Effets de réputation dans les enchères : l'inégalité des perdants*

Olivier Bos† and Tom Truyts‡

14 mai 2020

Résumé

Nous étudions un modèle à valorisations privées indépendantes, où le classement de toutes les offres est révélé à un observateur extérieur, information qui lui permet d'estimer au mieux le type des participants. Alors l'équivalence du revenu est conservée pour les enchères sous plis scellés, l'enchère statique optimale nécessite un prix de réserve spécifique, et un droit d'entrée continu pour extraire tout le surplus des enchérisseurs avec les plus faibles valorisations. Une réponse illustrative, sur la taille optimale du classement des offres à révéler, est apportée. Enfin, la non équivalence entre les enchères ascendante et au second prix est établie. Les applications sont aussi diverses que la vente d'œuvres d'art ou le financement d'œuvres caritatives.

Mots clefs : enchère optimale ; révélation d'information ; maison de vente aux enchères ; mécanisme caritatif.

Classification JEL : D44, D82

Reputational concerns in auctions: inequality amongst losers

Abstract

We study a symmetric private values model in which all the bidding ranks is used by an outside observer to infer the bidders' types. In the class of sealed-bid auctions, we establish the revenue equivalence and determine the optimal auction, which requires an entry fee to extract all surplus from the lowest types. We provide a first reply about the optimal disclosure policy for the size of the bidding ranks. Moreover, there is no strategical equivalence anymore between the second-price auction and the English auction. Our results are useful for art auction houses and charity auctions.

Keywords: optimal auction; information disclosure; art auction; charity auction.

JEL Classification: D44, D82

*Nous remercions David Ettinger, Françoise Forges et Michel Le Breton pour leurs encouragements à mener à bien ce projet lors de la soutenance d'HDR d'Olivier Bos, Martin Pollrich, ainsi qu'un rapporteur anonyme pour ses commentaires avisés. Cette recherche est partie prenante du Labex MME-DII (ANR11-LBX-0023-01) et du projet ANR SIGNAL (ANR-19-CE26-0009). D'éventuelles erreurs relèveraient de notre seule responsabilité.

†Université Panthéon-Assas (LEMMA), Institut Universitaire de France (IUF) et ZEW-Leibniz Centre for European Economic Research. Correspondance : Université Panthéon-Assas, LEMMA, 4 rue Blaise Desgoffe, 75006 Paris, France. Courriel : olivier.bos@u-paris2.fr.

‡Centre de Recherche en Economie (CEREC), Université Saint-Louis et Department of Economics, University of Leuven. Correspondance : Université Saint-Louis – Bruxelles, 43 Boulevard du Jardin botanique, 1000 Bruxelles, Belgique. Courriel : tom.truyts@usaintlouis.be.

1 Introduction

La participation à une enchère a habituellement pour objectif, d'obtenir le bien mis en vente au prix le plus faible. Dans un certain nombre de situations, les enchérisseurs se soucient aussi tout autant de la façon dont ils sont perçus, c'est-à-dire des effets de réputation suite à leur offre et sa performance relative. Une entreprise, qui répond à un appel d'offre, sait que son offre et son classement parmi les offres soumises auront des répercussions sur la façon dont elle sera présentée dans les médias nationaux, et ainsi auprès des consommateurs et de potentiels investisseurs. De même, en l'absence d'altruisme, la participation à une enchère caritative peut être de nature à donner une image de générosité[1]. Participer à une enchère pour une œuvre d'art relève aussi parfois de l'image véhiculée, sinon par l'acquisition, tout au moins par l'intérêt porté à l'œuvre mis en vente (Mandel, 2009).

Afin de rendre compte au mieux des effets de réputation suite à la performance relative des enchérisseurs, nous proposons que le classement des toutes les offres soit révélé à un observateur extérieur, qui utilisera cette information pour estimer le type des agents. Se pose alors la question des conséquences de l'information révélée sur deux résultats fondamentaux de la théorie des enchères : le théorème d'équivalence du revenu et la forme de l'enchère optimale (Myerson, 1981). Pour cela, nous considérons un modèle à valorisations privées indépendantes, dans lequel tous les agents ont les mêmes croyances. Si pour les enchères sous plis scellés l'équivalence du revenu n'est pas affectée par la révélation du classement des offres, il en est autrement de l'enchère optimale. Elle nécessite un prix de réserve spécifique, et un droit d'entrée pour extraire tout le surplus des agents avec les plus faibles valorisations. Ce résultat soulève une seconde interrogation, propre à la révélation d'information. Afin de maximiser le revenu d'une enchère sous plis scellés, est-il préférable de révéler une partie du classement des offres, et de quelle taille ? Une réponse illustrative est apportée, et met en évidence la nécessité d'être explorée de façon exhaustive dans de futurs travaux. Enfin, l'équivalence stratégique entre l'enchère au second prix et l'enchère anglaise, ou ascendante, est inspectée. La compréhension de l'enchère anglaise est d'importance, son utilisation étant très répandue pour la vente d'œuvres d'art et le financement d'œuvres caritatives. Cela n'est pas sans permettre d'identifier les rôles spécifiques joués par la révélation du classement des offres dans l'enchère au second prix, sous plis scellés, et l'enchère anglaise, dynamique.

Notre étude n'est pas sans rappeler les récents travaux de Giovannoni et Makris (2014) et Bos et Truyts (2019) sur les effets de réputation dans les enchères[2]. Ils y sont formalisés à l'aide de jeux de signaux, et conduisent à la perte de l'équivalence du revenu. L'information diffusée est constituée du prix payé, ou de l'offre d'un ou plusieurs agents, et de leurs identités respectives.

[1]Un certain nombre d'analyses théoriques et empiriques concluent que le statut social est l'une des principales motivations à la participation au financement d'une œuvre caritative (Glazer et Konrad, 1996, Harbaugh, 1998). Cela pourrait aussi expliquer les surprenants résultats de l'expérience de terrain menée par Carpenter *et al.* (2008), en contradiction avec les analyses théoriques, où l'altruisme est la seule motivation pour participer à une enchère caritative (Goeree *et al.*, 2005, Engers et McManus, 2007, Bos, 2020).

[2]La révélation d'information dans les enchères suivies d'un marché secondaire oligopolistique a été étudiée par Goeree (2003), Das Varma (2003) et Katzman et Rhodes-Kropf (2008). Enfin, Lebrun (2010) et Bergemann et Hörner (2018) ont explicité le rôle de la diffusion de différents types d'information dans l'enchère au premier prix.

Dans notre analyse, la nature de la révélation d'information joue un rôle différent. Les agents sont soucieux de l'estimation de leur valorisation au sein du classement des offres, qui induit cette estimation. Ainsi, aucun jeu de signaux n'intervient entre les participants et l'observateur extérieur. Par ailleurs, Giovannoni et Makris (2014) et Bos et Truyts (2019) comparent des formats d'enchères spécifiques et n'apportent, contrairement à notre analyse, aucune réponse quant à l'enchère optimale. Enfin, notre objectif est aussi de discuter de la diffusion optimale d'information.

La suite de cet article est organisée comme suit. Le modèle est explicité dans la section 2, suivi de l'analyse de l'enchère sous plis scellés optimale, accompagnée d'illustrations de la révélation optimale d'information dans la quatrième section. Enfin, l'analyse de l'enchère anglaise est proposée en section 5, précédent la conclusion.

2 Modèle

Un objet est alloué, par l'intermédiaire d'une enchère, à l'agent – parmi n – ayant soumis la proposition la plus élevée[3]. La valorisation de l'enchérisseur i, soit encore son type, est notée V_i et est caractérisée par une distribution de probabilité, de densité continue f sur un intervalle $[0, \overline{v}] \subset \mathbb{R}_+$. F est la fonction de répartition associée, telle que $F' \equiv f$ et les valorisations de tous les agents sont supposées i.i.d. Chaque agent a pour information privée la connaissance de sa propre valorisation, dont la réalisation est notée v_i. Le nombre de concurrents et la fonction de répartition F sont aussi connaissance commune.

Pour participer à l'enchère, un agent doit soumettre une offre non-négative. Puisque tous ont les même croyances quant à la valorisation de leurs différents concurrents, leur participation repose sur leur stratégie d'offre symétrique notée $\beta : [0, \overline{v}] \to \mathbb{R}_+$. On note par ailleurs $b_i = \beta(v_i)$, l'offre de l'agent de type v_i. Un mécanisme d'enchère est une application qui associe à tout vecteur d'offres $(b_1, ..., b_n)$ un vainqueur $i^\star$ et un vecteur de paiement $(p_1, ..., p_n)$. Si plusieurs agents proposent l'offre la plus élevée, le vainqueur est déterminé par tirage au sort[4].

Les participants à l'enchère souhaitent remporter l'objet mis en vente au prix le plus faible, mais aussi être perçus le plus favorablement possible par un observateur extérieur. Il peut être un organe de presse, un expert sur l'objet de la vente, de potentiels investisseurs ou encore l'opinion d'un groupe d'individus prédéfini. Il se voit révéler le classement de toutes les offres soumises[5], à partir duquel il estime le type de chaque participant. Son estimation consiste alors à calculer pour chaque agent i,

$$r(k;n) = \frac{\displaystyle\int_0^{\overline{v}} vF(v)^k(1-F(v))^{n-k}dv}{\displaystyle\int_0^{\overline{v}} F(v)^k(1-F(v))^{n-k}dv}.$$

[3]Le mécanisme d'enchère proposé concerne plus spécifiquement les enchères sous plis scellés. Des éléments complémentaires pour les enchères dynamiques, en particulier l'enchère anglaise, sont apportés dans la section 5.

[4]Autrement dit, pour tout $i \in \left\{ j | b_j = \max\limits_{i=1,\dots,n} b_i \right\}$ il vient $\Pr(i = i^\star) = \frac{1}{\left| \left\{ j | b_j = \max\limits_{i=1,\dots,n} b_i \right\} \right|}$.

[5]Cela implique aussi, par défaut, l'identité des enchérisseurs associés au classement des offres.

Exemple 1 (Loi uniforme)**.** *Lorsque les valorisations sont distribuées uniformément sur* $[0,1]$*, l'estimation de l'observateur pour l'agent classé au rang* k *devient*

$$r(k;n) = \frac{\displaystyle\int_0^1 v^{k+1}(1-v)^{n-k}dv}{\displaystyle\int_0^1 v^{k}(1-v)^{n-k}dv} = \frac{k}{n+1}.$$

L'utilité de l'agent i est composée de trois éléments. Le premier, habituel, est sa valorisation v_i, bien-être brut retiré uniquement par le vainqueur. Le second est son paiement p_i, qui selon le format d'enchère peut s'avérer nul ou positif pour un perdant. Enfin, le bien-être de l'enchérisseur, qui rappelons-le souhaite être perçu le plus favorablement possible par l'observateur, est augmenté de l'estimation $r(.,n)$, la perception de son type par ce même observateur. Ainsi, la fonction de gain d'un agent i est donnée par :

$$u_i(v_i,p_i) = \begin{cases} v_i \quad -p_i + r(1;n) & \text{si } i = i^\star \\ \qquad -p_i + r(k;n) & \text{si } i \neq i^\star \text{ et } b_i \text{ la } k^{\text{ème}} \text{ plus haute offre parmi } n. \end{cases}$$

3 Enchère sous plis scellés optimale

Dans cette section, les méthodes habituelles de la théorie des mécanismes sont utilisées pour (i) établir que le théorème d'équivalence du revenu est maintenu, et (ii) déterminer l'enchère optimale lorsque le classement de toutes les offres est révélé. Comme expliqué ci-dessous, ces résultats sont restreint à la classe des mécanismes d'enchères sous plis scellés.

Nous supposons qu'un équilibre symétrique bayésien existe dans chaque jeu d'enchère ; hypothèse, qui au regard des travaux précédents en théorie des mécanismes, n'est en rien restrictive. Notons $t(v)$ le paiement espéré à l'équilibre d'un agent de type v, et supposons que $t(0) = 0$ pour toute enchère. Si un agent avec une valorisation v prétend être de type $\tilde{v} \neq v$, son espérance d'utilité est alors

$$U(v;\tilde{v}) = vF^{n-1}(\tilde{v}) - t(\tilde{v}) + \mathcal{R}(\tilde{v})$$

Pour tous les formats d'enchères, l'utilité espérée de chaque agent est augmentée de l'estimation espérée de sa valorisation par l'observateur extérieur

$$\mathcal{R}(\tilde{v}) = \sum_{k=1}^{n} r(k;n) \tbinom{n-1}{k-1} F(\tilde{v})^{n-k}(1-F(\tilde{v}))^{n-1}.$$

Elle se compose d'une somme, qui rend compte de tous les classements possibles de l'offre de l'agent, et de la perception du type $\tilde{v}$ de l'agent comme le $k^{\text{ème}}$ plus haut parmi n, $r(k,n)$, multiplié par la probabilité de l'évènement associé, $\tbinom{n-1}{k-1} F(\tilde{v})^{n-k}(1-F(\tilde{v}))^{n-1}$.

En utilisant l'approche de Myerson (1981), la stratégie optimale implique

$$v(F^{n-1}(v))' - \frac{dt}{dv}(v) + \mathcal{R}'(v) = 0.$$

Il suit,

$$\begin{aligned} t(v) &= \int_0^v x(F^{n-1}(x))'dx + \mathcal{R}(v) - \mathcal{R}(0) \\ &= \int_0^v x(F^{n-1}(x))'dx + \mathcal{R}(v) - r(n;n) \end{aligned} \tag{1}$$

Ce résultat et cette méthodologie prévalent pour les enchères sous plis scellés et excluent les enchères (dynamiques) ascendantes telle l'enchère anglaise[6]. Dans une enchère ascendante, le nombre d'enchérisseurs, mais aussi bien souvent leur identité, et le prix au-delà duquel ils ont décidé de quitter l'enchère sont autant d'informations disponibles. La réduction du nombre d'enchérisseurs pour un prix donné, entraine mécaniquement une modification de l'estimation r de l'observateur pour un agent *actif*[7] de type v, et donc de l'estimation espérée de la valorisation de ce même agent, $\mathcal{R}(v)$, qui dépendent toutes les deux du nombre d'enchérisseurs *actifs*. L'approche de Myerson (1981) ne peut donc pas être appliquée pour les enchères ascendantes, ce qui rend l'équivalence du revenu entre ces formats d'enchères et celles sous plis scellées non évidente. Ce point est développé dans la section 5, qui comparent l'enchère anglaise et l'enchère au second prix.

Suite à l'équation (1), l'équivalence du revenu pour tout format d'enchère sous plis scellés est conservée. A la différence du résultat de Myerson (1981), où le classement des offres n'est pas observable par un tiers, le paiement espéré est ici augmentée du terme positif $\mathcal{R}(v) - r(n; n)$. Ce terme additionnel, n'est autre que la valeur de l'estimation espérée suite à la divulgation d'informations supplémentaires, réduite de l'utilité minimale que les agents du type le plus bas peuvent s'assurer. Il suffit pour cela de remarquer que $U(0) = \mathcal{R}(0) = r(n; n)$. L'exemple 2 illustre l'équivalence du revenu déterminée par l'équation (1).

Exemple 2 (Application pour les enchères au premier et au second prix)**.** *Notons* β^F, β^S, t^F *et* t^S *les stratégies d'offres et les paiements espérés à l'équilibre pour les enchères au premier et au second prix. Puisque* $t^F(v) = F^{n-1}(v)\beta^F(v)$ *et* $t^S(v) = F^{n-1}(v)\mathbb{E}(\beta^S(V^{n-1:1})|V^{n-1:1} \leq v)$*, avec* $V^{n-1:1}$ *la plus haute valorisation parmi* $n-1$*, il suit que* $t^F(0) = t^S(0) = 0$*. Notre équivalence du revenu s'applique donc à ces deux formats d'enchères. Remarquons que l'utilité espérée de l'agent avec le type le plus bas est bien positive dans ces deux enchères :* $U^F(0) = U^S(0) = \mathcal{R}(0) = r(n; n)$*, avec* U^F *et* U^S *les espérances d'utilité des enchères au premier et au second prix.*

En utilisant théorème de l'enveloppe appliqué à l'espérance d'utilité, tel que $U'(v) = F^{n-1}(v)$, il suit

$$U(v) = U(0) + \int_0^v F^{n-1}(x)dx \text{ avec } U(0) = \mathcal{R}(0) = r(n; n) > 0.$$

Ce résultat est cohérent avec l'équivalence du revenu déterminée précédemment : les enchérisseurs ont une utilité espérée qui dépend uniquement de leur bien-être espéré minimal, $U(0)$, et de la probabilité de gagner l'enchère. On peut alors écrire l'espérance de revenu, notée *Rev*,

[6] L'équivalence du revenu et l'enchère optimale déterminées dans cette section englobent aussi les enchères descendantes telle l'enchère hollandaise : à l'instar des enchères ascendantes, elles ne souffrent pas de la modification de $\mathcal{R}(v)$ à chaque période. Pour autant, nous restreignons ici la portée des résultats aux enchères sous plis scellés pour en simplifier leur exposition.

[7] On entend ici par agent *actif*, tout participant n'ayant pas quitté l'enchère.

à partir de l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
Rev &= n \int_0^{\overline{v}} \int_0^{v} x(F^{n-1}(x))' dx f(v) dv + n\mathbb{E}(\mathcal{R}(V)) - nr(n;n) \\
&= n \left(\int_0^{\overline{v}} v(F^{n-1}(v)) f(v) dv - \int_0^{\overline{v}} \int_0^{v} F^{n-1}(x) dx f(v) dv \right) + n\mathbb{E}(\mathcal{R}(V)) - nr(n;n) \\
&= \int_0^{\overline{v}} \left(v - \frac{1-F(v)}{f(v)} \right) dF^n(v) + n\mathbb{E}(\mathcal{R}(V)) - n \underbrace{U(0)}_{>0} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la troisième ligne utilisent les méthodes de calculs usuelles pour déterminer l'espérance de revenu sans révélation du classement des offres, et ainsi aboutir au premier terme de l'équation (2)[8].

Myerson (1981) définit $v - \dfrac{1-F(v)}{f(v)}$ comme la valorisation virtuelle de l'agent de type v, qu'il suppose croissante. Cela est suffisant, pour qualifier de *régulier*, le problème de théorie des mécanismes auquel nous faisons face[9]. Une différence importante apparaît cependant entre l'espérance de revenu pour les enchères sans révélation du classement des offres, et celle établie par l'équation (2). Alors qu'habituellement l'enchère optimale est déterminée de façon à ce que l'espérance d'utilité minimale soit nulle, $U(0) = 0$, il n'en est rien ici puisque $U(0) = r(n;n)$. En conséquence, l'organisateur de l'enchère, qui souhaite maximiser l'espérance de revenu, a recours à un droit d'entrée pour extraire le surplus des agents ayant la plus petite valorisation tel que $U(0) = 0$, sans que cela ne modifie la probabilité de gagner d'un agent de type plus élevé. Une seconde différence est l'apparition du terme $\mathbb{E}(\mathcal{R}(V))$. Si celui-ci n'a aucune conséquence qualitative, il s'agit d'une constante et n'affecte donc ni la probabilité de gagner, ni la règle de paiement, il est déterminant pour établir le prix de réserve optimal.

Notre équation (2), qui décrit l'espérance de revenu, peut encore être améliorée. Remarquons que la probabilité $F^n(v)$ est celle des seuls agents prenant part activement à l'enchère, celle des autres étant égale à 0. Soit $\underline{v}$ la plus petite valorisation d'un agent *actif*[10], avec $\underline{v} = 0$ pour un prix de réserve nul. L'introduction d'un prix de réserve vient modifier l'estimation de l'observateur extérieur. En effet, il ne peut désormais percevoir un agent avec un type inférieur à $\underline{v}$ que comme la moyenne des types inférieurs à $\underline{v}$.

$$r(k;n,\underline{v}) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} vF(v)^k(1-F(v))^{n-k} dv}{\displaystyle\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} F(v)^k(1-F(v))^{n-k} dv} & \text{si } v \geq \underline{v} \\ \mathbb{E}(V|V<\underline{v}) & \text{si non} \end{cases}$$

Notons, que tous les agents avec une évaluation inférieure à $\underline{v}$ sont désormais classés comme ayant le type le plus petit. L'espérance de revenu décrite par l'équation (2) devient :

$$Rev = \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \left(v - \frac{1-F(v)}{f(v)} \right) dF^n(v) + n\mathbb{E}(\mathcal{R}(V;\underline{v})) - nU(\underline{v}) \qquad (3)$$

[8]Voir Krishna (2009), chapitre 5.

[9]Voir notamment Krishna (2009), chapitre 5, ou Börgers (2015) pour un ouvrage plus exhaustif.

[10]On entend par agent *actif*, tout participant qui soumet une offre supérieure au prix de réserve.

La différence entre $\mathbb{E}(\mathcal{R}(V))$ dans l'équation (2) et $\mathbb{E}(\mathcal{R}(V;\underline{v}))$ dans l'équation (3), est la modification de l'estimation de l'observateur extérieur, devenue $r(k;n,\underline{v})$.

Proposition 1. *Supposons que les valorisations virtuelles soient croissantes. L'espérance de revenu est maximisée (1) en allouant l'objet mis en vente de la même façon que dans une enchère sous plis scellés optimale, où aucune information sur le classement des offres n'est révélée, (2) en ayant recours à un prix de réserve spécifique à la révélation du classement des offres, et (3) en imposant un droit d'entrée à tous les enchérisseurs afin d'extraire au mieux leur surplus.*

Ce résultat induit qu'il n'y a pas une seule enchère sous plis scellés optimale dans la situation où le classement des offres soumises est révélé[11]. Par exemple l'enchère au premier prix, associée au prix de réserve optimal et à un droit d'entrée qui extrait tout le surplus de l'agent *actif* avec le plus faible type $\underline{v}$, est une enchère optimale. Nous n'avons pas caractérisé l'équation qui définit le prix de réserve. Alors qu'il est indépendant du nombre de participants sans aucune révélation d'information sur le classement des offres, il est fort probable, étant donnée la forme de $\mathcal{R}(v;\underline{v})$, qu'il en soit ici autrement.

L'enchère sous plis scellés optimale déterminée dans la Proposition 1 dépend de façon exogène du classement des offres révélé à l'observateur extérieur. Rien n'indique que la mise à disposition d'une information moins généreuse, ne serait pas plus favorable à la maximisation du revenu. La Proposition 1 met ainsi en évidence l'importance d'analyser la révélation optimale d'information, et ses conséquences sur l'enchère optimale déterminée.

4 Révélation optimale d'information : illustrations

Ne révéler qu'une partie du classement des offres soumises ne saurait affecter l'équivalence du revenu. Pour autant, il est fort probable que l'espérance de revenu varie selon la taille du classement révélé. Quelle politique de révélation du classement des offres est optimale dans la perspective d'une maximisation du revenu ? Est-il plus favorable de révéler le classement de toutes les offres, de la seule offre la plus élevée, ou encore du classement des k offres les plus élevées[12] ? Autrement dit, il s'agit de déterminer si révéler le classement toutes les offres, ou d'un sous-ensemble à définir, est souhaitable pour la maximisation du revenu.

Etant donnée la complexité du problème soulevé, une première réponse est proposée à l'aide de méthodes numériques. Pour cela, nous considérons trois distributions de probabilité sur $[0,1]$: une distribution uniforme, une distribution triangulaire, de mode 0,5, et une distribution de probabilité bêta, uni-modale (de paramètres 2 et 5). Les densités associées, notées f_μ, f_Δ et f_β, se présentent comme

[11] Comme Goeree *et al.* (2005) nous utilisons un droit d'entrée pour extraire au mieux le surplus du type le plus bas. Pour autant les deux problèmes sont indépendants, tant sur la méthodologie que les résultats obtenus. L'utilité des agents chez Goeree *et al.* est augmentée d'une proportion du prix final payé (par un ou plusieurs enchérisseurs). Ils établissent alors que l'enchère optimale, parmi les mécanismes statiques et dynamiques, est l'*all-pay auction* au plus faible prix accompagnée d'un prix de réserve et d'un droit d'entrée.

[12] Rappelons que la révélation du classement des offres s'accompagne de l'identité des agents concernés.

$$f_\mu(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in [0,1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}, f_\Delta(v) = \begin{cases} 4v & \text{si } 0 < v < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } v = \frac{1}{2} \\ 4(1-v) & \text{si } \frac{1}{2} < v < 1 \\ 0 & \text{si } v \notin (0,1) \end{cases} \text{ et } f_\beta(v) = \begin{cases} \dfrac{v(1-v)^4}{\int_0^1 x(1-x)^4 dx} & \text{si } v \in [0,1] \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Si le classement des k offres les plus élevées est révélé, l'estimation espérée de l'observateur pour un agent de type v, désormais notée $\mathcal{R}^k(v)$, s'écrit

$$\mathcal{R}^k(v) = \sum_{l=1}^{k} r(l;n) \binom{n-1}{l-1} F(v)^{n-l}(1-F(v))^{n-1} + \frac{\sum_{l=k+1}^{k} r(l;n)}{n-k-1} \sum_{l=k+1}^{n} \binom{n-1}{l-1} F(v)^{n-l}(1-F(v))^{n-1}.$$

Le premier terme explicite la perception de la valorisation d'un agent de type v, en tenant compte de l'éventualité que son offre soit l'une des $k^{\text{ème}}$ plus haute, et donc inclut dans le classement des offres révélées. Le second considère la situation où l'offre de l'agent de type v est inférieure à la $k^{\text{ème}}$ plus élevée, ce qui se produit avec la probabilité $\sum_{l=k+1}^{n} \binom{n-1}{l-1} F(v)^{n-l}(1-F(v))^{n-1}$. L'agent est alors perçu comme le type moyen parmi ceux dont le classement de l'offre n'est pas révélé, soit $\frac{\sum_{l=k+1}^{k} r(l;n)}{n-k-1}$.

Les graphiques 1 à 9 ci-dessous représentent la différence $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour différentes valeurs de k dans chacune des trois distributions, et respectivement $n = 10$, $n = 60$ et $n = 100$. Pour $k = 1$ seule l'offre la plus élevée est révélée, pour $k = n$ le classement de toutes les offres est révélé, et pour $k = \frac{n}{2}$ seul le classement de la moitié des offres les plus élevées est révélé. Sur chacun de ces graphiques, on observe que $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ est croissant avec k. Ainsi, l'espérance de revenu est maximale lorsque le classement de toutes les offres est révélé. Ce résultat, qui repose sur la forme des distributions choisies, conduit à la conjecture, que l'enchère sous plis scellés optimale, sous certaines conditions, nécessite de révéler le classement de toutes les offres[13]. Elle correspondrait alors au résultat de la Proposition 1.

Ce résultat n'est pas sans soulever de nombreuses interrogations quant à la nature de l'information à révéler pour maximiser le revenu. Serait-il, par exemple, plus favorable de révéler les offres soumises plutôt que leur classement[14] ? Une première réponse pourrait être obtenue en comparant nos résultats avec ceux des récents travaux de Giovannoni et Makris (2014) et Bos et Truyts (2019).

[13]Les paramètres des distributions considérées peuvent être modifiés à l'aide d'un outil disponible en ligne : https://cocatax.shinyapps.io/AuctionSignalingApp/. Aucune autre distribution testée n'a été en mesure de contredire cette conjecture.

[14]Notons que la mise en œuvre de cette politique serait probablement plus délicate, le classement des offres étant une information plus synthétique et plus facile à diffuser, notamment pour un nombre important de participants.

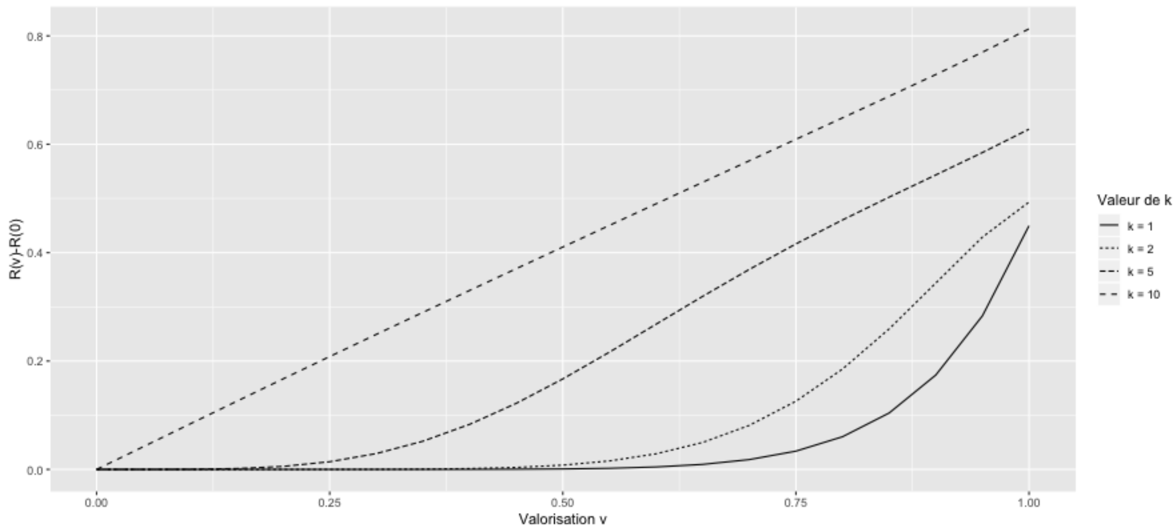

FIGURE 1 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution uniforme et $n = 10$

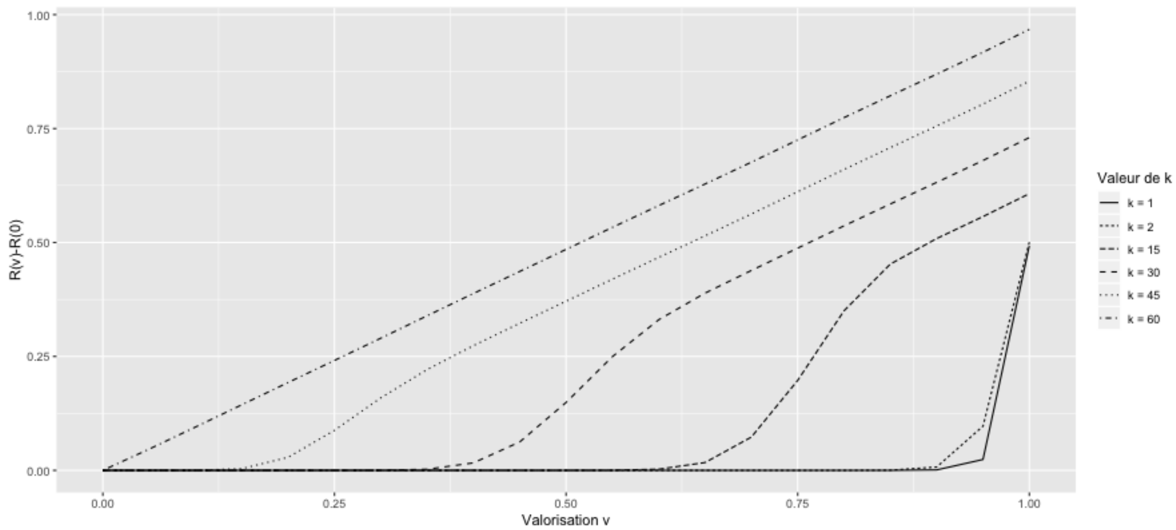

FIGURE 2 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution uniforme et $n = 60$

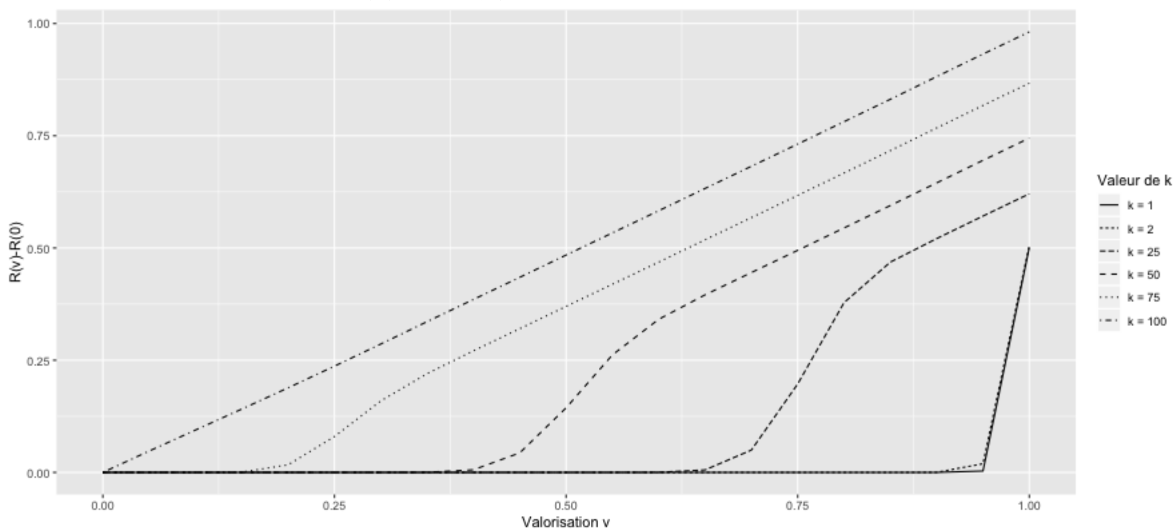

FIGURE 3 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution uniforme et $n = 100$

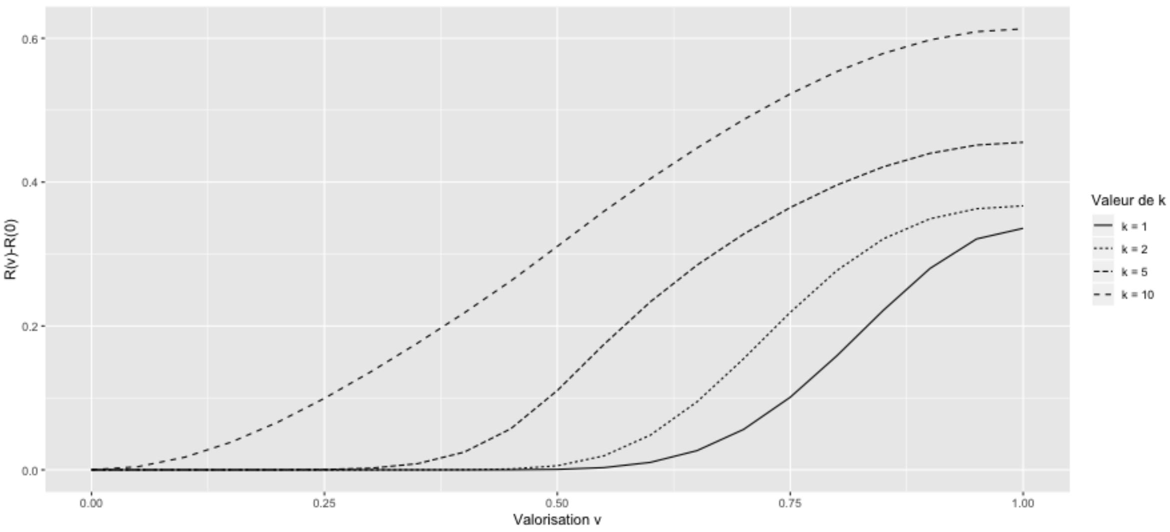

FIGURE 4 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution triangulaire et $n = 10$

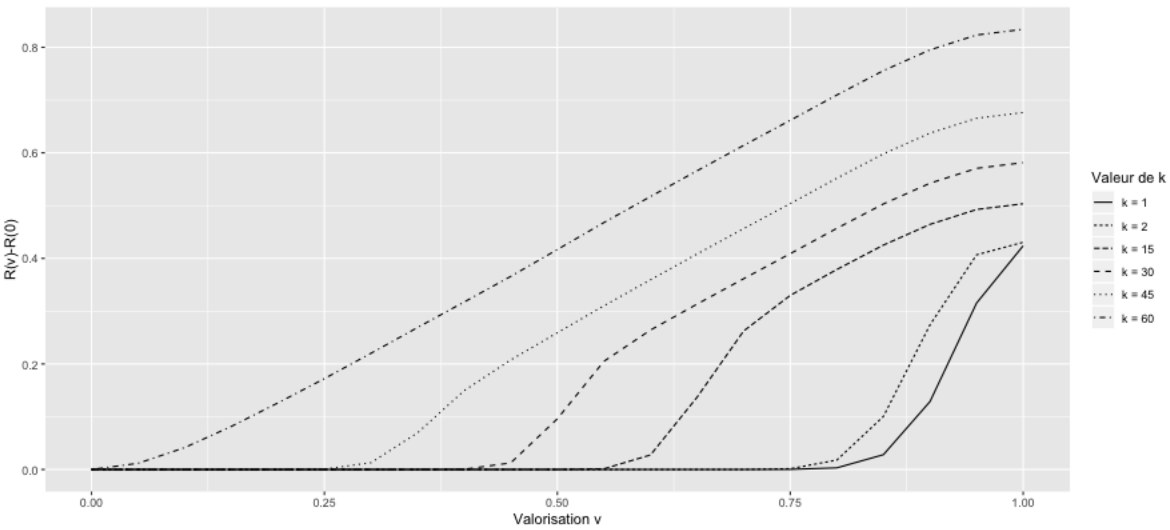

FIGURE 5 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution triangulaire et $n = 60$

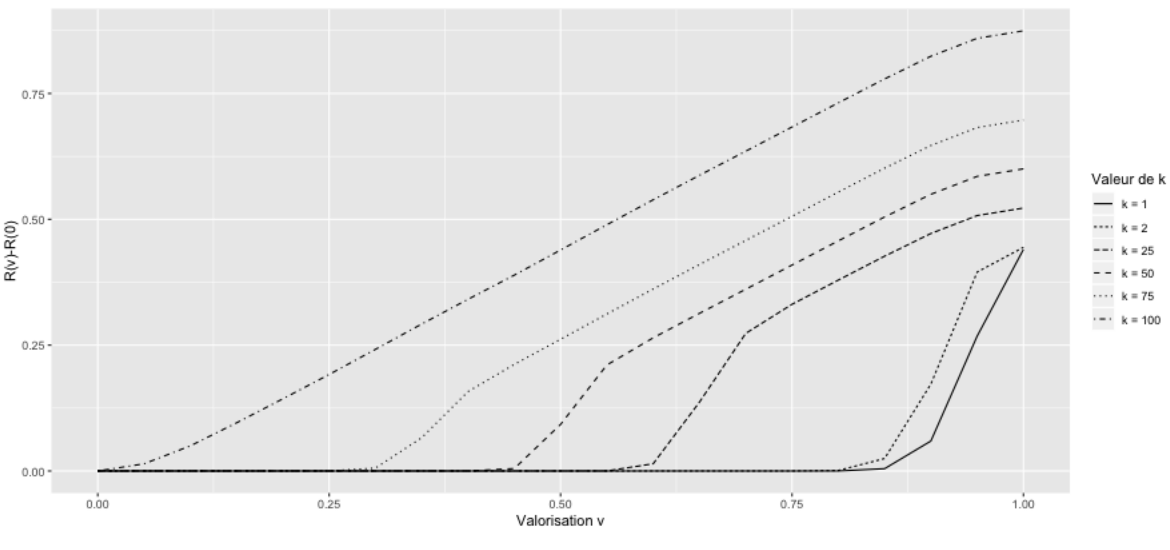

FIGURE 6 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution triangulaire et $n = 100$

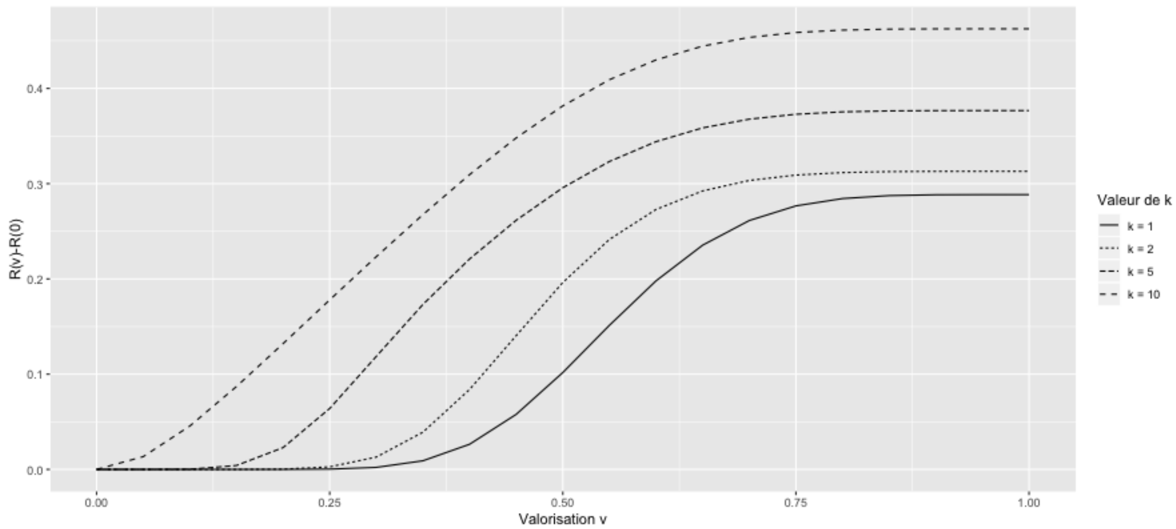

FIGURE 7 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution bêta et $n = 10$

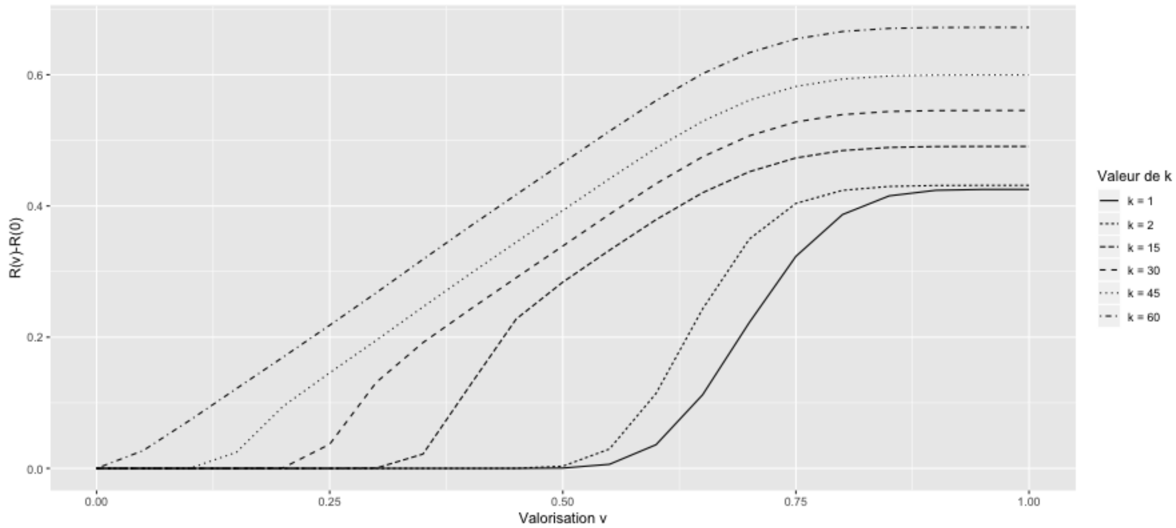

FIGURE 8 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution bêta et $n = 60$

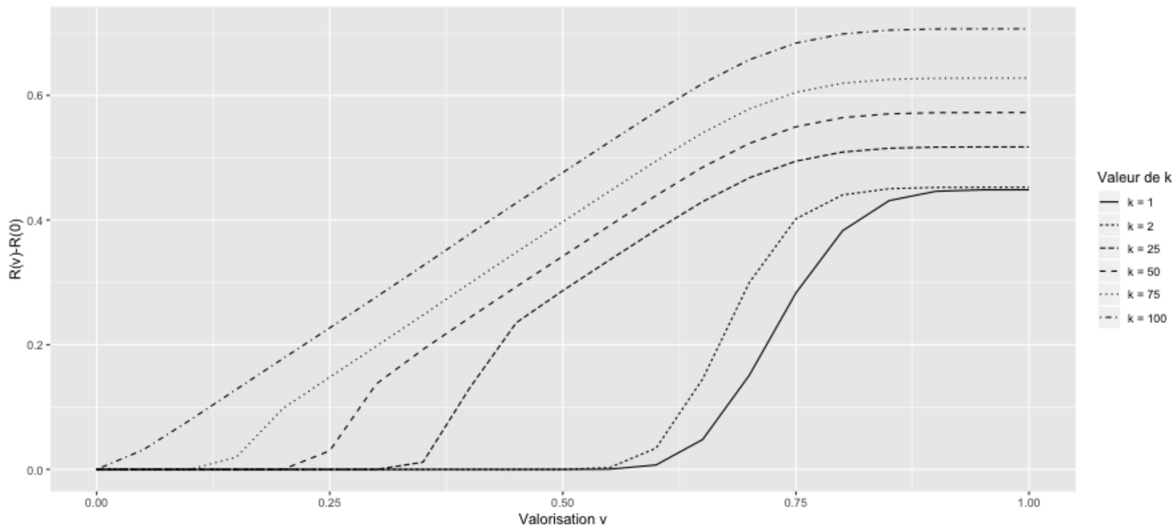

FIGURE 9 : $\mathcal{R}^k(v) - \mathcal{R}^k(0)$ pour la distribution bêta et $n = 100$

5 Enchère anglaise

Les sections précédentes analysent l'enchère optimale parmi les mécanismes statiques mais n'apporte aucune information sur l'enchère anglaise. La compréhension de l'enchère anglaise est d'importance, puisqu'elle est utilisée par de nombreuses institutions où la révélation du classement des offres est un outil de politique économique. La vente d'œuvres d'art dans des maisons de vente aux enchères, mais aussi les enchères caritatives, sont deux illustrations d'une utilisation régulière des enchères ascendantes. Si dans ces dernières, en pratique, souvent seule l'offre du vainqueur est révélée, la section précédente suggère que la maximisation du revenu nécessite de révéler une information plus conséquente.

Sans aucune révélation du classement des offres, l'enchère anglaise et l'enchère au second prix sont stratégiquement équivalentes (Milgrom et Weber, 1982). La simplicité de l'analyse de l'enchère au second prix, associée à cette équivalence stratégique, explique sa popularité chez les économistes au dépend de l'enchère anglaise, bien plus compliquée à analyser. Cela est d'autant plus remarquable que l'enchère au second prix est rarement, sinon jamais, utilisée en pratique[15]. Pour simplifier l'analyse, ces deux enchères sont étudiées sans prix de réserve et droit d'entrée. Puisqu'il s'agit d'analyser la (non) conservation de l'équivalence stratégique, cela compliquerait les notations sans ajouter d'éléments à la compréhension des deux mécanismes envisagés.

Notons que pour chaque format d'enchère, la révélation du classement des offres conduit les agents à un comportement d'offre plus agressif :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'(v) &= f(v)\sum_{k=1}^{n} r(k;n)\binom{n}{k}\Big((n-k)F(v)^{n-k-1}(1-F(v))^{n-1} - (n-1)F(v)^{n-k}(1-F(v))^{n-2}\Big)\\
&= (n-1)f(v)\sum_{k=1}^{n} r(k;n)\binom{n-2}{k-1}F(v)^{n-k-1}(1-F(v))^{n-2}\left(1-\frac{2n-k-1}{n-k}F(v)\right) \qquad (4)\\
&> 0 \text{ pour } v > 0,
\end{aligned}$$

en utilisant $\binom{n-1}{k-1}(n-k) = \binom{n-2}{k-1}$ et $\binom{n-1}{k-1}(n-1) = \frac{(n-1)^2}{n-k}\binom{n-2}{k-1}$.

L'enchère anglaise peut recouvrir une multitude de formes. Cette diversité relève de la façon dont la dynamique est présentée aux participants. Nous proposons ici l'analyse de l'enchère dite *bouton*, introduite sans révélation du classement des offres par Milgrom et Weber (1982). Elle se présente comme suit. L'organisateur de l'enchère, à l'aide d'une horloge, laisse le prix de vente augmenter de façon continue. Les participants pressent un bouton et quittent l'enchère, sans retour possible, une fois celui-ci relâché. Le dernier a maintenir le bouton enfoncé est le vainqueur, et paie le prix affiché au moment de l'abandon de son dernier concurrent. Chacun observe, à chaque instant, le nombre de participants encore *actifs*[16] et les sorties effectives. Comme dans les enchères statiques, le classement des offres soumises est révélé à un observateur extérieur[17].

[15] A notre connaissance, seule Google utilise l'enchère au second prix pour la vente d'espaces d'annonces publicitaires.

[16] Dans l'enchère anglaise, on entend par agent *actif*, tout participant n'ayant pas relâché le bouton et quitté l'enchère.

[17] De façon alternative, l'observateur pourrait observer au fur et à mesure la sortie de chaque agent pour agréger cette information à l'issue de l'enchère.

Au prix affiché à un instant donné, les participants encore actifs connaissent avec certitude le rang minimal atteint par leur offre. Ils profitent d'une estimation minimale *ex ante* de leur type plus élevée que dans l'enchère au second prix pour un même niveau d'offre, et donc d'une espérance d'utilité supérieure. Ainsi, la révélation du classement des offres est favorable à l'enchère anglaise.

Proposition 2. *L'enchère anglaise, sous sa forme d'enchère bouton, conduit à une stratégie d'offre à l'équilibre plus agressive que l'enchère au second prix, et ainsi à un revenu plus élevé.*

Remarquons qu'au-delà du format d'enchère considéré, la différence d'information révélée joue ici un rôle prépondérant dans la modifications des stratégies d'offres à l'équilibre. Dans l'enchère au second prix, le seul classement des offres est révélé, alors que dans l'enchère anglaise l'offre pour laquelle chaque agent quitte l'enchère est observée. Cette dernière constitue une information plus riche, source du résultat obtenu.

La démonstration repose sur deux éléments : 1. la description des payoffs espérés de ces deux formats d'enchères ; 2. le rôle du classement des offres dans la détermination des stratégies d'offres, et les spécificités induites par la dynamique de l'enchère anglaise.

Démonstration. *Commençons par écrire le programme de maximisation qui détermine l'offre à l'équilibre dans l'enchère au second prix. Dans celle-ci, le vainqueur paie l'offre la plus élevée parmi celles des perdants. Un agent de type v, qui se comporte comme si sa valorisation est $\tilde{v}$, fait alors face au programme de maximisation suivant :*

$$\max_b \int_0^{\beta^{-1}(b)} v - \beta(\tilde{v}) dF^{n-1}(\tilde{v}) + \mathcal{R}(\beta^{-1}(b)) \tag{5}$$

Dans l'enchère anglaise, à chaque période t correspond un prix p_t pour lequel une séquence de prix a précédemment été atteinte, et induit la sortie de certains participants. Puisque les valorisations sont distribuées de façon indépendante et constituent une information privée, la seule information, qui affecte l'utilité d'un agent dans la séquence de prix précédant p_t, est le nombre de concurrents m encore actifs dans l'enchère à la date t.

A chaque période t, l'agent i fait donc face aux m concurrents restants, et ses croyances sur ses rivaux sont données par la distribution conditionnelle $F(.|. \geq v_t)$, avec $v_t = \beta^{-1}(p_t)$. Il se comporte à chaque période, comme dans l'enchère au second prix à deux différences près : la distribution $F(.)$ est substituée par $F(.|. \geq v_t)$, et il a non plus n mais m concurrents. Si l'on considère uniquement le premier terme de la fonction objectif de l'enchère au second prix, à savoir $\int_0^{\beta^{-1}(b)} v - \beta(\tilde{v}) dF^{n-1}(\tilde{v})$, la partie de la fonction d'offre qui en découle est invariante avec m, et la substitution des croyances est sans conséquence. Cela est attendu, puisque c'est ce premier qui conduit à l'équivalence stratégique entre l'enchère au second prix et l'enchère anglaise sans révélation du classement des offres. Il en est tout autrement pour la seconde partie de la fonction objectif, décrite par l'équation (5). Dans l'enchère anglaise, $\mathcal{R}(.)$ augmente mécaniquement à chaque période en considérant seulement m concurrents plutôt que n, et la distribution conditionnelle. L'agent i sait qu'à la période t, il ne pourra jamais être classé à un rang inférieur à celui du $m^{ème}$ type, ce qui lui fait bénéficier d'une évaluation espérée plus élevée (dès lors que $m < n$) que dans l'enchère au second prix. Cette inflation du terme $\mathcal{R}(.)$ se traduit pour un *type v, par une agressivité renforcée de la stratégie d'offre dans l'enchère anglaise, décrite par l'équation (4).*

Ainsi, l'offre, pour laquelle un agent de type v quitte l'enchère anglaise, est plus élevée que l'offre à l'équilibre dans l'enchère au second prix.

6 Conclusion

Notre étude permet d'établir trois résultats, pour les mécanismes d'enchère où le classement de toutes les offres est révélé à un observateur extérieur : la conservation de l'équivalence du revenu pour les enchères sous plis scellés, l'enchère optimale correspondante, caractérisée par un prix de réserve spécifique et un droit d'entrée continu, et la supériorité de l'enchère anglaise sur l'enchère au second prix.

Des illustrations ont permis de discuter de la politique optimale de révélation du classement des offres. Celles-ci, sous l'hypothèse d'une distribution spécifique (uniforme, triangulaire ou bêta), concluent à la faveur de la révélation du classement de toutes les offres. Il s'agit des prémisses à de futurs travaux, qui étendront ce résultat à un cadre général. Le mécanisme optimal, pour toutes formes de règles d'allocation possibles, est lui aussi l'objet d'une activité de recherche à venir.

Références

D. Bergemann et J. Hörner : Should first-price auctions be transparent ? *American Economic Journal : Microeconomics*, 10(3):177–218, 2018.

T. Börgers : *An Introduction to the Theory of Mechanism Design.* Oxford University Press, 2015.

O. Bos : Charitable asymmetric bidders. *Journal of Public Economic Theory*, 22(2):320–337, 2020.

O. Bos et T. Truyts : Auctions with signaling concerns. mimeo, 2019.

J. Carpenter, J. Homes et P. H. Matthews : Charity auctions : A field experiment. *Economic Journal*, 118:92–113, 2008.

G. Das Varma : Bidding for a process innovation under alternative modes of competition. *International Journal of Industrial Organization*, 21(1):15–37, 2003.

M. Engers et B. McManus : Charity auction. *International Economic Review*, 48(3):953–994, 2007.

F. Giovannoni et M. Makris : Reputational bidding. *International Economic Review*, 55 (3):693–710, 2014.

A. Glazer et K. Konrad : A signalling explanation for charity. *American Economic Review*, 86:1019–1028, 1996.

J. K. Goeree : Bidding for the future : Signaling in auctions with an aftermarket. *Journal of Economic Theory*, 108(2):345–364, 2003.

J. K. Goeree, E. Maasland, S. Onderstal et J. L. Turner : How (not) to raise money. *Journal of Political Economy*, 113(4):897–918, 2005.

W. T. Harbaugh : The prestige motive for making charitable transfers. *American Economic Review : Papers and Proceedings*, 88:277–282, 1998.

B. E. Katzman et M. Rhodes-Kropf : The consequences of information revealed in auctions. *Applied Economics Research Bulletin*, 2:53–87, March 2008.

V. Krishna : *Auction Theory.* Academic Press, second édn, 2009.

B. Lebrun : First-price auctions with resale and with outcomes robust to bid disclosure. *The RAND Journal of Economics*, 41:165–178, 2010.

B. R. Mandel : Art as an investment and conspicuous consumption good. *American Economic Review*, 99(4):1653–1663, 2009.

P. Milgrom et R. Weber : A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, 50:1089–1122, 1982.

R. B. Myerson : Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73, 1981.