
Transitions de phase dynamiques : des automates cellulaires probabilistes aux réseaux d'applications couplées.

Thèse présentée par :

Augustin de Maere d'Aertrycke

en vue de l'obtention du titre de Docteur en Sciences

Prof. Jean Bricmont (promoteur)
Prof. Bernard Piraux (président du jury)
Prof. Philippe Ruelle
Prof. Luc Haine
Prof. Christian Maes
Prof. Carlangelo Liverani

UCL
UCL
UCL
UCL
KULeuven
U. Roma Tor Vergata

Octobre 2009

Je présente ici, sans le secours de l'Analyse, les principes et les résultats généraux de cette théorie, en les appliquant aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

Essai philosophique sur les probabilités
PIERRE-SIMON LAPLACE

Remerciements

Avant toute chose, j'aimerais remercier de tout coeur le Professeur Jean Bricmont pour son encadrement pendant la réalisation de ce travail. Après m'avoir initié à la mécanique statistique et aux systèmes dynamiques chaotiques, il a accepté de superviser cette thèse, et son aide avisée, ses encouragements constants et ses remarques pertinentes ont été déterminants dans la réalisation de celle-ci.

Je souhaiterais également remercier les Professeurs Carlangelo Liverani, Gerhard Keller et Christian Maes pour les nombreuses suggestions qu'ils m'ont chacun apportées. Je tiens aussi à remercier les Professeurs Bernard Piraux, Philippe Ruelle, Luc Haine, Carlangelo Liverani et Christian Maes d'avoir accepté de lire mon manuscrit de thèse et d'être membre de mon jury.

Au cours de toute ces années passées à Louvain-la-Neuve, j'ai eu l'occasion de rencontrer de nombreuses personnes qui m'ont également aidé, directement ou indirectement. Professeurs, collègues, personnel administratif, étudiants, qu'ils soient tous remerciés.

Finalement, je ne pourrais pas oublier mon épouse Blandine, pour sa patience et son soutien inconditionnel tout au long de ces années. Je remercie également notre fille Emeline, qui a eu l'amabilité d'attendre la remise de ce

manuscrit pour poindre le bout de son nez, ainsi que mes parents, beaux-parents, frères, soeurs et amis pour leurs encouragements.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	ix
 I Les automates cellulaires probabilistes	 1
1 Automates cellulaires probabilistes en dimension finie	3
1.1 Mesures et probabilités	3
1.2 Chaînes de Markov	6
1.3 Comportement asymptotique	8
1.4 Transitions de phase	16

2	Faible couplage et unicité de la mesure invariante	21
2.1	Existence d'une mesure invariante	21
2.2	Unicité de la mesure invariante	24
2.3	Modèle de Stavskaya étendu	30
3	Fort couplage et transition de phase	35
3.1	Construction des contours	36
3.2	Argument de Peierls	40
3.3	Convergence exponentielle à l'équilibre	47
II	Les réseaux d'applications couplées	65
4	Systèmes dynamiques chaotiques	67
4.1	Itérations de l'intervalle	68
4.2	Comportement statistique et mesure SRB	70
4.3	Existence de mesures invariantes.	72
4.4	Unicité de la mesure SRB	80
5	Unicité de la mesure SRB à faible couplage	87
5.1	Réseaux d'applications couplées	88
5.2	Description du modèle	90
5.3	Existence de la mesure SRB	92
5.4	Unicité de la mesure SRB	94
6	Transition de phase pour les mesures SRB	111
6.1	Construction des contours	112
6.2	Inégalité de Lasota-Yorke généralisée	115

6.3	L'argument de Peierls	121
6.4	Convergence exponentielle à l'équilibre	129
	Conclusion	151
	A Techniques de régularisations	153
	Bibliographie	159
	Index	165

Introduction

Transitions de phase

La compréhension rigoureuse des phénomènes de transitions de phase est peut-être une des découvertes les plus importantes de la mécanique statistique du siècle précédent et ce champ de recherche est, encore de nos jours, un domaine de recherche très actif. Initialement, les transitions de phase ont été découvertes dans le cadre du modèle d'Ising, un modèle introduit pour comprendre le comportement des matériaux ferromagnétiques. Les matériaux ferromagnétiques sont des matériaux qui s'aimantent très fortement en présence d'un champ magnétique. Il avait été observé que, si le champ magnétique est brusquement retiré et que la température du matériau est supérieure à une certaine température critique, le matériau perd son aimantation. Mais en revanche, si la température est inférieure à la température critique, le matériau conserve cette aimantation et devient alors un aimant permanent.

Le modèle d'Ising se propose d'expliquer ce phénomène en postulant que le matériau ferromagnétique peut en fait être assimilé à un réseau $\mathbb{Z}^d$, pour un certain $d \geq 1$, en chaque site duquel serait placé une variable $\sigma_x \in \{-1, 1\}$. Physiquement, les σ_x correspondent évidemment aux projections des spins des composants élémentaires du matériau suivant une direction donnée, et sont

parfois également appelés spins par abus de langage. Le modèle d'Ising postule une interaction à plus proches voisins entre les différents spins de la forme $-J\sigma_x\sigma_y$ pour un paramètre de couplage $J > 0$. Le système est à l'équilibre à une certaine température inverse $\beta = \frac{1}{kT}$ et il est donc décrit par une mesure de probabilité appelée mesure de Gibbs. Les mesures de Gibbs sont solutions des équations DLR (Dobrushin-Lanford-Ruelle), qui stipulent que les probabilités conditionnelles des mesures de Gibbs sont données par :

$$\mu(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda^c}) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda^c})}}{\mathcal{Z}}$$

pour toute partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finie, et pour l'hamiltonien $\mathcal{H}(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda^c})$ donné par :

$$\mathcal{H}(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda^c}) = -J \sum_{\langle x, y \rangle : x \in \Lambda} \sigma_x \sigma_y$$

où la somme porte sur les paires de sites x et y plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$.

A partir de là, il peut être démontré qu'il existe une température inverse critique β_c telle que, si $\beta \leq \beta_c$, les équations DLR n'admettent qu'une unique solution et qu'à cette solution correspond une aimantation nulle. Mais, à faible température, si $\beta > \beta_c$, il existe une infinité de solutions qui sont les combinaisons linéaires convexes de deux solutions extrémales possédant l'une une aimantation positive, l'autre une aimantation négative. Il peut également être démontré que ces deux mesures extrémales possèdent la propriété de décroissance exponentielle des corrélations : si nous considérons la corrélation entre les valeurs prises par deux spins lointains, nous voyons que cette corrélation décroît exponentiellement avec la distance. Cette constatation est également valable quand $\beta < \beta_c$, mais s'avère fausse au point critique où $\beta = \beta_c$.

Automates cellulaires probabilistes

Il a très vite été constaté que la théorie mathématique des transitions de phase dépassait de loin le cadre de la mécanique statistique d'équilibre, et qu'elle s'appliquait en particulier à certains systèmes dynamiques stochastiques : les automates cellulaires probabilistes. Si nous choisissons un réseau $\mathbb{Z}^d$ et qu'en chaque site x de ce réseau, nous plaçons une variable σ_x prenant ses

valeurs dans un ensemble S fini, un automate cellulaire probabiliste sera alors un système dynamique à temps discret où, à chaque itération, chaque variable σ_x changera sa valeur avec une certaine probabilité qui dépendra des variables l'entourant. Cette notion d'automate cellulaire probabiliste sera définie plus en détail au Chapitre 1. Si l'état initial de l'automate cellulaire probabiliste est donné par une mesure μ sur $S^{\mathbb{Z}^d}$, nous pouvons alors construire un opérateur T , appelé opérateur de transfert, qui donnera l'évolution de la mesure avec les itérations de la dynamique. Nous verrons au Chapitre 2 que, si la dynamique est faiblement couplée, il n'existe en général qu'une unique mesure de probabilité invariante.

Si la dynamique est fortement couplée, plusieurs mesures invariantes peuvent apparaître. Ce résultat est évidemment à mettre en relation avec les transitions de phase observées pour les mesures de Gibbs : en effet, la constante de couplage J apparaissant toujours multipliée par la température inverse β dans les équations DLR, un système à haute température peut être vu comme faiblement couplé et réciproquement. Dans cette thèse, nous considérerons en particulier un modèle introduit en 1973 par la mathématicienne O. Stavskaya [58], qui suppose que, sur un réseau $\mathbb{Z}$, chaque variable $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ sera mise à jour avec la règle suivante :

- Si σ_x et σ_{x+1} sont tous les deux positifs, σ_x restera positif.
- Sinon, σ_x deviendra négatif avec probabilité $(1 - \epsilon)$ et positif avec probabilité ϵ ,

pour un certain paramètre $\epsilon \in [0, 1]$. Le paramètre ϵ représente l'intensité du couplage, et nous pouvons constater que d'une part, ϵ proche de 1 correspond à un système faiblement couplé, parce que la valeur de σ_{x+1} n'influencera σ_x qu'avec une probabilité très faible, et d'autre part, ϵ proche de 0 correspond à un système fortement couplé. Nous verrons au Chapitre 3 que pour ϵ proche de 0, différentes mesures de probabilité invariantes apparaissent et nous avons bien un phénomène de transition de phase. Si l'existence d'une transition de phase pour le modèle de Stavskaya est un résultat bien connu, nous utiliserons une technique de découplage originale pour démontrer qu'une vaste classe de mesure converge en réalité exponentiellement vite sous les itérations de l'opérateur de transfert T vers une des mesures invariantes, et nous en déduirons que certaines propriétés de cette mesure invariante, telles l'ergodicité ou la décroissance exponentielle des corrélations.

Systèmes chaotiques et déterminisme

La capacité de réaliser des prédictions est un élément important sous-jacent à toute théorie scientifique et le plus souvent ces prédictions sont de la forme suivante : si X est l'ensemble de toutes les configurations accessibles au système étudié et si $x \in X$ est l'état initial du système, alors l'état du système à un temps $t > 0$ sera égal à $T^t x$ pour un semi-groupe de fonctions $T^t : X \mapsto X$ donné par la théorie en question.

A titre d'exemple, nous pouvons considérer N particules dont la dynamique est décrite par un certain hamiltonien. Alors, l'espace des configurations est l'espace de phase $\mathbb{R}^{6N}$, l'état initial du système est donné par les positions et moments de chacune des particules et le semi-groupe $\{T^t\}_{t \geq 0}$ est le flot hamiltonien. Cependant, le formalisme que nous avons décrit, celui des systèmes dynamiques, dépasse de loin le cadre de la mécanique newtonienne et peut se retrouver dans des domaines aussi variés que la mécanique quantique, l'étude de la dynamique des populations ou certains modèles d'économétrie.

Un aspect marquant de ces systèmes dynamiques est le déterminisme qu'ils postulent. En effet, étant donné l'état initial du système $x \in X$ et étant donné le semi-groupe de fonctions $T^t : X \mapsto X$, l'état du système est complètement déterminé pour tout instant t ultérieur et est donné par $T^t x$. C'est pour mettre ce déterminisme en évidence que Laplace a introduit ce que nous appelons le démon de Laplace [39] :

Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux.

Le déterminisme a toujours engendré des réactions passionnées, sans doute parce qu'il est vu comme une contradiction avec notre sentiment de libre arbitre, mais peut-être aussi parce que certains événements de l'univers qui nous entourent semblent échapper à toute description déterministe et relever plutôt d'un hasard intrinsèque. Par exemple, s'il est possible de prédire les dates des éclipses solaires pour les siècles à venir, il est tout à fait impossible de prédire

le résultat d'un simple lancer de dé. Et pourtant, les deux systèmes obéissent aux mêmes lois fondamentales supposées déterministes.

Cependant, il est important de remarquer qu'avec les limitations intrinsèques à notre connaissance du monde qui nous entoure, nous n'avons jamais accès à l'état initial exact de l'univers à un instant donné. Le démon de Laplace est une idéalisation et la connaissance à laquelle il a accès est radicalement différente de notre connaissance humaine. Si par exemple nous supposons que le système dynamique est tel que deux trajectoires initialement tellement proches qu'elles sont humainement indistinguables viennent à avoir très rapidement un comportement quantitativement différent, alors ce système serait tout à fait déterministe et le démon de Laplace pourrait prédire son évolution avec une précision parfaite. Mais nous, être humains finis, serions dans l'impossibilité de comprendre son comportement et penserions vraisemblablement qu'il est totalement aléatoire. C'est cette constatation qui pousse Maxwell à énoncer à propos du déterminisme [48] :

This is only true when small variations in the initial circumstances produce only small variations in the final state of the system. This implies that it is only in so far as stability subsists that principles of natural law can be formulated : it thus perhaps puts a limitation on any postulate of universal physical determinacy such as Laplace was credited with.

Cette forme d'instabilité est souvent appelée sensibilité aux conditions initiales et nous aurons l'occasion de l'aborder de façon plus rigoureuse au Chapitre 4.

Quelques années après Maxwell, Poincaré démontrait l'existence d'une certaine sensibilité aux conditions initiales dans le cadre de ses études sur la stabilité du problème à trois corps et découvrait toute une nouvelle classe de systèmes dynamiques : les systèmes chaotiques.

Si avant Poincaré la théorie des systèmes dynamiques s'était particulièrement intéressée à la notion de trajectoire pour décrire l'évolution d'un système, cette approche montre ses limites pour un système dynamique instable. En effet, supposons par simplicité que le système dynamique que nous considérons soit un système dynamique à temps discret donné par les itérations d'une fonction $\tau : I \mapsto I$ pour un intervalle de la droite réelle I . Dans ce cas, la trajectoire partant d'un point initial $x \in I$ est donnée par $\{\tau^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$. L'état initial

ne nous étant révélé que par une mesure d'une précision finie, la seule chose que nous savons est qu'il est, par exemple, compris dans un intervalle d'erreur $[x + \epsilon, x - \epsilon]$. La sensibilité aux conditions initiales va alors impliquer que certaines trajectoires dans l'intervalle d'erreur vont avoir un comportement radicalement différent, réduisant fortement l'intérêt de toute prédiction basée sur une trajectoire.

Si nous désirons réaliser des prédictions intéressantes sur le comportement d'un système chaotique, il est donc nécessaire de développer de nouveaux outils mathématiques. De façon assez ironique, c'est le démon tant décrié de Laplace qui nous mènera à une solution. En effet, la citation de Laplace que nous avons reproduite plus haut est extraite d'un ouvrage sur les probabilités, où Laplace défend l'idée que les probabilités sont des outils permettant de réaliser certaines prédictions dans des situations où nous n'avons qu'une connaissance partielle de l'état initial du système et les systèmes chaotiques rentrent justement dans ces catégories.

Nous verrons au Chapitre 4 que le cas des itérations de l'intervalle $\tau : I \mapsto I$, ces méthodes probabilistes mènent à l'introduction du concept de mesure SRB, introduit indépendamment par Sinai [56, 57], Ruelle [54] et Bowen [9, 10]. Une mesure SRB est une mesure de probabilité μ_{SRB} invariante par rapport à la dynamique τ pour laquelle il existe un ensemble $V \subseteq I$ tel que V est de mesure de Lebesgue strictement positive et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(\tau^k x) = \int \varphi \, d\mu_{\text{SRB}},$$

presque pour tout $x \in V$ et pour toute fonction φ appartenant à une certaine classe d'observables.

Cette définition de mesure SRB appelle quelques remarques. Tout d'abord, elle donne un rôle particulier à la mesure de Lebesgue sur X , mais ce rôle particulier peut être justifié par le fait que, lorsque nous essayons de déterminer l'état initial x dans lequel se trouve un système, nous ne le faisons toujours qu'avec une précision finie. Ce qui fait qu'en pratique, nous n'avons pas accès à l'état initial du système, mais à une mesure de probabilité plus ou moins centrée sur x en fonction de la précision de nos instruments de mesure. Et dans

tous les cas, cette mesure de probabilité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si le système est initialement dans le bassin d'attraction V , nous constatons alors que la plupart des trajectoires vont avoir un comportement statistique décrit par la mesure SRB. C'est dans ce sens là que la mesure SRB peut être comprise comme étant une mesure naturelle, parce que le comportement statistique le plus probable à l'intérieur du bassin d'attraction V sera donné par la mesure SRB.

Nous voyons donc qu'au-delà du comportement apparemment aléatoire du système chaotique, la mesure SRB introduit un élément de régularité sous la forme d'une loi des grands nombres.

Réseaux d'applications couplées

Ayant vu que les automates cellulaires probabilistes possédaient un comportement très riche en dimension infinie, il est naturel de se demander dans quelle mesure cela peut être étendu aux systèmes chaotiques. C'est pour étudier ces systèmes chaotiques en dimension infinie, pour poser les bases d'une « *théorie chaotique des champs* », que Kaneko a introduit les réseaux d'applications couplées en 1984 [33]. Tout comme les itérations de l'intervalle forment un paradigme pour l'étude du chaos en dimension finie, les réseaux d'applications couplées permettent d'appréhender certains concepts fondamentaux des systèmes chaotiques en dimension infinie.

Formellement, si I est un intervalle et $X = I^{\mathbb{Z}^d}$, pour un certain $d \geq 1$, alors un réseau d'applications couplées est un système dynamique décrit par les itérations d'une application $T : X \mapsto X$ telle que :

- $T = \Phi \circ \tau^{\mathbb{Z}^d}$
- $\tau : I \mapsto I$ est une dynamique chaotique locale s'appliquant à chaque site de $\mathbb{Z}^d$.
- $\Phi : X \mapsto X$ est un couplage qui va faire interagir les sites entre eux.

Nous pouvons tout d'abord remarquer que cette définition est la généralisation immédiate du concept d'itération de l'intervalle en dimension infinie. Les réseaux d'applications couplées peuvent également être utilisés pour discrétiser

des équations aux dérivées partielles, par exemple les équations de Navier-Stokes pour simuler le comportement des nuages [64] ou les fumées volcaniques [49].

Il a été démontré qu'à faible couplage, les réseaux d'applications couplées possèdent en fait une unique mesure SRB [38]. Nous aurons l'occasion de reproduire une des preuves de ce fait au Chapitre 5 dans le cadre d'un réseau d'applications couplées inspiré par le modèle de Stavskaya.

La forte similitude entre les automates cellulaires probabilistes et les réseaux d'applications couplées pose évidemment la question de l'existence de transitions de phase pour les réseaux d'applications couplées. Si l'intensité du couplage varie, pouvons nous observer l'apparition de nouvelles mesures SRB ? Nous verrons au Chapitre 6 que nous pourrions répondre par l'affirmative à cette question dans le cas du réseau d'applications couplées introduit précédemment et nous démontrerons que les mesures SRB qui apparaissent possèdent également la propriété de décroissance exponentielle des corrélations. Si l'existence des transitions de phase est bien connue du fait des travaux de Gielis et MacKay [23], et Bardet et Keller [4], nous utiliserons ici des techniques originales [17], inspirées des techniques développées pour les automates cellulaires probabilistes, pour prouver la convergence exponentielle à l'équilibre pour une vaste classe de mesures initiales. Ce résultat dépasse les limites des travaux antérieurs et nous permettra de déduire certaines propriétés de la mesure invariante, telles la décroissance exponentielle des corrélations.

Première partie

Les automates cellulaires probabilistes

CHAPITRE 1

Automates cellulaires probabilistes en dimension finie

Dans ce chapitre, nous définirons les automates cellulaires probabilistes, nous énoncerons certaines de leurs propriétés et nous étudierons leur comportement asymptotique sur des réseaux finis. Ensuite, nous nous intéresserons aux réseaux infinis, nous introduirons l'automate cellulaire probabiliste de Stavksaya qui jouera un rôle central tout au long de cette thèse et nous aborderons la notion de transition de phase.

1.1 Mesures et probabilités

Considérons un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ pour un certain $d \geq 1$. Supposons qu'en chaque site de ce réseau, nous placions une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un ensemble S fini. Dans ce cas, l'espace des configurations $X = S^\Lambda$ est l'ensemble de toutes les configurations accessibles au système. Nous noterons par ω les éléments de X , par ω_x la valeur de ω au site $x \in \Lambda$, et par $\omega_{\Lambda'}$ le vecteur composé des ω_x pour $x \in \Lambda' \subseteq \Lambda$.

Nous supposons que S est équipé de la topologie discrète, et que X hérite de la topologie produit induite par cette topologie. Soit $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles, et soit $|\varphi|_\infty = \sup_{\omega \in X} |\varphi(\omega)|$. Dans le cas d'un réseau Λ fini, la topologie sur X est également la topologie discrète et toute fonction $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ sera alors continue. Si le réseau est infini, nous pouvons utiliser le théorème de Stone-Weierstrass [51, p. 102] pour montrer qu'une fonction continue φ est une fonction qui peut être uniformément approximée par des fonctions dépendant d'un nombre fini de variables :

□ **Théorème 1.1** (Théorème de Stone-Weierstrass) :

Soit B une algèbre de $\mathcal{C}(X)$ qui est fermée par rapport à $|\cdot|_\infty$. Si B sépare les points, c'est-à-dire que si, pour tout ω, ξ dans X , $\exists \varphi \in B$ tel que $\varphi(\omega) \neq \varphi(\xi)$, alors :

- soit $B = \mathcal{C}(X)$,
- soit il existe un ω_0 dans X tel que $B = \{\varphi \in \mathcal{C}(X) \mid \varphi(\omega_0) = 0\}$.

Si nous considérons l'ensemble des fonctions continues qui peuvent être uniformément approximées par des fonctions dépendant d'un nombre fini de variables, nous nous rendons compte que cet ensemble forme une algèbre fermée par rapport à $|\cdot|_\infty$, qui sépare les points et que cet ensemble contient la fonction constante $\varphi(\xi) = 1$. Dès lors, il ne peut exister de ω_0 tel que cet ensemble soit égal à $\{\varphi \in \mathcal{C}(X) \mid \varphi(\omega_0) = 0\}$ et le théorème de Stone-Weierstrass implique donc que toute fonction continue peut être uniformément approximée par des fonctions continues dépendant d'un nombre fini de variables.

A présent, définissons Σ , la σ -algèbre de Borel qui est la plus petite σ -algèbre contenant tous les ouverts de la topologie. L'espace X muni de Σ forme un espace mesurable (X, Σ) . Nous pouvons alors définir une mesure signée sur (X, Σ) . Une **mesure signée** est une fonction de Σ , la σ -algèbre de Borel, à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, telle que :

- μ ne prend qu'une seule des valeurs $+\infty$ et $-\infty$,
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- et si $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ est une famille d'ensembles disjoints deux à deux de Σ , nous avons :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Y_k).$$

Par rapport à une mesure signée μ , nous dirons qu'un ensemble $Y \in \Sigma$ est positif ou négatif si pour tout ensemble mesurable $Z \subseteq Y$, nous avons $\mu(Z) \geq 0$ ou $\mu(Z) \leq 0$ respectivement. Un ensemble Y qui est à la fois positif et négatif est appelé un ensemble nul pour μ . Il est possible de prouver qu'il existe un ensemble $X^{(+)}$ positif et un ensemble $X^{(-)}$ négatif tels que $X = X^{(+)} \cup X^{(-)}$ et $X^{(+)} \cap X^{(-)} = \emptyset$ [52, p. 235]. Nous dirons qu'une mesure signée est de masse nulle si $\mu(X) = 0$, et de manière plus générale, nous appellerons $\mu(X)$ la masse de μ .

Parmi les mesures signées, nous aurons parfois à considérer les mesures positives. Une **mesure positive** est une fonction de Σ , la σ -algèbre de Borel, telle que :

- μ est une mesure signée
- $\mu(Y) \geq 0$ pour tout $Y \in \Sigma$.

Toute mesure positive est donc une mesure signée. L'inverse n'est évidemment pas vrai, mais le théorème de décomposition de Hahn [52, p. 235] nous montre que toute mesure signée peut être écrite comme la différence de deux mesures positives :

□ **Proposition 1.2** (Théorème de décomposition de Hahn) :

Soit μ une mesure signée sur (X, Σ) . Alors, il existe deux mesures $\mu^{(+)}$ et $\mu^{(-)}$ qui sont les restrictions de μ aux ensembles $X^{(+)}$ et $X^{(-)}$, telles que, pour tout ensemble mesurable Y , nous ayons :

$$\mu(Y) = \mu^{(+)}(Y) - \mu^{(-)}(Y).$$

Parmi les mesures positives, nous nous intéresserons plus particulièrement aux mesures de probabilités. Une **mesure de probabilité** sur (X, Σ) est fonction μ de Σ à valeur dans $[0, 1]$ telle que $\mu(X) = 1$. L'espace mesurable (X, Σ) équipé d'une mesure de probabilité μ est appelé un espace probabilisé (X, Σ, μ) .

Pour toute mesure positive, nous pouvons définir **l'intégrale** d'une fonction mesurable par rapport à cette mesure comme étant :

$$\mu(\varphi) \equiv \int \varphi \, d\mu = \sup \left\{ \sum_i c_i \mu(E_i) \mid 0 \leq \sum_i c_i \mathbb{1}_{E_i}(x) \leq \varphi(x) \right\}. \quad (1.1)$$

A partir de cette définition, nous pouvons étendre le concept d'intégrale aux mesures signées grâce à la décomposition de Hahn en posant $\mu(\varphi) = \mu^{(+)}(\varphi) -$

$\mu^{(\cdot)}(\varphi)$. Dans le cas d'une mesure de probabilité μ , l'intégrale de φ sera appelée la valeur moyenne de φ par rapport à μ et parfois notée $\mathbb{E}_\mu[\varphi]$.

Pour conclure, nous pouvons constater que, dans le cas d'un réseau Λ fini, l'espace X est également fini et l'intégrale d'une fonction φ par rapport à une mesure μ se réduit à une simple somme :

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{\omega \in X} \varphi(\omega) \, \mu(\{\omega\}). \quad (1.2)$$

1.2 Chaînes de Markov

Ayant défini une structure topologique et une structure d'espace probabilité sur X , nous pouvons à présent introduire une dynamique. Supposons donc qu'à chaque instant, le système puisse passer d'un état à l'autre avec une probabilité qui dépendra uniquement de l'état du système juste avant le saut. Explicitement, nous définissons un noyau de probabilité qui est une fonction $\mathbb{P}[\cdot | \cdot] : \Sigma \times X \mapsto [0, 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}[\cdot | \omega]$ est une mesure de probabilité pour tout ω dans X ,
- $\mathbb{P}[Y | \cdot]$ est une fonction Σ -mesurable pour tout $Y \in \Sigma$.

Ce noyau de probabilité exprime la probabilité de passer de l'état η à l'état ω . Si l'état initial du système est donné par une mesure de probabilité μ , la probabilité que le système soit dans l'état ω au temps t est donnée par :

$$\mu_t(\omega) = \int_{\omega_{t-1} \in X} \dots \int_{\omega_0 \in X} \mathbb{P}[\omega_t | \omega_{t-1}] \dots \mathbb{P}[\omega_1 | \omega_0] \, \mu(\omega_0). \quad (1.3)$$

Cela nous permet d'introduire l'opérateur de transfert T , qui est défini par :

$$T\mu(\omega) = \int_{\xi \in X} \mathbb{P}[\omega | \xi] \, \mu(\xi). \quad (1.4)$$

Avec l'opérateur de transfert, nous voyons que l'équation (1.3) peut être présentée sous la forme plus compacte : $\mu_t = T^t \mu$.

Nous constatons que, si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telles que chaque X_t soit distribué selon μ_t , le processus stochastique ainsi défini est

une chaîne de Markov, parce qu'il vérifie la condition de Markov :

$$\mathbb{P}[X_t = \omega_t | X_0 = \omega_0 \dots X_{t-1} = \omega_{t-1}] = \mathbb{P}[X_t = \omega_t | X_{t-1} = \omega_{t-1}]. \quad (1.5)$$

Nous pouvons remarquer qu'une chaîne de Markov ne prend pas du tout en compte la structure spatiale du réseau Λ , parce que la probabilité qu'un site passe d'un état donné à un autre peut potentiellement dépendre de l'état de tout le système. Il semble donc naturel de considérer plus en détail des chaînes de Markov où cette probabilité de transition ne sera une fonction que du voisinage du site considéré, et pour cela, nous introduisons les automates cellulaires probabilistes : un **automate cellulaire probabiliste** sur $X = S^\Lambda$ est une chaîne de Markov pour laquelle les probabilités de transitions sont données par :

$$\mathbb{P}[\omega | \eta] = \prod_{x \in \Lambda} p_x(\omega_x | \eta),$$

où, pour tout $x \in \Lambda$, $p_x(\cdot | \cdot) : S \times X \mapsto [0, 1]$ vérifie :

- $p_x(\omega_x | \eta)$ est une fonction Σ -mesurable de η .
- $\sum_{\omega_x \in S} p_x(\omega_x | \eta) = 1$ pour tout η dans X .

La première condition est une condition très générale, et il est fréquent de rencontrer des hypothèses plus restrictives sur la dépendance en η de $p_x(\omega_x | \eta)$. Par exemple, nous pouvons supposer que l'interaction introduite par $p_x(\omega_x | \eta)$ est de portée finie, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \Lambda$, il existe un $\Lambda_x \subset \Lambda$ fini contenant x tel que $p_x(\omega_x | \eta) = p_x(\omega_x | \eta_{\Lambda_x})$. Nous pouvons également supposer que l'interaction est de portée infinie mais décroît exponentiellement, dans le sens où il existe un $C > 0$ et un $\sigma \in (0, 1)$ tels que pour tout $\eta \in X$, $x, y \in \Lambda$, et $a \in S$:

$$\sup_{\omega_x} |p_x(\omega_x | \eta) - p_x(\omega_x | \eta_{\neq y}, a)| \leq C \sigma^{d(x, y)}.$$

où $(\eta_{\neq y}, a)$ est la configuration obtenue à partir de η en remplaçant la valeur de η au site y par la valeur a et $d(x, y)$ est la distance entre x et y .

A titre d'exemple, nous pouvons considérer le modèle de *la règle de la majorité*. Pour un certain $N \in \mathbb{N}$, considérons le réseau $\Lambda = \{1, \dots, N\}$, et $S = \{-1, 1\}$. Fixons alors un ϵ dans $[0, 1]$, et définissons les probabilités de

transition par $p_x(\omega_x|\boldsymbol{\eta}) = 1 - \epsilon$ si ω_x est du même signe que $\eta_x + \eta_{x+1} + \eta_{x-1}$, et $p_x(\omega_x|\boldsymbol{\eta}) = \epsilon$ dans le cas contraire. Il est bien entendu nécessaire de fixer des conditions aux frontières pour enlever l'ambiguïté que nous pouvons rencontrer aux extrémités du réseau Λ , et par exemple, nous pouvons choisir de prendre des conditions aux frontières fixées, en imposant $\eta_0 = \eta_{N+1} = +1$, ou des conditions aux frontières périodiques, avec $\eta_0 = \eta_N$ et $\eta_{N+1} = \eta_1$.

1.3 Comportement asymptotique

Tout au long de cette section, nous supposons que le réseau Λ est fini, et donc que l'espace des configurations X est également fini. Nous avons vu dans l'équation (1.3) que si l'état du système est donné initialement par une mesure de probabilité μ , l'état du système à tout instant ultérieur t sera donné par $T^t\mu$, où T est l'opérateur de transfert défini en (1.4). Le comportement asymptotique du système sera complètement déterminé par le comportement de $T^t\mu$ dans la limite où t tend vers l'infini.

Le fait que X soit fini nous permet d'écrire l'intégrale sous la forme d'une somme finie et l'opérateur de transfert T sous la forme d'une matrice $|X| \times |X|$. Pour cela, considérons l'espace des fonctions sur X à valeur dans $\mathbb{C}$. Il est aisé de voir que cet espace forme un espace vectoriel sur le corps des complexes, isomorphe à $\mathbb{C}^{|X|}$, et il est naturel de choisir comme vecteurs de base de cet espace vectoriel les fonctions $\delta_{\boldsymbol{\omega}}$, qui à $\boldsymbol{\omega}'$ font correspondre 1 si $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$ et 0 si $\boldsymbol{\omega}' \neq \boldsymbol{\omega}$. Nous munissons cet espace du produit scalaire usuel :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\boldsymbol{\omega} \in X} f(\boldsymbol{\omega})^* g(\boldsymbol{\omega}). \quad (1.6)$$

Pour différentes raisons, nous préférons utiliser $|\cdot|$, la norme L^1 sur les vecteurs de $\mathbb{C}^{|X|}$, définie par :

$$|f| = \sum_{\boldsymbol{\omega} \in X} |f(\boldsymbol{\omega})|, \quad (1.7)$$

plutôt que la norme induite par le produit scalaire en (1.6). Cela implique que, si f et g sont deux fonctions de X dans $\mathbb{C}$, nous avons :

$$|\langle f, g \rangle| \leq |g|_{\infty} |f|. \quad (1.8)$$

Nous pouvons alors faire correspondre à l'opérateur de transfert T une matrice $|X| \times |X|$ que nous noterons également T et qui est définie par :

$$T\omega\eta = \mathbb{P}[\omega | \eta]. \quad (1.9)$$

Cette matrice est parfois appelée la **matrice de transfert**. Ayant vu en (1.2) qu'une mesure de probabilité μ sur X fini est également une fonction $\mu : \omega \rightarrow \mu(\{\omega\})$, nous constatons que, pour toute fonction φ à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} T\mu(\varphi) &= \sum_{\eta \in X} \sum_{\omega \in X} \varphi(\omega) \mathbb{P}[\omega | \eta] \mu(\eta) = \sum_{\eta \in X} \sum_{\omega \in X} \varphi(\omega) T\omega\eta \mu(\eta) \\ &= \langle \varphi, T\mu \rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nous dirons alors que la matrice T est **stochastique** si :

- T est non négative : $T\omega\eta \geq 0$ pour tout $\omega, \eta \in X$.
- $\sum_{\omega \in X} T\omega\eta = 1$ pour tout $\eta \in X$.

Les hypothèses sur $p_x(\cdot | \cdot)$ impliquent évidemment que la matrice de transfert est une matrice stochastique. Nous dirons également que la matrice T est **ir-réductible** si, pour tout ω, η dans X , il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n\omega\eta \neq 0$. Et finalement nous dirons que la matrice est irréductible et **apériodique** si il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout ω, η dans S , $T^n\omega\eta \neq 0$.

Considérons en détail le spectre de la matrice T . Le fait que T soit stochastique implique que ses valeurs propres sont toutes contenues dans le cercle unité du plan complexe. Supposons que ces valeurs propres soient données par λ_k , pour $k = 1, \dots, |X|$ et qu'elles soient ordonnées par ordre de module décroissant. Soient $u^{(k)}$ et $v^{(k)}$ les vecteurs propres respectivement à droite et à gauche associés à la valeur propre λ_k . Nous supposons que le vecteur propre à droite est normalisé de façon à ce que $|u^{(k)}| = 1$.

La fonction constante étant un vecteur propre à gauche de T de valeur propre 1, nous constatons que 1 est toujours valeur propre de T . Sans perte de

généralité, supposons que les valeurs propres soient indicées de manière à ce que $\lambda_1 = 1$. Le reste du spectre de T est donc inclus dans un cercle de rayon $|\lambda_2| \leq 1$. Si 1 est l'unique valeur propre sur le cercle unité, toutes les autres valeurs propres sont contenues dans un cercle de rayon $|\lambda_2| < 1$ et nous dirons alors que la matrice T possède un trou spectral.

Le théorème de Perron-Frobenius [63, p. 16] nous permet d'affirmer que si la matrice de transfert est irréductible et apériodique, elle possède un trou spectral.

□ **Théorème 1.3** (Théorème de Perron-Frobenius) :

Soit M une matrice $|X| \times |X|$ non négative. Alors :

- Il existe une valeur propre λ de M telle que λ est positive, et toutes les autres valeurs propres sont situées dans un cercle de rayon λ centré en l'origine du plan complexe.
- Cette valeur propre est majorée et minorée par :

$$\min_{\boldsymbol{\eta} \in X} \sum_{\boldsymbol{\omega} \in X} M_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}} \leq \lambda \leq \max_{\boldsymbol{\eta} \in X} \sum_{\boldsymbol{\omega} \in X} M_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}}.$$

- Les vecteurs propres à gauche et à droite associés à cette valeur propre λ peuvent être choisis non négatifs.
- Si M est irréductible, la valeur propre λ est de multiplicité 1, et si M est irréductible et apériodique, la valeur propre λ est la seule valeur propre sur le cercle de rayon λ .

Nous voyons donc que si la matrice de transfert est irréductible et apériodique, nous avons bien un trou spectral. Nous pouvons constater que, par exemple, le modèle de la règle de la majorité que nous avons introduit précédemment donne lieu à une matrice de transfert irréductible et apériodique puisque, de n'importe quel état $\boldsymbol{\xi}$, la probabilité de passer dans un état quelconque $\boldsymbol{\omega}$ est donnée par $\mathbb{P}[\boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{\xi}]$, qui est borné inférieurement par $\min\{\epsilon, 1 - \epsilon\}^{|X|}$.

Sous l'hypothèse de l'existence d'un trou spectral, nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

□ **Théorème 1.4 :**

Supposons que Λ soit fini et que la matrice de transfert T possède une unique valeur propre sur le cercle unité. Alors, il existe une mesure de probabilité μ_{inv} , une constante $\sigma \in (0, 1)$ et une constante C telles que, pour toute mesure de

probabilité μ et toute fonction mesurable φ , nous ayons :

$$|T^t \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| \leq C \sigma^n |\varphi_{\infty}|.$$

De plus, la mesure invariante est donnée par $\mu_{\text{inv}}(\{\omega\}) = u^{(1)}(\omega)$, où $u^{(1)}$ est le vecteur propre à droite associé à la valeur propre 1, normalisé pour que $|u^{(1)}| = 1$.

Démonstration:

Puisque $v^{(1)}(\omega) = 1$ pour tout $\omega \in \mathbb{Z}$ et que $|u^{(1)}| = \sum_{\omega \in X} u^{(1)}(\omega) = 1$, nous constatons que $\langle v^{(1)}, u^{(1)} \rangle = 1$. Dès lors, si P est la matrice telle que $P\omega\eta = u^{(1)}(\omega)v^{(1)}(\eta)$, nous avons $P^2 = PT = TP = P$. Utilisant l'équation (1.10), nous obtenons alors :

$$(T^t \mu)(\varphi) = \langle \varphi, T^t \mu \rangle = \langle \varphi, P\mu \rangle + \langle \varphi, (T^t - P)\mu \rangle. \quad (1.11)$$

Nous constatons que, par définition de la mesure μ_{inv} , nous avons :

$$\langle \varphi, u^{(1)} \rangle = \sum_{\omega \in X} \varphi(\omega) \mu_{\text{inv}}(\omega) = \mu_{\text{inv}}(\varphi).$$

Et, parce que μ est une mesure de probabilité et que $v^{(1)}(\omega) = 1$,

$$\langle v^{(1)}, \mu \rangle = \sum_{\omega \in X} v^{(1)}(\omega) \mu(\omega) = \sum_{\omega \in X} \mu(\omega) = 1.$$

Nous déduisons que $\langle \varphi, P\mu \rangle = \mu_{\text{inv}}(\varphi)$, et l'équation (1.11) devient alors :

$$T^t \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi) = \langle \varphi, (T^t - P)\mu \rangle. \quad (1.12)$$

Introduisons maintenant la norme $|\cdot|$ sur les matrices de $\mathbb{C}^{|X| \times |X|}$:

$$|M| = \sup \{ |Mu| \mid |u| \leq 1 \}. \quad (1.13)$$

Utilisant alors le fait que P est idempotent, et que $PT = TP = P$, nous voyons que $(T^t - P) = (T - P)^t$. Ensuite de l'inégalité (1.8) et du fait que $|\mu| = 1$,

nous déduisons que :

$$\begin{aligned} |(T^t \mu)(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| &= \left| \langle \varphi, (T - P)^t \mu \rangle \right| \leq |\varphi|_{\infty} \left| (T - P)^t \mu \right| \\ &\leq |\varphi|_{\infty} \left| (T - P)^t \right|. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'hypothèse de l'existence d'un trou spectral, parce qu'elle implique que la matrice $T - P$ a son spectre contenu dans un cercle de rayon $r = \min_{k \neq 1} |\lambda_k| < 1$. La formule de Gelfand [22] affirme que, si r_M est le rayon spectral d'une matrice M , nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M^n|^{\frac{1}{n}} = r_M, \quad (1.15)$$

donc, pour un $\epsilon > 0$ arbitraire, il existe un $N > 0$ tel que, si $n > N$:

$$\left| (T - P)^t \right| \leq (r + \epsilon)^t.$$

Choisissons alors ϵ tel que $\sigma = r + \epsilon < 1$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| (T - P)^t \right| \leq C \sigma^t. \quad (1.16)$$

Insérant cette inégalité dans (1.14), nous obtenons le résultat annoncé :

$$|T^t \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| \leq C \sigma^t |\varphi|_{\infty}. \quad \blacksquare$$

Une conséquence directe de ce théorème est que :

□ **Corollaire 1.5 :**

Supposons que T satisfasse aux hypothèses du Théorème 1.4, et que μ soit une mesure signée de masse nulle. Alors, il existe une constante C telle que :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq C \sigma^t |\varphi|_{\infty}.$$

Démonstration:

Si μ est une mesure signée, la décomposition de Hahn (Proposition 1.2) implique qu'il existe deux mesures $\mu^{(+)}$ et $\mu^{(-)}$ telles que $\mu = \mu^{(+)} - \mu^{(-)}$. Et, comme μ est de masse nulle, il existe une constante $m > 0$ telle que $\mu^{(+)}(1) = \mu^{(-)}(1) = m$.

Dès lors $m^{-1}\mu^{(+)}$ et $m^{-1}\mu^{(-)}$ étant des mesures de probabilité :

$$\left| \frac{T^t \mu^{(+)}(\varphi)}{m} - \mu_{\text{inv}}(\varphi) \right| \leq C^{(+)} \sigma^t |\varphi|_{\infty}$$

$$\left| \frac{T^t \mu^{(-)}(\varphi)}{m} - \mu_{\text{inv}}(\varphi) \right| \leq C^{(-)} \sigma^t |\varphi|_{\infty}$$

Donc, pour une certaine constante $C > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} |T^t \mu(\varphi)| &\leq |T^t \mu^{(+)}(\varphi) - m \mu_{\text{inv}}(\varphi) - T^t \mu^{(-)}(\varphi) + m \mu_{\text{inv}}(\varphi)| \\ &\leq m (C^{(+)} + C^{(-)}) \sigma^t |\varphi|_{\infty} \leq C \sigma^t |\varphi|_{\infty}. \end{aligned}$$

■

A partir de ce corollaire, nous pouvons prouver la loi des grands nombres :

□ **Théorème 1.6** (Loi des grands nombres) :

Soit μ une mesure de probabilité sur (X, Σ) , T un opérateur de transfert satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.4 et μ_{inv} l'unique mesure invariante associée à cet opérateur de transfert. Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov engendrée par T . Alors, pour toute fonction continue φ , nous avons μ -presque certainement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(X_t) = \int \varphi \, d\mu_{\text{inv}}.$$

Avant de prouver ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

□ **Lemme 1.7** :

Sous les hypothèses du Théorème 1.6, si φ est une fonction continue telle que $|\varphi|_{\infty} \leq 1$ et $\mu_{\text{inv}}(\varphi) = 0$, et si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\mathbb{E}_{\mu} [\varphi(X_{t_1}) \varphi(X_{t_2}) \varphi(X_{t_3}) \varphi(X_{t_4})] \leq C (\sigma^{t_2-t_1} \sigma^{t_4-t_3} + \sigma^{t_3-t_1}).$$

Démonstration du Lemme 1.7:

Commençons par définir $T\varphi$ comme :

$$T\varphi(\omega) = \sum_{\eta \in X} \mathbb{P}[\eta | \omega] \varphi(\eta).$$

Pour n'importe quelle mesure de probabilité ν , nous avons alors $\nu(T^t\varphi) = T^t\nu(\varphi)$. Et si f et g sont deux fonctions sur X telles que $|f|_\infty \leq 1$ et $|g|_\infty \leq 1$, nous avons :

$$|\nu(f T^t g) - \nu(f) \mu_{\text{inv}}(g)| \leq C \sigma^t, \quad (1.17)$$

parce que la mesure $\tilde{\nu}(g) = \nu(f g) - \nu(f) \mu_{\text{inv}}(g)$ est une mesure signée de masse nulle à laquelle nous pouvons appliquer le Corollaire 1.5.

Dès lors, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu [\varphi(X_{t_1}) \varphi(X_{t_2}) \varphi(X_{t_3}) \varphi(X_{t_4})] &= \mu (T^{t_1} \varphi T^{t_2} \varphi T^{t_3} \varphi T^{t_4} \varphi) \\ &= T^{t_1} \mu (\varphi T^{t_2-t_1} \varphi T^{t_3-t_1} (\varphi T^{t_4-t_3} \varphi)), \end{aligned}$$

et, appliquant (1.17) à $f = \varphi T^{t_2-t_1} \varphi$, $g = \varphi T^{t_4-t_3} \varphi$ et $t = t_3 - t_1$, nous voyons que :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_\mu [\varphi(X_{t_1}) \varphi(X_{t_2}) \varphi(X_{t_3}) \varphi(X_{t_4})]| \\ \leq |T^{t_1} \mu (\varphi T^{t_2-t_1} \varphi) \mu_{\text{inv}} (\varphi T^{t_4-t_3} \varphi)| + C \sigma^{t_3-t_1}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Puis, appliquant à nouveau (1.17) à $\varphi T^{t_2-t_1} \varphi$ et $\varphi T^{t_4-t_3} \varphi$ et utilisant l'hypothèse que $\mu_{\text{inv}}(\varphi) = 0$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} |T^{t_1} \mu (\varphi T^{t_2-t_1} \varphi)| &\leq C \sigma^{t_2-t_1} \\ |\mu_{\text{inv}} (\varphi T^{t_4-t_3} \varphi)| &\leq C \sigma^{t_4-t_3} \end{aligned}$$

Dès lors, (1.18) devient :

$$|\mathbb{E}_\mu [\varphi(X_{t_1}) \varphi(X_{t_2}) \varphi(X_{t_3}) \varphi(X_{t_4})]| \leq C (\sigma^{t_2-t_1} \sigma^{t_4-t_3} + \sigma^{t_3-t_1}). \quad \blacksquare$$

Démonstration du Théorème 1.6:

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\mu_{\text{inv}}(\varphi) = 0$. Alors, utili-

sant l'inégalité de Markov [25, p. 318], nous voyons que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\mu \left[\left| \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(X_t) \right| > \epsilon \right] \\
& \leq \frac{1}{\epsilon^4 (n+1)^4} \sum_{t_1=0}^n \sum_{t_2=0}^n \sum_{t_3=0}^n \sum_{t_4=0}^n \mathbb{E}_\mu [\varphi(X_{t_1}) \varphi(X_{t_2}) \varphi(X_{t_3}) \varphi(X_{t_4})] \\
& \leq \frac{4!}{\epsilon^4 (n+1)^4} \sum_{t_1=0}^n \sum_{t_2=t_1}^n \sum_{t_3=t_2}^n \sum_{t_4=t_3}^n \mathbb{E}_\mu [\varphi(X_{t_1}) \varphi(X_{t_2}) \varphi(X_{t_3}) \varphi(X_{t_4})].
\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 1.7, nous voyons que, pour une certaine constante $C > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\mu \left[\left| \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(X_t) \right| > \epsilon \right] \\
& \leq \frac{C 4!}{\epsilon^4 (n+1)^4} \sum_{t_1=0}^n \sum_{t_2=t_1}^n \sum_{t_3=t_2}^n \sum_{t_4=t_3}^n (\sigma^{t_2-t_1} \sigma^{t_4-t_3} + \sigma^{t_3-t_1}) \\
& \leq \frac{C 4!}{\epsilon^4 (n+1)^4} \frac{2(n+1)^2}{1-\sigma} \leq \frac{1}{\epsilon^4 (n+1)^2} \frac{48 C}{1-\sigma}. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Pour un certain $\alpha < \frac{1}{4}$, considérons alors l'évènement A_n :

$$A_n = \left\{ \left| \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(X_t) \right| > \frac{1}{n^\alpha} \right\}.$$

Nous constatons que, si $\alpha < \frac{1}{4}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_\mu [A_n] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{4\alpha}}{(n+1)^2} \frac{48 C}{1-\sigma} < \infty, \tag{1.20}$$

et nous pouvons dès lors invoquer le lemme de Borel-Cantelli [25, p. 320] pour affirmer que :

$$\mathbb{P}_\mu \left[\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right] = 0.$$

Finalement, puisque

$$\begin{aligned} X \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) &= \left\{ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \left| \frac{1}{m+1} \sum_{t=0}^m \varphi(X_t) \right| \leq \frac{1}{m^\alpha} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(X_t) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

nous avons donc prouvé que :

$$\mathbb{P}_\mu \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(X_t) = 0 \right] = 1. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons donc conclure que, si un automate cellulaire probabiliste possède un trou spectral, son comportement asymptotique est particulièrement simple puisque, partant de n'importe quelle mesure initiale, nous allons toujours converger vers la même mesure invariante μ_{inv} .

1.4 Transitions de phase

Nous avons vu que le théorème de Perron-Frobenius impliquait l'existence d'un trou spectral pour une matrice de transfert irréductible et apériodique, et de là, nous en avons déduit que toutes les mesures de probabilités convergent vers une unique mesure de probabilité invariante. Cependant, si nous faisons d'une manière ou d'une autre tendre la dimension du réseau vers l'infini, nous voyons que rien n'empêche a priori la seconde plus grande valeur propre λ_2 de tendre vers le cercle unité et de refermer le trou spectral. A cette valeur propre qui tend vers le cercle unité, nous pouvons alors faire correspondre une seconde mesure invariante.

Nous verrons au chapitre suivant qu'en général, un tel phénomène ne se produit pas pour des systèmes faiblement couplés. Dès lors, si pour n'importe quelle valeur du couplage, un système possède une unique mesure invariante en dimension finie, et si en dimension infinie, il existe une unique mesure invariante à faible couplage, et plusieurs mesures invariantes à fort couplage, nous dirons que le système subit une transition de phase.

En ce qui concerne les transitions de phase pour les automates cellulaires probabilistes sur le réseau $\mathbb{Z}$, il existe cependant une conjecture (énoncée dans [42]) qui affirme que, si les probabilités de transitions locales sont non-dégénérées, dans le sens où :

- les probabilités de transitions ne dépendent que d'un nombre fini de variables,
- $p(\omega_x|\xi) > 0$ pour tout $\omega_x \in S$,

alors, l'automate cellulaire probabiliste engendré par ces probabilités de transitions ne subira pas de transition de phase. Cette conjecture est appelée la conjecture des taux positifs, et est inspirée d'un résultat analogue en mécanique statistique qui affirme que, sous certaines hypothèses, il n'existe pas de transitions de phase pour les systèmes de spins en dimension une (voir par exemple [14]). Cette conjecture semble néanmoins fausse, parce qu'il lui a été trouvé des contre-exemples [21], même si le statut de ces contre-exemples est encore sujet à controverse [43, 60].

Néanmoins, ces contre-exemples font intervenir des interactions compliquées et si nous désirons nous intéresser aux transitions de phase en dimension une, nous devons soit considérer des interactions compliquées, soit considérer des modèles qui ne satisfont pas aux hypothèses naturelles de la conjecture des taux positifs.

Si nous choisissons de nous restreindre aux modèles qui ne satisfont pas aux hypothèses de la conjecture des taux positifs, le modèle le plus simple qu'on puisse considérer en dimension une est **le modèle de Stavskaya**. Ce modèle a été introduit en 1973 par la mathématicienne russe O. N. Stavskaya [58]. Soit l'espace de configuration $X = \{-1, 1\}^{\{1, \dots, N\}}$, et les probabilités de transitions données par :

$$p_x(\omega_x|\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_x, \eta_{x+1} > 0 \text{ et } \omega_x > 0 \\ 0 & \text{si } \eta_x, \eta_{x+1} > 0 \text{ et } \omega_x < 0 \\ 1 - \epsilon & \text{si } \eta_x < 0 \text{ ou } \eta_{x+1} < 0, \text{ et } \omega_x < 0 \\ \epsilon & \text{si } \eta_x < 0 \text{ ou } \eta_{x+1} < 0, \text{ et } \omega_x > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Avec ces probabilités de transition, nous voyons que, si η_x et η_{x+1} sont tous les deux positifs, η_x restera positif avec une probabilité 1. Et inversement, si η_x ou η_{x+1} est négatif, η_x deviendra négatif avec une probabilité $1 - \epsilon$. Si ϵ est proche

de 1, le système sera considéré comme faiblement couplé, parce que, pour toute valeur possible de ω_x , η_x et η_{x+1} , nous avons :

$$|p_x(\omega_x|\eta_x, \eta_{x+1}) - p_x(\omega_x|\eta_x, -\eta_{x+1})| \leq 1 - \epsilon, \quad (1.22)$$

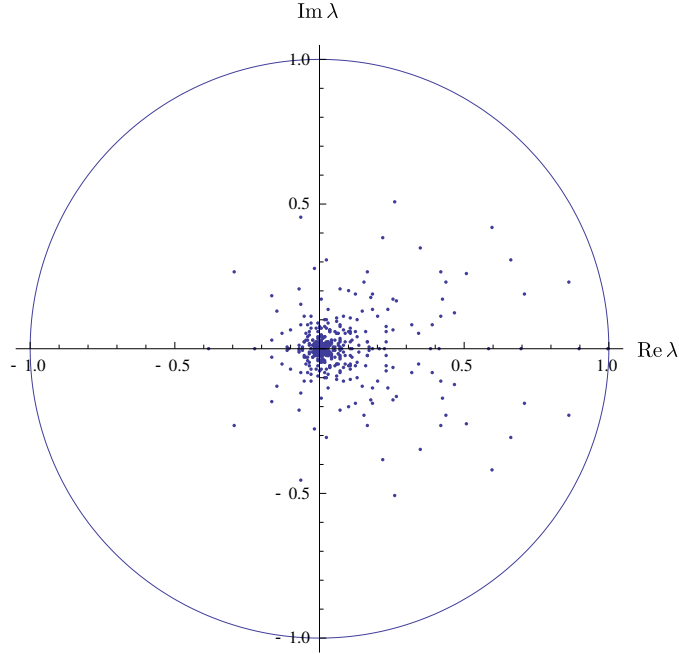
ce qui montre que quand ϵ est proche de 1, la valeur de η_{x+1} aura une influence très faible sur les probabilités de transition. Et inversement, si ϵ est proche de 0, le système sera bien sûr fortement couplé, parce que la valeur de η_{x+1} pourra avoir un effet important sur les probabilités de transition.

Ce modèle est assez particulier dans le sens où, contrairement à la règle de la majorité par exemple, il possède un état qui est gelé : si le système est initialement dans l'état $\omega^{(+)}$, défini par $\omega_x^{(+)} = +1$ pour tout $x \in \Lambda$, il restera dans cet état, pour n'importe quelle valeur de $\epsilon \in (0, 1)$. Donc, une mesure concentrée sur cet état $\omega^{(+)}$ est évidemment invariante. Examinons maintenant la matrice associée à l'opérateur de transfert, en supposant que l'état $\omega^{(+)}$ soit associé au premier vecteur de base de $\mathbb{C}^{|\Lambda|}$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ a_2 & \\ \dots & A \\ a_N & \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Tous les a_k sont des nombres bornés inférieurement par ϵ^N et supérieurement par ϵ parce que partant de n'importe quelle configuration, il est toujours possible de passer en une itération à la configuration $\omega^{(+)}$ en payant le prix d'une erreur d'au moins ϵ et d'au plus ϵ^N . La matrice A est une matrice $(2^N - 1) \times (2^N - 1)$ non-négative, et le fait que la matrice T soit stochastique implique que $\sum_k A_{kl} < 1 - \epsilon^N$. Nous voyons immédiatement que toute puissance de T aura sa première ligne donnée par $(1, 0, \dots, 0)$ et qu'il est donc impossible que la matrice T soit apériodique ou même irréductible.

Néanmoins, le théorème de Perron-Frobenius peut nous apporter l'existence d'un trou spectral. En effet, la matrice A est irréductible et apériodique, parce que, en un temps N , il est possible de passer de n'importe quel état autre que $\omega^{(+)}$ à n'importe quel autre état. En appliquant le théorème de Perron-Frobenius, on peut alors prouver que tout le spectre de A est contenu dans un cercle de rayon $\sum_k A_{kl} < 1 - \epsilon^N$. Vu que toute valeur propre de A est égale-

FIG. 1.1 – Spectre de la matrice T pour $N = 12$ et $\epsilon = 0.3$.

ment une valeur propre de T , nous avons donc trouvé les 2^N valeurs propres de T : la valeur propre 1, et les $2^N - 1$ valeurs propres de A qui sont contenues dans un cercle de rayon $1 - \epsilon^N$. Nous avons donc un trou spectral borné inférieurement par ϵ^N . A titre d'exemple, nous avons calculé numériquement le spectre de la matrice T pour $N = 12$ et $\epsilon = 0.3$ dans la figure 1.1. Nous pouvons donc appliquer le Théorème 1.4 et le Théorème 1.6 pour montrer que la mesure concentrée sur $\omega^{(+)}$ est l'unique mesure invariante et qu'elle décrit le comportement asymptotique du système.

Nous prouverons dans les deux chapitres suivants l'existence d'une transition de phase de façon rigoureuse, et nous nous contenterons de donner ici un argument numérique qui laisserait à penser que, dans la limite où N tend vers l'infini, le trou spectral se referme. Pour cela, nous allons calculer explicitement le spectre de la matrice de transfert pour différentes valeurs de la taille du réseau, pour différentes valeurs du paramètre ϵ . Dans la figure 1.2, nous avons reporté la valeur de la seconde plus grande valeur propre λ_2 en fonction de la taille du réseau N , pour $\epsilon = 0.3$ et $\epsilon = 0.7$. Nous constatons que dans le premier

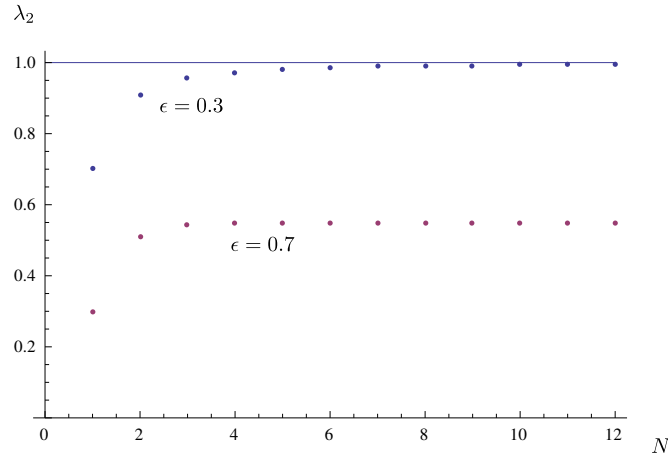


FIG. 1.2 – Seconde plus grande valeur propre λ_2 pour le modèle de Stavskaya en fonction de la taille du réseau N .

cas, la seconde valeur propre tend très rapidement vers 1 dans la limite où N tend vers l'infini, et que ce n'est visiblement pas le cas pour $\epsilon = 0.7$.

CHAPITRE 2

Faible couplage et unicité de la mesure invariante

Au cours de ce chapitre, nous démontrerons que tout automate cellulaire probabiliste possède au moins une mesure invariante. Ensuite, nous énoncerons un critère, appelé critère de Dobrushin, permettant de garantir l'unicité de la mesure invariante et nous verrons que ce critère implique la convergence exponentielle de toute mesure vers la mesure d'équilibre. Finalement, nous démontrerons qu'une généralisation du modèle de Stavskaya vérifie ce critère de Dobrushin à faible couplage et nous montrerons que la convergence exponentielle à l'équilibre implique la décroissance exponentielle des corrélations.

2.1 Existence d'une mesure invariante

Considérons un automate cellulaire probabiliste sur $X = S^\Lambda$, où S est un ensemble fini et $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ un réseau. L'existence d'une mesure invariante découlera d'un argument de compacité très général.

Nous remarquons tout d'abord que $\mathcal{C}(X)$, l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles, équipé de la norme $|\cdot|_\infty$ est un espace de Banach. Et si nous définissons la norme suivante sur l'ensemble des mesures signées sur X ,

$$|\mu| = \sup\{\mu(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}(X), |\varphi|_\infty \leq 1\}, \quad (2.1)$$

nous pouvons constater que $\mathcal{M}(X)$, l'ensemble des mesures de Borel signées telles que $|\mu| < \infty$, est également un espace de Banach.

Le théorème de représentation de Riesz-Markov [1, Ch. 14] nous montre que $\mathcal{M}(X)$ est le dual de $\mathcal{C}(X)$.

□ **Théorème 2.1** (Théorème de Représentation de Riesz-Markov) :

Soit X un espace Hausdorff compact. Alors, pour toute forme linéaire continue l sur $\mathcal{C}(X)$, il existe une unique mesure signée $\mu \in \mathcal{M}(X)$ telle que :

$$l(\varphi) = \int \varphi \, d\mu.$$

Nous pouvons dès lors définir deux notions de convergence sur $\mathcal{C}(X)$. La première est la **convergence en norme** qui utilise le fait que $\mathcal{C}(X)$ dispose d'une norme : nous dirons qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ converge en norme vers φ si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n - \varphi|_\infty = 0$. La seconde notion de convergence va utiliser le fait que $\mathcal{M}(X)$ est le dual de $\mathcal{C}(X)$ et est appelée **convergence faible** : on dit qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ converge faiblement vers φ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi_n) = \mu(\varphi)$ pour toute mesure signée $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Nous pouvons vérifier que la convergence en norme implique la convergence faible parce que si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n - \varphi|_\infty = 0$, alors, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(\varphi_n) - \mu(\varphi)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu| |\varphi_n - \varphi|_\infty = 0.$$

En revanche, l'inverse n'est pas vrai. Si on considère que $X = \{-1, 1\}^\mathbb{Z}$, et qu'on choisit comme suite de fonctions φ_n :

$$\varphi_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_p = 1 \, \forall p : |p| \leq n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous constatons que la suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ n'admet pas de limite au sens de la convergence forte, mais que au sens de la convergence faible, $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ va converger vers la fonction φ :

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_p = 1 \ \forall p \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Considérons maintenant $\mathcal{M}(X)$. Etant donné que $\mathcal{M}(X)$ est équipé d'une norme, nous pouvons définir une convergence en norme : la suite $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ converge en norme vers μ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n - \mu\| = 0$. Et de façon similaire à la notion de convergence faible sur $\mathcal{C}(X)$, nous pouvons dire que la suite $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ converge faiblement vers μ si $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\mu_n) = l(\mu)$ pour toute fonctionnelle linéaire $l : \mathcal{M}(X) \mapsto \mathbb{R}$.

Nous pouvons également considérer une notion de convergence encore plus faible que la convergence faible. En effet, nous savons que le dual de $\mathcal{C}(X)$ est $\mathcal{M}(X)$ et donc le dual de $\mathcal{M}(X)$ contient une partie isomorphe à $\mathcal{C}(X)$, parce que pour toute fonction continue φ , $l(\mu) = \int \varphi d\mu$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{M}(X)$. Donc, au lieu de considérer toutes les fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{M}(X)$, nous pouvons nous restreindre aux fonctionnelles linéaires de la forme $l(\mu) = \int \varphi d\mu$. Cette notion de convergence est appelée la **convergence faible étoilée** : nous dirons que la suite $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ converge $\star$ -faiblement vers μ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\varphi) = \mu(\varphi)$ pour toute fonction continue φ . Le théorème de Banach-Alaoglu [51, p. 115] énonce alors une propriété importante de la topologie faible étoilée dans le cadre des espaces de Banach :

□ **Théorème 2.2** (Théorème de Banach-Alaoglu) :

La boule unité du dual d'un espace de Banach est compacte dans la topologie faible étoilée.

Le théorème de Stone-Weierstrass implique que $\mathcal{C}(X)$ est séparable. Dès lors, $\mathcal{M}(X)$ est le dual d'un espace séparable, il est donc métrisable et nous pouvons déduire du théorème de Banach-Alaoglu que si $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ est une suite telle que $|\mu_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe une sous-suite de $\{\mu_n\}$ qui converge $\star$ -faiblement vers un élément μ de $\mathcal{M}(X)$.

Considérons maintenant une mesure de probabilité arbitraire μ , et T l'opérateur de transfert pour un certain automate cellulaire probabiliste. Puisque

μ est une mesure de probabilité, nous pouvons voir que $|\mu| = \mu(1) = 1$. Nous définissons alors la suite de mesures μ_n :

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k \mu. \quad (2.2)$$

Chaque μ_n est également une mesure de probabilité, et donc $|\mu_n| = 1$. Dès lors, le théorème de Banach-Alaoglu nous permet d'affirmer qu'il existe une sous-suite de $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ qui converge $\star$ -faiblement vers une mesure μ_{inv} . Cette mesure est une mesure de probabilité, et elle est invariante, parce que :

$$T\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^{k+1} \mu = \frac{1}{n+1} (T^{n+1} \mu - \mu) + \mu_n.$$

Et donc, pour n'importe quelle fonction continue φ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} |T\mu_{\text{inv}}(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |(T^{n+1} \mu(\varphi) - \mu(\varphi))| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (|T^{n+1} \mu| + |\mu|) |\varphi|_\infty \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 |\varphi|_\infty}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que l'argument que nous avons présenté ne garantit en aucune façon l'unicité de la mesure invariante puisque pour chaque mesure de probabilité et chaque choix de sous-suite convergente, nous pouvons potentiellement converger vers des mesures différentes.

2.2 Unicité de la mesure invariante

Pour prouver l'unicité de la mesure invariante, nous allons utiliser un argument initialement développé pour les réseaux de spins par Dobrushin [18], et plus tard étendu aux automates cellulaires probabilistes [19]. Nous en donnerons cependant ici une version plus proche de l'adaptation de cet argument aux réseaux d'applications couplées, réalisée par Keller et Liverani [38]. Nous commençons par considérer $<$, un bon ordre sur Λ , c'est-à-dire une relation d'ordre pour laquelle il existe un élément plus petit que tous les autres.

Nous pouvons alors définir l'opérateur $\Pi_x : \mathcal{C}(X) \mapsto \mathcal{C}(X)$, qui à toute fonction continue φ , fait correspondre

$$\Pi_x \varphi(\omega) = \varphi(\omega_{\leq x}, \eta_{> x}) - \varphi(\omega_{< x}, \eta_{\geq x}), \quad (2.3)$$

où η est un élément arbitraire de X . Alors, toute fonction φ admet le développement suivant :

$$\varphi(\omega) = \sum_{x \in \Lambda} \Pi_x \varphi(\omega) + \varphi(\eta). \quad (2.4)$$

Etant donné que $\mathcal{M}(X)$ est le dual de $\mathcal{C}(X)$, nous pouvons définir Π_x^* , l'adjoint de l'opérateur Π_x , caractérisé par $\Pi_x^* \mu(\varphi) = \mu(\Pi_x \varphi)$. Cependant, comme l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ n'est pas isomorphe à son dual, il n'est pas nécessaire d'introduire une notation pour distinguer Π_x de son adjoint Π_x^* , à partir du moment où il est clair que l'un agit sur des fonctions et l'autre sur des mesures. Avec un léger abus de notation, nous pouvons écrire Π_x^* sous la forme Π_x et nous avons donc $\Pi_x \mu(\varphi) = \mu(\Pi_x \varphi)$.

Maintenant, si pour tout $x \in \Lambda$, nous définissons :

$$\mathcal{M}_x = \{ \mu \in \mathcal{M} \mid \mu(\varphi) = 0 \text{ si } \varphi \text{ est indépendant de } \omega_x \}, \quad (2.5)$$

nous pouvons voir que Π_x est un projecteur de $\mathcal{M}(X)$ dans $\mathcal{M}_x$, parce que, si φ est indépendante de la variable au site x , $\Pi_x \varphi$ est identiquement nul. Si nous intégrons le développement de (2.4) par rapport à une mesure μ , nous trouvons :

$$\mu(\varphi) = \sum_{x \in \Lambda} \Pi_x \mu(\varphi) + \varphi(\eta) \mu(1). \quad (2.6)$$

Et donc, si μ est une mesure de masse nulle, nous avons $\mu(1) = 0$, et :

$$\mu = \sum_{x \in \Lambda} \Pi_x \mu. \quad (2.7)$$

Pour n'importe quel $a \in S$, et pour tout x et y dans Λ , nous pouvons alors définir la fonction Δp_{yx} :

$$\Delta p_{yx}(\xi_y|\omega) = p(\xi_y|\omega) - p(\xi_y|\omega_{\neq x}, a), \quad (2.8)$$

et la fonction $\delta_{yx}(a)$ telle que :

$$\delta_{yx}(a) = \sup_{\omega \in X} \sum_{\xi_y \in S} |\Delta p_{yx}(\xi|\omega)|. \quad (2.9)$$

Ensuite, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

□ **Théorème 2.3** (Critère de Dobrushin) :

Supposons qu'il existe un $a \in S$ tel que les probabilités de transition d'un automate cellulaire probabiliste vérifient :

$$\sigma \equiv \sup_y \sum_{x \in \Lambda} \delta_{yx}(a) < 1,$$

alors, pour toute fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans un certain $\Omega \subset \Lambda$, et pour toute mesure signée de masse nulle $\mu \in \mathcal{M}(X)$, nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi)| \leq 2 |\Omega| \sigma^n |\mu| |\varphi|_{\mathcal{O}}.$$

Démonstration:

Commençons par considérer une mesure μ_x appartenant à $\mathcal{M}_x$. Nous constatons immédiatement que, même si μ_x appartient à $\mathcal{M}_x$, $T\mu_x$ n'est plus nécessairement dans le même ensemble $\mathcal{M}_x$ parce que $T\varphi$ peut dépendre de la variable au site x via les sites dont la probabilité de mise à jour dépendra de cette variable.

Prenant alors la valeur de $a \in S$ donnée dans la définition des σ , nous voyons que :

$$\int d\xi \prod_{z \in \Lambda} p(\xi_z|\omega_{\neq x}, a) \varphi(\xi)$$

est indépendant de ω_x , et donc, μ_x appartenant à $\mathcal{M}_x$:

$$\begin{aligned} T\mu_x(\varphi) &= \int d\omega \int d\xi \mu_x(\omega) \prod_{z \in \Lambda} p(\xi_z | \omega) \varphi(\xi) \\ &= \int d\omega \int d\xi \mu_x(\omega) \left(\prod_{z \in \Lambda} p(\xi_z | \omega) - \prod_{z \in \Lambda} p(\xi_z | \omega_{\neq x}, a) \right) \varphi(\xi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Alors, utilisant l'identité :

$$\begin{aligned} &\prod_{z \in \Lambda} p(\xi_z | \omega) - \prod_{z \in \Lambda} p(\xi_z | \omega_{\neq x}, a) \\ &= \sum_{y \in \Lambda} \prod_{z < y} p(\xi_z | \omega) \Delta p_{yx}(\xi_y | \omega) \prod_{z > y} p(\xi_z | \omega_{\neq x}, a), \end{aligned}$$

nous pouvons réécrire l'équation (2.10) sous la forme d'une somme :

$$\begin{aligned} T\mu_x(\varphi) &= \sum_{y \in \Lambda} \int d\omega \int d\xi \mu_x(\omega) \prod_{z < y} p(\xi_z | \omega) \Delta p_{yx}(\xi_y | \omega) \\ &\quad \prod_{z > y} p(\xi_z | \omega_{\neq x}, a) \varphi(\xi) \\ &= \sum_{y \in \Lambda} T^{(yx)} \mu_x(\varphi), \end{aligned} \quad (2.11)$$

où, pour toute mesure ν et toute fonction continue ψ , nous avons introduit l'opérateur $T^{(yx)}$:

$$\begin{aligned} T^{(yx)} \nu(\psi) &= \int d\omega \int d\xi \nu(\omega) \prod_{z < y} p(\xi_z | \omega) \Delta p_{yx}(\xi_y | \omega) \\ &\quad \prod_{z > y} p(\xi_z | \omega_{\neq x}, a) \psi(\xi). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous constatons que $T^{(yx)}$ est un opérateur à valeur dans $\mathcal{M}_y$, parce que, si ψ est indépendant de ξ_y ,

$$\begin{aligned} T^{(yx)} \nu(\psi) &= \int d\omega \int d\xi_{\neq y} \nu(\omega) \prod_{z < y} p(\xi_z | \omega) \prod_{z > y} p(\xi_z | \omega_{\neq x}, a) \psi(\xi) \\ &\quad \sum_{\xi_y} \Delta p_{yx}(\xi_y | \omega) \end{aligned}$$

est identiquement nul car $\sum_{\xi_y} \Delta p_{yx}(\xi_y|\omega) = 0$. De plus, la norme de l'opérateur $T^{(yx)}$ est bornée par $\delta_{yx}(a)$ parce que :

$$\begin{aligned}
T^{(yx)}\nu(\psi) &= \int d\omega \int d\xi_{\neq y} \nu(\omega) \prod_{z < y} p(\xi_z|\omega) \prod_{z > y \in \mathbb{Z}} p(\xi_z|\omega_{\neq x}, a) \psi(\xi) \\
&\quad \sum_{\xi_y} \Delta p_{yx}(\xi_y|\omega) \\
&\leq |\nu| |\psi|_{\infty} \sup_{\omega} \sum_{\xi_y} |\Delta p_{yx}(\xi_y|\omega)| \\
&\leq |\nu| |\psi|_{\infty} \delta_{yx}(a).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Considérons maintenant une mesure signée de masse nulle μ et une fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans Ω . Utilisant le développement de (2.7) et itérant (2.11), nous avons :

$$\begin{aligned}
T^n \mu(\varphi) &= \sum_{x_0 \in \Lambda} T^n \Pi_{0x_0} \mu(\varphi) \\
&= \sum_{x_n \in \Lambda} \dots \sum_{x_1 \in \Lambda} \sum_{x_0 \in \Lambda} T^{(x_n x_{n-1})} \dots T^{(x_1 x_0)} \Pi_{x_0} \mu(\varphi).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Etant donné que $T^{(x_n x_{n-1})} \dots T^{(x_1 x_0)} \Pi_{0x_0} \mu$ appartient à $\mathcal{M}_{x_n}$ et que la fonction φ ne dépend que des variables dans Ω , tous les termes de la somme en (2.14) avec $x_n \notin \Omega$ ne vont pas contribuer à la somme. La somme sur x_n se réduit donc aux x_n appartenant à Ω . Utilisant alors l'hypothèse que $\sigma \equiv \sup_y \sum_{x \in \Lambda} \delta_{yx}(a) < 1$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
|T^n \mu(\varphi)| &\leq \sum_{x_n \in \Omega} \sum_{x_{n-1} \in \Lambda} \dots \sum_{x_0 \in \Lambda} \delta_{x_n x_{n-1}}(a) \dots \delta_{x_1 x_0}(a) |\Pi_{x_0} \mu| |\varphi|_{\infty} \\
&\leq |\Omega| \sigma^n |\Pi_{x_0} \mu| |\varphi|_{\infty} \\
&\leq 2 |\Omega| \sigma^n |\mu| |\varphi|_{\infty}.
\end{aligned} \quad \blacksquare$$

Le critère de Dobrushin nous permet de prouver l'unicité de la mesure invariante :

□ **Corollaire 2.4 :**

Supposons que les probabilités de transition d'un automate cellulaire probabi-

liste vérifient les hypothèses du Théorème 2.3. Alors, cet automate cellulaire probabiliste possède une unique mesure de probabilité invariante.

Démonstration:

Nous avons déjà démontré qu'il existait au moins une mesure de probabilité invariante. Reste donc à démontrer l'unicité de cette mesure. Soient alors μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité invariantes, et soit φ une fonction continue sur X . Nous avons vu que le théorème de Stone-Weierstrass (Théorème 1.1, p. 4) impliquait que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue φ_ϵ dépendant uniquement des variables dans un certain Λ_ϵ fini telle que $|\varphi - \varphi_\epsilon|_\infty \leq \epsilon$.

Puisque μ_1 et μ_2 sont invariantes sous T , nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| &\leq |\mu_1(\varphi_\epsilon) - \mu_2(\varphi_\epsilon)| + |\mu_1 - \mu_2| |\varphi - \varphi_\epsilon|_\infty \\ &\leq |T^n \mu_1(\varphi_\epsilon) - T^n \mu_2(\varphi_\epsilon)| + 2 \epsilon. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer le Théorème 2.3 à la mesure signée de masse nulle $\mu_1 - \mu_2$.

$$\begin{aligned} |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| &\leq 2 |\Lambda_\epsilon| \sigma^n |\mu_1 - \mu_2| |\varphi_\epsilon| + 2 \epsilon \\ &\leq 4 |\Lambda_\epsilon| \sigma^n (|\varphi| + \epsilon) + 2 \epsilon. \end{aligned}$$

En faisant d'abord tendre n vers l'infini puis en prenant des ϵ arbitrairement petits, nous voyons que $\mu_1(\varphi) = \mu_2(\varphi)$ pour toute fonction continue φ , ce qui implique que $\mu_1 = \mu_2$ dans $\mathcal{M}(X)$. ■

Nous pouvons également prouver que cela implique la convergence exponentielle vers l'équilibre des observables ne dépendant que d'un nombre fini de variables :

□ **Corollaire 2.5 :**

Supposons que les probabilités de transition d'un automate cellulaire probabiliste vérifient les hypothèses du Théorème 2.3 pour un certain $\sigma < 1$ et supposons que μ_{inv} soit l'unique mesure de probabilité invariante. Alors, si φ est une fonction continue ne dépendant que d'un nombre fini de variables dans un certain ensemble $\Omega \subset \Lambda$, et si μ est une mesure de probabilité dans $\mathcal{M}(X)$, nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| \leq 4 |\Omega| \sigma^n |\varphi|_\infty.$$

Démonstration:

Il suffit d'appliquer le Théorème 2.3 à la mesure signée $\mu - \mu_{\text{inv}}$:

$$\begin{aligned} |T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| &= |T^n(\mu - \mu_{\text{inv}})(\varphi)| \\ &\leq 2 \left| \Lambda' \right| \sigma^n |\mu - \mu_{\text{inv}}| |\varphi|_{\infty} \\ &\leq 4 \left| \Lambda' \right| \sigma^n |\varphi|_{\infty} . \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nous remarquons évidemment que, si le réseau Λ est fini, nous pouvons toujours évidemment borner $|\Omega|$ par $|\Lambda|$. Dans ce cas, nous voyons que, pour toute fonction continue φ , nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}(\varphi)| \leq 4 \left| \Lambda \right| \sigma^n |\varphi|_{\infty} ,$$

et cela implique une convergence en norme exponentiellement rapide :

$$|T^n \mu - \mu_{\text{inv}}| \leq 4 \left| \Lambda \right| \sigma^n .$$

Si le réseau Λ est infini, nous ne pouvons avoir la convergence exponentiellement rapide que pour des observables ne dépendant que d'un nombre fini de variables. Cela impliquera la convergence faible mais pas la convergence en norme.

2.3 Modèle de Stavskaya étendu

Nous allons maintenant considérer plus en détail une généralisation du modèle de Stavskaya. L'idée générale que nous voulons mettre en oeuvre est la suivante : nous allons considérer que la dynamique totale est la composition de deux dynamiques. Dans un premier temps, nous appliquons une dynamique globale au système, et cette dynamique est similaire à celle de l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya. Ensuite, nous appliquons une dynamique locale qui n'agit que sur chaque site du réseau, indépendamment des autres, et qui possède de bonnes propriétés de convergence à l'équilibre.

Pour cela, nous prenons $S = \{-N, \dots, -1, 1, \dots, N\}$ et $X = S^{\mathbb{Z}}$ comme espace de configuration. Nous dirons alors que les probabilités de transition

$p(\xi_x|\omega_x, \omega_{x+1})$ décrivent un **modèle de Stavksaya étendu** si :

$$p(\xi_x|\omega_x, \omega_{x+1}) = \sum_{\eta_x = \pm \omega_x} \tau(\xi_x|\eta_x) \Phi_\epsilon(\eta_x|\omega_x, \omega_{x+1}), \quad (2.15)$$

où Φ_ϵ est une dynamique couplée décrite par :

$$\Phi_\epsilon(\xi_x|\omega_x, \omega_{x+1}) = p_{\text{stavsk}}(\text{sign } \xi_x|\text{sign } \omega_x, \text{sign } \omega_{x+1}), \quad (2.16)$$

avec p_{stavsk} les probabilités de transition pour l'automate cellulaire de Stavskaya décrites en (1.21), et où τ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\omega_x \xi_x < 0 \Rightarrow \tau(\xi_x|\omega_x) = 0 \quad , \quad (2.17)$$

$$\omega_x \omega'_x > 0 \Rightarrow \sum_{\xi_x} |\tau(\xi_x|\omega_x) - \tau(\xi_x|\omega'_x)| \leq \alpha, \quad (2.18)$$

pour un certain $\alpha < 1$.

Cette définition nécessite quelques remarques. Tout d'abord, le cas de l'automate cellulaire de Stavskaya est retrouvé en choisissant $N = 1$, et dans ce cas, nous avons nécessairement $\alpha = 0$. Ensuite, étant donné que τ préserve les signes, nous voyons que l'évolution sous Φ_ϵ des signes des composantes d'un élément de X va suivre un comportement similaire à l'automate cellulaire de Stavskaya. Finalement, la seconde hypothèse est l'équivalent du critère de Dobrushin pour la dynamique restreinte τ à $\{-N, \dots, -1\}$ ou à $\{1, \dots, N\}$. Elle implique dès lors l'existence de deux mesures invariantes pour τ sur S : $h_{\text{inv}}^{(+)}$, concentrée sur $\{1, \dots, N\}$, et $h_{\text{inv}}^{(-)}$, concentrée sur $\{-N, \dots, -1\}$.

Il est alors aisé de constater que, pour n'importe quelle valeur de ϵ , la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ sur X , définie par :

$$\mu_{\text{inv}}^{(+)}(\omega) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} h_{\text{inv}}^{(+)}(\omega_p), \quad (2.19)$$

est une mesure invariante pour l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya étendu. Nous pouvons vérifier que si α est suffisamment petit et si ϵ est suffisamment proche de 1, alors $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ est l'unique mesure invariante.

□ **Proposition 2.6 :**

Supposons que $\alpha < 1$ et que $\epsilon > \frac{3}{4-\alpha}$. Alors le modèle de Stavskaya étendu vérifie le critère de Dobrushin, avec $\sigma = 4(1-\epsilon) + \epsilon\alpha$, et :

- L'automate cellulaire probabiliste possède une unique mesure de probabilité invariante $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ définie en (2.19).
- Pour toute mesure de probabilité μ , et pour toute fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans un certain $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)| \leq 4|\Lambda| \sigma^n |\varphi|_{\infty}.$$

Démonstration:

Commençons par fixer un certain $a \in \{1, \dots, N\}$ et calculons les fonctions $\Delta p_{xy}(\xi_x | \omega)$ intervenant dans la définition de σ . Etant donné qu'un site n'interagit qu'avec lui-même et son voisin de droite, nous voyons que pour $y \neq x, x+1$,

$$p(\xi_x | \omega) = p(\xi_x | \omega_{\neq y}, a),$$

et donc que $\Delta p_{xy}(\xi_x | \omega)$ est identiquement nul pour $y \neq x, x+1$.

A présent, si $y = x$, (2.15) implique que :

$$\begin{aligned} \Delta p_{xx}(\xi_x | \omega) &= \sum_{\eta_x = \pm \omega_x} \tau(\xi_x | \eta_x) \Phi_{\epsilon}(\eta_x | \omega_x, \omega_{x+1}) \\ &\quad - \sum_{\eta_x = \pm a} \tau(\xi_x | \eta_x) \Phi_{\epsilon}(\eta_x | a, \omega_{x+1}) \end{aligned}$$

Dès lors :

- Si $\omega_x > 0$ et si $\omega_{x+1} > 0$, la règle de Stavskaya implique qu'avec probabilité 1, $\eta_x = \omega_x$ dans la première somme, et $\eta_x = a$ dans la seconde somme. Donc, $\Delta p_{xx}(\xi_x | \omega)$ devient :

$$\Delta p_{xx}(\xi_x | \omega) = \tau(\xi_x | \omega_x) - \tau(\xi_x | a). \quad (2.20)$$

– Si $\omega_{x+1} < 0$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\Delta p_{xx}(\xi_x|\omega) &= (1 - \epsilon) \tau(\xi_x| - |\omega_x|) + \epsilon \tau(\xi_x| |\omega_x|) \\ &\quad - (1 - \epsilon) \tau(\xi_x| - a) - \epsilon \tau(\xi_x| a) \\ &= (1 - \epsilon) (\tau(\xi_x| - |\omega_x|) - \tau(\xi_x| - a)) \\ &\quad + \epsilon (\tau(\xi_x| |\omega_x|) - \tau(\xi_x| a)).\end{aligned}\tag{2.21}$$

– Finalement, si $\omega_x < 0$ et $\omega_{x+1} > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta p_{xx}(\xi_x|\omega) &= (1 - \epsilon) \tau(\xi_x|\omega_x) + \epsilon \tau(\xi_x| - \omega_x) - \tau(\xi_x| a) \\ &= (1 - \epsilon) (\tau(\xi_x|\omega_x) - \tau(\xi_x| a)) \\ &\quad + \epsilon (\tau(\xi_x| - \omega_x) - \tau(\xi_x| a)).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Avec les équations (2.20), (2.21) et (2.22), nous pouvons calculer le facteur δ_{xx} . En effet, utilisant (2.18) :

$$\sum_{\xi_x} \Delta p_{xx}(\xi_x|\omega) \leq \begin{cases} \alpha & \text{si } \omega_x > 0 \text{ et si } \omega_{x+1} > 0. \\ (1 - \epsilon) \alpha + \epsilon \alpha & \text{si } \omega_{x+1} < 0. \\ 2 (1 - \epsilon) + \epsilon \alpha & \text{si } \omega_x < 0 \text{ et si } \omega_{x+1} > 0. \end{cases}$$

Et, étant donné que $\alpha \leq 2$, nous avons $2 (1 - \epsilon) + \epsilon \alpha \geq \alpha$, et donc :

$$\delta_{xx} = \sup_{\omega \in X} \sum_{\xi_x} \Delta p_{xx}(\xi_x|\omega) \leq 2 (1 - \epsilon) + \epsilon \alpha.\tag{2.23}$$

Pour $\Delta p_{xx+1}(\xi_x|\omega)$, nous pouvons reprendre le même raisonnement :

$$\Delta p_{xx+1}(\xi_x|\omega) = \sum_{\eta_x = \pm \omega_x} \tau(\xi_x|\eta_x) (\Phi_\epsilon(\eta_x|\omega_x, \omega_{x+1}) - \Phi_\epsilon(\eta_x|\omega_x, a)).$$

D'où

– Si $\omega_x > 0$ et si $\omega_{x+1} > 0$, ou si $\omega_x < 0$, la règle de Stavskaya implique que $\Phi_\epsilon(\eta_x|\omega_x, \omega_{x+1}) = \Phi_\epsilon(\eta_x|\omega_x, a)$, et donc :

$$\Delta p_{xx+1}(\xi_x|\omega) = 0.\tag{2.24}$$

– Si $\omega_x > 0$ et $\omega_{x+1} < 0$, nous trouvons :

$$\Delta p_{xx+1}(\xi_x|\boldsymbol{\omega}) = (1 - \epsilon) \tau(\xi_x|\omega_x) + \epsilon \tau(\xi_x| - \omega_x) - \tau(\xi_x|\omega_x) \quad (2.25)$$

D'où, reprenant (2.24) et (2.25) :

$$\delta_{xx+1} \leq 2(1 - \epsilon) \quad (2.26)$$

Reprenant le critère de Dobrushin et les inégalités (2.23) et (2.26), nous voyons donc que :

$$\sigma = \delta_{xx} + \delta_{xx+1} \leq 2(1 - \epsilon) + \epsilon \alpha + 2(1 - \epsilon) \leq \epsilon \alpha + 4(1 - \epsilon)$$

et nous pouvons garantir que le critère de Dobrushin ($\sigma < 1$) est vérifié tant que $\epsilon > \frac{3}{4-\alpha}$. Les deux affirmations suivantes sont les conséquences des Corollaires 2.4 et 2.5. ■

Nous avons donc démontré un premier aspect du phénomène de transition de phase : quand l'automate cellulaire probabiliste de Stavksaya modifié est faiblement couplé, il admet une unique mesure de probabilité invariante. Nous verrons au chapitre suivant que, si le système est fortement couplé, d'autres mesures invariantes apparaissent, comme cela avait été esquissé à la fin de la Section 1.4.

CHAPITRE 3

Fort couplage et transition de phase

Au cours du chapitre précédent, nous avons prouvé qu'à faible couplage, l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya étendu possède une unique mesure invariante. Dans ce chapitre, nous allons utiliser un argument dit de Peierls pour montrer qu'à fort couplage, nous ne pouvons plus garantir l'unicité de la mesure invariante et qu'il existe en fait plusieurs mesures invariantes. Nous verrons ensuite comment nous pouvons combiner l'argument de Peierls et la technique de découplage présentée à la Section 2.2 pour démontrer que toute une classe de mesures initiales converge exponentiellement vite vers la mesure invariante. Cette preuve sera la première partie véritablement originale de cette thèse.

Un argument de Peierls est une technique développée initialement pour des systèmes de spins de mécanique statistique [50]. Ce type d'argument a été largement utilisé dans le cas des automates cellulaires probabilistes, et en particulier pour le modèle de Stavskaya [20, 58], et le modèle de Toom [41, 59].

3.1 Construction des contours

Commençons par rappeler l'espace des configurations introduit à la Section 2.3. Soit $S = \{-N, \dots, -1, 1, \dots, N\}$ et $X = S^{\mathbb{Z}}$. Etant donné que les signes des variables locales vont jouer un rôle important, posons $S^{(+)} = \{1, \dots, N\}$ et $S^{(-)} = \{-N, \dots, -1\}$. Pour toute partie finie Λ de $\mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons alors $\mathcal{C}(\Lambda)$, l'ensemble des configurations spatio-temporelles possibles de $X^{\{0, \dots, n\}}$ pour lesquelles toutes les variables dans Λ sont positives au temps n . Explicitement :

$$\mathcal{C}(\Lambda) = \left\{ (\omega_t)_{t=0}^n \mid \forall x \in \Lambda : \omega_{n,x} \in S^{(+)} \right\}.$$

A partir de là, nous pouvons construire une fonction σ qui à toute configuration de $\mathcal{C}(\Lambda)$ fait correspondre un amas Γ en itérant les règles suivantes :

1. Au temps $t = n$, nous ajoutons tous les sites de Λ à Γ .
2. Ensuite, pour chaque temps t et par ordre de temps décroissant, si (x, t) appartient à Γ , et que $\omega_{t-1,x}$ et $\omega_{t-1,x+1}$ sont tous deux positifs, nous ajoutons les sites $(x, t-1)$ et $(x+1, t-1)$ à Γ .

Un exemple d'amas est donné à la Figure 3.1.

Soit $\mathcal{G}(\Lambda)$ l'image de $\mathcal{C}(\Lambda)$ à travers la fonction σ . En général, la fonction σ est non injective, puisqu'à un amas peuvent correspondre de nombreuses configurations. Nous pouvons dès à présent partitionner $\mathcal{C}(\Lambda)$ en des préimages

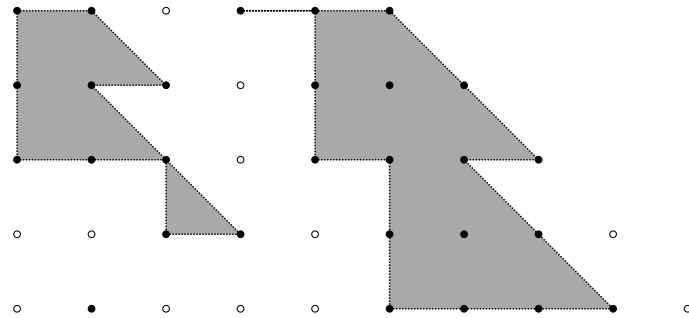


FIG. 3.1 – Exemple d'un amas Γ associé à une configuration spatio-temporelle. Les sites positifs sont représentés en noir, et les sites négatifs en blanc.

de chaque amas Γ de $\mathcal{G}(\Lambda)$.

$$\mathcal{C}(\Lambda) = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \sigma^{-1}\Gamma. \quad (3.1)$$

Les sites $(x, t) \in \Gamma$ tels que $(x, t-1) \notin \Gamma$ ou $(x+1, t-1) \notin \Gamma$ joueront un rôle particulier parce qu'ils correspondent à des événements peu probables par rapport à la règle de Stavskaya : pour toute configuration $(\omega_t)_{t=0}^n \in \sigma^{-1}\Gamma$, nous avons $p(\omega_{t,x} | \omega_{t-1,x}, \omega_{t-1,x+1}) \leq \epsilon$, sauf si $t = 0$ auquel cas nous aurons à spécifier certaines hypothèses sur la mesure initiale. C'est pourquoi, pour tout Γ dans $\mathcal{G}(\Lambda)$, nous définissons $\partial\Gamma$:

$$\partial\Gamma = \left\{ (x, t) \in \Gamma \mid t = 0 \text{ ou } (x, t-1) \notin \Gamma \text{ ou } (x+1, t-1) \notin \Gamma \right\}. \quad (3.2)$$

Pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$, nous définissons également $\partial\Gamma_t = \{x \mid (x, t) \in \partial\Gamma\}$, la restriction au temps t de $\partial\Gamma$.

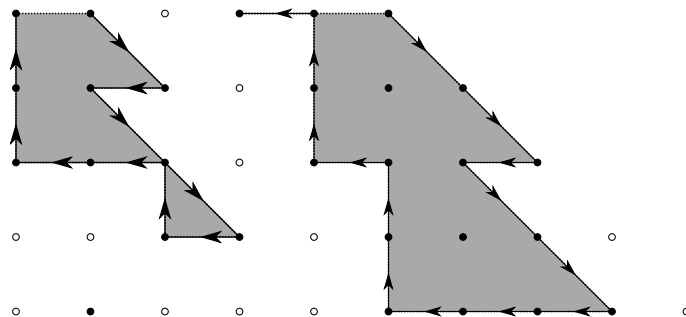
Nous pouvons dès à présent écrire explicitement la fonction caractéristique des ensembles $\sigma^{-1}\Gamma$. En effet, pour tout Γ appartenant à $\mathcal{G}(\Lambda)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\sigma^{-1}\Gamma}((\omega_t)_{t=0}^n) &= \prod_{t=0}^n \left[\prod_{x \in \Gamma_t} \mathbb{1}_{S^{(+)} }(\omega_{t,x}) \prod_{x \in \partial\Gamma_{t+1}} (1 - \mathbb{1}_{S^{(+)} }(\omega_{t,x}) \mathbb{1}_{S^{(+)} }(\omega_{t,x+1})) \right] \\ &= \prod_{t=0}^n \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\omega_t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $E(\Gamma, t) \subseteq X$ est évidemment défini par :

$$\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\omega) = \prod_{x \in \Gamma_t} \mathbb{1}_{S^{(+)} }(\omega_{t,x}) \prod_{x \in \partial\Gamma_{t+1}} (1 - \mathbb{1}_{S^{(+)} }(\omega_{t,x}) \mathbb{1}_{S^{(+)} }(\omega_{t,x+1})). \quad (3.4)$$

Considérons alors un marcheur qui, partant de $(\sup \Lambda, n)$, explore la frontière extérieure de l'amas Γ en laissant Γ le plus à sa droite possible tout en restant dans Γ . Ce marcheur ne peut faire que des pas diagonaux dans la direction $(+1, -1)$, des pas horizontaux dans la direction $(-1, 0)$ et des pas verticaux dans la direction $(0, +1)$. Il se trouvera bloqué à chaque extrémité gauche d'une partie connexe de Γ et nous supposons alors qu'il est relancé à l'extrémité droite de la partie connexe suivante. La trajectoire du marcheur



associée à un amas sera appelée contour de l'amas, et nous avons représenté le contour de l'amas de la Figure 3.1 à la Figure 3.2.

□ **Proposition 3.1 :**

Pour tout amas Γ dans $\mathcal{G}(\Lambda)$, avec n_d , n_h et n_v liens diagonaux, horizontaux et verticaux respectivement et c parties connexes, nous avons :

$$\begin{cases} n_d = n_v \\ n_h \geq n_d + |\Lambda| - c \\ |\partial\Gamma| \geq n_h + c \end{cases}$$

Considérons $\Gamma^{(k)}$, la k -ième partie connexe de l'amas Γ . Soit $\Lambda^{(k)}$ la partie de Λ qui intersecte l'amas $\Gamma^{(k)}$, et soit $n_d^{(k)}$, $n_h^{(k)}$ et $n_v^{(k)}$ le nombre de liens diagonaux, horizontaux et verticaux dans le contour de $\Gamma^{(k)}$. Le marcheur explorant cette frontière extérieure démarrant au point $(\sup \Lambda^{(k)}, n)$, et terminant au point $(\inf \Lambda^{(k)}, n)$, il faut nécessairement que :

$$(\sup \Lambda^{(k)}, n) + n_d^{(k)} (+1, -1) + n_h^{(k)} (-1, 0) + n_v^{(k)} (0, +1) = (\inf \Lambda^{(k)}, n).$$

Composantes par composantes, nous en déduisons donc que :

$$\begin{cases} \sup \Lambda^{(k)} + n_d^{(k)} - n_h^{(k)} = \inf \Lambda^{(k)} \\ n_d^{(k)} - n_v^{(k)} = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons à présent utiliser $\sup \Lambda^{(k)} - \inf \Lambda^{(k)} \geq |\Lambda^{(k)}| - 1$, et nous obtenons :

$$\begin{cases} n_h^{(k)} \geq n_d^{(k)} + |\Lambda^{(k)}| - 1 \\ n_d^{(k)} - n_v^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Par ailleurs, nous pouvons également vérifier qu'entre deux sites visités successivement par le marcheur du graphe $\Gamma^{(k)}$ appartenant également à $\partial\Gamma$, il y a toujours une arête horizontale. Considérons en effet un site (x, t) appartenant à $\partial\Gamma$ et traversé par le graphe $\Gamma^{(k)}$. Etant donné que (x, t) appartient à $\partial\Gamma$, il est impossible qu'une arête diagonale quitte (x, t) . En effet, si c'était le cas, cela impliquerait que $(x + 1, t - 1)$ appartient aussi à Γ . Mais puisque $(x, t - 1)$ ne peut appartenir à Γ parce que $(x, t) \in \partial\Gamma$, il faut donc également que $(x + 2, t - 1)$ et $(x + 1, t)$ appartiennent à Γ , ce qui est impossible si le marcheur laisse l'amas sur sa droite.

Donc, de (x, t) ne peut partir qu'une arête verticale ou une arête horizontale.

- Dans le premier cas, nous avons alors une succession d'arêtes verticales partant de (x, t) . A nouveau, les sites visités par cette succession d'arêtes verticales ne peuvent pas appartenir à $\partial\Gamma$. Dès lors, soit cette succession se finit en atteignant le temps n auquel cas (x, t) est le dernier site de $\partial\Gamma$ visité par le marcheur, soit cette succession se finit par une arête horizontale, et le site vers où pointe cette arête horizontale appartient nécessairement à $\partial\Gamma$.
- Dans le second cas, soit le site $(x + 1, t)$ appartient également à $\partial\Gamma$, soit de $(x + 1, t)$ commence une succession d'arêtes diagonales et cette succession se termine nécessairement par un autre site de $\partial\Gamma$.

Nous avons donc prouvé qu'entre deux sites appartenant à $\partial\Gamma$ visités successivement par le marcheur se trouvait nécessairement une et une seule arête horizontale. Dès lors :

$$|\partial\Gamma^{(k)}| \geq n_h^{(k)} + 1. \quad (3.6)$$

Nous pouvons finalement conclure en sommant les inégalités (3.5) et (3.6) sur les c parties connexes de Γ . Nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^c n_h^{(k)} \geq \sum_{k=1}^c (n_d^{(k)} + |\Lambda^{(k)}| - 1) \\ \sum_{k=1}^c n_d^{(k)} = \sum_{k=1}^c n_v^{(k)} \\ \sum_{k=1}^c |\partial\Gamma^{(k)}| \geq \sum_{k=1}^c (n_h^{(k)} + 1) \end{cases}$$

En effectuant toutes les sommes, nous retombons évidemment sur le nombre d'arêtes verticales, horizontales et diagonales dans Γ , et sur $|\partial\Gamma|$. Donc :

$$\begin{cases} n_h \geq n_d + |\Lambda| - c \\ n_d = n_v \\ |\partial\Gamma| \geq n_h + c \end{cases}$$

■

3.2 Argument de Peierls

Considérons à présent une mesure signée μ sur $X = S^{\mathbb{Z}}$. Nous allons chercher à borner supérieurement $T^n \mu(\mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}} \varphi)$, c'est-à-dire la valeur moyenne d'une certaine fonction continue φ à un certain temps $n \in \mathbb{N}$, si toutes les variables dans un certain Λ fini sont positives. Explicitement :

$$\begin{aligned} T^n \mu(\mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}} \varphi) \\ = \int d\omega_0 \dots d\omega_n \mu(\omega_0) \prod_{t=1}^n \mathbb{P}[\omega_t | \omega_{t-1}] \mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}}(\omega_n) \varphi(\omega_n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

A cause de la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}}(\omega_n)$ nous n'intégrons que sur les configurations spatio-temporelle $(\omega_t)_{t=0}^n$ appartenant à $\mathcal{C}(\Lambda)$. Et nous pouvons

alors utiliser (3.1) et l'équation (3.7) devient :

$$\begin{aligned}
T^n \mu(\mathbb{1}_{S^{(+)} \wedge} \varphi) &= \int_{\mathcal{C}(\Lambda)} d\omega_0 \dots d\omega_n \mu(\omega_0) \prod_{t=1}^n \mathbb{P}[\omega_t | \omega_{t-1}] \varphi(\omega_n) \\
&= \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \int_{\sigma^{-1}\Gamma} d\omega_0 \dots d\omega_n \mu(\omega_0) \prod_{t=1}^n \mathbb{P}[\omega_t | \omega_{t-1}] \varphi(\omega_n) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

A présent, les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour définir des opérateurs sur $\mathcal{M}(X)$. En effet, pour tout $A \subseteq X$, nous définissons l'opérateur $\mathbb{1}_A$ par :

$$\mathbb{1}_A \mu(\varphi) = \mu(\mathbb{1}_A \varphi) \quad (3.9)$$

pour toute fonction continue φ . Dès lors, nous pouvons reprendre la fonction caractéristique de $\sigma^{-1}\Gamma$ en (3.3) avec les ensembles $E(\Gamma, t)$ définis en (3.4), et (3.8) devient :

$$\begin{aligned}
T^n \mu(\mathbb{1}_{S^{(+)} \wedge} \varphi) &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \mathbb{1}_{E(\Gamma, n)} T \dots \mathbb{1}_{E(\Gamma, 1)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma, 0)} \mu(\varphi) \\
&= \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \prod_{t=1}^n (\mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} T) \mathbb{1}_{E(\Gamma, 0)} \mu(\varphi) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Le produit d'opérateur est non ambigu dans la mesure où nous supposons que les opérateurs agissent sur la mesure μ suivant l'ordre temporel.

En nous rappelant que $\partial\Gamma_t$ est la restriction de $\partial\Gamma$ au temps t , nous pouvons alors démontrer le lemme suivant :

□ **Lemme 3.2 :**

Soit T l'opérateur d'évolution de l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya étendu. Soit Γ un amas appartenant à $\mathcal{G}(\Lambda)$, et μ une mesure signée de $\mathcal{M}$. Alors, pour tout $t \in \{1, \dots, n\}$, nous avons :

$$|\mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma, t-1)} \mu| \leq e^{|\partial\Gamma_t|} |\mathbb{1}_{E(\Gamma, t-1)} \mu|$$

Démonstration:

Pour toute fonction continue φ , nous constatons que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu(\varphi) \\
&= \int d\omega \int d\xi \varphi(\xi) \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \prod_{x \in \mathbb{Z}} p(\xi_x | \omega_x, \omega_{x+1}) \\
& \quad \mu(\omega) \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)}(\omega) \\
&\leq \left| \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu \right| |\varphi|_{\infty} \\
& \quad \sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \int d\xi \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \prod_{x \in \mathbb{Z}} p(\xi_x | \omega_x, \omega_{x+1}).
\end{aligned}$$

Cependant, par définition de $E(\Gamma, t)$ en (3.4), nous constatons que, si $x \in \partial\Gamma_t$ et si $\xi \in E(\Gamma, t)$, nous avons $\xi_x > 0$. De plus, si $\omega \in E(\Gamma, t-1)$, soit $\omega_x < 0$, soit $\omega_{x+1} < 0$, et donc, utilisant (2.15), nous voyons que :

$$\sum_{\xi_x > 0} p(\xi_x | \omega_x, \omega_{x+1}) = \sum_{\xi_x > 0} \sum_{\eta_x = \pm \omega_x} \tau(\xi_x | \eta_x) \Phi_{\epsilon}(\eta_x | \omega_x, \omega_{x+1}).$$

L'hypothèse (2.17) implique que seul $\eta_x > 0$ apportera une contribution non nulle et (2.16) implique que $\Phi_{\epsilon}(\eta_x | \omega_x, \omega_{x+1}) = \epsilon$. Donc :

$$\sum_{\xi_x > 0} p(\xi_x | \omega_x, \omega_{x+1}) = \epsilon \tau(\xi_x | |\omega_x|) \leq \epsilon. \quad (3.11)$$

Si $x \notin \partial\Gamma_t$, nous pouvons nous contenter de la borne triviale :

$$\sum_{\xi_x} p(\xi_x | \omega_x, \omega_{x+1}) \leq 1,$$

et donc :

$$\sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \int d\xi \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \prod_{x \in \mathbb{Z}} p(\xi_x | \omega_x, \omega_{x+1}) \leq \epsilon^{|\partial\Gamma_t|}.$$

Pour toute fonction continue φ , nous avons donc démontré que :

$$\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu(\varphi) \leq \epsilon^{|\partial\Gamma_t|} \left| \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu \right| |\varphi|_{\infty}.$$

Prenant le supremum sur toutes les fonctions continues φ telles que $|\varphi|_\infty \leq 1$, nous obtenons le résultat annoncé. ■

Nous avons vu précédemment que nous pouvons associer à chaque (x, t) appartenant à $\partial\Gamma$ tel que $t \neq 0$ un évènement avec une faible probabilité. Il nous reste maintenant à spécifier certaines hypothèses sur la mesure initiale pour contrôler les $(x, 0) \in \partial\Gamma$. Nous cherchons évidemment à obtenir une borne similaire à celle obtenue au Lemme 3.2, c'est-à-dire que $|\mathbb{1}_{S^{(+)} \cap \Gamma_0} \mu|$ décroisse exponentiellement avec $|\partial\Gamma_0|$. Il est évident que cette propriété ne pourra pas être satisfaite par toutes les mesures de $\mathcal{M}$, à commencer par la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ qui est concentrée sur $S^{(+)\mathbb{Z}}$. C'est pourquoi nous introduisons $\mathcal{M}(K, \epsilon')$, l'ensemble des mesures signées $\mu \in \mathcal{M}$ telles que, pour toute partie finie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$:

$$|\mathbb{1}_{S^{(+)} \cap \Lambda} \mu| \leq K \epsilon'^{|\Lambda|}. \quad (3.12)$$

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

□ **Théorème 3.3** (Argument de Peierls) :

Soit T l'opérateur d'évolution de l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya étendu. Supposons que la constante de couplage $\epsilon < \frac{1}{27}$. Alors, pour toute mesure μ dans $\mathcal{M}(K, \epsilon')$ avec $\epsilon' < \frac{1}{27}$ et pour tout $n > 0$, nous avons :

$$|\mathbb{1}_{S^{(+)} \cap \Lambda} T^n \mu| \leq \frac{K}{2(1 - 27\tilde{\epsilon})(1 - 3\tilde{\epsilon})} (3\tilde{\epsilon})^{|\Lambda|},$$

où $\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon, \epsilon'\}$.

Démonstration:

Commençons par reprendre le développement en contours de l'équation (3.10). Prenant le supremum sur toutes les fonctions continues φ telles que $|\varphi|_\infty \leq 1$, nous obtenons :

$$|\mathbb{1}_{S^{(+)} \cap \Lambda} T^n \mu| \leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \left| \prod_{t=1}^n (\mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} T) \mathbb{1}_{E(\Gamma, 0)} \mu \right| \quad (3.13)$$

Nous pouvons alors appliquer le Lemme 3.2 à chaque $\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)}$ et pour chaque $\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)$, nous obtenons :

$$\left| \prod_{t=1}^n (\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T) \mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu \right| \leq \epsilon^{\sum_{t=1}^n |\partial \Gamma_t|} |\mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu|. \quad (3.14)$$

Ayant supposé que μ appartenait à $\mathcal{M}(K, \epsilon')$, nous pouvons alors utiliser (3.12). Et si $\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon, \epsilon'\}$:

$$\left| \prod_{t=1}^n (\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T) \mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu \right| \leq K \tilde{\epsilon}^{\sum_{t=0}^n |\partial \Gamma_t|}. \quad (3.15)$$

Ensuite, parce que $\sum_{t=0}^n |\partial \Gamma_t| = |\partial \Gamma|$, l'inégalité (3.13) devient :

$$|\mathbb{1}_{S(+)} \wedge T^n \mu| \leq K \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \tilde{\epsilon}^{|\partial \Gamma|}. \quad (3.16)$$

Considérons maintenant le sous-ensemble de $\mathcal{G}(\Lambda)$ des graphes Γ possédant c parties connexes et n_d liens diagonaux. La Proposition 3.1 nous indique que le nombre de liens horizontaux n_h dans Γ est alors borné inférieurement par $n_d + |\Lambda| - c$. Il existe donc un $k \geq 0$ tel que $n_h = n_d + |\Lambda| - c + k$ et dans ce cas, la Proposition 3.1 nous montre également que $n_d = n_v$ et que $|\partial \Gamma| \geq n_d + |\Lambda| + k$. Soit $\mathcal{G}_{c,n_d,k}(\Lambda)$ le sous-ensemble contenant tous ces graphes.

Etant donné que tout les amas sont déterminés univoquement par leur contour et que le nombre de chemins contenant n_d sauts dans la direction $(+1, -1)$, n_v sauts dans la direction $(0, +1)$, et n_h sauts dans la direction $(-1, 0)$ est borné par $3^{n_d + n_v + n_h}$, nous voyons que :

$$|\mathcal{G}_{c,n_d,k}(\Lambda)| \leq 3^{3n_d + |\Lambda| - c + k}. \quad (3.17)$$

Donc, (3.16) devient :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}} T^n \mu| &\leq K \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{n_d=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_{c,n_d,k}(\Lambda)} \tilde{\epsilon}^{n_d+|\Lambda|+k} \\
&\leq K \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{n_d=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{3n_d+|\Lambda|-c+k} \tilde{\epsilon}^{n_d+|\Lambda|+k} \\
&\leq K \left(\sum_{c=1}^{\infty} 3^{-c} \right) \left(\sum_{n_d=0}^{\infty} (27\tilde{\epsilon})^{n_d} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (3\tilde{\epsilon})^k \right) (3\tilde{\epsilon})^{|\Lambda|} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Nous voyons alors que les hypothèses $\epsilon < \frac{1}{27}$ et $\epsilon' < \frac{1}{27}$ impliquent que $\tilde{\epsilon} < \frac{1}{27}$, ce qui suffit pour assurer la convergence de toutes les séries géométriques en (3.18). Sommant ces séries, nous trouvons :

$$|\mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}} T^n \mu| \leq \frac{K}{2(1-27\tilde{\epsilon})(1-3\tilde{\epsilon})} (3\tilde{\epsilon})^{|\Lambda|}. \quad \blacksquare$$

Le Théorème 3.3 est appelé un argument de Peierls, parce que la méthode que nous avons suivi - développer en amas, estimer le poids des contours et le nombre de contours - a été introduite en 1936 par Rudolf Peierls dans le cadre du modèle d'Ising en mécanique statistique [50]. Traditionnellement, l'estimation sur le poids des contours (ici, le Lemme 3.2) est appelée partie énergétique de l'argument, tandis que l'estimation du nombre de contours (ici, la Proposition 3.1) est appelée partie entropique de l'argument.

Nous allons maintenant voir comment le Théorème 3.3 nous permet de prouver l'existence d'une transition de phase. Nous avons déjà montré en (2.19) que la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}(\omega) = \prod_{x \in \mathbb{Z}} h_{\text{inv}}^{(+)}$ était invariante pour l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya étendu pour n'importe quelle valeur de ϵ . Cependant, si ϵ est proche de 0 :

□ **Corollaire 3.4** (Preuve de l'existence d'une transition de phase) :

Si $\epsilon < \frac{1}{27}$, alors l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya étendu possède une autre mesure invariante $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ telle que $\mu_{\text{inv}}^{(-)} \neq \mu_{\text{inv}}^{(+)}$, et cette mesure appartient à $\mathcal{M}(K, 3\epsilon)$, avec $K = \frac{1}{2(1-27\epsilon)(1-3\epsilon)}$.

Démonstration:

Soit $m^{(-)}$ la mesure de Lebesgue sur $S^{(-)\mathbb{Z}}$. Cette mesure appartenant à $\mathcal{M}$,

l'argument présenté à la Section 2.1 nous montre qu'il existe une sous-suite de

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^n T^t m^{(-)}$$

qui converge vers une mesure invariante, que nous appellerons $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$. La mesure $m^{(-)}$ étant une mesure de probabilité concentrée sur $S^{(-)\mathbb{Z}}$, il est évident que $|m^{(-)}| = 1$ et $\|\mathbb{1}_{S^{(+)\Lambda}} m^{(-)}\| = 0$ pour tout Λ non vide. Donc $m^{(-)}$ appartient à $\mathcal{M}(1, 0)$. Dès lors, appliquant le Théorème 3.3, nous voyons que pour tout n :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^n T^t m^{(-)}$$

appartient à $\mathcal{M}(K, 3\epsilon)$, avec le K défini dans l'énoncé du Corollaire.

Par préservation des inégalités lors du passage à la limite, nous voyons donc que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient également à $\mathcal{M}(K, 3\epsilon)$. La mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ étant concentrée sur $S^{(+)\mathbb{Z}}$, elle n'appartient à aucun des espaces $\mathcal{M}(K, \epsilon')$ pour $\epsilon' < 1$, ce qui prouve que $\mu_{\text{inv}}^{(+)} \neq \mu_{\text{inv}}^{(-)}$. ■

Etant donné que si $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ et $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ sont deux mesures de probabilités invariantes sous T , toute combinaison linéaire convexe $t \mu_{\text{inv}}^{(+)} + (1-t) \mu_{\text{inv}}^{(-)}$ pour $t \in [0, 1]$ donnera également une mesure de probabilité invariante. L'ensemble des mesures de probabilités invariante $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ est donc une partie convexe de $\mathcal{M}$.

Parmi toutes les mesures de $\mathcal{M}_{\text{inv}}$, on peut mettre en évidence les points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathcal{M}_{\text{inv}}$. Par définition, $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$ est un point extrémal si, pour tout μ_1, μ_2 appartenant à $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ et pour tout $t \in [0, 1]$ tels que $\mu = t \mu_1 + (1-t) \mu_2$, nous avons soit $\mu = \mu_1$, soit $\mu = \mu_2$.

L'ensemble $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ est une partie fermée de la boule unité de $\mathcal{M}$ et nous avons vu avec le théorème de Banach-Alaoglu (Théorème 2.2) que cette boule unité était compacte. Dès lors, l'ensemble $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ est non seulement convexe, mais aussi compact, et nous pouvons alors appliquer le théorème de Krein-Milman [53, p. 70], qui affirme que :

□ **Théorème 3.5** (Théorème de Krein-Milman) :

Toute partie convexe et compacte d'un espace de Hausdorff est la fermeture de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Nous voyons donc qu'il est particulièrement intéressant d'isoler les mesures invariantes extrémales, parce qu'elles vont nous permettre de reconstruire tout l'ensemble des mesures invariantes en prenant des limites de combinaison linéaires convexes. Il est possible de caractériser ces points extrémaux. Une mesure de probabilité μ invariante sous T est dite **ergodique** si toute fonction continue φ invariante sous T est constante μ -presque partout. Il peut être démontré que l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ est précisément l'ensemble des mesures ergodique [63, p. 152, Thm 6.10].

Nous pouvons alors donner une condition suffisante pour qu'une mesure invariante μ soit ergodique. Si $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}$ est **mélangeante**, c'est-à-dire si pour toutes fonctions continues φ et ψ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(\varphi T^n \psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| = 0,$$

alors μ est ergodique. En effet, supposons que ψ soit une fonction telle que $T\psi = \psi$. Alors, pour toute fonction continue φ , nous avons :

$$\mu(\varphi \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi T^n \psi) = \mu(\varphi) \mu(\psi).$$

Cependant, si $\mu(\varphi \psi) = \mu(\varphi) \mu(\psi)$ pour toute fonction φ continue, cela implique que $\psi = \mu(\psi)$ partout sauf sur un ensemble de mesure μ nulle et donc que μ est ergodique.

3.3 Convergence exponentielle à l'équilibre

Nous avons vu au chapitre précédent que la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ était totalement découplée. Elle possède donc trivialement la propriété de décroissance exponentielle des corrélations dans le temps. Il s'ensuit que cette mesure est ergodique et extrémale. A priori, rien n'impose que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ définie au corollaire 3.4 soit également une mesure extrémale. Cependant, nous allons voir qu'en combinant l'argument de Peierls de la Section 3.2 et le critère de Dobrushin de la Section 2.2, nous pouvons montrer qu'une large classe de mesures de probabilité converge exponentiellement vite vers $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ et que cela implique que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est mélangeante et donc ergodique et extrémale.

Commençons par fixer un certain $a \in \{-N, \dots, -1\}$, et définissons les projecteurs :

$$\Pi_x \varphi(\omega) = \varphi(\omega_{\leq x}, \eta_{> x}) - \varphi(\omega_{< x}, \eta_{\geq x}), \quad (3.19)$$

similaires à ceux définis en (2.3), si ce n'est que nous fixons $\eta : \eta_x = a$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Si μ est une mesure signée de masse nulle, nous avons vu en (2.7) que μ pouvait être écrite comme une somme sur $x \in \mathbb{Z}$ de mesures μ_x dans $\mathcal{M}_x$, en prenant $\mu_x = \Pi_x \mu$:

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \Pi_x \mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu_x$$

Lorsque nous appliquons un opérateur T associé à un certain automate cellulaire probabiliste, les différents termes associés à chaque μ_x se mélangent, et il est nécessaire de reprojeter sur chaque espace $\mathcal{M}_x$. C'est ce que nous avons fait en (2.11), et nous avons obtenu :

$$T\mu_x = \sum_{y \in \mathbb{Z}} T^{(yx)} \mu_x. \quad (3.20)$$

où les opérateurs $T^{(yx)}$ ont été définis en (2.12). Par simplicité, nous supposons que la constante a apparaissant dans la définition des opérateurs $T^{(yx)}$ est la même que la constante a apparaissant dans la définition des projecteurs Π_x en (3.19).

Dans le cas particulier du modèle de Stavskaya étendu, nous avons déjà remarqué que beaucoup de termes de la somme sur y en (3.20) sont identiquement nuls. En effet, de la définition des opérateurs $T^{(yx)}$ en (2.12) et de $\Delta p_{xy}(\xi_x | \omega)$ en (2.8), nous observons que l'opérateur $T^{(yx)}$ est identiquement nul si $p(\xi_y | \omega) = p(\xi_y | \omega_{\neq x}, a)$. Dans le cas du modèle de Stavskaya étendu, c'est toujours le cas sauf si $y = x$ ou si $y = x - 1$. Donc :

$$T\mu_x = \sum_{y \in \mathbb{Z}} T^{(yx)} \mu_x = T^{(x-1x)} \mu_x + T^{(xx)} \mu_x. \quad (3.21)$$

Considérons alors une fonction φ dépendant uniquement des variables dans une partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ finie. Si nous désirons évaluer $T^n \mu(\varphi)$, nous pouvons tout d'abord décomposer μ comme $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu_x$, puis appliquer à chaque temps le dé-

veloppement de (3.21). Nous obtenons alors :

$$T^n \mu(\varphi) = \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}} \sum_{x_1 \in \{x_0-1, x_0\}} \dots \sum_{x_n \in \{x_{n-1}-1, x_{n-1}\}} \prod_{t=1}^n T^{(x_t x_{t-1})} \mu_{x_0}(\varphi). \quad (3.22)$$

Etant donné que la mesure $\prod_{t=1}^n T^{(x_t x_{t-1})} \mu_{x_0}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{M}_{x_n}$ défini en (2.5), nous voyons que $\prod_{t=1}^n T^{(x_t x_{t-1})} \mu_{x_0}(\varphi) = 0$ si x_n n'appartient pas à Λ .

Il est dès lors commode de représenter chacun des termes des sommes par un chemin $\gamma : \{0, \dots, n\} \mapsto \mathbb{Z}$ appartenant à $\mathcal{P}(\Lambda)$, où

$$\mathcal{P}(\Lambda) = \left\{ \gamma : \{0, \dots, n\} \mapsto \mathbb{Z} \mid \gamma(n) \in \Lambda \text{ et } \gamma(t) \in \{\gamma(t-1)-1, \gamma(t-1)\} \right\}.$$

Dans ce cas, (3.22) devient :

$$T^n \mu(\varphi) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} \prod_{t=1}^n T^{(\gamma(t) \gamma(t-1))} \mu_{\gamma(0)}(\varphi). \quad (3.23)$$

Le nombre de termes dans la somme est maintenant fini et croît exponentiellement avec le temps n , parce que :

$$|\mathcal{P}(\Lambda)| \leq |\Lambda| 2^n. \quad (3.24)$$

Si pour un système faiblement couplé, nous pouvions montrer que l'opérateur $T^{(\gamma(t) \gamma(t-1))}$ était une contraction, ce n'est actuellement plus le cas. Cependant, en dehors des amas de sites positifs, les opérateurs $T^{(\gamma(t) \gamma(t-1))}$ vont agir comme si ils étaient faiblement couplés. Il ne restera alors plus qu'à isoler les amas de sites positifs et évaluer leur contribution en utilisant l'argument de Peierls pour prouver la convergence exponentielle à l'équilibre pour une certaine classe de mesures. Cette technique est appelée un découplage dans les phases pures.

Supposons donc qu'un chemin γ ait été fixé. Dans un souci de ne pas alourdir inutilement les notations, nous considérerons de façon équivalente la fonction $\gamma : \{0, \dots, n\} \mapsto \mathbb{Z}$, et sa trajectoire $\gamma = \{(\gamma(t), t) \mid 0 \leq t \leq n\}$. Alors, pour

tout $\gamma^{(+)}$ inclus dans $\gamma \setminus \{\gamma(n)\}$ et $\gamma^{(-)} = (\gamma \setminus \{\gamma(n)\}) \setminus \gamma^{(+)}$, si nous définissons :

$$\mathbb{1}_{E(\gamma^{(+)}, t)}(\omega) = \prod_{x:(x,t) \in \gamma^{(+)}} \mathbb{1}_{S^{(+)}(\omega_x)} \prod_{x:(x,t) \in \gamma^{(-)}} \mathbb{1}_{S^{(-)}(\omega_x)} \quad (3.25)$$

nous pouvons alors reprendre (3.23) en sommant sur tous les signes possibles des sites appartenant à $\gamma \setminus \{\gamma(n)\}$, les sites de $\gamma^{(+)}$ étant positifs, et les sites de $\gamma^{(-)}$ étant négatifs :

$$T^n \mu(\varphi) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} \sum_{\gamma^{(+)} \subseteq \gamma \setminus \{\gamma(n)\}} \prod_{t=1}^n \left(\mathbb{1}_{E(\gamma^{(+)}, t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \right) \mu_{\gamma(0)}(\varphi). \quad (3.26)$$

Nous verrons plus tard qu'en dehors de $\gamma^{(+)}$, nous pouvons essentiellement reprendre la preuve du critère de Dobrushin pour montrer que la dynamique y agit comme une contraction. Cependant, il reste le problème des sites dans $\gamma^{(+)}$. Comme annoncé plus tôt, nous allons utiliser l'argument de Peierls pour évaluer la contribution de ces sites. Soit $\mathcal{C}(\gamma^{(+)})$ l'ensemble des configurations spatio-temporelles $(\omega_t)_{t=0}^n$ telles que $\omega_{t,x} > 0$ pour tout $(x, t) \in \gamma^{(+)}$ et $\omega_{t,x} < 0$ pour tout $(x, t) \in \gamma^{(-)}$.

Nous pouvons alors construire des amas de sites positifs Γ similaires à ceux définis à la Section 3.1 liés à ces sites positifs. Partant du site de $\gamma^{(+)}$ avec le temps le plus élevé, nous décidons à chaque temps t :

1. d'ajouter à Γ tous les sites $(x, t) \in \gamma^{(+)}$,
2. et si (x, t) appartient à Γ , et que $\omega_{t-1,x}$ et $\omega_{t-1,x+1}$ sont tous deux positifs, d'ajouter les sites $(x, t-1)$ et $(x+1, t-1)$ à Γ .

Si σ est la fonction qui, à toute configuration spatio-temporelle de $\mathcal{C}(\gamma^{(+)})$, lui fait correspondre son amas Γ , et si $\mathcal{G}(\gamma^{(+)})$ est l'ensemble des amas compatibles avec $\gamma^{(+)}$, nous voyons à nouveau que

$$\mathcal{C}(\gamma^{(+)}) = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{G}(\gamma^{(+)})} \sigma^{-1}\Gamma.$$

Nous pouvons évidemment expliciter la fonction caractéristique de l'ensemble $\sigma^{-1}\Gamma$. En effet, si pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$, nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{E(\Gamma, t)}(\omega) = & \prod_{x: (x, t) \in \gamma^{(-)}} \mathbb{1}_{S^{(-)}}(\omega_x) \prod_{x \in \Gamma_t} \mathbb{1}_{S^{(+)}}(\omega_{t, x}) \\ & \prod_{x \in \partial\Gamma_{t+1}} (1 - \mathbb{1}_{S^{(+)}}(\omega_{t, x}) \mathbb{1}_{S^{(+)}}(\omega_{t, x+1})), \end{aligned} \quad (3.27)$$

alors $\mathbb{1}_{\sigma^{-1}\Gamma}$ peut s'écrire :

$$\mathbb{1}_{\sigma^{-1}\Gamma}((\omega_t)_{t=0}^n) = \prod_{t=0}^n \mathbb{1}_{E(\Gamma, t)}(\omega_t).$$

Revenons à présent à l'équation (3.26) qui peut maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} T^n \mu(\varphi) = & \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} \sum_{\gamma^{(+)} \subseteq \gamma \setminus \{\gamma(n)\}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\gamma^{(+)})} \\ & \prod_{t=1}^n \left(\mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \right) \mathbb{1}_{E(\Gamma, 0)} \mu_{\gamma(0)}(\varphi). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tout comme (3.10) pouvait s'interpréter comme une somme sur des contours, et (3.26) comme une somme sur des chemins, (3.28) va être interprétée comme une somme sur des chemins, et des contours attachés à ces chemins. A titre d'exemple, un des termes de la somme a été représenté à la Figure 3.3.

Nous pouvons dès à présent évaluer le poids de chacun des termes de la somme avec la Proposition suivante :

□ **Proposition 3.6 :**

Pour toute mesure signée μ , pour tout $\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)$, $\gamma^{(+)} \subseteq \gamma \setminus \{\gamma(n)\}$ et $\Gamma \in \mathcal{G}(\gamma^{(+)})$ nous avons :

$$\left| \mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \mathbb{1}_{E(\Gamma, t-1)} \mu \right| \leq 2^{|\gamma_{t-1}^{(+)}|} \alpha^{|\gamma_{t-1}^{(-)}|} \epsilon^{|\partial\Gamma_t|} \left| \mathbb{1}_{E(\Gamma, t-1)} \mu \right|.$$

Démonstration:

Soit φ une fonction continue telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$. Alors, par définition de l'opé-

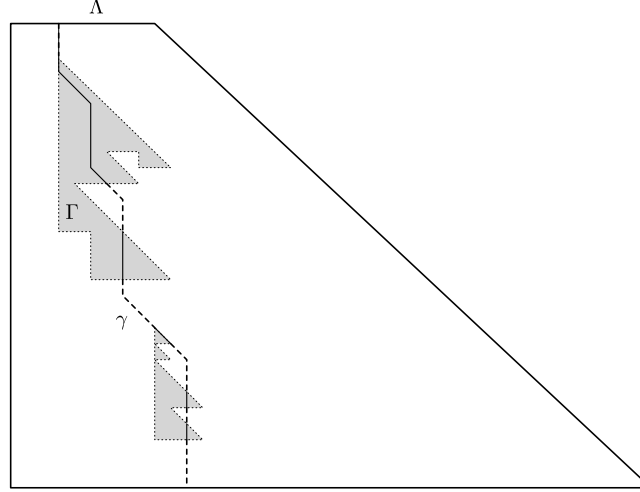


FIG. 3.3 – Représentation graphique d'un terme de la somme sur des chemins et contours en (3.28).

rateur $T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))}$ en (2.12), nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu(\varphi) \\
 & \leq \left| \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu \right| |\varphi|_{\infty} \\
 & \sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \int d\xi \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)} | \omega) \right| \\
 & \prod_{z < \gamma(t)} p(\xi_z | \omega) \prod_{z > \gamma(t)} p(\xi_z | \omega_{\neq \gamma(t-1)}, a). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Cependant, nous avons déjà vu en (3.11) que pour tout $z \in \partial\Gamma$,

$$\sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_z} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) p(\xi_z | \omega) \leq \epsilon,$$

et, étant donné que $a < 0$, si $z \in \partial\Gamma$, nous avons également :

$$\sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_z} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) p(\xi_z | \omega_{\neq \gamma(t-1)}, a) \leq \epsilon.$$

Donc, l'inégalité (3.29) devient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu(\varphi) \\ & \leq \left| \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu \right| \epsilon^{|\partial\Gamma_t \setminus \gamma(t)|} \\ & \quad \sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Considérons alors plus en détail :

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right| \\ & = \sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| p(\xi_{\gamma(t)}|\omega) - p(\xi_{\gamma(t)}|\omega_{\neq\gamma(t-1)}, a) \right|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si $\gamma(t) \in \partial\Gamma$, nous savons que $\xi_{\gamma(t)} > 0$ et que $\omega_{\gamma(t)} < 0$ ou $\omega_{\gamma(t)+1} < 0$, et donc (2.16) implique que :

$$\Phi_\epsilon(\xi_{\gamma(t)}|\omega) = \Phi_\epsilon(\xi_{\gamma(t)}|\omega_{\neq\gamma(t-1)}, a) = \epsilon.$$

D'où, si $b = |(\omega_{\neq\gamma(t-1)}, a)_{\gamma(t)}|$, (2.15) et (2.18) impliquent que :

$$\begin{aligned} & \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right| \\ & \leq \epsilon \sum_{\xi_{\gamma(t)} > 0} \left| \tau(\xi_{\gamma(t)}|\omega_{\gamma(t)}) - \tau(\xi_{\gamma(t)}|b) \right| \leq \alpha \epsilon. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si $\gamma(t-1) \in \gamma^{(-)}$, nous gardons cette inégalité, tandis que si $\gamma(t-1) \in \gamma^{(+)}$, nous majorons par commodité α par 2.

Si $\gamma(t) \in \gamma^{(-)}$ et $\gamma(t-1) \in \gamma^{(+)}$, $\xi_{\gamma(t)} < 0$ et $\omega_{\gamma(t-1)} < 0$. Et puisque $a < 0$, nous en déduisons :

$$\Phi_\epsilon(\xi_{\gamma(t)}|\omega) = \Phi_\epsilon(\xi_{\gamma(t)}|\omega_{\neq\gamma(t-1)}, a) = 1 - \epsilon \leq 1.$$

Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right| \\ & \leq \sum_{\xi_{\gamma(t)} > 0} \left| \tau(\xi_{\gamma(t)}) - |\omega_{\gamma(t)}| - \tau(\xi_{\gamma(t)}|a) \right| \leq \alpha \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dans tout les autres cas, nous pouvons nous contenter de l'inégalité :

$$\sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right| \leq 2. \quad (3.34)$$

Reprenant (3.32), (3.33) et (3.34), nous avons donc montré que :

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right| \\ & \leq \begin{cases} 2 & \text{si } \gamma(t) \in \Gamma \setminus \partial\Gamma \\ 2\epsilon & \text{si } \gamma(t) \in \partial\Gamma \text{ et } \gamma(t-1) \in \gamma^{(+)} \\ \alpha\epsilon & \text{si } \gamma(t) \in \partial\Gamma \text{ et } \gamma(t-1) \in \gamma^{(-)} \\ \alpha & \text{si } \gamma(t) \in \gamma^{(-)} \text{ et } \gamma(t-1) \in \gamma^{(-)} \\ 2 & \text{si } \gamma(t) \in \gamma^{(-)} \text{ et } \gamma(t-1) \in \gamma^{(+)} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Et tous ces cas se simplifient en une unique inégalité :

$$\sup_{\omega \in E(\Gamma,t-1)} \sum_{\xi_{\gamma(t)}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\xi) \left| \Delta p_{\gamma(t)\gamma(t-1)}(\xi_{\gamma(t)}|\omega) \right| \leq \epsilon^{|\partial\Gamma_t \cap \gamma_t^{(+)}|} 2^{|\gamma_{t-1}^{(+)}|} \alpha^{|\gamma_{t-1}^{(-)}|}.$$

Insérant cette inégalité dans (3.30), nous obtenons :

$$\left| \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu \right| \leq \epsilon^{|\partial\Gamma_t|} 2^{|\gamma_{t-1}^{(+)}|} \alpha^{|\gamma_{t-1}^{(-)}|}. \quad \blacksquare$$

Pour évaluer le nombre de contours, nous nous servons de la proposition suivante :

□ **Proposition 3.7 :**

Pour tout amas Γ dans $\mathcal{G}(\gamma^{(+)})$, avec n_d , n_h et n_v liens diagonaux, horizontaux

et verticaux respectivement, et c parties connexes, nous avons :

$$\begin{cases} n_h = n_d = n_v \geq |\gamma^{(+)}| - c \\ |\partial\Gamma| \geq n_h + c \end{cases}$$

Démonstration:

Soient $\Gamma^{(k)}$, $k = 1, \dots, c$ les c parties connexes de Γ . Et, si $\gamma_k^{(+)}$ est la partie de $\gamma^{(+)}$ comprise dans $\Gamma^{(k)}$, le fait que le marcheur explorant la frontière extérieure de l'amas $\Gamma^{(k)}$ commence et termine au même point implique que le nombre de liens horizontaux dans $\Gamma^{(k)}$ doit être égal au nombre de liens diagonaux, qui eux-mêmes doivent être égaux aux nombres de liens verticaux. Donc :

$$n_h^{(k)} = n_d^{(k)} = n_v^{(k)}$$

D'autre part, $\Gamma^{(k)}$ étant connexe et englobant tous les sites de $\gamma_k^{(+)}$, il doit y avoir suffisamment de liens verticaux pour remonter du point le plus bas de $\gamma_k^{(+)}$ jusqu'au point le plus élevé de $\gamma_k^{(+)}$. Donc, $n_v^{(k)} \geq |\gamma_k^{(+)}| - 1$.

Finalement, nous pouvons reprendre l'argument présenté dans la preuve de la Proposition 3.1 pour montrer que $|\partial\Gamma^{(k)}| \geq n_h^{(k)} + 1$. Dès lors, sommant sur toutes les parties connexes de Γ , nous trouvons :

$$\begin{cases} n_h = n_d = n_v \geq |\gamma^{(+)}| - c \\ |\partial\Gamma| \geq n_h + c \end{cases}$$

■

Nous pouvons à présent combiner les Propositions 3.6 et 3.7 pour démontrer le théorème suivant :

□ **Théorème 3.8 :**

Soit $\mu \in \mathcal{M}(K, \epsilon')$ de masse nulle, et $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ ne dépendant que des variables dans $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini. Soit $\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon, \epsilon'\}$. Alors, si $\sigma = 2\alpha + 108\tilde{\epsilon} < 1$, nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi)| \leq \frac{K}{13(1-27\tilde{\epsilon})} |\Lambda| \sigma^n \|\varphi\|_\infty.$$

Démonstration:

Commençons par reprendre le développement en contours et chemins de (3.28).

Par définition de $|\cdot|$, nous avons :

$$T^n \mu(\varphi) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} \sum_{\gamma^{(+)} \subseteq \gamma \setminus \{\gamma(n)\}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\gamma^{(+)})} \left| \prod_{t=1}^n \left(\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \right) \mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu_{\gamma(0)} \right| |\varphi|_{\infty}. \quad (3.36)$$

Appliquant la Proposition 3.7 à chaque temps t , nous voyons que :

$$\left| \prod_{t=1}^n \left(\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \right) \mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu_{\gamma(0)} \right| \leq 2^{|\gamma^{(+)}|} \epsilon^{\sum_{t=1}^n |\partial \Gamma_t|} \alpha^{|\gamma^{(-)}|} \left| \mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu_{\gamma(0)} \right|. \quad (3.37)$$

Et, puisque μ appartient à $\mathcal{M}(K, \epsilon')$, la définition du projecteur $\Pi_{\gamma(0)}$ en (3.19) et le fait que $a < 0$ (3.12) impliquent que, pour toute fonction continue ψ :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{S^{(+)} \partial \Gamma_0} \mu_{\gamma(0)}(\psi) &= \int d\omega \mu(\omega) \psi(\omega_{\leq \gamma(0)}, \boldsymbol{\eta}_{> \gamma(0)}) \\ &\quad \mathbb{1}_{S^{(+)} \partial \Gamma_0}(\omega_{\leq \gamma(0)}, \boldsymbol{\eta}_{> \gamma(0)}) \\ &\quad - \int d\omega \mu(\omega) \psi(\omega_{< \gamma(0)}, \boldsymbol{\eta}_{\geq \gamma(0)}) \\ &\quad \mathbb{1}_{S^{(+)} \partial \Gamma_0}(\omega_{< \gamma(0)}, \boldsymbol{\eta}_{\geq \gamma(0)}) \\ &\leq 2 K \epsilon'^{|\partial \Gamma_0|} |\psi|_{\infty}. \end{aligned}$$

Donc, $|\mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu_{\gamma(0)}| \leq 2 K \epsilon'^{|\partial \Gamma_0|}$ et par définition de $\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon, \epsilon'\}$, l'inégalité (3.37) devient :

$$\left| \prod_{t=1}^n \left(\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T^{(\gamma(t)\gamma(t-1))} \right) \mathbb{1}_{E(\Gamma,0)} \mu_{\gamma(0)} \right| \leq 2 K 2^{|\gamma^{(+)}|} \tilde{\epsilon}^{|\partial \Gamma|} \alpha^{|\gamma^{(-)}|}. \quad (3.38)$$

Insérant (3.38) dans (3.36), nous obtenons alors :

$$|T^n \mu(\varphi)| \leq 2 K \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} \sum_{\gamma^{(+)} \subseteq \gamma \setminus \{\gamma(n)\}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\gamma^{(+)})} 2^{|\gamma^{(+)}|} \tilde{\epsilon}^{|\partial \Gamma|} \alpha^{|\gamma^{(-)}|} |\varphi|_\infty. \quad (3.39)$$

Reprenant maintenant essentiellement l'argument de Peierls, nous voyons que la Proposition 3.7 implique qu'il existe un $k \geq 0$ tel que $n_h = n_d = n_v = \gamma^{(+)} - c + k$ et que $|\partial \Gamma| \geq n_h + c$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\gamma^{(+)})} \tilde{\epsilon}^{|\partial \Gamma|} &\leq \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{3(|\gamma^{(+)}| - c + k)} \tilde{\epsilon}^{n_h + c} \\ &\leq \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{3(|\gamma^{(+)}| - c + k)} \tilde{\epsilon}^{|\gamma^{(+)}| + k} \\ &\leq (27\tilde{\epsilon})^{|\gamma^{(+)}|} \left(\sum_{c=1}^{\infty} 27^{-c} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (27\tilde{\epsilon})^k \right) \\ &\leq \frac{1}{26(1-27\tilde{\epsilon})} (27\tilde{\epsilon})^{|\gamma^{(+)}|} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si nous revenons à (3.39), nous avons donc :

$$|T^n \mu(\varphi)| \leq \frac{K}{13(1-27\tilde{\epsilon})} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} \sum_{\gamma^{(+)} \subseteq \gamma \setminus \{\gamma(n)\}} (54 \tilde{\epsilon})^{|\gamma^{(+)}|} \alpha^{|\gamma^{(-)}|} |\varphi|_\infty.$$

Cependant, si B est un ensemble fini, la formule du binôme de Newton nous dit que :

$$\sum_{A \subseteq B} q^{|A|} p^{|B \setminus A|} = (q + p)^{|B|}. \quad (3.41)$$

Donc, puisque $|\gamma \setminus \{\gamma(n)\}| = n$ et utilisant (3.24), nous avons :

$$\begin{aligned} |T^n \mu(\varphi)| &\leq \frac{K}{13(1-27\tilde{\epsilon})} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)} (\alpha + 54 \tilde{\epsilon})^n |\varphi|_\infty \\ &\leq \frac{K}{13(1-27\tilde{\epsilon})} |\mathcal{P}(\Lambda)| (\alpha + 54 \tilde{\epsilon})^n |\varphi|_\infty \\ &\leq \frac{K}{13(1-27\tilde{\epsilon})} |\Lambda| (2\alpha + 108 \tilde{\epsilon})^n |\varphi|_\infty \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dès lors, si $\sigma = 2\alpha + 108\tilde{\epsilon} < 1$, nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi)| \leq \frac{K}{13(1-27\tilde{\epsilon})} |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_\infty. \quad \blacksquare$$

Nous avons vu au Corollaire 3.4 que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient à $\mathcal{M}(K, 3\epsilon)$ pour un certain $K > 0$. Dès lors, si $2\alpha + 108(3\epsilon) < 1$:

□ **Corollaire 3.9 :**

Supposons que $2\alpha + 108(3\epsilon) < 1$. Alors, pour toute mesure de probabilité μ appartenant à $\mathcal{M}(K, \epsilon')$ pour $\epsilon' < \frac{1-2\alpha}{108}$ et $K > 0$, et pour toute fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans un certain $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_\infty.$$

avec $C > 0$, $\sigma = 2\alpha + 108\tilde{\epsilon}$ et $\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon', 3\epsilon\}$.

Démonstration:

Si $2\alpha + 108(3\epsilon) < 1$, nous avons nécessairement $\epsilon < \frac{1}{27}$, et le Corollaire 3.4 implique alors que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient à $\mathcal{M}(K_{\text{inv}}, 3\epsilon)$ pour un certain $K_{\text{inv}} > 0$. Alors, la mesure $\mu - \mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient à $\mathcal{M}(K + K_{\text{inv}}, \tilde{\epsilon})$, parce que :

$$\begin{aligned} |\mathbb{1}_{S^{(+)}\Omega}(\mu - \mu_{\text{inv}}^{(-)})| &\leq |\mathbb{1}_{S^{(+)}\Omega}\mu| + |\mathbb{1}_{S^{(+)}\Omega}\mu_{\text{inv}}^{(-)}| \\ &\leq K \epsilon'^{|\Omega|} + K_{\text{inv}} (3\epsilon)^{|\Omega|} \\ &\leq (K + K_{\text{inv}}) \tilde{\epsilon}^{|\Omega|}. \end{aligned}$$

Les hypothèses $2\alpha + 108(3\epsilon) < 1$ et $\epsilon' < \frac{1-2\alpha}{108}$ impliquent que $2\alpha + 108\tilde{\epsilon} < 1$ et nous pouvons donc appliquer le Théorème 3.8 à la mesure signée de masse nulle $(\mu - \mu_{\text{inv}}^{(-)})$. Etant donné que $\tilde{\epsilon} = \max\{\epsilon', 3\epsilon\}$, nous voyons que $\max\{\epsilon, \tilde{\epsilon}\} = \tilde{\epsilon}$, et donc :

$$|T^n(\mu - \mu_{\text{inv}}^{(-)})(\varphi)| \leq \frac{K + K_{\text{inv}}}{13(1-27\tilde{\epsilon})} |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_\infty.$$

Etant donné que l'opérateur T est linéaire et que $T\mu_{\text{inv}}^{(-)} = \mu_{\text{inv}}^{(-)}$, nous obtenons alors :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi)| \leq \frac{K + K_{\text{inv}}}{13(1 - 27\tilde{\epsilon})} |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_{\infty}. \quad \blacksquare$$

A partir de là, nous pouvons prouver que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ possède la propriété de décroissance exponentielle des corrélations dans le temps et dans l'espace. En effet :

□ Proposition 3.10 :

Si $\sigma = 2\alpha + 324\epsilon < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toutes fonctions continues φ et ψ dépendant uniquement des variables dans Λ et Ω respectivement, nous avons :

$$|\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| \leq C \sigma^{d(\Lambda, \Omega)} |\Lambda \cup \Omega| |\varphi|_{\infty} |\psi|_{\infty}$$

où $d(\Lambda, \Omega) = \inf\{|x - y| \mid x \in \Lambda, y \in \Omega\}$ est la distance entre les ensembles Λ et Ω .

Démonstration:

Lors de la preuve du Corollaire 3.4, nous avons vu que $m^{(-)}$ la mesure de Lebesgue concentrée sur $S^{(-)\mathbb{Z}}$ appartenait à $\mathcal{M}(1, 0)$. Si $\sigma = 2\alpha + 324\epsilon < 1$, nous pouvons lui appliquer le Corollaire 3.9 et il existe donc une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $n > 0$, nous avons :

$$|\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \psi) - T^n m^{(-)}(\varphi \psi)| \leq C' |\Lambda \cup \Omega| \sigma^n |\varphi|_{\infty} |\psi|_{\infty} \quad (3.43)$$

$$|T^n m^{(-)}(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi)| \leq C' |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_{\infty} \quad (3.44)$$

$$|T^n m^{(-)}(\psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| \leq C' |\Omega| \sigma^n |\psi|_{\infty} \quad (3.45)$$

Cependant, si Λ et Ω sont initialement décorrélés, ils ne seront pas corrélés avant qu'ils n'interagissent ensemble, c'est-à-dire avant un temps $n = d(\Lambda, \Omega) - 1$. Donc, pour $n = d(\Lambda, \Omega) - 1$:

$$T^n m^{(-)}(\varphi \psi) = T^n m^{(-)}(\varphi) T^n m^{(-)}(\psi). \quad (3.46)$$

D'où, utilisant (3.43), nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi \ \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| &\leq C' \ |\Lambda \cup \Omega| \ \sigma^n \ |\varphi|_{\infty} \ |\psi|_{\infty} \\ &\quad + \left| T^n m^{(\leftarrow)}(\varphi \ \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \end{aligned} \quad (3.47)$$

Cependant, (3.46), (3.44) et (3.45) impliquent que :

$$\begin{aligned} &\left| T^n m^{(\leftarrow)}(\varphi \ \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \\ &\leq \left| T^n m^{(\leftarrow)}(\varphi) \ T^n m^{(\leftarrow)}(\psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \\ &\leq \left| T^n m^{(\leftarrow)}(\varphi) \ (T^n m^{(\leftarrow)}(\psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi)) \right| \\ &\quad + \left| (T^n m^{(\leftarrow)}(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi)) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \\ &\leq |\varphi|_{\infty} C' \ |\Omega| \ \sigma^n \ |\psi|_{\infty} + C' \ |\Lambda| \ \sigma^n \ |\varphi|_{\infty} |\psi|_{\infty} \\ &\leq C' \ (|\Omega| + |\Lambda|) \ \sigma^n \ |\varphi|_{\infty} |\psi|_{\infty} \\ &\leq C' \ (|\Omega \cup \Lambda|) \ \sigma^n \ |\varphi|_{\infty} |\psi|_{\infty} \end{aligned}$$

Revenant à (3.47), nous avons donc :

$$\left| \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi \ \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \leq 2 C' \ |\Lambda \cup \Omega| \ \sigma^n \ |\varphi|_{\infty} \ |\psi|_{\infty}$$

D'où, puisque $n = d(\Lambda, \Omega) - 1$ et posant $C = 2C' \sigma^{-1}$:

$$\left| \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi \ \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \leq C \ |\Lambda \cup \Omega| \ \sigma^{d(\Lambda, \Omega)} \ |\varphi|_{\infty} \ |\psi|_{\infty} . \quad \blacksquare$$

□ **Proposition 3.11 :**

Si $\sigma = 2\alpha + 324\epsilon < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes fonctions continues φ et ψ , ψ ne dépendant que des variables dans $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, nous avons :

$$\left| \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi \ T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi) \right| \leq C \ |\Lambda| \ \sigma^n \ |\varphi|_{\infty} .$$

Démonstration:

Dans un premier temps, supposons que $|\varphi|_{\infty} = 1$. Considérons alors la mesure μ définie par :

$$\mu(\psi) = \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi \ \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\psi).$$

Il est aisé de voir que μ est une mesure signée de masse nulle. De plus, ayant vu au Corollaire 3.4 que la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient à $\mathcal{M}(K_{\text{inv}}, 3\epsilon)$, nous constatons que :

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{1}_{S^{(+)\Omega}} \psi) &= \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \mathbb{1}_{S^{(+)\Omega}} \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\mathbb{1}_{S^{(+)\Omega}} \psi) \\ &\leq 2 K_{\text{inv}} |\psi|_{\infty} (3\epsilon)^{|\Omega|}. \end{aligned}$$

Donc, μ appartient à $\mathcal{M}(2 K_{\text{inv}}, 3\epsilon)$. Appliquant le Théorème 3.8 à μ , nous voyons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|T^n \mu(\psi)| \leq C |\Lambda| \sigma^n |\psi|_{\infty}.$$

Explicitant μ , et utilisant le fait que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est invariante sous T , cette équation devient :

$$|\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| \leq C |\Lambda| \sigma^n |\psi|_{\infty}.$$

Si $|\varphi|_{\infty} \neq 1$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $\varphi/|\varphi|_{\infty}$. ■

Le fait que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est ergodique provient directement du résultat précédent :

□ **Corollaire 3.12 :**

Si $\sigma = 2\alpha + 324\epsilon < 1$, la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est mélangeante.

Démonstration:

Nous devons prouver que, pour toutes fonctions continues φ et ψ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| = 0$$

Si ψ est continue, le Théorème de Stone-Weierstrass (Théorème 1.1) implique que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue ψ_{ϵ} telle que $|\psi - \psi_{\epsilon}|_{\infty} \leq \epsilon$, et ψ_{ϵ} ne dépend que des variables dans un Λ_{ϵ} fini. Donc :

$$\begin{aligned} |\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| &\leq |\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi_{\epsilon}) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi_{\epsilon})| \\ &\quad + 2 |\varphi|_{\infty} |\psi - \psi_{\epsilon}|_{\infty}. \end{aligned}$$

Dès lors, appliquant la Proposition 3.11 aux fonctions φ et ψ_ϵ , nous trouvons :

$$|\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| \leq C \sigma^n |\Lambda_\epsilon| |\varphi|_\infty |\psi_\epsilon|_\infty + 2 |\varphi|_\infty \epsilon.$$

Prenant alors la limite où n tend vers l'infini de chacun des membres de l'inégalité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| \leq 2 |\varphi|_\infty \epsilon.$$

Choisissant un ϵ arbitrairement petit, nous prouvons finalement que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi T^n \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| = 0. \quad \blacksquare$$

A la lumière de ce que nous avons vu à la fin de la Section 3.2, nous pouvons donc affirmer que la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est donc également ergodique et extrémale, tout comme la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$.

Nous pouvons alors résumer les résultats obtenus dans les trois chapitres composant la première partie de cette thèse en traçant le portrait de phase du modèle de Stavskaya à la Figure 3.4.

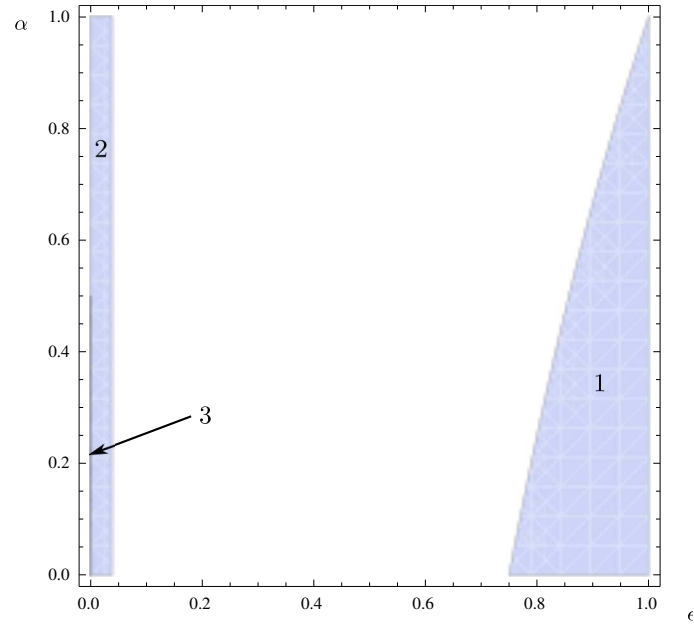


FIG. 3.4 – Portrait de phase du modèle de Stavskaya étendu. En 1., la région où nous pouvons garantir l'unicité de la mesure invariante, en 2. la région où nous pouvons prouver l'existence d'une transition de phase et en 3. la région où nous pouvons prouver que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est extrémale.

Deuxième partie

Les réseaux d'applications couplées

CHAPITRE 4

Systèmes dynamiques chaotiques

Au cours de ce chapitre, nous introduirons les itérations de l'intervalle, qui forment une classe de systèmes dynamiques particulièrement simples mais qui, malgré leur simplicité, permettent de capturer beaucoup d'aspects différents du comportement chaotique et forment à plus d'un titre un véritable paradigme pour l'étude du chaos.

Une propriété marquante des systèmes dynamiques chaotiques est la sensibilité aux conditions initiales. Nous nous servirons de cette propriété pour justifier l'introduction d'itérations de l'intervalle particulières : les applications dilatantes de l'intervalle.

Nous verrons qu'à ces systèmes dynamiques, nous pourrions associer un opérateur de transfert ou opérateur de Perron-Frobenius, similaire à celui introduit pour les automates cellulaires probabilistes. Et à nouveau, l'étude des mesures invariantes nous permettra de caractériser le comportement asymptotique du système. Cependant, contrairement aux automates cellulaires probabilistes, les applications dilatantes de l'intervalle possèdent en général un très grand nombre de mesures invariantes. Mais que parmi toutes les mesures invariantes, certaines mesures, que nous appellerons les mesures SRB, possèdent une signification

physique particulière. Nous démontrerons l'existence et l'unicité de la mesure SRB pour les applications dilatantes de l'intervalle sous des hypothèses très générales, et ces résultats seront à comparer à ceux obtenus pour les chaînes de Markov en dimension finie au Chapitre 1.

4.1 Itérations de l'intervalle

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de la droite réelle, équipé de sa structure topologique usuelle et de la σ -algèbre de Borel. Soit $\tau : I \mapsto I$ une application de l'intervalle dans lui-même. Nous supposons pour l'instant que τ est Borel-mesurable. En considérant les itérées de l'application τ , nous définissons un système dynamique à temps discret dont les trajectoires sont données par $\{\tau^n x \mid n \geq 0\}$ pour tout $x \in I$.

Nous dirons alors qu'une application τ est **chaotique** si :

1. Il existe une orbite dense dans I .
2. Il existe un ensemble dense d'orbites périodiques.
3. τ possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire qu'il existe un $d > 0$ et une constante $C < \infty$ tels que :

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists y \in I, \exists n \leq C |\log \epsilon| : \\ |x - y| \leq \epsilon \text{ et } |\tau^n x - \tau^n y| \geq d.$$

Cette définition mérite quelques commentaires. La première propriété est à rapprocher de la condition d'irréductibilité pour les chaînes de Markov introduites à la Section 1.3. En effet, elle implique que pour tout ouverts $U, V \subset I$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau^k U \cap V \neq \emptyset$. La seconde propriété implique que le système possède encore une certaine forme de régularité. Et finalement, la dernière propriété, la sensibilité aux conditions initiales, implique que si nous connaissons l'état initial du système avec une précision ϵ , après un temps d'ordre $|\log \epsilon|$, il y aura au moins deux trajectoires contenues dans notre intervalle d'erreur $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ qui se trouveront à des endroits de l'espace de phase assez éloignés. Le fait que le temps varie en $|\log \epsilon|$ montre que pour pouvoir prédire le comportement du système sur un intervalle de temps deux fois plus long, il faut au moins avoir une précision de l'ordre de ϵ^2 .

Nous allons construire des exemples de systèmes chaotiques à partir de cette troisième propriété. En effet, nous remarquons qu'une simple dilatation sur $\mathbb{R}$ possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales, parce que deux points initialement proches vont voir leur distance augmenter exponentiellement vite. Cette application n'est évidemment pas chaotique, parce qu'elle ne possède pas d'orbite dense ni d'orbite périodique et qu'elle envoie des points en dehors de l'intervalle I . Cependant, elle montre que l'idée d'avoir une certaine forme de dilatation locale est une piste permettant de produire une certaine sensibilité aux conditions initiales.

Si nous admettons que l'application τ puisse avoir un certain nombre de discontinuités, il est alors possible de combiner une certaine forme de dilatation tout en restant dans l'intervalle I . Nous dirons alors que $\tau : I \mapsto I$ est **dilatante par morceaux** si :

- $\exists \zeta_1, \dots, \zeta_{N+1}$ tels que $a = \zeta_1 < \dots < \zeta_{N+1} = b$ et, si $I_i = (\zeta_i, \zeta_{i+1})$, la restriction de τ à I_i est de classe $\mathcal{C}^2$.
- $\kappa = \inf_{x \in I_i} |\tau'(x)| > 1$.

Nous pouvons alors voir que, pour tout $\kappa \geq 2$ appartenant à $\mathbb{Z}$, l'application $\tau : [0, 1] \mapsto [0, 1] : x \mapsto \kappa x \bmod 1$ est dilatante par morceaux et est chaotique. La méthode pour le démontrer est d'utiliser un codage en base κ . En effet, si $x = 0.b_1b_2b_3\dots$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\kappa^n}$$

avec $b_n \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$, alors la dynamique τ est conjuguée à un décalage sur les suites de symboles :

$$\tau x = .b_2b_3\dots$$

Nous pouvons vérifier que deux nombres x et y dont les n premiers symboles du développement coïncident sont séparés d'une distance inférieure à κ^{-n+2} . Dès lors, le nombre de Champernowne en base κ , c'est-à-dire le nombre dont le développement en base κ est obtenu en concaténant toutes les suites finies de symboles :

$$x = 0.01\dots(\kappa-1)00\dots(\kappa-1)(\kappa-1)\dots,$$

possède une orbite dense dans I . De la même façon, tout point possédant un développement en base κ périodique aura une orbite périodique et l'ensemble de ces points est dense dans I . Finalement, la sensibilité aux conditions initiales suit de la constatation que, si deux points ont un développement en base κ qui coïncident jusqu'à l'ordre n , ils sont séparés par une distance d'ordre κ^{-n+2} . Mais après n itérations de la dynamique, la distance entre ces deux points peut être d'ordre 1 si le $(n+1)^{\text{e}}$ symbole du développement des deux nombres ne coïncide pas. Nous pouvons donc affirmer que $x \mapsto \kappa x \bmod 1$ est une application chaotique.

4.2 Comportement statistique et mesure SRB

La sensibilité aux conditions initiales va réduire considérablement l'intérêt de l'étude des trajectoires individuelles du système, parce que deux points initialement suffisamment proches pour qu'il nous soit impossible de les distinguer auront très rapidement des trajectoires qui divergent. Etant donné que cette incapacité à prédire convenablement le comportement d'une trajectoire provient de notre ignorance de l'état initial du système, il est naturel d'introduire des probabilités pour prendre en compte cette ignorance et d'étudier le comportement moyen d'un ensemble de trajectoires qui sont pratiquement indiscernables.

Supposons donc qu'initialement, l'état du système nous soit donné par une mesure de probabilité μ . Physiquement, le fait que la mesure μ soit plus ou moins étendue va correspondre à l'incertitude que nous avons sur la position initiale du système. Nous pouvons distinguer plusieurs exemples de mesures initiales :

- Soit cette position initiale est exactement connue et égale à x . Dans ce cas, $\mu = \delta_x$, la mesure de Dirac concentrée en x .
- Soit cette position est égale à x , mais est connue avec une précision ϵ . Nous pouvons alors considérer $\mu = \frac{1}{2\epsilon} \mathbb{1}_{[x-\epsilon, x+\epsilon]}(z) dz$.
- Soit cette position nous est totalement inconnue, et nous prenons alors la mesure qui correspondra à cette situation d'incertitude totale, à savoir la mesure de Lebesgue sur I .

De façon similaire à ce qui a été fait à la Section 2.1, nous pouvons reprendre la définition de $|\cdot|$ de l'équation (2.1) et définir $\mathcal{M}(I)$, l'ensemble des mesures

signées μ sur I telles que $|\mu| < \infty$. Alors, τ définit un opérateur agissant sur $\mathcal{M}(I)$, que nous noterons également sans ambiguïté τ et qui sera défini par :

$$\tau\mu(\varphi) = \mu(\varphi \circ \tau), \quad (4.1)$$

pour toute fonction continue φ . De façon équivalente, l'opérateur τ peut également être défini par son comportement sur des ensembles mesurables $A \subseteq I$:

$$\tau\mu(A) = \mu(\tau^{-1}A), \quad (4.2)$$

où $\tau^{-1}A$ est la préimage de l'ensemble A . Cet opérateur τ est, comme dans le cas des chaînes de Markov, appelé opérateur de transfert ou opérateur de Perron-Frobenius. L'évolution des mesures de probabilités sous les itérations de l'opérateur τ nous indiquera alors l'évolution probable du système par rapport à notre ignorance initiale. Si la mesure μ est une mesure delta de Dirac, nous retrouvons évidemment les trajectoires décrites à la section précédente, mais dans les autres cas, nous avons des comportements plus généraux.

L'opérateur τ étant linéaire, l'ensemble des mesures de probabilités invariantes sous τ est un ensemble convexe. Et à nouveau, il est possible de démontrer que les points extrémaux de cet ensemble convexe sont les mesures ergodiques. Ces mesures ergodiques sont particulièrement intéressantes, parce qu'elles permettent de lier le comportement statistique des trajectoires aux mesures ergodiques, comme le montre ce corollaire du théorème ergodique de Birkhoff :

□ **Théorème 4.1 :**

Soit μ une mesure ergodique par rapport à τ . Alors, μ -presque partout, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(\tau^t x) = \int \varphi \, d\mu,$$

pour toute fonction continue φ .

La démonstration de ce théorème peut être retrouvée dans l'article original de Birkhoff [5] ou dans un ouvrage de référence comme [63].

Nous retrouvons donc un résultat semblable au Théorème 1.6 pour les chaînes de Markov. Cependant, contrairement aux chaînes de Markov qui sous des hypothèses très générales abordées au Chapitre 1 ne possèdent qu'une unique mesure ergodique, les systèmes chaotiques tendent à avoir un très grand nombre de mesures ergodiques et toutes n'ont pas la même pertinence physique.

Par exemple, toute mesure de Dirac concentrée sur une trajectoire périodique est une mesure ergodique et vu qu'on a supposé l'existence d'un ensemble dense d'orbites périodiques, cela implique au moins une infinité dénombrable de mesures ergodiques. Mais cette mesure ne nous apportera pas d'informations très profondes sur le comportement statistique du système.

Parmi les mesures ergodiques, nous nous intéresserons particulièrement aux mesures SRB. Nous dirons qu'une mesure ergodique μ est une **mesure SRB** si il existe un ensemble $V \subseteq I$ de mesure de Lebesgue non-nulle tel que pour toute fonction continue $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et pour presque tout x appartenant à V , nous ayons :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(\tau^t x) \rightarrow \int \varphi \, d\mu \quad (4.3)$$

Nous constatons alors que si nous plaçons une particule dans le bassin d'attraction V , le comportement statistique le plus plausible est celui décrit en (4.3), avec probabilité 1. Les mesures SRB ont été introduites indépendamment par Sinai [56, 57], Ruelle [54] et Bowen [9, 10]. Elles sont parfois également appelées mesures physiques ou mesures naturelles.

4.3 Existence de mesures invariantes.

L'argument de compacité présenté à la Section 2.1 peut être adapté au cas des itérations de l'intervalle pour prouver l'existence d'une mesure invariante dans $\mathcal{M}(I)$. Cependant, cet argument ne nous fournit aucune indication sur les propriétés de régularité de la mesure invariante. Nous verrons dans cette section qu'il est possible de démontrer l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour montrer que ces mesures sont des mesures SRB, il restera alors à démontrer qu'elles sont également ergodiques, ce que nous ferons à la section suivante.

Tout d'abord, nous supposons que l'application τ est dilatante par morceaux et que $\kappa = \inf |\tau'| > 2$. L'hypothèse $\kappa = \inf |\tau'| > 2$ peut sembler arbitraire et restrictive. Nous verrons plus loin qu'elle est introduite pour des raisons purement techniques. Si $\inf |\tau'| > 1$, cette hypothèse peut être contournée en considérant τ^k avec k suffisamment grand pour que $\inf |\tau^{k'}| > 2$.

Nous introduisons à présent les semi-normes suivantes sur $\mathcal{M}(I)$:

$$|\mu| = \sup \{ \mu(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}(I) \text{ et } |\varphi| \leq 1 \}, \quad (4.4)$$

$$\|\mu\| = \sup \{ \mu(\varphi') \mid \varphi \in \mathcal{C}^1(I) \text{ et } |\varphi|_\infty \leq 1 \}. \quad (4.5)$$

Soit $L^1(I)$ l'ensemble des mesures signées $\mu \in \mathcal{M}(I)$ qui sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et pour lesquelles $|\mu| < \infty$. L'espace $(L^1(I), |\cdot|)$ est un espace de Banach isomorphe à l'espace des classes d'équivalences de fonctions intégrables sur I , qui est également usuellement et sans aucune ambiguïté, noté $L^1(I)$. Afin d'éviter toute confusion, si h est une fonction appartenant à $L^1(I)$, nous noterons sa norme $|h|_{L^1(I)}$.

Nous pouvons prouver que l'espace $L^1(I)$ est invariant sous τ :

□ **Proposition 4.2 :**

Soit μ une mesure dans $L^1(I)$. Alors $\tau\mu$ appartient également à $L^1(I)$ et :

$$|\tau\mu| \leq |\mu|.$$

Démonstration:

Soit U un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Etant donné que τ est continue par morceaux, $\tau^{-1}U$ va être une union finie d'ensemble de mesures de Lebesgue nulle et donc également de mesure de Lebesgue nulle. La mesure μ étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, nous avons alors $\mu(\tau^{-1}U) = 0$ et nous en déduisons immédiatement que $\tau\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue car $\tau\mu(U) = 0$.

Il reste alors à montrer que $|\tau\mu| < \infty$. Choisissons φ une fonction continue sur I . Nous remarquons que dans $\tau\mu(\varphi) = \mu(\varphi \circ \tau)$, la fonction $\varphi \circ \tau$ est continue par morceaux. Nous pouvons donc appliquer le Corollaire A.2 :

$$\tau\mu(\varphi) = \mu(\varphi \circ \tau) \leq |\mu| \quad |\varphi \circ \tau|_\infty \leq |\mu| \quad |\varphi|_\infty.$$

■

Les mesures $\mu \in L^1(I)$ possèdent une densité h_μ et nous pouvons donner une représentation explicite de l'opérateur τ agissant sur ces densités. En effet, pour toute fonction continue φ , nous avons :

$$\tau\mu(\varphi) = \int \varphi h_{\tau\mu} dm = \int \varphi \circ \tau h_\mu dm = \mu(\varphi \circ \tau).$$

Dès lors, utilisant le fait que τ est monotone et donc inversible sur les intervalles I_i , nous constatons que :

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) h_{\tau\mu}(x) dx &= \int (\varphi \circ \tau)(y) h_\mu(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\varphi \circ \tau)(y) h_\mu(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\tau_{|I_i}^{-1} I_i} \varphi(x) h_\mu(\tau_{|I_i}^{-1} x) \frac{1}{|\tau' \circ \tau_{|I_i}^{-1}(x)|} dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Et donc si $\tau^{-1}x$ est l'ensemble $\{y \in I \mid \tau y = x\}$, alors $h_{\tau\mu}$ est donnée par :

$$h_{\tau\mu}(x) = \sum_{y \in \tau^{-1}x} \frac{1}{|\tau'(y)|} h_\mu(y). \quad (4.7)$$

Introduisons à présent l'espace $\mathcal{B}(I)$, l'ensemble des mesures de $L^1(I)$ telles que $\|\mu\| < \infty$. Alors, $\mathcal{B}(I)$ est un espace de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et il peut être démontré que, si μ appartient à $\mathcal{B}(I)$, alors la densité de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue peut être représentée par une fonction de variation bornée. Une fonction f est dite à variation bornée si :

$$\|f\|_{BV(I)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}(I) : |\varphi|_\infty \leq 1} \int_I \varphi'(x) f(x) dx. \quad (4.8)$$

Nous constatons évidemment que si μ est une mesure signée de densité h_μ , nous avons $\|\mu\| = \|h_\mu\|_{BV(I)}$. Nous pouvons également vérifier¹ que pour toute fonction f de variation bornée, il existe une borne optimale $\text{Var}(f) \leq \|f\|_{BV(I)}$ telle que pour toute suite croissante $\{x_k\}_{k=0}^n$ dans I :

$$\sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leq \text{Var}(f). \quad (4.9)$$

¹Voir par exemple [24]

Pour plus de détails sur les fonctions de variations bornées, nous renvoyons le lecteur à [24, 46, 65].

Le Lemme suivant nous montre que $\mathcal{B}(I)$ est inclus dans $L^1(I)$, parce que :

□ **Lemme 4.3 :**

Soit μ une mesure de $\mathcal{B}(I)$. Alors :

$$|\mu| \leq \frac{|I|}{2} \|\mu\|.$$

Démonstration:

Supposons que $I = [a, b]$. Alors, pour toute mesure $\mu \in L^1(I)$ et pour toute fonction continue φ , nous avons :

$$\mu(\varphi) = \mu \left(\frac{d}{dx} \int_{\frac{a+b}{2}}^x \varphi \right) \leq \|\mu\| |\varphi|_{\infty} \frac{b-a}{2}.$$

Ce qui implique que :

$$|\mu| \leq \frac{|I|}{2} \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Cependant, l'inclusion de $\mathcal{B}(I)$ dans $L^1(I)$ est d'un genre assez particulier, parce que $\mathcal{B}(I)$ est une injection compacte dans $L^1(I)$, ce qui implique que toute suite bornée dans $\mathcal{B}(I)$ contient une sous-suite convergente dans $L^1(I)$. Ce résultat est une conséquence assez élémentaire du fait que toute fonction à variation bornée peut être uniformément approximée dans $L^1(I)$ par une fonction constante sur les intervalles dyadiques. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [65].

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour prouver l'existence d'une mesure invariante dans $\mathcal{B}(I)$. Pour cela, nous allons reprendre un raisonnement de Lasota et Yorke [40]. Nous commençons par introduire une inégalité qui jouera un rôle crucial dans la suite de cette thèse : l'inégalité de Lasota-Yorke.

□ **Théorème 4.4** (Inégalité de Lasota-Yorke) :

Soit μ une mesure de $\mathcal{B}(I)$ et τ une application dilatante par morceaux. Alors :

$$\|\tau\mu\| \leq \frac{2}{\kappa} \|\mu\| + D |\mu|.$$

où la constante $D = \frac{2}{\kappa \min_i |I_i|} + \left| \frac{\tau''}{\tau'^2} \right|_\infty < \infty$.

Démonstration:

Commençons par prendre une fonction φ arbitraire appartenant à $\mathcal{C}^1(I)$ telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \mu(\varphi' \circ \tau) &= \sum_{i=1}^N \mu(\mathbb{1}_{I_i} \varphi' \circ \tau) = \sum_{i=1}^N \mu\left(\mathbb{1}_{I_i} \frac{(\varphi \circ \tau)'}{\tau'}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \mu\left(\mathbb{1}_{I_i} \left(\frac{\varphi \circ \tau}{\tau'}\right)'\right) - \sum_{i=1}^N \mu\left(\mathbb{1}_{I_i} \varphi \circ \tau \frac{\tau''}{\tau'^2}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Etant donné que la fonction $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{I_i} \varphi \circ \tau \frac{\tau''}{\tau'^2}$ est continue par morceaux sur les intervalles I_i , le Corollaire A.2 implique que :

$$\sum_{i=1}^N \mu\left(\mathbb{1}_{I_i} \varphi \circ \tau \frac{\tau''}{\tau'^2}\right) \leq |\mu| \left| \frac{\tau''}{\tau'^2} \right|_\infty \quad (4.11)$$

Le premier terme de (4.10) nécessite un traitement plus délicat. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, commençons par introduire les opérateurs :

$$\Delta_i \psi(x) = \frac{\psi(\zeta_{i+1}) - \psi(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} R_i \psi(x) &= \int_{\zeta_i}^x (\psi'(z) - \Delta_i \psi(z)) \, dz \\ &= \frac{\zeta_{i+1} - x}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} (\psi(x) - \psi(\zeta_i)) + \frac{x - \zeta_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} (\psi(\zeta_{i+1}) - \psi(x)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nous constatons alors que les opérateurs R_i et Δ_i possèdent les propriétés suivantes :

- $|R_i \psi|_\infty \leq 2 |\psi|_\infty$,
- $R_i \psi(\zeta_i) = R_i \psi(\zeta_{i+1}) = 0$,
- $(R_i \psi)'(x) = \psi'(x) - \Delta_i \psi(x)$.
- $|\Delta_i \psi|_\infty \leq \frac{2|\psi|_\infty}{|I_i|}$.

Dès lors, le premier terme de (4.10) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mu \left(\mathbb{1}_{I_i} \left(\frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right)' \right) \\ = \sum_{i=1}^N \mu \left(\mathbb{1}_{I_i} \left(R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right)' \right) + \sum_{i=1}^N \mu \left(\mathbb{1}_{I_i} \left(\Delta_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous constatons alors que la fonction $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{I_i} \Delta_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'}$ est constante par morceaux, et donc, appliquant le Corollaire A.2 :

$$\sum_{i=1}^N \mu \left(\mathbb{1}_{I_i} \left(\Delta_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right) \right) \leq |\mu| \sup_i \left| \Delta_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right|_{\infty} \leq |\mu| \frac{2}{\kappa \inf_i |I_i|} \quad (4.15)$$

D'autre part, la fonction $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{I_i} R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'}$ est continue parce que chaque $R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'}$ s'annule aux extrémités de son intervalle I_i et est différentiable par morceaux. Dès lors :

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{I_i} R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} = \int_a^x \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{I_i}(z) \left(R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right)'(z) dz.$$

D'où, appliquant le corollaire A.4, nous constatons que :

$$\sum_{i=1}^N \mu \left(\mathbb{1}_{I_i} \left(R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right)' \right) \leq \|\mu\| \sup_i \left| R_i \frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right|_{\infty} \leq \frac{2}{\kappa} \|\mu\|. \quad (4.16)$$

Reprenant les inégalités (4.15) et (4.16), (4.14) devient alors :

$$\sum_{i=1}^N \mu \left(\mathbb{1}_{I_i} \left(\frac{\varphi \circ \tau}{\tau'} \right)' \right) \leq \frac{2}{\kappa} \|\mu\| + \frac{2}{\kappa \min_i |I_i|} |\mu| \quad (4.17)$$

Et finalement, avec (4.11), (4.10) donne :

$$\begin{aligned} \mu(\varphi' \circ \tau) &\leq \frac{2}{\kappa} \|\mu\| + \left(\frac{2}{\kappa \min_i |I_i|} + \left| \frac{\tau''}{\tau'^2} \right|_{\infty} \right) |\mu| \\ &\leq \frac{2}{\kappa} \|\mu\| + D |\mu|. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nous constatons directement qu'en itérant cette inégalité, nous pouvons prouver que si $\kappa > 2$, la suite de mesures $\tau^n \mu$ est uniformément bornée dans

$\mathcal{B}(I)$ si μ appartient à $\mathcal{B}(I)$:

$$\begin{aligned}
 \|\tau^n \mu\| &\leq \frac{2}{\kappa} \|\tau^{n-1} \mu\| + D |\tau^{n-1} \mu| \leq \frac{2}{\kappa} \|\tau^{n-1} \mu\| + D |\mu| \\
 &\leq \left(\frac{2}{\kappa}\right)^n \|\mu\| + D \sum_{t=0}^{n-1} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^t |\mu| \\
 &\leq \left(\frac{2}{\kappa}\right)^n \|\mu\| + \frac{\kappa}{\kappa-2} D |\mu|.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Cela implique que la suite :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \tau^t \mu, \tag{4.19}$$

est également uniformément bornée dans $\mathcal{B}(I)$. L'injection compacte de $\mathcal{B}(I)$ dans $L^1(I)$ implique alors qu'elle contient une sous-suite qui va converger au sens de $L^1(I)$ vers un élément $\mu_{inv} \in \mathcal{B}(I)$. La mesure μ_{inv} est une mesure de probabilité parce que chaque $\tau^t \mu$ est aussi une mesure de probabilité, et est invariante sous τ . Nous avons donc démontré l'existence d'une mesure invariante μ_{inv} appartenant à $\mathcal{B}(I)$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et possédant une densité qui est une fonction de variation bornée.

L'inégalité de Lasota-Yorke implique cependant bien plus que l'existence d'une mesure invariante. Elle impose une contrainte très forte sur le spectre de l'opérateur τ dans $\mathcal{B}(I)$. Commençons par quelques définitions. Si B est un espace de Banach séparable, $T : B \mapsto B$ un opérateur et $r(T)$ le rayon spectral de l'opérateur T , nous dirons que T est **quasi-compact** si T peut être réécrit comme la somme de deux opérateurs P et Q tels que :

- P est un opérateur de rang fini dont toutes les valeurs propres sont sur le cercle de rayon $r(T)$.
- $QP = PQ = 0$.
- $r(Q) < r(T)$.

Prouver qu'un opérateur est quasi-compact est en général compliqué et il est souvent commode de se reposer sur certains critères impliquant la quasi-compacité. Le théorème de Ionescu Tulcea-Marinescu est un de ces critères.

□ **Théorème 4.5** (Théorème de Ionescu Tulcea-Marinescu) :

Soit $(E, |\cdot|)$ et $(B, \|\cdot\|)$ deux espaces de Banach et $T : B \mapsto B$ un opérateur, tels que :

- B est une injection compacte dans E .
- $|Tx| \leq |x|$
- il existe un $r \in [0, 1)$ et un $R > 0$ tels que, pour tout $x \in B$:

$$\|Tx\| \leq r \|x\| + R |x|.$$

Alors, l'ensemble des valeurs propres de T dans E de module 1 est fini. Chacune des valeurs propre $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ est de multiplicité finie et les vecteurs propres associés appartiennent à B . De plus, il existe des opérateurs T_i pour $i = 1 \dots, p$ et un opérateur Q tels que :

- les opérateurs T_i sont des projecteurs sur une partie de B de dimension finie.
- $T_i T_j = 0$ si $i \neq j$ et $QT_i = T_i Q = 0$.
- $T = \sum_{i=1}^p \lambda_i T_i + Q$
- Dans B , le spectre de Q est contenu dans un cercle de rayon r .

Constatons au passage que la borne supérieure sur le spectre de Q n'apparaît pas dans l'article original de Ionescu Tulcea et Marinescu [29], mais a été prouvée ultérieurement par Hénnon [26]. Nous renvoyons à ces deux articles et à [27] pour une discussion plus détaillée concernant ce théorème.

Nous nous contenterons pour l'instant de remarquer que les inégalités de Lasota-Yorke et le Lemme 4.3 impliquent directement que l'opérateur τ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu Tulcea et Marinescu avec un rayon spectral essentiel inférieur à $\frac{2}{\kappa}$. Il existe donc des opérateurs de rang fini T_i et un opérateur Q tels que $\tau = \sum_{i=1}^p \lambda_i T_i + Q$, et $r(Q) \leq \frac{2}{\kappa}$. Utilisant la formule de Gelfand que nous avons déjà introduite en (1.15), nous pouvons alors démontrer que, pour tout $\sigma \in (\frac{2}{\kappa}, 1)$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Q\mu\| \leq c \sigma^n \|\mu\|$.

Nous verrons dans la section suivante que sous certaines hypothèses, il est possible de montrer qu'il n'existe qu'une seule valeur propre sur le cercle unité et que le vecteur propre qui lui est associé est une mesure de probabilité μ_{inv} . A partir de là, toutes les mesures de probabilités convergeront exponentiellement vite vers μ_{inv} , parce que $\|Q\mu\| \leq c \sigma^n \|\mu\|$. Il sera alors possible de démontrer que la mesure μ_{inv} est ergodique, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et donc une mesure SRB.

4.4 Unicité de la mesure SRB

Nous commencerons par démontrer que si τ possède une orbite dense, alors toute mesure de probabilité τ -invariante dans $\mathcal{B}(I)$ admet une densité strictement positive.

□ **Lemme 4.6 :**

Supposons que τ possède une orbite dense. Alors la mesure de Lebesgue sur I est absolument continue par rapport à toute mesure de probabilité invariante $\mu \in \mathcal{B}(I)$.

Démonstration:

Nous reprenons ici la preuve présentée dans [2].

La mesure μ appartenant à $\mathcal{B}(I)$, nous savons que μ est déjà absolument continue par rapport à m et qu'elle possède une densité h_μ . Dès lors, pour prouver l'absolue continuité de m par rapport à μ , il suffit de prouver que cette densité h_μ ne s'annule que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Et pour cela, il suffit prouver que $\mu(J) > 0$ pour tout intervalle J .

Etant donné que h_μ est une fonction à variation bornée, h_μ ne peut avoir qu'un nombre au plus dénombrable de discontinuités. Sans perte de généralité, nous pouvons alors supposer que h_μ est continue par la gauche.

Mais à présent, étant donné que μ est invariante, $h_\mu = h_{\tau\mu}$ et l'équation (4.7) implique que :

$$h_\mu(x) = \sum_{y \in \tau^{-1}\{x\}} \frac{1}{|\tau'(y)|} h_\mu(y).$$

En itérant n fois cette formule, nous voyons que :

$$h_\mu(x) = \sum_{y \in \tau^{-n}\{x\}} h_\mu(y) \prod_{t=0}^{n-1} \frac{1}{|\tau' \circ \tau^t(y)|}.$$

Supposons alors que h_μ s'annule en un point x de l'orbite dense. Parce que $\prod_{t=0}^{n-1} \frac{1}{|\tau' \circ \tau^t(y)|} > 0$ et que $h_\mu(y) \geq 0$, nous en déduisons que h_μ s'annule en tout point de cette orbite. La fonction h_μ étant continue par la gauche et l'orbite étant dense, h_μ est alors identiquement nulle.

Ce résultat étant impossible, nous avons donc démontré que $h_\mu(x) > 0$ en tout point de l'orbite dense. Mais alors, pour tout intervalle J , la continuité par la gauche implique que :

$$\mu(J) = \int_J h_\mu(x) \, dx > 0. \quad \blacksquare$$

Nous avons donc démontré que la mesure de Lebesgue était absolument continue par rapport à toute mesure de probabilité invariante dans $\mathcal{B}(I)$. Et puisque les mesures de probabilités invariantes peuvent être décomposées en somme de mesures ergodiques et que ces mesures ergodiques sont mutuellement disjointes, le Lemme 4.6 nous ouvre une piste permettant de prouver l'unicité de la mesure invariante dans $\mathcal{B}(I)$.

□ **Théorème 4.7 :**

Soit τ une application dilatante par morceaux telle que $\kappa > 2$ et possédant une orbite dense. Alors, il n'existe qu'une seule mesure de probabilité τ -invariante dans $\mathcal{B}(I)$ et cette mesure est ergodique.

Démonstration:

Nous reprenons ici une preuve présentée dans [16].

Commençons par montrer que toutes les mesures de probabilité invariantes dans $\mathcal{B}(I)$ sont ergodiques. Si nous supposons que $\mu \in \mathcal{B}(I)$ est τ -invariante mais non-ergodique, il existe un ensemble $K \subseteq I$ qui est τ -invariant tel que $\mu(K) > 0$ et $\mu(K^c) > 0$. Le Lemme 4.6 impliquant que μ et la mesure de Lebesgue sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, les ensembles K et K^c sont également de mesure de Lebesgue positive.

Cependant, le fait que K soit τ -invariant implique que la mesure $\mathbb{1}_K \mu$ est également τ -invariante. Donc, $\tau \mathbb{1}_K \mu = \mathbb{1}_K \mu$ et $\mathbb{1}_K \mu \in L^1(I)$. Mais nous avons vu au Théorème 4.5 que toutes les mesures invariantes dans $L^1(I)$ appartiennent également à $\mathcal{B}(I)$. Donc, $\mathbb{1}_K \mu \in \mathcal{B}(I)$.

Cependant, le Lemme 4.6 affirmant que toute mesure invariante dans $\mathcal{B}(I)$ est mutuellement absolument continue par rapport à Lebesgue, nous avons une contradiction parce que $\mathbb{1}_K \mu$ s'annule sur K^c qui est de mesure de Lebesgue non-nulle.

Nous avons donc démontré que toutes les mesures de probabilités dans $\mathcal{B}(I)$ sont ergodiques. L'unicité est alors une conséquence directe du fait que toutes les mesures ergodiques sont mutuellement singulières. ■

Nous voyons donc que si τ est une application dilatante par morceaux telle que $\kappa > 2$ et possédant une orbite dense, alors il existe une unique mesure τ -invariante et ergodique dans $\mathcal{B}(I)$. Soit μ_{inv} cette mesure. Le Théorème 4.1 implique alors que pour toute fonction continue φ , nous constatons que μ_{inv} -presque partout :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi(\tau^t x) = \mu_{\text{inv}}(\varphi).$$

La mesure de Lebesgue étant absolument continue par rapport à la mesure μ_{inv} , cela implique que la même relation sera valable presque pour tout $x \in I$. Nous avons donc démontré que μ_{inv} est l'unique mesure SRB associée à τ .

Nous pouvons cependant aller plus loin. En effet, μ_{inv} étant l'unique vecteur propre dans $\mathcal{B}(I)$ dont la valeur propre est sur le cercle unité, nous pouvons démontrer que toute mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{B}(I)$ convergera exponentiellement vite vers la mesure invariante μ_{inv} :

□ **Proposition 4.8 :**

Soit τ une application dilatante par morceaux telle que $\kappa > 2$ et possédant une orbite dense. Alors il existe une constante $\sigma < 1$ et une constante $c > 0$ telles que pour toute mesure positive μ dans $\mathcal{B}(I)$:

$$|\tau^n \mu - \mu(1)\mu_{\text{inv}}| \leq c \sigma^n \|\mu\|$$

Démonstration:

Le Théorème 4.5 implique qu'il existe un opérateur T de rang fini et un opérateur S dont le spectre dans $\mathcal{B}(I)$ est contenu dans un cercle de rayon $\frac{2}{\kappa}$ tels que :

$$\|\tau^n \mu - T\mu\| \leq \|S^n\| \|\mu\| \tag{4.20}$$

Et comme la borne supérieure sur le spectre et la formule de Gelfand² impliquent que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2}{\kappa},$$

nous constatons que pour tout $\sigma = \frac{2}{\kappa} + \epsilon < 1$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|S^n\| \leq \frac{1}{\sigma^{n_0}} \sigma^n.$$

Dès lors, posant $c = \frac{1}{\sigma^{n_0}}$, nous avons :

$$\|\tau^n \mu - T\mu\| \leq c \sigma^n \|\mu\|$$

Pour toute mesure μ , $\tau^n \mu$ converge donc exponentiellement vite vers $T\mu$ dans $\mathcal{B}(I)$. $T\mu$ étant une mesure positive invariante, elle doit être proportionnelle à μ_{inv} et la constante de proportionnalité est égale à $\mu(1)$ parce que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n \mu(1) = \mu(1)$.

Finalement, utilisant le fait que $|\nu| \leq \frac{|I|}{2} \|\mu\|$, nous trouvons, pour une nouvelle constante c :

$$|\tau^n \mu - \mu(1) \mu_{\text{inv}}| \leq c \sigma^n \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Le Théorème 4.8 ne nous donne cependant aucune indication sur les valeurs des constantes c et σ , parce que celles-ci dépendront de la vitesse de convergence de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}}$. Il existe des méthodes pour évaluer numériquement ces constantes [45], mais l'exposé de ces méthodes dépasse le cadre de cette thèse. Nous nous contenterons, à titre d'exemple, d'évaluer ces constantes dans le cas de l'application $\tau : [0, 1] \mapsto [0, 1] : x \mapsto \kappa x \pmod{1}$.

Nous pouvons tout d'abord constater que, dans ce cas particulier, l'opérateur de Perron-Frobenius agissant sur les densité des mesures décrit en (4.7) est donné par :

$$\tau h(x) = \frac{1}{\kappa} \sum_{j=0}^{\kappa-1} h\left(\frac{x+j}{\kappa}\right).$$

²voir (1.15) ou [22]

Et donc :

$$\tau^n h(x) = \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{x+j}{\kappa^n}\right).$$

Mais, si h est de variation bornée, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left| \tau^n h(x) - \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{x+j}{\kappa^n}\right) - \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) \right| \\ & \leq \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} \left| h\left(\frac{x+j}{\kappa^n}\right) - h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) \right| + \left| h\left(\frac{j+1}{\kappa^n}\right) - h\left(\frac{x+j}{\kappa^n}\right) \right|, \end{aligned}$$

et nous pouvons alors utiliser (4.9) pour en déduire que :

$$\left| \tau^n h(x) - \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) \right| \leq \kappa^{-n} \text{Var}(h) \quad (4.21)$$

Mais d'autre part, si h est de variation bornée, elle est aussi Riemann-intégrable, et :

$$\left| \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - \int h \, dm \right| \leq \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} \int_{\frac{j}{\kappa^n}}^{\frac{j+1}{\kappa^n}} \left| h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - h(x) \right| dx$$

Mais nous savons alors que :

$$\int_{\frac{j}{\kappa^n}}^{\frac{j+1}{\kappa^n}} \left| h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - h(x) \right| dx \leq \kappa^{-n} \sup_{x \in [\frac{j}{\kappa^n}, \frac{j+1}{\kappa^n}]} \left| h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - h(x) \right|,$$

et que le supremum sera atteint par un certain x_j appartenant à $[\frac{j}{\kappa^n}, \frac{j+1}{\kappa^n}]$ parce que $[\frac{j}{\kappa^n}, \frac{j+1}{\kappa^n}]$ est compact et que h peut être supposée continue par la gauche.

Donc :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\kappa^n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - \int h \, dm \right| \\
& \leq \kappa^{-n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} \left| h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - h(x_j) \right| \\
& \leq \kappa^{-n} \sum_{j=0}^{\kappa^n-1} \left(\left| h\left(\frac{j}{\kappa^n}\right) - h(x_j) \right| + \left| h\left(\frac{j+1}{\kappa^n}\right) - h(x_j) \right| \right) \\
& \leq \kappa^{-n} \text{Var}(h)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Reprenant (4.21) et (4.22), et utilisant le fait que $\text{Var}(h) \leq \|h\|_{BV([0,1])}$, nous avons donc prouvé que :

$$\left| (\tau^n h)(x) - \int h \, dm \right|_{L^1([0,1])} \leq 2 \kappa^{-n} \|h\|_{BV([0,1])}$$

ce qui montre que la mesure de probabilité invariante est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et que nous pouvons choisir $c = 2$ et $\sigma = \frac{1}{\kappa}$.

CHAPITRE 5

Unicité de la mesure SRB à faible couplage

Au chapitre précédent, nous avons prouvé que sous des hypothèses très générales, les applications dilatantes de l'intervalle possédaient une unique mesure SRB décrivant le comportement statistique d'un ensemble de trajectoires de mesure de Lebesgue pleine. Cette situation est à comparer aux chaînes de Markov en dimension finie qui ne possédaient qu'une unique mesure invariante.

Dans ce chapitre, nous aborderons une généralisation en dimension infinie des applications dilatantes de l'intervalle introduites par Kaneko [33, 34], les réseaux d'applications couplées. Nous donnerons une définition de mesure SRB pour ces réseaux d'applications couplées et prouverons que, de façon similaire aux automates cellulaires probabilistes, nous pouvons garantir l'unicité de la mesure SRB à faible couplage.

Cela laissera ouverte la question de l'unicité de la mesure SRB à fort couplage. Cette question sera abordée au chapitre suivant, où nous découvrirons que les mesures SRB peuvent également subir des transitions de phase.

5.1 Réseaux d'applications couplées

Soit I un intervalle de la droite réelle et $X = I^{\mathbb{Z}^d}$ pour un certain $d \geq 1$. Supposons que X est équipé de la topologie produit et de la σ -algèbre de Borel. Nous noterons par $\mathbf{x}$ les éléments de X et par x_p la valeur de $\mathbf{x}$ au site $p \in \mathbb{Z}^d$. Alors, un **réseau d'applications couplées** est un système dynamique décrit par les itérations d'une application $T = \Phi \circ \tau^{\mathbb{Z}^d} : X \mapsto X$ telle que :

- $\tau : I \mapsto I$ est une dynamique chaotique locale s'appliquant à chaque site de $\mathbb{Z}^d$.
- $\Phi : X \mapsto X$ est un couplage qui va faire interagir les sites entre eux.

A titre d'exemple, nous pouvons considérer $I = [0, 1]$, $\tau(x) = \kappa x \mod 1$ avec $\kappa \geq 2$ et Φ donné par un couplage symétrique diffusif :

$$\Phi(\mathbf{x})_p = (1 - \epsilon) x_p + \frac{\epsilon}{2d} \sum_{q \in \mathbb{Z}^d : |q-p|=1} x_q$$

pour un certain $\epsilon \in [0, 1]$.

Les réseaux d'applications couplées forment une généralisation naturelle des applications dilatantes de l'intervalle. Leur introduction peut également être justifiée par une discrétisation d'équations aux dérivées partielles. Les réseaux d'applications couplées sont d'ailleurs utilisés pour discrétiser les équations de Navier-Stokes et permettre des simulations numériques de phénomènes comme les nuages [64] ou les fumées volcaniques [49].

Avant de donner une définition précise de mesure SRB pour les réseaux d'applications couplées, il convient cependant d'être prudent parce qu'en dimension infinie, toutes les mesures tendent à devenir mutuellement disjointes l'une par rapport à l'autre. Par exemple, si nous considérons un réseau d'applications couplées trivial où le couplage Φ est donné par la fonction identité et où τ possède une unique mesure SRB $h(x) dx$, il serait naturel que $\mu = \prod_{p \in \mathbb{Z}} h(x_p) dx_p$ soit l'unique mesure SRB. Cependant, la loi des grands nombres va impliquer que $\frac{1}{2n+1} \sum_{p=-n}^n \varphi(x_p)$ va converger m -presque partout vers $\frac{1}{|I|} \int \varphi(x) dx$ et μ presque partout vers $\int \varphi(x) h(x) dx$ ce qui n'est possible que si μ et m sont égales ou absolument discontinues.

Pour toute partie finie Λ dans $\mathbb{Z}^d$, définissons alors π_Λ le projecteur canonique de X sur I^Λ . Nous remarquons que la mesure μ introduite précédemment

n'est peut être pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, mais ses projections de dimensions finies $\pi_\Lambda \mu$ le sont. Cependant, il a été prouvé par Järvenpää et Järvenpää [30] que ce critère de régularité n'est pas suffisant pour une définition de mesure SRB, et que même à faible couplage où nous souhaitons pouvoir garantir l'unicité de la mesure SRB, il existe de nombreuses mesures invariantes dont les projections de dimensions finies sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat est cependant difficile à interpréter, parce que tout d'abord il n'est pas certain que la mesure mise en évidence soit ergodique et qu'il n'est pas prouvé que cette mesure va décrire le comportement des trajectoires dans un bassin d'attraction suffisamment grand.

Dans le cadre des réseaux d'applications couplées, nous adopterons dès lors la définition suivante pour les mesures SRB. Nous dirons que μ est une **mesure SRB** si :

- μ est une dont les projections de dimensions finies sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue
- Les densités des projections de dimensions finies de μ sont des fonctions de variations bornées
- Pour toute fonction suffisamment régulière ψ , nous avons μ -presque partout :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \psi \circ T^t(x) = \mu(\psi),$$

Tout comme dans le cas des itérations de l'intervalle, nous voyons que l'idée sous-tendant au concept de mesure SRB est celui d'une mesure invariante possédant certaines propriétés de régularité et décrivant le comportement statistique asymptotique du système.

Dans le cas des systèmes faiblement couplés, l'existence et l'unicité de la mesure SRB ont été abordées par différents auteurs. Le premier résultat sur le sujet est celui de Sinai et Bunimovich [15] qui prouve l'existence d'une mesure SRB en utilisant un formalisme thermodynamique similaire à celui qui peut être introduit pour les mesures SRB en dimension finie [56]. Ce résultat est généralisé par Volevich [62], puis Brémont et Kupiainen [11–13]. La stabilité de la mesure SRB sous les perturbations aléatoires de l'application a été ensuite étudiée par Maes et Van Moffaert [47].

Dans tout les résultats cité précédemment, l'unicité de la mesure SRB pour des systèmes faiblement couplés n'était prouvée que dans des classes assez réduites de mesures. Ces résultats sont alors généralisés par Baladi *et al* [3] qui prouvent l'unicité de la mesure SRB à faible couplage dans un espace de Fréchet. Les travaux de Keller et Liverani [36–38] étendent ces résultats et permettent aux auteurs de prouver la convergence exponentielle à l'équilibre dans des espaces de mesures suffisamment larges.

Dans ce chapitre, nous présenterons la preuve de l'unicité de la mesure SRB à faible couplage de Keller et Liverani, adaptée à un modèle particulier inspiré de l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya introduit en (1.21).

5.2 Description du modèle

Prenons comme espace des configurations $X = I^{\mathbb{Z}}$ avec $I = [-1, 1]$. La dynamique $T : X \mapsto X$ est toujours donnée par la composée d'un couplage Φ_ϵ avec une dynamique locale découplée $\tau^{\mathbb{Z}}$. Le couplage $\Phi_\epsilon : X \mapsto X$ est explicitement donné par :

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{x})_p = \begin{cases} x_p & \text{si } x_p > 0 \text{ et } x_{p+1} > 0 \\ x_p - 1 + \epsilon & \text{si } x_p > 0 \text{ et } x_{p+1} \leq 0 \\ x_p + \epsilon & \text{si } x_p \leq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Ce couplage dépend d'un paramètre $\epsilon \in [0, 1]$. Nous constatons que, pour tout $a \in I$:

$$|\Phi_\epsilon(\mathbf{x})_p - \Phi_\epsilon(\mathbf{x}_{\neq p}, a)_p| \leq (1 - \epsilon)$$

ce qui montre que si ϵ est proche de 1, le système sera faiblement couplé, tandis que si ϵ est proche de 0, le système sera fortement couplé. Nous constatons que ce couplage a un comportement similaire à l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya défini en (1.21). En effet, si x_p et x_{p+1} sont tous les deux positifs, x_p restera positif, tandis que si x_p ou x_{p+1} sont négatifs, x_p sera envoyé dans l'intervalle $[-1, 0]$, sauf si x_p appartient à l'ensemble $(-\epsilon, 0] \cup (1 - \epsilon, 1]$.

L'application sur site est une application dilatante de l'intervalle $\tau : I \mapsto I$ telle que :

- $\exists \zeta_1, \dots, \zeta_{N+1} \in [-1, 1]$, avec $-1 = \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_{N+1} = 1$ et $I_i = (\zeta_i, \zeta_{i+1})$, tels que la restriction de τ à l'intervalle I_i est monotone et uniformément $\mathcal{C}^2$.
- $\kappa = \inf |\tau'| > 2$.
- L'application τ possède deux ensembles invariants non-triviaux $[0, 1]$ et $[-1, 0]$, et la dynamique restreinte à ces deux ensembles invariants est mélangeante. Par simplicité, nous supposons que l'application sur $[-1, 0]$ est la translation de l'application sur $(0, 1]$: pour tout $x \in (-1, 0]$, $\tau(x) = \tau(x + 1) - 1$.

Par exemple, l'application $\tau : x \mapsto \kappa x \mod 1$ sur $[0, 1]$ étendue sur $[-1, 0]$ en supposant que $\tau(x) = \tau(x + 1) - 1$ vérifie les hypothèses précitées pour $\kappa > 2$.

Définissons également les constantes suivantes :

$$\lambda_0 = \frac{2}{\kappa} \quad D_0 = \frac{2}{\kappa \min |J_i|} + \left| \frac{\tau''}{(\tau')^2} \right|_\infty < \infty. \quad (5.2)$$

Remarquons qu'il faut nécessairement que $\kappa \min_i |J_i| \leq 1$, et ça implique que $D_0 \geq 2$.

Sous les hypothèses précédentes, nous pouvons reprendre les résultats du Chapitre 4 pour affirmer que la dynamique locale τ possède deux mesures invariantes extrémales sur $[-1, 1]$: une mesure concentrée sur $[-1, 0)$ et l'autre concentrée sur $(0, 1]$. Supposons que $h_{\text{inv}}^{(+)}$ soit la densité de la mesure invariante sur $[0, 1]$ et $h_{\text{inv}}^{(-)}$ soit la densité de la mesure invariante sur $[-1, 0]$. Etant donné que la dynamique restreinte à ces deux ensembles invariants est mélangeante, nous avons :

□ **Proposition 5.1 :**

Il existe un $c > 0$ et un $\varsigma \in (0, 1)$ tels que, pour toute fonction de variation bornée h sur $[-1, 0]$ et pour tout n in $\mathbb{Z}$, nous avons :

- *L'inégalité de Lasota-Yorke :*

$$\|\tau^n h\|_{BV(I)} \leq \lambda_0^n \|h\|_{BV(I)} + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |h|_{L^1(I)}.$$

– La convergence exponentielle dans $L^1(I)$ vers les mesures invariantes :

$$\left| \tau^n h - \left(\int h(x) \, dx \right) h_{\text{inv}}^{(-)} \right|_{L^1(I)} \leq c \, \zeta^n \|h\|_{BV(I)}.$$

Par symétrie, des résultats similaires peuvent être trouvés pour $h_{\text{inv}}^{(+)}$ et toute fonction de variation bornée h sur $[0, 1]$.

5.3 Existence de la mesure SRB

Commençons par démontrer l'existence d'une mesure invariante en réutilisant l'inégalité de Lasota-Yorke. Pour cela, pour toute mesure de Borel signée $\mu \in \mathcal{M}(X)$, commençons par définir la norme de variation totale :

$$|\mu| = \sup \{ \mu(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}(X) \text{ and } |\varphi|_\infty \leq 1 \}. \quad (5.3)$$

Soit $L^1(X)$ l'ensemble des mesures de Borel signées telles que $\pi_\Lambda \mu$ est absolument continue par rapport à $\pi_\Lambda m$ pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini et telles que $|\mu| < \infty$. Par rapport à $|\cdot|$, l'espace $L^1(X)$ est un espace de Banach. Remarquons que, si μ est une mesure de probabilité, sa norme de variation totale est toujours égale à 1.

A nouveau, nous pouvons prouver que l'opérateur T envoie une mesure de $L^1(X)$ dans $L^1(X)$:

□ **Proposition 5.2 :**

Soit μ une mesure dans $L^1(X)$. Alors $T\mu$ appartient à $L^1(X)$ et $|T\mu| \leq |\mu|$.

La preuve de ce résultat suit essentiellement les mêmes lignes que la démonstration de la Proposition 4.2.

Nous définissons également la norme de variation bornée :

$$\|\mu\| = \sup \{ \mu(\partial_p \varphi) \mid p \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathcal{C}^1(X) \text{ et } |\varphi|_\infty \leq 1 \}, \quad (5.4)$$

et nous pouvons alors vérifier que l'espace $\mathcal{B}(X) = \{ \mu \in L^1(X) \mid \|\mu\| < \infty \}$, équipé de la norme $\|\cdot\|$ est un espace de Banach. Le Lemme 4.3 peut également être adapté à notre situation :

□ **Lemme 5.3 :**

Soit μ une mesure dans $\mathcal{B}(X)$. Alors $|\mu| \leq \|\mu\|$.

Nous pouvons à présent énoncer¹ l'inégalité de Lasota-Yorke :

□ **Théorème 5.4** (Inégalité de Lasota-Yorke) :

Soit μ une mesure dans $\mathcal{B}(X)$. Alors :

$$\|T\mu\| \leq \lambda_0 \|\mu\| + D_0 |\mu|.$$

Cependant, contrairement à ce qui avait été présenté à la fin de la Section 5.3, nous ne pouvons plus supposer que $\mathcal{B}(X)$ est une injection compacte dans $L^1(X)$, et nous ne pouvons alors plus appliquer le Théorème de Ionescu Tulcea-Marinescu. Cependant, reprenant l'argument présenté à la Section 2.1, nous savons que, si μ est une mesure de probabilité, la suite :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n T^t \mu,$$

possède une sous-suite faiblement convergente dans $\mathcal{M}(X)$. Etant donné que l'inégalité de Lasota-Yorke implique que :

$$\|T^n \mu\| \leq \lambda_0^n \|\mu\| + \frac{D_0}{1 - \lambda_0} |\mu|,$$

nous pouvons alors constater que si μ appartient à $\mathcal{B}(X)$, la sous-suite convergente de $\frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n T^t \mu$ convergera faiblement vers un élément de $\mathcal{B}(X)$.

Nous constatons également que, quelle que soit la valeur du paramètre de couplage ϵ , la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ définie par :

$$\mu_{\text{inv}}^{(+)} = \prod_{p \in \mathbb{Z}} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_p) \, dx_p. \quad (5.5)$$

est toujours invariante sous T et appartient à $\mathcal{B}(X)$ parce que la fonction $h_{\text{inv}}^{(+)}$ est de variation bornée et est la densité d'une mesure de probabilité sur I . Tout comme pour l'automate cellulaire probabiliste de Stavskaya, nous nous retrouvons donc avec une phase invariante dite gelée.

¹Nous démontrerons au Chapitre 6 une version plus générale de cette inégalité.

5.4 Unicité de la mesure SRB

Nous allons démontrer l'unicité de la mesure invariante dans $\mathcal{B}(X)$ pour ϵ suffisamment proche de 1 en suivant essentiellement la preuve de Keller et Liverani [38]. Nous aurons l'occasion de remarquer la similitude avec les développements utilisés pour démontrer le critère de Dobrushin. Nous en déduirons une loi des grands nombres pour la mesure invariante $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ qui impliquera que la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ est bien l'unique mesure SRB du système étudié.

Commençons par choisir un entier positif arbitraire γ et par considérer $<$, un bon ordre de $\mathbb{Z}$ défini par :

$$0 < -1 < -2 < \dots < -\gamma < +1 < -\gamma - 1 < +2 < -\gamma - 2 \dots \quad (5.6)$$

Nous voyons que ce bon-ordre n'est qu'une variation du bon-ordre canonique de $\mathbb{Z}$, si ce n'est que nous avons placé en tête les sites qui auront été influencés par 0 après γ itérations de la dynamique T .

Soit $<_q$ ce bon-ordre translaté à un site $q \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout q et p appartenant à $\mathbb{Z}$, nous définissons l'opérateur Π_{qp} :

$$\Pi_{qp}\varphi = \int \varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) dx_s - \int \varphi \prod_{s \leq_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) dx_s \quad (5.7)$$

où $h_{\text{inv}}^{(+)}$ a été définie à la Proposition 5.1 comme étant la mesure invariante sous τ concentrée sur $[0, 1]$. Remarquons que tant que φ ne dépend pas de x_p , $\Pi_{qp}\varphi$ est identiquement nul. Nous considérerons principalement le dual de l'opérateur Π_{qp} , que nous noterons également Π_{qp} et qui est défini par :

$$\Pi_{qp}\mu(\varphi) = \mu(\Pi_{qp}\varphi). \quad (5.8)$$

Nous constatons alors que, pour toute fonction continue φ dépendant d'un nombre fini de variables et pour toute mesure signée de masse nulle μ , nous

avons :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Pi_{qp} \mu &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mu \left(\int \varphi \prod_{s < qp} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s - \int \varphi \prod_{s \leq qp} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s \right) \\ &= \mu(\varphi) - \mu(1) \int \varphi \prod_{s \in \Lambda} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s = \mu(\varphi). \end{aligned}$$

pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Etant donné que l'ensemble des fonctions continues dépendant d'un nombre fini de variables est dense dans l'ensemble des fonctions continues, cela implique que pour toute mesure $\mu \in L^1(I)$, nous avons :

$$\mu = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Pi_{qp} \mu, \quad (5.9)$$

au sens faible. Les opérateurs Π_{qp} sont bornés dans la norme de variation totale et dans la norme de variation bornée, comme il peut être constaté dans le lemme suivant :

□ **Lemme 5.5 :**

Pour toute mesure μ appartenant à $\mathcal{B}(X)$ et pour tout $q, p \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$\begin{cases} |\Pi_{qp} \mu| \leq 2 \, |\mu| \\ \|\Pi_{qp} \mu\| \leq 2 \left(\frac{D_0}{1 - \lambda_0} \right) \|\mu\| \end{cases}$$

Démonstration:

Commençons par la première inégalité. Si φ est une fonction continue telle que $|\varphi|_{\infty} \leq 1$, nous constatons immédiatement que $\Pi_{qp} \varphi$ est également une fonction continue et que $|\Pi_{qp} \varphi|_{\infty} \leq 2$. Dès lors, par définition de la norme de variation totale, nous avons :

$$\mu(\Pi_{qp} \varphi) \leq |\mu| \, |\Pi_{qp} \varphi|_{\infty} \leq 2 \, |\mu|,$$

et cela implique directement que $|\Pi_{qp} \mu| \leq 2 \, |\mu|$.

Pour l'inégalité sur la norme de variation totale, nous prenons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1$ telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$ et nous considérons :

$$\begin{aligned} \Pi_{qp}\mu(\partial_r\varphi) = & \mu\left(\int \partial_r\varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s\right) \\ & - \mu\left(\int \partial_r\varphi \prod_{s \leq_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Considérons alors le premier terme de (5.10). Si $r \geq_q p$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mu\left(\int \partial_r\varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s\right) &= \mu\left(\partial_r \int \varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s\right) \\ &\leq \|\mu\| \sup_{\mathbf{x} \in X} \left| \int \varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s \right| \\ &\leq \|\mu\|, \end{aligned} \quad (5.11)$$

tandis que si $r <_q p$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mu\left(\int \partial_r\varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s\right) &\leq |\mu| \sup_{\mathbf{x} \geq_q p} \int \partial_r\varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_s) d\xi_s \\ &\leq \|h_{\text{inv}}^{(+)}\|_{BV(I)} |\mu|. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nous pouvons trouver une borne supérieure sur $\|h_{\text{inv}}^{(+)}\|$ en utilisant l'inégalité de Lasota-Yorke sur τ présentée à la Proposition 5.1. En effet, nous avons :

$$\|\tau^n h_{\text{inv}}^{(+)}\|_{BV(I)} \leq \lambda_0^n \|h_{\text{inv}}^{(+)}\|_{BV(I)} + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |h_{\text{inv}}^{(+)}|_{L^1(I)},$$

Etant donné que $h_{\text{inv}}^{(+)}$ est τ -invariante, que $|h_{\text{inv}}^{(+)}|_{L^1(I)} = 1$ parce que $h_{\text{inv}}^{(+)}$ est une mesure de probabilité et que nous avons supposé que $\lambda_0 < 1$, nous avons $\|h_{\text{inv}}^{(+)}\|_{BV(I)} \leq \frac{D_0}{1-\lambda_0}$. Et, ayant vu que $|\mu| \leq \|\mu\|$ au Lemme 5.3 et que $\frac{D_0}{1-\lambda_0} \geq 2$ parce que $\kappa \min_i |I_i| \leq 1$, les inégalités (5.11) et (5.12) impliquent toutes les deux que :

$$\mu\left(\int \partial_r\varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) dx_s\right) \leq \frac{D_0}{1-\lambda_0} \|\mu\|. \quad (5.13)$$

La même inégalité peut être retrouvée pour le second terme de (5.10) parce que il existe un p' tel que $\{s \mid s \leq_q p\} = \{s \mid s <_q p'\}$.

$$\mu \left(\int \partial_r \varphi \prod_{s \leq_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s \right) \leq \frac{D_0}{1 - \lambda_0} \|\mu\|. \quad (5.14)$$

et (5.10) implique alors que :

$$\Pi_{qp} \mu(\partial_r \varphi) \leq 2 \left(\frac{D_0}{1 - \lambda_0} \right) \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Considérons à présent une mesure signée de masse nulle $\mu \in \mathcal{B}(X)$ et une fonction continue $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ dépendant uniquement des variables $\mathbf{x}_\Lambda$ pour un certain Λ fini dans $\mathbb{Z}$. Entre chaque application de T^γ , nous reprenons la décomposition de (5.9). Si nous supposons que $t = m\gamma$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$T^t \mu(\varphi) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^{m+1}} \Pi_{p_{m-1}p_m} T^\gamma \Pi_{p_{m-2}p_{m-1}} \dots T^\gamma \Pi_{0p_0} \mu(\varphi) \quad (5.15)$$

Soit alors $\mathcal{F}(\Lambda)$ l'ensemble des vecteurs $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^{m+1}$ tels que $p_m \in \Lambda$ et que chaque p_k appartient à $\{p_{k-1} - \gamma, \dots, p_{k-1}\}$. Nous constatons que toute configuration $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^{m+1}$ n'appartenant pas à $\mathcal{F}(\Lambda)$ ne contribue pas à la somme en (5.15). En effet, d'une part, si p_m n'appartient pas à Λ , $\Pi_{p_{m-1}p_m} \varphi$ est identiquement nul parce que φ ne dépend pas de x_{p_m} . Et d'autre part, si p_k n'appartient pas à $\{p_{k-1} - \gamma, \dots, p_{k-1}\}$, par définition du bon ordre $<$, $\Pi_{p_{k-1}p_k} \varphi$ ne dépend d'aucune des variables dans $\{p_{k-1} - \gamma, \dots, p_{k-1}\}$. Donc $(\Pi_{p_{k-1}p_k} \varphi) \circ T^\gamma$ est indépendant de $x_{p_{k-1}}$ et :

$$\Pi_{p_{k-1}p_k} T^\gamma \Pi_{p_{k-2}p_{k-1}} \mu(\varphi) = \Pi_{p_{k-2}p_{k-1}} \mu \left((\Pi_{p_{k-1}p_k} \varphi) \circ T^\gamma \right) = 0,$$

quelle que soit la valeur de $p_{k-2} \in \mathbb{Z}$.

Dès lors, si nous définissons l'opérateur $\tilde{T}^{qp}$:

$$\tilde{T}^{qp} = T^\gamma \Pi_{qp}, \quad (5.16)$$

l'équation (5.15) devient :

$$\begin{aligned} T^t \mu(\varphi) &= \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} \Pi_{p_{m-1}p_m} T^\gamma \Pi_{p_{m-2}p_{m-1}} \dots T^\gamma \Pi_{0p_0} \mu(\varphi) \\ &= \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} \Pi_{p_{m-1}p_m} \tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mu(\varphi), \end{aligned} \quad (5.17)$$

et nous retrouvons évidemment une somme sur des chemins similaire à celle obtenue en (3.30) pour les automates cellulaires probabilistes.

Nous allons à présent introduire l'argument de découplage de Keller et Liverani. Nous commençons par introduire le couplage $\Phi_1^{(p)}$ défini par :

$$\Phi_1^{(p)}(\mathbf{x})_q = \begin{cases} \Phi_\epsilon(\mathbf{x}_{\neq p}, +1)_q & \text{si } q \neq p \\ \Phi_1(\mathbf{x})_p & \text{if } q = p \end{cases} \quad (5.18)$$

Nous constatons immédiatement que, en dehors des sites p et $p+1$, les couplages $\Phi_1^{(p)}$ et Φ_ϵ sont rigoureusement identiques. Et si ϵ est proche de 1, $\Phi_1^{(p)}$ sera une modification très légère de Φ_ϵ aux sites p et $p+1$. Dès lors :

□ **Lemme 5.6 :**

Soit $\mu \in \mathcal{B}(X)$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\left| \Phi_\epsilon \mu - \Phi_1^{(p)} \mu \right| \leq 4 (1 - \epsilon) \|\mu\|.$$

Démonstration:

Nous suivrons essentiellement la preuve de la Proposition 5 dans [37], à quelques modifications près permettant de tenir compte de la discontinuité du couplage en 0. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(X)$ une fonction telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$. Définissons $F_t = t \Phi_\epsilon + (1-t) \Phi_1^{(p)}$. Nous voyons alors que :

$$\begin{aligned} \mu(\varphi \circ \Phi_\epsilon) - \mu(\varphi \circ \Phi_1^{(p)}) &= \mu \left(\int_0^1 \partial_t (\varphi \circ F_t) dt \right) \\ &= \int_0^1 \mu \left(\sum_q (\partial_q \varphi \circ F_t) \partial_t F_{t,q} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Etant donné que $\partial_t F_{t,q} = \Phi_{\epsilon,q} - \Phi_{1,q}^{(p)}$ est identiquement nul si $q \neq p, p+1$, la somme sur q se réduit aux termes $q = p, p+1$ et devient :

$$\begin{aligned} \mu \left(\sum_q (\partial_q \varphi \circ F_t) \partial_t F_{t,q} \right) \\ = \mu \left((\partial_p \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon,p} - \Phi_{1,p}^{(p)} \right) \right) \\ + \mu \left((\partial_{p+1} \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon,p+1} - \Phi_{1,p+1}^{(p)} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Considérons à présent le premier terme de (5.20). Si nous définissons :

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^{x_p} (\partial_p \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon,p} - \Phi_{1,p}^{(p)} \right) d\xi_p.$$

nous constatons que ψ est continue par morceaux par rapport à $\mathbf{x}_{\neq p}$, continue par rapport à x_p et continuellement différentiable par morceaux par rapport à x_p . Nous pouvons donc appliquer la Proposition A.4 :

$$\mu \left((\partial_p \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon,p} - \Phi_{1,p}^{(p)} \right) \right) = \mu \left(\partial_p \psi \right) \leq \|\mu\| \|\psi\|_{\infty}$$

Comme la fonction $\Phi_{\epsilon,p} - \Phi_{1,p}^{(p)}$ est constante si $x_p \in (0, 1]$ ou si $x_p \in [-1, 0]$, et bornée par $(1 - \epsilon)$, nous voyons que :

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{x})| &= \left| \int_0^{x_p} (\partial_p \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon,p} - \Phi_{1,p}^{(p)} \right) d\xi_p \right| \\ &\leq (1 - \epsilon) \left| \int_0^{x_p} (\partial_p \varphi \circ F_t) d\xi_p \right|. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Etant donné que si x_p appartient à un des intervalles $[-1, 0]$ ou $(0, 1]$, nous avons :

$$\partial_p (\varphi \circ F_t) = \sum_q \partial_q \varphi \circ F_t \partial_p F_{t,q} = \partial_p \varphi \circ F_t \partial_p F_{t,p} = \partial_p \varphi \circ F_t, \quad (5.22)$$

nous constatons que $\int_0^{x_p} (\partial_p \varphi \circ F_t) d\xi_p = \varphi \circ F_t(\mathbf{x}) - \varphi \circ F_t(\mathbf{x}_{\neq p}, 0)$ et (5.21) implique alors que $|\psi|_{\infty} \leq 2(1 - \epsilon)$. Nous avons donc :

$$\mu \left((\partial_p \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon,p} - \Phi_{1,p}^{(p)} \right) \right) \leq 2(1 - \epsilon) \|\mu\| \quad (5.23)$$

Le même raisonnement peut être répété pour $p + 1$ et donne :

$$\mu \left((\partial_{p+1} \varphi \circ F_t) \left(\Phi_{\epsilon, p+1} - \Phi_{1, p+1}^{(p)} \right) \right) \leq \|\mu\| \, 2(1 - \epsilon) \quad (5.24)$$

Rassemblant les inégalités (5.23) et (5.24), (5.20) devient alors :

$$\mu \left(\sum_q (\partial_q \varphi \circ F_t) \, \partial_t F_{t,q} \right) \leq 4(1 - \epsilon) \, \|\mu\|. \quad (5.25)$$

Reprenant (5.19), nous trouvons donc finalement :

$$\mu(\varphi \circ \Phi_\epsilon) - \mu(\varphi \circ \Phi_1^{(p)}) \leq 4(1 - \epsilon) \, \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Nous introduisons à présent une dynamique modifiée $T_1^{(p)} = \Phi_1^{(p)} \circ \tau^{\mathbb{Z}}$. Nous pouvons alors appliquer la dynamique modifiée au lieu de notre dynamique de départ au prix d'une erreur qui va grandir au plus linéairement avec le temps :

□ **Lemme 5.7 :**

Soit μ une mesure dans $\mathcal{B}(X)$. Alors :

$$\left| T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu \right| \leq 4(1 - \epsilon) \frac{1 + nD_0}{1 - \lambda_0} \|\mu\|$$

Démonstration:

Tout d'abord, nous constatons que :

$$\begin{aligned} T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu &= \sum_{k=0}^{n-1} T_1^{(p)k} \left(T_1^{(p)k} - T \right) T^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} T_1^{(p)k} \left(\Phi_1^{(p)} - \Phi_\epsilon \right) \tau^{\mathbb{Z}} T^{n-k-1} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Et donc, appliquant la formule (5.26) à $T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu$ puis utilisant le fait que, tout comme l'opérateur T , l'opérateur $T_1^{(p)}$ est de norme 1 dans $L^1(X)$, nous

avons :

$$\begin{aligned} \left| T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| T_1^{(p)k} \left(\Phi_1^{(p)} - \Phi_\epsilon \right) \tau^{\mathbb{Z}} T^{n-k-1} \mu \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left(\Phi_1^{(p)} - \Phi_\epsilon \right) \tau^{\mathbb{Z}} T^{n-k-1} \mu \right| \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nous pouvons alors applique le Lemme 5.6 et (5.27) devient :

$$\left| T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu \right| \leq 4(1 - \epsilon) \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \tau^{\mathbb{Z}} T^{n-k-1} \mu \right\| \quad (5.28)$$

Alors, l'inégalité de Lasota-Yorke pour T et l'inégalité de Lasota-Yorke pour $\tau^{\mathbb{Z}}$ qui découlent directement de la Proposition 5.1 nous permettent d'affirmer que :

$$\begin{cases} \|T\mu\| \leq \lambda_0 \|\mu\| + D_0 |\mu| \\ \|\tau^{\mathbb{Z}} \mu\| \leq \lambda_0 \|\mu\| + D_0 |\mu| \end{cases}$$

Et donc, combinant les deux inégalités, nous pouvons borner $\|\tau^{\mathbb{Z}} T^{n-k-1} \mu\|$ par :

$$\|\tau^{\mathbb{Z}} T^{n-k-1} \mu\| \leq \lambda_0^{n-k} \|\mu\| + \frac{D_0}{1 - \lambda_0} |\mu| \quad (5.29)$$

Cette borne trouvée en (5.29) peut être appliquée à (5.28) qui devient alors :

$$\begin{aligned} \left| T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu \right| &\leq 4(1 - \epsilon) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0^{n-k} \|\mu\| + \frac{D_0}{1 - \lambda_0} |\mu| \\ &\leq 4(1 - \epsilon) \left(\frac{1}{1 - \lambda_0} \|\mu\| + n \frac{D_0}{1 - \lambda_0} |\mu| \right) \end{aligned}$$

Finalement, nous utilisons le Lemme 5.3 et trouvons le résultat annoncé :

$$\left| T_1^{(p)n} \mu - T^n \mu \right| \leq 4(1 - \epsilon) \frac{1 + nD_0}{1 - \lambda_0} \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Avec l'estimation de découplage obtenue, nous pouvons à présent démontrer la proposition suivante :

□ **Proposition 5.8 :**

Il existe un $\gamma \in \mathbb{N}$, un $\tilde{\sigma} < \frac{1}{\gamma}$ et un $\epsilon_0 \in (0, 1)$ tels que si $\epsilon > \epsilon_0$, nous avons :

$$\|T^\gamma \Pi_{qp} \mu\| \leq \tilde{\sigma} \|\mu\|.$$

Démonstration:

Pour un γ et un $n < \gamma$ arbitraires, nous commençons par appliquer l'inégalité de Lasota-Yorke à $T^{\gamma-n}$:

$$\|T^\gamma \Pi_{qp} \mu\| \leq \lambda_0^{\gamma-n} \|T^n \Pi_{qp} \mu\| + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |T^n \Pi_{qp} \mu|. \quad (5.30)$$

Appliquant de nouveau l'inégalité de Lasota-Yorke à $\|T^n \Pi_{qp} \mu\|$ et utilisant les bornes sur les normes de Π_{qp} du Lemme 5.5,

$$\begin{aligned} \|T^n \Pi_{qp} \mu\| &\leq \lambda_0^n \|\Pi_{qp} \mu\| + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\Pi_{qp} \mu| \\ &\leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} \lambda_0^n \|\mu\| + 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\mu| \\ &\leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^n + 1) \|\mu\|, \end{aligned} \quad (5.31)$$

nous voyons que (5.30) devient :

$$\|T^\gamma \Pi_{qp} \mu\| \leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^\gamma + \lambda_0^{\gamma-n}) \|\mu\| + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |T^n \Pi_{qp} \mu|. \quad (5.32)$$

Le premier terme du membre de droite de (5.32) va donc devenir aussi petit que l'on veut si nous choisissons γ et n suffisamment grands. Il ne reste donc plus qu'à contrôler le terme $|T^n \Pi_{qp} \mu|$. Pour cela, nous commençons par remplacer la dynamique par une dynamique découplée au site p avec le Lemme 5.7 :

$$\begin{aligned} |T^n \Pi_{qp} \mu| &\leq \left| T_1^{(p)n} \Pi_{qp} \mu \right| + 4(1-\epsilon) \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \|\Pi_{qp} \mu\| \\ &\leq \left| T_1^{(p)n} \Pi_{qp} \mu \right| + 8(1-\epsilon) \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \frac{D_0}{1-\lambda_0} \|\mu\|. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Nous avons donc remplacé la dynamique T par une dynamique $T_1^{(p)}$ découplée au site p . Cette dynamique peut se factoriser en une dynamique agissant sur x_p et une dynamique agissant sur $x_{\neq p}$. La dynamique agissant en x_p est

particulièrement simple. Si $f : I \mapsto I$ est l'application :

$$f(x_p) = \begin{cases} x_p & \text{si } x_p > 0 \\ x_p + 1 & \text{si } x_p \leq 0 \end{cases}$$

alors la dynamique en p revient à appliquer τ puis f . Donc $T_1^{(p)n}(\mathbf{x})_p = (\tau \circ f)^n x_p$. Les hypothèses de symétrie sur τ impliquent que τ et f commutent et puisque f est idempotent, nous trouvons alors :

$$T_1^{(p)n}(\mathbf{x})_p = \tau^n(fx_p) \quad (5.34)$$

D'autre part, sur $\mathbb{Z} \setminus \{p\}$, la dynamique $T_1^{(p)}$ étant indépendante de x_p , nous pouvons introduire une fonction $S : I^{\mathbb{Z} \setminus \{p\}} \mapsto I^{\mathbb{Z} \setminus \{p\}}$ telle que :

$$T_1^{(p)}(\mathbf{x})_{\neq p} = S\mathbf{x}_{\neq p} \quad (5.35)$$

Utilisant (5.34) et (5.35), nous voyons effectivement que la dynamique se factorise en deux dynamiques : une dynamique agissant sur p et une dynamique agissant sur $\mathbb{Z} \setminus \{p\}$.

$$T_1^{(p)n}(\mathbf{x}) = (\tau^n fx_p, S^n \mathbf{x}_{\neq p}) \quad (5.36)$$

A présent, par définition des projecteurs Π_{qp} en (5.7), nous voyons que pour toute fonction continue φ telle que $|\varphi|_{\mathcal{O}} \leq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Pi_{qp}\varphi \circ T_1^{(p)n}(\mathbf{x}) &= \int \varphi(\tau^n fx_p, S^n \mathbf{x}_{\neq p}) \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s \\ &\quad - \int \varphi(\tau^n fx_p, S^n \mathbf{x}_{\neq p}) \prod_{s \leq_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Par souci de concision, nous pouvons définir la fonction ψ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \varphi(x_p, S^n \mathbf{x}_{\neq p}) \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(+)}(x_s) \, dx_s. \quad (5.38)$$

Nous voyons que $|\psi|_{\infty} \leq |\varphi|_{\infty} \leq 1$ et que $\Pi_{qp}\varphi \circ T_1^{(p)n}(\mathbf{x})$ peut se réécrire :

$$\Pi_{qp}\varphi \circ T_1^{(p)n}(\mathbf{x}) = \psi(\tau^n f x_p, \mathbf{x}_{\neq p}) - \int \psi(\tau^n f \xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p) d\xi_p \quad (5.39)$$

Si nous intégrons par rapport à μ l'équation (5.39) nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} T_1^{(p)n} \Pi_{qp} \mu(\varphi) \\ = \mu \left(\psi(\tau^n f x_p, \mathbf{x}_{\neq p}) - \int \psi(\tau^n f \xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p) d\xi_p \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Mais d'une part nous voyons que $\psi(\tau^n f x_p, \mathbf{x}_{\neq p})$ peut être réécrit :

$$\begin{aligned} \psi(\tau^n f x_p, \mathbf{x}_{\neq p}) &= \partial_p \int_{-1}^{x_p} \psi(\tau^n f \xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p \\ &= \partial_p \int \psi(\tau^n f \xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) \mathbb{1}_{[-1, x_p)}(\xi_p) d\xi_p \\ &= \partial_p \int \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) (\tau^n f)^* \mathbb{1}_{[-1, x_p)}(\xi_p) d\xi_p \end{aligned} \quad (5.41)$$

où $(\tau^n f)^*$ est l'opérateur de transfert associé à l'application $\tau^n \circ f$ agissant sur les fonctions dans $L^1(I)$. D'autre part, la densité $h_{\text{inv}}^{(+)}(x_p)$ étant à la fois τ et f invariante, nous avons :

$$\begin{aligned} &\int \psi(\tau^n f x_p, \mathbf{x}_{\neq p}) h_{\text{inv}}^{(+)}(x_p) dx_p \\ &= \int \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p) d\xi_p \\ &= \partial_p (1 + x_p) \int \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p) d\xi_p \end{aligned} \quad (5.42)$$

Donc, reprenant (5.41) et (5.42), (5.40) devient :

$$\begin{aligned} T_1^{(p)n} \Pi_{qp} \mu(\varphi) \\ = \mu \left(\partial_p \int \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) ((\tau^n f)^* \mathbb{1}_{[-1, x_p)}(\xi_p) - (1 + x_p) h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p)) d\xi_p \right) \\ \leq \|\mu\| \sup_{\mathbf{x}} \left| \int \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) ((\tau^n f)^* \mathbb{1}_{[-1, x_p)}(\xi_p) - (1 + x_p) h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p)) d\xi_p \right| \\ \leq \|\mu\| \left| (\tau^n f)^* \mathbb{1}_{[-1, x_p)}(\xi_p) - h_{\text{inv}}^{(+)}(\xi_p) \right|_{L^1(I)} |\varphi|_{\infty} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Nous pouvons à présent faire usage des propriétés chaotiques de l'application sur site τ . En appliquant la Proposition 5.1, l'inégalité (5.43) devient :

$$T_1^{(p)^n} \Pi_{qp} \mu(\varphi) \leq \|\mu\| c \varsigma^n \|f^* \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p)\|_{BV(I)} |\varphi|_\infty \quad (5.44)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer $\|f^* \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p)\|_{BV(I)}$. Pour cela, nous pouvons vérifier que $f^* \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p)$ est donné par :

$$\mathbb{1}_{[0,1]}(\xi_p) (\mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p - 1) + \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p)) , \quad (5.45)$$

Si $[a, b]$ est un intervalle de I , alors $\|\mathbb{1}_{[a,b]}\|_{BV(I)}$ peut être évalué par :

$$\int \varphi'(x) \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) \leq 2 |\varphi|_\infty \quad (5.46)$$

ce qui implique que $\|\mathbb{1}_{[a,b]}\|_{BV(I)} \leq 2$. Donc, reprenant (5.45), nous voyons que :

$$\begin{aligned} \|f^* \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p)\|_{BV(I)} &\leq \|\mathbb{1}_{[0,1]}(\xi_p) \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p - 1)\|_{BV(I)} + \|\mathbb{1}_{[0,1]}(\xi_p) \mathbb{1}_{[-1, x_p]}(\xi_p)\|_{BV(I)} \\ &\leq 2 + 2 = 4 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Revenons alors à (5.44). L'inégalité (5.47) implique que :

$$\left| T_1^{(p)^n} \Pi_{qp} \mu \right| \leq 4 c \varsigma^n \|\mu\| \quad (5.48)$$

Nous pouvons alors conclure : à partir de (5.48), (5.33) et (5.32), nous voyons que

$$\begin{aligned} &\|T^\gamma \Pi_{qp} \mu\| \\ &\leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^\gamma + \lambda_0^{\gamma-n}) \|\mu\| + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \left(4c\varsigma^n + 8(1-\epsilon) \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \|\mu\| \\ &\leq \left[2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^\gamma + \lambda_0^{\gamma-n} + 2c\varsigma^n) + \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right)^2 8(1-\epsilon) \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \right] \|\mu\| \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dans la limite où ϵ tend vers 1, le facteur devant $\|\mu\|$ en (5.49) devient $2\frac{D_0}{1-\lambda_0}(\lambda_0^\gamma + \lambda_0^{\gamma-n} + 2c\zeta^n)$ et nous pouvons choisir γ et n suffisamment grands pour que :

$$2\frac{D_0}{1-\lambda_0}(\lambda_0^\gamma + \lambda_0^{\gamma-n} + 2c\zeta^n) < \tilde{\sigma} \quad (5.50)$$

pour un certain $\tilde{\sigma} < \frac{1}{\gamma}$. Ensuite, la définition de limite implique qu'il existe $\epsilon_0 \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\epsilon \in [\epsilon_0, 1]$, nous avons :

$$\left[2\frac{D_0}{1-\lambda_0}(\lambda_0^\gamma + \lambda_0^{\gamma-n} + 2c\zeta^n) + \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right)^2 8(1-\epsilon) \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \right] \leq \tilde{\sigma}. \quad (5.51)$$

Nous avons donc prouvé qu'il existe un $\gamma \in \mathbb{N}$, un $\tilde{\sigma} < \frac{1}{\gamma}$ et un $\epsilon_0 > 0$ tels que, si $\epsilon \in (\epsilon_0, 1)$, nous avons :

$$\|T^\gamma \Pi_{qp} \mu\| \leq \tilde{\sigma} \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Nous avons donc prouvé que les opérateurs qui apparaissent en (5.17) sont des contractions. De façon similaire à ce qui a été rencontré lors de la preuve du critère de Dobrushin, nous allons donc avoir une compétition entre deux termes : d'une part le produit d'opérateurs qui tend à décroître exponentiellement vite et d'autre part le nombre de termes dans la somme qui tend à croître exponentiellement vite. En s'arrangeant pour que les produits d'opérateurs décroissent plus vite que le nombre de termes dans la somme, nous pouvons alors démontrer le résultat suivant :

□ **Théorème 5.9 :**

Il existe un $\epsilon_0 \in (0, 1)$, un $\sigma \in (0, 1)$ et une constante $C > 0$ tels que si $\epsilon \in [\epsilon_0, 1]$, alors pour toute mesure signée de masse nulle μ dans $\mathcal{B}(X)$ et pour toute fonction continue φ ne dépendant que des variables dans un $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, nous avons :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^t \|\mu\| |\varphi|_\infty.$$

Démonstration:

Dans un premier temps, nous supposons que $t = m\gamma$, pour un $\gamma \in \mathbb{N}$ arbitraire. Appliquant le développement de (5.17) à $T^t \mu(\varphi)$ puis utilisant les

Lemme 5.5 et 5.3, nous voyons que :

$$\begin{aligned}
|T^t \mu(\varphi)| &\leq \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} |\Pi_{p_{m-1}p_m} \tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mu| |\varphi|_\infty \\
&\leq 2 \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} |\tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mu| |\varphi|_\infty \\
&\leq 2 \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} \|\tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mu\| |\varphi|_\infty
\end{aligned} \tag{5.52}$$

La Proposition 5.8 implique alors qu'il existe un γ et un $\epsilon_0 \in (0, 1)$ tels que, si $\epsilon \in [\epsilon_0, 1]$, $\|\tilde{T}^{p_k-1p_k}\| \leq \tilde{\sigma}$ pour un certain $\tilde{\sigma} < \frac{1}{\gamma}$. Dès lors, (5.52) devient :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq 2 |\mathcal{F}(\Lambda)| \tilde{\sigma}^m \|\mu\| |\varphi|_\infty$$

Il est immédiat de vérifier que $|\mathcal{F}(\Lambda)| \leq |\Lambda| \gamma^m$ et donc :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq 2 |\Lambda| (\gamma \tilde{\sigma})^m \|\mu\| |\varphi|_\infty$$

Mais étant donné que $\gamma \tilde{\sigma} < 1$, il existe un $\sigma < 1$ tel que :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq 2 |\Lambda| \sigma^t \|\mu\| |\varphi|_\infty \tag{5.53}$$

Il reste alors à prouver le résultat pour des t arbitraires. Etant donné qu'il existe toujours un $k < \gamma$ tel que $t = m\gamma + k$, et que $\varphi \circ T^k$ va dépendre uniquement des variables dans un ensemble de taille inférieure à $k|\Lambda|$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|T^t \mu(\varphi)| &= |T^{m\gamma} \mu(\varphi \circ T^k)| \leq 2 k |\Lambda| \sigma^{m\gamma} \|\mu\| |\varphi|_\infty \\
&\leq \frac{2\gamma}{\sigma^\gamma} |\Lambda| \sigma^t \|\mu\| |\varphi|_\infty \\
&\leq C |\Lambda| \sigma^t \|\mu\| |\varphi|_\infty .
\end{aligned} \quad \blacksquare$$

Le Théorème 5.9 implique que si $\epsilon \in [\epsilon_0, 1]$, toute mesure de probabilité dans $\mathcal{B}(X)$ va converger exponentiellement vite vers $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ et donc que $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ est l'unique mesure de probabilité invariante dans $\mathcal{B}(X)$.

□ **Théorème 5.10 :**

Soit ϵ_0 et σ donnés par le Théorème 5.9. Supposons que $\epsilon \in [\epsilon_0, 1]$. Alors, pour

toute mesure de probabilité μ dans $\mathcal{B}(X)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|T^t \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^t |\varphi|_{\infty}.$$

pour toute fonction continue φ ne dépendant que des variables dans un $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini.

Démonstration:

Si μ est une mesure de probabilité dans $\mathcal{B}(X)$, alors $\mu - \mu_{\text{inv}}^{(+)}$ est une mesure signée de masse nulle. Mais comme $\|\mu - \mu_{\text{inv}}^{(+)}\| \leq \|\mu\| + \|\mu_{\text{inv}}^{(+)}\| < \infty$, $\mu - \mu_{\text{inv}}^{(+)}$ appartient à $\mathcal{B}(X)$ et nous pouvons donc lui appliquer le Théorème 5.9. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que :

$$|T^t \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^t |\varphi|_{\infty}. \quad \blacksquare$$

Nous avons donc démontré que, si $\epsilon \in [\epsilon_0, 1]$, $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ était l'unique mesure invariante dans $\mathcal{B}(X)$ et que toute mesure de $\mathcal{B}(X)$ converge exponentiellement vite vers $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$. Afin de démontrer que μ est l'unique mesure SRB, il reste à montrer qu'elle satisfait une loi des grands nombres pour une classe importante d'observables φ . Il s'avère que celle-ci est la conséquence du lemme suivant, dont une preuve peut être retrouvée dans [55, Thm 5.1] :

□ **Lemme 5.11 :**

Soit μ une mesure de probabilité et φ une fonction telle que :

$$\begin{aligned} & - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \mu(\varphi \circ T^t) = c \\ & - \sup_{n > 0} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu(\varphi \circ T^k \varphi \circ T^n) - \mu(\varphi \circ T^k) \mu(\varphi \circ T^n)| < \infty \end{aligned}$$

Alors, μ -presque partout, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi \circ T^t = c$.

A présent, nous pouvons à présent démontrer que :

□ **Corollaire 5.12 :**

Sous les hypothèses du Théorème 5.10, nous avons $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ -presque partout :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi \circ T^t = \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)$$

pour toute fonction continue φ dépendant d'un nombre fini de variables et telle que $|\varphi|_{\mathcal{C}^1} = |\varphi|_{\infty} + \sup_p |\partial_p \varphi|_{\infty} < \infty$.

Démonstration:

Commençons par appliquer le Lemme 5.11 à la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$. Etant donné que $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ est une mesure invariante, nous constatons immédiatement que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \circ T^t) = \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi) \quad (5.54)$$

Ensuite, si $k \leq n$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left| \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \circ T^k \varphi \circ T^n) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \circ T^k) \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \circ T^n) \right| \\ & \leq \left| \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \varphi \circ T^{n-k}) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)^2 \right|. \end{aligned}$$

Et, définissant $\mu(\psi) = \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\psi)$, il est aisé de constater que μ est une mesure signée de masse nulle et que :

$$\|\mu\| \leq \|\varphi \mu_{\text{inv}}^{(+)}\| + \|\mu_{\text{inv}}^{(+)}\|$$

Mais à présent, si $|\varphi|_{\mathcal{C}^1} < \infty$, nous voyons que, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(X)$ telle que $|\psi|_{\infty} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \varphi \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\partial_p \psi) & \leq \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\partial_p \int_0^{x_p} \varphi \partial_p \psi) \leq \|\mu_{\text{inv}}^{(+)}\| \left\| \int_0^{x_p} \varphi \partial_p \psi \right\|_{\infty} \\ & \leq \|\mu_{\text{inv}}^{(+)}\| \left\| \int_0^{x_p} \partial_p(\varphi \psi) - \int_0^{x_p} \partial_p \varphi \psi \right\|_{\infty} \leq \|\mu_{\text{inv}}^{(+)}\| 2 \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1} \end{aligned}$$

Donc, pour une certaine constante C dépendant de φ

$$\left| \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi \varphi \circ T^{n-k}) - \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)^2 \right| \leq |T^{n-k} \mu(\varphi)| \leq C \sigma^{n-k}$$

Nous constatons alors que :

$$\begin{aligned} & \sup_{n>0} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu(\varphi \circ T^k \varphi \circ T^n) - \mu(\varphi \circ T^k) \mu(\varphi \circ T^n)| \\ & \leq \sup_{n>0} \sum_{k=0}^{\infty} C \sigma^{|n-k|} < \infty \end{aligned}$$

Le résultat annoncé est à présent une conséquence directe du Lemme 5.11 dont les deux hypothèses sont vérifiées pour $c = \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)$. ■

Nous pouvons maintenant conclure ce chapitre en remarquant que nous avons bien prouvé l'unicité de la mesure SRB à faible couplage pour le modèle que nous considérons. En effet, il a été démontré qu'il existe un ϵ_0 tel que, si $\epsilon > \epsilon_0$, alors $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ est l'unique mesure invariante dans l'ensemble $\mathcal{B}(X)$, et cette mesure vérifie une loi des grands nombres, parce que pour toute fonction continue φ dépendant d'un nombre fini de variables et telle que $|\varphi|_{\mathcal{C}^1} = |\varphi|_{\infty} + \sup_p |\partial_p \varphi|_{\infty} < \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \mu(\varphi \circ T^t) = \mu_{\text{inv}}^{(+)}(\varphi)$$

$\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ -presque partout.

CHAPITRE 6

Transition de phase pour les mesures SRB

A la lumière des résultats obtenus dans la première partie consacrée aux automates cellulaires probabilistes, il est pertinent de se poser la question de savoir si l'unicité de la mesure invariante peut également être garantie pour des systèmes fortement couplés ou si nous pouvons observer des transitions de phase au niveau des mesures SRB. Les premiers indices en faveur de l'existence de transitions de phase pour les réseaux d'applications couplées ont été obtenus par des simulations numériques Miller et Huse [28]. Ces résultats ont été confirmés par d'autres simulations numériques, par Boldrighini *et al* [7, 8] et par Just et Schmüser [32]. Les premiers résultats analytiques ont été fournis par Gielis et MacKay [23] qui ont construit des réseaux d'applications couplées possédant une dynamique symbolique se comportant comme un automate cellulaire probabiliste. Ces résultats ont été étendus ensuite par Just [31], puis Blank et Bunimovich [6]. Plus tard, Bardet et Keller ont pu prouver l'existence d'une transition de phase en utilisant un argument de Peierls mais sans utiliser l'hypothèse d'une dynamique symbolique [4].

Au cours de ce chapitre, nous présenterons la méthode exposée dans [17] pour le réseau d'applications couplées de la Section 5.2. Nous avons déjà vu au

chapitre précédent que si ϵ était proche de 1, ce réseau d'applications couplées ne possédait qu'une unique mesure SRB $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ dans $\mathcal{B}(X)$. Grâce à un argument de Peierls, nous verrons que, pour ϵ proche de 0, d'autres mesures invariantes apparaissent dans $\mathcal{B}(X)$. Ensuite, adaptant la technique de découplage présentée au Chapitre 3, nous montrerons qu'une vaste classe de mesures converge exponentiellement vite vers une de ces mesures invariantes $\mu_{\text{inv}}^{(-)} \neq \mu_{\text{inv}}^{(+)}$ et qu'il s'ensuit que cette mesure vérifie une loi des grands nombres et est donc véritablement une nouvelle mesure SRB. Nous aurons alors démontré l'existence de transitions de phase pour les mesures SRB.

6.1 Construction des contours

Supposons alors que nous désirions évaluer la masse des configurations $\mathbf{x}$ telles que $T^n x_p \in (0, 1]$ pour tout p appartenant à un certain $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini par rapport à une certaine mesure signée μ , c'est-à-dire $|\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu|$. Pour cela, commençons par définir $\mathcal{C}(\Lambda)$ l'ensemble des configurations $\mathbf{x} \in X$ telles que $T^n x_p \in (0, 1]$ pour tout $p \in \Lambda$. Alors, à toute configuration $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\Lambda)$, nous pouvons associer un amas de sites positifs Γ dans $\mathbb{Z}^{\{0, \dots, n\}}$ en adaptant les règles présentées à la Section 3.1 :

1. Au temps $t = n$, nous ajoutons tous les sites de Λ à Γ .
2. Ensuite, pour chaque temps t et par ordre de temps décroissant, si (p, t) appartient à Γ , et que $T^{t-1} x_p$ et $T^{t-1} x_{p+1}$ sont tous deux positifs, nous ajoutons les sites $(p, t-1)$ et $(p+1, t-1)$ à Γ .

Soit σ la fonction qui à $\mathbf{x}$ lui fait correspondre son amas Γ et soit $\mathcal{G}(\Lambda) = \sigma(\mathcal{C}(\Lambda))$ l'ensemble de tous les amas compatibles avec $\mathcal{C}(\Lambda)$. Nous voyons à nouveau que $\mathcal{C}(\Lambda) = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \sigma^{-1}\Gamma$, et donc :

$$\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} (T^n \mathbf{x}) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \mathbb{1}_{\sigma^{-1}\Gamma}(\mathbf{x}). \quad (6.1)$$

Si pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)$, nous définissons le contour de Γ :

$$\partial\Gamma = \left\{ (p, t) \in \Gamma \mid t = 0 \text{ ou } (p, t-1) \notin \Gamma \text{ ou } (p+1, t-1) \notin \Gamma \right\}. \quad (6.2)$$

et si Γ_t est la restriction de Γ au temps t et $\partial\Gamma_t$ la restriction de $\partial\Gamma$ au temps t , nous pouvons écrire la fonction caractéristique des ensembles $\sigma^{-1}\Gamma$:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\sigma^{-1}\Gamma}(\mathbf{x}) &= \prod_{t=0}^n \left[\prod_{p \in \Gamma_t} \mathbb{1}_{(0,1]}(T^t x_p) \prod_{p \in \partial\Gamma_{t+1}} (1 - \mathbb{1}_{(0,1]}(T^t x_p) \mathbb{1}_{(0,1]}(T^t x_{p+1})) \right] \\ &= \prod_{t=0}^n \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(T^t \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

où $E(\Gamma, t) \subseteq X$ est évidemment défini par :

$$\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(\mathbf{x}) = \prod_{x \in \Gamma_t} \mathbb{1}_{(0,1]}(T^t x_p) \prod_{x \in \partial\Gamma_{t+1}} (1 - \mathbb{1}_{(0,1]}(T^t x_p) \mathbb{1}_{(0,1]}(T^t x_{p+1})). \quad (6.4)$$

Nous pouvons à présent évaluer $|\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu|$. En effet, pour toute fonction continue φ , nous voyons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu(\varphi) &= \mu\left(\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \circ T^n \varphi \circ T^n\right) \\ &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \mu\left(\prod_{t=0}^n \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \circ T^t \varphi \circ T^n\right) \\ &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \prod_{t=0}^{n-1} T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mu(\varphi) \end{aligned} \quad (6.5)$$

où nous supposons que le produit d'opérateur est ordonné temporellement. Donc, pour évaluer $|\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu|$, nous pouvons utiliser l'expansion en amas :

$$|\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu| \leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \left| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \left[\prod_{t=0}^{n-1} (T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}) \right] \mu \right| \quad (6.6)$$

Les amas que nous avons construits sont rigoureusement identiques que ceux de la Section 3.1, et en particulier, la Proposition 3.1 qui nous permettait d'évaluer le nombre d'amas ayant un contour d'une taille donnée reste toujours valable. Il ne reste donc plus qu'à trouver l'équivalent du Lemme 3.2 pour évaluer le poids de chacun des amas. Cependant, contrairement aux auto-

mates cellulaires probabilistes, nous n'allons pas majorer $|\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu|$ en prouvant que l'opérateur T est petit, parce que ce n'est pas le cas, mais plutôt en montrant que si $\mathbf{x} \in E(\Gamma, t-1) \cap T^{-1}E(\Gamma, t)$, alors les variables x_p pour $p \in \partial\Gamma_t$ appartiennent nécessairement à des ensembles de mesure de Lebesgue faible.

Nous constatons en effet que si $\mathbf{x} \in E(\Gamma, t-1)$ et si $T\mathbf{x} \in E(\Gamma, t)$, alors pour tout $p \in \partial\Gamma_t$, nous avons $\Phi_\epsilon(\tau x_p, \tau x_{p+1})_p > 0$ et x_p ou x_{p+1} négatifs. Cela implique que τx_p appartient à $\tau x_p \in (-\epsilon, 0] \cup (1-\epsilon, 1]$ et donc que x_p appartient à $E_\epsilon = \tau^{-1}(-\epsilon, 0] \cup \tau^{-1}(1-\epsilon, 1]$. Dès lors, $T^{-1}E(\Gamma, t) \cap E(\Gamma, t-1) \subseteq E_\epsilon^{\partial\Gamma_t} \cap E(\Gamma, t-1)$ et étant donné que si $A \subseteq B$, nous avons $|\mathbb{1}_A \mu| \leq |\mathbb{1}_B \mu|$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} |\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu| &= |T \mathbb{1}_{T^{-1}E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu| \\ &\leq |\mathbb{1}_{E_\epsilon^{\partial\Gamma_t}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)} \mu|. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Si $\partial\Gamma_t$ se réduit à un seul site p , il est aisé de constater que :

$$\mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \mu(\varphi) = \mu \left(\partial_p \int_0^{x_p} \mathbb{1}_{E_\epsilon}(\xi_p) \varphi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p \right). \quad (6.8)$$

Les hypothèses de symétrie sur τ impliquent que $|E_\epsilon \cap [0, 1]|$ et $|E_\epsilon \cap [-1, 0]|$ sont égaux et valent tous les deux $\frac{|E_\epsilon|}{2}$. Dès lors :

$$|\mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \mu| \leq \frac{|E_\epsilon|}{2} \|\mu\|. \quad (6.9)$$

Nous rencontrons alors deux difficultés. La première est que l'inégalité (6.9) nous fait passer de la norme de variation totale à la norme de variation bornée et que si nous voulons itérer le raisonnement, il nous faut trouver un moyen de revenir à la norme de variation totale. Nous verrons ultérieurement que c'est en fait possible grâce à l'inégalité de Lasota-Yorke.

Le second problème, plus fondamental, est que si $\partial\Gamma_t$ n'est plus un singleton, nous ne pouvons pas trouver de borne comme (6.9) mais décroissant exponentiellement avec $|\partial\Gamma_t|$ dans le cadre de $\mathcal{B}(X)$. Face à ça, une solution serait de considérer des mesures initiales totalement découplées et d'utiliser le fait que la dynamique en p est indépendante de ce qui se passe aux sites $q < p$

pour se ramener à un problème à une dimension. C'est essentiellement l'approche suivie par Bardet et Keller [4]. Une autre possibilité est de chercher des critères de régularité plus restrictifs permettant d'obtenir des estimations sur (6.7) décroissant exponentiellement avec la taille de $\partial\Gamma_t$. C'est l'approche que nous avons suivie en [17] et que nous présenterons ici.

6.2 Inégalité de Lasota-Yorke généralisée

Suivant une idée originale de Vitali [61] pour généraliser la notion de fonction de variation bornée à des fonctions dépendant de plusieurs variables, nous pouvons essayer de contrôler la variation de la mesure par rapport à plusieurs variables en considérant :

$$\text{Var}_\Lambda \mu = \sup \left\{ \mu(\partial_\Lambda \varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}^{|\Lambda|}(X) \text{ et } |\varphi|_\infty \leq 1 \right\} \quad (6.10)$$

pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, avec ∂_Λ la dérivée première par rapport à toutes les variables dans Λ et $\mathcal{C}^{|\Lambda|}(X)$ l'ensemble des fonctions $|\Lambda|$ fois continuellement différentiables. Nous remarquons immédiatement que :

$$\begin{aligned} \text{Var}_\emptyset \mu &= |\mu|, \\ \sup_{p \in \mathbb{Z}} \text{Var}_{\{p\}} \mu &= \|\mu\|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nous pouvons alors démontrer que :

□ **Lemme 6.1 :**

Si $\Omega \subseteq \Lambda$, alors $\text{Var}_\Omega \mu \leq \text{Var}_\Lambda \mu$.

Démonstration:

Soit φ une fonction continue appartenant $\mathcal{C}^{|\Omega|}(X)$. Alors :

$$\mu(\partial_\Omega \varphi) = \mu \left(\partial_\Lambda \int \varphi(\mathbf{x}_{(\Lambda \setminus \Omega)^c}, \boldsymbol{\xi}_{\Lambda \setminus \Omega}) \prod_{p \in \Lambda \setminus \Omega} \mathbb{1}_{[0, x_p]}(\xi_p) d\boldsymbol{\xi}_{\Lambda \setminus \Omega} \right).$$

La fonction $\int \varphi(\mathbf{x}_{(\Lambda \setminus \Omega)^c}, \boldsymbol{\xi}_{\Lambda \setminus \Omega}) \prod_{p \in \Lambda \setminus \Omega} \mathbb{1}_{[0, x_p]}(\xi_p) d\boldsymbol{\xi}_{\Lambda \setminus \Omega}$ appartenant à $\mathcal{C}^{|\Lambda|}(X)$ et étant bornée par $|\varphi|_\infty$, nous avons donc prouvé que :

$$\mu(\partial_\Omega \varphi) \leq \text{Var}_\Lambda \mu |\varphi|_\infty. \quad \blacksquare$$

Pour une mesure μ quelconque, $\text{Var}_\Lambda \mu$ va donc croître avec la taille de Λ . En fait, pour une mesure totalement découplée dans $\mathcal{B}(X)$, il est aisé de constater que $\text{Var}_\Lambda \mu$ va diverger exponentiellement avec $|\Lambda|$. C'est pourquoi il est naturel d'introduire la norme θ , pour un certain $\theta > 1$:

$$\|\mu\|_\theta = \sup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}} \theta^{-|\Lambda|} \text{Var}_\Lambda \mu. \quad (6.12)$$

Les normes Var_Λ nous permettent déjà d'apporter un élément de réponse aux questions laissées en suspens à la fin de la section précédente. En effet, si nous définissons l'opérateur $\mathcal{E}_p$ par :

$$\mathcal{E}_p \psi(\mathbf{x}) = \int_0^{x_p} \mathbb{1}_{E_\epsilon}(\xi_p) \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p, \quad (6.13)$$

nous pouvons répéter le raisonnement présenté en (6.8) et (6.9) pour chaque variable p . Nous constatons que :

$$|\mathcal{E}_p \psi|_\infty \leq |\psi|_\infty \sup_{x_p \in [-1, 1]} \left| \int_0^{x_p} \mathbb{1}_{E_\epsilon}(\xi_p) d\xi_p \right| \leq \frac{|E_\epsilon|}{2} |\psi|_\infty. \quad (6.14)$$

et que $\mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \psi(\mathbf{x}) = \partial_p \mathcal{E}_p \psi(\mathbf{x})$. Donc, si Ω et Λ sont deux parties finies disjointes de $\mathbb{Z}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{E_\epsilon} \wedge \mu(\partial_\Omega \varphi) &= \mu(\mathbb{1}_{E_\epsilon} \wedge \partial_\Omega \varphi) \\ &= \mu \left(\partial_{\Lambda \cup \Omega} \left[\prod_{p \in \Lambda} \mathcal{E}_p \right] \varphi \right) \\ &\leq \left(\frac{|E_\epsilon|}{2} \right)^{|\Lambda|} \text{Var}_{\Omega \cup \Lambda} \mu |\varphi|_\infty. \end{aligned}$$

Prenant $\Omega = \emptyset$, nous trouvons alors une borne sur $|\mathbb{1}_{E_\epsilon^\wedge} \mu|$ avec la décroissance exponentielle appropriée :

$$|\mathbb{1}_{E_\epsilon^\wedge} \mu| \leq \text{Var}_\Omega \mathbb{1}_{E_\epsilon^\wedge} \mu \leq \left(\frac{|E_\epsilon|}{2} \right)^{|\Lambda|} \text{Var}_{\Omega \cup \Lambda} \mu. \quad (6.15)$$

Il reste cependant à traiter le cas où Ω et Λ ne sont pas disjoints. Comme nous l'avons dit précédemment, c'est une généralisation de l'inégalité de Lasota-Yorke qui va nous apporter la solution à ce problème.

□ **Proposition 6.2** (Inégalité de Lasota-Yorke généralisée) :

Pour toute partie finie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et pour toute mesure $\mu \in L^1(X)$ telle que $\text{Var}_\Lambda \mu < \infty$, nous avons :

$$\text{Var}_\Lambda (T\mu) \leq \sum_{\Omega \subseteq \Lambda} \lambda_0^{|\Omega|} D_0^{|\Lambda \setminus \Omega|} \text{Var}_\Omega \mu.$$

où les constantes λ_0 et D_0 ont été définies en (5.2).

Démonstration:

Commençons par choisir φ , une fonction dans $\mathcal{C}^{|\Lambda|}(X)$ telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$. Alors, si x_p appartient à un des intervalles I_i , nous voyons que $\varphi \circ T$ est différentiable par rapport à x_p et sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \partial_p (\varphi \circ T) &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{I_i}(x_p) (\partial_q \varphi) \circ T (\partial_p T_q) \\ &= \mathbb{1}_{I_i}(x_p) (\partial_p \varphi) \circ T \tau'(x_p). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Mais, puisque nous avons supposé que $\kappa = \inf |\tau'| > 0$, nous pouvons diviser chaque coté de (6.16) par $\tau'(x_p)$ et obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{I_i}(x_p) (\partial_p \varphi) \circ T &= \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \frac{\partial_p (\varphi \circ T)}{\tau'(x_p)} \\ &= \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \partial_p \left(\frac{\varphi \circ T}{\tau'(x_p)} \right) - \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \left(\frac{1}{\tau'} \right)'(x_p) \varphi \circ T. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Maintenant, s'inspirant des opérateurs définis en (4.12) et (4.13) pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, nous introduisons les opérateurs $\Delta_{i,p}$ et $R_{i,p}$:

$$\Delta_{i,p}\psi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\zeta_{i+1}, \mathbf{x}_{\neq p}) - \psi(\zeta_i, \mathbf{x}_{\neq p})}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} R_{i,p}\psi(\mathbf{x}) &= \int_{\zeta_i}^{x_p} \left(\partial_p \psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) - \Delta_{i,p}\psi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) \right) d\xi_p \\ &= \frac{\zeta_{i+1} - x_p}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\zeta_i, \mathbf{x}_{\neq p})) \\ &\quad + \frac{x_p - \zeta_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} (\psi(\zeta_{i+1}, \mathbf{x}_{\neq p}) - \psi(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nous voyons que, si ψ est une fonction continuellement différentiable par morceaux dont les discontinuités sont situées aux extrémités des intervalles I_i , la fonction $\sum_i \mathbb{1}_{I_i}(x_p) R_{i,p}\psi(\mathbf{x})$ est non seulement continuellement différentiable par morceaux mais aussi continue par rapport à x_p . De plus, la définition de $R_{i,p}$ implique que :

$$\mathbb{1}_{I_i}(x_p) \partial_p \psi = \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \partial_p (R_{i,p}\psi) + \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \Delta_{i,p}\psi. \quad (6.20)$$

Donc, insérant (6.20) dans (6.16), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{I_i}(x_p) (\partial_p \varphi) \circ T &= \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \left(\partial_p R_{i,p} \left(\frac{\varphi \circ T}{\tau'(x_p)} \right) + \Delta_{i,p} \left(\frac{\varphi \circ T}{\tau'(x_p)} \right) - \left(\frac{1}{\tau'} \right)'(x_p) \varphi \circ T \right) \\ &= \mathbb{1}_{I_i}(x_p) (\partial_p \mathcal{K}_{i,p} + \mathcal{D}_{i,p}) (\varphi \circ T), \end{aligned} \quad (6.21)$$

où nous avons introduit les opérateurs $\mathcal{K}_{i,p}$ et $\mathcal{D}_{i,p}$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{i,p} : \psi &\mapsto R_{i,p} \left(\frac{\psi}{\tau'(x_p)} \right) \\ \mathcal{D}_{i,p} : \psi &\mapsto \Delta_{i,p} \left(\frac{\psi}{\tau'(x_p)} \right) - \left(\frac{1}{\tau'} \right)'(x_p) \psi \end{aligned} \quad (6.22)$$

Nous allons à présent itérer cette construction pour tout p in Λ . Pour tout $\mathbf{i}_\Lambda = \{i_p\}_{p \in \Lambda}$, nous définissons l'ensemble $I(\mathbf{i}_\Lambda) = \{ \mathbf{x} \mid \forall p \in \Lambda : x_p \in I_{i_p} \}$. Puisque les opérateurs ∂_p , $\mathcal{K}_{i,q}$ et $\mathcal{D}_{i,s}$ commutent tant que q, p et s sont dif-

férents, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mu \left((\partial_\Lambda \varphi) \circ T \right) &= \mu \left(\sum_{\mathbf{i}_\Lambda} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Lambda)} (\partial_\Lambda \varphi) \circ T \right) \\
&= \mu \left(\sum_{\mathbf{i}_\Lambda} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Lambda)} \prod_{p \in \Lambda} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p, p} + \mathcal{D}_{i_p, p}) \varphi \circ T \right) \\
&= \sum_{\Omega \subseteq \Lambda} \mu \left(\sum_{\mathbf{i}_\Lambda} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Lambda)} \partial_\Omega \left[\prod_{p \in \Omega} \mathcal{K}_{i_p, p} \right] \left[\prod_{p \in \Lambda \setminus \Omega} \mathcal{D}_{i_p, p} \right] \varphi \circ T \right). \quad (6.23)
\end{aligned}$$

Pour tout $\Omega \subseteq \Lambda$, considérons la fonction ψ_Ω définie par :

$$\psi_\Omega = \sum_{\mathbf{i}_\Lambda} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Lambda)} \left[\prod_{p \in \Omega} \mathcal{K}_{i_p, p} \right] \left[\prod_{p \in \Lambda \setminus \Omega} \mathcal{D}_{i_p, p} \right] \varphi \circ T.$$

Par définition des opérateurs $\mathcal{K}_{i_p, p}$, ψ_Ω s'annule quand $x_p = \zeta_i$, pour tout $p \in \Omega$. Donc, tant que p appartient à Ω , nous avons :

$$\psi_\Omega(\mathbf{x}) = \sum_i \int_{-1}^{x_p} \mathbb{1}_{I_i}(\xi_p) \partial_p \psi_\Omega(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p. \quad (6.24)$$

Et si nous itérons cela pour chaque $p \in \Omega$ et prenons la dérivée par rapport à toutes ces variables, nous trouvons :

$$\psi_\Omega = \sum_{\mathbf{i}_\Lambda} \prod_{p \in \Omega} \int_{-1}^{x_p} d\xi_p \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Lambda)} \partial_\Omega \left[\prod_{p \in \Omega} \mathcal{K}_{i_p, p} \right] \left[\prod_{p \in \Lambda \setminus \Omega} \mathcal{D}_{i_p, p} \right] \varphi \circ T. \quad (6.25)$$

Finalement, ψ_Ω est aussi continue par morceaux par rapport à $\mathbf{x}_{\neq \Omega}$ et continue et continuellement différentiable par morceaux par rapport à x_Ω . Nous pouvons alors appliquer la Proposition A.4 à (6.24), et nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\mu \left((\partial_\Lambda \varphi) \circ T \right) &= \sum_{\Omega \subseteq \Lambda} \mu \left(\partial_\Omega \psi_\Omega \right) \\
&\leq \sum_{\Omega \subseteq \Lambda} \sup_{\mathbf{i}_\Lambda} \left| \left[\prod_{p \in \Omega} \mathcal{K}_{i_p, p} \right] \left[\prod_{p \in \Lambda \setminus \Omega} \mathcal{D}_{i_p, p} \right] \varphi \circ T \right|_{\mathcal{O}} \text{Var}_\Omega(\mu). \quad (6.26)
\end{aligned}$$

Dès lors, pour toute fonction continue ψ , par définition des opérateurs $\mathcal{K}_{i_p,p}$ et $\mathcal{D}_{i_p,p}$ en (6.22), $R_{i_p,p}$ et $\Delta_{i_p,p}$ en (6.18) et (6.19), et par définition de λ_0 et D_0 en (5.2), nous trouvons :

$$|\mathcal{K}_{i_p,p}\psi|_\infty \leq \frac{1}{\kappa} |R_{i_p,p}\psi|_\infty \leq \frac{2}{\kappa} |\psi|_\infty \leq \lambda_0 |\psi|_\infty \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_{i_p,p}\psi|_\infty &\leq \frac{1}{\kappa} |D_{i_p,p}\psi|_\infty + \left| \left(\frac{1}{\tau'} \right)' \right|_\infty |\psi|_\infty \\ &\leq \left(\frac{2}{\kappa \min_i |I_i|} + \left| \frac{\tau''}{(\tau')^2} \right|_\infty \right) |\psi|_\infty \leq D_0 |\psi|_\infty \end{aligned} \quad (6.28)$$

Et donc, appliquant ces inégalités à (6.26), nous obtenons le résultat annoncé :

$$\mu \left((\partial_\Lambda \varphi) \circ T \right) \leq |\varphi|_\infty \sum_{\Omega \subseteq \Lambda} \lambda_0^{|\Omega|} D_0^{|\Lambda \setminus \Omega|} \text{Var}_\Omega \mu. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons immédiatement énoncer quelques conséquences de l'inégalité de Lasota-Yorke généralisée. Tout d'abord, elle implique la Proposition 5.2 si nous prenons $\Lambda = \emptyset$. Ensuite, elle implique également l'inégalité de Lasota-Yorke du Théorème 5.4 si nous supposons que Λ est un singleton et si nous prenons le supremum sur tous les singletons possibles.

$$\|T\mu\| = \sup_{p \in \mathbb{Z}} \text{Var}_{\{p\}} T\mu \leq \lambda_0 \|\mu\| + D_0 |\mu|.$$

Et finalement, une troisième conséquence de l'inégalité de Lasota-Yorke généralisée est le fait que l'opérateur de transfert T est borné par rapport à la norme θ pour un θ suffisamment grand :

□ **Corollaire 6.3 :**

Pour tout $\theta \geq \frac{D_0}{1-\lambda_0}$ et pour toute mesure $\mu \in L^1(X)$, nous avons :

$$\|T\mu\|_\theta \leq \|\mu\|_\theta.$$

Démonstration:

Utilisant le Théorème 6.2 et le fait que $\theta^{-|\Omega|} \text{Var}_\Omega \mu \leq \|\mu\|_\theta$, nous avons :

$$\begin{aligned} \theta^{-|\Lambda|} \text{Var}_\Lambda (T\mu) &\leq \theta^{-|\Lambda|} \sum_{\Omega \subseteq \Lambda} (\lambda_0 \theta)^{|\Omega|} D_0^{|\Lambda| - |\Omega|} \|\mu\|_\theta \\ &\leq \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{\theta} \right)^{|\Lambda|} \|\mu\|_\theta. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\theta \geq \frac{D_0}{1-\lambda_0}$ implique alors directement que $\|T\mu\|_\theta \leq \|\mu\|_\theta$. ■

6.3 L'argument de Peierls

Nous avons vu en (6.15) que les normes Var_Λ nous permettent d'obtenir une borne supérieure sur (6.7) dans le cas où $\Lambda \cap \Omega = \emptyset$. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, nous ne pouvons évidemment plus utiliser cette méthode sans introduire de dérivées secondes et supérieures par rapport à certaines variables ce qui pourrait avoir des conséquences catastrophiques, vu que nous n'avons a priori pas de contrôle sur les dérivées secondes de la densité des mesures. Mais l'inégalité de Lasota-Yorke généralisée peut alors nous aider. En simplifiant au cas à une seule variable, nous allons essentiellement montrer que :

$$\|T\mathbb{1}_{E_\epsilon} \mu\| \leq \frac{4}{\kappa} \|\mu\| + D_0 |\mathbb{1}_{E_\epsilon} \mu| \leq \left(\frac{4}{\kappa} + D_0 \frac{|E_\epsilon|}{2} \right) \|\mu\|.$$

Plus précisément, si nous définissons les constantes λ_1 et D_1 :

$$\lambda_1 = \frac{4}{\kappa} + \frac{D_0 |E_\epsilon|}{2} \quad D_1 = \frac{4}{\kappa \min_i |J_i|} \quad (6.29)$$

nous pouvons démontrer que :

□ Lemme 6.4 :

Pour toute mesure $\mu \in L^1(X)$, pour tout amas $\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda')$ pour un certain Λ' et pour tout $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$ fini, si $\Lambda \subseteq \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Var}_\Omega (T\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{E_\epsilon} \mu) \\ \leq \sum_{V_1 \subseteq \Lambda} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda} \lambda_1^{|V_1|} D_1^{|\Lambda \setminus V_1|} \lambda_0^{|V_0|} D_0^{|\Omega \setminus (\Lambda \cup V_0)|} \text{Var}_{V_1 \cup V_0} \mu, \end{aligned}$$

où λ_1 et D_1 ont été défini en (6.29) et $E(\Gamma, t)$ en (6.4).

Démonstration:

Soit φ appartenant à $\mathcal{C}^{|\Omega|}(X)$ telle que $|\varphi|_{\mathcal{O}} \leq 1$. En appliquant le développement de (6.23) à la mesure $\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \mu$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} & T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \mu (\partial_\Omega \varphi) \\ &= \sum_{\mathbf{i}_\Omega} \mu \left(\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \left[\prod_{p \in \Omega} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Considérons alors les fonctions caractéristiques de $E(\Gamma, t)$ et $I(\mathbf{i}_\Omega)$. Etant donné que la partition en intervalles I_i est plus fine que la partition en intervalles $(0, 1]$ ou $[-1, 0]$, nous savons que si la configuration $\mathbf{x}$ est fixée en dehors de Ω , $\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)}$ en tant que fonction de $\mathbf{x}_\Omega$ sera soit identiquement nulle, soit identiquement 1. Dès lors, $\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)}$ peut être écrit comme $\sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)}$ où les $c_{\mathbf{i}_\Omega}$ sont des fonctions dépendant uniquement des variables en dehors de Ω et continues par morceaux par rapport à ces variables. Donc (6.30) devient :

$$\begin{aligned} & T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \mu (\partial_\Omega \varphi) \\ &= \sum_{\mathbf{i}_\Omega} \mu \left(c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \left[\prod_{p \in \Omega} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T \right). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Nous pouvons alors nous concentrer sur les fonctions caractéristiques de E_ϵ^Λ . Puisque $\Lambda \subseteq \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \left[\prod_{p \in \Omega} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T \\ &= \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \left[\prod_{p \in \Lambda} (\mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \\ & \quad \left[\prod_{p \in \Omega \setminus \Lambda} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Mais puisque $\mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \psi$ est égal à $\partial_p \mathcal{E}_p \psi$, avec l'opérateur $\mathcal{E}_p$ défini en (6.13), nous avons :

$$\mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \mathcal{D}_{i_p,p} \psi = \partial_p \mathcal{E}_p \mathcal{D}_{i_p,p} \psi.$$

Parce que τ restreint à I_i est monotone, nous savons que $E_\epsilon \cap I_i$ est toujours un intervalle, disons $[a_i, b_i]$. Dès lors, pour tout intervalle I_i et pour toute coordonnée $p \in \mathbb{Z}$, nous définissons l'opérateur :

$$S_{i,p}\psi = \psi(a_i, \mathbf{x}_{\neq p}) + \int_{a_i}^{x_p} \mathbb{1}_{E_\epsilon} \partial_p \psi, \quad (6.33)$$

et nous constatons immédiatement que tant que x_p appartient à I_i , $\partial_p S_{i,p}\psi = \mathbb{1}_{E_\epsilon} \partial_p \psi$ et $|\mathbb{1}_{I_i}(x_p) S_{i,p}\psi|_\infty \leq |\psi|_\infty$. Donc :

$$\mathbb{1}_{I_i}(x_p) \mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_p) \partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} \psi = \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \partial_p S_{i,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \psi.$$

Finalement, l'équation (6.32) devient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \left[\prod_{p \in \Omega} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T \\ &= \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \\ & \quad \left[\prod_{p \in \Lambda} (\partial_p S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} + \partial_p \mathcal{E}_p \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \left[\prod_{p \in \Omega \setminus \Lambda} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T. \end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas immédiatement appliquer la Proposition A.4, parce que les opérateurs $S_{i_p,p}$ détruisent la continuité introduite par $\mathcal{K}_{i_p,p}$. En effet nous avons déjà vu que, si ψ est continuellement différentiable par morceaux sur les intervalles I_i , la fonction $\sum_{i_p} \mathbb{1}_{I_i}(x_p) \mathcal{K}_{i_p,p} \psi(\mathbf{x})$ est non seulement continuellement différentiable par morceaux, mais également continue par rapport à x_p , parce que $\mathcal{K}_{i_p,p} \psi(\mathbf{x})$ s'annule aux extrémités des intervalles I_i . Ce n'est plus le cas pour $\sum_{i_p} \mathbb{1}_{I_i}(x_p) S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \psi(\mathbf{x})$ et nous devons alors appliquer encore une fois les opérateurs $R_{i_p,p}$ définis en (6.19) pour régulariser les discontinuités de la fonction. A partir de (6.20), nous obtenons :

$$\mathbb{1}_{I_{i_p}} \partial_p S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \psi = \mathbb{1}_{J_{i_p}} \partial_p R_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \psi + \mathbb{1}_{I_{i_p}} \Delta_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \psi,$$

et cela implique que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \left[\prod_{p \in \Omega} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T \\
&= \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \left[\prod_{p \in \Lambda} (\partial_p (R_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{E}_p \mathcal{D}_{i_p,p}) + \Delta_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p}) \right] \\
&\quad \left[\prod_{p \in \Omega \setminus \Lambda} (\partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \varphi \circ T \\
&= \sum_{V_1 \subseteq \Lambda} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda} \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{J(\mathbf{i}_\Omega)} \left[\prod_{p \in V_1} \partial_p (R_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{E}_p \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \\
&\quad \left[\prod_{p \in \Lambda \setminus V_1} \Delta_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \right] \left[\prod_{p \in V_0} \partial_p \mathcal{K}_{i_p,p} \right] \left[\prod_{p \in \Omega \setminus (\Lambda \cup V_0)} \mathcal{D}_{i_p,p} \right] \varphi \circ T \\
&= \sum_{V_1 \subseteq \Lambda} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda} \partial_{V_0 \cup V_1} \tilde{\varphi}_{V_0 \cup V_1}, \tag{6.34}
\end{aligned}$$

où, pour V_1 et V_0 fixés, $\tilde{\varphi}_{V_0, V_1}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
& \tilde{\varphi}_{V_0, V_1} \\
&= \sum_{\mathbf{i}_\Omega} c_{\mathbf{i}_\Omega} \mathbb{1}_{I(\mathbf{i}_\Omega)} \left[\prod_{p \in V_1} (R_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{E}_p \mathcal{D}_{i_p,p}) \right] \\
&\quad \left[\prod_{p \in \Lambda \setminus V_1} \Delta_{i_p,p} S_{i_p,p} \mathcal{K}_{i_p,p} \right] \left[\prod_{p \in V_0} \mathcal{K}_{i_p,p} \right] \left[\prod_{p \in \Omega \setminus (\Lambda \cup V_0)} \mathcal{D}_{i_p,p} \right] \varphi \circ T. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent conclure. Si nous insérons (6.34) dans (6.31), nous obtenons :

$$T \mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \mu(\partial_\Omega \varphi) = \sum_{V_1 \subseteq \Lambda} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda} \mu(\partial_{V_0 \cup V_1} \tilde{\varphi}_{V_0, V_1}).$$

Mais étant donné que $\tilde{\varphi}_{V_0, V_1}$ est continue et continuellement différentiable par morceaux par rapport aux variables $x_{V_1 \cup V_0}$, et continue par morceaux par rapport aux autres variables, nous pouvons appliquer la Proposition A.4 et nous trouvons :

$$T \mathbb{1}_{E(\Gamma, t)} \mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda} \mu(\partial_\Omega \varphi) \leq \sum_{V_1 \subseteq \Lambda} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda} \text{Var}_{V_1 \cup V_0} \mu | \tilde{\varphi}_{V_0, V_1} |_\infty. \tag{6.36}$$

Utilisant alors $|R_{i_p,p}\psi|_\infty \leq 2|\psi|_\infty$, $|S_{i_p,p}\psi|_\infty \leq |\psi|_\infty$, les bornes sur $\mathcal{K}_{i_p,p}$ de (6.27), sur $\mathcal{D}_{i_p,p}$ de (6.28) et sur $\mathcal{E}_p$ de (6.14), avec la définition de λ_1 et D_1 en (6.29) nous donne :

$$\begin{aligned} |(R_{i_p,p}S_{i_p,p}\mathcal{K}_{i_p,p} + \mathcal{E}_p\mathcal{D}_{i_p,p})\psi|_\infty &\leq \left(2\frac{2}{\kappa} + \frac{|E_\epsilon|}{2}D_0\right)|\psi|_\infty \leq \lambda_1|\psi|_\infty \\ |\Delta_{i_p,p}\mathcal{K}_{i_p,p}\psi|_\infty &\leq \frac{2}{\min_i |J_i|} \frac{2}{\kappa} \leq D_1|\psi|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, $|\tilde{\varphi}_{V_0,V_1}|_\infty$ est borné par :

$$|\tilde{\varphi}_{V_0,V_1}|_\infty \leq \lambda_1^{|V_1|} D_1^{|\Lambda \setminus V_1|} \lambda_0^{|V_0|} D_0^{|\Omega \setminus (\Lambda \cup V_0)|} |\varphi|_\infty.$$

Et ainsi, (6.36) devient :

$$\begin{aligned} T\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}\mathbb{1}_{E_\epsilon^\Lambda}\mu(\partial_\Omega\varphi) \\ \leq |\varphi|_\infty \sum_{V_1 \subseteq \Lambda} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda} \lambda_1^{|V_1|} D_1^{|\Lambda \setminus V_1|} \lambda_0^{|V_0|} D_0^{|\Omega \setminus (\Lambda \cup V_0)|} \text{Var}_{V_1 \cup V_0} \mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le Lemme 6.4 va nous permettre d'évaluer la contribution des $E(\Gamma, t)$ dans (6.6) tant que $t \neq 0$. Il reste cependant à spécifier des conditions initiales sur les mesures pour les amas Γ touchant les temps $t = 0$. S'inspirant de ce qui a été introduit en (3.12) pour les automates cellulaires probabilistes, nous définissons, pour certains $K > 0$, $\alpha > 0$ et $\theta \geq 1$, l'espace $\mathcal{B}(K, \alpha, \theta)$ des mesures signées dans $\mathcal{B}(X)$ telles que, pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, nous ayons :

$$\|\mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda}\mu\|_\theta \leq K\alpha^{|\Lambda|}. \quad (6.37)$$

Parmi tout les $\alpha \in [0, 1]$, nous considérerons en particulier α_0 défini par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \max \left\{ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 2D_1|E_\epsilon|}, \frac{D_0|E_\epsilon|}{1 - \lambda_0} \right\}. \quad (6.38)$$

Etant donné que $E_\epsilon \cap [0, 1]$ est la préimage par τ d'un ensemble de mesure ϵ et que τ est dilatante d'un facteur au moins κ et possède au plus $\frac{N}{2}$ branches différentes sur $[0, 1]$, nous pouvons constater que $|E_\epsilon| \leq \frac{N}{\kappa}\epsilon$. Dès lors :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{4}{\kappa} + \frac{D_0|E_\epsilon|}{2} \right) = \frac{4}{\kappa}. \quad (6.39)$$

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

□ **Théorème 6.5 :**

Supposons que τ soit fixé avec $\kappa > 108$. Alors, il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que, si $\epsilon < \epsilon_0$, pour toute mesure μ dans $\mathcal{B}(K, \alpha, \theta_0)$ avec $K < \infty$, $\alpha < \frac{1}{27}$ et $\theta_0 = \frac{2\alpha_0}{|E_\epsilon|}$, nous avons :

$$\left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu \right\|_{\theta_0} \leq \frac{K}{2(1-9\alpha')(1-\alpha')} \alpha'^{|\Lambda|}.$$

avec $\alpha' = 3 \max\{\alpha_0, \alpha\} < \frac{1}{9}$.

Démonstration:

Nous commençons avec le développement en amas présenté en (6.5)

$$\left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu \right\|_{\theta_0} \leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)} \left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \left[\prod_{t=0}^{n-1} (T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}) \right] \mu \right\|_{\theta_0}. \quad (6.40)$$

Pour un amas fixé $\Gamma \in \mathcal{G}(\Lambda)$, nous avons vu que

$$\mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(T\mathbf{x}) \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)}(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}(T\mathbf{x}) \mathbb{1}_{E(\Gamma,t-1)}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{E_\epsilon^{\partial\Gamma_t}}(\mathbf{x}).$$

Dès lors, si nous insérons les fonctions caractéristiques des ensembles $E_\epsilon^{\partial\Gamma_t}$ à chaque temps t pour chaque terme de la somme en (6.40), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \left[\prod_{t=0}^{n-1} (T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}) \right] \mu \right\|_{\theta_0} \\ &= \left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \left[\prod_{t=0}^{n-1} \left(T \mathbb{1}_{E_\epsilon^{\partial\Gamma_{t+1}}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \right) \right] \mathbb{1}_{(0,1]^{\partial\Gamma_0}} \mu \right\|_{\theta_0}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

A présent, pour toute mesure ν et pour toute partie finie $\Omega \subset \mathbb{Z}$, si nous appliquons le Lemme 6.4 et utilisons l'inégalité (6.15), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& \theta_0^{-|\Omega|} \text{Var}_\Omega \left(T \mathbb{1}_{E_\epsilon^{\partial\Gamma_t}} \mathbb{1}_{E(\Gamma, t-1)} \nu \right) \\
& \leq \theta_0^{-|\Omega|} \sum_{V_1 \subseteq \Omega \cap \partial\Gamma_t} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \partial\Gamma_t} \lambda_1^{|V_1|} D_1^{|\Omega \cap \partial\Gamma_t \setminus V_1|} \lambda_0^{|V_0|} D_0^{|\Omega \setminus (\partial\Gamma_t \cup V_0)|} \\
& \quad \text{Var}_{V_1 \cup V_0} \mathbb{1}_{E_\epsilon^{\partial\Gamma_t \setminus \Omega}} \nu \\
& \leq \theta_0^{-|\Omega|} \sum_{V_1 \subseteq \Omega \cap \partial\Gamma_t} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \partial\Gamma_t} \lambda_1^{|V_1|} D_1^{|\Omega \cap \partial\Gamma_t \setminus V_1|} \lambda_0^{|V_0|} D_0^{|\Omega \setminus (\partial\Gamma_t \cup V_0)|} \\
& \quad \left(\frac{|E_\epsilon|}{2} \right)^{|\partial\Gamma_t \setminus \Omega|} \text{Var}_{V_1 \cup V_0 \cup (\partial\Gamma_t \setminus \Omega)} \nu \\
& \leq \theta_0^{-|\Omega|} \sum_{V_1 \subseteq \Omega \cap \partial\Gamma_t} \sum_{V_0 \subseteq \Omega \setminus \partial\Gamma_t} (\lambda_1 \theta_0)^{|V_1|} D_1^{|\Omega \cap \partial\Gamma_t \setminus V_1|} (\lambda_0 \theta_0)^{|V_0|} \\
& \quad D_0^{|\Omega \setminus (\partial\Gamma_t \cup V_0)|} \left(\frac{\theta_0 |E_\epsilon|}{2} \right)^{|\partial\Gamma_t \setminus \Omega|} \|\nu\|_{\theta_0} \\
& \leq \left(\lambda_1 + \frac{D_1}{\theta_0} \right)^{|\Omega \cap \partial\Gamma_t|} \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{\theta_0} \right)^{|\Omega \setminus \partial\Gamma_t|} \left(\frac{\theta_0 |E_\epsilon|}{2} \right)^{|\partial\Gamma_t \setminus \Omega|} \|\nu\|_{\theta_0}. \quad (6.42)
\end{aligned}$$

Et puisque $\theta_0 = \frac{2\alpha_0}{|E_\epsilon|}$, nous avons $\frac{\theta_0 |E_\epsilon|}{2} \leq \alpha_0$, et nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \frac{D_1}{\theta_0} \leq \alpha_0 & \iff \alpha_0 \geq \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 2D_1 |E_\epsilon|} \right) \\
\lambda_0 + \frac{D_0}{\theta_0} \leq 1 & \iff \alpha_0 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{D_0 |E_\epsilon|}{1 - \lambda_0} \right)
\end{aligned}$$

Nous voyons donc que la définition de α_0 en (6.38) nous garantit que, si nous prenons le supremum sur tous les Ω finis en (6.42), nous obtenons :

$$\left\| T \mathbb{1}_{E_\epsilon^{\partial\Gamma_t}} \mathbb{1}_{E(\Gamma, t-1)} \nu \right\|_{\theta_0} \leq \alpha_0^{|\partial\Gamma_t|} \|\nu\|_{\theta_0}. \quad (6.43)$$

Nous pouvons alors revenir à l'équation (6.41). Nous appliquons le Corollaire A.5, l'inégalité (6.43), utilisons l'hypothèse que μ appartient à $\mathcal{B}(K, \alpha, \theta_0)$,

définissons $\alpha' = 3 \max\{\alpha_0, \alpha\}$, reprenons la définition de $\partial\Gamma$ et nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} \left[\prod_{t=0}^{n-1} (T \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)}) \right] \mu \right\|_{\theta_0} \\ & \leq \left\| \prod_{t=0}^{n-1} \left(T \mathbb{1}_{E_{\epsilon}^{\partial\Gamma_{t+1}}} \mathbb{1}_{E(\Gamma,t)} \right) \mathbb{1}_{(0,1]^{\partial\Gamma_0}} \mu \right\|_{\theta_0} \\ & \leq \alpha_0^{\sum_{t=1}^n |\partial\Gamma_t|} \left\| \mathbb{1}_{(0,1]^{\partial\Gamma_0}} \mu \right\|_{\theta_0} \\ & \leq K \alpha_0^{\sum_{t=1}^n |\partial\Gamma_t|} \alpha^{|\partial\Gamma_0|} \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\leq K \left(\frac{\alpha'}{3} \right)^{|\partial\Gamma|}. \quad (6.45)$$

Et donc, l'inégalité (6.40) devient :

$$\left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu \right\|_{\theta_0} \leq K \sum_{\Gamma} \left(\frac{\alpha'}{3} \right)^{|\partial\Gamma|}. \quad (6.46)$$

Puisque les contours que nous avons définis sont les mêmes que ceux pour le modèle de Stavskaya, nous pouvons alors reprendre le raisonnement présenté en (3.16) et (3.18), et nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu \right\|_{\theta_0} & \leq K \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{n_d=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{3n_d+k-c+|\Lambda|} \left(\frac{\alpha'}{3} \right)^{n_d+|\Lambda|+k} \\ & \leq K \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^c \sum_{n_d=0}^{\infty} (9\alpha')^{n_d} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha')^k \alpha'^{|\Lambda|} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Nous avons alors vu en (6.39) que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_0 = \frac{4}{\kappa}$. Donc, si $\kappa > 108$, nous pouvons garantir que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_0 < \frac{1}{27}$. La limite implique alors qu'il existe un ϵ_0 tel que si $\epsilon < \epsilon_0$, nous avons $\alpha_0 < \frac{1}{27}$. Ayant également supposé que $\alpha < \frac{1}{27}$, nous trouvons $\alpha' = 3 \min\{\alpha, \alpha_0\} < \frac{1}{9}$. Dans ce cas, les séries géométriques convergent et nous trouvons :

$$\left\| \mathbb{1}_{(0,1]^\Lambda} T^n \mu \right\|_{\theta_0} \leq \frac{K}{2(1-9\alpha')(1-\alpha')} \alpha'^{|\Lambda|}. \quad \blacksquare$$

L'existence d'une transition de phase est une conséquence directe du Théorème 6.5. En effet, si nous reprenons la mesure invariante $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ définie en (5.5)

et si nous définissons $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ comme étant une des mesures invariantes trouvées en prenant une sous-suite convergente $\frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n T^t m^{(-)}$:

$$\mu_{\text{inv}}^{(-)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k + 1} \sum_{t=0}^{n_k} T^t m^{(-)} \quad (6.48)$$

où $m^{(-)}$ est la mesure de Lebesgue concentrée sur $[-1, 0]^Z$, nous pouvons démontrer que :

□ **Théorème 6.6 :**

Supposons que τ soit fixé avec $\kappa > 108$. Alors, il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que, si $\epsilon < \epsilon_0$, la mesure $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient à $\mathcal{B}(K_0, 3\alpha_0, \theta_0)$, pour $K_0 = \frac{1}{2(1-27\alpha_0)(1-3\alpha_0)}$, α_0 défini en (6.38) et $\theta_0 = \frac{2\alpha_0}{|E_\epsilon|}$. Cela implique que $\mu_{\text{inv}}^{(-)} \neq \mu_{\text{inv}}^{(+)}$.

Démonstration:

Etant donné que $\text{Var}_\Lambda m^{(-)} \leq 2^{|\Lambda|}$, nous savons que la mesure $m^{(-)}$ appartient à $\mathcal{B}(1, 0, 2)$. Mais, par définition de θ_0 et α_0 , nous avons :

$$\theta_0 = \frac{2\alpha_0}{|E_\epsilon|} \geq \frac{D_0}{1 - \lambda_0} \geq 2. \quad (6.49)$$

Dès lors, $m^{(-)}$ appartient également à $\mathcal{B}(1, 0, \theta_0)$. Nous appliquons donc le Théorème 6.5. Si $\kappa > 108$, il existe un ϵ_0 tel que, si $\epsilon < \epsilon_0$, $T^t m^{(-)}$ appartiendra à $\mathcal{B}(K_0, \alpha_0, \theta_0)$ pour tout t . Cela implique que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient également à $\mathcal{B}(K_0, \alpha_0, \theta_0)$. Et puisque $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ n'appartient à aucun des $\mathcal{B}(K, \alpha, \theta)$ tant que $\alpha < 1$, cela prouve également que $\mu_{\text{inv}}^{(+)} \neq \mu_{\text{inv}}^{(-)}$. ■

Nous avons donc prouvé l'existence d'une transition de phase pour des modèles suffisamment chaotiques ($\kappa > 108$) si ϵ est suffisamment petit.

6.4 Convergence exponentielle à l'équilibre

Nous allons à présent démontrer que toute une classe de mesures va converger exponentiellement vite vers la mesure invariante $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ définie en (6.48). Pour cela, nous aurons à supposer que l'application sur site τ est suffisamment chaotique. Soit $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$, la classe des applications $\tau : I \mapsto I$ dilatantes par morceaux vérifiant les hypothèses que nous avons énoncés à la Section 5.2 telles

que, pour D_0 donné, nous avons :

$$\frac{2}{\kappa \min |J_i|} + \left| \frac{\tau''}{(\tau')^2} \right|_\infty < D_0 \quad (6.50)$$

et, pour $c > 0$ et $\varsigma \in (\frac{2}{\kappa}, 1)$ donnés, nous avons :

$$\left| \tau^n h - \left(\int h(x) \, dx \right) h_{\text{inv}}^{(-)} \right|_{L^1(I)} \leq c \varsigma^n \|h\|_{BV(I)}. \quad (6.51)$$

Nous remarquons immédiatement que si $D_0' \leq D_0$, $c' \leq c$ et $\varsigma' \leq \varsigma$, alors $\mathcal{T}(D_0', c', \varsigma') \subseteq \mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$. Nous voyons alors que l'application $\tau(x) = \kappa x \bmod 1$ avec $\kappa > 2$ étendue sur $[-1, 0]$ en utilisant les hypothèses de symétrie appartient à $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$ pour $D_0 \geq 2$, $c \geq 2$ et $\varsigma \geq \frac{1}{\kappa}$. Donc, tant que $D_0 \geq 2$ et $c \geq 2$, chaque classe $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$ contiendra au moins une application. Remarquons cependant que les classes $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$ contiennent des applications plus générales que $\tau(x) = \kappa x \bmod 1$. Par exemple, les applications introduites en [35, 44], et donc en particulier des applications ne possédant pas de partitions de Markov, appartiennent également à un certain $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$.

De plus, nous pouvons vérifier que si τ appartient à $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$, τ^2 appartient aussi à $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$. Etant donné que $\inf |\tau^{k'}| \geq (\inf |\tau'|)^k$, les $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$ contiennent des applications avec des κ arbitrairement élevés.

Commençons alors par reprendre le bon ordre $<$ défini en (5.6) pour un entier γ arbitraire. Si $<_q$ est la translation de ce bon ordre en un site q appartenant à $\mathbb{Z}$, nous pouvons, pour tout $q, p \in \mathbb{Z}$, définir les opérateurs Π_{qp} :

$$\Pi_{qp}\mu(\varphi) = \mu \left(\int \varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_s) \, d\xi_s - \int \varphi \prod_{s \leq_q p} h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_s) \, d\xi_s \right). \quad (6.52)$$

Contrairement aux opérateurs définis en (5.7), nous intégrons par rapport à $h_{\text{inv}}^{(-)}$, la mesure invariante de l'application τ concentrée sur $[-1, 0]$. De façon similaire à ce qui a été fait en (5.9), nous pouvons prouver que pour toute mesure signée de masse nulle :

$$\mu = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Pi_{qp}\mu, \quad (6.53)$$

au sens faible. Et nous pouvons également vérifier que l'opérateur Π_{qp} est borné en norme de variation totale, en norme de variation bornée et en norme θ :

□ **Lemme 6.7 :**

Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{B}(X)$, pour tout $q, p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \geq \frac{D_0}{1-\lambda_0}$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Pi_{qp}\mu| \leq 2 \|\mu\| \\ \|\Pi_{qp}\mu\| \leq 2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \|\mu\| \\ \|\Pi_{qp}\mu\|_\theta \leq 2 \|\mu\|_\theta \end{array} \right.$$

Démonstration:

Commençons par démontrer que pour tout $\Lambda \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$\text{Var}_\Lambda \Pi_{qp}\mu \leq 2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right)^{|\Lambda|} \text{Var}_\Lambda(\mu).$$

Pour cela, prenons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{|\Lambda|}$ avec $|\varphi|_\infty \leq 1$ arbitraire. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \Pi_{qp}\mu(\partial_\Lambda \varphi) &= \mu \left(\int \partial_\Lambda \varphi \prod_{s <_q p} h_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\xi_s) d\xi_s \right) \\ &\quad - \mu \left(\int \partial_\Lambda \varphi \prod_{s \leq_q p} h_{\text{inv}}^{(\leftarrow)}(\xi_s) d\xi_s \right). \end{aligned} \tag{6.54}$$

Si nous définissons $\Omega = \{k \in \Lambda \mid q \leq_q k <_q p\}$, nous constatons que les dérivées par rapport à $\mathbf{x}_{\Lambda \setminus \Omega}$ commutent avec la première intégrale de (6.54). Et de façon similaire, si $\Omega' = \{k \in \Lambda \mid q \leq_q k \leq_q p\}$, les dérivées par rapport à $\mathbf{x}_{\Lambda \setminus \Omega'}$ commutent avec la première intégrale de (6.54). Donc, par définition de

Var_Ω et $\text{Var}_{\Omega'}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \Pi_{qp}\mu(\partial_\Lambda\varphi) \\
&= \mu\left(\partial_{\Lambda\setminus\Omega}\int\partial_\Omega\varphi\prod_{s<_{qp}}h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_s)\,d\xi_s\right) \\
&\quad - \mu\left(\partial_{\Lambda\setminus\Omega'}\int\partial_{\Omega'}\varphi\prod_{s\leq_{qp}}h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_s)\,d\xi_s\right) \\
&\leq \text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega}\left|\int\partial_\Omega\varphi\prod_{s<_{qp}}h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_s)\,d\xi_s\right|_\infty \\
&\quad + \text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega'}(\mu)\left|\int\partial_{\Omega'}\varphi\prod_{s\leq_{qp}}h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_s)\,d\xi_s\right|_\infty \\
&\leq \text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega}(\mu)\|h_{\text{inv}}^{(-)}\|_{BV(I)}^{|\Omega|} + \text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega'}(\mu)\|h_{\text{inv}}^{(-)}\|_{BV(I)}^{|\Omega'|}. \tag{6.55}
\end{aligned}$$

De façon similaire à ce qui a été fait au Lemme 5.5, nous pouvons constater que $\|h_{\text{inv}}^{(-)}\| \leq \frac{D_0}{1-\lambda_0}$ et que $\frac{D_0}{1-\lambda_0} \geq 1$. Dès lors, le Lemme 6.1 impliquant que $\text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega}\mu \leq \text{Var}_\Lambda\mu$, (6.55) devient :

$$\begin{aligned}
\text{Var}_\Lambda\Pi_{qp}\mu &\leq \text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega}(\mu)\left(\frac{D_0}{1-\lambda_0}\right)^{|\Omega|} + \text{Var}_{\Lambda\setminus\Omega'}(\mu)\left(\frac{D_0}{1-\lambda_0}\right)^{|\Omega'|} \\
&\leq \text{Var}_\Lambda(\mu)\left(\frac{D_0}{1-\lambda_0}\right)^{|\Omega|} + \text{Var}_\Lambda(\mu)\left(\frac{D_0}{1-\lambda_0}\right)^{|\Omega'|} \\
&\leq 2\left(\frac{D_0}{1-\lambda_0}\right)^{|\Lambda|}\text{Var}_\Lambda(\mu). \tag{6.56}
\end{aligned}$$

Les bornes en variation totale et en variation bornée proviennent de (6.56) en prenant respectivement Λ l'ensemble vide et Λ un singleton. La borne en norme θ est obtenue en multipliant par $\theta^{-|\Lambda|}$ chaque membre de l'inégalité (6.56), en prenant le supremum sur tout les Λ finis et en se servant de l'hypothèse que $\theta \geq \frac{D_0}{1-\lambda_0}$. ■

Considérons alors μ une mesure de masse nulle et φ une fonction continue dépendant uniquement des variables dans un certain Λ fini. Reprenant le développement en chemins de l'équation (5.17), si nous supposons $t = m\gamma$, nous

avons :

$$T^t \mu(\varphi) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} \Pi_{p_{m-1} p_m} \tilde{T}^{p_m - 2p_{m-1}} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mu(\varphi), \quad (6.57)$$

avec les opérateurs $\tilde{T}^{qp}$ définis par :

$$\tilde{T}^{qp} = T^\gamma \Pi_{qp}. \quad (6.58)$$

En utilisant la technique de découplage de Keller et Liverani présentée à la Section 5.4, nous allons à présent montrer que l'opérateur $\tilde{T}^{qp}$ agissant sur une mesure $\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu$ est une contraction. Tout d'abord, nous définissons la dynamique découplée au site p par $T_0^{(p)} = \Phi_0^{(p)} \circ \tau^{\mathbb{Z}}$, où le couplage $\Phi_0^{(p)}$ est explicitement défini par :

$$\Phi_{0,q}^{(p)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Phi_{\epsilon,q}(\mathbf{x}) & \text{si } q \neq p \\ \Phi_{0,p}(\mathbf{x}_{\neq p+1}, -1) & \text{si } q = p \end{cases} \quad (6.59)$$

La proposition suivante nous garantit que cette petite modification du couplage ne va pas trop changer la dynamique si elle est appliquée à une mesure $\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu$:

□ **Proposition 6.8 :**

Soit $\mu \in \mathcal{B}(X)$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\left| \Phi_\epsilon \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu - \Phi_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \leq 2\epsilon \|\mu\|.$$

Démonstration:

Soit φ une fonction continue telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$. Définissons $F_t = t\Phi_\epsilon + (1-t)\Phi_0^{(p)}$. Alors :

$$\begin{aligned} & \mu\left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \varphi \circ \Phi_\epsilon\right) - \mu\left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \varphi \circ \Phi_0^{(p)}\right) \\ &= \mu\left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \int_0^1 \partial_t (\varphi \circ F_t) dt\right) \\ &= \int_0^1 \mu\left(\sum_q \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) (\partial_q \varphi \circ F_t) \partial_t F_{t,q}\right) dt. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Puisque $\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \partial_t F_{t,q} = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) (\Phi_{\epsilon,q}(\mathbf{x}) - \Phi_{0,q}^{(p)}(\mathbf{x}))$ est identiquement égal à 0 si $q \neq p$ et est égal à $\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \epsilon$ si $q = p$, la somme sur q en (6.60) se réduit au seul terme $q = p$:

$$\begin{aligned} & \mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \varphi \circ \Phi_\epsilon \right) - \mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \varphi \circ \Phi_0^{(p)} \right) \\ &= \epsilon \int_0^1 \mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \partial_p \varphi \circ F_t \right) dt. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Alors, si nous définissons ψ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^{x_p} (\partial_p \varphi \circ F_t)(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p,$$

nous pouvons vérifier que ψ est continue par rapport à x_p , continuellement différentiable par morceaux par rapport à x_p et que $\partial_p \psi = \partial_p \varphi \circ F_t$. De plus, étant donné que si x_p appartient à un des intervalles $[-1, 0]$ ou $(0, 1]$, nous avons :

$$\partial_p (\varphi \circ F_t) = \sum_q \partial_q \varphi \circ F_t \partial_p F_{t,q} = \partial_p \varphi \circ F_t \partial_p F_{t,p} = \partial_p \varphi \circ F_t,$$

nous constatons que $\int_0^{x_p} (\partial_p \varphi \circ F_t) d\xi_p = \varphi \circ F_t(\mathbf{x}) - \varphi \circ F_t(\mathbf{x}_{\neq p}, 0)$ et donc que $|\psi|_\infty \leq 2 |\varphi|_\infty \leq 2$.

Avec la Proposition A.4 et le Corollaire A.5, la définition de ψ implique que :

$$\mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \partial_p \varphi \circ F_t \right) = \mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \partial_p \psi \right) \leq 2 \|\mu\|,$$

et nous concluons en insérant cette inégalité dans (6.61) :

$$\mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \varphi \circ \Phi_\epsilon \right) - \mu \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \varphi \circ \Phi_0^{(p)} \right) \leq 2\epsilon \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Tant que le site $p+1$ reste négatif, le lemme précédent nous permet donc de contrôler la différence entre la dynamique originale T et $T_0^{(p)} = \Phi_0^{(p)} \circ \tau^{\mathbb{Z}}$. Nous pouvons alors démontrer que :

□ **Proposition 6.9 :**

Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{B}(X)$, tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\left| \left(T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \right)^m \mu - \left(T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \right)^m \mu \right| \leq \frac{1+m D_0}{1-\lambda_0} 2 \epsilon \|\mu\|.$$

Démonstration:

Par commodité, nous définissons les opérateurs $\bar{T} = T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1})$ et $\bar{T}_0^{(p)} = T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1})$. Nous constatons alors que :

$$\begin{aligned} \bar{T}_0^{(p)n} - \bar{T}^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_0^{(p)k} \left(\bar{T}_0^{(p)} - \bar{T} \right) \bar{T}^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_0^{(p)k} \left(\Phi_0^{(p)} - \Phi_\epsilon \right) \tau^{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \bar{T}^{n-k-1} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Et donc, appliquant la formule (6.62) à $\bar{T}_0^{(p)n} \mu - \bar{T}^n \mu$ puis utilisant le fait que l'opérateur $\bar{T}_0^{(p)}$ est de norme 1 dans $L^1(X)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \bar{T}_0^{(p)n} \mu - \bar{T}^n \mu \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \bar{T}_0^{(p)k} \left(\Phi_1^{(p)} - \Phi_\epsilon \right) \tau^{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \bar{T}^{n-k-1} \mu \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left(\Phi_1^{(p)} - \Phi_\epsilon \right) \tau^{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \bar{T}^{n-k-1} \mu \right| \end{aligned} \quad (6.63)$$

Nous remarquons que $\tau^{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1})$ commutent parce que τ préserve les intervalles $[-1, 0]$ et $(0, 1]$. Avec le Lemme 6.8, (6.63) devient alors :

$$\left| \bar{T}_0^{(p)n} \mu - \bar{T}^n \mu \right| \leq 2 \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \tau^{\mathbb{Z}} \bar{T}^{n-k-1} \mu \right\| \quad (6.64)$$

Mais l'inégalité de Lasota-Yorke pour T , le Corollaire A.5 et l'inégalité de Lasota-Yorke pour $\tau^{\mathbb{Z}}$ qui découlent directement de la Proposition 5.1 nous permettent d'affirmer que :

$$\begin{cases} \left\| \bar{T} \mu \right\| \leq \lambda_0 \left\| \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right\| + D_0 \left| \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \leq \lambda_0 \|\mu\| + D_0 |\mu| \\ \left\| \tau^{\mathbb{Z}} \mu \right\| \leq \lambda_0 \|\mu\| + D_0 |\mu| \end{cases} \quad (6.65)$$

Donc, combinant les deux inégalités, nous pouvons borner $\|\tau^{\mathbb{Z}} \bar{T}^{n-k-1} \mu\|$ par :

$$\|\tau^{\mathbb{Z}} \bar{T}^{n-k-1} \mu\| \leq \lambda_0^{n-k} \|\mu\| + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\mu| \quad (6.66)$$

Grâce à la borne trouvée en (6.66), (6.64) devient alors :

$$\begin{aligned} \left| \bar{T}_0^{(p)n} \mu - \bar{T}^n \mu \right| &\leq 2\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0^{n-k} \|\mu\| + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\mu| \\ &\leq 2\epsilon \left(\frac{1}{1-\lambda_0} \|\mu\| + n \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\mu| \right) \end{aligned}$$

Finalement, le Lemme 5.3 impliquant que $|\mu| \leq \|\mu\|$, nous obtenons le résultat annoncé :

$$\left| \bar{T}_0^{(p)n} \mu - \bar{T}^n \mu \right| \leq 2\epsilon \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons alors trouver une borne sur la norme de variation bornée de l'opérateur $\tilde{T}^{qp}$ agissant sur une mesure signée de variation bornée concentrée sur $x_p \in [-1, 0]$ et $x_{p+1} \in [-1, 0]$.

□ **Théorème 6.10 :**

Supposons que τ appartienne à $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$. Alors, pour toute mesure μ appartenant à $\mathcal{B}(X)$ et pour tout q, p in $\mathbb{Z}$.

$$\left\| \tilde{T}^{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right\| \leq \sigma_1 \|\mu\|,$$

avec σ_1 défini par :

$$\sigma_1 = 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^{\gamma-n} + \lambda_0^\gamma + c\varsigma^n) + \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right)^2 \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} (4\epsilon + |E_\epsilon|).$$

Démonstration:

L'opérateur $\tilde{T}^{qp}$ a été défini en (6.58) comme $T^\gamma \Pi_{qp}$. Si nous appliquons l'inégalité de Lasota-Yorke (Théorème 5.4) à $T^{\gamma-n}$ pour un certain $n < \gamma$ strictement

positif, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \|T^\gamma \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu\| \\
& \leq \lambda_0^{\gamma-n} \|T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu\| \\
& \quad + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu|.
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Appliquant encore une fois l'inégalité de Lasota-Yorke au premier terme du membre de droite de l'inégalité (6.67), puis utilisant le Lemme 6.7 et le Corollaire A.5, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& \|T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu\| \\
& \leq \lambda_0^n \|\Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu\| \\
& \quad + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& \leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} \lambda_0^n \|\mu\| + 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} |\mu| \\
& \leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (1 + \lambda_0^n) \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Dès lors, l'inégalité (6.67) devient :

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{T}^{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu\| \\
& \leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^{\gamma-n} + \lambda_0^\gamma) \|\mu\| \\
& \quad + \frac{D_0}{1-\lambda_0} |T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu|.
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Pour le second terme (6.68), nous remarquons que par définition des projecteurs Π_{qp} en (6.52) et parce que $h_{\text{inv}}^{(-)}$ est concentrée sur $[-1, 0]$, pour tout $s \in \mathbb{Z}$ et pour toute mesure ν , nous avons :

$$\Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_s) \nu = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_s) \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_s) \nu. \tag{6.69}$$

Nous pouvons dès lors introduire un opérateur $\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1})$ devant l'opérateur Π_{qp} dans le second terme de (6.68) :

$$\begin{aligned}
& |T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& = |T^n \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu|.
\end{aligned}$$

Mais puisque x_{p+1} est initialement négatif, soit il restera négatif jusqu'au temps n , soit un changement de signe aura lieu à un temps intermédiaire k .

$$\begin{aligned}
& |T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& \leq |(T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& \quad + \sum_{k=1}^{n-1} |T^{n-k} \mathbb{1}_{(0,1]}(x_{p+1}) \\
& \quad \quad (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^k \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu|.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Nous pouvons alors appliquer la Proposition 6.9 au premier terme de (6.70), et remplacer la dynamique originale par une dynamique découplée $T_0^{(p)}$ au prix d'une erreur qui n'augmentera au plus que linéairement avec le temps. Et avec le Lemme 6.7 et le Corollaire A.5, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& |(T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& \leq |(T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& \quad + 2 \frac{1+n D_0}{1-\lambda_0} \epsilon \|\Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu\| \\
& \leq |(T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu| \\
& \quad + 4 \frac{D_0}{1-\lambda_0} \frac{1+n D_0}{1-\lambda_0} \epsilon \|\mu\|.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Nous allons à présent pouvoir utiliser les propriétés de convergence exponentielle à l'équilibre de la dynamique locale, tout comme dans [38]. Pour cela, définissons $\tilde{\mu} = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu$ et choisissons une fonction continue φ telle que $|\varphi|_\infty \leq 1$. Alors, utilisant l'égalité (6.69) puis la définition de $\tilde{\mu}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& (T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu(\varphi) \\
& = (T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu(\varphi) \\
& = \Pi_{qp} \tilde{\mu} \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(T_0^{(p)t} x_{p+1}) \varphi \circ T_0^{(p)n} \right)
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Examinons plus en détail la fonction qui est intégrée. En lui appliquant l'opérateur Π_{qp} , nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& \Pi_{qp} \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(T_0^{(p)t} x_{p+1}) \varphi \circ T_0^{(p)n} \right) \\
&= \int \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(T_0^{(p)t} x_{p+1}) \varphi \circ T_0^{(p)n} \prod_{s < qp} h_{\text{inv}}^{(-)}(x_s) dx_s \\
&\quad - \int \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(T_0^{(p)t} x_{p+1}) \varphi \circ T_0^{(p)n} \prod_{s \leq qp} h_{\text{inv}}^{(-)}(x_s) dx_s
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Mais si x_p est initialement négatif et si x_{p+1} reste négatif jusqu'au temps n , la dynamique $T_0^{(p)}$ peut être décomposée en deux dynamiques : d'une part la dynamique locale agissant sur le site p et d'autre part la dynamique T agissant sur le reste du réseau en supposant que x_p est remplacé par une constante négative. Dès lors, pour un certain opérateur $S : I^{\mathbb{Z} \setminus \{p\}} \mapsto I^{\mathbb{Z} \setminus \{p\}}$, nous voyons que :

$$\begin{aligned}
& \Pi_{qp} \left(\mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(T_0^{(p)t} x_{p+1}) \varphi \circ T_0^{(p)n} \right) \\
&= \int \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(S^t x_{p+1}) \varphi(\tau^n x_p, S^n x_{\neq p}) \prod_{s < qp} h_{\text{inv}}^{(-)}(x_s) dx_s \\
&\quad - \int \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(S^t x_{p+1}) \varphi(\tau^n x_p, S^n x_{\neq p}) \prod_{s \leq qp} h_{\text{inv}}^{(-)}(x_s) dx_s
\end{aligned} \tag{6.74}$$

Définissons alors la fonction ψ par :

$$\psi = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \int \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1,0]}(S^t x_{p+1}) \varphi(x_p, S^n x_{\neq p}) \prod_{s < qp} h_{\text{inv}}^{(-)}(x_s) dx_s. \tag{6.75}$$

Parce que τ préserve les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$, nous avons $\mathbb{1}_{[-1, 0]}(\tau x_p) = \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_p)$ et (6.74) peut alors être réécrite comme :

$$\begin{aligned} \Pi_{qp} \left(\mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_p) \prod_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[-1, 0]}(T_0^{(p)t} x_{p+1}) \varphi \circ T_0^{(p)n} \right) \\ = \psi(\tau^n x_p, x_{\neq p}) - \int \psi(\tau^n \xi_p, x_{\neq p} h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_p) d\xi_p) \end{aligned} \quad (6.76)$$

Nous insérons (6.76) dans (6.72) et trouvons :

$$\begin{aligned} \left(T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_{p+1}) \right)^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_{p+1}) \mu(\varphi) \\ \leq \tilde{\mu} \left(\psi(\tau^n x_p, x_{\neq p}) - \int \psi(\tau^n \xi_p, x_{\neq p} h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_p) d\xi_p) \right) \end{aligned} \quad (6.77)$$

Alors, étant donné que $h_{\text{inv}}^{(-)}$ est τ -invariante et en omettant la dépendance en $x_{\neq p}$ de la fonction ψ , nous pouvons introduire τ^* l'opérateur de Perron-Frobenius associé à τ agissant sur les densités dans $L^1(I)$ et nous trouvons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \left(\psi(\tau^n x_p, x_{\neq p}) - \int \psi(\tau^n \xi_p, x_{\neq p} h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_p) d\xi_p) \right) \\ \leq \tilde{\mu} \left(\partial_p \left(\int \psi(\tau^n \xi_p) \mathbb{1}_{(-1, x_p]}(\xi_p) d\xi_p - (x_p + 1) \int \psi(\xi_p) h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_p) d\xi_p \right) \right) \\ \leq \tilde{\mu} \left(\partial_p \left(\int \psi(\xi_p) (\tau^{*n} \mathbb{1}_{(-1, x_p]}(\xi_p) - (x_p + 1) h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_p)) d\xi_p \right) \right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Nous pouvons alors nous rappeler que $\tilde{\mu} = \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_{p+1}) \mu$. La définition de la norme de variation bornée, puis l'application de la Proposition 5.1 et du Corollaire A.5 impliquent que (6.78) devient :

$$\begin{aligned} \left(T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_{p+1}) \right)^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_{p+1}) \mu(\varphi) \\ \leq \left\| \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_{p+1}) \mu \right\| \\ \sup_{x_p \in [-1, 0]} \left| \int \psi(\xi_p) (\tau^{*n} \mathbb{1}_{(-1, x_p]}(\xi_p) - (x_p + 1) h_{\text{inv}}^{(-)}(\xi_p)) d\xi_p \right| \\ \leq \|\mu\| \sup_{x_p \in [-1, 0]} \left| \tau^{*n} \mathbb{1}_{[-1, x_p]} - (x_p + 1) h_{\text{inv}}^{(-)} \right|_{L^1(I)} |\psi|_{\infty} \\ \leq \|\mu\| \sup_{x_p \in [-1, 0]} c \varsigma^n \left\| \mathbb{1}_{[-1, x_p]} \right\| |\psi|_{\infty} \\ \leq \|\mu\| 2 c \varsigma^n |\psi|_{\infty} \end{aligned} \quad (6.79)$$

Finalement, parce que $|\psi|_\infty \leq 1$, nous trouvons que :

$$\left(T_0^{(p)} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \right)^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu(\varphi) \leq \|\mu\| 2c\varsigma^n \quad (6.80)$$

Nous pouvons alors revenir à (6.71). Insérant la borne (6.80) dans (6.71), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left| (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \\ & \leq \left(2c\varsigma^n + 4 \frac{D_0}{1-\lambda_0} \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \epsilon \right) \|\mu\|. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Et directement, (6.70) devient :

$$\begin{aligned} & \left| T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \\ & \leq \left(2c\varsigma^n + 4 \frac{D_0}{1-\lambda_0} \frac{1+nD_0}{1-\lambda_0} \epsilon \right) \|\mu\| \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left| T^{n-k} \mathbb{1}_{(0,1]}(x_{p+1}) \right. \\ & \quad \left. (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^k \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right|. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Il ne reste plus qu'à considérer la deuxième somme de (6.82) où un changement de signe se produit à un certain instant k . Etant donné qu'au temps $k-1$, x_{p+1} appartient à $[-1,0]$, et qu'au temps k , x_{p+1} appartient à $(0,1]$, x_{p+1} au temps $k-1$ doit appartenir à l'ensemble E_ϵ . Dès lors, appliquant (6.9), nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \left| T^{n-k} \mathbb{1}_{(0,1]}(x_{p+1}) (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^k \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \\ & \leq \left| \mathbb{1}_{E_\epsilon}(x_{p+1}) (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^{k-1} \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \\ & \leq \frac{|E_\epsilon|}{2} \left\| (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^{k-1} \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right\|. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Mais l'inégalité de Lasota-Yorke pour l'opérateur $\bar{T} = T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1})$ trouvée en (6.65) implique que :

$$\| (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^{k-1} \nu \| \leq (\lambda_0^{k-1} + \frac{D_0}{1-\lambda_0}) \|\nu\|,$$

et utilisant cette inégalité avec le Lemme 6.7 et le Corollaire A.5, (6.83) devient :

$$\begin{aligned}
& \left| T^{n-k} \mathbb{1}_{(0,1]}(x_{p+1}) (T \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}))^k \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \\
& \leq \frac{|E_\epsilon|}{2} \left(\lambda_0^{k-1} + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left\| \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right\| \\
& \leq |E_\epsilon| \left(\lambda_0^{k-1} + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \frac{D_0}{1-\lambda_0} \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Nous insérons cette inégalité dans (6.82), prenons la série géométrique comme borne supérieure sur la somme sur λ_0^{k-1} et nous avons :

$$\begin{aligned}
& \left| T^n \Pi_{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right| \\
& \leq \left(2c\varsigma^n + 4 \frac{D_0}{1-\lambda_0} \frac{1+n D_0}{1-\lambda_0} \epsilon \right) \|\mu\| + \sum_{k=1}^{n-1} |E_\epsilon| \left(\lambda_0^{k-1} + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \frac{D_0}{1-\lambda_0} \|\mu\| \\
& \leq \left(2c\varsigma^n + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \frac{1+n D_0}{1-\lambda_0} (4\epsilon + |E_\epsilon|) \right) \|\mu\|. \tag{6.84}
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure. Nous insérons l'inégalité (6.84) dans (6.68), reprenons la définition de σ_1 et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{T}^{qp} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_p) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x_{p+1}) \mu \right\| \\
& \leq 2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^{\gamma-n} + \lambda_0^\gamma + c\varsigma^n) \|\mu\| + \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right)^2 \frac{1+n D_0}{1-\lambda_0} (4\epsilon + |E_\epsilon|) \|\mu\| \\
& \leq \left[2 \frac{D_0}{1-\lambda_0} (\lambda_0^{\gamma-n} + \lambda_0^\gamma + c\varsigma^n) + \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right)^2 \frac{1+n D_0}{1-\lambda_0} (4\epsilon + |E_\epsilon|) \right] \|\mu\| \\
& \leq \sigma_1 \|\mu\|. \quad \blacksquare \tag{6.85}
\end{aligned}$$

Nous venons donc de prouver que l'opérateur $\tilde{T}^{qp}$ défini en (6.58) agissant sur une mesure concentrée sur $[-1,0]^{\{p,p+1\}}$ est une contraction pour γ et n suffisamment grands, et ϵ suffisamment petit. A partir de là, utilisant d'une part le Théorème 6.10 pour obtenir la convergence à l'équilibre dans les phases pures et d'autre part l'argument de Peierls pour évaluer le poids des contours, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

□ **Théorème 6.11 :**

Supposons que τ appartienne à $\mathcal{T}(D_0, c, \varsigma)$ et que $\kappa > \kappa_1$ pour une certaine constante κ_1 dépendant de D_0, c et ς . Alors, il existe un $\epsilon_1 \in (0, 1)$ tel que, si

$\epsilon \leq \epsilon_1$, il existe un $\sigma \in (0, 1)$ telle que :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^t \|\mu\| |\varphi|_\infty,$$

pour toute mesure de masse nulle μ in $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$ avec α_0 défini en (6.38) and θ_0 défini au Théorème 6.5 et pour toute fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans un $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini et pour une certaine constante $C > 0$.

Démonstration:

Supposons dans un premier temps que $t = m\gamma$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors, le développement de (6.57) et le Lemme 6.7 impliquent que :

$$T^t \mu(\varphi) \leq 2 \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} \left| \prod_{k=0}^{m-1} \tilde{T}^{p_{k-1}p_k} \mu \right| |\varphi|_\infty. \quad (6.86)$$

Nous avons déjà prouvé au Théorème 6.10 que l'opérateur $\tilde{T}^{qp}$ défini en (6.58) agissant sur une mesure concentrée sur $[-1, 0]^{\{p, p+1\}}$ est une contraction, et l'idée générale de la preuve va être d'utiliser l'argument de Peierls pour contrôler la probabilité que la mesure ne soit pas concentrée sur $[-1, 0]^{\{p, p+1\}}$. Pour cela, nous définissons $t_k = k\gamma$ et :

$$G(\mathbf{p}) = \{(p_0, t_0), (p_0 + 1, t_0), \dots, (p_{m-1}, t_{m-1}), (p_{m-1} + 1, t_{m-1})\}$$

pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)$. Si $\mathcal{P}(G(\mathbf{p}))$ est l'ensemble des parties de $G(\mathbf{p})$, alors, pour tout $\Omega \in \mathcal{P}(G(\mathbf{p}))$ et pour tout t , nous pouvons définir $\Omega_t = \{q \mid (q, t) \in \Omega\}$, la restriction de Ω au temps t . Ensuite, nous définissons l'ensemble $E(\Omega, t)$ par :

$$\mathbb{1}_{E(\Omega, t)} = \mathbb{1}_{(0, 1]^{\Omega_t}} \prod_{q: (q, t) \in G(\mathbf{p}) \setminus \Omega} \mathbb{1}_{[-1, 0]}(x_q). \quad (6.87)$$

En sommant sur toutes les parties de Ω , (6.86) devient :

$$T^t \mu(\varphi) \leq 2 \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{F}(\Lambda)} \sum_{\Omega \in \mathcal{P}(G(\mathbf{p}))} \left| \prod_{k=0}^{m-1} (\tilde{T}^{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_k)}) \mu \right| |\varphi|_\infty. \quad (6.88)$$

Nous remarquons immédiatement que le nombre de termes dans la somme croît exponentiellement avec t parce que $|\mathcal{F}(\Lambda)| \leq |\Lambda| \gamma^m$ et $|\mathcal{P}(G(\mathbf{p}))| \leq 2^{2m}$. Donc :

$$|\mathcal{F}(\Lambda)| |\mathcal{P}(G(\mathbf{p}))| \leq |\Lambda| (4\gamma)^{\frac{t}{\gamma}} \quad (6.89)$$

Définissons à présent $\mathcal{P}'$, l'ensemble des $\Omega \in \mathcal{P}(G(\mathbf{p}))$ dont au moins $\frac{m}{2}$ des m ensembles Ω_{t_k} sont vides. Si Ω appartient à $\mathcal{P}'$, nous savons donc qu'il y aura au moins $\frac{m}{2}$ des m opérateurs $\tilde{T}^{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_k)}$ qui pourront être bornés en utilisant le Théorème 6.10 :

$$\Omega_{t_k} = \emptyset \Rightarrow \|\tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \nu\| \leq \sigma_1 \|\nu\|,$$

D'autre part, les autres opérateurs $\tilde{T}^{p_k p_{k+1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_k)}$ sont bornés à cause de l'inégalité de Lasota-Yorke (Théorème 5.4), du Lemme 6.7 et du Corollaire A.5 :

$$\Omega_{t_k} \neq \emptyset \Rightarrow \|\tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \nu\| \leq 2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \|\nu\|.$$

Dès lors, si $\Omega \in \mathcal{P}'$, utilisant l'hypothèse que $\mu \in \mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$ qui implique que $\|\mu\| \leq K\theta_0$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu \right| \\ & \leq \left(2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \right)^{\frac{m}{2}} \sigma_1^{\frac{m}{2}} \|\mu\| \\ & \leq \left[\left(2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2\gamma}} \right]^m K\theta_0. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Si Ω n'appartient pas à $\mathcal{P}'$, nous savons qu'il y a au moins $\frac{m}{2}$ ensembles Ω_{t_k} qui sont non-vides et qu'il y a donc au moins $\frac{m}{2}$ fonctions caractéristiques de $(0, 1]$ dans (6.88). Nous allons alors utiliser l'argument de Peierls pour évaluer ces erreurs et montrer que cela n'arrive qu'avec une faible probabilité. Nous commençons par supposer que ϵ est suffisamment petit et κ suffisamment grand pour que nous puissions appliquer l'argument de Peierls à la mesure μ . Pour cela, nous devons juste supposer que $\alpha_0 < \frac{1}{27}$. Dans ce cas, nous considérons, pour tout $k \leq m$:

$$\mu_k = \tilde{T}^{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{k-1})} \dots \tilde{T}^{p_0p_1} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu. \quad (6.91)$$

Supposons alors que nous ayons déjà choisi un $\Lambda_k \subset \mathbb{Z}$, et considérons $\|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_k)} \mu_k\|_{\theta_0}$. Par définition de $\tilde{T}^{p_{k-1}p_k}$ et avec le Corollaire A.5, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_k)} \mu_k\|_{\theta_0} &\leq \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k \cup \Omega_{t_k}}} \mu_k\|_{\theta_0} \\ &\leq \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k \cup \Omega_{t_k}}} \tilde{T}^{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{k-1})} \mu_{k-1}\|_{\theta_0} \\ &\leq \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k \cup \Omega_{t_k}}} T^\gamma \Pi_{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{k-1})} \mu_{k-1}\|_{\theta_0}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors construire l'amas d'erreurs Γ_{k-1} associé à $\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k \cup \Omega_{t_k}}}$ en itérant les règles présentées à la Section 6.1. Si nous définissons $\Lambda_{k-1} = \{q \mid (q, t_{k-1}) \in \Gamma_{k-1}\}$, nous pouvons alors évaluer la contribution de chaque amas grâce à (6.44).

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_k}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_k)} \mu_k\|_{\theta_0} \\ &\leq \sum_{\Gamma_{k-1}} \alpha_0^{|\partial \Gamma_{k-1}| - |\Lambda_{k-1}|} \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_{k-1}}} \Pi_{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{k-1})} \mu_k\|_{\theta_0} \\ &\leq \sum_{\Gamma_{k-1}} \alpha_0^{|\partial \Gamma_{k-1}| - |\Lambda_{k-1}|} \|\Pi_{p_{k-1}p_k} \mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_{k-1}}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{k-1})} \mu_k\|_{\theta_0} \\ &\leq 2 \sum_{\Gamma_{k-1}} \alpha_0^{|\partial \Gamma_{k-1}| - |\Lambda_{k-1}|} \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_{k-1}}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{k-1})} \mu_k\|_{\theta_0}. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Nous itérons cette construction pour tous les k et rassemblons tous les graphes Γ_k en un graphe Γ . Etant donné que μ appartient à $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$, nous avons, pour tout $\Omega \notin \mathcal{P}'$.

$$\begin{aligned} &|\tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu| \\ &\leq \|\tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu\|_{\theta_0} \\ &\leq \sum_{\Gamma} \alpha_0^{|\partial \Gamma| - |\Lambda_0|} 2^m \|\mathbb{1}_{(0,1]^{\Lambda_0}} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu\|_{\theta_0} \\ &\leq \sum_{\Gamma} \alpha_0^{|\partial \Gamma| - |\Lambda_0|} 2^m (3\alpha_0)^{|\Lambda_0|} \|\mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu\|_{\theta_0} \\ &\leq K 2^m \sum_{\Gamma} (3\alpha_0)^{|\partial \Gamma|}. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Considérons plus en détail le graphe Γ . Nous pouvons vérifier que, pour ce graphe, $n_h = n_d = n_v \geq \frac{m}{2} - c$ et que $|\partial\Gamma| \geq n_h + c$. Dès lors, si $\alpha_0 < \frac{1}{81}$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu \right| \\ & \leq K 2^m \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 3^{3\frac{m}{2}-3c+3l} (3\alpha_0)^{l+\frac{m}{2}} \\ & \leq \frac{K}{26(1-81\alpha_0)} [18\sqrt{\alpha_0}]^m. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Nous pouvons alors conclure. En effet, nous devons choisir $\sigma \in (0, 1)$, γ , n et κ tels que le système d'inégalités suivant soit satisfait dans la limite où ϵ tend vers 0.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 < \frac{1}{81} \\ 6\sqrt{\alpha_0} < \frac{\sigma^\gamma}{4\gamma} \\ \left(2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} < \frac{\sigma^\gamma}{4\gamma} \end{array} \right. \quad (6.95)$$

Nous commençons par choisir $\sigma \in (0, 1)$, γ et n tels que :

$$\left[\left(2 \left(\frac{D_0}{1-\varsigma} \right) \left(\varsigma + \frac{D_0}{1-\varsigma} \right) \right) 2 \frac{D_0}{1-\varsigma} (\varsigma^{\gamma-n} + \varsigma^\gamma + c\varsigma^n) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sigma^\gamma}{4\gamma}$$

Etant donné que ς est choisi tel que $\lambda_0 \leq \varsigma$, et par définition de σ_1 , cela implique que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \right) \sigma_1 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sigma^\gamma}{4\gamma}$$

Utilisant (6.39), nous trouvons alors un $\kappa_1 > 0$ tel que, si $\kappa \geq \kappa_1$, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_0 < \frac{1}{81} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 18\sqrt{\alpha_0} < \frac{\sigma^\gamma}{4\gamma}. \end{array} \right. \quad (6.96)$$

Donc, si $\kappa > \kappa_1$, il existe un ϵ_1 tel que, si $\epsilon < \epsilon_1$, (6.95) est satisfaite. Dès lors, les inégalités (6.90) et (6.94) deviennent :

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu \right| \\ & \leq K \theta_0 \left[\left(2 \left(\frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \left(\lambda_0 + \frac{D_0}{1-\lambda_0} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \right]^m \leq K \theta_0 \frac{\sigma^t}{(4\gamma)^m} \\ & \left| \tilde{T}^{p_m-2p_{m-1}} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{0p_0} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \mu \right| \\ & \leq \frac{K}{3(1-27\alpha_0)(1-3\alpha_0)} \frac{\sigma^t}{(4\gamma)^m} \end{aligned}$$

Et donc, pour une certaine constante C , nous avons, pour tout Ω :

$$\left| \tilde{T}^{p_m-1p_m} \mathbb{1}_{E(\Omega, t_{m-1})} \dots \tilde{T}^{p_0p_1} \mathbb{1}_{E(\Omega, 0)} \Pi_{0p_0} \mu \right| \leq C (4\gamma)^{-m} \sigma^t.$$

Cette inégalité nous permet donc de contrôler tous les termes de la somme en (6.88), et puisque le nombre de termes dans la somme est borné en (6.89), nous trouvons :

$$\left| T^t \mu(\varphi) \right| \leq |\Lambda| (4\gamma)^{\frac{t}{\gamma}} C (4\gamma)^{-\frac{t}{\gamma}} \sigma^t \leq C |\Lambda| \sigma^t |\varphi|_\infty. \quad (6.97)$$

Finalement, si t n'est pas un multiple de γ , nous savons que $t = m\gamma + t'$, pour un certain $m \in \mathbb{N}$ et un $t' < \gamma$. Alors, appliquant (6.97) à μ et $\varphi \circ T^{t'}$, qui dépend uniquement des variables dans un ensemble de taille au plus égale à $t' |\Lambda|$, nous obtenons

$$\left| T^t \mu(\varphi) \right| \leq C t' |\Lambda| \sigma^{m\gamma} |\varphi|_\infty \leq \frac{\gamma C}{\sigma^\gamma} |\Lambda| \sigma^t |\varphi|_\infty \quad (6.98)$$

ce qui est exactement le résultat recherché, à la redéfinition d'une nouvelle constante C près. ■

L'argument de Peierls nous avait déjà permis de démontrer l'existence de plusieurs mesures invariantes dans $\mathcal{B}(X)$. Nous allons à présent montrer que toutes les mesures de probabilités dans $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$ convergent exponentiellement vite vers la mesure invariante $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ et nous en déduirons que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ possède la propriété de décroissance exponentielle des corrélations dans l'espace. Ensuite,

nous prouverons que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ satisfait une loi des grands nombres qui justifiera pleinement le fait que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est une mesure SRB.

□ **Corollaire 6.12** (Convergence exponentielle à l'équilibre) :

Supposons que T satisfasse aux hypothèses du Théorème 6.11 pour un certain $\sigma \in (0, 1)$. Alors, pour toute mesure de probabilité μ appartenant à $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$ pour un certain $K > 0$, il existe une constante C telle que, si $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est la mesure invariante définie en (6.48), nous avons :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_\infty$$

pour toute fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans un certain $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini.

Démonstration:

Soit $\tilde{\mu} = \mu - \mu_{\text{inv}}^{(-)}$. Puisque μ appartient à $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$ par hypothèse et que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartient à $\mathcal{B}(K_0, 3\alpha_0, \theta_0)$ à cause du Théorème 6.6, nous voyons que pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{[-1,0]^\Lambda} \tilde{\mu}\|_{\theta_0} &\leq \|\mathbb{1}_{[-1,0]^\Lambda} \mu\|_{\theta_0} + \|\mathbb{1}_{[-1,0]^\Lambda} \mu_{\text{inv}}^{(-)}\|_{\theta_0} \\ &\leq (K + K_0) (3\alpha_0)^{|\Lambda|} \end{aligned}$$

Cela implique que $\tilde{\mu}$ est une mesure signée de masse nulle appartenant à $\mathcal{B}(K + K_0, 3\alpha_0, \theta_0)$. Nous pouvons alors appliquer le Théorème 6.11 à la mesure $\tilde{\mu}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|T^n \mu(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi)| = |T^n \tilde{\mu}(\varphi)| \leq C |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_\infty. \quad \blacksquare$$

□ **Corollaire 6.13** (Décroissance spatiale exponentielle des corrélations) :

Supposons que T satisfasse aux hypothèses du Théorème 6.11 pour un certain $\sigma \in (0, 1)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes fonctions continues φ et ψ dépendant uniquement des variables dans $\Omega, \Lambda \subset \mathbb{Z}$ respectivement, nous avons :

$$|\mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \psi) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\psi)| \leq C |\Lambda \cup \Omega| \sigma^{d(\Omega, \Lambda)} |\varphi|_\infty |\psi|_\infty$$

Démonstration:

Si $m^{(-)}$ est la mesure de Lebesgue concentrée sur $[-1, 0]^\mathbb{Z}$, $m^{(-)}$ appartient à

$\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$ pour $K = \|m^{(\cdot)}\|_{\theta_0}$. Appliquant le Corollaire 6.12, nous voyons qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |\mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}(\varphi \psi) - T^n m^{(\cdot)}(\varphi \psi)| &\leq C' |\Lambda \cup \Omega| \sigma^n |\varphi|_{\infty} |\psi|_{\infty} \\ |T^n m^{(\cdot)}(\varphi) - \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}(\varphi)| &\leq C' |\Lambda| \sigma^n |\varphi|_{\infty} \\ |T^n m^{(\cdot)}(\psi) - \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}(\psi)| &\leq C' |\Omega| \sigma^n |\psi|_{\infty} \end{aligned}$$

A partir de ces inégalités, nous pouvons reproduire les mêmes étapes que pour la Proposition 3.11 et nous trouvons le résultat annoncé. ■

□ **Corollaire 6.14** (Loi des grands nombres) :

Supposons que T satisfasse aux hypothèses du Théorème 6.11 pour un certain $\sigma \in (0, 1)$. Alors, pour toute fonction continue φ dépendant uniquement des variables dans un certain $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini et de classe $\mathcal{C}^{|\Lambda|}(X)$, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n \varphi \circ T^t(x) = \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}(\varphi)$$

$\mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}$ -presque partout.

Démonstration:

Considérons tout d'abord la mesure $\varphi \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}$, définie par $\varphi \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}(\psi) = \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}(\varphi \psi)$. Nous pouvons démontrer que cette mesure appartient à $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$, pour un certain $K > 0$. En effet, si la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^{|\Omega|}(X)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\Omega} \psi &= \partial_{\Omega \setminus \Lambda} (\varphi \partial_{\Omega \cap \Lambda} \psi) \\ &= \sum_{V \subseteq \Omega \cap \Lambda} (-1)^{|(\Omega \cap \Lambda) \setminus V|} \partial_{V \cup (\Omega \setminus \Lambda)} (\psi \partial_{(\Omega \cap \Lambda) \setminus V} \varphi). \end{aligned}$$

Intégrant chaque coté de cette égalité par rapport à la mesure $\mathbb{1}_{(0,1]^{\Omega'}} \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}$, nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)} \left(\mathbb{1}_{(0,1]^{\Omega'}} \varphi \partial_{\Omega} \psi \right) &\leq \sum_{V \subseteq \Omega \cap \Lambda} \text{Var}_{V \cup (\Omega \setminus \Lambda)} (\mathbb{1}_{(0,1]^{\Omega'}} \mu_{\text{inv}}^{(\cdot)}) |\psi|_{\infty} |\partial_{(\Omega \cap \Lambda) \setminus V} \varphi|_{\infty}. \end{aligned}$$

Cependant, φ appartient à $\mathcal{C}^{|\Lambda|}(X)$ et étant donné que I^{Λ} est compact, il existe une constante C' telle que $|\partial_{(\Omega \cap \Lambda) \setminus V} \varphi|_{\infty} \leq C'$ pour tout ensemble V , et il a

été prouvé au Théorème 6.6 que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartenait à $\mathcal{B}(K_0, 3\alpha_0, \theta_0)$, donc :

$$\text{Var}_{\Omega} \left(\mathbb{1}_{(0,1]^{\Omega'}} \varphi \partial_{\Omega} \right) \leq K C' \sum_{V \subseteq \Omega \cap \Lambda} \theta_0^{|V \cup (\Omega \setminus \Lambda)|} (3\alpha_0)^{|\Omega'|}.$$

Et nous en déduisons que :

$$\theta_0^{|\Omega|} \text{Var}_{\Omega} \left(\mathbb{1}_{(0,1]^{\Omega'}} \varphi \partial_{\Omega} \right) \leq K C' \left(\frac{1 + \theta_0}{\theta_0} \right)^{|\Lambda|} (3\alpha_0)^{|\Omega'|}.$$

Donc, il existe un K tel que $\varphi \mu_{\text{inv}}^{(-)}$ appartienne à $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$. Cela implique que la mesure $\mu = \varphi \mu_{\text{inv}}^{(-)} - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi) \mu_{\text{inv}}^{(-)}$ est une mesure signée de masse nulle appartenant également à $\mathcal{B}(K, 3\alpha_0, \theta_0)$, pour un certain $K > 0$. Nous pouvons alors appliquer le Théorème 6.11 à la mesure μ . Il existe une constante $C > 0$ et une constante $\sigma < 1$ telles que :

$$|T^t \mu(\varphi)| \leq C \sigma^t \quad (6.99)$$

Nous en déduisons alors que :

$$\begin{aligned} & \left| \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \circ T^k \varphi \circ T^n) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \circ T^k) \mu(\varphi \circ T^n) \right| \\ & \leq \left| \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi \circ T^{n-k}) - \mu_{\text{inv}}^{(-)}(\varphi)^2 \right| \leq |T^{n-k} \mu(\varphi)| \leq C \sigma^t. \end{aligned}$$

Et donc, de façon similaire à ce qui a été fait au Corollaire 5.12, nous pouvons démontrer que :

$$\begin{aligned} & \sup_{n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \mu(\varphi \circ T^k \varphi \circ T^n) - \mu(\varphi \circ T^k) \mu(\varphi \circ T^n) \right| \\ & \leq \sup_{n>0} \sum_{k=0}^{\infty} C \sigma^{|n-k|} < \infty \end{aligned}$$

Et le résultat annoncé est alors une conséquence directe du Lemme 5.11. ■

Conclusion

Arrivant à la fin de notre exposé, nous pouvons à présent prendre du recul sur les résultats que nous avons démontré et envisager ceux-ci dans une perspective plus générale.

Dans le cadre d'un automate cellulaire probabiliste généralisant le modèle de Stavskaya, nous avons démontré l'existence d'une transition de phase, et la convergence exponentielle à l'équilibre pour une vaste classe de mesures initiales. Ce dernier résultat original nous a permis de prouver l'existence de deux mesures de probabilité invariantes possédant toutes les deux des propriétés de décroissance des corrélations tant dans l'espace que dans le temps. Nous avons alors tracé le portrait de phase de cet automate cellulaire probabiliste à la Figure 3.4. Sur cette figure, nous constatons alors directement que nos résultats ne couvrent qu'une faible partie de l'espace des paramètres. L'origine principale de ce défaut est à trouver dans les estimations entropiques de l'argument de Peierls, et un comptage des contours plus précis que celui utilisé permettrait sûrement d'améliorer ces résultats. Nous pouvons également nous poser la question de l'existence d'autres mesures invariantes extrémales que $\mu_{\text{inv}}^{(-)}$ et $\mu_{\text{inv}}^{(+)}$ à fort couplage. Si intuitivement il semble clair qu'il ne doit pas y avoir d'autres mesures extrémales pour des raisons de symétrie, une réponse rigoureuse à cette question n'est pas évidente a priori.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous avons abordé la question des transitions de phase pour les réseaux d'applications couplées. S'inspirant des résultats obtenus pour les automates cellulaires probabilistes, nous avons construit un réseau d'applications couplées s'inspirant du modèle de Stavskaya. Nous avons ensuite démontré qu'à faible couplage, ce réseau d'applications couplées possédait une unique mesure SRB, et qu'à fort couplage, d'autres mesures SRB apparaissent. Les techniques que nous avons développées pour y arriver, également originales, nous ont permis de prouver la convergence exponentielle à l'équilibre pour une vaste classe de mesures initiales et la décroissance spatiale exponentielle des corrélations. A nouveau, les techniques utilisées reposant essentiellement sur un argument de Peierls et un comptage de contours, une estimation plus précise du nombre de ceux-ci permettrait sans doute de mieux cerner le portrait de phase du réseau d'applications couplées considéré.

Nous pouvons également remarquer que, dans l'argument de découplage présenté au Chapitre 6, nous n'utilisons pas conjointement l'argument de Peierls et le découplage dans les phases pures de façon aussi naturelle que dans le cas des réseaux d'applications couplées. Ce problème technique a pour conséquence qu'il a été nécessaire de considérer des applications locales extrêmement chaotiques. Il serait intéressant de pouvoir articuler de façon plus naturelle l'utilisation des deux techniques, parce que cela permettrait sûrement d'étendre nos résultats à des applications locales plus raisonnables.

Finalement, nous pourrions élever quelques objections concernant certains aspects assez artificiels du réseau d'applications couplées considéré. En effet, contrairement aux couplages habituellement considérés, l'interaction que nous avons introduite est discontinue et cette discontinuité est essentielle pour démontrer l'inégalité de Lasota-Yorke généralisée. Essayer d'étendre nos résultats à des couplages plus généraux est donc un véritable défi.

ANNEXE A

Techniques de régularisations

Soit $X = I^{\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures signées sur X . Soit

$$|\mu| = \sup\{\mu(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}(X) \text{ et } |\varphi|_{\infty} \leq 1\}.$$

Considérons l'espace $L^1(X)$ des mesures $\mu \in \mathcal{M}(X)$ telles que $|\mu| < \infty$ et telles que les projections de dimensions finies de μ soient toutes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, définissons :

$$\text{Var}_{\Lambda} \mu = \sup\{\mu(\partial_{\Lambda} \varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}^{|\Lambda|}(X) \text{ et } |\varphi|_{\infty} \leq 1\}. \quad (\text{A.1})$$

où ∂_{Λ} désigne la dérivée par rapport à toutes les coordonnées dans Λ .

Pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ fini, nous pouvons également définir $\eta : \mathbb{R}^{\Lambda} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{C}_0^{\infty}(R^{\Lambda})$ telle que :

- η est non-négative,
- $\int_{I^{\Lambda}} \eta \, dm = 1$,
- et η est identiquement nulle en dehors de I^{Λ} .

Alors, pour toute fonction intégrable $\varphi : I^\Lambda \mapsto \mathbb{R}$ et pour tout $\epsilon > 0$, considérons la convolution de φ avec η donnée par :

$$\begin{aligned} (\eta_\epsilon \star \varphi)(\mathbf{x}) &= \int_{I^\Lambda} \eta(\mathbf{w}) \varphi(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{w}) d\mathbf{w} \\ &= \epsilon^{-|\Lambda|} \int_{I^\Lambda} \eta\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{w}}{\epsilon}\right) \varphi(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où nous avons supposé que φ est identiquement nulle hors de I^Λ . Nous pouvons vérifier que $\eta_\epsilon \star \varphi$ possède les propriétés suivantes :

1. $|\eta_\epsilon \star \varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$
2. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |(\eta_\epsilon \star \varphi) - \varphi|_\infty = 0$
3. $\eta_\epsilon \star \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(I^\Lambda)$.

Nous renvoyons le lecteur à [24] ou [65] pour plus de détails.

Nous dirons qu'une fonction φ est fonction continue par morceaux sur I^Λ si il existe une famille finie d'intervalles ouverts I_i telle que $\bigcup_i \bar{I}_i = I$ et φ est continue sur les pavés $I_{i_1} \times \dots \times I_{i_{|\Lambda|}}$ pour toute suite $\{i_p\}_{p \in \Lambda}$.

Alors :

□ **Proposition A.1 :**

Pour toute mesure $\mu \in L^1(I^\Lambda)$ et pour toute fonction φ continue par morceaux sur I^Λ , nous avons :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\eta_\epsilon \star \varphi) = \mu(\varphi)$$

Démonstration:

Choisissons un $\alpha > 0$ arbitraire. De (A.2), nous déduisons que :

$$|\mu(\eta_\epsilon \star \varphi - \varphi)| \leq \int_{I^\Lambda} \mu(d\mathbf{x}) \int d\mathbf{w} |\varphi(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{x})| \eta(\mathbf{w}) \quad (\text{A.3})$$

Prenons alors B_ϵ une bande de taille ϵ autour des discontinuités de φ . D'une part, si $\mathbf{x}$ n'appartient pas à B_ϵ , $\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{w}$ et $\mathbf{x}$ sont dans le même pavé $I_{i_1} \times \dots \times I_{i_{|\Lambda|}}$, et la continuité par morceaux de φ implique que pour ϵ suffisamment petit, $|\varphi(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \alpha$. D'autre part, si $\mathbf{x}$ appartient à B_ϵ , nous avons : $|\varphi(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{w}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq 2 |\varphi|_\infty$. Donc, (A.3) devient :

$$|\mu(\eta_\epsilon \star \varphi - \varphi)| \leq \mu(B_\epsilon^c) \alpha + 2\mu(B_\epsilon) |\varphi|_\infty \leq \mu(1) \alpha + 2\mu(B_\epsilon) |\varphi|_\infty$$

Dans la limite où ϵ tend vers 0, B_ϵ se réduit à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle dans I^Λ . La mesure μ étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, nous voyons que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(B_\epsilon) = 0$. Et le choix arbitraire de α implique alors que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\mu(\eta_\epsilon \star \varphi - \varphi)| = 0 \quad \blacksquare$$

Nous avons en Corollaire immédiat de cette proposition :

□ **Corollaire A.2 :**

Soit μ une mesure de $L^1(X)$ et $\varphi : I^\Lambda \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors :

$$\mu(\varphi) \leq |\mu| \|\varphi\|_\infty.$$

Démonstration:

Si φ est une fonction continue par morceaux, la Proposition A.1 implique que :

$$\mu(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\eta_\epsilon \star \varphi)$$

Mais, comme $\eta_\epsilon \star \varphi$ est continue, et $|\eta_\epsilon \star \varphi|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$, nous avons :

$$\mu(\varphi) \leq |\mu| \|\varphi\|_\infty. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons obtenir des résultats similaires pour Var_Λ :

□ **Lemme A.3 :**

Soit Λ' une partie finie de $\mathbb{Z}$ et $\varphi : I^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- φ est continue par morceaux par rapport aux variables dans $\Lambda \setminus \Lambda'$,
- φ est continue par rapport aux variables dans Λ' ,
- et $\partial_{\Lambda'} \varphi$ est continue par morceaux par rapport aux variables dans Λ' .

Alors, pour toute mesure μ , nous avons :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\eta_\epsilon \star \partial_{\Lambda'} \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\partial_{\Lambda'} (\eta_\epsilon \star \varphi))$$

Démonstration:

La preuve de ce résultat repose sur une récurrence sur la taille de Λ' . Supposons

tout d'abord que $\Lambda' = \{p\}$. Dans ce cas, la continuité de φ par rapport à x_p implique que :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(0, \mathbf{x}_{\neq p}) + \int_0^{x_p} \partial_p \varphi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p.$$

Définissons alors φ_ϵ :

$$\varphi_\epsilon(\mathbf{x}) = \eta_\epsilon \star \varphi(0, \mathbf{x}_{\neq p}) + \int_0^{x_p} \eta_\epsilon \star \partial_p \varphi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p.$$

Nous constatons que $\partial_p \varphi_\epsilon(\mathbf{x}) = \eta_\epsilon \star \partial_p \varphi$ et que :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\eta_\epsilon \star \partial_p \varphi - \partial_p(\eta_\epsilon \star \varphi)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\partial_p \varphi_\epsilon - \partial_p(\eta_\epsilon \star \varphi)) \\ &\leq \|\mu\| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\varphi_\epsilon - \eta_\epsilon \star \varphi|_\infty. \end{aligned}$$

Maintenant, vu que φ est continue, φ_ϵ et $\eta_\epsilon \star \varphi$ tendent tous les deux vers φ dans la norme sup quand ϵ tend vers zéro, cela complète la preuve pour $\Lambda' = \{p\}$.

Prenons maintenant un Λ' arbitraire et supposons que pour un certain $q \in \Lambda'$, la propriété recherchée soit vérifiée sur $\Lambda' \setminus \{q\}$. Alors :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\eta_\epsilon \star \partial_{\Lambda'} \varphi - \partial_{\Lambda'}(\eta_\epsilon \star \varphi)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\partial_{\Lambda' \setminus \{q\}}(\eta_\epsilon \star \partial_q \varphi - \partial_q(\eta_\epsilon \star \varphi))).$$

Définissons alors :

$$\varphi_\epsilon(\mathbf{x}) = \eta_\epsilon \star \varphi(0, \mathbf{x}_{\neq q}) + \int_0^{x_q} \eta_\epsilon \star \partial_q \varphi(\xi_q, \mathbf{x}_{\neq q}) d\xi_q.$$

Ensuite, à nouveau, $\partial_q \varphi_\epsilon = \eta_\epsilon \star \partial_q \varphi$. Et donc :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\partial_{\Lambda' \setminus \{q\}}(\eta_\epsilon \star \partial_q \varphi - \partial_q(\eta_\epsilon \star \varphi))) \leq \text{Var}_{\Lambda'} \mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\varphi_\epsilon - \eta_\epsilon \star \varphi|_\infty = 0. \blacksquare$$

Cela implique directement que :

□ **Proposition A.4 :**

Soit Λ' une partie finie de $\mathbb{Z}$ et $\varphi : I^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- φ est continue par morceaux par rapport aux variables dans $\Lambda \setminus \Lambda'$,
- φ est continue par rapport aux variables dans Λ' ,

– et $\partial_{\Lambda'} \varphi$ est continue par morceaux par rapport aux variables dans Λ' .

Alors, pour toute mesure μ :

$$\mu(\partial_{\Lambda} \varphi) \leq \text{Var}_{\Lambda}(\mu) |\varphi|_{\infty}$$

Démonstration:

Puisque $\partial_{\Lambda} \varphi$ est continue par morceaux, la Proposition A.1 implique que :

$$\mu(\partial_{\Lambda} \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\eta_{\epsilon} \star \partial_{\Lambda} \varphi) \quad (\text{A.4})$$

Mais alors, utilisant le Lemme A.3, l'équation (A.4) devient :

$$\begin{aligned} \mu(\partial_{\Lambda} \varphi) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\partial_{\Lambda}(\eta_{\epsilon} \star \varphi)) \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Var}_{\Lambda}(\mu) |\eta_{\epsilon} \star \varphi|_{\infty} \leq \text{Var}_{\Lambda}(\mu) |\varphi|_{\infty}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nous pouvons alors démontrer un corollaire direct de cette Proposition :

□ **Corollaire A.5 :**

Pour tout intervalle $[a, b] \subseteq [-1, 1]$, tout p et tout Λ , nous avons :

$$\text{Var}_{\Lambda}(\mathbb{1}_{[a,b]}(x_p) \mu) \leq \text{Var}_{\Lambda}(\mu)$$

Démonstration:

Si $p \notin \Lambda$, le résultat est une conséquence directe de la Proposition A.4. Pour toute fonction φ appartenant à $\mathcal{C}^{|\Lambda|}$, $p \notin \Lambda$ implique que $\mathbb{1}_{[a,b]}(x_p) \partial_{\Lambda} \varphi = \partial_{\Lambda} \mathbb{1}_{[a,b]}(x_p) \varphi$, et puisque $\mathbb{1}_{[a,b]}(x_p) \varphi$ est continuellement différentiable par rapport aux variables dans Λ , et continue par morceaux par rapport aux autres variables, la Proposition A.4 implique que :

$$\mu(\mathbb{1}_{[a,b]}(x_p) \partial_{\Lambda} \varphi) = \mu(\partial_{\Lambda} \mathbb{1}_{[a,b]}(x_p) \varphi) \leq \text{Var}_{\Lambda}(\mu) |\varphi|_{\infty}$$

Si $p \in \Lambda$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{|\Lambda|}$, nous pouvons définir :

$$\psi(\mathbf{x}) = \varphi(a, \mathbf{x}_{\neq p}) + \int_a^{x_p} \mathbb{1}_{[a,b]}(\xi_p) \partial_p \varphi(\xi_p, \mathbf{x}_{\neq p}) d\xi_p$$

Nous voyons immédiatement que ψ est continue, continuellement différentiable par morceaux et $\partial_p \psi = \mathbb{1}_{[a,b]}(\xi_p) \partial_p \varphi$. D'où :

$$\mu(\mathbb{1}_{[a,b]}(\xi_p) \partial_\Lambda \varphi) = \mu(\partial_\Lambda \psi) \leq \text{Var}_\Lambda(\mu) |\psi|_\infty$$

Mais la définition de ψ implique que $|\psi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$, et nous avons donc :

$$\mu(\mathbb{1}_{[a,b]}(\xi_p) \partial_\Lambda \varphi) \leq \text{Var}_\Lambda(\mu) |\varphi|_\infty$$

■

Bibliographie

- [1] C. ALIPRANTIS ET K. BORDER, *Infinite dimensional analysis : A hitchhiker's guide*, Springer-Verlag, Berlin, 3rd. éd., 2006.
- [2] V. BALADI, *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*, vol. 16 de Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific Publishing, Singapore, 2000.
- [3] V. BALADI, M. DEGLI ESPOSTI, S. ISOLA, E. JÄRVENPÄÄ ET A. KUPIAINEN, *The spectrum of weakly coupled map lattices*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 77 (1998), p. 539–584.
- [4] J.-B. BARDET ET G. KELLER, *Phase transitions in a piecewise expanding coupled map lattice with linear nearest neighbour coupling*, Nonlinearity, 19 (2006), p 2193.
- [5] G. BIRKHOFF, *Proof of the ergodic theorem.*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 17 (1931), p. 656–660.
- [6] M. BLANK ET L. BUNIMOVICH, *Multicomponent dynamical systems : SRB measures and phase transitions*, Nonlinearity, 16 (2003), p. 387–401.

- [7] C. BOLDRIGHINI, L. BUNIMOVICH, G. COSIMI, S. FRIGIO ET A. PELLEGRINOTTI, *Ising-type transitions in coupled map lattices*, J. Stat. Phys., 80 (1995), p. 1185–1205.
- [8] ———, *Ising-Type and Other Transitions in One-Dimensional Coupled Map Lattices with Sign Symmetry*, Journal of Statistical Physics, 102 (2001), p. 1271–1283.
- [9] R. BOWEN, *Markov partitions for axiom A diffeomorphisms*, Amer. J. Math., 92 (1970), p. 725–747.
- [10] ———, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.*, vol. 470 de Springer Lecture Notes in Math., Springer, 1975.
- [11] J. BRICMONT ET A. KUPIAINEN, *Coupled analytic maps*, Nonlinearity, 8 (1995), p. 379–396.
- [12] ———, *High temperature expansions and dynamical systems*, Commun. Math. Phys., 178 (1996), p. 703–732.
- [13] ———, *Infinite-dimensional SRB measures*, Physica D, 103 (1997), p. 18–33.
- [14] J. BRICMONT, J. L. LEBOWITZ ET C.-E. PFISTER, *On the equivalence of boundary conditions*, J. Statist. Phys., 21 (1979), p. 573–582.
- [15] L. BUNIMOVICH ET Y. SINAI, *Spacetime chaos in coupled map lattices*, Nonlinearity, 1 (1988), p. 491–516.
- [16] P. COLLET, *Some ergodic properties of maps of the interval.*, in Proceedings of the summer school on dynamical systems and frustrated systems, R. Bamon *et al.*, éds., 1996.
- [17] A. DE MAERE, *Phase transition and correlation decay in coupled map lattices*. arXiv :0906.3017, 2009.
- [18] R. DOBRUSHIN, *Description of a random field by means of its conditional probabilities and conditions of its regularity*, Theory Probab. Appl., 13 (1968), p. 197–224.
- [19] ———, *Markov Processes with a Large Number of Locally Interacting Components : Existence of a Limit Process and Its Ergodicity*, Problems Inform. Transmission, 7 (1971), p. 149–164.

- [20] R. DOBRUSHIN, V. KRYUKOV ET A. TOOM, édés., *Stochastic cellular systems : ergodicity, memory, morphogenesis*, Manchester University Press, 1990.
- [21] P. GACS, *Reliable Cellular Automata with Self-Organization*, J. of Stat. Phys., 103 (2001), p. 45–267.
- [22] I. GELFAND, *Über absolut konvergente trigonometrische reihen und integrale*, Mat. Sbornik, 9 (1941), p. 51–66.
- [23] G. GIELIS ET R. MACKAY, *Coupled map lattices with phase transition*, Nonlinearity, 13 (2000), p. 867–888.
- [24] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variations*, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [25] G. GRIMMETT ET D. STIRZAKER, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, 3th éd., 1992.
- [26] H. HENNION, *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens.*, Proc. Am. Math. Soc., 118 (1993), p. 627–634.
- [27] H. HENNION ET L. HERVÉ, *Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-Compactness*, vol. 1766 de Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [28] D. HUSE ET J. MILLER, *Macroscopic equilibrium from microscopic irreversibility in a chaotic coupled-map lattice*, Phys. Rev. E, 48 (1993), p. 2528–2535.
- [29] C. IONESCU TULCEA ET G. MARINESCU, *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, The Annals of Mathematics, 52 (1950), p. 140–147.
- [30] E. JÄRVENPÄÄ ET M. JÄRVENPÄÄ, *On the definition of SRB-measures for coupled map lattices*, Commun. Math. Phys., 220 (2001), p. 1–12.
- [31] W. JUST, *Equilibrium phase transitions in coupled map lattices : A pedestrian approach*, J. Stat. Phys., 105 (2001), p. 133–142.
- [32] W. JUST ET F. SCHMÜSER, *Non-equilibrium behaviour in unidirectionally coupled map lattices*, J. Stat. Phys., 105 (2001), p. 525–559.

- [33] K. KANEKO, *Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice*, Prog. Theor. Phys, 72 (1984), p. 480–486.
- [34] ———, *Theory and applications of Coupled Map Lattices*, Wiley & Sons, New York, 1993.
- [35] G. KELLER, *Interval maps with strictly contracting Perron-Frobenius operators.*, Int. J. Bifurcation Chaos, 9 (1999), p. 1777–1783.
- [36] G. KELLER ET C. LIVERANI, *Coupled map lattices without cluster expansion*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 11 (2004), p. 325–335.
- [37] ———, *A spectral gap for a one-dimensional lattice of coupled piecewise expanding interval maps*, vol. 671 de Lecture Notes in Physics, Springer, 2005, p. 115–151.
- [38] ———, *Uniqueness of the SRB measure for piecewise expanding weakly coupled map lattices in any dimension*, Commun. Math. Phys., 262 (2006), p. 33–50.
- [39] P. LAPLACE, *Essai Philosophique sur les Probabilités*, H. Remy, Bruxelles, 5ème éd., 1829.
- [40] A. LASOTA ET J. YORKE, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Transactions of the American Mathematical Society, 186 (1973), p. 481–488.
- [41] J. LEBOWITZ, C. MAES ET E. SPEER, *Statistical mechanics of probabilistic cellular automata*, J. Stat. Phys., 59 (1990).
- [42] T. LIGGETT, *Interacting Particle Systems*, vol. 276 de Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New-York, 1985.
- [43] ———, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New-York, 2 éd., 2005.
- [44] C. LIVERANI, *Decay of correlations for piecewise expanding maps.*, J. Stat. Phys., 78 (1995), p. 1111–1129.
- [45] C. LIVERANI, *Rigorous numerical investigation of the statistical properties of piecewise expanding maps. A feasibility study.*, Nonlinearity, 14 (2001), p. 463–490.

- [46] C. LIVERANI, *Invariant measures and their properties. a functional analytic point of view*, (2004).
- [47] C. MAES ET A. VAN MOFFAERT, *Stochastic stability of weakly coupled lattice maps*, Nonlinearity, 10 (1997), p. 715–730.
- [48] J. MAXWELL, *Matter and Motion*, The Macmillan Co., New-York, 1877.
- [49] R. MIZUNO, Y. DOBASHI ET T. NISHITA, *Volcanic smoke animation using cml*, in Proc. International Computer Symposium 2002 (ICS 2002), vol. 2, 2002, p. 1375–1382.
- [50] R. PEIERLS, *On Ising's model of ferromagnetism*, Proc. Camb. Philos. Soc., 32 (1936), p. 477–481.
- [51] M. REED ET B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics : Functional Analysis*, vol. 1, Academic Press, 2 éd., 1972.
- [52] H. ROYDEN, *Real Analysis*, The Macmillan Company, New York, 5ème éd., 1963.
- [53] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [54] D. RUELE, *Thermodynamic Formalism*, Addison Wesley, Reading, MA., 1978.
- [55] H. RUGH, *Coupled maps and analytic function spaces.*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4 (2002), p. 489–535.
- [56] Y. SINAI, *Markov partitions and c-diffeomorphisms*, Func. Anal. and its Appl., 2 (1968), p. 64–89.
- [57] ———, *Gibbs measure in ergodic theory*, Russian Math. Surveys, 27 (1972).
- [58] O. STAVSKAYA, *Invariant gibbs measures for markov chains on finite lattices with local interaction*, Sbornik : Mathematics, 21 (1973), p. 395–411.
- [59] A. TOOM, *Stable and attractive trajectories in multicomponent systems*, Adv. Probab. relat. Top., 6 (1980), p. 549–575.
- [60] ———, *Particle systems with variable length*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 33 (2002), p. 419–425.

-
- [61] G. VITALI, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti Accad. sci. Torino, 43 (1908), p. 229–246.
 - [62] D. VOLEVICH, *Kinetics of coupled map lattices*, Nonlinearity, 4 (1991), p. 37–45.
 - [63] P. WALTERS, *An Introduction to Ergodic Theory*, vol. 79 de Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1982.
 - [64] T. YANAGITA ET K. KANEKO, *Modeling and characterization of cloud dynamics*, Phys. Rev. Let., 78 (1996), p. 4297–4300.
 - [65] W. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

INDEX

- Application
 - chaotique, 68
 - dilatante par morceaux, 69
- Automate cellulaire probabiliste, 7
- Convergence
 - en norme, 22
 - faible, 22
 - faible étoilée, 23
- Critère de Dobrushin, 26
- Formule
 - de Gelfand, 12
- Inégalité de Lasota-Yorke, 75
- Loi des grands nombres, 13
- Matrice
 - apériodique, 9
 - de transfert, 9
 - irréductible, 9
 - stochastique, 9
- Mesure
 - de probabilité, 5
 - ergodique, 47
 - mélangeante, 47
 - positive, 5
 - signée, 4
 - SRB, 72, 89
- Modèle de Stavskaya, 17
 - étendu, 31
- Opérateur
 - quasi-compact, 78
- Opérateur de transfert
 - pour les chaînes de Markov, 6
 - pour les itérations de l'intervalle, 71
- Réseau d'applications couplées, 88
- Théorème
 - de Ionescu Tulcea-Marinescu, 78
 - de Banach-Alaoglu, 23
 - de décomposition de Hahn, 5
 - de Krein-Milman, 46
 - de Perron-Frobenius, 10

- de Riesz-Markov, 22
- de Stone-Weierstrass, 4