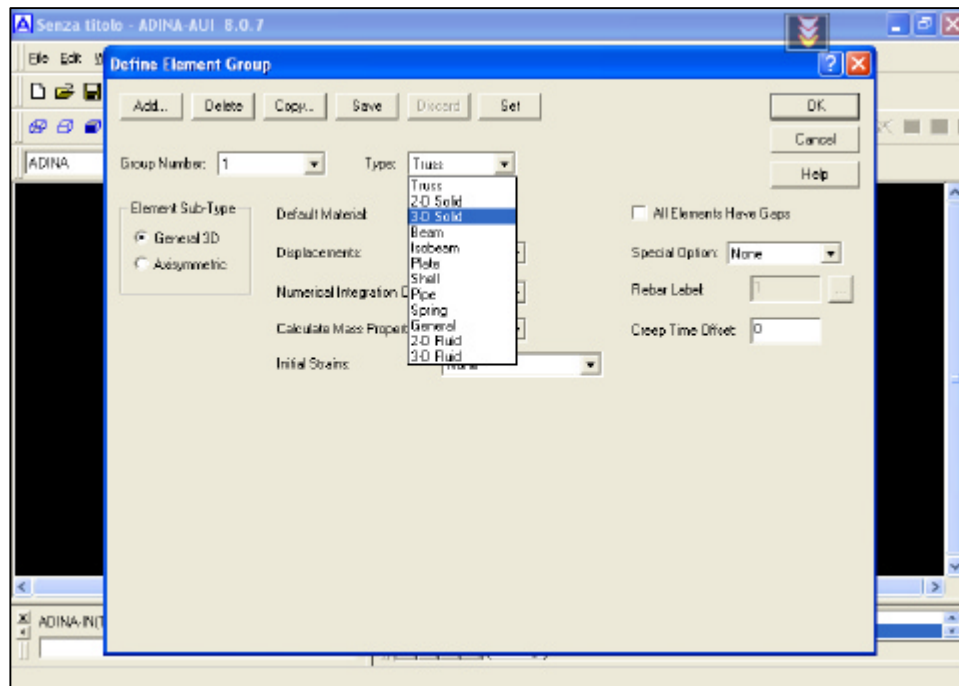


Figura 24: Tipologie di elementi finiti disponibili.

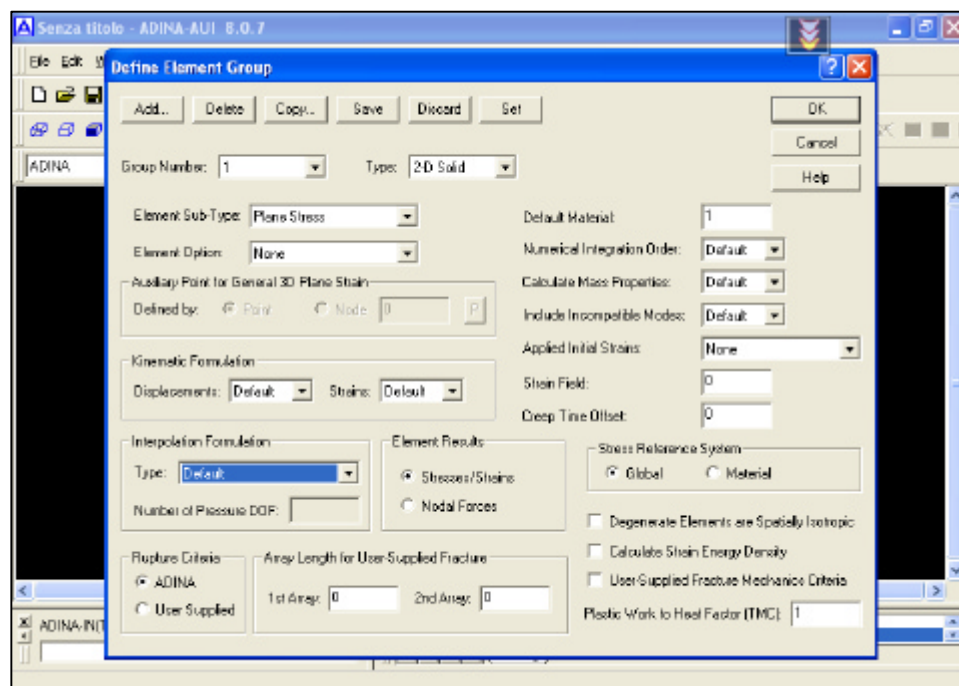


Figura 25: Diversità di formulazione dei singoli elementi finiti.

Il legame Concrete Material Model presente nel codice è stato formulato appositamente per modellare il comportamento del calcestruzzo in campo non lineare. La formulazione è basata su una generalizzazione dei legami costitutivi uni-dimensionali a due e tre dimensioni. Il legame può essere utilizzato per analisi sia in piccoli spostamenti che in grandi spostamenti, ma solo per elementi finiti di tipo *2D solid* e *3D solid*. Se viene utilizzata una formulazione in grandi spostamenti, la cinematica viene descritta con una formulazione Lagrangiana Totale.

I simboli utilizzati nella trattazione analitica del legame sono riassunti di seguito. Da notare che l'apice t indica una quantità riferita al tempo di analisi t , mentre la tilde “ $\sim$ ” indica che il simbolo si riferisce ad una grandezza uniassiale.

tE	modulo di elasticità tangente multiassiale equivalente al tempo t
$\tilde{E}_0$	modulo di elasticità tangente monoassiale al tempo iniziale
$\tilde{E}_s$	modulo di elasticità secante corrispondente al massimo sforzo in compressione
$\tilde{E}_u$	modulo di elasticità secante corrispondente allo sforzo ultimo in compressione
${}^t\tilde{E}_{pi}$	modulo di elasticità tangente monoassiale nella direzione di ${}^t\tilde{s}_{pi}$
${}^te_{ij}$	deformazione totale
e_{ij}	incremento di deformazione
${}^t\tilde{e}$	deformazione uniassiale
$\tilde{e}_c$	deformazione uniassiale corrispondente alla tensione $\tilde{s}_c$
$\tilde{e}_u$	deformazione uniassiale ultima di compressione
${}^ts_{ij}$	tensione totale
s_{ij}	incremento di tensione
${}^t\tilde{s}$	tensione uniassiale
$\tilde{s}_t$	tensione uniassiale di cut-off in trazione
$\tilde{s}_{tp}$	tensione uniassiale post-cracking in trazione
$\tilde{s}_c$	tensione massima uniassiale in compressione
$\tilde{s}_u$	tensione ultima uniassiale in compressione
${}^t\tilde{s}_{pi}$	tensione principale in direzione i

Il legame multiassiale viene derivato da quello uniassiale rappresentato in Figura 26 e governato dall'Equazioni 32.

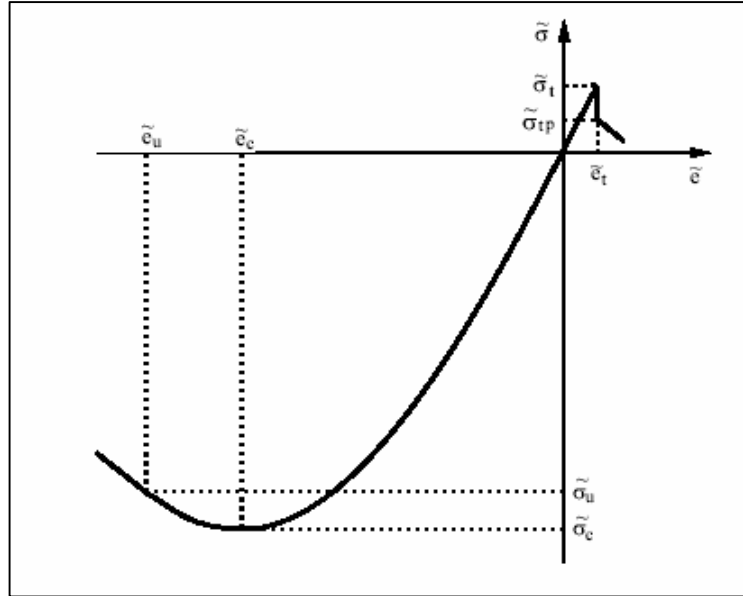


Figura 26: Legame uniassiale sforzo-deformazioni.

Equazioni di legame uniassiale per il calcestruzzo compresso:

$$\frac{\tilde{s}}{t\tilde{s}} = \frac{\left(\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s}\right)\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)}{1 + A\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right) + B\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)^2 + C\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)^3} \quad (32)$$

$$t\tilde{E} = \frac{\tilde{E}_0 \left[1 - B\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)^2 - 2C\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)^3 \right]}{\left[1 + A\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right) + B\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)^2 + C\left(\frac{t\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}_c}\right)^3 \right]^2} \quad (33)$$

in cui:

$$A = \frac{\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_u} + (p^3 - 2p^2) \left(\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} \right) - (2p^3 - 3p^2 + 1)}{[(p^2 - 2p + 1)p]} \quad (34)$$

$$B = \left[\left(2 \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} - 3 \right) - 2A \right] \quad (35)$$

$$C = \left[\left(2 - \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} \right) + A \right] \quad (36)$$

i parametri $\tilde{E}_0$, $\tilde{s}_c$, $\tilde{e}_c$, $\tilde{E}_s = \frac{\tilde{s}_c}{\tilde{e}_c}$, $\tilde{s}_u$, $\tilde{e}_u$, $p = \frac{\tilde{e}_u}{\tilde{e}_c}$, $\tilde{E}_u = \frac{\tilde{s}_u}{\tilde{e}_u}$ sono ottenibili da prove uniassiali e

vengono inseriti all'interno del codice di calcolo tramite la schermata riportata in Figura 27.

Nel caso di calcestruzzo teso, il comportamento viene assunto elastico lineare sino a fessurazione:

$${}^t\tilde{s} = \tilde{E}_0 {}^t\tilde{e} \quad (37)$$

Raggiunta la resistenza a trazione $\tilde{s}_t$, il materiale si fessura. Il legame implementato è del tipo a fessura fissa e diffusa (*smeared crack approach*), ovvero l'inclinazione della fessurazione in ogni punto di gauss dell'elemento finito viene determinata dall'inclinazione degli assi principali nel primo momento in cui la resistenza a trazione del materiale viene superata.

Dopo la fessurazione, vi è la possibilità di considerare un ramo di resistenza residua del materiale per modellare il fenomeno del *tension stiffening* (vedere Figura 28). In questo caso il parametro che governa il comportamento post-cracking del materiale deve essere scelto con attenzione, e si deve tener presente la possibilità di dipendenza dalla discretizzazione della soluzione ottenuta (non obiettività della mesh).

Per risolvere questo problema numerico, ADINA inserisce nel modello di materiale una regolarizzazione basata sull'energia di frattura. In questo caso è il codice stesso a governare il comportamento post-cracking del materiale, valutando il coefficiente γ di Figura 28 in

maniera opportuna a seconda delle dimensioni dell'elemento finito a cui appartiene il punto di Gauss considerato.

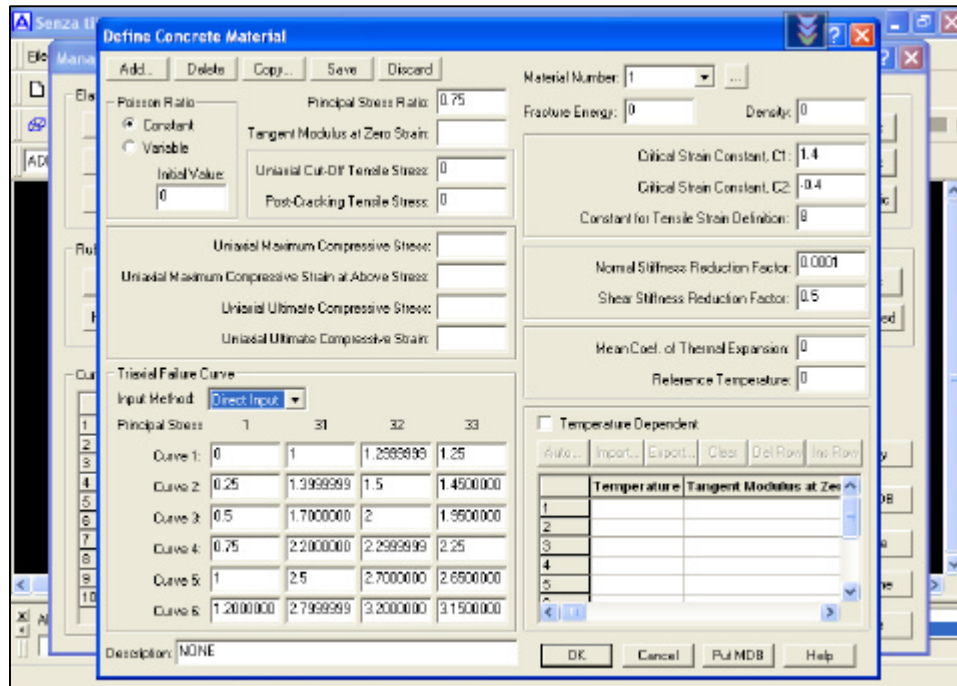


Figura 27: Schermata di inserimento delle proprietà del calcestruzzo.

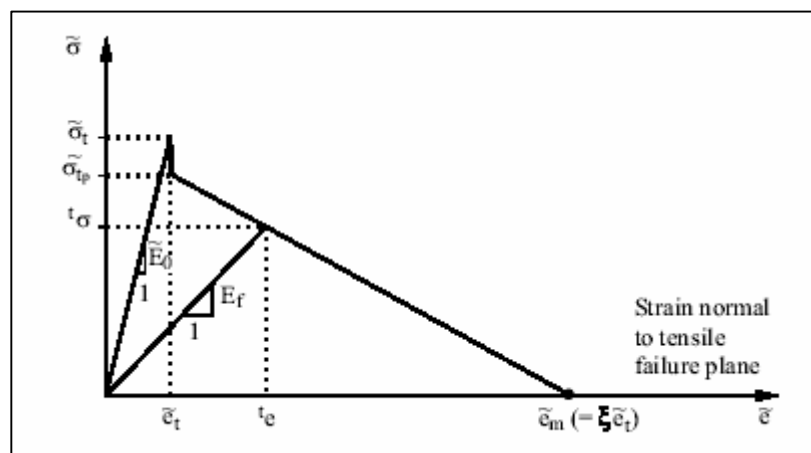


Figura 28: Comportamento post-cracking del materiale in direzione normale alla fessura.

La generalizzazione in tre dimensioni del legame costitutivo in compressione viene eseguita tramite l'introduzione delle curve di involucro dei punti di rottura in condizioni multiassiali.

Dette curve vengono inserite per punti (*triaxial failure curve* in Figura 27) nella schermata relativa al materiale e possono essere rappresentate graficamente dalle curve di Figura 29.

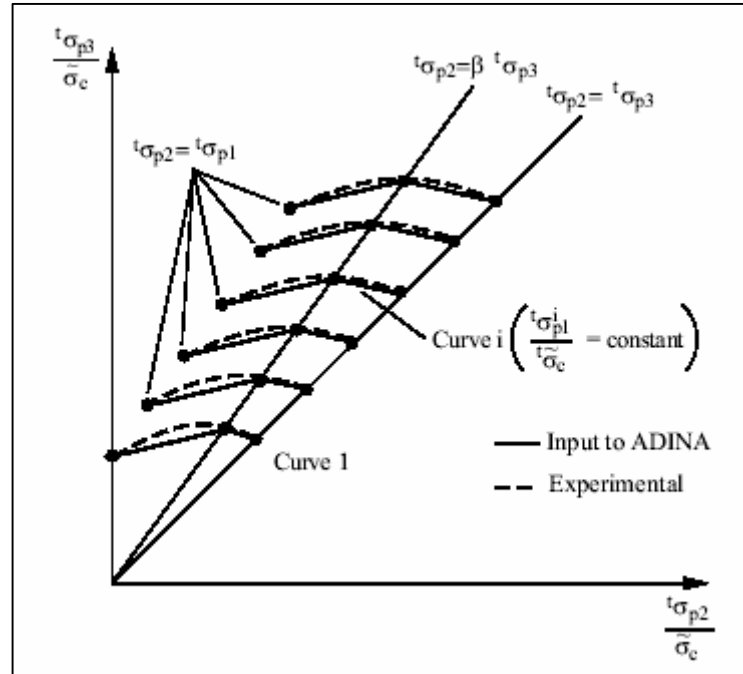


Figura 29: Curve rappresentative del dominio ultimo a compressione triassiale.

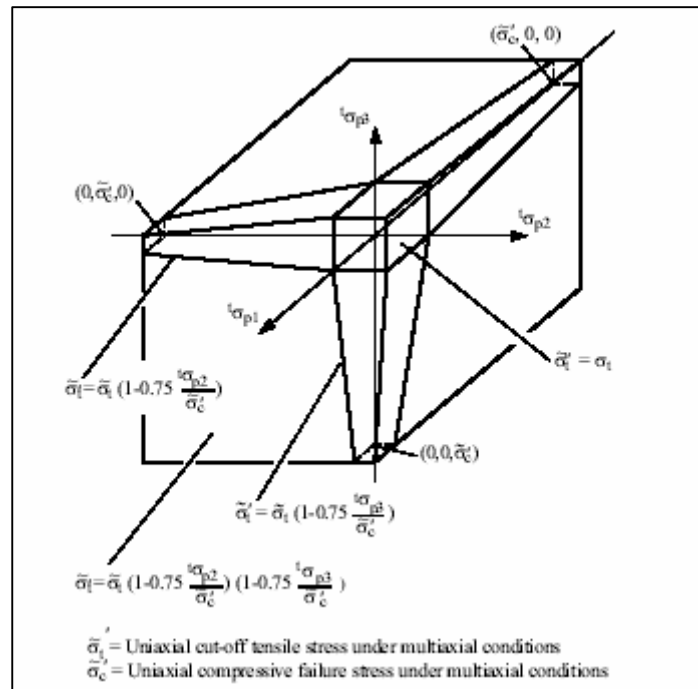


Figura 30: Dominio di rottura tridimensionale per le trazioni.

La Figura 30 mostra la curva involucro di rottura per il dominio delle tensioni di trazione. Per identificare il momento di fessurazione del materiale viene utilizzata la tensione principale nel sistema di riferimento corrente. Da notare che la resistenza a trazione in una determinata direzione viene fatta dipendere anche da un'eventuale compressione lungo le altre direzioni. La fessurazione si verifica quando una tensione principale di trazione supera la resistenza del materiale. In questo caso il piano perpendicolare alla direzione principale della tensione di trazione in questione viene assunto come piano di fessura. L'effetto di questo accadimento è che la rigidezza rispetto le tensioni normali lungo il piano fessurato e a taglio fuori piano vengono ridotte ed il comportamento del materiale viene assunto in stato piano di sforzo. Per quanto riguarda la tensione normale di trazione perpendicolare al piano fessurato essa viene fatta dipendere dal legame rappresentato in Figura 28. Da un legame simile, rappresentato in Figura 31 viene fatta dipendere anche la rigidezza del materiale a taglio lungo il piano della fessura.

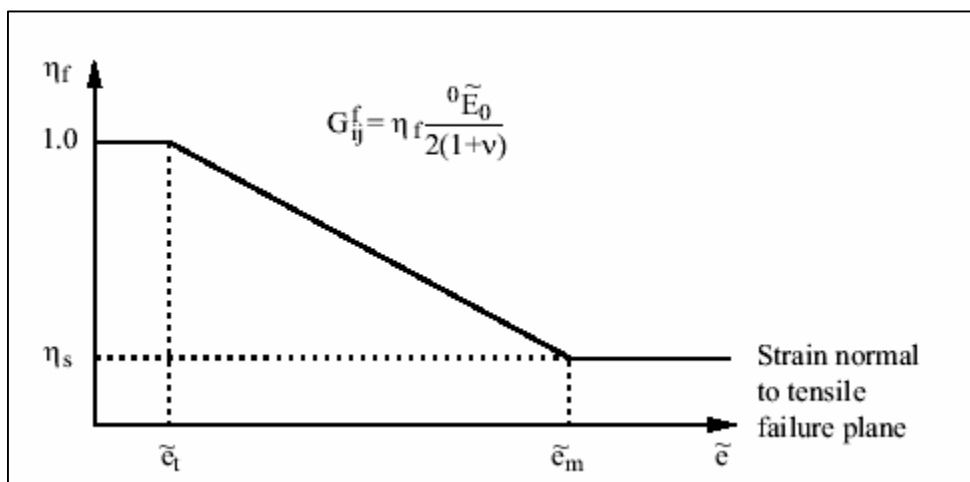


Figura 31: Legge di decadimento per la rigidezza a taglio nel piano della fessura.

Le relazioni riportate precedentemente e generalizzate con le superfici di rottura tridimensionali riportate in seguito, assumono una condizione di carico monotona. Il materiale, inizialmente isotropo, diventa ortotropo una volta raggiunto il punto di fessurazione. Infine, il modello di materiale implementato in ADINA è in grado anche di riprodurre anche situazioni di carico ciclico.

2.3 Codice di calcolo: ALGOR

Il codice di calcolo ALGOR viene sviluppato dalla società ALGOR Inc. di Pittsburgh, PA, USA. La versione corrente, per l'ALGOR è la 14, la versione esaminata è invece la 13, nel suo pacchetto di base. Il sito internet di riferimento è <http://www.algor.com>.



Figura 32: Il logo del codice di calcolo ALGOR.

L'ALGOR è un codice di calcolo che dà molta importanza ai problemi di interazione multifisica alla progettazione meccanica. Con il pacchetto base si ha difatti anche la possibilità di analizzare problemi di elettrostatica, meccanica dei fluidi e trasferimento di calore.

Il codice è in grado di lavorare sia in campo lineare che in campo non lineare, considerando non linearità di geometria, non linearità meccaniche e non linearità di contatto.

Dispone una vasta casistica di formulazioni di elementi finiti, comprendenti vari tipi di elementi *beam*, più tipi di elementi *plate*, più tipi di elementi *shell*, più tipi di elementi *2D solid*, più tipi di elementi *3D solid*. Particolare importanza viene data agli elementi necessari a modellare il contatto e l'urto tra i corpi.

Le analisi numeriche che si possono eseguire sono molteplici, dalle analisi strutturali in campo lineare, ad analisi di instabilità, ad analisi di problemi di interazione multifisica come mostrato nel menù di Figura 33.

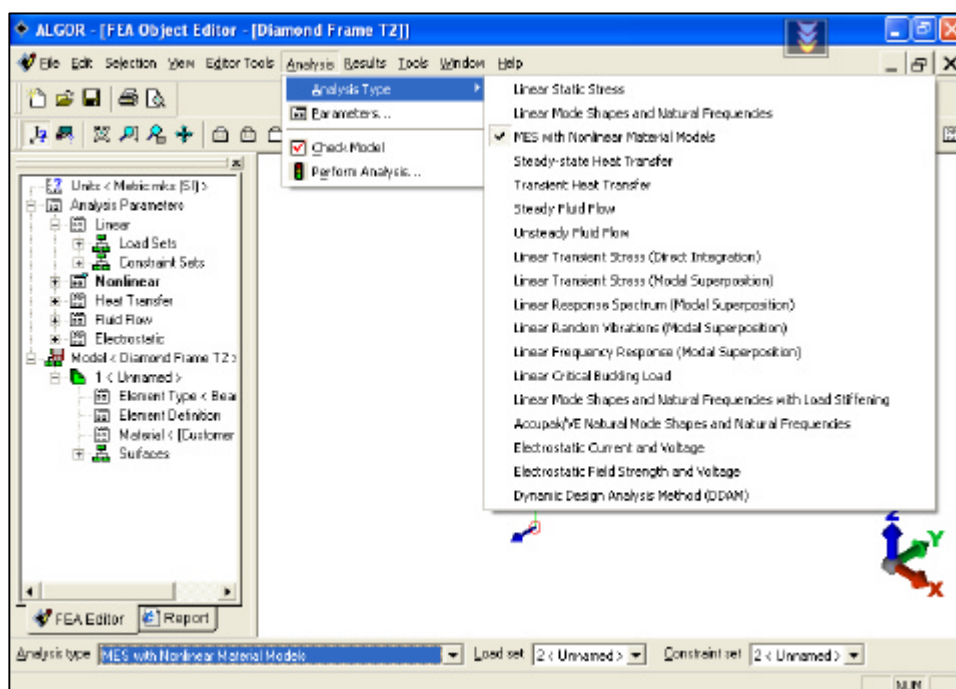


Figura 33: Tipologie di analisi disponibili col codice di calcolo ALGOR.

Per quanto riguarda le non linearità di materiale, nel pacchetto base sono forniti i seguenti legami:

- Lineare elastico
- Non lineare definibile dall'utente
- Modello di plasticità di Drucker-Prager
- Modello di plasticità di von Mises con incrudimento isotropo o cinematico
- Modello ortotropo dipendente dalla temperatura Thermoelastic
- Modello termo-plastico
- Modelli viscoelastici
- Modelli viscoplastici
- Modelli per gomme (*Mooney-Rivlin*, *Multiple-Coefficient Mooney-Rivlin*, *Ogden*)

Il codice non possiede un modello numerico dedicato al calcestruzzo, per questo motivo non verrà ulteriormente indagato in questa sede. Risultati accettabili per alcune tipologie di problemi possono comunque essere ottenuti, tramite un'approssimazione del comportamento del calcestruzzo col modello di plasticità di Drucker-Prager.

2.4 Codice di calcolo: ANSYS

Il codice di calcolo ANSYS viene sviluppato dalla ANSYS Inc., di Canonsburg, PA, USA. La versione corrente, per ANSYS è la 9 (rilasciata il 3 Dicembre 2004), mentre la versione esaminata è la 8. Il sito internet di riferimento è <http://www.ansys.com>.

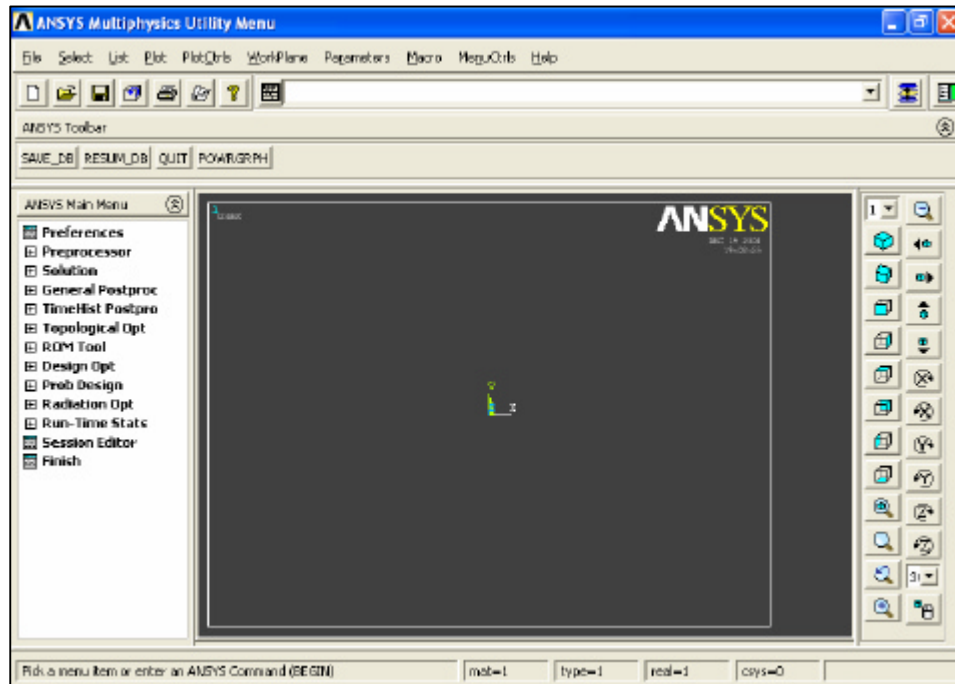


Figura 34: L'ambiente di lavoro di ANSYS.

Il codice di calcolo in esame si propone quale solutore per problematiche legate al campo dell'ingegneria. Il codice è dotato di oltre 150 formulazioni di elementi finiti, tra cui vi sono più di una tipologia di formulazione per ogni tipo di modellazione. Particolarità del codice è quella di legare il nome dell'elemento finito al legame costitutivo o a delle formulazioni specifiche, nel seguito si tratterà diffusamente l'elemento SOLID65 che appartiene agli elementi 3D solid ma è specificatamente studiato per l'analisi delle strutture in calcestruzzo armato.

ANSYS risulta il codice più completo tra quelli esaminati, permettendo di affrontare praticamente qualsiasi tipo di problema numerico si presenti nel campo dell'ingegneria, compresi molti problemi di multifisica.

I solutori interni al codice forniscono la possibilità di affrontare i seguenti tipi di analisi, inerenti al campo dell'ingegneria civile:

- Statica lineare
- Analisi modale
- Analisi armonica
- Dinamica in regime transitorio lineare e non-lineare
- Statica non-lineare
- Dinamica in regime transitorio lineare e non-lineare
- Risposta spettrale ed armonica
- Analisi di instabilità
- Problemi di contatto e di urto
- Meccanica della frattura
- Problemi di fatica

Si tralasciano in questa sede i problemi relativi ad altri campi della fisica e dell'ingegneria, che ANSYS è in grado di affrontare. Per quanto riguarda la non linearità di materiale nel pacchetto base si trovano:

- Modelli di plasticità (*bilineare, multilineare, non lineare, anisotropo, Drucker-Prager, etc.*)
- Modelli di viscoelasticità (in piccole o grandi deformazioni)
- Modello di visco-plasticità (*Anand's Model*)
- Legame per problemi di creep
- Elasticità non lineare (con curve tensione-deformazione definibili dall'utente)
- Modelli iperelastici (*Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden Potential, Arruda-Boyce, etc.*)
- Legame *Concrete* per il calcestruzzo
- Legame di rigonfiamento per irradiazione (*Swelling model*)

Nel seguito si esaminerà in maniera più approfondita l'elemento finito SOLID65 ed il legame *Concrete* dedicato al calcestruzzo.

Come precedentemente evidenziato, l'ANSYS permette di accoppiare il modello costitutivo non lineare del calcestruzzo ad un tipo di elemento finito 3D solid studiato appositamente per i problemi di ingegneria civile che trattano le strutture in calcestruzzo armato.

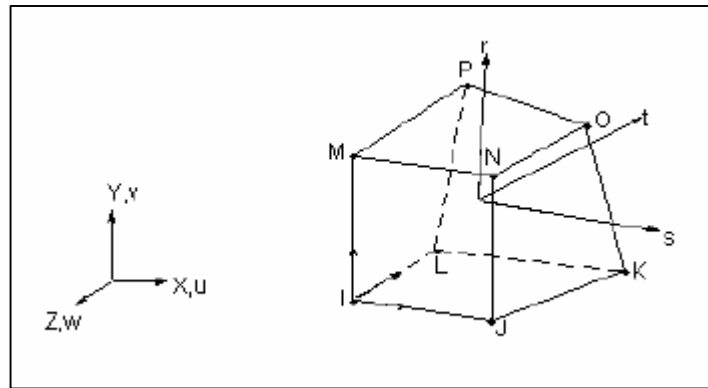


Figura 35: Immagine dei sistemi di riferimento locale e globale per l'elemento SOLID65.

Questo tipo di elemento viene definito SOLID65, o 3-D Reinforced Concrete Solid. La particolarità dell'elemento finito risiede nella possibilità di trattare le barre di armatura in modo diffuso e quindi di semplificare notevolmente la discretizzazione della struttura. L'elemento viene formulato in base alle seguenti assunzioni:

- Vi è possibilità di fessurazione lungo 3 piani ortogonali in ogni punto di Gauss dell'elemento (l'elemento utilizza una formula di quadratura di Gauss $2 \times 2 \times 2$ sia per le rigidezze che per la matrice delle masse).
- La fessurazione viene trattata in modo diffuso all'interno dell'elemento (*smeared band*) e gli effetti di non linearità del comportamento vengono modellati tramite il legame costitutivo del calcestruzzo.
- Il calcestruzzo viene considerato inizialmente isotropo.
- Se si utilizza la possibilità di modellare l'armatura all'interno dell'elemento finito, come permesso dalla formulazione, essa viene considerata in modo diffuso (*smeared*).

La formulazione SOLID65 permette la presenza di 4 materiali all'interno di ogni elemento finito: la matrice di calcestruzzo ed un massimo di 3 materiali rappresentanti 3 direzioni indipendenti di armatura.

L'utente deve fornire le orientazioni della stessa rispetto il sistema di assi globale. La matrice di rigidità del materiale composito viene calcolata come:

$$\underline{\underline{D}} = \left(1 - \sum_{i=1}^{N_r} V_i^R \right) \underline{\underline{D}}^c + \sum_{i=1}^{N_r} V_i^R \underline{\underline{D}}_i^r \quad (38)$$

Dove N_r è il numero di armature diffuse specificate (massimo 3) V_i^R è il rapporto di volume tra il materiale diffuso i ed il volume dell'elemento, $\underline{\underline{D}}^c$ e $\underline{\underline{D}}^r$ sono le matrici di rigidità del materiale calcestruzzo e del materiale acciaio.

La matrice di rigidità dell'acciaio non sistema di riferimento globale $\underline{\underline{D}}^r$ viene formulata tramite una trasformazione di coordinate, partendo dalla matrice di rigidità locale $\underline{\underline{D}}^R$ dell'armatura, in cui l'unico termine non nullo è il termine di rigidità assiale associato alla direzione locale della barra di armatura.

Vale difatti la relazione:

$$\underline{\underline{D}}^R = \left(\underline{\underline{T}}^r \right)^T \cdot \underline{\underline{D}}^r \cdot \underline{\underline{T}}^r \quad (39)$$

Dove $\underline{\underline{T}}^r$ è un'opportuna matrice di rotazione che il codice valuta in base all'orientazione definita dall'utente (Figura 36).

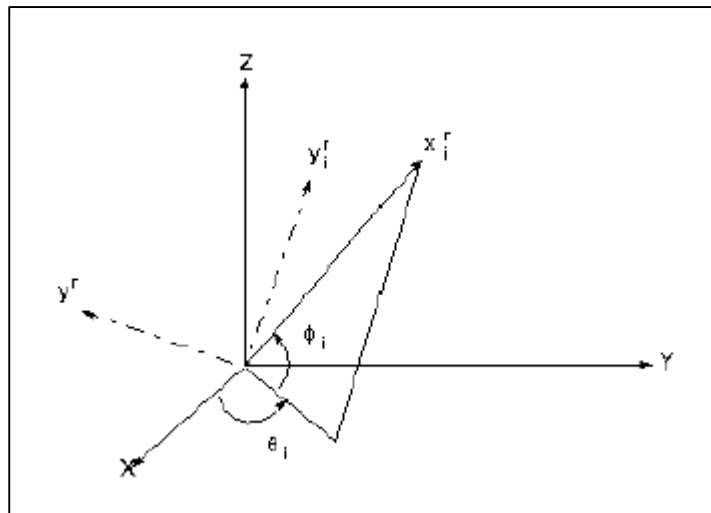


Figura 36: Orientazione locale e globale i uno strato di armatura diffusa.

L'elemento finito SOLID65 può essere utilizzato con il legame *Concrete* che ANSYS possiede per modellare il comportamento del calcestruzzo. In questo legame viene considerata una superficie di rottura funzione dello stato tensionale multiassiale nella forma:

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad (40)$$

in cui F è una funzione dello stato tensionale nel riferimento principale, S rappresenta la superficie di rottura che dipende dal tipo di calcestruzzo impiegato ed f_c è la resistenza a compressione del calcestruzzo.

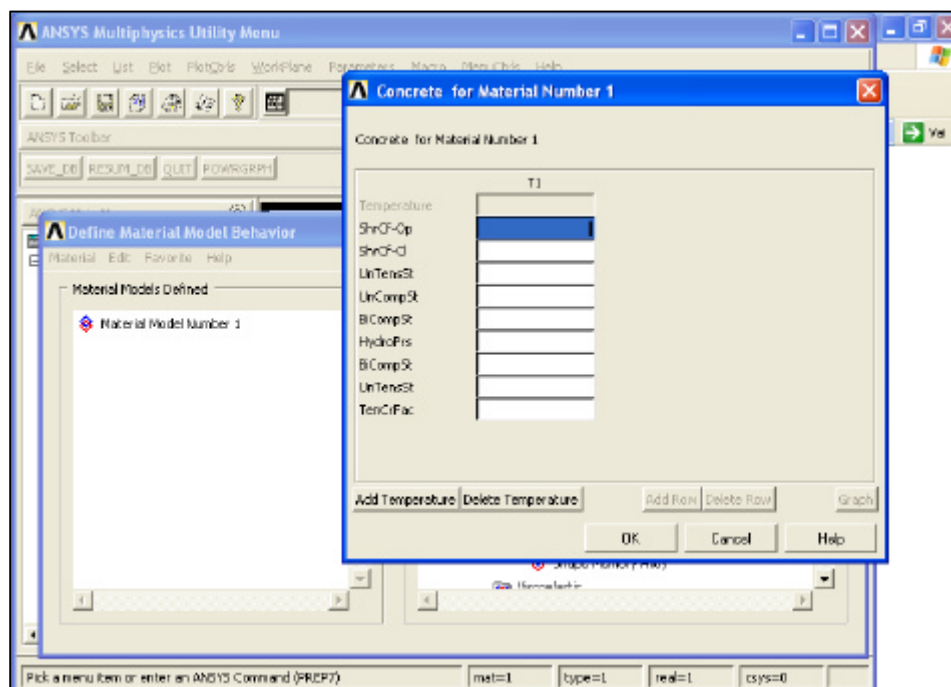


Figura 37: Schermata di inserimento dei dati di input per il modello *Concrete*.

Tra i parametri che ANSYS chiede come dati di input, vi sono:

- f_t resistenza ultima a trazione uniassiale
- f_c resistenza ultima a compressione uniassiale
- f_{cb} resistenza ultima a compressione biassiale

- s_h^a stato di pressione idrostatico esterno
 f_1 resistenza ultima a compressione biassiale sovrapposta alla s_h^a
 f_2 resistenza ultima a compressione uniassiale sovrapposta alla s_h^a

Tuttavia se vengono specificate le sole costanti f_t e f_c ANSYS calcola le rimanenti come da default (a parte, naturalmente, la s_h^a).

Nell'Equazione 14 sia F che S sono funzioni delle tensioni principali s_1, s_2, s_3 . Ordinando le tensioni in modo che la s_1 rappresenti la massima e la s_3 la minima, il codice individua i seguenti quattro campi:

- 1) $0 = s_1 = s_2 = s_3$ (compressione – compressione – compressione)
- 2) $s_1 = 0 = s_2 = s_3$ (trazione – compressione – compressione)
- 3) $s_1 = s_2 = 0 = s_3$ (trazione – trazione – compressione)
- 4) $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ (trazione – trazione – trazione)

In ogni dominio vengono assunti differenti tipi di funzioni per descrivere la superficie di rottura e lo stato tensionale del materiale.

Nel dominio di rottura 1) è stato implementato il criterio di Willam and Wrake [73] che fornisce una superficie di rottura come quella evidenziata in Figura 38.

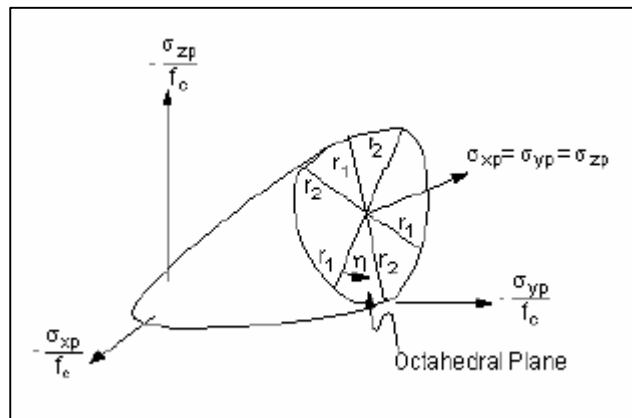


Figura 38: Criterio di rottura nello spazio delle tensioni principali per il dominio 1).

Non viene riportata la trattazione completa riguardante la formulazione delle espressioni F ed S riguardante i 4 domini, presente nel manuale di utilizzo del codice. Nel caso di tensioni biassiali, il codice riproduce il dominio di rottura come rappresentato in Figura 38.

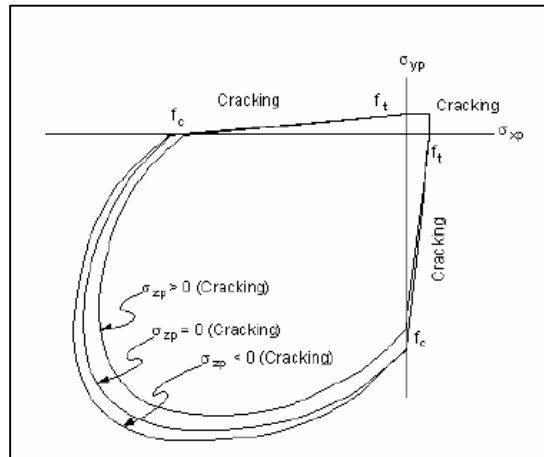


Figura 39: Dominio di rottura per tensioni biassiali.

Si noti anche la variabilità del dominio con la dipendenza di un'eventuale tensione lungo il terzo asse. La presenza di una compressione produce, giustamente, un allargamento del dominio di rottura mentre un'eventuale trazione ne causa una contrazione.

2.5 Codice di calcolo: LUSAS

Il codice di calcolo LUSAS viene sviluppato dalla società FEA di Surrey, Inghilterra. La versione corrente, per LUSAS è la 13, che è anche la versione esaminata. Il sito internet di riferimento è <http://www.lusas.com>.

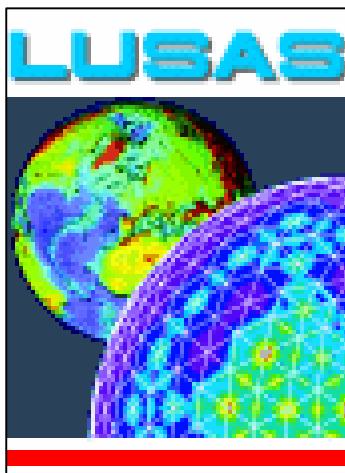


Figura 40: Il logo del codice di calcolo LUSAS.

Il codice di calcolo in esame si propone quale solutore per problematiche legate al campo dell'ingegneria civile con particolare attenzione per i ponti e per le strutture in materiale composito, per i quali esistono prodotti specifici addizionali al codice di calcolo di base.

Il codice è dotato di una vasta casistica di formulazioni di elementi finiti, comprendenti vari tipi di elementi *beam*, più tipi di elementi *plate*, più tipi di elementi *shell*, più tipi di elementi *2D solid*, più tipi di elementi *3D solid*, vari tipi di elementi speciali per modellare il contatto tra i corpi. I solutori interni al codice forniscono la possibilità di affrontare i seguenti tipi di analisi:

- Statica lineare o non lineare
- Dinamica lineare o non lineare
- Creep lineare o non lineare
- Analisi delle frequenze di vibrazione in campo lineare o non lineare
- Problemi termo-meccanici lineari o non lineari

Le non linearità considerate dal codice riguardano sia il materiale, che i vincoli o gli spostamenti che possono essere modellati tramite una formulazione cinematica:

- Lagrangiana Totale
- Lagrangiana Aggiornata
- Euleriana
- Co-rotazionale

Per quanto riguarda le caratteristiche dei materiali, questi possono essere assunti come:

- Isotropi o ortotropi, in campo lineare o non lineare utilizzando modelli di plasticità, di creep, di danneggiamento
- Anisotropic
- Legami particolari per modellare i problemi di contatto e di impatto
- Modelli per gomme con comportamento iperelastico
- Modelli speciali per materiali compositi.

Per quanto riguarda il calcestruzzo, il comportamento può essere modellato tramite 3 legami, risalenti a 2 famiglie. Tra i modelli a danneggiamento vi sono infatti i modelli di Simo e di Oliver, mentre nella famiglia dei legami di plasticità è stato implementato il Multi-Crack Concrete Model. Nelle pagine seguenti si esamineranno brevemente questi tre modelli, i primi due (Figura 41), di carattere generale ed applicabili ad alcune tipologie di strutture in calcestruzzo, il terzo (Figura 42) studiato appositamente per questo tipo di materiale.

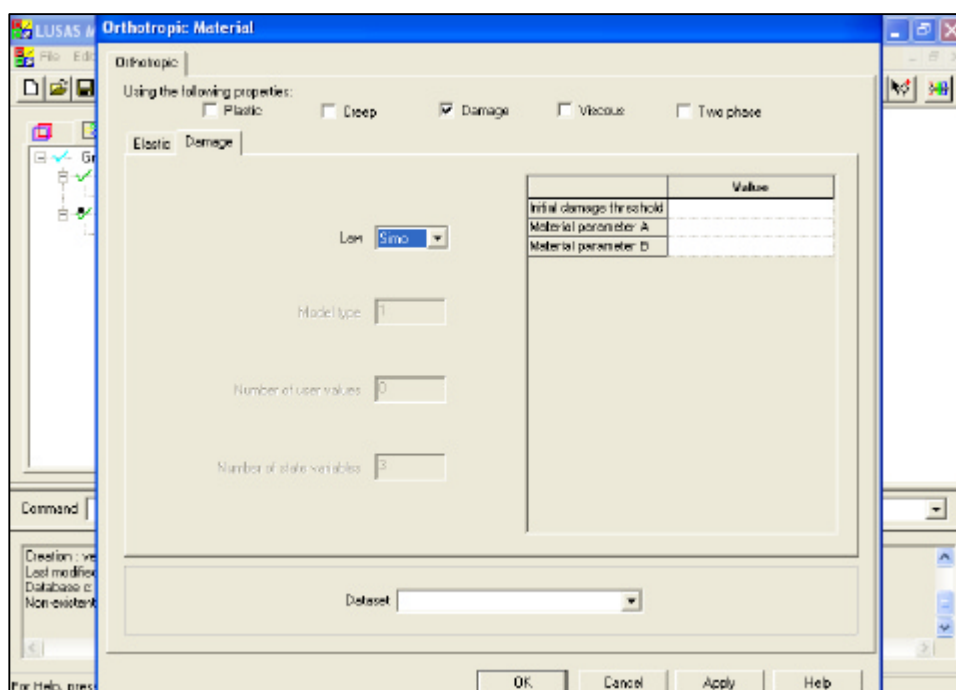


Figura 41: Schermata di inserimento delle proprietà meccaniche per i modelli a danneggiamento.

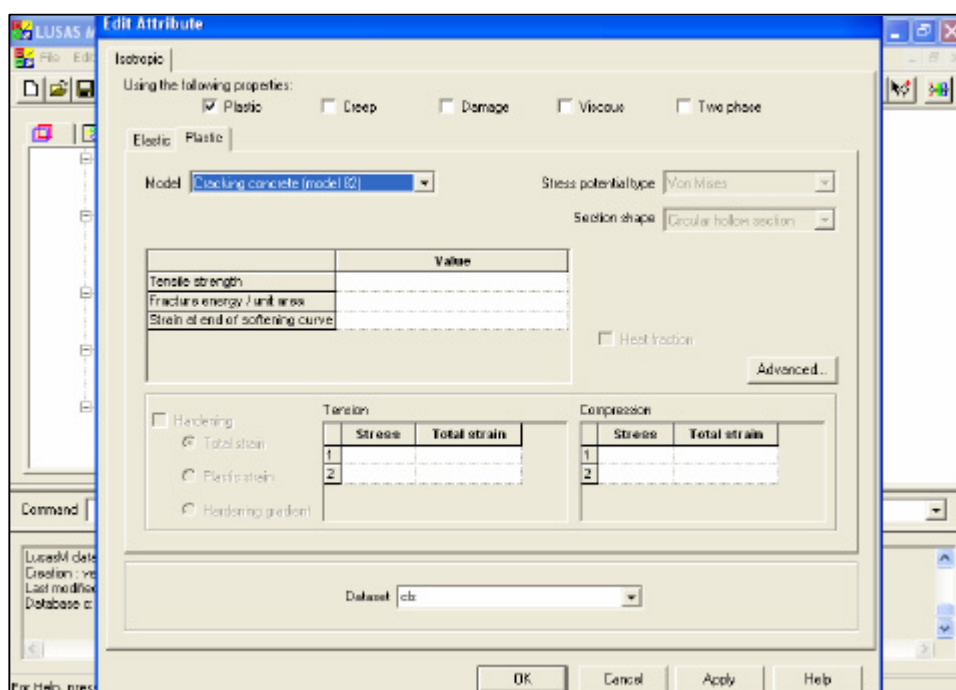


Figura 42: Schermata di inserimento delle proprietà meccaniche per il modello Multi-Crack Concrete.

2.5.1 Damage Models

I modelli di danneggiamento per i continui sono basati sulla termodinamica dei processi irreversibili. LUSAS implementa un modello di danneggiamento isotropo, in cui lo stato di danno può essere identificato dalla sola variabile scalare d . I modelli di danno implementati nel codice fanno dipendere il danneggiamento del materiale da una norma dell'energia complementare elastica. Questi modelli vengono indicati coi nomi:

- Modello di danneggiamento di Simo.
- Modello di danneggiamento di Oliver.

Il modello di danneggiamento di Simo prevede un comportamento simmetrico tra trazione e compressione, il modello di Oliver è in grado di differenziare i due comportamenti.

Come precedentemente notato, entrambi i modelli sono basati sul potenziale di energia complementare, il vettore delle deformazioni elastiche può quindi essere definito come:

$$\underline{e}^e = d_s \frac{\partial \Lambda^0}{\partial \underline{s}} \quad (41)$$

in cui il termine d_s è valutato in base alla variabile di danno d come:

$$d_s = \frac{1}{1-d} \quad (42)$$

Per un materiale con comportamento elastico lineare, l'energia complementare può essere scritta come:

$$\Lambda^0(\underline{s}) = \frac{1}{2} \underline{s}^T \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{s} \quad (43)$$

il vettore di deformazione elastica diviene quindi:

$$\underline{e}^e = d_s \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{s} \quad (44)$$

Le teorie di danneggiamento isotropo si differenziano nel modo in cui la variabile di danno d_s evolve con l'evolversi della storia di carico. In particolare, ogni teoria di danneggiamento deve considerare:

- Una condizione che identifichi l'inizio del danneggiamento (Damage condition).
- Una regola di evoluzione del danno che caratterizzi la risposta del materiale (Damage rule).

La regione delle tensioni in cui il materiale non risulta danneggiato può essere descritta tramite una funzione $g(\bar{t}, r)$ che all'istante t può identificarsi in:

$$g(\bar{t}, r) = {}^t\bar{t} - {}^t r \leq 0 \quad (45)$$

dove ${}^t r$ è un opportuno valore di soglia, mentre la variabile ${}^t\bar{t}$ viene calcolata tramite una norma dell'energia complementare:

$${}^t\bar{t} = g \left(2\Lambda^0 \left({}^t \underline{s} \right) \right)^{1/2} \quad (46)$$

Nel modello a danneggiamento di Simo la variabile g è assunta unitaria, mentre nel modello di Oliver viene assunta pari a:

$$g = \left(q + \frac{1-q}{n} \right) \quad (46)$$

In questa equazione, n è il rapporto tra la resistenza a compressione e quella a trazione del materiale, mentre q è pari a:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_e^i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_e^i|} \quad (48)$$

dove si è indicato con $\langle s_e^i \rangle$ i valori risultanti dalle seguenti relazioni:

$$\langle s_e^i \rangle = \begin{cases} s_e^i & \text{se } s_e^i \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (49)$$

La variabile ${}^t r$ è una misura del danneggiamento subito dal materiale e viene fissata dalla seguente relazione:

$${}^t r = \max \left\{ {}^0 r, \max \left({}^t \bar{t} \right) \right\} \quad (50)$$

in cui ${}^0 r$ denota il valore di soglia superato il quale inizia il danneggiamento.

La regola di evoluzione del danno, definisce l'evolversi della variabile scalare d rispetto alla norma utilizzata precedentemente:

$$\dot{d} = {}^t \dot{m} \frac{\partial {}^t G \left({}^t \bar{t}, d \right)}{\partial \bar{t}} \quad (51)$$

dove $\dot{m} \geq 0$ è un parametro di consistenza (moltiplicatore di danno) che definisce la condizione di carico o di scarico in accordo con le relazioni di Kuhn-Tucker:

$$\dot{m} \geq 0, \quad g(\bar{t}, r) \leq 0, \quad \dot{m} g(\bar{t}, r) = 0 \quad (52)$$

Per semplicità il moltiplicatore di danno viene assunto $\dot{m} = \dot{r}$, dalle equazioni precedenti è possibile in questo caso ottenere:

$$\dot{m} = \frac{g^2}{\bar{t}} \underline{s}^T \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\dot{s}} \quad (53)$$

La funzione G viene indicata col termine di *potenziale di danneggiamento*.

Per il calcestruzzo Simo utilizza:

$$G(t, r) = 1 - \frac{{}^0r(1-A)}{{}^t_r} - A \exp \left[B \left({}^0r - {}^t_r \right) \right] \quad (54)$$

in cui le variabili A e B sono caratteristiche del materiale e rappresentano dei dati di input dell'analisi.

Il modello di Oliver utilizza una funzione di potenziale di danno differente:

$$G(t, r) = 1 - \frac{{}^0r}{{}^t_r} - \exp \left[A \left(1 - \frac{{}^t_r}{{}^0r} \right) \right] \quad (55)$$

in cui compare una sola variabile di input, chiamata A . In entrambe le funzioni 0r è un valore che identifica la soglia di inizio del danneggiamento.

2.5.2 Multi-Crack Concrete Model

Il modello Multi-Crack implementato in LUSAS per lo studio specifico di strutture in calcestruzzo, si basa sulle teorie sviluppate da Jefferson [35] nel campo della plasticità. Il modello considera la fessurazione derivante da tensioni di trazione, mentre in compressione considera un comportamento elastico lineare. L'ipotesi è ragionevole per la maggior parte di strutture in calcestruzzo armato, è richiesta tuttavia attenzione nel caso di strutture sollecitate da forti tensioni triassiali di compressione, per le quali il modello fornirebbe una resistenza illimitata.

Il modello assume, in ogni punto di integrazione, un numero predefinito di possibili piani di fessurazione. Nella formulazione inserita nel codice LUSAS sono definiti 21 piani di fessurazione potenziale per gli elementi finiti tridimensionali (*3D solid*), 9 piani per gli elementi bidimensionali (8 piani perpendicolari all'elemento ed 1 piano parallelo).

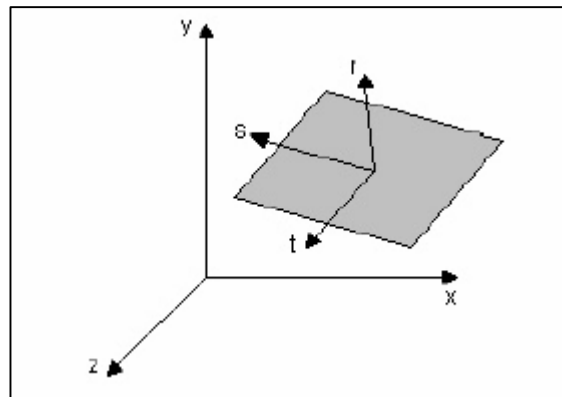


Figura 43: Coordinate locali e globali del piano di fessurazione.

Per semplificare l'implementazione del modello numerico sono state assunte le seguenti ipotesi:

- Solamente 3 delle superfici di frattura possono essere attive in un determinato momento dell'analisi. Queste superfici sono quelle che maggiormente risultano disposte in posizione normale alle tensioni di trazione principali. Per ogni piano di fessurazione viene utilizzato un criterio di fessurazione basato su una superficie di snervamento assunta di forma iperbolica (asintotica alla superficie di snervamento di Coulomb).

- Lo stato di fessurazione di un piano viene ricordato tramite la memorizzazione di una variabile scalare, la deformazione plastica effettiva, che viene calcolata accumulando gli incrementi di deformazione plastica calcolati durante le analisi numeriche.

Il modello implementato rientra nella categoria dei modelli a fessura diffusa. Quando si verifica una fessurazione il modello considera una resistenza residua del calcestruzzo teso variabile con legge esponenziale (Figura 44).

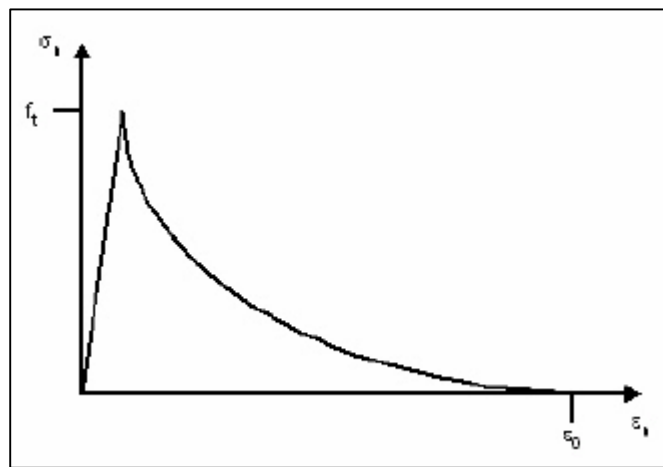


Figura 44: Curva tensioni-deformazioni per trazione in direzione normale alla fessura.

Per risolvere il problema della non obiettività della mesh, il modello è in grado di utilizzare un approccio basato sull'energia di frattura, che prevede una deformazione ultima di trazione pari a:

$$e_0 \cong \frac{5G_f}{w_c f_t} \quad (56)$$

in cui w_c indica una dimensione caratteristica dell'elemento finito. Se nella schermata di ingresso dati (Figura 42) viene inserito un valore nullo di deformazione ultima a trazione (*strain at end of...*) LUSAS calcola il detto valore utilizzando il dato riguardante l'energia di frattura e l'Equazione 56. In alternativa, se è specificato un valore di deformazione ultima, il

dato riguardante l'energia di frattura non viene utilizzato e la regolarizzazione non viene eseguita. Per le successive derivazioni si utilizzeranno i seguenti simboli:

E	modulo di elasticità
n	rapporto di Poisson
f_t	resistenza a trazione
G_f	energia di frattura per unità di area
e_0	deformazione ultima in trazione
m	coefficiente di attrito post-fessurazione (default = 1.0)
y	coefficiente di dilatanza post-fessurazione (default = 0.0)
r	rapporto tra la resistenza a taglio puro e la resistenza a trazione (default = 1.5)
a	coefficiente di riduzione

Il vettore di incremento di deformazione può essere scomposto nel contributo elastico e nel contributo plastico, ove con plastico si intende la componente di deformazione dovuta alla fessurazione:

$$\underline{\dot{e}} = \underline{\dot{e}}_e + \underline{\dot{e}}_f \quad (57)$$

In ogni fessura viene prodotta della deformazione plastica, le tre fessure attive vengono identificate tramite il pedice k_j con j variabile da 1 al numero di fessure m . Se si indica con $\underline{N}_{=k_j}$ la matrice di trasformazione dal sistema di riferimento globale (in cui si hanno 6 deformazioni) al sistema di riferimento locale del piano di fessurazione (in cui si hanno le 3 deformazioni principali), l'incremento di deformazione plastica può scriversi:

$$\underline{\dot{e}}_f = \sum_{j=1}^m \underline{N}_{=k_j}^T \dot{e}_{k_j} \quad (58)$$

in cui l'incremento locale di deformazione plastica viene calcolato come:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_i = \dot{l}_i \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{s}} \right)_i \quad (59)$$

dove come di consuetudine G è un potenziale plastico, mentre con $\dot{l}_i$ si è indicato il moltiplicatore plastico. L'incremento totale di tensione viene perciò calcolato come:

$$\underline{\dot{s}} = \underline{\underline{D}}(\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}_f) = \underline{\underline{D}} \left(\underline{\dot{\epsilon}} - \sum_{j=1}^m \underline{N}_{k_j}^T \dot{l}_{k_j} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{s}} \right)_{k_j} \right) \quad (60)$$

La tensione locale è legata alla tensione nel sistema di riferimento globale dalla stessa relazione che lega le deformazioni:

$$\dot{\underline{s}}_i = \underline{N}_i \underline{\dot{s}} \quad (61)$$

La funzione di snervamento, che viene applicata in ogni piano di fessurazione, dipende dal vettore di tensione locale e viene assunta pari a:

$$F = \frac{s_r}{2} \left(1 + \left(\frac{m}{r} \right)^2 \right) + \frac{1}{2r^2} \sqrt{(r^2 - m^2)s_r^2 + 4r^2(s_s^2 + s_t^2)} - f_s \leq 0 \quad (62)$$

Una sezione della superficie di snervamento viene illustrata in Figura 45.

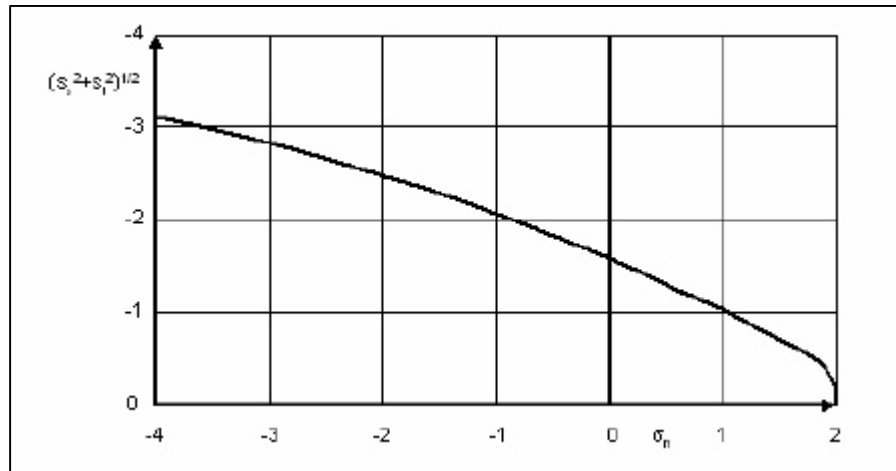


Figura 45: Superficie di snervamento nel sistema di riferimento locale.

Il potenziale plastico G viene descritto da una funzione simile alla superficie di snervamento, con la differenza che al posto del coefficiente di attrito post-fessurazione è inserito il coefficiente di dilatanza:

$$G = \frac{s_r}{2} \left(1 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right) + \frac{1}{2r^2} \sqrt{(r^2 - m^2) s_r^2 + 4r^2 (s_s^2 + s_t^2)} - f_s \leq 0 \quad (63)$$

il coefficiente f_s che rientra nelle ultime due equazioni viene chiamato col nome di tensione equivalente, ed è funzione dell'accumulo della deformazione plastica nella fessura. Viene calcolato come:

$$f_s = f_t e^{-5(\bar{e}/e_0)} \quad (64)$$

in cui la deformazione equivalente plastica è definita come:

$$\bar{e} = \int_t \dot{\bar{e}} \, dt = \int_t \sqrt{\dot{e}_r^2 + a^2 (\dot{e}_s^2 + \dot{e}_t^2)} \, dt \quad (65)$$

Le relazioni tra l'incremento di deformazione e l'incremento di tensione vengono derivate applicando le condizioni di consistenza a tutte le superfici di snervamento attive. Per la derivazione in oggetto si rimanda a [35].

In ultimo si evidenzia che la correzione delle tensioni in campo plastico viene effettuata tramite uno schema di Eulero all'indietro. Per default viene fissata una tolleranza molto severa sull'algoritmo, che comunque può essere modificata agendo direttamente su alcuni parametri interni del codice. Nel caso che la correzione non riuscisse a convergere, l'analisi riprende con un carico ridotto.

2.6 Codice di calcolo: SAP2000

Il codice di calcolo SAP2000 viene sviluppato dalla società Computer and Structures Inc. di Berkeley, CA, USA. La versione corrente, per il SAP2000 è la 8, mentre la versione esaminata in questa sede è la 7.42. Il sito internet di riferimento è <https://www.csiberkeley.com>.

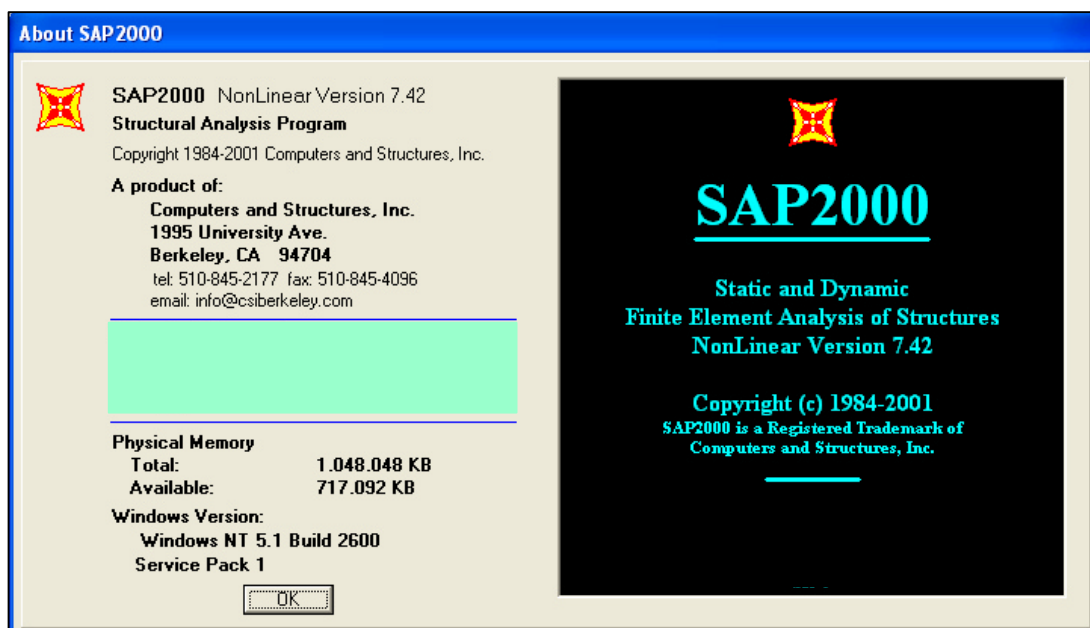


Figura 46: Il logo del codice di calcolo SAP2000.

Il codice di calcolo SAP2000 lavora essenzialmente in ambito elastico lineare. Possiede una libreria di almeno 1 elemento finito per ogni tipologia di modellazione (*plate*, *2D solid*, *3D solid*, *beam*, *truss*) e dispone di un solutore statico lineare e dinamico per sovrapposizione modale.

Non possiede quindi formulazioni di elementi finiti in grandi spostamenti, ma può considerare fenomeni di instabilità tramite il metodo P- Δ . Nascono delle limitazioni nei problemi di dinamica in cui sia necessario considerare la non linearità geometrica, dovute sia al metodo di soluzione per sovrapposizione modale sia per le limitazioni del metodo P- Δ .

Benché il codice sia essenzialmente di carattere lineare, vi è la possibilità di inserimento di non linearità di materiale (o di contatto) concentrate, che il codice tratta modificando iterativamente il vettore dei termini noti in base al vettore di squilibrio interno degli elementi. Vi è tuttavia la possibilità di analizzare strutture a telaio in campo non lineare di materiale tramite l'inserimento dei legami momento-curvatura e simili per le altre componenti di sollecitazione (Figura 47).

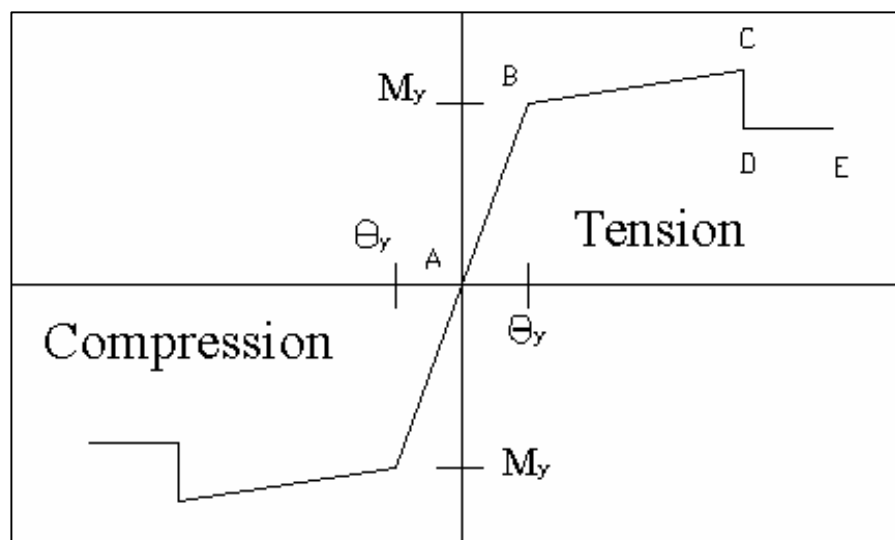


Figura 47: Diagramma momento curvatura inseribile nel codice di calcolo.

Le analisi in campo non lineare di materiale si limitano quindi alle sole analisi col metodo delle cerniere plastiche per i telai. Benché le possibilità di analisi siano limitate, il codice è in grado di affrontare analisi di tipo push-over su strutture a telaio. Dette analisi rivestono oggi una particolare importanza, soprattutto alla luce delle nuove normative sismiche (Ordinanza 3274) che contemplano dette analisi per verificare la duttilità della struttura e la sequenza di formazione delle cerniere plastiche, ma anche come metodo di progettazione in sostituzione dei metodi di analisi lineari.

La formulazione del legame costitutivo mediante inserimento delle leggi momento-curvatura, è naturalmente poco generalizzabile, ma risulta semplice ed accurata per le strutture a cui è applicabile.

2.6 Codice di calcolo: Straus7

Il codice di calcolo STRAUS7 (o STRAND7 per i paesi fuori dall'Europa) viene sviluppato dalla G+D computing di Sydney, Australia. La versione corrente, per lo STRAND7 è la 2.3.5, mentre la versione esaminata è la 1.05.6. Il sito internet di riferimento è <http://www.strand7.com>.



Figura 48: L'ambiente di lavoro di Straus7.

Il codice di calcolo in esame si propone quale solutore per problematiche legate al campo dell'ingegneria civile e geotecnica, aeronautica, navale e biomedica. Il codice è dotato di una vasta casistica di formulazioni di elementi finiti, comprendenti elementi *beam*, elementi *cable*, elementi *truss*, più tipi di elementi *plate*, più tipi di elementi *shell*, più tipi di elementi *2D solid*, più tipi di elementi *3D solid*. I solutori interni al codice forniscono la possibilità di affrontare i seguenti tipi di analisi:

- Statica lineare
- Frequenze naturali
- Instabilità dell'equilibrio (buckling)
- Statica non-lineare
- Dinamica in regime transitorio lineare e non-lineare
- Risposta spettrale ed armonica
- Trasmissione del calore

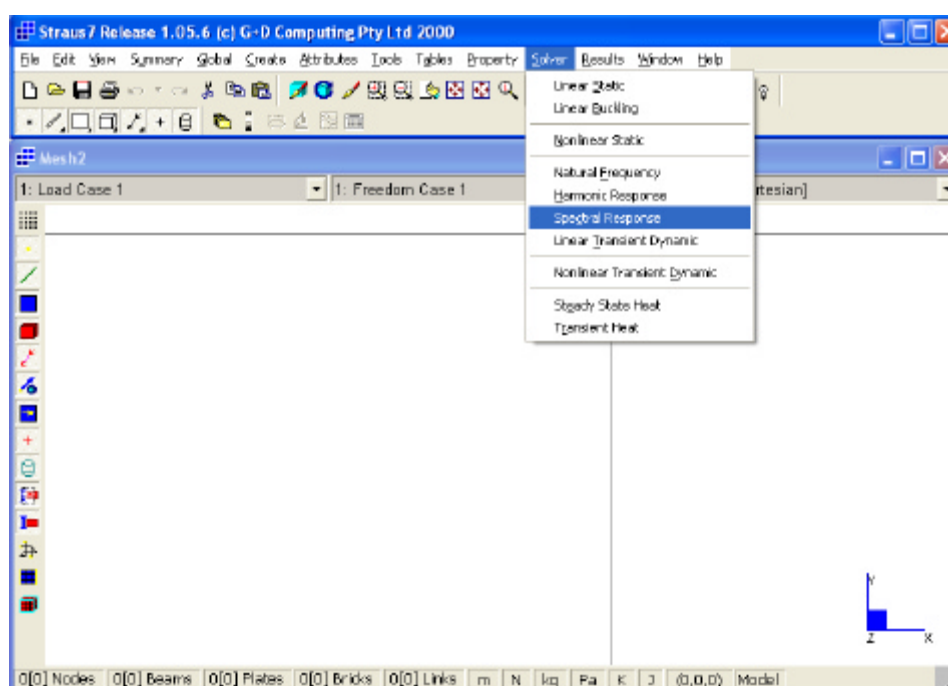


Figura 49: Tipologie di analisi disponibili col codice di calcolo Straus7.

Il codice lavora quindi sia in elasticità lineare che non lineare, dando la possibilità di considerare sia la non linearità di spostamento che la non linearità di materiale. I materiali possono essere definiti in qualsiasi momento, o ricavati da un catalogo materiali modificabile dall'utente. I modelli di materiale previsti in Straus7 sono:

- Isotropo elastico lineare
- Ortotropo elastico lineare
- Anisotropo elastico lineare
- Composito elastico lineare
- Gomma (*Mooney-Rivlin, Generalised Mooney-Rivlin, Neo-Hookean, Ogden*)
- Suolo (Duncan-Chang)
- Mohr-Coulomb
- Drucker-Prager
- Modello definibile dall'utente.

Il codice non possiede un modello numerico dedicato al calcestruzzo, per questo motivo non verrà ulteriormente indagato in questa sede. Risultati accettabili per alcune tipologie di problemi possono comunque essere ottenuti, tramite un'approssimazione del comportamento del calcestruzzo col modello di plasticità di Drucker-Prager.

CAPITOLO 3

ESEMPI DI APPLICAZIONI NUMERICHE

3.1 Introduzione

In questo capitolo si mostrano alcune applicazioni eseguite con i codici ADINA e LUSAS, per mostrarne le potenzialità sia nell'analisi che nella progettazione di strutture in calcestruzzo armato.

Per il codice di calcolo ADINA viene affrontata la modellazione di una trave di copertura tipo *shed* di geometria non regolare. L'avvicinamento all'analisi finale della trave prevede la validazione del legame costitutivo tramite il raffronto coi risultati sperimentali ottenuti nel campo delle tensioni biassiali (sia solo normali che anche di taglio) nonché lo studio numerico di una delle travi in calcestruzzo armato testate da Bresler e di cui si conosce il risultato sperimentale.

Il codice LUSAS viene invece utilizzato per modellare il problema di una piastra in calcestruzzo armato in semplice appoggio. L'analisi, eseguita considerando le non linearità geometriche, di vincolo e di geometria e le differenti modellazioni (con elementi piastra o 3D solid) vuole mettere in evidenza le grandi potenzialità dei moderni codici di calcolo nell'analisi dei problemi strutturali.

3.2 Applicazioni col codice di calcolo ADINA

Si riporta lo studio in campo non lineare di materiale di una trave di copertura *shed* (MABO Prefabbricati) la cui geometria è visibile in Figura 50. L'elemento strutturale possiede una luce di 12 m ed è in calcestruzzo armato precompresso con sezione a forma di L, di altezza pari a 138 cm, larghezza 60 cm e di spessore variabile da 6 a 12 cm. Per permettere il passaggio di luce all'interno dell'edificio, la trave presenta delle notevoli aperture che ritagliano nell'anima della trave elementi diagonali inclinati a 45°.

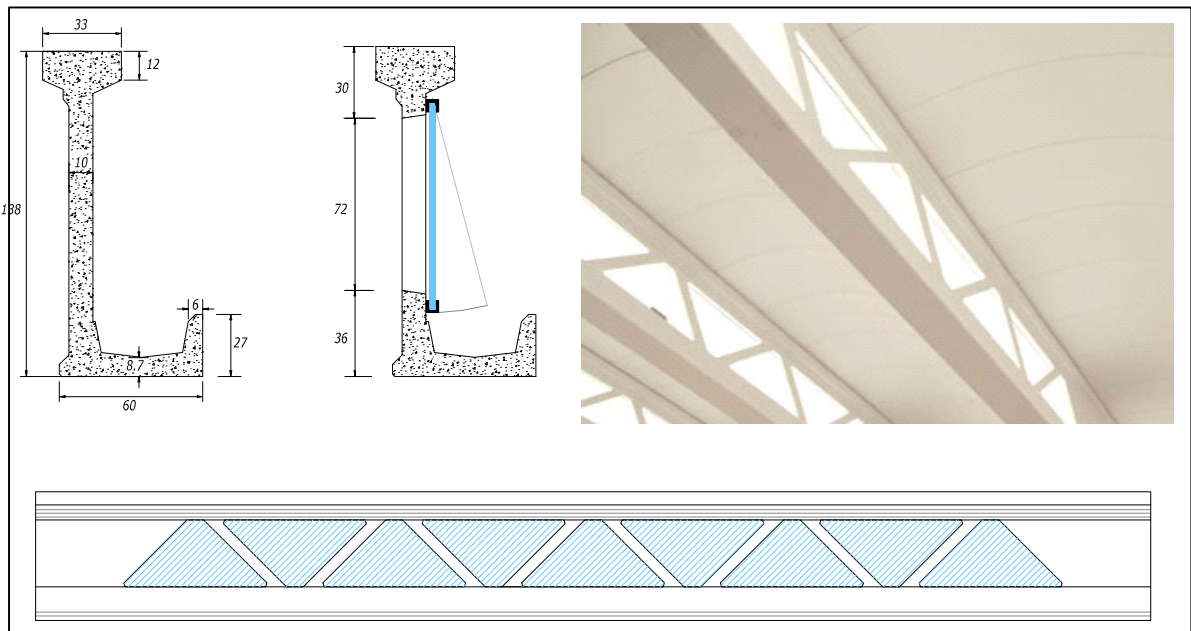


Figura 50. Sezioni e prospetto laterale della trave.

Nella sezione trasversale, si possono quindi distinguere un tratto pieno, in prossimità degli appoggi ed un tratto forato, in cui la foratura ha una altezza variabile da 0 a 72 cm. La trave può essere vista come composta da un corrente superiore a T, un corrente inferiore ad L e da un'anima a traliccio. Il calcestruzzo impiegato è di classe C45/55. L'acciaio per armatura lenta è di tipo FeB44K. Il sistema di precompressione della trave è a fili aderenti pre-tesi. I fili utilizzati per la precompressione della trave sono posizionati all'interno del corrente superiore e nel corrente inferiore, come mostrato in Figura 51.

Lo scopo dell'analisi effettuata è di appurare la resistenza ultima della trave, rispetto a carichi verticali uniformemente distribuiti sui suoi due correnti. L'analisi della trave deve inoltre metterne in luce le modalità di rottura [60].

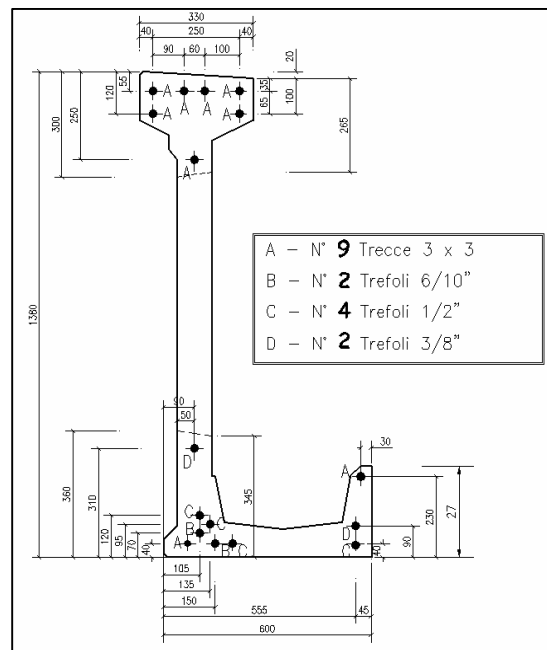


Figura 51: Disposizione dei fili di precompressione.

In campo elastico lineare, lo studio può essere eseguito con differenti tipologie di modellazione, da una modellazione a traliccio equivalente, ad una modellazione con elementi finiti di tipo *shell* o di tipo *3D solid* (Figura 52).

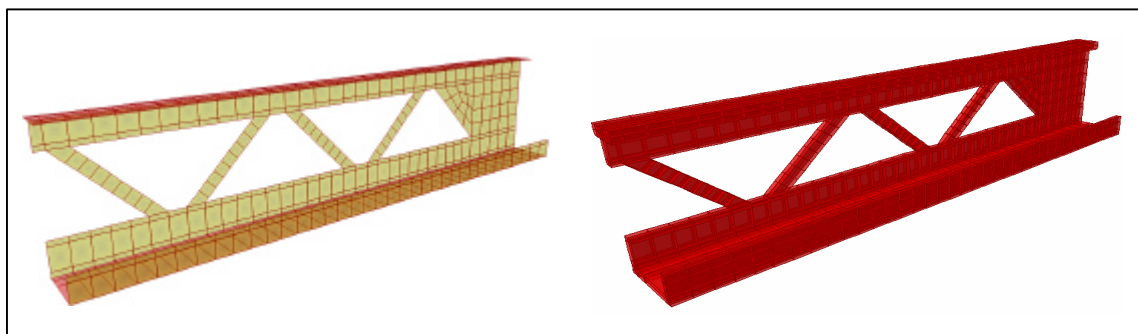


Figura 52: Modellazione con elementi finiti di tipo *shell* e di tipo *3D solid*.

Nell'analisi in campo non lineare di questo tipo di struttura, diviene tuttavia fondamentale la modellazione dell'armatura e dei cavi di precompressione. Tale modellazione deve essere eseguita in modo da riprodurre quanto più fedelmente possibile il comportamento meccanico reale degli elementi. Il codice ADINA non ha un legame costitutivo dedicato al calcestruzzo per gli elementi *shell*, inoltre non possiede formulazioni di elementi *shell compositi*, utili per agevolare la modellazione di strati di armatura non complanari con il piano geometrico su cui viene idealizzato l'elemento *shell*. Per questi motivi si è adottata per la parte in calcestruzzo una modellazione con elementi finiti solidi, che vede l'utilizzo di 420 elementi ad 8 nodi. I cavi di precompressione, l'armatura lenta longitudinale e l'armatura a taglio sono stati modellati con elementi bidimensionali del tipo *truss*. Tali elementi sono stati inseriti nel modello nelle posizioni il più vicine possibili a quelle reali, utilizzando delle caratteristiche meccaniche equivalenti laddove si è reso necessario condensare più barre di armatura in un singolo elemento finito.

L'accoppiamento del comportamento meccanico del calcestruzzo con il comportamento delle barre di armatura risulta garantito dalla coincidenza dei punti nodali dei vari elementi finiti.

3.2.1 Prove numeriche preliminari

Per testare la risposta del modello numerico si sono eseguiti 3 casi studio preliminari, di cui è nota la soluzione teorica o sperimentale. I casi esaminati sono:

- La riproduzione del dominio di rottura di Kupfer per campi di tensione biassiali.
- La riproduzione del dominio di rottura per tensioni normali e di taglio.
- La riproduzione del comportamento a rottura di una trave reale.

La riproduzione del dominio di rottura per campi di tensione biassiali viene riprodotto numericamente utilizzando un solo elemento finito, vincolato e caricato in modo opportuno.

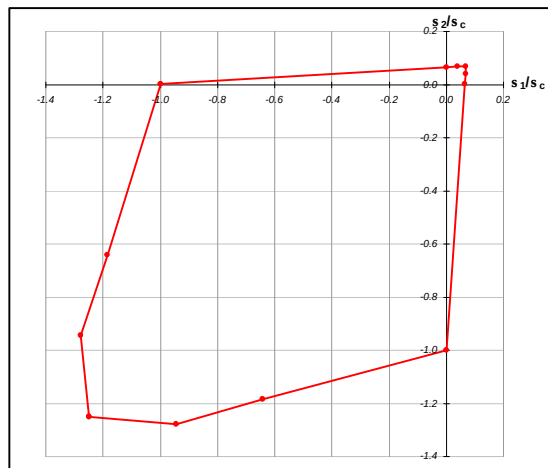


Figura 53: Dominio di rottura numerico per campi di tensione biassiali.

In Figura 53 è riprodotto il dominio numerico di rottura ottenuto normalizzato rispetto alle tensioni di rottura per semplice compressione. Si noti come la risposta del modello numerico riesca a riprodurre in maniera adeguata sia la resistenza del materiale in semplice compressione o trazione, che l'incremento di resistenza (di circa 20%) nel campo delle compressioni biassiali.

Il test effettuato prevede sostanzialmente la verifica dei legami uniassiali implementati nel codice di calcolo. Un incremento di complessità si ottiene testando il materiale anche con tensioni di taglio, in modo da obbligare il codice di calcolo ad utilizzare la formulazione del legame costitutivo in un sistema di riferimento differente da quello originario. I risultati

sperimentali relativi ad un test di tensioni normali-tensioni di taglio, prevedono in genere un dispersione abbastanza marcata causata dalla difficoltà sperimentale della prova. In questa sede si farà riferimento ai risultati ottenuti da Chalos e Beteille, il cui dominio di rottura (formulato per interpolazione dei risultati sperimentali) viene riportato in Figura 54 in sovrapposizione coi risultati numerici ottenuti dal codice di calcolo.

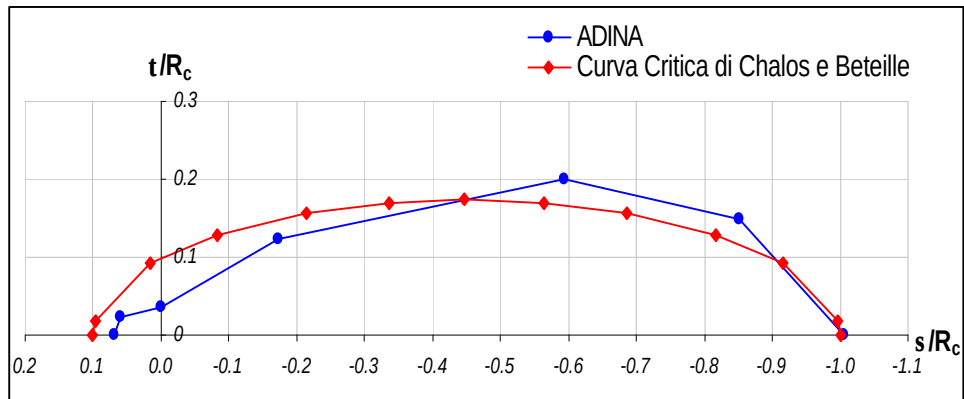


Figura 54: Dominio di rottura di Chalos-Beteille e dominio di rottura ottenuto numericamente.

Da notare la buona approssimazione numerica rispetto ai risultati sperimentali che sono inoltre affetti, come precedentemente evidenziato, da una marcata dispersione.

I due test numerici esaminati, mostrano l'accuratezza del legame dedicato al calcestruzzo, implementato nel codice di calcolo. Rimane da testare la validità del legame quando il comportamento meccanico del calcestruzzo viene accoppiato col comportamento delle barre di armatura in acciaio. Questo test risulta critico, in quanto l'accoppiamento meccanico tra i due materiali è fondamentale nello studio numerico di qualsiasi struttura in calcestruzzo armato.

Come terzo test si è deciso di riprodurre numericamente il comportamento a rottura di una delle travi provate sperimentalmente da Bresler e Scordelis nel 1963. In particolare la trave scelta è quella che possiede come nome di riferimento la sigla *A-1*.

Ciò che rende questo test di particolare rilevanza sono le modalità di rottura. La trave è stata difatti progettata in modo che si verifichi una rottura per taglio e non per flessione. Il comportamento meccanico risulta in questo caso di difficile riproduzione numerica e rende il test particolarmente severo.

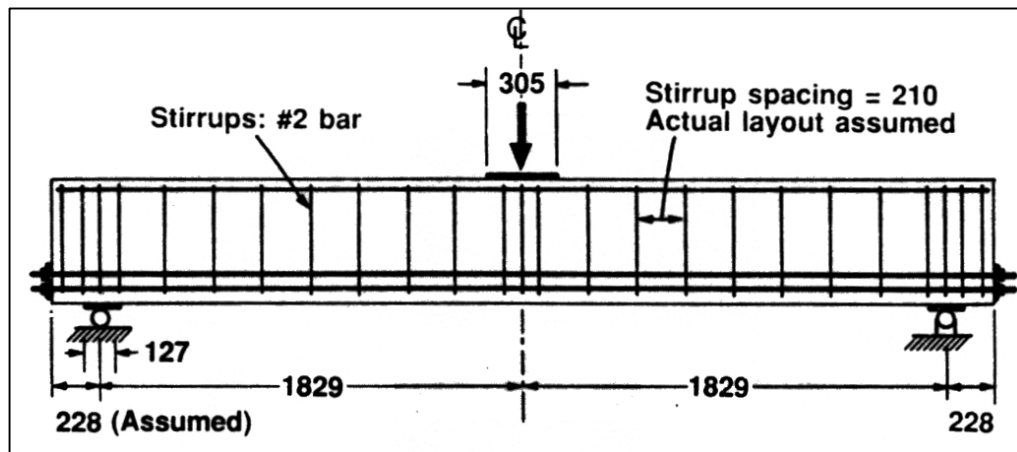


Figura 55: Geometria di una delle travi testate da Bresler e Scordelis.

Il modello numerico prevede l'utilizzo di elementi *3D solid* con legame *Concrete Material Model* per la modellazione del calcestruzzo ed elementi *truss* con legame plastico bilineare per modellare l'armatura longitudinale e di taglio.

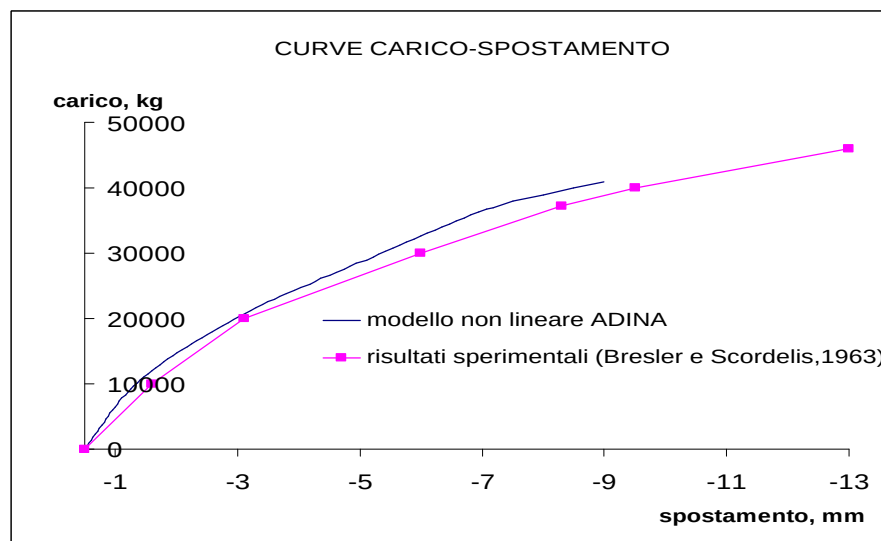


Figura 56: Risultati sperimentali e numerici del test eseguito.

I risultati numerici mostrano il comportamento qualitativo reale della struttura, con rottura per tensioni di taglio. Il grafico di Figura 55 evidenzia un'accuratezza del 10% circa sui risultati sperimentali in termini di carico ultimo della trave, ma lo spostamento in mezzera della campata viene valutato con un errore del 50% sullo spostamento sperimentale.

Bisogna tuttavia considerare che la rottura della trave, avvenuta per taglio, è di tipo fragile e quindi di difficile rappresentazione sia numerica che sperimentale. L'effettivo spostamento ultimo della struttura non può inoltre essere riprodotto dal modello implementato, in quanto non sono stati considerati fenomeni come lo scorrimento delle barre di armatura che possono incrementare sostanzialmente lo spostamento della struttura nei momenti prossimi al collasso. Infine l'analisi è stata eseguita per incrementi di carico, per cui è attendibile una precisione maggiore sull'asse dei carichi, se la struttura si muove su un percorso di equilibrio poco pendente.

3.2.2 *Analisi di una trave di copertura shed*

Si descrive infine l'analisi eseguita sulla trave shed presentata all'inizio del paragrafo. Il modello numerico prevede una discretizzazione della matrice di calcestruzzo come riportato nella Figura 52 di destra, mentre per l'armatura lenta e di precompressione si utilizza una discretizzazione con elementi *truss* disposti tra i nodi degli elementi di calcestruzzo. Per il comportamento del calcestruzzo viene utilizzato il legame costitutivo *Concrete Material Model* mentre per l'acciaio un legame plastico bilineare, differenziando tra l'armatura di precompressione e l'armatura lenta.

L'analisi viene eseguita in campo statico non lineare, per cui la variabile tempo che verrà in seguito nominata ha il solo ruolo di variabile ordinatrice delle storie di carico. I carichi, sono stati applicati al modello a piccoli passi in un intervallo temporale complessivo di 3 secondi. Scopo dell'analisi è la riproduzione del meccanismo di rottura per incremento dei carichi di esercizio (neve sulla copertura). Per questo sono state definite due storie di carico:

- Una prima storia di carico, che governa il carico da peso proprio e la precompressione. Tale funzione è una funzione lineare crescente che partendo dall'istante 0 dell'analisi raggiunge il suo valore massimo al tempo di 1 secondo per poi rimanere costante.
- Una seconda storia di carico, che governa tutti i carichi di esercizio. Tale funzione vale 0 nell'intervallo tra 0 ed 1 secondo e cresce linearmente tra 2 e 3 secondi sino a raggiungere un valore unitario.

L'analisi è stata suddivisa in 300 steps, ciascuno di 0.01 secondi, per un totale di 3 secondi. Con i primi 100 steps, e quindi durante il primo secondo, alla trave vengono applicati simultaneamente il peso proprio e il carico di precompressione.

Nell'ambito della seconda funzione di carico che parte dal tempo di 1 secondo, con i successivi 80 steps si raggiunge il livello di carico di progetto della trave, quindi al tempo di 1.8 secondi tutti i carichi di esercizio sono applicati alla struttura. Con i successivi incrementi di carico, la trave viene portata a rottura, questa si verifica in corrispondenza del tempo 2.85 secondi al quale corrisponde un carico pari al doppio del carico di progetto.

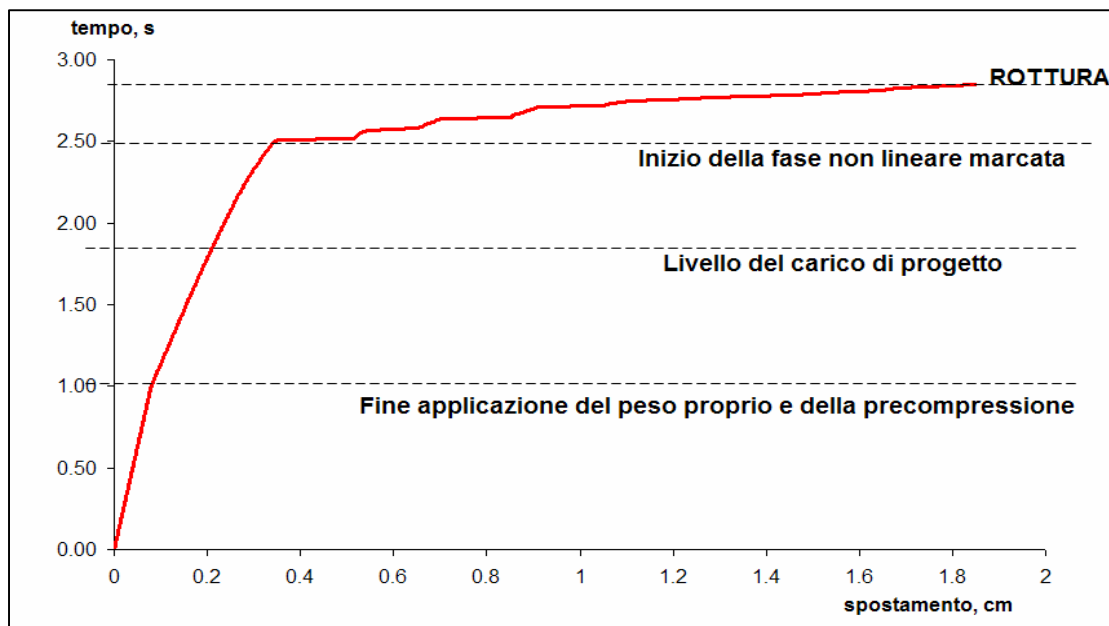


Figura 57: Curva carico-spostamento per un nodo della sezione di mezzeria.

Quanto esposto è leggibile nel grafico riportato in Figura 57 dove è stata tracciata la curva carico-spostamento per un nodo posto all'estradosso del corrente inferiore, nella sezione di mezzeria. Sull'asse X è stato riportato lo spostamento lungo la verticale, sull'asse Y il tempo di analisi, proporzionale al carico di esercizio, dopo il primo secondo.

Osservando la curva in Figura 57, si possono notare:

- Il cambiamento di pendenza al passaggio, al tempo 1 secondo, dalla storia di carico 1 alla storia di carico 2. Tale cambiamento è dovuto alla diversa tipologia di carico e non è sintomo di comportamento meccanico non lineare della struttura.
- L'andamento pressoché lineare della curva fino al valore di 2.5 secondi nella storia temporale (oltre il livello del carico di progetto).
- La rapida variazione della pendenza della curva in corrispondenza dell'istante di 2.5 secondi con l'ingresso della trave in una fase marcatamente non lineare.
- L'andamento quasi piatto della fase non lineare marcata, sinonimo di una piccola risorsa di resistenza in campo plastico.

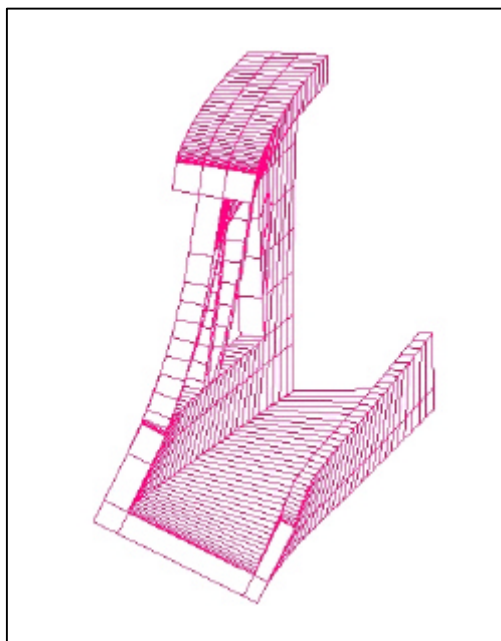


Figura 58: Deformazione della trave nell'istante di prossima rottura.

Il comportamento della struttura, nei momenti prossimi alla rottura è senza dubbio di difficile riproduzione con metodi non numerici, in quanto intervengono fenomeni come la flessione laterale e le perdita di forma non facilmente quantificabili su di una struttura di questo tipo. La Figura 59 e la Figura 60 mostrano il procedere della fessurazione durante l'incremento di carico. Si nota che ad 1.8 secondi, quando si raggiunge il livello di carico di progetto la fessurazione è quasi inesistente. Essa compare nell'intervallo temporale tra 2,5 e 3 secondi, comparando nel primo elemento diagonale teso, poi nel secondo e via via anche lungo tutto il corrente inferiore. L'analisi termina al tempo di 2.85 secondi e questo implica che il massimo carico da neve sopportabile dalla trave è circa 2.1 volte maggiore del carico di progetto. Il moltiplicatore del carico per cui si ha l'ingresso in fase non lineare è 1.9 il carico di progetto. Il gap tra 1.9 e 2.1 rappresenta la piccola risorsa in campo non lineare della trave.

Per la sua geometria difatti, la trave ha un funzionamento simile a quello di una trave reticolare isostatica. In virtù di questo, appena l'armatura di una diagonale o del corrente teso entra in campo plastico, l'intera struttura tende a fluire senza impegnare una resistenza aggiuntiva e senza un'apprezzabile redistribuzione delle azioni interne.

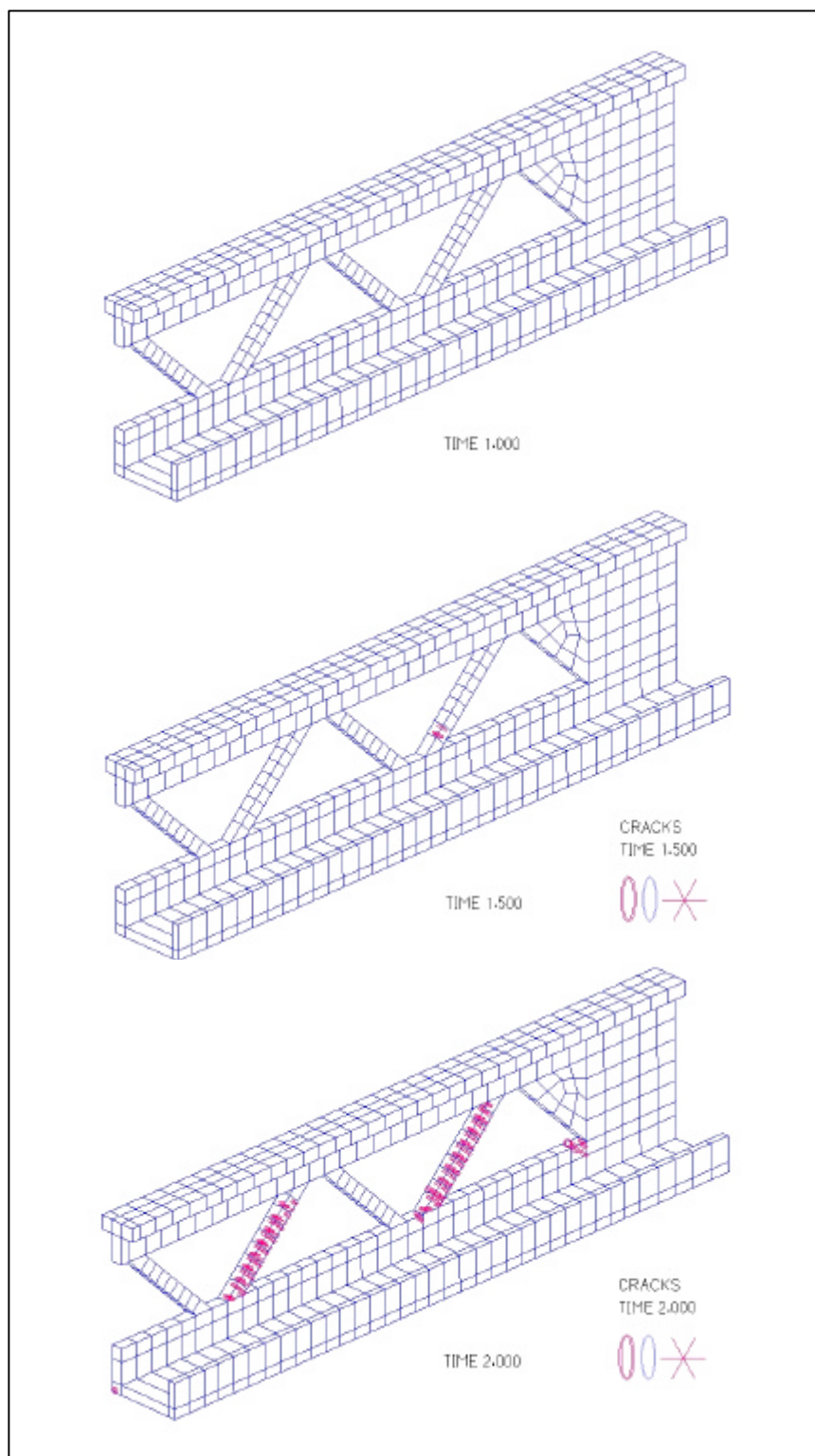


Figura 59: Quadro fessurativo a 1, 1.5 e 2 secondi.

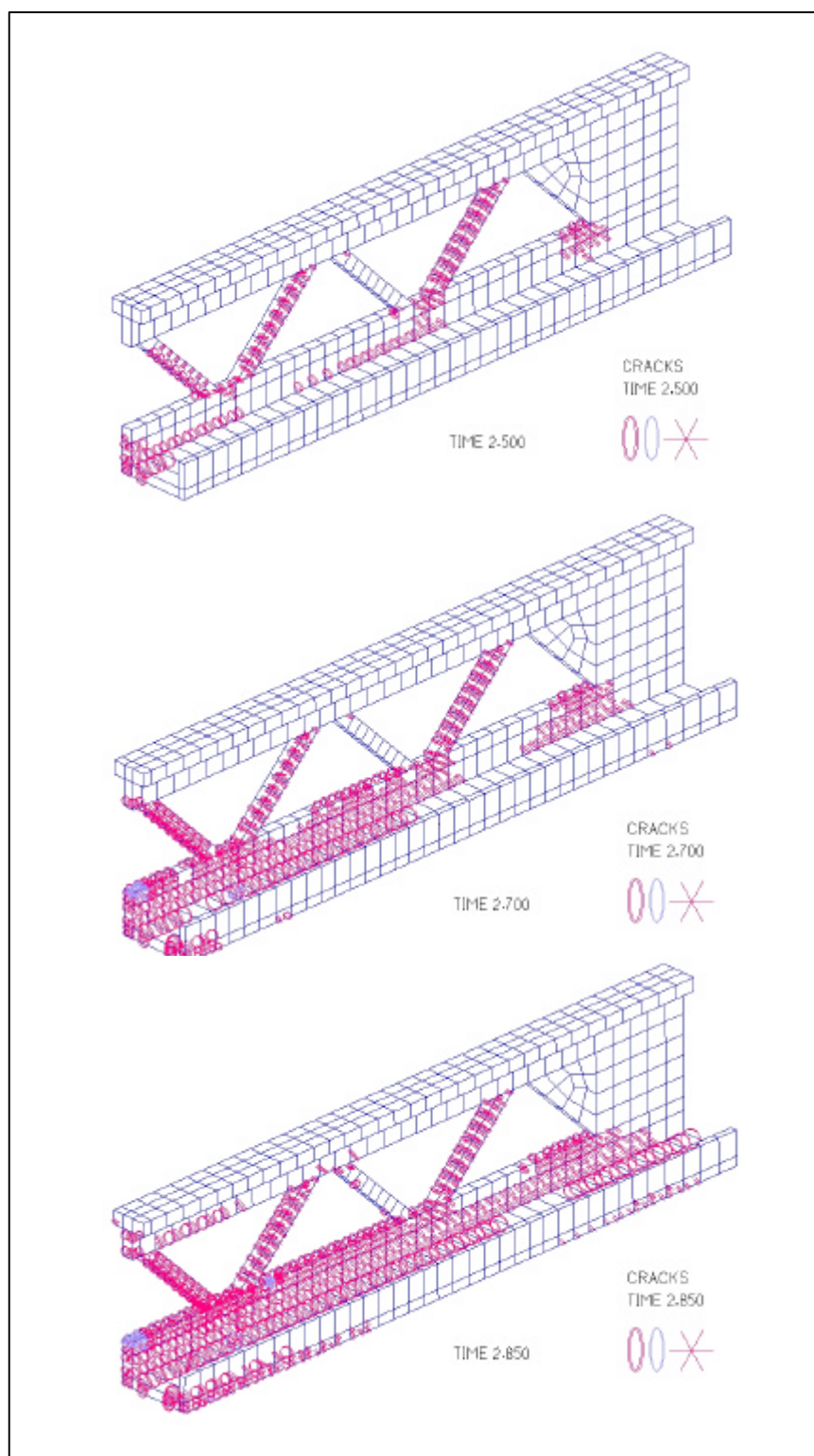


Figura 60: Quadro fessurativo a 2.5, 2.7 e 2.85 secondi (rottura).

3.3 Applicazioni con il codice di calcolo LUSAS

In questa applicazione si vuole mostrare un esempio di analisi eseguito in campo non lineare su una struttura discretizzata sia con elementi finiti di piastra sia con elementi finiti tridimensionali. Il problema strutturale di riferimento è l'analisi di una piastra quadrata appoggiata sui bordi modellata tenendo conto della non linearità del materiale e della possibile non linearità del vincolo (vincolo monolatero) [45].

Il problema strutturale, cambia notevolmente a seconda se il vincolo di appoggio possa o meno essere considerato bilatero e riveste una grande importanza nella progettazione dei ponti in C.A. Dalla letteratura è noto che una piastra vincolata sugli appoggi in modo monolatero può deformarsi rialzando gli angoli come in Figura 61.

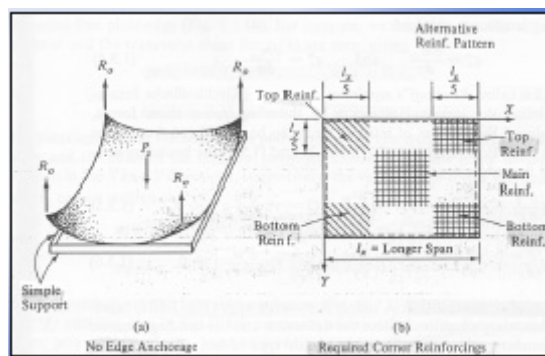


Figura 61: Deformazione di una piastra in condizione di vincolo monolatero.

Chiaramente i regimi tensionali e le corrispondenti armature risultano profondamente differenti a seconda se la piastra possa essere considerata in appoggio bilatero o meno. Da una non corretta progettazione dei vincoli e/o dell'armatura può dipendere un'eventuale fessurazione della struttura con una riduzione della vita utile della stessa. Risulta quindi di estrema importanza per un progettista essere in grado di analizzare la struttura in campo non lineare di materiale ma anche di vincolo. La non linearità di vincolo può essere modellata in LUSAS tramite dei particolari elementi di collegamento che reagiscono solamente in compressione.

La struttura è stata esaminata sia riproducendone un modello con elementi finiti di *piastra* sia con elementi finiti di tipo *3D solid*, le relative discretizzazioni sono visibili in Figura 62.

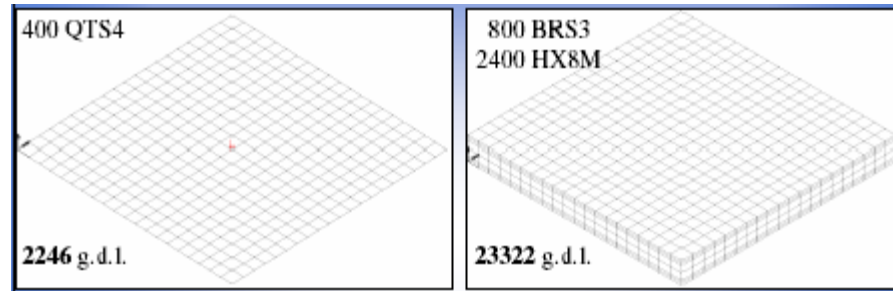


Figura 62: Modellazione con elementi finiti di *piastra* e *3D solid*.

Alla modellazione *3D solid* è stato associato il legame costitutivo a danneggiamento di Oliver descritto nel capitolo precedente, mentre agli elementi piastra è stato associato il legame Multi-Crack sfruttando la possibilità modellare l'armatura in modo equivalente all'interno dell'elemento piastra composito.

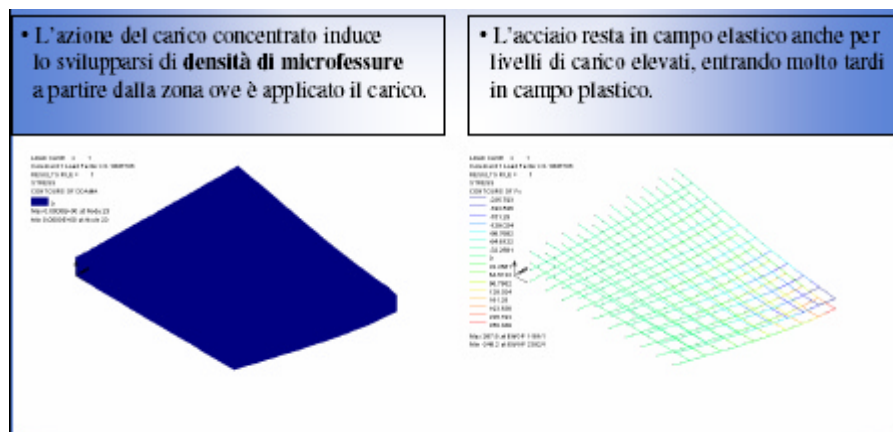


Figura 63: Risultato qualitativo della modellazione *3D solid*.

Da notare che una modellazione *3D solid* associata ad un legame a danneggiamento isotropo, come quello di Oliver, deve prevedere una discretizzazione molto fine per poter realizzare l'accoppiamento meccanico tra calcestruzzo e barre di armatura laddove le tensioni di taglio risultano rilevanti per i risultati dell'analisi.

Si sono inoltre studiati anche gli effetti di una non linearità di spostamento eseguendo l'analisi in grandi spostamenti con una formulazione Lagrangiana Totale.

Riassumendo, sia per entrambe le modellazioni si sono eseguite le seguenti analisi:

- Campo elastico lineare
- Campo non lineare di materiale
- Campo non lineare di geometria
- Accoppiamento tra non linearità di geometria e di materiale.

I risultati delle analisi sono riprodotti in Figura 64 in termini di curve carico-spostamento. Si noti il buon accordo tra le varie modellazioni.

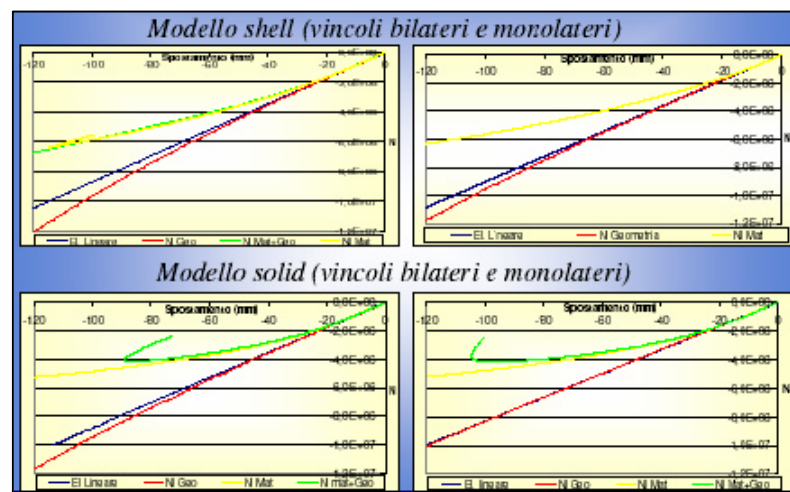


Figura 64: Confronto in termini di curve carico-spostamento tra i vari modelli analizzati.

L'output della modellazione eseguita con il legame Multi-Crack permette infine di visualizzare la direzione e l'intensità della fessurazione, come mostrato in Figura 65.

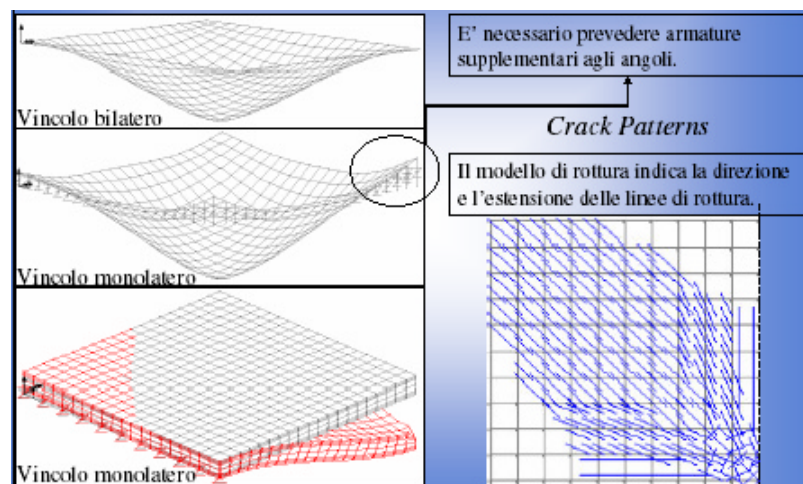


Figura 65: Direzione ed intensità della fessurazione derivante dal modello Multi-Crack.

CONCLUSIONI

Come evidenziato nel primo capitolo di questo lavoro, la riproduzione del corretto comportamento del calcestruzzo, e più in generale delle strutture in calcestruzzo armato, in campo non lineare non è semplice. Il comportamento del calcestruzzo è un comportamento asimmetrico che varia a seconda dello stato tensionale a cui è assoggettato. Gli stessi criteri di rottura, che riproducono nello spazio tridimensionale delle tensioni principali la superficie di rottura del materiale, si basano su evidenze sperimentali e le loro formulazioni utilizzano spesso complicate espressioni.

Il problema si complica maggiormente quando si deve considerare l'accoppiamento con le barre di armatura. In questo caso nascono tutta una serie di problematiche (*tension stiffening*, *effetto bietta*, *ingranamento*, etc.) messe in luce nel secondo capitolo e difficilmente inseribili a livello teorico in un legame costitutivo di materiale.

Gli studi sperimentali e numericiperpetrati da quasi 30 anni da Vecchio e Collins dell'Università di Toronto e da Hsu dell'Università di Huston hanno tuttavia mostrato come risulti semplice tener conto di tutti questi effetti secondari utilizzando dei legami costitutivi opportunamente corretti in base alle evidenze sperimentali.

Alcuni codici di calcolo commerciali tra quelli esaminati (ANSYS, ADINA, LUSAS) hanno raccolto queste osservazioni, ed implementato efficienti legami in grado di riprodurre il comportamento della maggior parte delle strutture in calcestruzzo armato con sufficiente accuratezza. I legami presenti nei tre codici possiedono in comune l'ortotropia del legame non lineare del calcestruzzo, necessaria per accoppiare il comportamento con le barre di armatura in problemi di taglio, senza essere costretti ad utilizzare discretizzazioni particolarmente fini.

Tutte le formulazioni risultano a fessura diffusa (*smeared*) che ben si adatta all'analisi di strutture in calcestruzzo armato. ADINA e LUSAS considerano anche delle tecniche di regolarizzazione della risposta basate sull'energia di frattura, in modo da risolvere il problema della dipendenza dalla discretizzazione della risposta, come descritto nel secondo capitolo. Questo problema risulta tuttavia di secondaria importanza nell'analisi di strutture in calcestruzzo armato, poiché la presenza stessa dell'armatura aiuta ad evitare la localizzazione del danno.

Si giudica ottima la scelta operata dall'ANSYS di creare un elemento finito solido specializzato per le analisi di strutture in calcestruzzo armato, in cui l'armatura può essere modellata in modo diffuso all'interno dell'elemento secondo tre direzioni qualsiasi. L'utilizzo di una tale formulazione risulta di chiaro aiuto all'analista, nella costruzione del modello

numerico in quanto velocizza le operazioni di creazione del modello stesso. Un'armatura diffusa all'interno dell'elemento può inoltre portare ad una maggiore stabilità dell'analisi numerica laddove vi sia un pesante danneggiamento del materiale calcestruzzo.

In Tabella 2 viene riportato un quadro riassuntivo dei codici di calcolo analizzati.

Codice	Legame Calcestruzzo	Applicabilità agli Elementi Finiti	Regolarizzazione
ADINA	Concrete Material Model	2D solid 3D solid	Energia di frattura
SAP2000	Solo Momento - Curvatura	Beam	---
LUSAS	Damage Model (Simo e Oliver)	Tutti	No
	Multi-Crack Concrete Model	Plate Shell 2D solid 3D solid	Energia di frattura
ALGOR	Plasticity Model (Drucker-Prager)	Tutti	---
STRAUS7	Plasticity Model (Drucker-Prager)	Tutti	---
ANSYS	Concrete Material	3D Solid - Reinforced	No

Tabella 2: Quadro riassuntivo dei codici di calcolo analizzati.

Per correttezza è bene evidenziare che buoni risultati si possono ottenere anche con il criterio di plasticità di Drucker-Prager (STRAUS7, ALGOR), per anni punto di riferimento nella modellazione numerica delle strutture in calcestruzzo prima dell'avvento delle teorie ad esso dedicate.

Infine l'ultima versione del codice LUSAS (non recensita) dovrebbe contenere un ulteriore modello per il calcestruzzo in grado di considerare anche il *crushing* a compressione. Si evidenzia tuttavia che nella maggior parte delle analisi il considerare o meno il *crushing* a compressione non porta ad apprezzabili miglioramenti.

La conclusione di questo lavoro, mostra quindi che i moderni codici di calcolo sono in grado di fornire strumenti avanzati per le analisi non lineari delle strutture in calcestruzzo armato. Chiaramente il corretto utilizzo delle stesse è vincolato al rispetto delle ipotesi alla base dei modelli e ad una corretta modellazione della struttura.

BIBLIOGRAFIA

1. ASCE-ACI Committee 445 on Shear and Torsion, (1998), “Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete” *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 124, No. 12, pp. 1375-1417.
2. Balan T.A., Filippou F. & Popov V, (1997) “Confinement model for 3D cyclic analysis of concrete structures”, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 2, pp. 143-153.
3. Balan T.A., Filippou F. & Popov V, (1998), “Hysteretic Model of Ordinary and High Strength Reinforced Steel”, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, No. 3, pp. 288-297.
4. Barbera E., Bontempi F. & Malerba P.G. (1996), “Semianalytical Finite Strip Analysis of reinforced Concrete Structures”, *Third Asian Pacific Conference on Computational Mechanics, APCOM '96*, Seoul Korea, 16-18 Settembre 1996.
5. Barzegar F. & Maddipudi S., (1997/a), “Three-Dimensional Modelling of Concrete Structures. I: Plain Concrete. *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 10, pp. 1339-1346.
6. Barzegar F. & Maddipudi S., (1997/b), “Three-Dimensional Modelling of Concrete Structures. I: Reinforced Concrete. *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 10, pp. 1347-1356.
7. Bazant Z.P., (1986), “Mechanics of Distributed Cracking”, *Applied Mechanics Review*, Vol. 39, No. 5, pp. 675-705.
8. Biondini F., (2000), “*Strutture da ponte soggette ad azioni di tipo sismico. Modellazione ed ottimizzazione*”, Tesi di Dottorato, Politecnico di Milano.
9. Benetti P., Bontempi F. & Malerba P.G. (1999), “Influenza delle tecniche di regolarizzazione nell’analisi di elementi strutturali in HSC”, *Atti Giornate AICAP '99*, Vol. 2, Torino, pp. 55-64.
10. Bontempi F., (1992), “Sulla costruzione dei domini di rottura di sezioni in C.A. e C.A.P. soggette a presso flessione deviata”. *Studi e Ricerche*, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in Cemento Armato, Politecnico di Milano, Vol. 13, pp. 261-278.
11. Bontempi F., Malerba P.G. & Romano L., (1995), “Formulazione diretta secante dell’analisi non lineare di telai in C.A./C.A.P.”, *Studi e Ricerche*, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in Cemento Armato, Politecnico di Milano, Vol. 16, pp. 351-386.

12. Bontempi F. & Malerba P.G., (1996), “Il controllo della formulazione tangente per la soluzione di problemi strutturali non lineari”, *Studi e Ricerche*, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in Cemento Armato, Politecnico di Milano, Vol. 17, pp. 419-451.
13. Bontempi F. & Malerba P.G., (1997), “The role of the Softening in the Numerical Analysis of R.C. Framed Structures”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 5, No. 6, pp. 789-801.
14. Bontempi F. & Malerba P.G., (1998), “The Softening and the Bond Slip Influence on the Nonlinear Analysis of R.C. Framed Structures”, *Proceedings of the Structural Engineering World Conference (SEWC)*, July 18-23, S. Francisco, T224-4.
15. Bontempi F., Chillé F., Frigerio A. & Sgambi L., (2002), “Analisi di strutture tridimensionali in C.A. soggette a storie di carico qualsiasi. Formulazione esplicita”, *Atti delle Giornate AICAP 2002*, Bologna.
16. Cammareri S. (2002) “Confronto sperimentale e numerico di elementi in C.A. in regime membranale”, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Roma, “La Sapienza”.
17. CEB, (1996), “Reinforced Concrete Element Under Cyclic Loading. State-of-the-Art Report, *Bulletin 230*.
18. Cedolin L., Crutzen Y.R.J. & Dei Poli S., (1976), “Stress-Strain Relationship and Ultimate Strength of Reinforced Concrete under Triaxial Loading Conditions”, *Costruzioni in Cemento Armato – Studi e Rendiconti*, Vol. 13.
19. Cedolin L., Dei Poli S. & Iori I., (1987), “Tensile Behavior of Concrete”, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 3, pp. 431-449.
20. Cervenka V. & Pakl R., (1992), “Computer Models of Concrete Structures”. *Structural Engineering International*, Vol. 2/92, pp. 103-107.
21. Chen W.F., (1982), “*Plasticity in Reinforced Concrete*”, McGraw Hill: New York.
22. Collins M.P., (1978), “Towards a rational Theory for RC Members in Shear”, *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 104, No. 4, pp. 211-231.
23. Collins M.P., (1978), (1998), “Procedures for calculating for the Shear Response of Reinforced Concrete Elements: a Discussion”, *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 124, No. 12, pp. 1485-1488.

24. Dahlblom O. & Ottosen N.S., (1990), "Smeared Crack Analysis using Generalized Fictitious Crack Model", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 1, pp. 55-76.
25. Darwin D. & Pecknold D.A., (1977), "Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete", *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 103, No. 2, pp. 229-241.
26. de Borst R., (1987), "Stability and Uniqueness in Numerical Modelling of Concrete Structures", *Computer & Structures*, Vol. 7, pp. 137-147.
27. Elwi A.A. & Murray D.W., (1979), "A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship", *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 105, No. 4, pp. 623-641.
28. Gerstle K.H., Aschl H., Belotti R., Bertacchi P., Kotsovos M.D., Ko H.Y., Linse D., Newman J.B., Rossi P., Schickert G., Taylor M.A., Traina L.A., Winkler H. & Zimmerman R.M., (1980), "Behavior of Concrete under Multiaxial Stress States", *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 106, No. 6, pp. 1383-1403.
29. Gomez C. (2002) "*Teorie e confronti nell'analisi degli elementi in C.A. e C.A.P. in regime membranale*", Tesi di Laurea, Politecnico di Milano.
30. Gopalaratnam V.S. & Shah S.P., (1985), "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension", *ACI Journal*, Vol. 82, No. 3, pp. 310-323.
31. Hillerborg A., Moeder M. & Petterson P.E., (1976), "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, No. 6, pp. 773-781.
32. Hsu T.T.C. & Mo Y.L., (1985), "Softening of Concrete in Low-Rise Shear walls", *ACI Structural Journal*, Vol. 82, No. 6, pp. 883-889.
33. Hsu T.T.C, (1998), "Stress and Crack Angles in Concrete Membrane Elements", *ASCE Journal of the Structural Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1476-1484.
34. Hughes B.P. & Chapman G.P., (1966), "The Complete Stress-Strain Curve for Concrete in Direct Tension", *Bulletin RILEM*, Vol. 30, No. 3, pp. 95-97.
35. Jefferson A.D., (1998), "A two and three dimensional multi-crack model for finite element analysis of concrete structures", Submitted to *Computers and Structures*, Aug. 1998.
36. Karsan I.D. & Jirsa J.O., (1969), "Behavior of Concrete under Compressive Loadings", *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 95, No. 12, pp. 2543-2563.

37. Kaufmann W. & Marti P., (1998) "Structural Concrete: Cracked Membrane Model", *ASCE Journal of the Structural Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1467-1475.
38. Kolleger J. & Mehlorn G., (1990), "Material Model for the Analysis of Reinforced Surface Structures", *Computational Mechanics*, Vol. 6, pp. 341-357.
39. Kotsovos M.D. & Newman J.B., (1977), "Behavior of concrete under multiaxial stress", *Journal of American Concrete Institute*, Vol. 74, No. 9, pp. 443-446.
40. Kupfer H.B., Hildsford H.K. & Rusch H., (1969), "Behavior of concrete under biaxial stresses", *Journal of American Concrete Institute*, Vol. 66, No. 8, pp. 656-666.
41. Kupfer H.B. & Gerstle H. (1973), "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 99, No. 4, pp. 853-866.
42. IABSE, (1979), Plasticity in Reinforced Concrete, *IABSE Colloquium Copenhagen 1979*, IABSE, Zurich.
43. Launay P. & Gachon H., (1970), "Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress, *ACI SP Concrete for Nuclear Reactors*, Vol. 34.
44. Loreti S. (2002), "Analisi del danno indotto su elementi strutturali in cemento armato da connettori post-inseriti ad espansione", Tesi di Laurea, Università degli Studi di Roma, "La Sapienza".
45. Loreti S. (2003), "La modellazione di elementi strutturali in C.A. nei ponti", *Giornata LUSAS 2003*, Università di Roma, "La Sapienza"
46. Lee D. D., Stresses and Crack Angles in Concrete Membrane Elements, *Journal of Structural Engineering*, May 2000.
47. Malerba P.G., (1984), "Aspetti numerici dell'analisi di sezioni in C.A. soggette a sforzo normale, *Atti del 4° Congresso CTE*, Firenze, Vol. b, pp. 165-171.
48. Malerba P.G. (a cura di), (1998), "Analisi limite e non lineare di strutture in calcestruzzo armato", *Collana di Ingegneria Strutturale – No. 10*, CISM, Università di Udine.
49. Mander J.B., Priestley M.J.N. & Park R., (1988), "Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, No. 8, pp. 1827-1849.
50. McHenry D. & Karni J., (1958), "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stress", *ACI Journal*, Vol. 54, No. 4, pp. 829-839.
51. Mills L.L. & Zimmerman R.M., (1970), "Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Condition", *ACI Journal*, Vol. 67, No. 10, pp. 802-807.

52. Nielsen M.P., (1984), "*Limit Analysis and Concrete Plasticity*", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
53. Ottosen N.S. (1979), "Constitutive Model for Short Time Loading of Concrete", *ASCE Journal of Engineering Division*, Vol. 105, No. EM1, pp. 127-141.
54. Ottosen N.S., (1986), "Thermodynamic Consequence of Strain Softening in Tension", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 112, No. 11, pp. 1153-1164.
55. Palaniswamy R. & Shah S.P., (1974), "Fracture and Stress-Strain Relationship of Concrete under Triaxial Compression", *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 100, No. 5, pp. 901-916.
56. Popovics S., (1973), "A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete", *Cement and Concrete Research*, Vol. 3, pp. 583-599.
57. Rodriguez M.E., Botero J.C. & Villa J., (1999), "Cyclic Stress-Strain Behavior of Reinforced Steel", *ASCE Journal of the Structural Engineering*, Vol. 125, No. 6, pp. 605-612.
58. Romano L. (1993), "*Analisi non lineare col metodo degli elementi finiti di strutture in C.A.-C.A.P.*", Tesi di Specializzazione, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in Cemento Armato, Politecnico di Milano.
59. Rule W.K. & Rowlands R.E., (1992), "Predicting Behavior of Cyclically Loaded RC Structures", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No. 2, pp. 603-616.
60. Sciubba C. (2004) "*Modellazione di progetto di un elemento strutturale in C.A.P. di geometria non regolare*", Tesi di Laurea, Università degli Studi di Roma, "La Sapienza".
61. Sgambi L. (2001), "*Modellazione tridimensionale di strutture in C.A. e C.A.P. in campo non lineare*", Tesi di Specializzazione, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in Cemento Armato, Politecnico di Milano.
62. Sgambi L. & Bontempi F., (2001), "Enhanced models for three-dimensional analysis of reinforced concrete two-blade slender bridge piers", *Proceedings of ASEM'02*, Pusan Convention Center, Pusan, Korea.
63. Sgambi L. & Bontempi F., (2002), "Analisi tridimensionale di pile da ponte a doppia lama", *Atti delle Giornate AICAP 2002*, Bologna.
64. Sgambi L., (2002), "Analisi tridimensionale delle tensioni generate dalla precompressione nei solai alveolari" *Atti del 14° Congresso CTE*, Mantova.

65. Sgambi L. & Veglianti D., (2003), "Approximate methods for analysis of viscoelastic behavior of concrete structures", *Proceedings of the ISEC02 Conference*, Rome.
66. Sgambi L., Catallo L. & Sasani M., (2004), "Numerical analysis of structural walls under cyclic loads", *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C.
67. Sgambi L., (2004), "Fuzzy approach in the three-dimensional non linear analysis of reinforced concrete two-blade bridge piers", *Computers & Structures*, Vol. 82, No.13, pp. 1067-1076.
68. Stankowski T. & Gerstle K.H., (1985), "Simple Formulation of Concrete Behavior under Multiaxial Load Histories", *ACI Structural Journal*, Vol. 82, No. 2.
69. Stevens N.J., Uzumeri, S.M. & Collins M.P., (1991) "Reinforced Concrete Subjected to Reversed Cyclic Shear", *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 2, pp. 135-146.
70. Vecchio F.J. (1990), "Reinforced Concrete Membrane Element Formulations", *ASCE Journal of Structural Division*, Vol. 16, No. 3.
71. Vecchio F.J. (1999), "Towards cyclic load modelling of reinforced concrete", *ACI Structural Journal*, Vol. 96, No. 2, pp. 193-202.
72. Veglianti D. (2002), "*Metodi approssimati per l'analisi del comportamento viscoelastico di strutture in conglomerato*", Tesi di Laurea, Università degli Studi di Roma, "La Sapienza".
73. William M.S. & Wrake E.P., (1974), "Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete", *Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, IABSE Seminar*, Vol. 19, pp. 1-30.
74. Yankelevsky D.Z. & Reinhardt H.W., (1987), "Response of Plain Concrete to Cyclic Tension", *ACI Materials Journal*, Vol. 84, No. 5, pp. 365-373.
75. Zeris C.A. & Mahin S.A., (1991), "Behavior of Reinforced Concrete Structures subjected to Biaxial Excitation", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, No. 9, pp. 2657-2673.