

Symétries en physique : la théorie des groupes en action

JEAN-PIERRE ANTOINE

Institut de Recherche en Mathématique et Physique
Université catholique de Louvain

jean-pierre.antoine@uclouvain.be

Résumé

Cet article passe en revue les multiples applications de la théorie des groupes aux problèmes de symétrie en physique. En physique classique, il s'agit surtout de la relativité : euclidienne, galiléenne, einsteinienne (relativité restreinte). Passant à la mécanique quantique, on remarque d'abord que les principes de base impliquent que l'espace des états d'un système quantique a une structure intrinsèque d'espace préhilbertien, que l'on complète ensuite en un espace de Hilbert. Dans ce contexte, la description de l'invariance sous un groupe G se base sur une représentation unitaire de G . On parcourt ensuite les différents domaines d'application : physique atomique et moléculaire, matière condensée, optique quantique, ondelettes, symétries internes, symétries approchées. On discute ensuite l'extension aux théories de jauge, en particulier au Modèle Standard des interactions fondamentales. On conclut par quelques indications sur des développements récents.

Abstract

The present article reviews the multiple applications of group theory to the symmetry problems in physics. In classical physics, this concerns primarily relativity : Euclidean, Galilean, Einsteinian (special). Going over to quantum mechanics, we first note that the basic principles imply that the state space of a quantum system has an intrinsic structure of pre-Hilbert space, that one completes into a genuine Hilbert space. In this framework, the description of the invariance under a group G is based on a unitary representation of G . Next we survey the various domains of application : atomic and molecular physics, condensed matter physics, quantum optics, wavelets, internal symmetries, approximate symmetries. Next we discuss the extension to gauge theories, in particular to the Standard Model of

fundamental interactions. We conclude with some remarks about recent developments.

Plan de l'article

1. Avant-propos : préhistoire
2. Intermède : rappels de théorie des groupes
3. Symétries en physique classique
4. Principes de la physique quantique
5. Physique quantique et symétrie
 - 4.1. Principes généraux
 - 4.2. Atomes, molécules, solides
6. Etats cohérents, ondelettes
7. Symétries internes
8. Théories de jauge
 - 7.1. Le Modèle Standard
 - 7.2. Retour sur les particules élémentaires
9. Développements récents
10. Et en Belgique ?
11. Conclusion

1. Avant-propos : Préhistoire

Dès l'antiquité, les figures symétriques ont été considérées comme plus harmonieuses, plus parfaites. Que ce soit les pyramides en Egypte (3000 av.JC), différents objets d'art minoen (18^e siècle av. JC), des bijoux mycéniens (16^e siècle av.JC) ou béotiens (1000 – 600 av. JC), les solides de Platon (tétraèdre, cube (hexaèdre), octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre), d'innombrables figures dans l'art islamique, les exemples se retrouvent à toutes les époques et dans toutes les cultures. Un exemple significatif est offert par un bijou mycénien, présenté dans la Figure 1 (Speiser, 1976). L'auteur a clairement identifié les symétries de l'objet et leur construction, mais n'en tire qu'un avantage esthétique.

En fait, ces considérations sont censées refléter l'harmonie du monde, selon Kepler. Mais l'étude systématique des propriétés de symétrie demande un niveau de sophistication mathématique qui ne sera disponible qu'à la fin du 19^{ème} siècle, à savoir, la *théorie des groupes*. Celle-ci connaîtra alors rapidement des développements mathématiques considérables, sous

l'impulsion d'auteurs tels que E. Galois, G. Frobenius, I. Schur, W. Burnside, E. Cartan ou H. Weyl. Pour un panorama de la théorie, nous pouvons suggérer l'ouvrage de Loeb (1968-1975) ou encore l'article (Antoine, 2005).

Quant à la physique, c'est par la *cristallographie* que les groupes feront leur entrée. Dès la fin du siècle, on découvrira successivement les 32 classes cristallographiques, correspondant aux 32 groupes ponctuels (symétrie autour d'un point), puis les 14 types de réseaux de Bravais, le tout menant aux 230 groupes d'espace (Fedorov, Schoenflies).

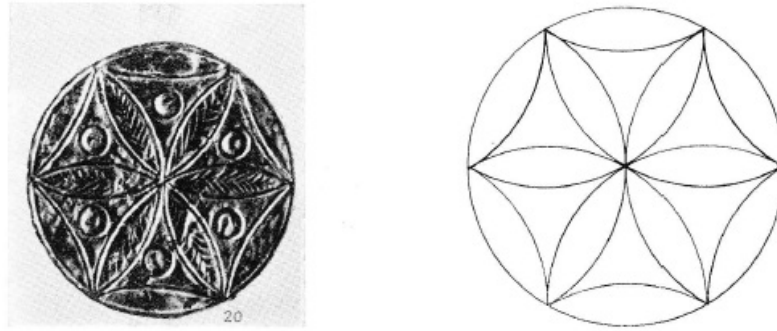


FIGURE 1 – Un exemple antique : symétrie d'ordre 6 dans un bijou mycénien. (A gauche) Le bijou ; (A droite) Ses symétries (Speiser, 1976).

2. Intermède : rappels de théorie des groupes

Au risque de paraître pédant, rappelons (sans souci de rigueur mathématique!) quelques notions qui seront utilisées dans la suite. Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $(g, g') \mapsto gg'$, appelée produit, telle que :

- (i) le produit est associatif : $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3, \forall g_1, g_2, g_3 \in G$;
- (ii) il existe un *élément neutre* $e \in G$ (nécessairement unique) tel que :
 $eg = ge = g, \forall g \in G$;
- (iii) tout élément $g \in G$ possède un *inverse* $g^{-1} \in G$ (nécessairement unique) tel que : $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Le groupe est dit *abélien* ou *commutatif* si le produit est commutatif :

$$g_1g_2 = g_2g_1, \forall g_1, g_2 \in G.$$

Exemples :

1. $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ (groupe à 2 éléments).

2. $SO(2) = \{\text{matrices } 2 \times 2 \text{ } g(\varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, où

$$g(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ avec la multiplication matricielle.}$$
3. le groupe des transformations de Galilée.
4. $SO(3)$, le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$; $SO(n)$, le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n$.
5. $SO(1,3)$, le groupe de Lorentz.
6. Le groupe de Poincaré : $P(1,3) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(1,3)$ avec $(a, \Lambda)(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda \Lambda')$; $a \in \mathbb{R}^4, \Lambda \in SO(1,3)$ (produit semi-direct).
7. $SU(2) = \{\text{matrices } 2 \times 2 \text{ unitaires, de déterminant } 1\}$
8. $SU(n) = \{\text{matrices } n \times n \text{ unitaires, de déterminant } 1\}$

Un *groupe de Lie* est un groupe possédant une structure de variété analytique compatible avec la structure de groupe. Ceci signifie que les éléments $g \in G$ peuvent être paramétrisés, $g \equiv g(\varphi_k)$, de telle sorte que les opérations de groupe soient données par des fonctions analytiques des paramètres φ_k .

L'*algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G est l'espace vectoriel des vecteurs tangents à G à l'identité. Géométriquement, ceux-ci sont les générateurs infinitésimaux du groupe.

Enfin, une *représentation* (linéaire) d'un groupe G est un homomorphisme T de G dans les opérateurs linéaires inversibles d'un espace vectoriel :

- . $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2),$
- . $T(g^{-1}) = T(g)^{-1},$
- . $T(e) = \mathbb{1}.$

La représentation T est unitaire si chaque $T(g)$ est un opérateur unitaire.

3. Symétries en physique classique

Bien sûr, la cristallographie du 19^e siècle relève de la physique classique, mais ceci est évidemment temporaire. Quelques années plus tard, les cristaux intégreront le monde quantique.

Pour la physique classique proprement dite, un domaine essentiel pour l'application de la théorie des groupes est évidemment la relativité (restreinte). Le *principe de relativité* stipule que deux observateurs décrivent un système physique par les mêmes équations s'ils sont *équivalents*. Un observateur pouvant être assimilé à un référentiel de l'espace-temps, "équivalents" signifie "équivalents sous une transformation de l'espace-temps (translation, rotation, ...) qui envoie l'un sur l'autre". Ces transformations

constituent le *groupe de relativité*. Se pose alors le problème du choix de ce groupe. On distinguera :

- . Systèmes au repos : groupe euclidien $\mathcal{E}$ (constitué des translations et des rotations de $\mathbb{R}^3$);
- . Relativité galiléenne : groupe de Galilée;
- . Relativité restreinte : groupe de Poincaré;
- . Relativité générale : pas de groupe global, il y a seulement invariance *locale* sous le groupe de Poincaré.

Ceci dit, un rôle essentiel est joué par la *théorie d'Emmy Noether* : l'invariance sous un groupe de Lie G implique des lois de conservation et réciproquement. Les quantités conservées sont données par des éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G (ou son algèbre enveloppante).

4. Principes de la physique quantique

Comme on le trouvera dans n'importe quel manuel de mécanique quantique (voir p.ex. Cohen-Tannoudji et al. , 1977)), les principes de base de la mécanique quantique sont au nombre de trois, à savoir :

- (1) Le principe de *superposition* : toute combinaison linéaire de deux états d'un système est un état, ce qui implique que l'espace des états $\mathcal{H}_0$ est un espace vectoriel. Il y a donc une *structure linéaire* intrinsèque (qui est totalement absente en physique classique).
- (2) L'*amplitude de transition* entre deux états est donnée par une forme sesquilinéaire hermitienne : $A(\phi_{\text{in}} \rightarrow \phi_{\text{out}}) = \langle \phi_{\text{out}} | \phi_{\text{in}} \rangle$. De même, la *probabilité de transition* correspondante est donnée par le carré du module de cette amplitude : $P(\phi_{\text{in}} \rightarrow \phi_{\text{out}}) = |\langle \phi_{\text{out}} | \phi_{\text{in}} \rangle|^2$. Il s'ensuit que l'espace des états $\mathcal{H}_0$ est un espace *préhilbertien*.
- (3) Les observables du système sont représentées par des opérateurs linéaires dans $\mathcal{H}_0$, qui ne commutent en général pas, ce qui implique des *relations d'incertitude*. Il faut donc recourir à une interprétation probabiliste de la théorie.

Il faut noter ici que la structure d'espace préhilbertien ne détermine *pas* une norme hilbertienne unique, mais seulement une classe d'équivalence de normes hilbertiennes. Rappelons que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, ce que l'on note $\|\cdot\|_1 \asymp \|\cdot\|_2$, si elles vérifient la condition suivante :

$$a \|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq b \|f\|_2, \forall f \in \mathcal{H}, a, b > 0.$$

Il s'ensuit que le groupe d'invariance de l'espace préhilbertien $\mathcal{H}_0$ est l'espace $GL(\mathcal{H}_0)$ des opérateurs bornés à inverse borné.

Toutefois, pour des raisons qui relèvent du "confort mathématique", on fixe une norme (hilbertienne) particulière, et l'on prend le complété par rapport à celle-ci, ce qui donne donc un véritable espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Dès lors on a à sa disposition tout l'arsenal mathématique développé principalement par von Neumann : opérateurs auto-adjoints, théorie spectrale, évolution unitaire, ...). En définitive, les états du système quantique constituent un *espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ et le groupe d'invariance est $U(\mathcal{H})$, l'ensemble des opérateurs unitaires. [Plus précisément, il faut tenir compte du fait que deux vecteurs qui ne diffèrent que par la phase représentent le même état, ce qui implique que le véritable espace des états est l'espace de Hilbert projectif constitué des rayons unitaires de $\mathcal{H}$.]

Remarquons au passage que, parallèlement à la formulation hilbertienne standard (qui remonte à Schrödinger, en 1926) que nous venons d'esquisser, il existe aussi une version algébrique, due à Haag et Kastler (1964), dans laquelle l'espace des observables est une *C*-algèbre* $\mathfrak{A}$ et les états sont donnés par des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathfrak{A}$. Le lien avec la formulation traditionnelle se fait à l'aide des représentations des C*-algèbres. Nous n'y reviendrons plus.

5. Physique quantique et symétrie

5.1. Principes généraux

Par définition, une *symétrie* est une application $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ qui préserve toutes les probabilités de transition. On a alors les résultats fondamentaux suivants

- . Selon Wigner, une symétrie est réalisée par un opérateur unitaire ou anti-unitaire dans $\mathcal{H}$.
- . Selon Bargmann, un groupe de symétrie G est réalisé par une représentation unitaire $U(G)$ dans $\mathcal{H}$ (à des phases près) : $U(G) = \{U(g) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, g \in G\}$ avec les relations

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2), \quad U(g^{-1}) = [U(g)]^{-1}, \quad U(e) = 1.$$

Si $U(G)$ est réductible, on la décompose en irréductibles :

$$U = \oplus_j U_j, \text{ correspondant à } \mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j.$$

Soient $U = \oplus_j U_j$ et A une quantité d'intérêt physique avec un comportement simple sous G , p.ex., vecteur ou tenseur si $G = SO(3)$. Une telle quantité est donnée le plus souvent par des *éléments de matrice* $\langle \phi | A | \psi \rangle$, avec $\phi \in \mathcal{H}_j, \psi \in \mathcal{H}_k$. Alors cette quantité ne dépend en général pas des

états ϕ, ψ , mais seulement des sous-représentations U_j, U_k , et est souvent nulle (règle de sélection). Ceci est le contenu du théorème de Wigner-Eckart (Cohen-Tannoudji et al. (1977)).

De plus les observables principales dérivent (de l'algèbre de Lie) du groupe de symétrie, via le théorème de Noether :

- . invariance sous $\mathcal{E}$ (translations et rotations) $\Rightarrow$ moment total et moment angulaire total;
- . invariance sous translations temporelles $\Rightarrow$ Hamiltonien (énergie totale);
- . invariance sous le groupe de Galilée $\Rightarrow$ observables de position.

Un concept fondamental pour les applications est celui de *symétries approchées*, introduit par G. Racah (1961). Soit un Hamiltonien $H = H_0 + H_1$ où H_0 est invariant sous G et H_1 est une petite correction, invariante sous un sous-groupe de G seulement, mais se transformant simplement sous G . Dans ce cas, le calcul des éléments de matrice est considérablement simplifié. Itérant le procédé, on obtient une hiérarchie de symétries approchées, de plus en plus brisées, $H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$, correspondant à une hiérarchie de groupes $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$. Cette approche par symétries exactes et approchées a fourni un outil extrêmement puissant dans toute la physique quantique, à partir de la fin des années 20, sous l'impulsion des physiciens ou mathématiciens comme Heisenberg, Pauli, Weyl, van der Waerden, Wigner, ou Bargmann. Pour certains ouvrages originaux, nous renvoyons à Weyl (1950) ou Wigner (1959).

5.2. Atomes, molécules, solides

C'est dans le contexte de la physique atomique et moléculaire que la méthode des symétries approchées a fourni ses résultats les plus spectaculaires. Considérons d'abord l'atome d'hydrogène (potentiel de Coulomb, pas de spin). Les niveaux d'énergie sont donnés par la formule de Balmer, $E_n \sim -1/n^2$, $n = 1, 2, \dots$, et ils sont fortement dégénérés : pour chaque n , le moment angulaire vaut $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, et pour chaque l , $(2l+1)$ il y a $2l+1$ états indexés by $m_l = -l, -l+1, \dots, l$.

L'explication par la théorie des groupes est la suivante. Pour chaque n , les représentations irréductibles $D^{(l)}$ ($l = 0, 1, \dots, n-1$) de $SO(3)$ forment une seule représentation irréductible $D^{(n^2)}$ de $SO(4)$. C'est ce qu'on appelle une dégénérescence accidentelle, déjà présente classiquement. Elle fut découverte dans ce contexte par Pauli dès 1926 et surtout Fock en 1935. Si l'on tient compte du spin $1/2$ de l'électron (Pauli), chaque état $|n, l, m\rangle$ admet 2 électrons. Dès lors, le moment angulaire s'écrit $y = l \pm \frac{1}{2}$, ce qui correspond à la décomposition dans $SU(2)$: $D^{(l)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(l+1/2)} \oplus D^{(l-1/2)}$.

L'étape suivante consiste à introduire le groupe de symétrie dynamique : $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D^{(n^2)}$ constitue une seule représentation irréductible de $SO(4,1)$ ou $SO(4,2)$ (de dimension infinie). Dans le cas d'atomes plus compliqués, on répète la procédure, ce qui fournit le modèle en couches des atomes, et donc justifie le tableau de Mendeleev.

Pour les *molécules*, on obtient ainsi une classification des configurations et des niveaux d'énergie, simplifiée par l'utilisation des symétries finies.

Quant aux *cristaux*, on arrive finalement à la théorie quantique des solides, combinant cristallographie classique (groupes) et mécanique quantique, brillamment initiée dans le papier classique de Bouckaert et al. (1936).

Bien que la théorie des groupes ait permis d'obtenir des résultats spectaculaires, inaccessibles auparavant, cela ne s'est pas fait facilement. Dans les années 30, cette progression continue de la méthode était connue des physiciens comme la "*Gruppenpest*" !

Nous présentons dans la Figure 2 certains des principaux protagonistes de cette saga : Erwin Schrödinger et John von Neumann, qui ont élaboré la formulation hilbertienne de la mécanique quantique (non relativiste), Wolfgang Pauli, qui a introduit le spin, Paul Dirac, qui a découvert la notion d'antiparticule, Hermann Weyl, qui a le premier introduit systématiquement les groupes en physique quantique, et Eugene Wigner, largement responsables de la théorie des groupes et de son application en physique quantique.

6. Etats cohérents, ondelettes

Un domaine où les groupes jouent un rôle important est celui de l'*interaction matière - rayonnement*, autrement dit, l'optique quantique. Au départ, on prend les opérateurs de création $a^\dagger$ et d'annihilation a de l'oscillateur harmonique quantique. Ceux-ci engendrent l'algèbre de Lie du groupe de Weyl-Heisenberg : $(a, a^\dagger, I) \sim (q, p, I)$, où q, p sont les opérateurs de position et de moment, respectivement. Ceci peut être utilisé pour résoudre la plupart des problèmes impliquant un hamiltonien au plus quadratique. De tels hamiltoniens couvrent une partie considérable de l'optique quantique, en particulier, la description des lasers et autres phénomènes cohérents. Naturellement, les états de tels systèmes sont appelés *états cohérents* (canoniques).

Ces derniers furent introduits par Schrödinger en 1926, comme les états décrivant le mieux la limite classique de la mécanique quantique. Ils furent toutefois rapidement oubliés, suite à une remarque dénigrante de Pauli. Ils furent redécouverts vers 1960 par R.J.Glauber, J.R.Klauder et E.C.G. Sudarshan (Klauder & Sudarshan, 1968) dans le contexte de la description

Erwin
Schrödinger
1887-1961



John von
Neumann
1903-1957



Wolfgang
Pauli
1900-1958



Paul
Dirac
1902-1984



Hermann
Weyl
1885-1955



Eugene
Wigner
1902-1995



FIGURE 2 – Les protagonistes (d'après Wikipedia)

en optique quantique des faisceaux lumineux cohérents émis par les lasers. A première vue, ceci n'a pas grand chose à voir avec la théorie des

groupes ... Jusqu'à ce que le mathématicien Perelomov et le physicien Gilmore, indépendamment, remarquent en 1972 que les états cohérents peuvent être obtenus par l'action d'un groupe de Lie sur un vecteur de base $\psi \in \mathcal{H} : \psi_g := U(g)\psi, g \in G$, où U est une représentation unitaire du groupe G . Ceci s'applique à une série d'exemples courants : le groupe de Weyl-Heisenberg G_{WH} fournit (évidemment) les états cohérents (canoniques); le groupe des rotations $SO(3)$ donne les états cohérents de spin; le groupe $SU(1,1)$ fournit les états cohérents décrivant une particule dans un puits infini de potentiel ou les états comprimés (squeezed states) d'un atome En fait, les états cohérents (généralisés) ont trouvé des applications dans tous les domaines de la physique, optique quantique, bien sûr, mais aussi physique nucléaire, atomique et de la matière condensée, électrodynamique quantique (dans le problème infrarouge), quantification and déquantification, intégrales de chemin, pour n'en citer que quelques unes. Une étude systématique est fournie par l'ouvrage de J-P. Gazeau (2009).

Un développement particulièrement spectaculaire des états cohérents est l'*analyse en ondelettes*, devenue omniprésente aujourd'hui en physique, en mathématique et en science de l'ingénieur. En fait, les ondelettes (continues) ne sont rien d'autre que les états cohérents associés au groupe affine (dilatations, translations sur $\mathbb{R}$). Elles furent découvertes par A. Grossmann et J. Morlet en 1984, puis I. Daubechies, et appliquées au traitement du signal (analogique). Elles furent étendues à la dimension 2 par A. Grossmann, I. Daubechies, R. Murenzi et al. en 1990, en vue du traitement de l'image. Finalement, Y. Meyer et S. Mallat introduisirent les *ondelettes discrètes*, qui permettent le traitement du signal numérique. On trouvera une introduction détaillée et les références aux travaux originaux de la théorie des ondelettes dans l'article récent que nous avons publié dans la présente revue (Antoine, 2018) ainsi que dans notre ouvrage (Ali, Antoine & Gazeau, 2014).

7. Symétries internes

Les symétries discutées jusqu'ici sont de nature géométrique, mais il en existe un autre type, les symétries *internes*. Ainsi, par exemple :

- . la conjugaison de charge, qui échange particule et antiparticule ;
- . l'isospin, introduit par Heisenberg en 1932 et réalisé par le groupe $SU(2)$; p.ex. le nucléon, c.à.d. le couple proton-neutron, est un doublet d'isospin $1/2$.

Cette approche mène à la *classification des particules élémentaires*. Dans un premier temps, on groupe les particules en multiplets d'isospin. Ensuite on ajoute un nouveau degré de liberté interne, appelé hypercharge Y (ou

son équivalent l'étrangeté S), introduit par Gell-Mann et donnant lieu à la relation célèbre $Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$, où Q désigne la charge électrique et T_3 la 3e composante de l'isospin. Combinant isospin et hypercharge, Gell-Mann (1961,1962) introduit alors le groupe $SU(3)$, qui permet de classer toutes les particules connues en multiplets correspondants. Le succès le plus spectaculaire de cette approche fut la découverte en 1964 de la particule quasi-stable Ω , prédite par le modèle, avec la masse et les nombres quantiques corrects.

La théorie prit un nouveau tournant peu après, quand Gell-Mann (et Zweig, indépendamment) suggéra que tous les hadrons connus étaient des états liés de trois particules fondamentales, les *quarks*, et de leurs antiparticules. Ce modèle, naïf au départ, connut un succès remarquable, quoique les quarks eux-mêmes n'ont jamais pu être observés isolément (on parle alors de *confinement*). Le modèle des quarks s'enrichit progressivement par la découverte de trois quarks supplémentaires : charm (1974), bottom (1977), top (1993). Il forme ainsi la base du *Modèle Standard* actuel, avec groupe de symétrie $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$.

En fait, les techniques de théorie des groupes ne s'arrêtent pas à la classification des particules, elles permettent aussi de déterminer leurs propriétés dynamiques. Après une première suggestion (Gell-Mann et Feynman) de traiter le courant électromagnétique et le courant faible comme un triplet d'isospin, l'idée vint (Cabibbo) de traiter de cette façon tous les courants hadroniques, par l'extension de $SU(2)$ à $SU(3)$. Tout ceci mena Gell-Mann à l'algèbre des charges, liée à la symétrie $SU(3) \otimes SU(3)$. Finalement, on postulera que les courants eux-mêmes possèdent la même symétrie; c'est la célèbre *algèbre des courants* de Gell-Mann (*symétrie chirale*), qui possède une symétrie locale $SU(3) \otimes SU(3)$. Un bon nombre des articles originaux sont reproduits dans l'ouvrage de Dyson (1966). On peut consulter aussi l'ouvrage de Bohm et al. (1988).

Ces développements constituent une évolution remarquable dans l'utilisation des techniques de théorie des groupes. A ce stade, la structure précise des différents courants hadroniques est inconnue, seules leurs propriétés de symétrie importent. C'est l'exact contrepied des applications initiales décrites plus haut, par exemple en physique atomique. On ne peut pas s'empêcher de noter l'analogie avec le célèbre "Cheshire cat" de Lewis Carroll : le chat a disparu, il ne reste que son sourire ...

8. Théories de jauge

Le développement le plus spectaculaire de ces dernières années est l'émergence, puis l'omniprésence, des théories de jauge. Une symétrie in-

terne peut être soit *globale*, soit *locale*. Dans le premier cas, l'action d'un groupe G sur un champ $\phi(x)$ est indépendante du point x ; dans le second, l'action de G varie de point en point. On parle alors de *théorie de jauge* (gauge field theory), et le groupe G est appelé groupe de jauge. L'idée remonte à Weyl (1918) qui traita l'électromagnétisme comme une théorie de jauge $U(1)$ (donc abélienne). Mais le réel point de départ fut la proposition par Yang et Mills en 1954 d'une théorie de jauge non abélienne basée sur le groupe $SU(2)$. Cette proposition marque aussi l'introduction de la géométrie différentielle en physique quantique (espaces fibrés, connexions, ...). Toutefois, la suggestion de Yang et Mills ne devint populaire qu'à partir du moment où le physicien hollandais G. 't Hooft (1971) démontra la renormalisabilité d'une théorie de jauge non abélienne, c.à.d. qu'elle est susceptible de fournir des prédictions *finies*, donc vérifiables.

Contrairement aux théories des champs usuels, une théorie de jauge est nécessairement exacte. Il y a donc beaucoup moins de paramètres arbitraires, ce qui rend la théorie plus cohérente. En particulier, le lagrangien d'interaction est déterminé univoquement. D'autre part, les interactions sont réalisées par des particules de masse nulle, comme le photon pour l'électromagnétisme.

8.1. Le Modèle Standard

La méthode fut rapidement généralisée. S. Weinberg, A. Salam et S. Glashow (1962-68) reformulèrent les interactions électrofaibles comme une théorie de jauge basée sur $G = SU(2) \otimes U(1)$, et enfin D. Gross, H. Politzer et F. Wilczek (1970s) firent de même avec les interactions fortes, obtenant ainsi la chromodynamique quantique, basée sur le groupe de jauge $G = SU(3)$. Ce dernier agit sur un nouveau degré de liberté interne : chacun des quarks apparaît sous 3 aspects appelés "couleur". On généralise ainsi le modèle des quarks original. Le résultat final est le Modèle Standard actuel qui est une théorie de jauge $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. A noter que ce dernier est resté longtemps incomplet, car il manquait un chaînon essentiel, le boson de Higgs-Brout-Englert. Celui-ci est censé donner une masse non nulle à toutes les particules, excepté le photon et les gluons (l'analogue du photon pour transmettre l'interaction forte), par un mécanisme subtil appelé *brisure spontanée de symétrie*, c.à.d. que l'état fondamental a une symétrie moindre que l'hamiltonien. Ledit boson fut finalement découvert expérimentalement au CERN en 2012 (ce qui valut des prix Nobel 2013 à P. Higgs et F. Englert (ULB), R. Brout étant décédé entretemps).

8.2. Retour sur les particules élémentaires

Le modèle Standard prédit donc les particules élémentaires suivantes :

- . Quarks : u (up), c (charm), t (top), d (down), s (strange), b (bottom)
- . Leptons : électron, muon, tau, 3 neutrinos associés
- . Photon : médiateur de l'interaction électromagnétique
- . Bosons faibles $W^\pm$, Z^0 : médiateurs de l'interaction faible
- . Gluons (8) : médiateurs de l'interaction forte
- . Boson de Higgs-Brout-Englert : fournit la masse aux autres particules

Ces particules s'organisent en familles, ainsi qu'il ressort du tableau repris à la Figure 3.

masse →	$\approx 2.3 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.275 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.07 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 126 \text{ GeV}/c^2$
charge →	2/3	2/3	2/3	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H boson de Higgs
QUARKS	$\approx 4.5 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 95 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	$0.511 \text{ MeV}/c^2$	$105.7 \text{ MeV}/c^2$	$1.777 \text{ GeV}/c^2$	0	
	e électron	μ muon	τ tau	Z^0 boson Z^0	
LEPTONS	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 15.5 \text{ MeV}/c^2$	91.2 GeV/c ²	
	ν_e neutrino électronique	ν_μ neutrino muonique	ν_τ neutrino tauique	$W^\pm$ boson $W^\pm$	
				80.4 GeV/c ²	
				$W^\pm$ boson $W^\pm$	
				BOSONS DE JAUGE	

FIGURE 3 – Tableau des particules élémentaires proposées par le Modèle Standard (d'après Wikipedia).

9. Développements récents

Les méthodes de théorie des groupes ont continué à s'étendre, notamment en traitement du signal. Il y a d'une part la théorie des "coorbites"

(coorbit theory), basée sur une représentation intégrable d'un groupe, et qui fournit une discrétisation élégante et très générale de l'analyse continue d'un signal (Feichtinger & Gröchenig, 1989).

Tout aussi ambitieuse est la théorie des "shearlets", introduite par Kutyniok et ses collaborateurs (Kutyniok & Labate, 2012). L'idée est simplement de remplacer les rotations inhérentes à la transformée en ondelettes (TO) continue bidimensionnelle par des opérations de cisaillement (shear). Ceci permet d'obtenir des transformations directionnelles. Au même titre que la TO continue, cette transformation découle d'un groupe de Lie, appelé le "shearlet group". Elle peut ensuite être discrétisée, ce qui mène à une transformation qui généralise la TO discrète bidimensionnelle et qui s'avère être très puissante.

Bien sûr, les applications de la théorie des groupes se sont principalement développées en physique des interactions fondamentales. De nombreuses suggestions ont été proposées, mais beaucoup n'ont pas abouti. Il en est ainsi des théories dites de grande unification, qui visent à couvrir toutes les interactions, excepté la gravitation. Différents modèles ont été proposés, basés sur $SU(5)$, $SO(10)$, ..., mais aucun n'a survécu, car tous prédisaient de nouvelles particules et/ou la désintégration du proton, jamais observée.

Une extension qui connaît toujours un grand succès est la *supersymétrie*, qui vise à l'unification des bosons et des fermions. Etant donné la différence de statistique entre les deux, Bose-Einstein pour les bosons et Fermi-Dirac pour les fermions, une telle théorie induit nécessairement de nouvelles règles mathématiques, pour incorporer des variables qui *anticommutent*. On arrive ainsi à toute une panoplie de nouvelles notions, supergroupes, superalgèbres de Lie, supervariétés On a dès lors des résultats mathématiques très intéressants, mais sur le plan physique, la supersymétrie n'a reçu aucune confirmation. En particulier, elle prédit l'existence de toute une famille de nouvelles particules, miroir des particules connues (photinos, gluinos, ...), jamais observées. Ceci est une des composantes de la *nouvelle physique* ou *physique au-delà du modèle standard* si recherchée aujourd'hui.

Une approche différente découle aussi des théories de jauge. L'idée originale de Weyl (qui n'a pas abouti) était d'imposer l'invariance de la théorie sous une reparamétrisation (redéfinition du paramètre de longueur ; Weyl insiste sur *l'invariance d'échelle*). Dans le cas de modèles bidimensionnels, cela mène directement à l'invariance sous les transformations conformes. Et, de fait, les théories des champs avec *invariance conforme* ont connu un succès considérable (et aussi en mécanique statistique). Elles forment la base de la *théorie des cordes* ou *supercordes*, selon laquelle les constituants élémentaires de la matière ne sont plus ponctuels, mais plutôt des objets

unidimensionnels (cordes) (Green et al. , 1987). Mais cette extension signifie aussi le recours à divers groupes de Lie exotiques, comme $SO(32)$ ou les groupes exceptionnels $E(6)$, $E(7)$, $E(8)$. D'autre part, le groupe conforme en dimension 2 n'est plus un groupe de Lie, car il contient un nombre infini de paramètres. C'est ainsi que les *algèbres de Lie de dimension infinie* se sont invitées en physique des interactions fondamentales. Tout d'abord l'algèbre de Virasoro, très proche de l'algèbre conforme. Ensuite, par combinaison avec la théorie classique des cordes, on est mené à toute la classe des *algèbres de Kac-Moody* et leur représentations (Kac, 1983).

Une autre direction de recherche est celle des *groupes quantiques* (quantum groups) et autres déformations des algèbres de Lie classiques. On peut remarquer ici ironiquement que ces groupes quantiques ne sont ni des groupes, ni quantiques, ce sont en fait des algèbres de Hopf, une structure bien connue des algébristes !

L'ultime extension de tout ce que nous avons décrit est la *gravité quantique*. Celle-ci cherche à concilier la mécanique quantique et la relativité générale. Pour ce faire, elle incorpore les notions de théorie de jauge, la supersymétrie, la théorie des (super)cordes. De nombreuses variantes ont vu le jour, mais aucun formalisme vraiment concluant n'a émergé (Rovelli, 2004).

Une application tout à fait différente de la théorie des groupes est l'utilisation des *groupes de tresses* (braid groups) dans différents domaines. Ceci demande un mot d'explication. Etant donné un ensemble $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ de n points, on appelle *tresse* à n brins une bijection continue $\sigma : A_n \rightarrow A_n$. La Figure 4 montre des exemples de tresses à 3 ou 4 brins. On définit la composition de deux tresses simplement par leur application successive. Avec cette opération, l'ensemble des tresses à n brins constitue un groupe, noté B_n . Cette notion et ses représentations ont été introduites par E. Artin

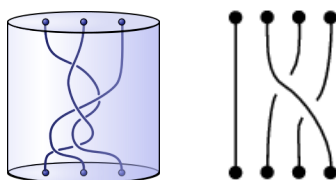


FIGURE 4 – Une tresse à 3 brins, resp.4 brins (d'après Wikipedia).

dès 1925 (Artin, 1947), dans un contexte purement mathématique (géométrie algébrique, théorie des noeuds). Plus récemment, elles ont trouvé de nombreuses applications en physique mathématique, notamment en mécanique statistique (équation de Yang-Baxter), en physique des particules

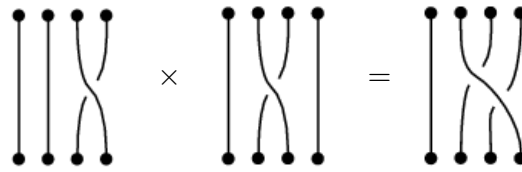


FIGURE 5 – Produit de deux tresses (d'après Wikipedia).

(anyons et fermions de Majorana), en physique des fluides ou en informatique théorique ("quantum computing"). On peut à ce propos consulter l'article de revue (Kauffman, 2016).

A propos de l'informatique théorique ("quantum computing"), un autre type de groupe est apparu récemment, à savoir les groupes de Galois et plus généralement les groupes profinis (càd. les groupes topologiques Hausdorff, compacts et totalement discontinus), qui apparaissent dans la théorie de Galois ou des corps finis. En particulier, le groupe p -adique $\mathbb{Z}_p$, qui est l'exemple type de groupe de Galois, joue un rôle explicite en informatique. A ce propos, on peut consulter les ouvrages de Vourdas (2007, 2017) et, pour la théorie de Galois, les livres très pédagogiques (Escoffier, 2000) ou (Kibler, 2017).

10. Et en Belgique ?

Il n'est peut-être pas inutile de terminer ce panorama par un petit plaidoyer *pro domo*. En effet, plusieurs universités belges ont été actives dans le domaine. Tant à l'ULB (groupe de C. Quesne et collaborateurs : transformations canoniques, oscillateurs déformés, ...) qu'à l'UGent (groupe de J. Van der Jeugt et collaborateurs : supersymétrie, mécanique quantique q -déformée, ...), une activité significative a eu lieu concernant la théorie des groupes et ses applications en physique.

Mais c'est surtout à l'UCL que ce thème a joué un rôle majeur, sous l'impulsion de David Speiser. En fait l'histoire démarre avant même l'arrivée de ce dernier en Belgique, par un cours donné en 1962 dans une école d'été de l'OTAN à Istanbul (Speiser, 1964). La plupart des physiciens qui se sont illustrés dans la suite participaient à ce cours (oserions-nous dire que c'est là qu'ils ont appris la théorie ?). Toujours est-il que très rapidement les méthodes graphiques pour étudier les représentations des groupes compacts sont apparues sur le marché et se sont répandues en physique des interactions fondamentales (Behrends et al., 1962). Le sujet à la mode à l'époque était d'identifier le groupe qui pourrait permettre de classifier les particules élémentaires (Speiser & Tarski, preprint en 1961, 1963). Ainsi

que nous l'avons vu plus haut, c'est finalement M. Gell-Mann qui trancha en 1961-62 (Gell-Mann, 1961, 1962). Mais l'étude, tant mathématique que pour les applications en physique des interactions fondamentales, continua à l'UCL (Antoine & Speiser, 1964). La méthode graphique pour décrire les "diagrammes des poids" des représentations irréductibles découle directement des classiques (E. Cartan, H. Weyl, H. Hopf, E. Stiefel), mais est beaucoup plus simple à utiliser et peut se généraliser, jusqu'aux algèbres de Kac-Moody. On en trouvera une description plus imagée dans (Antoine, 2006).

11. Conclusion

La physique des interactions fondamentales a progressé considérablement ces dernières années. Le modèle standard donne une structure cohérente à l'ensemble et la découverte du Higgs a validé le modèle. Il reste néanmoins beaucoup de problèmes ouverts, connus globalement sous l'appellation de *nouvelle physique* ou *physique au-delà du modèle standard*. Tout d'abord, le modèle standard explique *comment* le système fonctionne, mais pas *pourquoi*. Il y a trop de paramètres arbitraires, p.ex. les masses. Ensuite, la supersymétrie est un concept fascinant, mais resté jusqu'à présent purement théorique. Mais surtout il y a toujours incompatibilité entre la relativité générale et la mécanique quantique, alors que ces deux théories sont toujours plus validées expérimentalement. La gravité quantique tente de répondre à la question, mais les progrès sont lents, étant donné la complexité du problème.

Toutefois, au vu le chemin parcouru, il n'en reste pas moins que les méthodes de la théorie des groupes ont fourni un outil puissant et très souple. Passant de la description des symétries exactes aux symétries approchées, de plus en plus brisées, puis aux symétries dynamiques, la "Gruppenpest" a fini par envahir presque tous les domaines de la physique, parfois de façon fondamentale. A part l'analyse et l'algèbre linéaire, peu de techniques mathématiques ont eu un tel succès.

Remerciements

Cet article est issu d'un exposé fait au séminaire "Fondements et Notions Fondamentales" de Patricia Radelet-de Grave. Elle m'a ainsi donné l'occasion de présenter ce sujet et donc d'ajouter au séminaire un peu de quantique dans un contexte purement classique (car historique) et je l'en remercie. Patricia Radelet-de Grave et Dominique Lambert ont bien voulu relire intégralement le manuscrit. Leurs commentaires et/ou critiques constructives ont considérablement amélioré le texte sur le plan de la rigueur,

de la cohérence et de la pédagogie, je les en remercie tous deux chaleureusement.

Bibliographie

- [1] Ali, S.T., Antoine, J-P., & Gazeau, J-P. (2014). *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations*, 2nd ed., Springer, New York et al. .
- [2] Antoine, J-P. (2005). Group Theory in Physics, in *Encyclopedia of Physics*, vol. 1, pp. 941–952 ; Lerner, R.G. & Trigg, G.L. (eds.), Third edition, Wiley–VCH, Weinheim.
- [3] Antoine, J-P. & Speiser, D. (1964). Characters of irreducible representations of the simple groups. I. General theory. II. Application to classical groups, *J. Math. Phys.* **5**, 1226–1234 ; 1560–1572.
- [4] Antoine, J-P. (2006). David Speiser’s group theory : From Stiefel’s crystallographic approach to Kac-Moody algebras, in *Two Cultures. Essays in Honour of David Speiser*, pp. 13–23 ; K.Williams (ed.), Birkhäuser, Basel.
- [5] Antoine, J-P. (2018). L’analyse en ondelettes — De la recherche pétrolière aux reliques du Big Bang (mise à jour), *Revue des Questions Scientifiques* **189**, 5–49.
- [6] Artin, E. (1947). Theory of Braids, *Annals of Mathematics* **48**, 101–126.
- [7] Behrends, R.E., Dreitlein, J., Fronsdal, C. & Lee, W. (1962). Simple groups and strong interaction symmetries, *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 1–40.
- [8] Bohm, A., Ne’eman, Y. & Barut, A.O. (eds.) (1988) , *Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras*. Vols. I–II. World Scientific, Singapore, 1988.
- [9] Bouckaert, L.P., Smoluchowski, R. & Wigner, E. (1936). Theory of Brillouin zones and symmetry properties of wave functions in crystals, *Physical Review* **50**, 58–67.
- [10] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F. (1977). *Mécanique Quantique, Tome I*, Hermann, Paris.
- [11] Dyson, F.J. (1966). *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics* (a lecture note and reprint volume), Benjamin, New York.
- [12] Escoffier, J-P. (2000). *Théorie de Galois*, Dunod, Paris
- [13] Feichtinger, H.G. & Gröchenig, K. (1989). Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions. I, *J. Funct. Anal.* **86**, 307–340. id. II. *Monatsh. Math.* **108**, 129–148.

-
- [14] Gazeau, J-P. (2009). *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin.
 - [15] Gell-Mann, M. (1961). The Eightfold Way : A theory of strong interaction symmetry, Caltech report CTSL-20.
 - [16] Gell-Mann, M. (1962). Symmetries of baryons and mesons, *Phys. Rev.* **125**, 1067-1084.
 - [17] Green, M.B., Schwarz, J.H. & Witten, E. (1987). *Superstring Theory*, Vols. I-II, Cambridge University Press, Cambridge.
 - [18] Haag, R. & Kastler, D. (1964). An algebraic approach to quantum field theorem, *J. Math. Phys.* **5**, 848–861.
 - [19] Kac, L.H. (2016). *Infinite Dimensional Lie Algebras — An Introduction*, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart.
 - [20] Kauffman, V. (1983). Knot logic and topological quantum computing with Majorana fermions, in *Logic and Algebraic Structures in Quantum Computing*, Chubb, J., Eskandarian, A. & Harizanov, V., (eds), Lecture Notes in Logic, vol.45, Cambridge U.P., Cambridge, UK.
 - [21] Kibler, M. (2017). *Galois Fields and Galois Rings Made Easy*, STE Press-Elsevier, London/Oxford.
 - [22] Klauder, J.R. & Sudarshan, E.C.G. (1968) *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York.
 - [23] Kutyniok, G. & Labate, D. (eds.) (2012). *Shearlets : Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Birkhäuser, Boston.
 - [24] Loeb, E.M. (ed.) (1968-1975). *Group Theory and Its Applications*. Vols. 1–3. Academic Press, New York.
 - [25] Racah, G. (1961). *Group Theory and Nuclear Spectroscopy*, Lecture Notes, Princeton. Technical Report CERN 61-68, Geneva.
 - [26] Rovelli, C. (2004). *Quantum Gravity* Cambridge University Press.
 - [27] Speiser, D.R. & Tarski, J. (1963). Possible schemes for global symmetry, *J. Math. Phys.* **4**, 588–612
 - [28] Speiser, D. (1964). Theory of Compact Lie Groups and some Applications to Elementary Particle Physics, *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, NATO Summer School Istanbul 1962, pp. 201–276; Gürsey, F. (ed.), Gordon and Breach, New York.
 - [29] Speiser, D. (1976). La symétrie de l'ornement sur un bijou du trésor de Mycènes, *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, Anno I, Fascicolo 20.
 - [30] Vourdas, A. (2007). Quantum systems in finite Hilbert space : Galois fields in quantum mechanics, *J. Phys. A* **40**, R285–R331.

- [31] Vourdas, A. (2017). *Finite and Profinite Quantum Systems*. Springer, Cham, Switzerland.
- [32] Weyl, H. (1950),. (original, 1st German ed., 1928). *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover, New York.
- [33] Wigner, E.P. (1959) (original, 1st German ed., 1931). *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York,