Age stationnaire en eaux peu profondes: conditions aux limites sur une frontière entrante idéalisée

Eric Deleersnijder, 2 février 2019

Résumé. Pour un modèle hydrodynamique dont les équations sont intégrées sur la hauteur de la colonne d'eau, on introduit, dans le cadre de la boîte à outils CART[1], l'âge de l'eau comme une variable diagnostique qui mesure le temps écoulé depuis l'entrée dans le domaine d'intérêt. La fonction de distribution de l'âge de l'eau est la variable centrale de cette méthode d'interprétation des résultats. On construit la relation que doit satisfaire cette fonction (qui est aussi la fonction de Green du problème) sur une frontière entrante idéalisée. On en déduit les conditions aux limites pour les variables dérivées (réponse indicielle, concentration d'âge et âge moyen). La présente activité de "validation" contribue à prouver que les propriétés des variables diagnostiques ne contredisent pas leurs définitions littérales préalables.

Motivation

Deleersnijder et Mouchet (2017[2]) ont souligné l'incohérence des conditions aux limites utilisées dans certaines études océanographiques utilisant l'âge comme aide à l'interprétation des résultats numériques. Il convient tout d'abord d'établir les conditions aux limites à appliquer à la fonction de distribution de l'âge. Ensuite, en évaluant les deux premiers moments (selon l'âge) de ces conditions aux limites, on obtient les conditions auxiliaires que doivent vérifier la concentration et la concentration d'âge. Celles-ci permettent finalement d'écrire les conditions aux limites satisfaites par l'âge lui-même. En d'autres termes, on ne peut pas établir indépendamment les unes des autres les conditions aux limites pour la concentration et celles pour la concentration d'âge — comme l'ont pourtant fait Bendtsen et al. (2009[3]), ce qui les a conduit à obtenir des résultats partiellement infondés.

Dans le cadre de l'évaluation de l'âge stationnaire (indépendant du temps) dans un modèle où les équations sont intégrées sur la hauteur de la colonne d'eau (Deleersnijder, 2017[4]), la variable diagnostique centrale est la fonction de distribution de l'âge de l'eau, $c(x,y,\tau)$, où x et y sont les coordonnées cartésiennes horizontales tandis que la troisième variable indépendante, τ, représente l'âge. La dimension physique de la fonction de distribution de l'âge est temps^{-1}.

Ci-dessous, on construit la condition auxiliaire à appliquer sur une frontière entrante de telle sorte que l'âge mesure le temps écoulé depuis l'entrée dans le domaine. Ensuite, on

[1] CART: Constituent-oriented Age and Residence time Theory (www.climate.be/cart)

[2] Deleersnijder E. et A. Mouchet, 2017, *A propos des conditions aux limites employées dans l'étude de ventilation de Bendtsen et al. (JMS, 2009)*, Note de travail, Université catholique de Louvain, disponible sur la toile à l'adresse suivante: http://hdl.handle.net/2078.1/184722

[3] Bendtsen J., K.E. Gustafsson, J. Söderkvist and J.L.S. Hansen, 2009, Ventilation of bottom water in the North Sea-Baltic Sea transition zone, *Journal of Marine Systems*, 75, 138-149

[4] Deleersnijder E., 2017, *Diagnosing steady-state flows in shallow reservoirs by means of the age: theory and idealised illustrations*, Working note, Université catholique de Louvain, available on the web at the following address: http://hdl.handle.net/2078.1/187908

établit les conditions aux limites satisfaites par les autres variables pertinentes de telle sorte qu'elles soient compatibles avec celle appliquée à la fonction de distribution de l'âge.

Variables pertinentes

L'eau est un traceur passif dont la concentration doit être égale à l'unité en tout point du domaine d'intérêt. Par conséquent, le problème différentiel qui permet de calculer la fonction de distribution doit être posé de telle sorte que cette dernière vérifie en tout point la contrainte suivante:

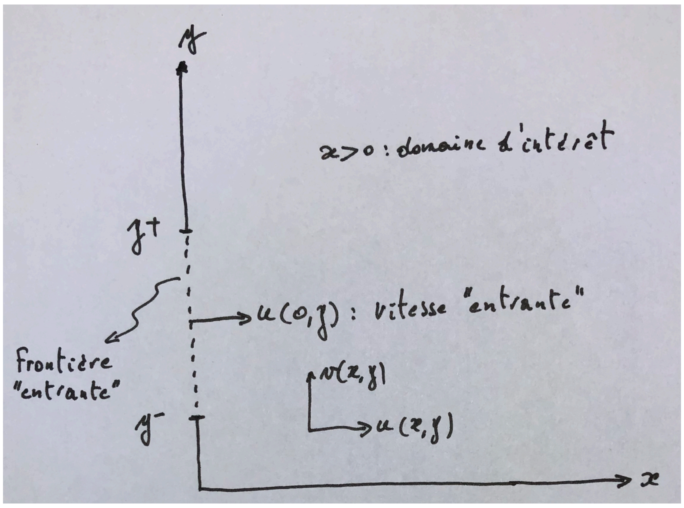
$$\int_0^\infty c(x,y,\tau)\,d\tau \;=\; 1 \quad . \tag{1}$$

Selon CART, la concentration d'âge vaut

$$\alpha(x,y) \;=\; \int_0^\infty \tau\, c(x,y,\tau)\,d\tau \quad , \tag{2}$$

de sorte que l'âge moyen est donné par

$$a(x,y) \;=\; \frac{\int_0^\infty \tau\, c(x,y,\tau)\,d\tau}{\int_0^\infty c(x,y,\tau)\,d\tau} \;=\; \int_0^\infty \tau\, c(x,y,\tau)\,d\tau \;=\; \alpha(x,y) \quad . \tag{3}$$



Pour les écoulement considérés ici, on peut voir la fonction de distribution comme la fonction de Green (ou réponse impulsionnelle) du problème. La réponse indicielle, utilisée par Deleersnijder (2017[5]), est alors

$$b(x,y,\tau) \;=\; \int_0^\tau c(x,y,\tau')\,d\tau' \quad . \tag{4}$$

[5] Op. cit.

Par souci de simplification, on suppose que la frontière entrante est localisée en $x=0$, de telle sorte que (voir figure ci-dessus)

$$\begin{cases} \text{extérieur du domaine d'intérêt: } x < 0 \\ \text{intérieur du domaine d'intérêt: } 0 < x \end{cases} \tag{5}$$

La frontière entrante est alors définie comme suit:

$$x=0\,,\quad y^- < y < y^+ \quad . \tag{6}$$

Le vecteur vitesse est $\mathbf{u}(x,y)=[u(x,y),v(x,y)]$. La vitesse normale à la frontière est positive:

$$u(0,y) \geq 0 \quad . \tag{7}$$

Fonction de distribution de l'âge de l'eau sur la frontière entrante

On définit l'âge d'une particule d'eau comme le temps qui s'est écoulé depuis qu'elle est entrée dans le domaine. Par conséquent, l'âge des particules d'eau est fixé à zéro au moment où elles franchissent la frontière entrante. On doit donc imposer

$$\left[Hcu - H\kappa\frac{\partial c}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[Hu\delta(\tau-0)\right]_{x=0} \tag{8}$$[6]

où $H(x,y)$, $\kappa(x,y)$ et $\delta(\tau-0)$ représentent respectivement la hauteur de la colonne d'eau, la diffusivité et la fonction de Dirac. La dimension physique de cette dernière est temps^{-1}. Elle satisfait identiquement les deux propriétés suivantes:

$$\int_0^T \delta(\tau-0)\,d\tau = 1 \tag{9}$$

et

$$\int_0^T \tau\delta(\tau-0)\,d\tau = 1 \quad , \tag{10}$$

avec $T>0$.

Débit entrant

Conformément à Deleersnijder et Mouchet (2017[7]), c'est de la relation (8) que les autres conditions aux limites doivent découler. Il en va de même pour tout autre diagnostic relatif aux échanges à travers la frontière étudiée. Ainsi, par exemple, en intégrant le premier membre de (8), on obtient le transport (le débit volumique par unité de longueur, qui se

---

[6] Il convient de souligner que, selon l'approche adoptée ici, l'âge moyen sur la frontière n'est généralement pas nul. Si l'on avait défini l'âge comme le temps écoulé depuis l'instant ou chaque particule d'eau a touché la frontière entrante pour la dernière fois, alors la fonction de distribution de l'âge de l'eau aurait dû satisfaire la condition de Dirichlet $\left[c(0,y,\tau)\right]_{x=0}=\delta(\tau-0)$, ce qui aurait conduit à une valeur nulle de l'âge moyen de l'eau sur la frontière entrante, $a(0,y)=0$.

[7] Op. cit.

mesure en $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) en tout point de la frontière:

$$U(0,y) \;=\; \int_0^\infty \left[Hcu - H\kappa \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=0} d\tau \;=$$

$$= H(0,y)u(0,y) \underbrace{\int_0^\infty c(0,y,\tau)\, d\tau}_{=1,\text{ voir (9)}} \;-\; \underbrace{H(0,y)\kappa(0,y)\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_0^\infty c(0,y,\tau)\, d\tau}_{=1,\text{ voir (1)}}}_{=\frac{\partial 1}{\partial x}=0} = \; H(0,y)u(0,y) \qquad \text{(11a)}$$

Ce résultat est en accord avec l'intuition physique la plus élémentaire. Par ailleurs, il est rassurant de constater que l'on obtient la même valeur en intégrant le membre de droite de (8):

$$\int_0^\infty \left[Hu\delta(\tau - 0) \right]_{x=0} d\tau \;= H(0,y)u(0,y) \underbrace{\int_0^\infty \delta(\tau - 0)\, d\tau}_{=1,\text{ voir (9)}} \;=\; H(0,y)u(0,y) \quad . \qquad \text{(11b)}$$

Par ailleurs, le débit volumique entrant ($\mathrm{m^3\,s^{-1}}$) vaut

$$Q \;=\; \int_{y^-}^{y^+} H(0,y)u(0,y)\, dy \quad . \qquad \text{(12)}$$

Cohérence des autres conditions aux limites

Sur la frontière entrante, on obtient la relation que satisfait la réponse indicielle $b(x,y,\tau)$ en intégrant (8) selon τ . Ainsi, l'intégration du premier membre conduit à

$$\int_0^\tau \left[Hcu - H\kappa \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=0} d\tau'$$

$$= \; H(0,y) \underbrace{\left(\int_0^\tau c(0,y,\tau')\, d\tau' \right)}_{=b(0,y,\tau),\text{ voir (4)}} u(0,y) - H(0,y)\kappa(0,y) \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\int_0^\tau c(0,y,\tau')\, d\tau' \right)}_{=b(0,y,\tau),\text{ voir (4)}} \qquad \text{(13)}$$

$$= \left[Hbu - H\kappa \frac{\partial b}{\partial x} \right]_{x=0}$$

D'autre part, en intégrant le membre de droite de (8), il vient

$$\int_0^\tau \left[Hu\delta(\tau' - 0) \right]_{x=0} d\tau' \;=\; \int_0^\tau \left[Hu\delta(\tau' - 0) \right]_{x=0} d\tau'$$

$$= \; H(0,y)u(0,y) \underbrace{\int_0^\tau \delta(\tau' - 0) d\tau'}_{=1,\text{ voir (9)}} \;=\; \left[Hu \right]_{x=0} \qquad \text{(14)}$$

En combinant (13) et (14), on aboutit à la relation que la réponse indicielle $b(x,y,\tau)$ doit respecter sur la frontière entrante:

$$\left[Hbu - H\kappa \frac{\partial b}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[Hu \right]_{x=0} \tag{15}$$

Pour obtenir la condition auxiliaire pour l'âge, on tire parti de (3). Ainsi, il faut évaluer le moment du premier ordre de (8). Pour le membre de gauche de cette relation, il vient

$$\int_0^\infty \tau \left[Hcu - H\kappa \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=0} d\tau =$$

$$= H(0,y)u(0,y) \underbrace{\int_0^\infty \tau\, c(0,y,\tau)\, d\tau}_{=a(x,y),\ \text{voir (3)}} - H(0,y)\kappa(0,y) \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_0^\infty \tau c(0,y,\tau)\, d\tau}_{=a(x,y),\ \text{voir (3)}} \tag{16}$$

$$= \left[Hau - H\kappa \frac{\partial a}{\partial x} \right]_{x=0}$$

Quant au membre de droite de (8), on obtient

$$\int_0^\infty \tau \left[Hu\delta(\tau - 0) \right]_{x=0} d\tau = H(0,y)u(0,y) \underbrace{\int_0^\infty \tau\, \delta(\tau - 0)\, d\tau}_{=0,\ \text{voir (10)}} = 0 \ . \tag{17}$$

En combinant (16) et (17), on obtient la relation que doit satisfaire l'âge moyen sur la frontière entrante:

$$\left[Hau - H\kappa \frac{\partial a}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \tag{18}$$

Cette relation signifie que **le flux total (advectif + diffusif) d'âge traversant la frontière entrante doit être nul**, ce qui est en accord avec la présente définition de l'âge.

Discussion

Les équations de CART sont basées sur le bilan de masse de chaque constituant du mélange fluide étudié. Le seul ingrédient arbitraire de cette boîte à outils diagnostiques concerne la formule conduisant à l'âge moyen d'un constituant ou d'un groupe de constituants, en ce compris le mélange fluide lui-même.

A l'évidence, les résultats obtenus au moyen de CART ne peuvent être comparés directement avec des données de terrain[8]. Une validation partielle et indirecte est envisageable via des mesures de concentration. Néanmoins, à chaque fois que cela est possible, il importe également de vérifier que les problèmes différentiels construits sous l'égide de CART conduisent à des solutions dont les propriétés ne contredisent pas les définitions littérales préalables des temps caractéristiques que l'on souhaite évaluer.

[8] Aucune particule d'un mélange fluide n'est équipée d'une montre...

La présente note de travail est un exemple de cette activité de "validation"[9], qui, bien qu'elle puisse sembler laborieuse, est, à mon humble avis, souhaitable — pour les raisons évoquées ci-dessus. Malheureusement, les principa·les·ux act·rice·eurs de CART n'ont pas encore mené de réflexion approfondie sur les activités de "validation" qui peuvent ou ne peuvent pas être réalisées. Ce chantier reste à ouvrir[10]...

----

[9] Le terme même de "validation" est sujet à caution, comme le suggère l'article suivant: Oreskes N., K. Shrader-Frechette and K. Belitz, 1994, Verification, validation and confirmation of numerical models in the Earth sciences, *Science*, 263, 641-646

[10] Une base de réflexion pertinente pourrait être l'article suivant: Dee D.P., 1995, A pragmatic approach to model validation, in: D.R. Lynch and A.M. Davies (Eds.), *Quantitative Skill Assessment for Coastal Ocean Models*, Coastal and Estuarine Studies (Vol. 47) American Geophysical Union, Washington, D.C., pages 1-13