



UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN
INSTITUT DES SCIENCES ACTUARIELLES

**Modèles log-bilinéaires en sciences actuarielles
avec applications en mortalité prospective et triangles IBNR**

Membres du jury :

Prof. Pierre Ars

Prof. Griselda Deelstra

Prof. Michel Denuit (*Promoteur*)

Prof. Pierre Devolder (*Président du Jury*)

Dr. Daria Kachakhidze

Prof. Christian Partrat

Prof. Jean-François Walhin

Thèse présentée en vue de

l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

(orientation sciences actuarielles)

par :

Antoine Delwarde

Louvain-La-Neuve
Année Académique 2005-2006

Remerciements

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur Michel Denuit pour nous avoir éclairé tout au long de l'élaboration de cette thèse de doctorat. Sa disponibilité de tous les instants, ses avis éclairés et son foisonnement d'idées ont été d'un grand secours.

Nous remercions également le Fonds pour la Recherche en Industrie et en Agriculture (FRIA) pour l'octroi d'une bourse de recherche, soutien financier précieux pour la réalisation de cette thèse de doctorat.

Notre gratitude s'adresse également à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'écriture de ces lignes.

Enfin, nos remerciements vont à nos parents pour leur soutien et leur présence, à nos proches, à nos amis et à Delphine, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible.

Introduction

Mortalité prospective

Nature du problème

Ce n'est un secret pour personne, nous vivons de plus en plus longtemps. Si nous ne pouvons que nous réjouir de cette évolution favorable, celle-ci n'est pourtant pas sans poser certains problèmes dans les pays industrialisés. La Commission européenne a ainsi récemment consacré un livre vert aux changements démographiques (intitulé *Confronting demographic change : A new solidarity between the generations*). Les chiffres sont éloquentes. En moyenne, l'espérance de vie à la naissance a progressé de 8 ans entre 1960 et 2002 au sein des pays membres de l'Union (avec néanmoins de grandes disparités nationales). Conjugée à une natalité en baisse, cette progression aboutira à une modification profonde de la pyramide des âges d'ici 2030. Les plus de 80 ans qui représentaient 3.4% de la population de l'Union en 2000 passeront en 2050 à 11.8%. Quant aux 65 ans et plus, ils passeront de 15.7% en 2000 à 30.3% en 2050.

Outre son impact sur différents secteurs de la sécurité sociale, cette tendance à l'allongement de la durée de la vie humaine préoccupe les assureurs privés. Un nouveau risque les guette : celui que les assurés vivent bien plus longtemps que prévu par les tables de mortalité utilisées dans le tarif. Ce nouveau risque, appelé risque de longévité, se superpose aux risques viagers et financiers classiques.

Les tables de mortalité classiques sont des tables périodiques, aussi appelées statiques car elles n'anticipent pas l'allongement probable de la durée de la vie humaine. Elles sont basées sur l'observation d'une population pendant une période variant de un à cinq ans en général. Si la période d'observation est l'an 2000, les individus de x années révolues en 2000 serviront à estimer la probabilité q_x de décéder à cet âge. Le principal avantage de cette

approche réside dans le peu de statistiques que nécessite son élaboration.

La table de mortalité ainsi obtenue mélangera donc de nombreuses générations, et ne décrira la mortalité d'aucune d'elles. En particulier, les indicateurs démographiques qui en découlent (comme l'espérance de vie, par exemple) n'ont aucun sens concret, ne correspondant à aucune génération d'individus. Ainsi, l'espérance de vie calculée sur base d'une table de mortalité périodique ne correspond pas à ce que tout un chacun entend par espérance de vie, à savoir le nombre d'années qu'il lui reste à vivre en moyenne. Une telle espérance de vie doit se comprendre comme un indicateur démographique bien utile, notamment pour évaluer l'amélioration de la longévité, mais certainement pas selon son sens premier.

L'usage des tables de mortalité périodiques est indiqué lorsque l'assureur s'engage à couvrir un risque viager sur une période relativement courte, ou lorsque l'allongement de la durée de la vie humaine est synonyme de sécurité (comme pour les assurances décès, par exemple, où une table de mortalité n'anticipant pas les améliorations probables de la longévité des assurés génère un chargement de sécurité implicite). Il est à bannir lorsque les engagements de l'assureur s'inscrivent dans le long terme, comme c'est le cas pour les rentes viagères.

Les tables de mortalité prospectives (ou dynamiques) anticipent l'évolution probable de la mortalité des individus. De telles tables ont deux entrées : l'âge de l'assuré et l'année calendaire. Elles donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année. Elles sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité, et les extrapolant dans le futur. Il va sans dire que de telles tables doivent être fréquemment revues, à la lumière des nouvelles statistiques de mortalité que l'actuaire peut se procurer.

Projeter l'évolution de la mortalité est un exercice difficile, comme en témoignent les écarts parfois très importants observés dans le passé entre les projections et la réalité. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, l'analyse des évolutions de la mortalité est un sujet relativement ancien en sciences actuarielles. Ainsi, le 7^{ème} congrès international des actuaires, qui s'est tenu à Amsterdam en 1912, avait pour thème *The course, since 1800, of the mortality of assured persons*. Les premières études dynamiques furent présentées à cette occasion. L'actuaire Lindstedt proposa ainsi les premières extrapolations des courbes de quotients de mortalité vers le futur, aux différents âges. L'actuaire Blaschke ajusta en 1922 un modèle de Makeham aux statistiques de mortalité relatives à différentes années calendaires, et projeta la mortalité future en extrapolant les séries de paramètres ainsi obte-

nues. Quelques années plus tard, en 1927, les actuaires Davidson et Reid suivirent la même approche mais en ajustant cette fois le modèle de Makeham aux statistiques relatives aux différentes générations. L'Institut britannique des actuaires a pour sa part proposé des tables de mortalité prospectives pour tarifier les rentes viagères dès 1924, en utilisant déjà la méthode des facteurs de réduction (technique toujours utilisée aujourd'hui). On mentionnera également les travaux de l'actuaire Louis Dublin, qui dès 1928 a fourni à la compagnie d'assurances Metropolitan Life les plus bas niveaux de mortalité qu'il était possible d'atteindre dans chaque classe d'âges. Depuis, de très nombreuses projections de mortalité ont été établies selon différentes méthodes. Celle proposée en 1992 par Ronald D. Lee et Lawrence R. Carter est aujourd'hui devenue une référence. Une grande partie de cette thèse est basée sur cette méthode et sur ses extensions.

Phénomène d'antisélection

Si les méthodes de projection de la mortalité constituent une avancée appréciable dans le domaine de la tarification de produits d'assurance sur la vie, il faut cependant garder à l'esprit les différences de mortalité parfois flagrantes entre le portefeuille considéré et la population qui a servi à établir les tables. En effet, les données du portefeuille ne composent généralement que quelques années d'historique, et ne permettent ainsi pas la construction directe de tables prospectives ; il faut donc faire usage de données population. Mais il est évident que la majorité des individus souscrivant une assurance sur la vie estime - à tort ou à raison - être en bonne santé physique (et donc vraisemblablement vivre plus longtemps que la moyenne de la population). Ce phénomène, connu sous le nom d'*antisélection*, force l'actuaire à modifier ses tables prospectives, sous peine d'être exposé à de lourdes pertes techniques. Une technique basée sur des modèles relationnels sera ainsi proposée dans cette étude.

Triangles IBNR

Lorsque les risques souscrits ont un développement relativement court (i.e. incendie, etc.) la constatation du sinistre est immédiate et son montant est généralement connu à la clôture comptable de l'exercice, ou dans les semaines qui suivent. Par contre, lors de la souscription de branches d'assurance à long développement - pour lesquelles les sinistres ne sont pas connus immédiatement lors de leur survenance et se règlent sur une période relativement

étendue (i.e. responsabilité civile, fraude, etc.) - une mauvaise estimation des sinistres peut avoir de lourdes conséquences et entraîner un manque de ressources financières pour pouvoir indemniser des sinistres non prévus.

Diverses méthodes d'estimation des réserves ont été développées, différant notamment par leur(s) hypothèse(s) sous-jacente(s). Néanmoins, l'objectif de toutes ces méthodes est toujours de compléter (voire extrapoler) le triangle des nombres de sinistres et/ou des montants des sinistres. En parallèle, les méthodes de projection de la mortalité consistent à extrapoler dans le futur des tableaux de nombres (e.g. les taux de mortalité $\mu_x(t)$). Ainsi, même si le fonds des problématiques de la mortalité prospective et des triangles IBNR n'ont absolument rien en commun, ces deux sujets semblent converger sur les manières d'être traités. Les méthodes utilisées pour l'un pourront donc vraisemblablement être appliquées à l'autre.

Plan des travaux de thèse

Mortalité prospective

Modèle de Lee-Carter et extensions

Publications

1. DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2003). Importance de la période d'observation et des âges considérés dans la projection de la mortalité selon la méthode de Lee-Carter. *Belgian Actuarial Bulletin* **3**, 1-21.
2. DELWARDE, A., DENUIT, M., GUILLEN, M. & VIDIELLA, A. (2004). Application of the Poisson log-bilinear projection model to the G5 mortality experience. *Working Paper* **11**. Institut des Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain, Belgium.
3. CZADO, C., DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2005). Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections. *Insurance : Mathematics and Economics* **36**, 260-284.
4. COSSETTE, H., DELWARDE, A., DENUIT, M., GUILLOT, F. & MARCEAU, E. (2005). Pension plan valuation and dynamic mortality tables. *Working Paper* **17**. Institut des Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain, Belgium.

Résumé

Le problème de la projection de la mortalité a connu ces dernières années de nombreux développements. La méthode de Lee-Carter a certainement marqué les esprits des actuaires et constitué un tournant dans la recherche sur le sujet, comme en témoignent les nombreuses publications dont elle fait encore l'objet, près de quinze ans après son introduction. Ce modèle log-bilinéaire décompose les taux de mortalité $\hat{\mu}_x(t)$ de la manière suivante :

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}. \quad (1)$$

Y sont associées deux contraintes qui en assurent l'identifiabilité, par exemple

$$\sum_x \beta_x = 1 \text{ et } \sum_t \kappa_t = 0. \quad (2)$$

L'article introductif DELWARDE & DENUIT (2003) présente la méthode et traite de l'influence des années et âges considérés dans le modèle.

Le modèle original de Lee-Carter suppose les erreurs ε_{xt} centrées, indépendantes et de même variance σ^2 . Cette hypothèse d'homoscédasticité est en pratique régulièrement violée, et a orienté la recherche vers des variantes du modèle. Des poids peuvent par exemple être introduits, comme le propose WILMOTH (1993), pour tenir compte de la plus grande variabilité des taux de mortalité lorsque l'effectif observé est faible (typiquement aux âges avancés).

Alternativement, le modèle de Lee-Carter peut être incorporé dans un modèle de Poisson, comme dans DELWARDE ET AL. (2004). Il prend alors la forme

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}\mu_x(t)) \quad (3)$$

où D_{xt} est le nombre de décès observés à l'âge x durant l'année t , et E_{xt} une mesure de l'exposition au risque correspondante, et avec

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t. \quad (4)$$

Un modèle binomial peut également être envisagé, comme dans COSSETTE ET AL. (2005).

Il est également possible d'incorporer des variables explicatives au sein de (3)-(4), comme réalisé dans WILMOTH & VALKONEN (2002). Ainsi, dans DELWARDE ET AL. (2004), chaque pays du G5 y est vu comme une partie de la population générale. L'avantage principal d'un tel modèle est de ne garder qu'une unique tendance temporelle (et d'ainsi éviter le délicat traitement des séries temporelles multivariées), qui est modulée en fonction de la classe d'individus considérée (i.e. âge, année et pays).

Le modèle de Lee-Carter peut également être introduit dans un paradigme bayésien. Les paramètres α_x , β_x et κ_t sont alors vus comme des variables aléatoires, fonctions d'hyperparamètres aléatoires et de constantes. Le traitement bayésien du modèle de Poisson (3)-(4) est développé dans CZADO ET AL. (2005) à l'aide d'un algorithme MCMC (pour *Markov Chain Monte Carlo*). Cette technique permet donc l'estimation de la distribution des paramètres du modèle, et partant, la déduction d'intervalles de confiance pour les taux de mortalité (passés et futurs).

Travaux liés

Les développements susmentionnés font suite au triptyque BROUHNS & DENUIT (2001a,b,c) qui initie au sujet et apporte une première partie de solution au problème de la mortalité prospective, et à BROUHNS ET AL. (2002a) qui introduit le modèle de Poisson (3)-(4).

Plus récemment, une autre extension au modèle de Lee-Carter a été proposée par KOISSI & SHAPIRO (2005). Ces auteurs proposent le traitement du modèle (1) à l'aide de la théorie des nombres flous (*fuzzy numbers*), qui permet de relaxer l'hypothèse d'homoscédasticité mise à mal par de nombreux jeux de données.

Le problème des intervalles de confiance, dont une solution est fournie par l'approche bayésienne du modèle de Lee-Carter, est également considéré par BROUHNS ET AL. (2005), lesquels utilisent la technique du rééchantillonnage (ou *bootstrap*).

Notons enfin que l'essentiel des développements relatifs au modèle de Lee-Carter sont répertoriés dans DELWARDE & DENUIT (2005).

Modélisation de l'antisélection

Publication

1. DELWARDE, A., KACHAKHIDZE, D., OLIÉ, L. & DENUIT, M. (2005). Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie. *Bulletin Français d'Actuariat*, sous presse.

Résumé

Les méthodes de projection de la mortalité ne s'utilisent habituellement qu'avec des données relatives à la population générale, par manque d'historique sur les données marché. Les tables prospectives ainsi obtenues doivent donc être adaptées aux portefeuilles de rentiers, la mortalité de ces derniers étant bien souvent très différente de celle de la population moyenne. Ce travail est généralement pratiqué à l'aide de modèles relationnels, qui font le lien entre une table lisse et des données beaucoup plus variables, puisque relatives à des portefeuilles peu peuplés. Dans DELWARDE ET AL. (2005), il est proposé une généralisation de ces méthodes en utilisant tantôt les modèles additifs généralisés (ou *GAM*), tantôt des modèles linéaires généralisés (ou *GLM*) locaux. Il en résulte des tables adaptées aux données marché (aussi peu fournies soient-elles), basées soit uniquement sur l'âge, soit sur une ou plusieurs tables données.

Travaux liés

La modélisation de l'antisélection est abordée dans BROUHNS & DENUIT (2001c), qui mettent en évidence une relation linéaire entre données population et données marché. En ce sens, cette méthode trouve sa place dans les modèles relationnels généralisés développés dans DELWARDE ET AL. (2005).

Triangles IBNR

Publication

1. DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2005). On a Poisson GLM variant of chain-ladder for claim counts. *Actu-L*, sous presse.

Résumé

Comme expliqué précédemment, il semble pertinent de recourir à des méthodes développées en mortalité prospective pour traiter les triangles IBNR. Les nombres de sinistres sont alors assimilés à des nombres de décès, les années de survenance à des âges, et les années de développement aux années calendaires. Un modèle de Poisson log-bilinéaire est donc proposé dans DELWARDE & DENUIT (2005).

Il faut cependant garder à l'esprit que les données contenues dans un triangle IBNR sont généralement beaucoup moins fournies que dans un tableau de taux de mortalité - tout au plus une dizaine de lignes et colonnes pour les triangles IBNR, contre quelques dizaines voire une centaine en mortalité prospective. Pour garder un nombre de paramètres raisonnable, les β_x ne sont alors plus estimés mais fixés a priori comme mesures d'expositions au risque.

Enfin, outre la projection proprement dite, les techniques de rééchantillonnage développées dans BROUHNS ET AL. (2005) dans le cadre de la mortalité prospective trouvent également leur écho pour les triangles IBNR.

Travaux hors du cadre de la thèse

Certains travaux réalisés ne rentrent pas dans le cadre de la présente thèse de doctorat. Nous nous contenterons donc d'en donner un bref résumé.

1. BROUHNS, N., DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2002). Méthodes d'élaboration de tables de mortalité prospectives, ou comment tarifier des rentes viagères lorsque la

mortalité évolue. *Consulting Report 02-03*. Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Belgium.

Résumé

Étude réalisée pour l'Association Royale des Actuaires Belges (KVBA-ARAB) sur la tarification des rentes viagères. Des applications sur base de données belges sont également développées.

2. BROUHNS, N., DELFOSSE, P., DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2002). Assurances de groupes ou fonds de pension. Liquidation en rentes : oui, mais à quel prix ? *Le monde de l'assurance* **319**, 25-28.

Résumé

Cet article fait suite à l'étude précédente, et consiste en une vulgarisation des résultats de cette dernière.

3. DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2005). Sur les méthodes de conversion d'une rente en capital. *Revue Générale des Assurances et des Responsabilités*, sous presse.

Résumé

Cette note est consacrée au problème de la conversion d'une rente en un capital, tel que rencontré dans le domaine de la capitalisation des dommages et intérêts en droit commun et de la conversion de l'usufruit du conjoint survivant. Nous examinerons aussi le problème semblable de conversion d'un capital en rente lors de la cession d'immeubles en viager. Contrairement aux calculs effectués par les actuaires, nous verrons que plusieurs méthodes de conversion sont envisageables dans les cas évoqués plus haut. De plus, le choix des tables de mortalité à utiliser lors de la conversion est loin d'être simple, tant les différences de longévité entre les différentes catégories de la population sont importantes. Cette note n'entend pas apporter de réponse mais plutôt susciter la réflexion des juristes autour des problèmes liés à la conversion d'une rente en capital.

Bibliographie

1. BROUHNS, N. & DENUIT, M. (2001a). Risque de longévité et rentes viagères I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours. *Belgian Actuarial Bulletin* **2**, 26-48.

2. BROUHNS, N. & DENUIT, M. (2001b). Risque de longévité et rentes viagères II. Tables de mortalité prospectives pour la population belge. *Belgian Actuarial Bulletin* **2**, 49-63.
3. BROUHNS, N. & DENUIT, M. (2001c). Risque de longévité et rentes viagères III. Elaboration de tables de mortalité prospectives pour la population assurée belge, et évaluation du coût de l'antisélection. *Belgian Actuarial Bulletin* **2**, 64-72.
4. BROUHNS, N., & DENUIT, M. (2002). Rentes viagères : Des bases réglementaires totalement dépassées. *Monde de l'Assurance* **304**, 18-21.
5. BROUHNS, N., DENUIT, M. & VERMUNT, J. (2002a). A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables. *Insurance : Mathematics & Economics* **31**, 373-393.
6. BROUHNS, N., DENUIT, M. & VERMUNT, J. (2002b). Measuring the longevity risk in mortality projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 105-130.
7. BROUHNS, N., DENUIT, M. & VAN KEILEGOM, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality projection. *Scandinavian Actuarial Journal*, 212-224.
8. DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2005). *Construction de Tables de Mortalité Périodiques et Prospectives*. Economica, Paris.
9. KOISSI, M.-C. & SHAPIRO, A.F. (2005). Fuzzy formulation of the Lee-Carter Model for Mortality Forecasting. Submitted to *Insurance : Mathematics & Economics*.
10. WILMOTH, J.R. (1993). Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change. *Technical Report*. Department of Demography, University of California, Berkeley.
11. WILMOTH, J.R. & VALKONEN, T. (2002). A parametric representation of mortality differentials over age and time. *EAPS seminar, Trends in differentials in morbidity and mortality : Analysis and explanation*. Pontignano, Italy, April 2001.

Table des matières

1	Importance de la période d'observation et des âges considérés dans la projection de la mortalité selon la méthode de Lee-Carter	1
1.1	Introduction	1
1.2	Tables de mortalité longitudinales	3
1.3	Méthode de Lee-Carter	5
1.3.1	Le modèle	5
1.3.2	Estimation des paramètres	7
1.4	Statistiques de mortalité pour la Belgique	10
1.4.1	Collecte des données	10
1.4.2	Traitement des données manquantes	11
1.4.3	Complétion des tables jusqu'à 110 ans	12
1.5	Ajustement du modèle de Lee-Carter aux données belges	23
1.6	Comparaison de deux périodes d'observation : [1920, 2000] et [1950, 2000] . . .	28
1.7	Extrapolation de la tendance temporelle	30
1.7.1	Modélisation ARIMA	31
1.7.2	Validation des modèles et prédictions	38
1.8	Estimation de $a_x(2000)$ et $e_x(2000)$	38
1.9	En guise de conclusion	39
2	Application of the Poisson log-bilinear model to the G5 mortality experience	45
2.1	Introduction and Motivation	45
2.1.1	Notation	47
2.1.2	Data	48

2.1.3	Agenda	48
2.2	Poisson log-bilinear methodology	49
2.2.1	Lee-Carter classical methodology	49
2.2.2	Poisson log-bilinear model	50
2.2.3	Maximum likelihood estimation	51
2.2.4	Modelling the index of mortality	53
2.3	An analysis based on disaggregated data : the Wilmoth-Valkonen Model . . .	58
2.3.1	Model	58
2.3.2	Parameters estimation	59
2.3.3	Mortality predictions	62
2.4	Discussion	63
3	Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections	73
3.1	Introduction	73
3.1.1	Lee-Carter model for mortality projections	73
3.1.2	Poisson log-bilinear model for mortality projections	74
3.1.3	Scope of the paper	75
3.1.4	Agenda	76
3.2	Model and prior distributions	77
3.2.1	Likelihood function	77
3.2.2	Prior distribution for the time index κ	77
3.2.3	Prior distribution for β	78
3.2.4	Prior distribution for α	79
3.2.5	Summary of the model	79
3.3	A posteriori distributions	79
3.3.1	MCMC approach	79
3.3.2	Metropolis-Hastings sampling for the time index vector κ	82
3.3.3	Metropolis-Hastings sampling for β	85
3.3.4	Gibbs sampling for α	87
3.3.5	Gibbs sampling for ρ	88
3.3.6	Gibbs sampling for σ_{κ}^2	89
3.3.7	Gibbs sampling for σ_{β}^2	90
3.3.8	Gibbs sampling for γ	90

3.4	Numerical illustration	90
3.4.1	Data set	90
3.4.2	Initialization and choice of prior distributions for the hyperparameters	91
3.4.3	Convergence diagnostics	92
3.4.4	Comparison with other methods	97
4	Pension plan valuation and dynamic mortality tables	109
4.1	Introduction and Motivation	109
4.2	Notation and Assumptions	111
4.2.1	Notation	111
4.2.2	Assumption of Piecewise Constantness for Forces of Mortality	111
4.3	Mortality Forecast for the Population Data of Quebec	112
4.3.1	Description of the Data	112
4.3.2	Time Trends	112
4.3.3	Poisson Log-Bilinear Methodology	113
4.3.4	Binomial-Gumbel Bilinear Methodology	116
4.3.5	Selection of the Model	117
4.3.6	Projection of the Time Index	118
4.3.7	Completion of the Lifetables	119
4.4	Application to a Pension Plan	120
4.4.1	Description of the RRQ and Data	120
4.4.2	Descriptive Analysis	121
4.4.3	Impact of RRQ Annuitants Characteristics	121
4.4.4	Poisson Regression for Annual RRQ Death Counts	122
4.5	Numerical Examples	124
4.5.1	Impact of Mortality Improvement on the Expected Residual Lifetime .	124
4.5.2	Impact of Mortality Improvement on Annuity Prices	126
4.5.3	Impact of Mortality Improvement on the Solvency of Pension Plans . .	126
4.6	Acknowledgements	128
4.7	References	128
4.8	Appendix	131
4.9	Graphics	134

5	Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie	157
5.1	Introduction	157
5.1.1	Modèles semi-paramétriques en mortalité	157
5.1.2	Méthodes relationnelles en mortalité	158
5.2	Modèles relationnels : Revue de la littérature	159
5.2.1	Modèle à risques proportionnels de Cox	159
5.2.2	Modèle de Brass	160
5.2.3	Modèle de Hannerz	160
5.3	Approche unifiée dans le cadre des modèles linéaires et additifs généralisés . .	161
5.3.1	Unification des modèles de Cox, de Brass et de Hannerz	161
5.3.2	Taux de mortalité constants par morceaux	162
5.3.3	Modèles envisagés	163
5.4	Inférence par maximum de vraisemblance local	166
5.4.1	Famille exponentielle naturelle	166
5.4.2	Modèle de régression	167
5.4.3	Lien canonique	168
5.4.4	Méthode Loess	168
5.5	Illustrations numériques	174
5.5.1	Portefeuille 1	174
5.5.2	Portefeuille 2 - France - assurance décès - analyse en nombre d'assurés	177
5.5.3	Portefeuille 3 - France - assurance décès - analyse en montant	180
6	On a Poisson GLM variant of chain ladder for claim counts	185
6.1	Introduction	185
6.1.1	Context	185
6.1.2	Data	186
6.2	Poisson modelling	189
6.2.1	Chain-Ladder approach	189
6.2.2	GLM variant	190
6.2.3	Comparison	193
6.2.4	Extrapolation of time trends	193
6.3	Bootstrap	196

6.3.1	Parametric bootstrap	196
6.3.2	Bootstrap on residuals	196
6.3.3	Numerical illustrations	197

