

Une approche intrinsèque des produits tensoriels

Tim Van der Linden
en collaboration avec Manfred Hartl

Fonds de la Recherche Scientifique–FNRS
Université catholique de Louvain

Séminaire Itinérant de Catégories
Paris — 16 novembre 2013

Une approche **intrinsèque** des produits tensoriels

Tim Van der Linden
en collaboration avec Manfred Hartl

Fonds de la Recherche Scientifique–FNRS
Université catholique de Louvain

Séminaire Itinérant de Catégories
Paris — 16 novembre 2013

Approches de la notion de produit tensoriel

Pour les R -modules

R anneau commutatif avec unité

- ▶ construction comme groupe abélien par générateurs et relations

$$M \otimes_R N := \left\langle m \otimes n \left| \begin{array}{l} m \otimes n + m' \otimes n - (m+m') \otimes n \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n+n') \\ (m \cdot r) \otimes n - m \otimes (r \cdot n) \end{array} \right. \right\rangle$$

- ▶ propriété universelle en termes de fonctions bilinéaires

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes \text{ bilinéaire}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \forall f \text{ bilinéaire} & \swarrow \exists ! f' \text{ linéaire} \\ & L & \end{array}$$

En général : les catégories *monoidales* et *enrichies*

- ▶ $(\mathbb{X}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ catégorie + structure
- ▶ éventuellement, $((-) \otimes X) \dashv [X, -] : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

Pourquoi une approche *intrinsèque* ? But :

- ▶ lien avec l'algèbre catégorique / la théorie des commutateurs
- ▶ comprendre les résultats en algèbre homologique où les produits tensoriels jouent un rôle

Approches de la notion de produit tensoriel

Pour les R -modules

R anneau commutatif avec unité

- ▶ construction comme groupe abélien par générateurs et relations

$$M \otimes_R N := \left\langle m \otimes n \left| \begin{array}{l} m \otimes n + m' \otimes n - (m+m') \otimes n \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n+n') \\ (m \cdot r) \otimes n - m \otimes (r \cdot n) \end{array} \right. \right\rangle$$

- ▶ propriété universelle en termes de fonctions bilinéaires

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes \text{ bilinéaire}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \forall f \text{ bilinéaire} & \swarrow \exists ! f' \text{ linéaire} \\ & L & \end{array}$$

En général : les catégories *monoidales* et *enrichies*

- ▶ $(\mathbb{X}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ catégorie + structure
- ▶ éventuellement, $((-) \otimes X) \dashv [X, -]: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

Pourquoi une approche *intrinsèque*? But :

- ▶ lien avec l'algèbre catégorique / la théorie des commutateurs
- ▶ comprendre les résultats en algèbre homologique où les produits tensoriels jouent un rôle

Approches de la notion de produit tensoriel

Pour les R -modules

R anneau commutatif avec unité

- ▶ construction comme groupe abélien par générateurs et relations

$$M \otimes_R N := \left\langle m \otimes n \left| \begin{array}{l} m \otimes n + m' \otimes n - (m+m') \otimes n \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n+n') \\ (m \cdot r) \otimes n - m \otimes (r \cdot n) \end{array} \right. \right\rangle$$

- ▶ propriété universelle en termes de fonctions bilinéaires

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes \text{ bilinéaire}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \forall f \text{ bilinéaire} & \swarrow \exists ! f' \text{ linéaire} \\ & L & \end{array}$$

En général : les catégories *monoidales* et *enrichies*

- ▶ $(\mathbb{X}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ catégorie + structure
- ▶ éventuellement, $((-) \otimes X) \dashv [X, -]: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

Pourquoi une approche *intrinsèque* ? But :

- ▶ lien avec l'algèbre catégorique / la théorie des commutateurs
- ▶ comprendre les résultats en algèbre homologique où les produits tensoriels jouent un rôle

Approches de la notion de produit tensoriel

Pour les R -modules

R anneau commutatif avec unité

- ▶ construction comme groupe abélien par générateurs et relations

$$M \otimes_R N := \left\langle m \otimes n \left| \begin{array}{l} m \otimes n + m' \otimes n - (m+m') \otimes n \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n+n') \\ (m \cdot r) \otimes n - m \otimes (r \cdot n) \end{array} \right. \right\rangle$$

- ▶ propriété universelle en termes de fonctions bilinéaires

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes \text{ bilinéaire}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \forall f \text{ bilinéaire} & \swarrow \exists ! f' \text{ linéaire} \\ & L & \end{array}$$

En général : les catégories *monoidales* et *enrichies*

- ▶ $(\mathbb{X}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ catégorie + structure
- ▶ éventuellement, $((-) \otimes X) \dashv [X, -]: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

Pourquoi une approche *intrinsèque* ? But :

- ▶ lien avec l'algèbre catégorique / la théorie des commutateurs
- ▶ comprendre les résultats en algèbre homologique où les produits tensoriels jouent un rôle

Approches de la notion de produit tensoriel

Pour les R -modules $\leftarrow$ **ad-hoc** R anneau commutatif avec unité

- ▶ construction comme groupe abélien par générateurs et relations

$$M \otimes_R N := \left\langle m \otimes n \left| \begin{array}{l} m \otimes n + m' \otimes n - (m+m') \otimes n \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n+n') \\ (m \cdot r) \otimes n - m \otimes (r \cdot n) \end{array} \right. \right\rangle$$

- ▶ propriété universelle en termes de fonctions bilinéaires

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes \text{ bilinéaire}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \forall f \text{ bilinéaire} & \swarrow \exists ! f' \text{ linéaire} \\ & L & \end{array}$$

En général : les catégories *monoidales* et *enrichies* $\leftarrow$ **trop général**

- ▶ $(\mathbb{X}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ catégorie + structure
- ▶ éventuellement, $((-) \otimes X) \dashv [X, -]: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

Pourquoi une approche *intrinsèque* ? But :

- ▶ lien avec l'algèbre catégorique / la théorie des commutateurs
- ▶ comprendre les résultats en algèbre homologique où les produits tensoriels jouent un rôle

Approches de la notion de produit tensoriel

Pour les R -modules

R anneau commutatif avec unité

- ▶ construction comme groupe abélien par générateurs et relations

$$M \otimes_R N := \left\langle m \otimes n \left| \begin{array}{l} m \otimes n + m' \otimes n - (m+m') \otimes n \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n+n') \\ (m \cdot r) \otimes n - m \otimes (r \cdot n) \end{array} \right. \right\rangle$$

- ▶ propriété universelle en termes de fonctions bilinéaires

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes \text{ bilinéaire}} & M \otimes_R N \\ & \searrow \forall f \text{ bilinéaire} & \swarrow \exists ! f' \text{ linéaire} \\ & L & \end{array}$$

En général : les catégories *monoidales* et *enrichies*

- ▶ $(\mathbb{X}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ catégorie + structure
- ▶ éventuellement, $((-) \otimes X) \dashv [X, -]: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

Pourquoi une approche *intrinsèque* ? But :

- ▶ lien avec l'algèbre catégorique / la théorie des commutateurs
- ▶ comprendre les résultats en algèbre homologique où les produits tensoriels jouent un rôle

Essai : le terme de Ganea dans la suite exacte d'homologie

Théorème [T Ganea, 1968]

Toute extension centrale de groupes

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0 \qquad [K, B] = 0$$

induit une suite exacte

$$K \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow H_2 B \longrightarrow H_2 A \longrightarrow K \longrightarrow H_1 B \longrightarrow H_1 A \longrightarrow 0.$$

- ▶ Connu dans beaucoup de cas, mais...
jusqu'à récemment, hors de la portée de l'algèbre catégorique
- ▶ cf. suite exacte longue

Essai : le terme de Ganea dans la suite exacte d'homologie

Théorème [T Ganea, 1968]

Toute extension centrale de groupes

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0 \qquad [K, B] = 0$$

induit une suite exacte

$$K \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow H_2 B \longrightarrow H_2 A \longrightarrow K \longrightarrow H_1 B \longrightarrow H_1 A \longrightarrow 0.$$

- ▶ Connu dans beaucoup de cas, mais...
jusqu'à récemment, hors de la portée de l'algèbre catégorique
- ▶ cf. suite exacte longue

La suite exacte longue de Tomas Everaert

Théorème [T Everaert, 2010]

Toute extension

$$0 \longrightarrow K \rightrightarrows B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

dans une catégorie semi-abélienne avec assez d'objets projectifs induit une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(f, \text{centr}) & \longrightarrow & H_{n+1}B & \longrightarrow & H_{n+1}A \\ & & & & \swarrow & & \\ & & H_n(f, \text{centr}) & \longrightarrow & H_nB & \longrightarrow & H_nA \\ & & & & \swarrow & & \\ & & H_{n-1}(f, \text{centr}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_1A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Essai : le terme de Ganea dans la suite exacte d'homologie

Théorème [T Ganea, 1968]

Toute extension centrale de groupes

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0 \qquad [K, B] = 0$$

induit une suite exacte

$$K \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow H_2 B \longrightarrow H_2 A \longrightarrow K \longrightarrow H_1 B \longrightarrow H_1 A \longrightarrow 0.$$

- ▶ Connu dans beaucoup de cas, mais...
jusqu'à récemment, hors de la portée de l'algèbre catégorique
- ▶ cf. suite exacte longue

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ **catégories deux-nilpotentes**

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

[G Janelidze, L Márki & W Tholen, 2002]

Pour X et Y dans une catégorie **semi-abélienne** $\mathbb{X}$,
leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit
 $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne
 $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960],
et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le **co-smash-produit** $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\mathbf{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \mathbf{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

« Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

- ▶ Intuition : les catégories de modules sont *trop* abéliennes
- ▶ Idée principale : dans le cas des algèbres commutatives, le produit tensoriel est un *co-smash-produit* [A Carboni & G Janelidze, 2003]
- ▶ En général, le co-smash-produit est un *commutateur formel* [S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]
...ce qui n'est *pas assez abélien*. $\Rightarrow$ catégories deux-nilpotentes

Définition

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$, leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y \in |\text{Ab}(\mathbb{X})|$ est le co-smash-produit $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

Etant considéré comme une opération sur une catégorie abélienne $\mathbb{A} = \text{Ab}(\mathbb{X})$, le produit bilinéaire dépend de $\mathbb{X}$. On écrit $M \otimes_{\mathbb{X}} N$.

Pour les groupes on a $X \otimes Y \cong \text{ab}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{ab}(Y)$.

Ce phénomène est décrit pour la première fois dans [T MacHenry, 1960], et a été redécouvert dans [M Hartl & C Vespa, 2011].

Exemples

catégorie $\mathbb{X}$	objets	cœur abélien $\text{Ab}(\mathbb{X})$	$M \otimes_{\mathbb{X}} N$
Gp	groupes	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Loop	boucles	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
$\text{Nil}_2(\text{Gp})$	groupes deux-nilpotents	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
CRng	anneaux commutatifs	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Mod_R	R -modules	Mod_R	0
CAlg_R	R -algèbres commutatives	Mod_R	$M \otimes_R N$
Alg_R	R -algèbres	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
Lie_R	R -algèbres de Lie	Mod_R	$M \otimes_R N$
Leib_R	R -algèbres de Leibniz	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
$C^*\text{-Alg}$	C^* -algèbres	0	0

D'autres exemples :

- ▶ modules (pré)croisés internes (simple, donne des notions connues)
- ▶ actions internes (compliqué)
- ▶ variétés deux-nilpotentes (donne toute variété semi-abélienne)

Exemples

catégorie $\mathbb{X}$	objets	cœur abélien $\text{Ab}(\mathbb{X})$	$M \otimes_{\mathbb{X}} N$
Gp	groupes	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Loop	boucles	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
$\text{Nil}_2(\text{Gp})$	groupes deux-nilpotents	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
CRng	anneaux commutatifs	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Mod_R	R -modules	Mod_R	0
CAlg_R	R -algèbres commutatives	Mod_R	$M \otimes_R N$
Alg_R	R -algèbres	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
Lie_R	R -algèbres de Lie	Mod_R	$M \otimes_R N$
Leib_R	R -algèbres de Leibniz	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
$C^*\text{-Alg}$	C^* -algèbres	0	0

D'autres exemples :

- ▶ modules (pré)croisés internes (simple, donne des notions connues)
- ▶ actions internes (compliqué)
- ▶ variétés deux-nilpotentes (donne toute variété semi-abélienne)

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \twoheadrightarrow & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \\ & & & & X & & \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \twoheadrightarrow & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \\ & & [K, L] & \twoheadrightarrow & X & & \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \twoheadrightarrow & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \\ & & [K, L] & \twoheadrightarrow & X & & \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \rightrightarrows & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \\ & & [K, L] & \rightrightarrows & X & & \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \rightrightarrows & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \swarrow \\ & & [K, L] & \rightrightarrows & X & & \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \rightrightarrows & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \\ & & [K, L] & \rightrightarrows & X & & \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le co-smash-produit binaire et les commutateurs de Higgins

[S Mantovani & G Metere, 2010] [M Hartl & B Loiseau, 2013]

$K, L \leq X$ dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K \diamond L & \twoheadrightarrow & K + L & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_L \end{pmatrix}} & K \times L \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} & & \\
 & & [K, L] & \twoheadrightarrow & X & &
 \end{array}$$

- ▶ $[K, L]$ est le **commutateur de Higgins** de K et L .
- ▶ $[K, L] = 0$ ssi $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ factorise à travers $K \times L$,
donc k et l *coopèrent* [F Borceux & D Bourn, 2004].
- ▶ X dans $\mathbb{X}$ est **abélien** ssi $[X, X] = 0$.
Ceci détermine le **cœur abélien** $\text{Ab}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$ et
le **foncteur d'abélianisation** $\text{ab}: \mathbb{X} \rightarrow \text{Ab}(\mathbb{X})$.

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$
et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ & \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ & [K, L, M] & \longrightarrow X \end{array}$$

- ▶ En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$.
- ▶ Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.

Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2: \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.

- ▶ Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:

$$\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$$

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$
et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ & \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ & [K, L, M] & \longrightarrow X \end{array}$$

- ▶ En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$.
- ▶ Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.

Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2: \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.

- ▶ Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:

$$\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$$

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$
et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ & \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ & [K, L, M] & \rightrightarrows X \end{array}$$

- En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$.
- Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.
Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2: \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.
- Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:
 $\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$
et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ & \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ & [K, L, M] & \rightrightarrows X \end{array}$$

- En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$. ← **Pourquoi utiliser le second ?**
- Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.
Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2 : \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.
- Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:
 $\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$
et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ & \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ & [K, L, M] & \rightrightarrows X \end{array}$$

- En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$.
- Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.
Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2 : \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.
- Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:
 $\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$ et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ [K, L, M] & \rightrightarrows & X \end{array}$$

- ▶ En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$.
- ▶ Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.
Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2: \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.
- ▶ Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:
 $\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$

Le commutateur de Higgins d'ordre supérieur

[P J Higgins, 1956] [A Carboni & G Janelidze, 2003] [M Hartl & TVdL, 2013]

Le **co-smash-produit d'ordre supérieur** $X_1 \diamond \cdots \diamond X_n$ défini comme

$$0 \longrightarrow \bigcirc_{i=1}^n X_i \rightrightarrows \coprod_{i=1}^n X_i \xrightarrow{r} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} X_j$$

donne les **commutateurs de Higgins d'ordre supérieur** : pour $n = 3$ et $K, L, M \leq X$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow K \diamond L \diamond M & \rightrightarrows & K + L + M \\ & \downarrow & \downarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \\ & [K, L, M] & \rightrightarrows X \end{array}$$

- En général, $[[K, L], M] \leq [K, L, M]$.
- Un objet X tel que $[X, X, X] = 0$ est appelé **deux-nilpotent**.
Ils déterminent le **cœur deux-nilpotent** $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$
et le **foncteur de deux-nilpotentisation** $\text{nil}_2: \mathbb{X} \rightarrow \text{Nil}_2(\mathbb{X})$.
- Plus généralement, on a la **tour nilpotente** de $\mathbb{X}$:

$$\text{Ab}(\mathbb{X}) = \text{Nil}_1(\mathbb{X}) \subseteq \text{Nil}_2(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Nil}_n(\mathbb{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{X}$$

Propriétés basiques des produits bilinéaires

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur produit bilinéaire $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

- ▶ les produits bilinéaires sont non-associatifs et non-unitaires
- ▶ les produits bilinéaires sont symétriques : $X \otimes Y \cong Y \otimes X$
- ▶ les produits bilinéaires sont exacts à droite
- ▶ $X \otimes Y := \mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ se calcule dans $\mathbb{X}$ comme quotient de $X \diamond Y$ par

$$N_{X,Y} := \mathrm{im}(X \diamond X \diamond Y) \vee \mathrm{im}(X \diamond Y \diamond Y);$$

donc $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes \mathrm{ab}(Y)$

- ▶ les produits bilinéaires sont abéliens, car $[X \diamond Y, X \diamond Y] \leq N_{X,Y}$

$$(X \diamond Y) \diamond (X \diamond Y) \rightarrow X \diamond Y \diamond X \diamond Y \rightarrow X \diamond X \diamond Y$$

- ▶ Manfred : ces propriétés déterminent les $\otimes_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{A}$ abélienne

Propriétés basiques des produits bilinéaires

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur produit bilinéaire $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

- ▶ les produits bilinéaires sont non-associatifs et non-unitaires
- ▶ les produits bilinéaires sont symétriques : $X \otimes Y \cong Y \otimes X$
- ▶ les produits bilinéaires sont exacts à droite
- ▶ $X \otimes Y := \mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ se calcule dans $\mathbb{X}$ comme quotient de $X \diamond Y$ par

$$N_{X,Y} := \mathrm{im}(X \diamond X \diamond Y) \vee \mathrm{im}(X \diamond Y \diamond Y);$$

donc $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes \mathrm{ab}(Y)$

- ▶ les produits bilinéaires sont abéliens, car $[X \diamond Y, X \diamond Y] \leq N_{X,Y}$

$$(X \diamond Y) \diamond (X \diamond Y) \rightarrow X \diamond Y \diamond X \diamond Y \rightarrow X \diamond X \diamond Y$$

- ▶ Manfred : ces propriétés déterminent les $\otimes_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{A}$ abélienne

Propriétés basiques des produits bilinéaires

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur produit bilinéaire $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

- ▶ les produits bilinéaires sont non-associatifs et non-unitaires
- ▶ les produits bilinéaires sont symétriques : $X \otimes Y \cong Y \otimes X$
- ▶ les produits bilinéaires sont exacts à droite
- ▶ $X \otimes Y := \mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ se calcule dans $\mathbb{X}$ comme quotient de $X \diamond Y$ par

$$N_{X,Y} := \mathrm{im}(X \diamond X \diamond Y) \vee \mathrm{im}(X \diamond Y \diamond Y);$$

donc $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes \mathrm{ab}(Y)$

- ▶ les produits bilinéaires sont abéliens, car $[X \diamond Y, X \diamond Y] \leq N_{X,Y}$

$$(X \diamond Y) \diamond (X \diamond Y) \rightarrow X \diamond Y \diamond X \diamond Y \rightarrow X \diamond X \diamond Y$$

- ▶ Manfred : ces propriétés déterminent les $\otimes_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{A}$ abélienne

Propriétés basiques des produits bilinéaires

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur produit bilinéaire $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

- ▶ les produits bilinéaires sont non-associatifs et non-unitaires
- ▶ les produits bilinéaires sont symétriques : $X \otimes Y \cong Y \otimes X$
- ▶ les produits bilinéaires sont exacts à droite
- ▶ $X \otimes Y := \mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ se calcule dans $\mathbb{X}$ comme quotient de $X \diamond Y$ par

$$N_{X,Y} := \mathrm{im}(X \diamond X \diamond Y) \vee \mathrm{im}(X \diamond Y \diamond Y);$$

donc $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes \mathrm{ab}(Y)$

- ▶ les produits bilinéaires sont abéliens, car $[X \diamond Y, X \diamond Y] \leq N_{X,Y}$

$$(X \diamond Y) \diamond (X \diamond Y) \rightarrow X \diamond Y \diamond X \diamond Y \rightarrow X \diamond X \diamond Y$$

- ▶ Manfred : ces propriétés déterminent les $\otimes_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{A}$ abélienne

Propriétés basiques des produits bilinéaires

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur produit bilinéaire $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

- ▶ les produits bilinéaires sont non-associatifs et non-unitaires
- ▶ les produits bilinéaires sont symétriques : $X \otimes Y \cong Y \otimes X$
- ▶ les produits bilinéaires sont exacts à droite
- ▶ $X \otimes Y := \mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ se calcule dans $\mathbb{X}$ comme quotient de $X \diamond Y$ par

$$N_{X,Y} := \mathrm{im}(X \diamond X \diamond Y) \vee \mathrm{im}(X \diamond Y \diamond Y);$$

donc $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes \mathrm{ab}(Y)$

- ▶ les produits bilinéaires sont abéliens, car $[X \diamond Y, X \diamond Y] \leq N_{X,Y}$

$$(X \diamond Y) \diamond (X \diamond Y) \rightarrow X \diamond Y \diamond X \diamond Y \rightarrow X \diamond X \diamond Y$$

- ▶ Manfred : ces propriétés déterminent les $\otimes_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{A}$ abélienne

Propriétés basiques des produits bilinéaires

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur produit bilinéaire $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

- ▶ les produits bilinéaires sont non-associatifs et non-unitaires
- ▶ les produits bilinéaires sont symétriques : $X \otimes Y \cong Y \otimes X$
- ▶ les produits bilinéaires sont exacts à droite
- ▶ $X \otimes Y := \mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ se calcule dans $\mathbb{X}$ comme quotient de $X \diamond Y$ par

$$N_{X,Y} := \mathrm{im}(X \diamond X \diamond Y) \vee \mathrm{im}(X \diamond Y \diamond Y);$$

donc $X \otimes Y \cong \mathrm{ab}(X) \otimes \mathrm{ab}(Y)$

- ▶ les produits bilinéaires sont abéliens, car $[X \diamond Y, X \diamond Y] \leq N_{X,Y}$

$$(X \diamond Y) \diamond (X \diamond Y) \rightarrow X \diamond Y \diamond X \diamond Y \rightarrow X \diamond X \diamond Y$$

- ▶ Manfred : ces propriétés déterminent les $\otimes_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{A}$ abélienne

Le théorème de Ganea

Théorème

Toute extension centrale

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0 \qquad [K, B] = 0$$

dans une catégorie semi-abélienne avec assez d'objets projectifs induit une suite exacte

$$K \otimes B \longrightarrow H_2 B \longrightarrow H_2 A \longrightarrow K \longrightarrow H_1 B \longrightarrow H_1 A \longrightarrow 0.$$

- ▶ On retrouve les résultats connus pour les groupes, les modules (pré)croisés, les algèbres associatives, de Lie et de Leibniz
- ▶ ce n'est qu'une seule application du produit bilinéaire !

Le théorème de Ganea

Théorème

Toute extension centrale

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0 \qquad [K, B] = 0$$

dans une catégorie semi-abélienne avec assez d'objets projectifs induit une suite exacte

$$K \otimes B \longrightarrow H_2 B \longrightarrow H_2 A \longrightarrow K \longrightarrow H_1 B \longrightarrow H_1 A \longrightarrow 0.$$

- ▶ On retrouve les résultats connus pour les groupes, les modules (pré)croisés, les algèbres associatives, de Lie et de Leibniz
- ▶ ce n'est qu'une seule application du produit bilinéaire !

Le théorème de Ganea

Théorème

Toute extension centrale

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0 \qquad [K, B] = 0$$

dans une catégorie semi-abélienne avec assez d'objets projectifs induit une suite exacte

$$K \otimes B \longrightarrow H_2 B \longrightarrow H_2 A \longrightarrow K \longrightarrow H_1 B \longrightarrow H_1 A \longrightarrow 0.$$

- ▶ On retrouve les résultats connus pour les groupes, les modules (pré)croisés, les algèbres associatives, de Lie et de Leibniz
- ▶ ce n'est qu'une seule application du produit bilinéaire !

Conclusion

Slogan : « Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

Dans les catégories *deux-nilpotentes*, le co-smash-produit est *bilinéaire*

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

catégorie $\mathbb{X}$	objets	cœur abélien $\mathrm{Ab}(\mathbb{X})$	$M \otimes_{\mathbb{X}} N$
Gp	groupes	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Loop	boucles	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
$\mathrm{Nil}_2(\mathrm{Gp})$	groupes deux-nilpotents	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
CRng	anneaux commutatifs	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Mod_R	R -modules	Mod_R	0
CAlg_R	R -algèbres commutatives	Mod_R	$M \otimes_R N$
Alg_R	R -algèbres	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
Lie_R	R -algèbres de Lie	Mod_R	$M \otimes_R N$
Leib_R	R -algèbres de Leibniz	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
C^* -Alg	C^* -algèbres	0	0

Conclusion

Slogan : « Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

Dans les catégories *deux-nilpotentes*, le co-smash-produit est *bilinéaire*

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

catégorie $\mathbb{X}$	objets	cœur abélien $\mathrm{Ab}(\mathbb{X})$	$M \otimes_{\mathbb{X}} N$
Gp	groupes	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Loop	boucles	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
$\mathrm{Nil}_2(\mathrm{Gp})$	groupes deux-nilpotents	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
CRng	anneaux commutatifs	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Mod_R	R -modules	Mod_R	0
CAlg_R	R -algèbres commutatives	Mod_R	$M \otimes_R N$
Alg_R	R -algèbres	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
Lie_R	R -algèbres de Lie	Mod_R	$M \otimes_R N$
Leib_R	R -algèbres de Leibniz	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
$C^*\text{-Alg}$	C^* -algèbres	0	0

Conclusion

Slogan : « Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

Dans les catégories *deux-nilpotentes*, le co-smash-produit est *bilinéaire*

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\text{nil}_2(X) \diamond_2 \text{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\text{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

catégorie $\mathbb{X}$	objets	cœur abélien $\text{Ab}(\mathbb{X})$	$M \otimes_{\mathbb{X}} N$
Gp	groupes	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Loop	boucles	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
$\text{Nil}_2(\text{Gp})$	groupes deux-nilpotents	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
CRng	anneaux commutatifs	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Mod_R	R -modules	Mod_R	0
CAlg_R	R -algèbres commutatives	Mod_R	$M \otimes_R N$
Alg_R	R -algèbres	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
Lie_R	R -algèbres de Lie	Mod_R	$M \otimes_R N$
Leib_R	R -algèbres de Leibniz	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
$C^*\text{-Alg}$	C^* -algèbres	0	0

Conclusion

Slogan : « Le produit tensoriel intrinsèque est le co-smash-produit »

Dans les catégories *deux-nilpotentes*, le co-smash-produit est *bilinéaire*

Pour X et Y dans une catégorie semi-abélienne $\mathbb{X}$,
leur **produit bilinéaire** $X \otimes Y$ est le co-smash-produit
 $\mathrm{nil}_2(X) \diamond_2 \mathrm{nil}_2(Y)$ dans le cœur deux-nilpotent $\mathrm{Nil}_2(\mathbb{X})$ de $\mathbb{X}$.

catégorie $\mathbb{X}$	objets	cœur abélien $\mathrm{Ab}(\mathbb{X})$	$M \otimes_{\mathbb{X}} N$
Gp	groupes	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Loop	boucles	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
$\mathrm{Nil}_2(\mathrm{Gp})$	groupes deux-nilpotents	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
CRng	anneaux commutatifs	Ab	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
Mod_R	R -modules	Mod_R	0
CAlg_R	R -algèbres commutatives	Mod_R	$M \otimes_R N$
Alg_R	R -algèbres	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
Lie_R	R -algèbres de Lie	Mod_R	$M \otimes_R N$
Leib_R	R -algèbres de Leibniz	Mod_R	$(M \otimes_R N) \oplus (N \otimes_R M)$
$C^*\text{-Alg}$	C^* -algèbres	0	0