

Quelques réflexions sur la modélisation de la couche limite marine de fond

Eric Deleersnijder (2006)

Sur la représentation discrète de la couche limite logarithmique de fond

Eric Deleersnijder, le 5 avril 2005

Couche limite logarithmique

A proximité du fond de la mer, on peut réduire les équations de quantité de mouvement horizontale à

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

où z est la coordonnée verticale, qui croît vers le haut, et $-\tau$ est le flux vertical de quantité de mouvement horizontale. On peut aussi voir τ comme une tension de Reynolds horizontale. Cette dernière est paramétrisée par une formule de Fourier-Fick:

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \quad (2)$$

où ρ , ν et $\mathbf{u}$ sont la masse volumique de l'eau, la viscosité turbulente et la vitesse horizontale. Il est commode d'introduire la vitesse de friction, c'est-à-dire

$$u_* = \sqrt{|\tau|/\rho}. \quad (3)$$

La viscosité turbulente doit être une fonction linéaire de la distance à la paroi:

$$\nu = \kappa u_* (z + z_0), \quad (4)$$

où $\kappa \approx 0.4$ est la constante de von Karman. La longueur de rugosité z_0 est une fonction de la hauteur des aspérités du fond; son expression dépend du caractère hydrodynamiquement lisse ou rugueux du fond (*e.g.* Marchuk and Kagan 1984) et sa valeur est généralement comprise entre 10^{-6} m et 10^{-2} m. Beaucoup de simulations numériques font l'hypothèse que le fond est hydrodynamiquement rugueux et retiennent une valeur de l'ordre de 10^{-3} m.

On ne peut généralement pas décrire tous les détails de l'écoulement près du fond — et certainement pas les détails de l'écoulement dans la sous-couche laminaire. Toutefois, la longueur de rugosité z_0 est une hauteur fictive où l'on annule la vitesse horizontale de telle sorte que la tension τ soit approximativement correcte. Ainsi, si la coordonnée verticale est la distance à cette surface fictive, il convient d'imposer

$$[\mathbf{u}(z)]_{z=0} = 0. \quad (5)$$

En combinant les expressions (1)-(5), on obtient le profil logarithmique de vitesse:

$$\boxed{\mathbf{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \log\left(1 + \frac{z}{z_0}\right) \frac{\tau}{|\tau|}} \quad (6)$$

La hauteur de la couche logarithmique ne dépasse pas quelques mètres, la force de Coriolis devenant rapidement importante (*e.g.* Cushman-Roisin and Malacic 1997). La plupart des modèles numériques ne cherchent pas à résoudre cette couche. Pour résoudre la couche logarithmique jusqu'au fond, il faudrait utiliser une maille dont la taille est de l'ordre de z_0 , ce qui n'est faisable que dans un modèle de colonne d'eau. Une alternative consiste à ne pas

résoudre la couche logarithmique: on adopte une condition de glissement, c'est-à-dire que l'on ne met pas de point vitesse sur le fond. Par contre, si Z désigne la distance qui sépare le fond du premier point vitesse, on évalue la tension de fond selon une approche qui est parfaitement compatible avec les équations de la couche logarithmique:

$$\tau = C_D(Z)|u(Z)|u(Z) \quad (7)$$

où le coefficient de traînée vaut

$$C_D(Z) = \frac{\kappa^2}{[\log(Z/z_0)]^2} . \quad (8)$$

On se propose ici de comparer deux approches discrètes: dans la première on impose une condition de non-glissement, tandis que la seconde fait appel à une condition de glissement — telle qu'elle est ébauchée ci-dessus. Dans cette perspective, il est commode de traiter des équations rendues adimensionnelles.

Equations adimensionnelles

On introduit les variables adimensionnelles suivantes:

$$z' = \frac{z}{z_0} , \quad (9)$$

$$u' = \frac{\kappa u \cdot \tau}{u_* |\tau|} , \quad (10)$$

$$v' = \frac{v}{\kappa u_* z_0} , \quad (11)$$

$$\tau' = \frac{|\tau|}{\rho u_*^2} . \quad (12)$$

Dans cette approche, on suppose connue la vitesse de friction et, donc, la tension de fond. Remarquons aussi que c'est la longueur de rugosité qui est l'échelle de longueur de verticale; cette dernière est donc très petite.

En omettant les primes, on peut écrire les équations du problème à traiter comme suit:

$$\tau = v \frac{\partial u}{\partial z} = 1 , \quad (13)$$

$$v = 1 + z , \quad (14)$$

$$[u(z)]_{z=0} = 0 . \quad (15)$$

En résolvant (13)-(15) on obtient le profil de vitesse adimensionnelle:

$$u(z) = \log(1 + z) . \quad (16)$$

Equations discrètes

Si Δz désigne le pas spatial vertical, on définit les altitudes discrètes suivantes:

$$(z_k, z_{k+1/2}) = (k, k + 1/2) \Delta z , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Dans la première discrétisation, qui fait appel à une condition de non-glissement, on évalue les vitesses discrètes $u_k^{ng} = u(z_k)$. Celles-ci sont solution du problème discret:

$$u_0^{ng} = 0, \quad v_{k+1/2} \frac{u_{k+1}^{ng} - u_k^{ng}}{\Delta z} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Quant à la discrétisation qui fait appel à une condition de glissement au fond, elle conduit au problème discret suivant:

$$u_{1/2}^g = \log(1 + \Delta z/2), \quad v_k \frac{u_{k+1/2}^g - u_{k-1/2}^g}{\Delta z} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Il est sans doute inutile de préciser que $v_k = 1 + k\Delta z$ et $v_{k+1/2} = 1 + (k + 1/2)\Delta z$. Finalement, on voit facilement que $u_1^{ng} = (1 + \Delta z/2)^{-1} \Delta z$.

Flux d'eau dans la maille de fond

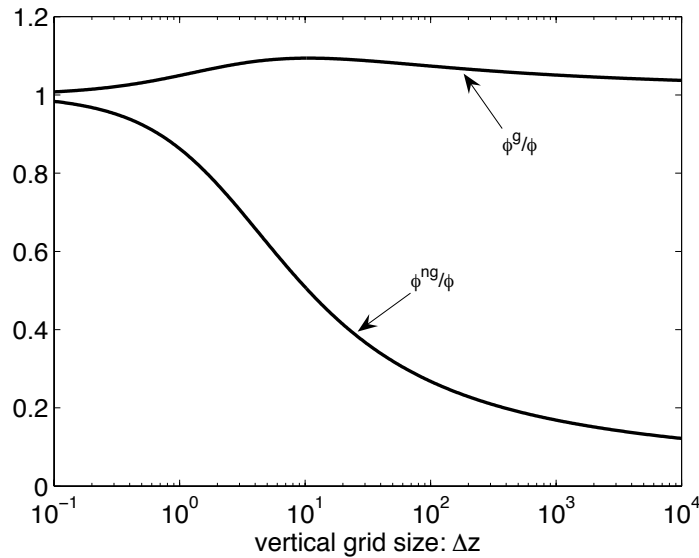
L'élément d'évaluation le plus simple des discrétisations proposées ci-dessus est sans doute le flux d'eau horizontal traversant la masse de fond — flux qui est appelé à advecter les scalaires à proximité du fond. Pour la solution exacte, ce flux vaut

$$\phi = \int_0^{\Delta z} u(z) dz = \int_0^{\Delta z} \log(1 + z) dz = -\Delta z + (1 + \Delta z) \log(1 + \Delta z). \quad (20)$$

Pour les discrétisations avec condition de non-glissement et condition de non-glissement, les équivalents discrets de ces flux sont respectivement

$$\phi^{ng} = \frac{u_0 + u_1}{2} \Delta z = \frac{\Delta z^2}{2 + \Delta z}, \quad (21)$$

$$\phi^g = u_{1/2} \Delta z = \Delta z \log(1 + \Delta z/2). \quad (22)$$



La figure ci-dessus montre les rapports ϕ^g/ϕ et ϕ^{ng}/ϕ en fonction de Δz . Ceci montre que la discrétisation avec condition de non-glissement conduit à une sous-estimation très

significative du flux horizontal dans la première maille dès que la taille de la maille est largement plus grande que la hauteur de rugosité — dont la valeur adimensionnelle est l'unité. La valeur dimensionnelle de cette dernière étant souvent de l'ordre de 10^{-3}m , la taille adimensionnelle de maille que l'on peut raisonnablement utiliser est mille fois supérieure. Donc, dans la figure ci-dessus, l'incrément spatial adimensionnel à considérer doit être supérieur à 10^3 . *Ceci me semble être de nature à disqualifier les discrétisations ayant recours à la condition de non-glissement.*

Mentionnons encore les comportements asymptotiques suivants:

$$\frac{\phi^{ng}}{\phi} \sim 1 - \frac{\Delta z}{6}, \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (23)$$

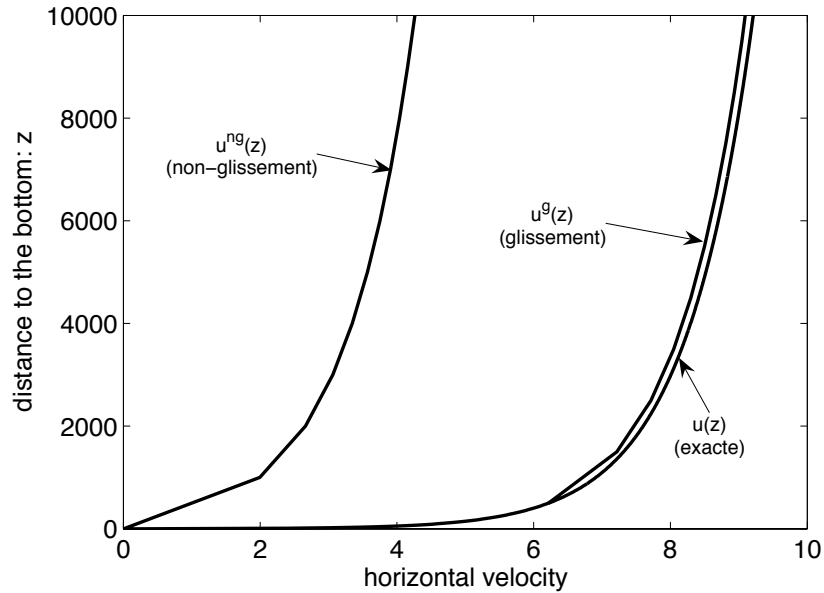
$$\frac{\phi^g}{\phi} \sim 1 + \frac{\Delta z}{12}, \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (24)$$

$$\frac{\phi^{ng}}{\phi} \sim \frac{1}{\log \Delta z - 1}, \quad \Delta z \rightarrow \infty, \quad (25)$$

$$\frac{\phi^g}{\phi} \sim \frac{\log \Delta z - \log 2}{\log \Delta z - 1}, \quad \Delta z \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Ainsi, même quand la couche logarithmique est bien résolue ($\Delta z \rightarrow 0$), la condition de glissement reste supérieure à la condition de non-glissement...

Profil de vitesse



En résolvant les problèmes aux différences ci-dessus, on obtient les vitesses suivantes:

$$\begin{aligned} u_k^{ng} &= \sum_{j=1}^k \frac{\Delta z}{1 + (j-1/2)\Delta z} \\ &= \psi(1/2 + 1/\Delta z + k) - \psi(1/2 + 1/\Delta z), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
u_{k+1/2}^g &= \log(1 + \Delta z/2) + \sum_{j=1}^k \frac{\Delta z}{1 + j\Delta z} \\
&= \log(1 + \Delta z/2) + \psi(1 + 1/\Delta z + k) - \psi(1 + 1/\Delta z), \quad k = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{28}$$

où ψ est la fonction digamma. La figure ci-dessus représente ces profils de vitesse pour $\Delta z = 10^3$. A l'évidence, *imposer une condition de non-glissement conduit à une solution particulièrement incorrecte, alors que la condition de glissement donne une très bonne approximation de la solution exacte.*

Discussion

Il faut souligner que la tension est identique pour le profil de vitesse exacte et les deux solutions discrètes. Ceci permet de faire l'impasse sur la détermination de la tension de fond. Ainsi, la viscosité turbulente est, elle aussi, identique pour tous les trois profils de vitesse. Cette approche n'est pas sans mérite, mais elle devrait être suivie par une analyse plus fouillée où la tension ne serait plus imposée *a priori*. Il faudrait alors résoudre des problèmes non-linéaires, ce qui est plus difficile mais plus proche de ce que l'on fait dans un "vrai" modèle. Par ailleurs, il faudrait aussi tenir compte de la force de Coriolis, comme Cushman-Roisin et Malacic (1997) l'ont fait — en utilisant le profil de vitesse d'Ellison.

Références

- Cushman-Roisin B. and V. Malacic, 1997, Bottom Ekman pumping with stress-dependant eddy viscosity, *Journal of Physical Oceanography*, 27, 1967-1975
 Marchuk G.I. and B.A. Kagan, 1984, *Ocean Tides*, Pergamon
-

Sur 4 représentations discrètes de la couche limite logarithmique de fond

Eric Deleersnijder, le 19 avril 2005

Dans ma note du 5 avril 2005, j'ai présenté deux discrétisations de la couche logarithmique de fond. Ici, je retiens ces deux discrétisations et en propose deux autres. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau de la page suivante. Notons que l'on travaille exclusivement avec les variables adimensionnelles définies dans ma note du 5 avril.

Pour rappel, la viscosité turbulente et le profil de vitesse de la solution exacte du problème continu sont

$$(1) \quad v(z) = 1 + z ,$$

$$(2) \quad u(z) = \log(1 + z) .$$

Le flux d'eau “exact” au travers de la maille de fond vaut

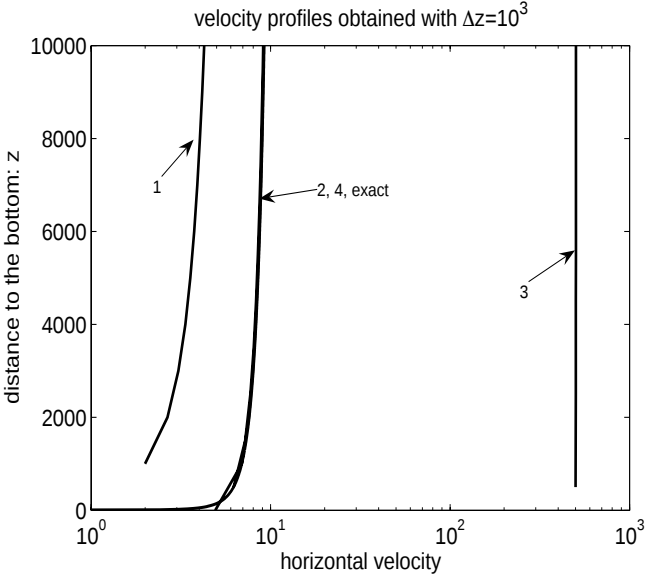
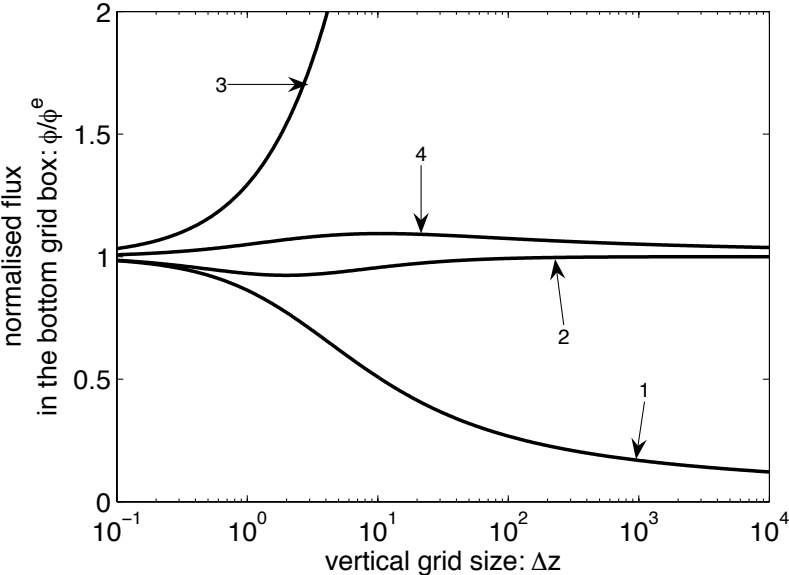
$$(3) \quad \phi^e = \int_0^{\Delta z} u(z) \, dz = \int_0^{\Delta z} \log(1 + z) \, dz = -\Delta z + (1 + \Delta z) \log(1 + \Delta z) .$$

Si ψ désigne la fonction digamma, la vitesse de chacune des quatre discrétisations considérées ici vaut:

$$(4) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{discrétisation 1: } u_k = \psi(1/2 + 1/\Delta z + k) - \psi(1/2 + 1/\Delta z) \\ \text{discrétisation 2: } u_k = \log(1 + \Delta z) - \frac{2\Delta z}{2 + \Delta z} + \psi(1/2 + 1/\Delta z + k) - \psi(1/2 + 1/\Delta z) \\ \text{discrétisation 3: } u_{k+1/2} = \Delta z/2 + \psi(1 + 1/\Delta z + k) - \psi(1 + 1/\Delta z) \\ \text{discrétisation 4: } u_{k+1/2} = \log(1 + \Delta z/2) + \psi(1 + 1/\Delta z + k) - \psi(1 + 1/\Delta z) \end{array} \right.$$

Les deux figures ci-dessous montrent que les discrétisations avec condition de non-glissement sont mauvaises, sauf si le pas d'espace Δz est du même ordre que la longueur de rugosité, une option qui est évidemment inacceptable pour un modèle 3D — car elle demanderait une résolution bien trop fine, donc bien trop exigeante en CPU. Par contre, les conditions de glissement conduisent à des solutions de bonne qualité même si la longueur de rugosité n'est pas résolue.

	discrétisation 1	discrétisation 2	discrétisation 3	discrétisation 4
noeud de fond	vitesse	vitesse	viscosité	viscosité
viscosité	$v_{k+1/2} = 1 + (k + 1/2)\Delta z$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$v_{k+1/2} = 1 + (k + 1/2)\Delta z$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$v_k = 1 + k\Delta z$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$v_k = 1 + k\Delta z$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)
condition de fond	non-glissement $u_0 = 0$	glissement $u_1 = \log(1 + \Delta z)$	non-glissement $\frac{u_{-1/2} + u_{1/2}}{2} = 0$	glissement $u_{1/2} = \log(1 + \Delta z/2)$
éq. aux différences	$v_{k+1/2} \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta z} = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$v_{k+1/2} \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta z} = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$v_k \frac{u_{k+1/2} - u_{k-1/2}}{\Delta z} = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$v_k \frac{u_{k+1/2} - u_{k-1/2}}{\Delta z} = 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)
vitesse à proximité du fond	$u_1 = \frac{2\Delta z}{2 + \Delta z}$ $u_0 = 0$	$u_1 = \log(1 + \Delta z)$ $u_0 = \log(1 + \Delta z) - \frac{2\Delta z}{2 + \Delta z}$	$u_{1/2} = \Delta z/2$ ($u_{-1/2} = -\Delta z/2$)	$u_{1/2} = \log(1 + \Delta z/2)$
flux d'eau dans la maille adjacente au fond	$\phi = \frac{u_0 + u_1}{2} \Delta z = \frac{\Delta z^2}{2 + \Delta z}$ $\phi/\phi^e \sim 1 - \Delta z/6$, $\Delta z \rightarrow 0$ $\phi/\phi^e \sim \frac{1}{\log \Delta z - 1}$, $\Delta z \rightarrow \infty$	$\phi = \frac{u_0 + u_1}{2} \Delta z = \Delta z \log(1 + \Delta z) - \frac{\Delta z^2}{2 + \Delta z}$ $\phi/\phi^e \sim 1 - \Delta z/6$, $\Delta z \rightarrow 0$ $\phi/\phi^e \sim 1 - \frac{\log \Delta z - 2}{\Delta z (\log \Delta z - 1)}$, $\Delta z \rightarrow \infty$	$\phi = u_{1/2} \Delta z = \frac{\Delta z^2}{2}$ $\phi/\phi^e \sim 1 + \Delta z/3$, $\Delta z \rightarrow 0$ $\phi/\phi^e \sim \frac{\Delta z}{2(\log \Delta z - 1)}$, $\Delta z \rightarrow \infty$	$\phi = u_{1/2} \Delta z = \Delta z \log(1 + \Delta z/2)$ $\phi/\phi^e \sim 1 + \Delta z/12$, $\Delta z \rightarrow 0$ $\phi/\phi^e \sim \frac{\log \Delta z - \log 2}{\log \Delta z - 1}$, $\Delta z \rightarrow \infty$



Couche limite de fond en présence de rotation

Eric Deleersnijder, le 8 janvier 2006

La coordonnée verticale z désigne la distance au fond. Le domaine d'intérêt du modèle idéalisé développé ici est

$$0 \leq z < \infty . \quad (1)$$

On considère un état stationnaire horizontalement homogène. La vitesse horizontale $\mathbf{u}(z)$ est la solution de l'équation

$$\frac{d}{dz} \left[\nu(z) \frac{d\mathbf{u}(z)}{dz} \right] = f \mathbf{e}_z \times [\mathbf{u}(z) - \mathbf{u}_g] , \quad (2)$$

où f est le facteur de Coriolis; le vecteur unitaire $\mathbf{e}_z$ pointe vers le haut; le vecteur constant $\mathbf{u}_g$ désigne la vitesse géostrophique. La viscosité turbulente est la fonction linéaire de la distance au fond qui est compatible avec l'existence de la couche logarithmique:

$$\nu(z) = \kappa u_* (z + z_0) , \quad (3)$$

où $\kappa \approx 0.4$ désigne la constante de von Karman; u_* est la vitesse de friction et z_0 représente la longueur de rugosité¹. On souhaite que la vitesse satisfasse les conditions aux limites suivantes

$$\mathbf{u}(0) = 0 , \quad (4)$$

$$\left[\rho \nu(z) \frac{d\mathbf{u}(z)}{dz} \right]_{z=0} = \boldsymbol{\tau} , \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{u}(z) = \mathbf{u}_g , \quad (6)$$

où ρ est la masse volumique de l'eau — qui est supposée constante. La tension que l'eau exerce sur le fond, $\boldsymbol{\tau}$, est associée à la vitesse de friction u_* comme suit:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho u_*^2 \mathbf{e}_\tau , \quad (7)$$

où le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\tau$ est parallèle à la direction de la tension de fond. Le vecteur unitaire perpendiculaire à la tension de fond est $\mathbf{e}_\perp = \text{sign}(f) \mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_z$ (Figure 1). Ce vecteur est “à droite” de la tension de fond dans l'hémisphère nord, où $\text{sign}(f)=1$, et est “à gauche” dans l'hémisphère sud, où $\text{sign}(f)=-1$.

On va imposer arbitrairement la tension de fond et déterminer la vitesse géostrophique telle que le flux vertical turbulent de quantité de mouvement soit compatible avec la tension imposée au fond de la mer. De la sorte, il ne sera pas nécessaire de résoudre un problème non-linéaire.

Formulation complexe

On introduit des vitesses complexes:

¹ On suppose que le fond de la mer est hydrodynamiquement rugueux. La longueur de rugosité est alors une fonction de la taille des aspérités du fond, et est indépendante de la viscosité moléculaire du fluide et de la tension de fond — contrairement au cas hydrodynamiquement lisse.

$$w(z) = \mathbf{u}(z) \cdot \mathbf{e}_\perp + i \mathbf{u}(z) \cdot \mathbf{e}_\tau \quad (8)$$

et

$$w_g = \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{e}_\perp + i \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{e}_\tau . \quad (9)$$

La partie complexe de la vitesse est la composante parallèle à la tension de fond tandis que la partie imaginaire est la composante de la vitesse qui est orthogonale à la tension de fond — c'est-à-dire la projection de la vitesse sur le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\perp$. On construit la tension complexe en appliquant les mêmes règles de projection. Celle-ci doit, à l'évidence, être purement imaginaire:

$$\tau = i \rho u_*^2 . \quad (10)$$

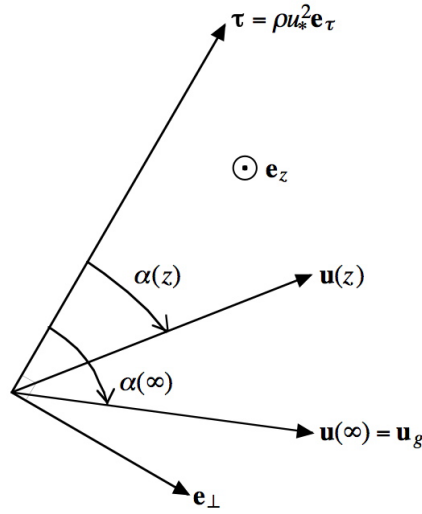


Figure 1. Illustration des vecteurs impliqués dans le problème différentiel (2)-(7).
L'angle $\alpha(z)$ sera appelé ci-dessous angle de *veering*.

En utilisant les variables complexes, on peut ré-écrire les relations (2) et (4)-(6) comme suit:

$$\frac{d}{dz} \left[v(z) \frac{dw(z)}{dz} \right] = i |f| [w(z) - w_g] , \quad (11)$$

$$w(0) = 0 , \quad (12)$$

$$\left[\rho v(z) \frac{dw(z)}{dz} \right]_{z=0} = \tau , \quad (13)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = w_g . \quad (14)$$

Variables adimensionnelles

On peut maintenant adimensionnaliser le problème en formulation complexe. Pour ce faire, on définit d'abord des variables adimensionnelles:

$$(z', z'_0) = \frac{(z, z_0)}{\kappa u_* |f|} , \quad (15)$$

$$(w', w'_g) = \frac{(w, w_g)}{u_* / \kappa}, \quad (16)$$

$$\tau' = \frac{\tau}{\rho u_*^2} = i. \quad (17)$$

La longueur caractéristique $\kappa u_* / |f|$, parfois appelée longueur de Coriolis, qui est utilisée dans (15) représente la distance au fond de la mer à partir de laquelle le changement de direction de la vitesse dû à la force de Coriolis se fait se fait sentir sensiblement; la Figure 2 en offre une confirmation. Par contre, pour $z \ll \kappa u_* / |f|$, le *veering* de la vitesse n'est pas significatif et la vitesse est essentiellement conforme au classique profil logarithmique. Bien entendu, cette explication ne s'applique que dans le cas où la longueur de Coriolis est largement supérieure à la longueur de rugosité, c'est-à-dire $\kappa u_* / |f| \gg z_0$.

Dorénavant, sauf mention explicite du contraire, on utilisera exclusivement les variables adimensionnelles introduites ci-dessus. On peut donc omettre les primes sans risque de confusion.

En substituant les variables adimensionnelles dans les équations dimensionnelles complexes, on obtient la formulation adimensionnelle complexe du problème à résoudre:

$$\begin{aligned} 0 \leq z < \infty & \quad (18) \\ \frac{d}{dz} \left[(z + z_0) \frac{dw(z)}{dz} \right] &= i[w(z) - w_g] & (19) \\ w(0) &= 0 & (20) \\ \left[(z + z_0) \frac{dw(z)}{dz} \right]_{z=0} &= i & (21) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} w(z) &= w_g & (22) \end{aligned}$$

Solution

Le logiciel *Mathematica* indique que la solution de (19) est

$$w(z) = w_g + AI_0(\xi) + BK_0(\xi), \quad (23)$$

avec

$$\xi = 2e^{i\pi/4} \sqrt{z + z_0}, \quad (24)$$

où A et B sont des constantes arbitraires tandis que I_0 et K_0 sont des fonctions de Bessel modifiées. Comme le montre l'Annexe, cette solution peut également être obtenue à partir de l'équation canonique des fonctions de Bessel modifiées.

Selon la formule 9.7.1 d'Abramowitz and Stegun (1965), la fonction de Bessel modifiée du premier type présente le comportement asymptotique suivant:

$$I_0(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}, \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad |\arg \xi| < \pi/2. \quad (25)$$

En conséquence, pour que la vitesse reste finie à la limite $z \rightarrow \infty$, il faut poser $A = 0$ dans (23). L'annulation de la vitesse au fond impose une relation entre la vitesse géostrophique et la constante B , ce qui conduit à ré-écrire (23) sous la forme

$$w(z) = w_g \left[1 - \frac{K_0(\xi)}{K_0(\xi_0)} \right], \quad (26)$$

avec

$$\xi_0 = 2e^{i\pi/4} \sqrt{z_0}. \quad (27)$$

Sachant que la dérivée de K_0 vaut $-K_1$, l'expression (21) de la tension de fond permet de déterminer la vitesse géostrophique:

$$w_g = \frac{e^{i\pi/4} K_0(\xi_0)}{\sqrt{z_0} K_1(\xi_0)}. \quad (28)$$

La vitesse vaut donc (Figure 2)

$$w(z) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{z_0} K_1(\xi_0)} [K_0(\xi_0) - K_0(\xi)] \quad (29)$$

Le *veering* de la vitesse peut se mesurer à l'aide de l'angle $\alpha(z) = \pi/2 - \arg[w(z)]$.

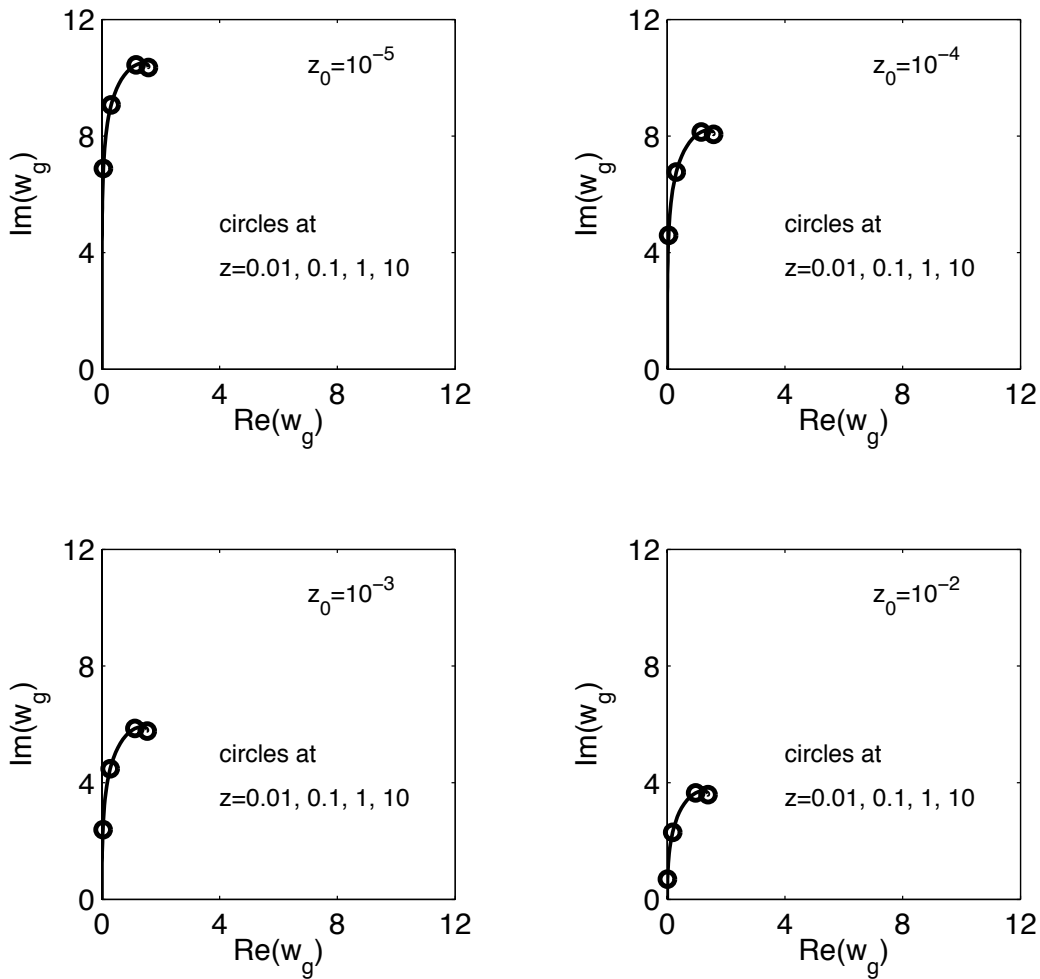


Figure 2. Profils de vitesse pour quelques valeurs du paramètre de rugosité z_0 . Le *veering* de la vitesse est peu significatif tant que $z \ll 1$.

La solution ci-dessus ne dépend que du paramètre complexe adimensionnel ξ_0 , dont il faut déterminer le range. D'après Marchuk and Kagan (1984), on pourrait considérer que la hauteur de rugosité est comprise entre une valeur minimale de l'ordre de 10^{-4} m et une valeur maximale de l'ordre de 10^{-2} m. Par ailleurs, l'ordre des grandeurs des bornes de la vitesse de friction serait 10^{-4} m/s et 10^{-2} m/s. Avec $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, on obtient

$$O(2 \times 10^{-6}) \leq z_0 \leq O(2 \times 10^{-2}) , \quad (30)$$

ce qui implique

$$O(3 \times 10^{-3}) \leq |\xi_0| \leq O(3 \times 10^{-1}) . \quad (31)$$

Le paramètre adimensionnel ξ_0 est généralement petit, mais il peut arriver que — dans des cas probablement exceptionnels — sa valeur ne soit pas tellement éloignée de l'unité.

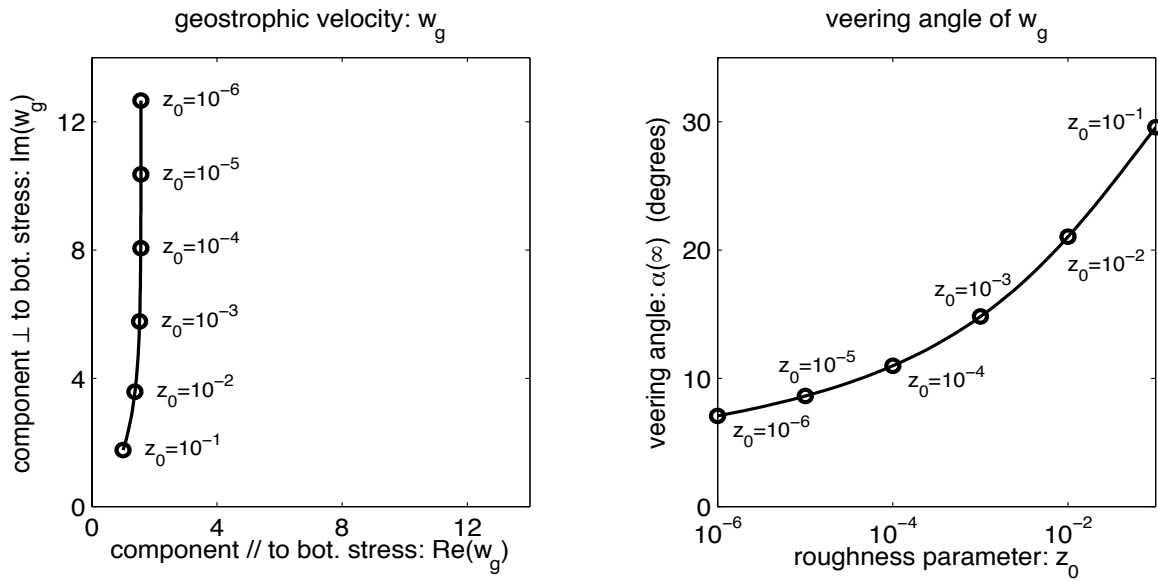


Figure 3. Représentation de la vitesse géostrophique w_g ainsi que de son angle de *veering* $\alpha(\infty) = \pi/2 - \arg[w(\infty)] = \pi/2 - \arg(w_g)$. Ce dernier est exprimé en degrés.

Les formules 9.6.8 et 9.6.9 d'Abramowitz and Stegun (1965) fournissent les comportements asymptotiques à la limite $\eta \rightarrow 0$ des fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce qui nous intéressent:

$$K_0(\eta) \sim -\log \eta , \quad K_1(\eta) \sim 1/\eta , \quad \eta \rightarrow 0 . \quad (32)$$

On en déduit immédiatement le comportement asymptotique de la vitesse près du fond:

$$w(z) \sim i \log(1 + z/z_0) , \quad \xi \rightarrow 0 . \quad (33)$$

Ainsi, on retrouve la couche logarithmique, ce qui ne doit pas nous surprendre. Il faut toutefois souligner que de petites valeurs de ξ ne sont possibles que si le paramètre ξ_0 est lui-même suffisamment petit — car $|\xi| \geq |\xi_0|$. Par ailleurs, la vitesse géostrophique (Figure 3) admet le développement asymptotique suivant:

$$w_g \sim \frac{\pi}{2} + i \log \frac{1}{4z_0} , \quad \xi_0 \rightarrow 0 . \quad (34)$$

Curieusement, le terme dominant de la partie réelle ne dépend pas de la hauteur de rugosité adimensionnelle, alors que la partie imaginaire en dépend crucialement.

Annexe

En utilisant la variable ξ définie en (23), la dérivée selon la z devient

$$\frac{d}{dz} = \frac{2i}{\xi} \frac{d}{d\xi} . \quad (\text{A1})$$

Par ailleurs, on pose

$$\hat{w} = w - w_g . \quad (\text{A2})$$

En substituant (A1) et (A2) dans l'équation différentielle (19), on obtient après quelques calculs

$$\xi^2 \frac{d^2 \hat{w}}{d\xi^2} + \xi \frac{d\hat{w}}{d\xi} - \xi^2 \hat{w} = 0 . \quad (\text{A3})$$

Cette relation est semblable à l'équation 9.6.1 d'Abramowitz and Stegun (1965), qui indiquent que sa solution générale est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel modifiées $I_0(\xi)$ et $K_0(\xi)$. *Mathematica* et Abramowitz and Stegun (1965) sont bien sur la même longueur d'onde. QED.

Il reste maintenant à comprendre pourquoi l'on a souvent écrit la solution de (19) en termes de fonctions de Kelvin (e.g. Ellison 1956, Cushman-Roisin and Malacic 1997), et non termes de fonctions de Bessel modifiées comme dans la présente note. Ces dernières ont l'avantage d'être intégrées à *Matlab*², au contraire des premières...

Références

- Abramowitz M. and I.A. Stegun (Eds.), 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1046 pp
- Cushman-Roisin B. and V. Malacic, 1997, Bottom Ekman pumping with stress-dependent eddy viscosity, *Journal of Physical Oceanography*, 27, 1967-1975
- Ellison T.H., 1956, Atmospheric turbulence, *Surveys in Mechanics - G.I. Taylor Anniversary Volume*, G.K. Batchelor and R.M. Davies (Eds.), Cambridge University Press, pp. 400-430
- Marchuk G.I. and B.A. Kagan, 1984, *Ocean Tides - Mathematical Models and Numerical Experiments*, Pergamon Press, Oxford, 292 pp

² En tout cas la version dont je dispose, c'est-à-dire 7.0.1 pour Mac OS X.