Le groupe des self-équivalences d'homotopie : réalisation et finitude

Federinov Julien

Le groupe des self-équivalences d'homotopie : réalisation et finitude

Federinov Julien

Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences, le 19 mai 2008, au Département de Mathématique de la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Louvain, à Louvain-la-Neuve.

Promoteur : Yves Félix

Jury : Pascal Lambrechts (UCL)
Enrico Vitale (UCL)
Jean Mawhin (UCL, président)
Jean-Claude Thomas (Angers)
Aniceto Murillo (Malaga)

AMS Subject Classification (2000) : 55P10 (Homotopy equivalences), 55P62 (Rational homotopy theory)

Table des matières

Introduction

Un élément fondamental dans l'étude homotopique d'un CW-complexe X pointé est fourni par le monoïde des self-equivalences d'homotopie (pointées) $aut(X)$. Sa compréhension est reliée à de nombreuses questions importantes en topologie algébrique. Par exemple le classifiant de $autX$, $BautX$ est l'espace classifiant les fibrations de fibre X.
Les composantes connexes de l'espace $aut(X)$ forment le groupe $\varepsilon(X) = \pi_0(aut(X))$ des classes de self-equivalences d'homotopie de X.
Le but de cette thèse est d'étudier, du point de vue de la théorie de l'homotopie rationnelle, le sous-groupe $\varepsilon_\#(X)$ de $\varepsilon(X)$ qui consiste en les classes d'équivalences d'homotopie qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie, c'est-à-dire,

$$\varepsilon_\#(X) = Ker(\varepsilon(X) \to \prod_n Aut(\pi_n(X))).$$

Ce sous-groupe fut introduit par Arkowitz et Curjel en 1964 ([4]).
Nous allons plus particulièrement nous intéresser à deux problèmes énoncés par M. Arkowitz le concernant. Ces problèmes proviennent d'une liste de questions ouvertes concernant le groupe des self-equivalences d'homotopie [7]. Le premier est un problème de réalisation :

Problème 1 : Tout groupe G est-il réalisable comme $\varepsilon_\#(X)$ pour un espace X ?[1]

[1] On pourrait considérer cette question de réalisation pour le groupe $\varepsilon(X)$ lui-même qui s'étend alors en un problème de réalisation d'un espace nilpotent comme classifiant d'un monoïde d'automorphismes. En effet, si tout espace nilpotent X est réalisable comme $BautY$, alors, en particulier, c'est vrai pour $X = K(G,1)$ quelque soit le groupe G. Mais alors $G = \pi_1(K(G,1)) = \pi_1(BautX) = \pi_0(autY) = \varepsilon(Y)$ et donc G est réalisable.

Le groupe $\varepsilon_{\#}(X)$ étant en général difficile à calculer, nous allons considérer une version plus restreinte de ce problème. En effet, si X est un CW-complexe fini simplement connexe ou si X admet une tour de Postnikov finie, alors le groupe $\varepsilon_{\#}(X)$ est finiment engendré et nilpotent ([2], [4] et [17]). De plus, par un théorème de Maruyama ([26],[27]), le rationalisé $(\varepsilon_{\#}(X))_{\mathbb{Q}}$ de $\varepsilon_{\#}(X)$ est isomorphe à $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$, le groupe des self-equivalences du rationalisé de X. Par conséquent, une version plus faible du problème 1 peut s'énoncer comme suit :

Problème 1bis : Est-il possible de réaliser tout groupe finiment engendré rationnel nilpotent comme $\varepsilon_{\#}(X)$ pour un espace rationnel simplement connexe X ?

La littérature ne fournit que des réponses partielles à cette question. Par exemple dans ([30]), S.Piccarreta réalise les groupes rationnels abéliens et quelques groupes rationnels de nilpotence 2 et de rang inférieur ou égal à 6. L'un des résultats principaux de ce texte répond en partie au problème d'Arkowitz :

Théorème A : Tout groupe rationnel finiment engendré nilpotent 2-résoluble est réalisable comme $\varepsilon_{\#}(X)$ avec X un CW-complexe simplement connexe admettant une tour de Postnikov finie.

La preuve de ce théorème utilise deux "grosses machines", à savoir, la théorie de Mal'cev d'une part et la théorie de l'homotopie rationnelle de Quillen et Sullivan d'autre part. La théorie de Mal'cev fournit une équivalence de catégories entre les groupes rationnels nilpotents finiment engendrés et les algèbres de Lie rationnelles nilpotentes finiment engendrées. La théorie de l'homotopie rationnelle quant à elle montre qu'il est possible de représenter les types d'homotopie rationnels par des algèbres graduées différentielles convenables, la plupart des constructions homotopiques pouvant être transférées au niveau algébrique. En particulier la théorie de l'homotopie rationnelle permet de donner un algorithme pour calculer l'algèbre de Lie associée au groupe $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$ par la théorie de Mal'cev, la philosophie étant que l'algèbre de Lie associée au groupe des self-equivalences correspond au niveau algébrique à une algèbre de dérivations associée au modèle minimal $\mathcal{M}_X$ de l'espace X.

Le second problème auquel nous nous sommes intéressés est un problème de finitude :

Problème 2 : Peut-on décrire une large classe d'espaces X pour laquelle

$\varepsilon_{\#}(X)$ est un groupe fini ?

Plus précisément, les CW-complexes finis, simplement connexes dont l'homotopie rationnelle est de dimension finie et dont la cohomologie rationnelle est concentrée en les degrés pairs font-ils partie de cette classe ? De tels espaces sont appelés les F_0-espaces. Ils ont été étudié en profondeur par Halperin [19] qui a énoncé la conjecture suivante :

Conjecture : Si F est un F_0-espace, la suite spectrale rationelle de Serre dégénère au terme E_2 pour toute fibration $\mathbb{Q}$-orientable de la forme $F \to E \to B$.

Cette conjecture a été prouvée dans certains cas particuliers, par exemple dans [23], [25], [35] et [36] mais reste un problème ouvert en général.
La conjecture d'Halperin peut aussi s'énoncer sous les formes équivalentes suivantes :

1. Toute dérivation de degré ≤ 0 de $H^*(F, \mathbb{Q})$ est nulle si F est un F_0-espace.
2. Si F est un F_0-espace, $\pi_{2n+1}(BautF) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour tout n.
3. $\dim H^*(autF, \mathbb{Q}) < \infty$.

La caractérisation (3) a pour cas particulier que $\varepsilon_{\#}(X)$ est un groupe fini. On tire donc de la conjecture d'Halperin la conjecture suivante :

Conjecture : Si F est un F_0-espace, alors, le groupe $\varepsilon_{\#}(F)$ est un groupe fini.

Nous donnons dans cette thèse un nouvelle et courte preuve des résultats de [23] et [25], à savoir que la conjecture est vraie pour les F_0-espaces dont la cohomologie rationnelle est le quotient d'un anneau de polynômes par des monômes et les F_0-espaces F dont la cohomologie $H^*(F, \mathbb{Q})$ possède moins de trois générateurs. Les preuves données montrent la difficulté du passage à plus de générateurs.

Notre texte est organisé comme suit :

Le premier chapitre a pour but de comprendre la correspondance de Mal'cev. Nous y rappelerons entre autres les définitions d'algèbres de Lie nilpotentes et résolubles, la localisation des groupes nilpotents et des espaces nilpotents et la formule de Baker-Campbell-Haudorff.

Le second chapitre regroupe les principaux outils nécessaires à l'étude du groupe des self-equivalences d'un point de vue rationnel.

Le groupe des self-equivalences d'homotopie sera au centre du troisième chapitre. Nous donnerons des exemples de calculs et surtout l'algorithme d'homotopie rationnelle qui permet de calculer son algèbre de Lie.

Le quatrième chapitre consistera en une multitude d'exemples de réalisation à l'aide d'espaces simples, en passant par les algèbres de Lie abéliennes, les algèbres de Lie d'Heisenberg ou encore des algèbres de Lie de grande nilpotence. Nous montrerons aussi que tout groupe rationnel nilpotent finiment engendré est un sous-groupe d'un groupe de self-equivalences.

Le cinquième chapitre est entièrement consacré à la preuve du théorème *A*.

Finalement le chapitre 6 donnera la nouvelle preuve des résultats de Lupton et Markl.

Remerciements.

Cela fait déjà 7 ans que j'ai franchi cette porte grise... la porte d'un professeur que je ne connaissais pas et dont le domaine m'était inconnu. J'ai frappé à cette porte dans l'espoir de trouver quelqu'un qui m'encadrerait pour mon mémoire de licence. Je ne me doutais pas que l'aventure ne faisait que commencer... Aujourd'hui, c'est avec une vive émotion, Yves, que je voudrais te remercier pour ta patience sans limite, ta confiance, ton contact chaleureux et toutes les discussions enrichissantes que nous avons partagées tout au long de ce parcours. C'est grâce à toi que cette thèse a pu voir le jour. Merci, merci et encore merci.

Je souhaite également remercier vivement les membres du jury pour avoir lu avec autant de minutie ce texte et me permettre ainsi de l'améliorer. C'est un honneur pour moi d'avoir reçu vos conseils !

Je tiens aussi particulièrement à remercier toute l'équipe de topologie algébrique : Yves, Pascal, Paul, Gery, Christophe, Jean-philippe, Victor, Hector, Natacha pour votre enthousiasme permanent et très stimulant. Merci de m'avoir donné l'oportunité de voyager en France, en Suisse, en Angleterre et surtout plus récemment en Géorgie où j'ai passé un congrès formidablement enrichissant !

Un tout tout grand merci à Saji pour toutes les discutions intéressantes et philosophiques que nous avons eues concernant la conjecture d'Halperin. Ce fut d'une grande aide pour moi. Tu vas enfin pourvoir lire $n = 3$ au propre !

Mon esprit se tourne maintenant vers mes collègues et amis qui m'ont encadré tout au long du chemin. Merci à vous tous pour votre sympathie ! Si le cyclotron est moins triste qu'il en a l'air, c'est grâce à vous. Un clin d'oeil particulier à Vincent, Mélanie et Jordan du même 'cru que moi'. Vincent, ce fut un plaisir pour moi de partager le bureau avec toi. Merci d'avoir réussi 'à me mettre la pression' comme tu dis. Un merci aussi "aux anciens", Paul, Claudia et Mathieu pour leur conseils avisés. Et un merci tout particulier à mon témoin dessinateur Alexandre pour tous les plaisirs que nous avons déjà partagés.

Je n'oublierai pas non plus ma bouée psychologique, Martine pour être

toujours là dans les moments difficiles. Discuter avec toi est toujours un grand plaisir. Ton départ sera irremplaçable !

Un tout grand merci à mes étudiants qui sans le savoir m'ont donné énormément de plaisir. Merci pour toutes les petites attentions !

L'enseignement a toujours été important pour moi, merci à Christiane, Enrico, Francis, Patrick, Jean-Roger et Camille pour toutes les discussions pédagogiques que nous avons eues ensemble !

Je voudrais aussi remercier Nico pour notre amitié durable et le groupe d'Ibizzzza ! ! Merci aussi à tous les autres (que je n'ose citer pour ne pas faire d'oubli) pour leur soutient.

Merci aussi à mes parents pour avoir été à mes cotés tout au long de mes études.

Je terminerai enfin par remercier amoureusement Nath pour le réconfort, le bonheur et l'amour qu'elle me donne chaque jour.

1

La correspondance de Mal'cev

1.1 Algèbres de Lie

Cette section a pour but d'introduire le vocabulaire de base concernant les algèbres de Lie. Nous introduirons la plupart des exemples qui reviendront dans la suite de ce texte. Lorsque les résultats cités sont connus, nous ne donnerons pas les preuves mais renverrons à une référence appropriée.

Définitions et exemples

Définition 1.1.1 *Soit F un corps commutatif muni d'une unité. Une algèbre de Lie sur F est un $F-$espace vectoriel L, muni d'une F-application bilinéaire, appelée le crochet de Lie, définie par*

$$[-,-] : L \times L \to L, \quad (x,y) \to [x,y],$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- $[x,x] = 0$ *pour tout* $x \in L$
- $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *pour tout* $x,y,z \in L$.

La dernière condition est connue sous le nom d'*identité de Jacobi*. Remarquons que la première condition implique que $[x,y] = -[y,x]$ en utilisant la bilinéarité du crochet de Lie. La notion de sous-algèbre d'une algèbre de Lie ainsi que la notion de morphisme entre algèbres de Lie sont définies de façon habituelle.

Exemples 1.1.2 1. Tout espace vectoriel V peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie, notée $Ab(V)$ en posant $[x,y] = 0$ pour tout $x,y \in V$. L'algèbre de Lie $Ab(V)$ est appelée l'algèbre de Lie abélienne sur V.

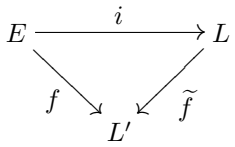
2. Si A est une algèbre associative sur F, on peut munir A d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[a,b] = ab - ba$ pour tout $a, b \in A$.
3. En prenant A l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur F triangulaires supérieures avec des zéros sur la diagonale dans l'exemple précédent, on obtient une algèbre de Lie, notée $Tr_0(n, F)$. Cette algèbre de Lie sera importante par la suite.
4. Si A est une algèbre sur le corps F, une dérivation de A est une $F-$application linéaire $D : A \to A$ telle que

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad \text{pour tout } a, b \in A.$$

   Alors, une vérification directe montre que l'ensemble des dérivations $DerA$ de A est muni d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[A, B] = A \circ B - B \circ A$.
5. L'algèbre de Lie d'Heisenberg H_n est de dimension $2n+1$ et admet une base $(p_1, \ldots, p_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ dans laquelle le crochet de Lie est caractérisé par le fait que le crochet $[z, -]$ est nul et par

$$[p_i, p_j] = 0, [p_i, q_j] = \delta_{ij} z, [q_i, q_j] = 0.$$

6. Soit L une algèbre de Lie sur F, E un ensemble et $i : E \to L$ une application. L'algèbre de Lie L est dite *libre sur* E si pour toute algèbre de Lie L' et toute application $f : E \to L'$, il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\widetilde{f} : L \to L'$ qui fait commuter le diagramme suivant :



   Pour chaque ensemble E, il existe une algèbre de Lie L libre sur E qui est unique à isomorphisme près. Nous la noterons $\mathbb{L}(E)$. Si $E = \{X_i : i \in I\}$, l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(E)$ peut-être pensée comme l'ensemble (formel) de tous les commutateurs des X_i. Nous détaillerons la structure de cette algèbre de Lie dans la section suivante.
7. Recherchons les algèbres de Lie de dimension 2. Bien sûr, il y a l'algèbre de Lie Abélienne $Ab(a, b)$. Si L est une algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, alors, forcément, L est engendrée par

deux générateurs a et b et $[a,b] = \alpha a + \beta b$ avec α ou $\beta \neq 0$. Si α est non nul, on pose $a' = \alpha a + \beta b$, $b' = b/\alpha$ et on a $[a', b'] = a'$. Cette algèbre de Lie forme et l'algèbre de Lie abélienne forment donc les deux seules algèbres de Lie de dimension deux.

Algèbres de Lie nilpotentes

La nilpotence d'une algèbre de Lie mesure en quelque sorte la perte de commutativité de cette algèbre de Lie. Plus précisément, si L est une algèbre de Lie sur le corps F, on définit la suite centrale descendante $C_n(L)$ comme étant la série dont les termes sont

$$C_1(L) = L, \qquad C_2(L) = [L, L], \quad \ldots \quad C_n(L) = [L, C_{n-1}(L)]$$

Définition 1.1.3 *L'algèbre de Lie L est $n-$nilpotente (ou nilpotente d'indice n) si $C_{n+1}(L) = 0$.*

Exemples 1.1.4

1. Les algèbres de Lie 1-nilpotentes sont les algèbres de Lie abéliennes.
2. L'algèbre de Lie d'Heisenberg est 2-nilpotente.
3. L'algèbre de Lie de dimension 2 non-abélienne n'est pas nilpotente.
4. Les algèbres de Lie libres de rang ≥ 2 ne sont pas nilpotentes.
5. L'algèbre de Lie $\mathrm{Tr}_0(n, F)$ est $(n-1)$-nilpotente (pour le voir, il suffit de remarquer qu'une base de $C_{k+1}(\mathrm{Tr}_0(n, F))$ est donnée par les matrices unitaires A_{ij} avec $j - i > k$).

Le problème de la classification (à isomorphisme près) des algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie est encore un vaste problème ouvert qui s'avère être difficile, voir impossible. Néanmoins, plusieurs travaux (souvent réalisés à l'aide d'ordinateurs) ont permis de classifier les algèbres de Lie nilpotentes de dimension (≤ 7) ([1],[15]). Nous allons donner cette classification jusqu'à la dimension 5 (pour tout corps F) car nous en aurons besoin pour la suite de ce texte.

Algèbres de Lie nilpotentes de Dimension 1
$N_1^1 : Ab(x_1)$

Algèbres de Lie nilpotentes de Dimension 2
$N_2^1 : Ab(x_1, x_2)$

Algèbres de Lie nilpotentes de Dimension 3
$N_3^1 : Ab(x_1, x_2, x_3)$
$N_3^2 : [x_1, x_2] = x_3$

Algèbres de Lie nilpotentes de Dimension 4
$N_4^1 : Ab(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$N_4^2 : [x_1, x_2] = x_3$
$N_4^3 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4$

Algèbres de Lie nilpotentes de Dimension 5
$N_5^1 : Ab(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
$N_5^2 : [x_1, x_2] = x_3$
$N_5^3 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4$
$N_5^4 : [x_1, x_2] = x_5, [x_3, x_4] = x_5$
$N_5^5 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_4] = x_5$
$N_5^6 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, [x_1, x_4] = x_5, [x_2, x_3] = x_5$
$N_5^7 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, [x_1, x_4] = x_5$
$N_5^8 : [x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5$
$N_5^9 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, [x_2, x_3] = x_5$

Pour terminer cette section, énonçons le théorème suivant qui réduit en quelque sorte l'étude des algèbres de Lie nilpotentes finiment engendrées et rationnelles à l'étude de l'algèbre de Lie $\mathrm{Tr}_0(n, \mathbb{Q})$.

Théorème 1.1.5 *([10]) Toute algèbre de Lie rationnelle finiment engendrée et nilpotente est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $Tr_0(n, \mathbb{Q})$, pour un certain n.*

Algèbres de Lie résolubles

Si L est une algèbre de Lie, la série dérivée $G_n(L)$ est la suite définie par

$$G_1(L) = L, \qquad G_2(L) = [L, L], \quad \ldots \quad G_r(L) = [G_{r-1}(L), G_{r-1}(L)]$$

Définition 1.1.6 *L'algèbre de Lie L est $n-$résoluble (ou résoluble d'indice n) si $G_{n+1}(L) = 0$.*

Exemples 1.1.7 1. Les algèbres de Lie 1-résolubles sont les algèbres de Lie abéliennes.

2. Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble.
3. Il existe des algèbres de Lie résolubles qui ne sont pas nilpotentes, l'algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2 en est un exemple.
4. Un autre exemple d'algèbre de Lie résoluble mais non nilpotente est l'algèbre de Lie L des matrices triangulaires supérieures sur un corps F pour $n \geq 2$. Pour voir que L est résoluble, il suffit de remarquer que $G_2(L) = \mathrm{Tr}_0(n, F)$ qui est une algèbre de Lie nilpotente par l'exemple 5 du paragraphe précédent. Pour voir que L n'est pas nilpotente, considérons les deux matrices suivantes de L :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Un calcul direct montre que $[A, B] = B$, ce qui montre que L n'est pas nilpotente.
5. Les algèbres de Lie libres de rang ≥ 2 ne sont pas résolubles (et ne sont donc pas nilpotentes).
6. Posons $L = \mathbb{L}(x, y)$. Alors le noyau de l'abélianisation $\mathbb{L}(x, y) \to (x, y)$ est l'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(\mathbb{Q}[x, y].\alpha)$, où $\alpha = [x, y]$ et $.$ désigne l'action de $\mathbb{Q}[x, y]$ sur α par adjonction itérée. Alors $G_2(L) = \mathbb{L}(\mathbb{Q}[x, y].\alpha)$ et $G_2(L)/G_3(L) \cong \mathbb{Q}[x, y].\alpha$. Donc $L/G_3(L) \cong \mathbb{Q}[x, y].\alpha \oplus \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y$ comme espace vectoriel. En particulier c'est une algèbre de Lie non nilpotente. Tout algèbre de Lie 2-résoluble engendrée par x, y est un quotient de $L/G_3(L)$.

Remarque 1.1.8 *Il existe aussi une classification des algèbres de Lie résolubles de petite dimension. Nous n'en aurons pas besoin dans ce texte et nous renvoyons à ([16]) pour les détails sur ce sujet.*

Algèbres de Lie libres

L'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(V)$ sur un ensemble V définie à l'exemple 6 du paragraphe 1.1.1 est un objet universel au sens de la théorie des catégories. Concrètement, on peut penser $\mathbb{L}(V)$ comme "un outil symbolique de calcul" qui peut ensuite s'appliquer à des cas concrets en utilisant le morphisme $\widetilde{f}$ (voir exemple 6 page 4).

Il nous sera utile dans la suite de ce texte de pouvoir se donner une base de l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(V)$. Il y a de nombreuses façons de construire une telle base ([32]). Nous travaillerons avec la base dite de Hall.

Définition 1.1.9 *Une famille de Hall est un sous-ensemble bien ordonné H de $\mathbb{L}(V)$ formé de monômes de Lie tels que*

1. $V \subset H$
2. *Si $u, v \in H$ avec $l(u) < l(v)$ alors $u < v$. Ici $l(v)$ dénote la longueur de v.*
3. *Soit $u = [v, w]$ l'unique décomposition de u où $v, w \in \mathbb{L}(V)$. Alors, $u \in H$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
   (a) *$v \in H$, $w \in H$, et $v < w$*
   (b) *Soit $w \in V$ ou bien $w = [w', w'']$ avec $w' \in H$, $w'' \in H$ et $w' \leq v$.*

Exemple 1.1.10 Si $V = \{x_1, x_2, x_3\}$, on trouve la base de Hall suivante pour les éléments de longueurs ≤ 4 :

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

$$[x_1, x_2] \quad [x_1, x_3] \quad [x_2, x_3]$$

$$[x_1, [x_1, x_2]] \quad [x_1, [x_1, x_3]] \quad [x_2, [x_1, x_2]] \quad [x_2, [x_1, x_3]]$$

$$[x_2, [x_2, x_3]] \quad [x_3, [x_1, x_2]] \quad [x_3, [x_1, x_3]] \quad [x_3, [x_2, x_3]]$$

$$[x_1, [x_1, [x_1, x_2]]] \quad [x_1, [x_1, [x_1, x_3]]] \quad [x_2, [x_1, [x_1, x_2]]]$$

$$[x_2, [x_1, [x_1, x_3]]] \quad [x_2, [x_2, [x_1, x_2]]] \quad [x_2, [x_2, [x_1, x_3]]]$$

$$[x_2, [x_2, [x_2, x_3]]] \quad [x_3, [x_1, [x_1, x_2]]] \quad [x_3, [x_1, [x_1, x_3]]]$$

$$[x_3, [x_2, [x_1, x_2]]] \quad [x_3, [x_2, [x_1, x_3]]] \quad [x_3, [x_2, [x_2, x_3]]]$$

$$[x_3, [x_3, [x_1, x_2]]] \quad [x_3, [x_3, [x_1, x_3]]] \quad [x_3, [x_3, [x_2, x_3]]]$$

$$[[x_1, x_2], [x_1, x_3]] \quad [[x_1, x_2], [x_2, x_3]] \quad [[x_1, x_3], [x_2, x_3]]$$

Remarquons que le nombre d'éléments de la base de Hall augmente fortement quand on augmente la longueur des crochets. Il existe en fait une formule, la formule de Witts ([32]) qui calcule précisément la dimension des sous-espaces correspondants.
En particulier, si $\mathbb{L}(X) = \mathbb{L}(x_1, \ldots, x_n)$, alors une base de $\frac{G_2(\mathbb{L}(X)}{G_3(\mathbb{L}(X))}$ est donnée par les éléments

$$[x_{i_1}, [x_{i_2}, [\ldots x_{i_r}, [x_i, x_j] \ldots]$$

avec $r \geq 0$, $i_1 \geq \ldots \geq i_r \geq i$ et $i < j$. L'abélianisation fournit alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \oplus_{i<j} \mathbb{Q}[x_i, \ldots, x_n] \cdot a_{ij} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathbb{L}(x_1, \ldots, x_n)}{G_3(\mathbb{L}(x_1, \ldots, x_n))} \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}.x_i \longrightarrow 0 \ ,$$

où

$$\varphi(x_{i_1}.\ldots.x_{i_r} \cdot a_{ij}) = [x_{i_1}, [x_{i_2}, [\ldots [x_{i_r}, [x_i, x_j] \ldots]$$

pour $i_1 \geq \ldots \geq i_r \geq i$ et $i < j$.

Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Nous rappelons ici la notion d'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie car elle interviendra dans les preuves principales de ce texte.

Définition 1.1.11 *Considérons une algèbre de Lie L sur le corps F. L'algèbre tensorielle sur l'espace vectoriel L est définie par*

$$TL = \bigoplus_{q=0}^{\infty} L^{\otimes q}$$

TL est munie d'une structure d'algèbre, la multiplication étant donnée par $a.b = a \otimes b$.

Définition 1.1.12 *Notons I, l'idéal dans l'algèbre (associative) TL engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ pour $x, y \in L$. L'algèbre TL/I est appelée l'algèbre enveloppante de L et est notée UL.*

Remarque 1.1.13 *Observons que l'inclusion $L \to TL$ donne une application linéaire $\varphi : L \to UL$. Une vérification directe montre que φ est un morphisme d'algèbre de Lie lorsque UL est munie du crochet donné*

par le commutateur (exemple 2). D'autre part, si $\rho : L \to B$ est un morphisme d'algèbres de Lie où B est une algèbre munie du crochet donné par le commutateur, alors, ρ s'étend en un unique morphisme d'algèbres $\gamma : UL \to B$ tel que $\gamma\varphi = \rho$. Si $\mu : E \to L$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors, le composé $E \xrightarrow{\mu} L \xrightarrow{\varphi} UL$ détermine un morphisme d'algèbres graduées $U\mu : UE \to UL$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} UE & \xrightarrow{U\mu} & UL \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} \\ E & \xrightarrow[\mu]{} & L \end{array}$$

Exemples 1.1.14 1. Si $L = Ab(x_1, \ldots, x_n)$ est l'algèbre de Lie Abélienne de dimension n, alors, $UL = TL/(x \otimes y - y \otimes x) = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$,

2. Si $L = \mathbb{L}(V)$ est l'algèbre de Lie libre sur l'espace vectoriel V, alors, $UL = TV$ ([14]).

Le théorème suivant, du à Poincarré-Birkoff-Witt, nous donne une base de UL comme espace vectoriel :

Théorème 1.1.15 *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Soit L une algèbre de Lie sur F. Notons $(x_i)_{i \in I}$ une base bien ordonnée de L. Soit $\varphi : L \to UL$ le morphisme d'algèbre de Lie défini à la remarque précédente. Alors UL est un $F-$espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des produits décroissants $\varphi(x_{i1}) \ldots \varphi(x_{in})$ avec $(n \geq 0, i_1, \ldots, i_n \in I, i_1 \geq \cdots \geq i_n)$. En particulier l'application $\varphi : L \to UL$ est une inclusion.*

1.2 Rationalisation des groupes nilpotents et des espaces

Nous rappelons dans cette section la façon classique de définir la rationalisation d'un groupe nilpotent et la rationalisation d'un espace simplement connexe. Pour le détail des preuves, nous réferrons à [20]. L'idée est que si X est un espace topologique simplement connexe, on veut lui associer un espace topologique $X_{\mathbb{Q}}$ dont les invariants homotopiques classiques sont ceux de X tensorisés avec $\mathbb{Q}$. Grâce à l'homotopie rationnelle, les invariants rationnels sont généralement plus calculables que ceux des

espaces généraux. Les liens étroits entre un espace X et sa rationalisation permet ensuite de se donner une idée de la forme de l'espace X de départ.[1]

Groupes rationnels

De la même façon que nous avons défini la notion d'algèbre de Lie nilpotente, nous pouvons définir les groupes nilpotents. Si G est un groupe, on définit la suite centrale descendante $C_n(G)$ comme étant la série dont les termes sont

$$C_1(G) = G, \qquad C_2(G) = (G, G), \quad \dots \quad C_n(G) = (G, C_{n-1}(G))$$

où $(G, C_{n-1}(G))$ désigne le sous-groupe normal engendré par les commutateurs $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ avec $a \in G$ et $b \in C_{n-1}(G)$.

Définition 1.2.1 *Le groupe G est $n-$nilpotent (ou nilpotent d'indice n) si $C_{n+1}(G) = \{1\}$.*

Exemples 1.2.2 1. Les groupes 1-nilpotents sont les groupes abéliens.

2. Considérons le groupe $\mathrm{Tr}_1(3, \mathbb{Z})$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre 3 sur $\mathbb{Z}$ dont les éléments diagonaux sont 1 :

$$Tr_1(3, \mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alors, un calcul direct montre que

$$[Tr_1(3, \mathbb{Z}), Tr_1(3, \mathbb{Z})] = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Le groupe $[Tr_1(3, \mathbb{Z}), Tr_1(3, \mathbb{Z})]$ est donc un groupe abélien et donc $Tr_1(3, \mathbb{Z})$ est $2-$nilpotent.

---

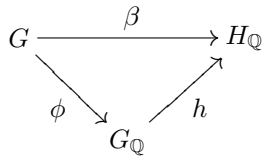
[1] En fait, il est possible de définir pour chaque nombre premier p un espace X_p dont les invariants homotopiques sont les invariants de X localisés en p. Ceci permet pas à pas de reconstruire la forme globale de l'espace X.

3. Plus généralement, le groupe $\mathrm{Tr}_1(n, F)$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre n sur un corps commutatif F dont les éléments diagonaux sont 1 est $(n-1)-$nilpotent.

Définition 1.2.3 *Un groupe G est rationnel (ou 0-local), si pour tout nombre premier q, la fonction $\psi : G \to G$, $\psi(x) = x^q$ est bijective.*

Exemples 1.2.4
1. Tout groupe abélien rationnel est un espace vectoriel rationnel.
2. Le groupe $\mathrm{Tr}_1(n, \mathbb{Q})$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre n sur $\mathbb{Q}$ dont les éléments diagonaux sont 1 est rationnel. (Nous prouverons ce résultat dans la section suivante en donnant un exemple bien plus général). Toute matrice de $\mathrm{Tr}_1(n, \mathbb{Q})$ s'écrit $Id+u$ avec $u^n = 0$. Une racine $q^{\text{ème}}$ est donnée par le polynôme de Taylor $1 + \frac{u}{q} + \frac{1}{q}(\frac{1}{q} - 1)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{q}(\frac{1}{q} - 1)(\frac{1}{q} - 2)\frac{u^2}{6} + \cdots$
3. On peut montrer ([18]) que tout groupe rationnel G nilpotent et finiment engendré peut se plonger dans un groupe $\mathrm{Tr}_1(n, \mathbb{Q})$ pour un certain n.

Définition 1.2.5 *Etant donné un groupe nilpotent G, son rationalisé est un groupe rationnel $G_{\mathbb{Q}}$ muni d'un morphisme de groupes $\phi : G \to G_{\mathbb{Q}}$, appelé application rationalisante, satisfaisant la propriété universelle suivante : pour chaque morphisme de groupes $\beta : G \to H_{\mathbb{Q}}$, où $H_{\mathbb{Q}}$ est un groupe rationnel il existe un unique morphisme $h : G_{\mathbb{Q}} \to H_{\mathbb{Q}}$ qui fait commuter le diagramme suivant :*



Autrement dit, les groupes nilpotents rationnels forment une sous-catégorie pleine des groupes nilpotents, et la rationalisation est un foncteur adjoint à l'inclusion. Le théorème fondamental suivant nous dit que les groupes nilpotents admettent un rationalisé.

Théorème 1.2.6 *([20]) Soit Nil la catégorie des groupes nilpotents et $Nil_{\mathbb{Q}}$, la catégorie des groupes nilpotents rationnels, alors, le foncteur de rationalisation (ou complétion de Mal'cev) $M : Nil \to Nil_{\mathbb{Q}}$ existe. La propriété universelle de la définition précédente permettant de définir de façon usuelle M sur les flèches de Nil.*

Exemples 1.2.7 1. Si G est un groupe abélien, alors, $G_{\mathbb{Q}} = G \otimes \mathbb{Q}$. En effet, on peut définir l'application rationalisante $\varphi : G \to G_{\mathbb{Q}}$ par $\varphi(g) = g \otimes 1$.

2. On a $(Tr_1(n, \mathbb{Z}))_{\mathbb{Q}} = Tr_1(n, \mathbb{Q})$ avec φ l'inclusion.

Rationalisation des espaces simplement connexes

Définition 1.2.8 *Un CW-complexe X simplement connexe est dit rationnel si ses groupes d'homotopie $\pi_*(X)$ sont rationnels (ou ses groupes d'homologie réduite à coefficients entiers).*

Exemple 1.2.9 Le téléscope (ou sphère rationnelle) est l'espace

$$S^n_{\mathbb{Q}} = (\bigvee_{k=1}^{\infty} S^n_k) \bigcup_h (\coprod_{k=2}^{\infty} D^{n+1}_k)$$

où le disque D^{n+1}_k est attaché à $S^n_k \vee S^n_{k+1}$ par une application $S^n \to S^n_k \vee S^n_{k+1}$ réprésentant $[S^n_k] - k_j[S^n_{k+1}]$ où $[S^n_k]$ dénote la classe d'homotopie de l'inclusion de S^n comme le $k-$ème facteur de $\bigvee_{k\geq 1} S^n_k$. Posons

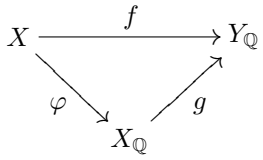
$$X(r) = (\bigvee_{1\leq k\leq r} S^n_k) \bigcup (\coprod_{2\leq k\leq r-1} D^{n+1}_k)$$

On voit que $H_k(X(r)) = 0$ si $k \neq 0, n$ puisque S^n_r est une déformation rétracte de $X(r)$. De plus, le morphisme induit en homologie réduite par l'inclusion $X(r) \to X(r+1)$ est la multiplication par $r+1$. Puisque l'homologie commute avec les sommes directes et $S^n_{\mathbb{Q}} = \lim_{\to} X(r)$, l'homologie réduite $\widetilde{H_k}(S^n_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z})$ est la limite du système

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

c'est-à-dire $\mathbb{Q}$: on a donc $\widetilde{H_k}(S^n_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ si $k = n$ et zéro sinon. Le teléscope est donc un espace rationnel.

Définition 1.2.10 *Si X est CW-complexe simplement connexe, le rationalisé de X est un espace rationnel $X_{\mathbb{Q}}$ muni d'une application $\varphi : X \to X_{\mathbb{Q}}$ telle que pour tout espace rationnel $Y_{\mathbb{Q}}$ et toute application $f : X \to Y_{\mathbb{Q}}$, il existe à homotopie près une et une seule application $g : X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ telle que le diagramme suivant commute :*



Théorème 1.2.11 *([20]) Soit TOP_c la catégorie des CW-complexes simplement connexes, et $(Top_c)_{\mathbb{Q}}$, la catégorie des CW-complexes simplement connexes et rationnels, alors, le foncteur de rationalisation (ou complétion de Mal'cev) $M : TOP_c \to (TOP_c)_{\mathbb{Q}}$ existe. La propriété universelle de la définition précédente permettant de définir de façon usuelle M sur les flèches de TOP_c.*

Remarque 1.2.12 *Il existe une rationalisation des espaces non simplement connexes mais dont le groupe fondamental est nilpotent et agit de façon nilpotente sur les groupes d'homotopie. Nous n'en ferons pas usage dans ce texte.*

Le théorème suivant est utile pour caractériser les applications rationalisantes :

Théorème 1.2.13 *[14] Soit X un espace simplement connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application $f : X \to X_{\mathbb{Q}}$ est une rationalisation*
2. *Les morphismes $f_* : H_*(X) \to H_*(X_{\mathbb{Q}})$ sont des rationalisations.*
3. *Les morphismes $f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(X_{\mathbb{Q}})$ sont des rationalisations.*

Corollaire 1.2.14 *L'inclusion $S^n \to S^n_{\mathbb{Q}}$ de la sphère initiale dans le téléscope est une rationalisation.*

Terminons cette section par la définition suivante :

Définition 1.2.15 *Deux espaces 1-connexes X et Y sont dits rationnellement équivalent si leurs rationalisation $X_{\mathbb{Q}}$ et $Y_{\mathbb{Q}}$ sont homotopiquement équivalentes.*

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence associées sont appelées types d'homotopie rationnelle.

1.3 La correspondance de Mal'cev

La connexion entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie est bien connue. Elle s'avère être un outil très efficace. En effet, pour résoudre un problème sur les groupes de Lie, il est souvent intéressant de transférer ce problème aux algèbres de Lie correspondantes, où nous disposons des techniques de l'algèbre linéaire, pour ensuite revenir aux groupes de Lie de départ. Avec la même idée, dans les années 1950, (voir [24]), Mal'cev

a construit une correspondance entre les groupes rationnels nilpotents et les algèbres de Lie rationnelles nilpotentes.

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Considérons le groupe $Tr_1(n,\mathbb{Q})$ des matrices triangulaires supérieures sur $\mathbb{Q}$ dont les éléments diagonaux sont 1 et l'algèbre de Lie $Tr_0(n,\mathbb{Q})$ des matrices triangulaire supérieure sur $\mathbb{Q}$ avec des zéros sur la diagonale. $Tr_1(n,\mathbb{Q})$ est un groupe pour la multiplication des matrices et $Tr_0(n,\mathbb{Q})$ est une algèbre de Lie pour le crochet des matrices. Nous avons montré précédemment que $Tr_1(n,\mathbb{Q})$ et $Tr_0(n,\mathbb{Q})$ sont respectivement un groupe $n-$nilpotent et une algèbre de Lie $n-$nilpotente. Pour tout $A \in Tr_1(n,\mathbb{Q})$. Puisque $(A-id) \in Tr_0(n,\mathbb{Q})$ et $(A-id)^n = 0$, la série logarithme de A se réduit à

$$logA = (A-id) - \frac{1}{2}(A-id)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}(A-id)^{n-1} \in Tr_0(n,\mathbb{Q}).$$

Inversément, si $A \in Tr_0(n,\mathbb{Q})$, l'exponentielle de A est définie par

$$expA = id + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1} \in Tr_1(n,\mathbb{Q}).$$

Un calcul direct montre que l'exponentielle et le logarithme sont des applications inverses $Tr_0(n,\mathbb{Q}) \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} Tr_1(n,\mathbb{Q})$.

Rappelons la formule de Baker-Campbell-Hausdorff qui permet de calculer le logarithme d'un produit d'exponentielles à l'aide du crochet de Lie. Sa preuve se trouve dans [21].

Théorème 1.3.1 ***(Formule de Baker-Campbell-Hausdorff)*** *Si A et B sont deux matrices de $Tr_0(n,\mathbb{Q})$, alors, on a que $log(expA.expB)$ est égal à*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\leq i\leq k}} \frac{(\sum_{i=1}^{k}(r_i+s_i))^{-1}}{r_1!s1!\cdots r_k!s_k!}[A^{r_1}B^{s_1}A^{r_2}B^{s_2}\ldots A^{r_n}B^{sn}]$$

avec

$$[A^{r_1}B^{s_1}A^{r_2}B^{s_2}\ldots A^{r_n}B^{sn}] =$$

$$\underbrace{[A,[A,\ldots[A,}_{r_1}\underbrace{[B,[B,\ldots[B,}_{s_1}\ldots\underbrace{[A,[A,\ldots[A,}_{r_n}\underbrace{[B,[B,\ldots B]]}_{s_n}]\ldots]]$$

Les premiers termes de cette somme sont bien connus :

$$\begin{aligned} log(expA.expB) &= A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]] \\ &- \frac{1}{24}[B,[A,[A,B]]]-\cdots \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de détailler l'exemple 2 de la page 12 :

Proposition 1.3.2 *Le groupe $Tr_1(n,\mathbb{Q})$ est un groupe rationnel.*

Preuve : Un calcul direct montre que si $A \in Tr_1(n,\mathbb{Q})$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors, $log(A^n) = n.log(A)$. Montrons que l'application

$$\varphi : Tr_1(n,\mathbb{Q}) \to Tr_1(n,\mathbb{Q}), x \to x^n$$

est bijective. Si $A \in Tr_1(n,\mathbb{Q})$, alors, posons $B = exp(\frac{1}{n}log(A)) \in Tr_1(n,\mathbb{Q})$. On trouve alors que $B^n = A$, ce qui montre que φ est surjective. Supposons maintenant que $A, B \in Tr_1(n,\mathbb{Q})$ soient telles que $A^n = B^n$, alors, $n.log(A) = n.log(B)$, c'est-à-dire $A = B$ et l'application φ est injective. □

Terminons cet exemple par la proposition intéressante suivante qui permet de construire beaucoup de groupes rationnels.

Proposition 1.3.3 *([34]) Si L est une sous-algèbre de Lie de $Tr_0(n,\mathbb{Q})$, alors, $exp(L)$ est un sous-groupe rationnel de $Tr_1(n,\mathbb{Q})$.*

La correspondance de Mal'cev

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on peut définir une structure de groupe sur $Tr_0(n,\mathbb{Q})$ en posant $x \star y = log(expx.expy)$. L'application exponentielle est donc un isomorphisme de groupe entre $(Tr_0(n,\mathbb{Q}),\star)$ et $Tr_1(n,\mathbb{Q})$.
Le théorème 1.1.5 nous dit que toute algèbre de Lie rationnelle nilpotente finiment engendrée L est réalisable par une algèbre de Lie de matrices, dès lors, nous pouvons définir $exp(L)$ et la formule de Baker-Campbell-Hausdorff reste valable dans ce cadre. La multiplication $x \star y = log(expx.expy)$ muni donc l'algèbre de Lie L d'une structure de groupe. Nous noterons $\mathcal{G}(L)$, le groupe associé à l'algèbre de Lie L. Le groupe $\mathcal{G}(L)$ est donc un groupe rationnel nilpotent finiment engendré par la proposition 1.3.3 et une vérification directe montre que $\mathcal{G}(L)$ possède le

même indice de nilpotence que L. Inversément, [34], pour tout groupe rationnel finiment engendré $G_{\mathbb{Q}}$, il existe une algèbre de Lie nilpotente rationnelle finiment engendrée, notée $\mathcal{L}(G)$ telle que $\mathcal{G}(\mathcal{L}(G_{\mathbb{Q}})) \cong G_{\mathbb{Q}}$. En fait, nous avons une équivalence de catégories :

Théorème 1.3.4 *[34] Si $Lie^n_{\mathbb{Q}}$ est la catégorie des algèbres de Lie rationnelles finiment engendrées et $n-$nilpotentes et $Gr^n_{\mathbb{Q}}$ est la catégorie des groupes rationnels $n-$nilpotents finiment engendrés, alors, le foncteur*

$$\mathcal{G} : Lie^n_{\mathbb{Q}} \to Gr^n_{\mathbb{Q}}, L \to \mathcal{G}(L)$$

est une équivalence de catégories. De plus, les algèbres de Lie $n-$résolubles correspondent aux groupes $n-$résolubles.[2]

Nous ne donnerons pas la preuve de ce théorème mais nous allons donner pour terminer ce chapitre quelques exemples de calcul de $\mathcal{G}(L)$ pour L donnée.

Exemples 1.3.5

1. On a déjà montré que $\mathcal{G}(Tr_0(n, \mathbb{Q})) = Tr_1(n, \mathbb{Q})$.
2. Considérons l'algèbre de Lie abélienne rationnelle $Ab(x_1, \ldots, x_n)$. Nous savons grâce à la formule de Baker-Campbell-Hausdorff que

   $$\mathcal{G}(Ab(x_1, \ldots, x_n)) \cong (Ab(x_1, \ldots, x_n), \star)$$

   avec $x_i \star x_j = x_i + x_j = x_j \star x_i$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ puisque tous les crochets de Lie sont nuls. Nous avons donc que $\mathcal{G}(Ab(x_1, \ldots, x_n)) \cong \mathbb{Q}^n$.
3. Montrons que si L est une algèbre de Lie rationnelle n-nilpotente, alors, $\mathcal{G}(L)$ est une groupe rationnel n-nilpotent. La formule de Baker-Campbell-Hausdorff nous donne si $A, B \in L$:

   $(A, B) := A \star B \star A^{-1} \star B^{-1} = [A, B]+$crochets plus grands en $[A, B]$

   Dès lors, puisque L est $n-$nilpotente, tout commutateur de longueur $\geq n$ dans $\mathcal{G}(L)$ est nul et ce groupe est $n-$nilpotent. On peut faire une preuve similaire pour voir que les algèbres de lie $n-$résolubles rationnelles finiment engendrées correspondent exactement aux groupes $n-$résolubles rationnels finiment engendrés.

[2] Ce théorème peut se généraliser aux groupes rationnels et aux algèbre de Lie rationnelles *localement* nilpotentes mais nous n'en aurons pas besoin pour la suite.

2

Homotopie rationnelle

2.1 Tours de Postnikov

Les espaces admettant une tour de Postnikov finie sont très importants dans ce travail. Ce sont en particulier les espaces avec lesquels nous résolverons les problèmes de réalisation dans les chapitres suivants.[1] Essentiellement, une tour de Postnikov s'obtient en 'recollant' au moyen de fibrations des espaces d'Eilenberg-MacLane, de façon analogue à la construction d'un CW-complexe comme recollement par cofibrations de sphères. Commençons donc par donner une définition des espaces d'Eilenberg MacLane, introduits dans les années 40.

Définition 2.1.1 *Etant donné un groupe G et un entier n, de sorte que G est abélien si $n \geq 2$, l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(G,n)$ est un CW-complexe connexe tel que*

$$\begin{cases} \pi_i(K(G,n)) = 0 \quad si\ i \neq n \\ \pi_n(K(G,n)) = G \end{cases}$$

Exemples 2.1.2
1. Le cercle S^1 est un $K(\mathbb{Z},1)$.
2. L'espace projectif complexe de dimension infinie $\mathbb{C}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z},2)$.

Remarque 2.1.3 *Pour tout groupe G, un espace $K(G,n)$ peut être construit étape par étape en partant d'un wedge de $n-$sphères, une pour chaque générateur du groupe G, en ajoutant de manière itérée des cellules de dimension plus grande pour tuer l'homotopie en trop.*

[1] Ils sont d'ailleurs aussi intéressants pour la description de la rationalisation des CW-complexes nilpotents.

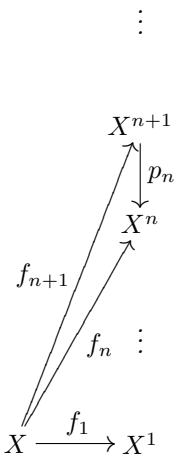
Définition 2.1.4 *Une tour de Postnikov pour un CW-complexe simplement connexe X est une suite d'espaces X^n, $n \geq 1$, munis d'applications $f_n : X \to X^n$ et de fibrations $p_n : X^{n+1} \to X^n$ telles que*

1. *Les applications $\pi_i(f_n) : \pi_i(X) \to \pi_i(X^n)$ sont des isomorphismes pour $i \leq n$.*
2. *$\pi_i(X^n) = 0$ pour $i > n$.*
3. *$p_n \circ f_{n+1} = f_n$.*
4. *L'application p_n est une fibration principale, c'est-à-dire est l'image inverse d'une fibration universelle*

$$K(G_n, n+1) \to PK(G_n, n+2) \to K(G_n, n+2)$$

le long d'une application continue $h_n : X^n \to K(G_n, n+2)$.

On dit que la tour de Postnikov est finie si $X = X^n$ pour un certain n.



Les applications h_n sont appelées les $k-$invariants de l'espace X. De plus, $G_n \cong \pi_{n+1}(X)$. En effet, si F désigne la fibre de l'application p_n, la suite exacte pour la fibration $F \longrightarrow X^{n+1} \xrightarrow{p_n} X^n$ nous assure que

$$\begin{cases} \pi_{n+1}(F) \cong \pi_{n+1}(X^{n+1}) \cong \pi_{n+1}(X) \\ \pi_i(F) = 0 \text{ si } i \neq n+1 \end{cases}$$

c'est-à-dire que la fibre F est un espace d'Eilenberg MacLane $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$.

Remarque 2.1.5 *Il est facile de voir que tout CW-complexe simplement connexe admet une tour de Postnikov. Pour construire les différents espaces X^n, il suffit de tuer pas à pas les groupes d'homotopie de degré $> n$. Un espace est nilpotent si on a une tour avec les propriétés 1 à 3 et que chaque p_n peut s'écrire comme composé d'un nombre fini de fibrations principales.*

2.2 Modèles de Sullivan

L'homotopie rationnelle est l'étude du type d'homotopie rationnel d'un espace (voir section 1.2). Elle fut introduite par Dennis Sullivan (1977) et Daniel Quillen (1969).
Les types d'homotopies rationnels d'un espace simplement connexe[2] peuvent s'identifier aux algèbres minimales de Sullivan qui sont des algèbres différentielles graduées commutatives satisfaisant certaines conditions. Nous rappelons les outils fondamentaux de la théorie qui seront nécessaires pour la suite de ce texte. Pour un approfondissement de cette théorie, nous renvoyons le lecteur à [14].

Algèbres différentielles graduées commutatives

Définition 2.2.1 *Une algèbre différentielle graduée commutative rationnelle (A, d), ou ADGC, est une algèbre sur $\mathbb{Q}$ graduée en degrés positifs $A = \oplus_{n\in\mathbb{N}} A^n$ munie d'une différentielle $d : A^n \to A^{n+1}$ de degré 1 telle que*

$$d(a.b) = d(a).b + (-1)^{|a|} a.d(b)$$

et telle que pour tout couple $(u, v) \in A \times A$ d'éléments homogènes, $u.v = (-1)^{|u|.|v|} v.u$.

Les morphismes d'ADGC sont les morphismes d'algèbres graduées de degré 0 qui préservent la différentielle. Un quasi-isomorphisme est un morphisme d'ADGC, $\varphi : B \xrightarrow{\simeq} A$, induisant un isomorphisme en homologie, $H\varphi : HB \xrightarrow{\cong} HA$. Deux algèbres différentielles graduées commutatives A et B sont dites équivalentes si elles sont reliées par une chaîne de quasi-isomorphismes

$$A \xrightarrow{\simeq} A_1 \xleftarrow{\simeq} A_2 \xrightarrow{\simeq} \cdots \xleftarrow{\simeq} A_n \xrightarrow{\simeq} B$$

[2] Il est possible de définir une théorie de l'homotopie rationnelle pour les espaces nilpotents qui en quelque sorte généralisent les espaces simplement connexes. Cependant, nous n'en auront pas besoin par la suite.

Algèbres de Sullivan

Si V est un espace vectoriel gradué en degrés positifs, l'algèbre graduée commutative libre sur V, ΛV, est par définition

$$\Lambda V = S[V^{\text{pair}}] \otimes E[V^{\text{impair}}]$$

c'est-à-dire le produit tensoriel de l'algèbre symétrique sur V^{pair} avec l'algèbre extérieure sur V^{impair}. Par convention, $\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$ désigne l'algèbre graduée commutative libre définie sur l'espace vectoriel engendré par les x_i.

Définition 2.2.2 *Une algèbre différentielle graduée commutative (A, d) est appelée une algèbre de Sullivan si comme algèbre $A = \Lambda V$, pour un certain espace vectoriel gradué V, et si V admet une base $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ indexée par un ensemble bien ordonné telle que*

$$d(x_\alpha) \in \Lambda(x_\beta)_{\beta < \alpha}.$$

L'algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est dite minimale si en plus $dV \subset \Lambda^{\geq 2} V$.

Exemple 2.2.3 L'ADGC $(\Lambda(x, y, z), d)$ avec x, y et z en degré 1 et $dx = yz$, $dy = zx$ et $dz = yx$ est un exemple d'ADGC qui n'est pas de Sullivan.

Définition 2.2.4 *Un modèle de Sullivan d'une $\mathbb{Q}-$algèbre de cochaines commutatives (A, d) est une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ munie d'un quasi-isomorphisme*

$$\varphi : (\Lambda V, d) \to (A, d).$$

Un modèle de Sullivan est dit minimal si l'algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est minimale.

La proposition suivante se trouve dans [14] :

Proposition 2.2.5 *Toute $\mathbb{Q}-$algèbre de cochaines commutative cohomologiquement connexe (c'est-à-dire telle que $H^0(A, d) = \mathbb{Q}$) admet un modèle de Sullivan minimal. De plus, ce modèle est unique à isomorphisme près.*

Modèle de Sullivan pour un espace

La relation entre la topologie et l'algèbre est donnée par les foncteurs PL-formes et réalisation géométrique de Sullivan. Leur construction se trouve dans [37].

Le foncteur PL-formes de Sullivan, noté A_{PL} :

$$A_{PL} : \text{Top} \to ADGC$$

de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives, est inspiré des formes différentielles C^∞ sur une variété et est tel qu'il existe un isomorphisme naturel d'algèbres

$$H(A_{PL}(X)) \cong H^*(X, \mathbb{Q}).$$

En outre, deux espaces simplement connexes de $\mathbb{Q}-$type fini X et Y ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement si les ADGC $A_{PL}(X)$ et $A_{PL}(Y)$ sont équivalentes.

Définition 2.2.6 *Un modèle de Sullivan pour un espace topologique X est une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ munie d'un quasi-isomorphisme d'algèbres de cochaînes*

$$\varphi : (\Lambda V, d) \to A_{PL}(X)$$

Un modèle de Sullivan est dit minimal si l'algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est minimale.

Proposition 2.2.7 *Tout CW-complexe simplement connexe X dont l'homologie est de type fini possède un modèle de Sullivan minimal, unique à isomorphisme près, qui est simplement connexe et de type fini. Nous le noterons m_X.*

Le foncteur réalisation géométrique $|.|$ de Sullivan associe à une algèbre de Sullivan minimale $(\Lambda V, d)$ simplement connexe dont l'homologie est de type fini un CW-complexe $|(\Lambda V, d)|$ simplement connexe tel que $m_{|\Lambda V,d|} \cong (\Lambda V, d)$.
Ceci donne la proposition suivante :

Proposition 2.2.8 *Il existe une bijection entre les types d'homotopie rationnels des CW-complexes simplement connexes dont l'homologie est de type fini et les classes d'isomorphismes d'algebres de Sullivan minimales sur $\mathbb{Q}$ simplement connexes et de type fini. Les foncteurs A_{PL} et réalisation géométrique étant les bijections réciproques.*

Les modèle minimaux s'avèrent donc être des invariants complets du type d'homotopie rationnel, c'est-à-dire que pour des espaces simplement connexes dont la cohomologie rationnelle est de dimension finie en chaque

degré, deux espaces X et Y ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement si ils ont des modèles de Sullivan isomorphes. Un autre aspect fantastique du modèle minimal de Sullivan d'un espace topologique X est que l'on peut lire la partie sans torsion des groupes d'homotopie à partir des générateurs du modèle. En effet, si $\varphi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$ est un modèle de Sullivan minimal d'un espace simplement connexe dont l'homologie est de type fini, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels rationnels gradués

$$\hom_{\mathbb{Q}}(V^*, \mathbb{Q}) \cong \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

En particulier, si X est un espace rationnel, alors X admet une tour de Postnikov finie si et seulement si $\dim V < \infty$.

Exemples 2.2.9 1. Si $n \geq 1$ est impair le modèle minimal de S^n est donné par $(\Lambda u_n, 0)$ avec $|u_n| = n$. En effet, le choix d'un représantant w de l'unique générateur de la cohomologie en degré n de $A_{PL}(S^n)$ défini un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda u_n, 0) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S^n) \ , \quad |u_n| = n.$$

Si $n \geq 1$ est pair, alors, $u_n^2 \neq 0$, nous devons donc ajouter un second générateur v_{2n-1} en degré $2n-1$ avec $d(v_{2n-1}) = v_n^2$. On a alors un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda(u_n, v_{2n-1}), d) \longrightarrow A_{PL}(S^n) \ .$$

2. Le modèle de Sullivan de $\mathbb{C}P^n$ est de la forme

$$\varphi : (\Lambda(u_2, x_{2n+1}), d) \longrightarrow A_{PL}(\mathbb{C}P^n) \ ,$$

où $d(x_{2n+1}) = u_2^{n+1}$. L'élément $\varphi(u_2)$ représente le générateur de l'algèbre $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$, qui est une algèbre polynômiale tronquée sur un générateur de degré 2 et $\varphi(x_{2n+1})$ tue sa puissance $(n+1)-$ème.

3. Si $(\Lambda V, d)$ et $(\Lambda W, d)$ sont respectivement des modèles de Sullivan minimaux pour des CW-complexes simplement connexes X et Y dont l'homologie est de type fini, alors, $(\Lambda V, d) \otimes (\Lambda W, d)$ est un modèle de Sullivan minimal pour leur produit. Par exemple, le modèle de $S^3 \times \mathbb{C}P^5$ est de la forme $(\Lambda(x, y, z), dx = dy = 0; dz = y^6)$ avec $|x| = 3$, $|y| = 2$, $|z| = 11$.

4. L'exemple plus général suivant nous sera utile par la suite. Un F_0-espace est un CW-complexe fini, simplement connexe dont l'homotopie rationnelle est de dimension finie et dont la cohomologie rationnelle est concentrée en les degrés pairs. Par exemple, les sphères de degré pair, les variétés complexes Grassmanniennes sont des F_0-espaces. Il est bien connu ([19]) que les F_0-espaces sont exactement les espaces F dont la cohomologie rationelle est une algèbre de la forme $H^*(F) = \frac{\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]}{(P_1,\ldots,P_n)}$ pour un certain n, avec $|x_i|$ pair et où les P_i forment une suite régulière[3] de polynômes dans $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$. Le modèle minimal d'un F_0-espace est donc de la forme $(\Lambda V_0 \otimes \Lambda V_1, d)$ avec $d(V_0) = 0$ et $d(V_1) \subset \Lambda V_0$. L'espace vectoriel $V_0 = \mathbb{Q}\{x_1,\ldots,x_n\}$ est l'espace vectoriel en degré pair des générateurs et l'espace vectoriel $V_1 = \mathbb{Q}\{y_1,\ldots,y_n\}$ est l'espace vectoriel en degré impair des relations, la différentielle étant définie par $d(y_i) = P_i$.

Homotopie

Les modèles de Sullivan permettent aussi de donner une bonne description des applications continues. Il est en effet possible de définir une bonne notion d'homotopie pour les morphismes d'un modèle de Sullivan vers une algèbre de cochaines commutative arbitraire. De plus, toute application continue est représentable de façon unique, à homotopie près, par un morphisme entre modèles.
Notons $\Lambda(t,dt)$ l'algèbre de Sullivan contractile telle que $|t| = 0$, et $\varepsilon_0, \varepsilon_1 : \Lambda(t,dt) \to \mathbb{Q}$ les augmentations définies respectivement par $\varepsilon_0(t) = 0$ et $\varepsilon_1(t) = 1$.

Définition 2.2.10 *Deux morphismes d'algèbres de cochaines commutatives $\varphi_0, \varphi_1 : (\Lambda V, d) \to (A, d)$ sont dits homotopes s'il existe un morphisme d'algèbres différentielles graduées commutatives*

$$\phi : (\Lambda V, d) \to (A, d) \otimes \Lambda(t, dt)$$

tel que $(Id.\varepsilon_i)\phi = \varphi_i$, $i = 0, 1$.

L'homotopie est une relation d'équivalence, ce qui donne un sens au théorème suivant qui est l'aboutissement de ce chapitre :

[3]Pour rappel, la suite $a_1,\ldots,a_r$ est une suite régulière dans $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$ si $a_1 \neq 0$ et pour tout $i > 1$, a_i n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(a_1,\ldots,a_{i-1})$.

Théorème 2.2.11 *Les foncteurs PL-formes et réalisation géométrique de Sullivan donnent une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des algèbres différentielles graduées commutatives dont la cohomologie est 1-connexe et de type fini, et la catégorie homotopique des espaces rationnels simplement connexes de type fini.*

2.3 Espaces formels

Un espace formel est un espace dont le type d'homotopie rationnelle est complètement déterminé par sa cohomologie rationnelle :

Définition 2.3.1 *Un espace simplement connexe est dit formel s'il admet l'algèbre différentielle graduée commutative* $(H^*(X;\mathbb{Q}),0)$ *comme modèle.*

D'après les exemples de la section précédente, les sphères et les $\mathbb{C}P^n$ sont des espaces formels. Il y a de nombreux autres exemples géométriques : les groupes de Lie compacts, les variétés de Kähler compactes [12], ...
Notons aussi que le produit et le bouquet de deux espaces formels forment à nouveau des espaces formels [29], ce qui permet de construire une multitude d'espaces formels.
D'autre part, on peut facilement construire une ADGC non formelle. Considérons le modèle de Sullivan minimal $(\Lambda(u,v,w),d)$ avec $|u| = |v| = 3$ et $|w| = 5$ et dont différentielle est définie par $dw = uv$. Une base de la cohomologie est donnée par $[u]$, $[v]$, $[uw]$, $[vw]$, $[uvw]$. Si $\varphi : (\Lambda(u,v,w),d) \to (H^*(\Lambda(u,v,w),d),0)$ est un morphisme d'ADGC, alors, $\varphi(w) = 0$ pour des raisons de degré. Par conséquent $\varphi(uw) = \varphi(vw) = 0$ puisque φ est un morphisme d'algèbre. Par conséquent, φ n'est pas un quasi-isomorphisme.

2.4 Algèbres de Lie graduées et algèbres de dérivations

Nous allons terminer ce chapitre en définissant l'algèbre de Lie différentielle graduée des dérivations d'un modèle de Sullivan qui sera essentielle quand on étudiera le groupe des self-equivalences.

Définition 2.4.1 *Une algèbre de Lie graduée différentielle est un espace vectoriel* $L = \{L_n, n \in \mathbb{N}\}$ *gradué sur les entiers positifs, muni d'une application bilinéaire* $[,]$*, appelée le crochet de Lie, de degré 0 et*

muni d'une différentielle $d : L_n \to L_{n-1}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1. $[x, y] = (-1)^{|x||y|+1}[y, x]$ *pour tout élément* $x, y \in L$,
2. $(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0$,
3. $d([x, y]) = [d(x), y] + (-1)^{|x|}[x, d(y)]$

Exemple 2.4.2 Si (A, d) est une ADGC, une application linéaire $\theta : A \to A$ de degré n (on notera $|\theta| = n$) est une dérivation si, pour tout $x, y \in A$, $\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{|x||\theta|}x\theta(y)$. Considérons alors l'espace vectoriel gradué

$$\mathrm{Der}(A) = \oplus_{p=0}^{\infty}\mathrm{Der}_p(A)$$

où $\mathrm{Der}_p(A)$ est l'espace vectoriel formé des dérivations de degré $-p$. On peut munir $\mathrm{Der}(A)$ du crochet $[,]$ défini par

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1 \circ \theta_2 - (-1)^{|\theta_1||\theta_2|}\theta_2 \circ \theta_1$$

et de la différentielle $d :\ \mathrm{Der}_p(A) \longrightarrow \mathrm{Der}_{p-1}(A)$ définie par

$$d(\theta)(a) = d(\theta(a)) - (-1)^{|\theta|}\theta(da)$$

Le triplet $(\mathrm{Der}(A), [,], d)$ ainsi défini forme une algèbre de Lie graduée différentielle.

2.5 Les cochaînes sur une algèbre de Lie différentielle graduée (L, d_L)

Soit R un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel gradué de type fini (dim $R^n < \infty$ pour tout n). Son dual se note $R^\vee = Hom(R, \mathbb{Q})$. L'application

$$\varphi : \wedge^2 R^\vee \to Hom(\wedge^2 R, \mathbb{Q})$$

définie par

$$\varphi(f \wedge g)(x \wedge y) = (-1)^{|x||g|}f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

est un isomorphisme. Ceci permet d'interpréter les éléments de $\wedge^2 R^\vee$ comme des formes linéaires sur $\wedge^2 R$. On écrit pour simplifier

$$< f \wedge g; x \wedge y >= \varphi(f \wedge g)(x \wedge y).$$

Soit maintenant (L, d_L) une algèbre de Lie différentielle graduée de type fini et sL sa suspension, $(sL)_n \cong L_{n-1}$. L'algèbre des cochaînes sur

L, $C^*(L)$, est l'algèbre de Sullivan ([14], Prop 23.2) $C^*(L) = (\Lambda W, d)$, $W = (sL)^\vee$, avec $d = d_0 + d_1$;

$$d_0 : W \to W, \quad d_0(v)(sx) = (-1)^{|v|+1} v(sd_L(x))$$

$$d_1 : W \to \Lambda^2 W, \quad < d_1 v; sx \wedge sy >= (-1)^{|y|+1} < v; s[x,y] > .$$

Si X est un CW-complexe de modèle minimal $(\Lambda V, d)$, alors l'algèbre des cochaînes sur l'algèbre de Lie des dérivations de $(\Lambda V, d)$, $C^*(Der(\Lambda V, d))$ est un modèle de Sullivan de l'espace classifiant du monoïde $autX$ ([38],[37]). Pour rappel l'espace $BautX$ classifie les fibrations de fibre X.

Décrivons maintenant d_0 et d_1 de manière plus explicite en fonction de (L, d_L). Soit (e_i) une base graduée de L. On définit les constantes de structure a_j^k et $c_{ij}^k \in \mathbb{Q}$ de la manière suivante

$$de_j = \sum_k a_j^k e_k$$
$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k.$$

Notons $(\Lambda W, d) = C^*(L)$ et w_i une base homogène de W indexée par un ensemble ordonnée, avec

$$< w_i; se_j >= \delta_{ij}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{cases} d_0 w_i = \sum_j (-1)^{|w_i|+1} a_j^i w_j \\ d_1 w_i = \sum_{r<s} (-1)^{|w_r|} c_{sr}^i w_r \wedge w_s + \frac{1}{2} \sum_r c_{rr}^i w_r \wedge w_r \end{cases}$$

Montrons la seconde formule. Ecrivons $d_1 w_i = \sum_{r \leq s} b_i^{rs} w_r \wedge w_s$. Pour $j < k$,

$$< d_1 w_i; se_j \wedge se_k >$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r \leq s} b_i^{rs} < w_r \wedge w_s; se_j \wedge se_k > \\ &= \sum_{r \leq s} b_i^{rs} ((-1)^{|w_j|.|w_s|} < w_r; se_j >< w_s; se_k > + < w_r; se_k >< w_s; se_j >) \\ &= (-1)^{|w_j||w_k|} b_i^{jk} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} < d_1 w_i; se_j \wedge se_k > &= (-1)^{|se_k|} < w_i; s[e_j, e_k] > \\ &= (-1)^{|se_k|} \sum_r c_{jk}^r < w_i; se_r >= (-1)^{|w_k|} c_{jk}^i. \end{aligned}$$

On en déduit $b_i^{jk} = (-1)^{|w_k|+|w_j||w_k|} c_{jk}^i = (-1)^{|w_j|} c_{kj}^i$.

3

Le groupe des classes d'homotopie de self-équivalences

3.1 Définitions et exemples

Le but de cette section est de rappeler les définitions de bases concernant les self-equivalences et de fournir une littérature suffisante permettant au lecteur d'approfondir le sujet.
Etudier les automorphismes d'un CW-complexe X pointé d'un point de vue de la théorie homotopique, revient à comprendre l'espace des self-equivalences d'homotopie (pointées) de X.

Définition 3.1.1 *Si X est un CW-complexe pointé, $aut(X)$ désigne le monoïde topologique des self-equivalences d'homotopie pointées de X. L'espace $aut(X)$ est muni de la topologie compacte ouverte*[1]*.*

La compréhension du type d'homotopie de $\mathrm{aut}(X)$ est un problème important en théorie de l'homotopie.

Définition 3.1.2 *Les composantes connexes de l'espace $aut(X)$ forment le groupe $\varepsilon(X) = \pi_0(aut(X))$ des classes de self-equivalences d'homotopie de X. La loi du groupe étant donnée par la composition des self-équivalences.*

Le papier de Barcus et Barrat ([9]) est le premier à fournir des résultats sur le groupe $\varepsilon(X)$ en 1958. Malheureusement, en général, le calcul du

[1] Une sous-base de la topologie compacte ouverte sur $\mathrm{aut}(X)$ est donnée par les ensembles $B(K,U) = \{f | f(K) \subset U\}$ avec K un compact de X et U un ouvert de Y.

groupe $\varepsilon(X)$ pour un CW-complexe X est difficile. C'est pourquoi, la plupart des résultats actuels concernent souvent la forme globale (finitude, nilpotence ...) de ce groupe. La référence standard pour l'étude du groupe $\varepsilon(X)$ est le papier de Arkowitz ([2]).

Exemples 3.1.3 1. Si $n \geq 1$, $\varepsilon(S^n) = \mathbb{Z}_2$, les éléments de $\varepsilon(S_n)$ étant la classe de id_{S^n} et la classe de l'application de degré -1.

2. Montrons que $\varepsilon(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}_2$. La fibration de Hopf

$$S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$$

nous permet de déduire que $\pi_q(\mathbb{C}P^n) = 0$ pour $2 < q < 2n+1$. Toute self-equivalence de S^2 s'étend donc en un endomorphisme de $\mathbb{C}P^n$. Comme $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/x^{n+1}$, cette extension est un isomorphisme en cohomologie et donc une équivalence d'homotopie. Ceci montre que la restriction $\varepsilon(\mathbb{C}P^n) \to \varepsilon(S^2) = \mathbb{Z}_2$ est surjective. Elle est aussi injective, car les obstructions pour que 2 applications $f, g : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ ayant même restriction à S^2 soient homotopes appartiennent à $H^q(\mathbb{C}P^n; \pi_q(\mathbb{C}P^n))$ pour $2 < q \leq n$. Comme $\pi_q(\mathbb{C}P^n) = 0$, ces groupes sont nuls.

3. Un exemple intéressant et bien connu ([2]) dit que $\varepsilon(K(G, n)) = \mathrm{Aut}(G)$ où $\mathrm{Aut}(G)$ désigne le groupe des automorphismes de G.

Puisque le groupe $\varepsilon(X)$ est difficile à manier, de nombreux sous-groupes de $\varepsilon(X)$ sont étudiés (par exemple voir [5], [33]). Ces sous-groupes sont plus suceptibles d'avoir de bonnes propriétés.
En particulier, en 1964, Arkowitz et Curjel ([4]) on introduit le sous-groupe $\varepsilon_\#(X) \subseteq \varepsilon(X)$ qui consiste en les classes d'équivalences d'homotopie qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopies $\pi_*(X)$, c'est-à-dire,

Définition 3.1.4 *Si X est un CW-complexe, le groupe $\varepsilon_\#(X)$ est le noyau de l'application évidente*

$$\varepsilon(X) \to \prod_n Aut(\pi_n(X)).$$

Tout le reste de ce travail s'orientera vers l'étude de ce sous-groupe.
Terminons cette section par deux exemples de calculs de $\varepsilon_\#(X)$ pour certains espaces X.

Exemple 3.1.5 Nous savons que pour $n \geq 1$, $\varepsilon(S^n) = \mathbb{Z}_2$. Puisque l'application de degré -1 induit la multiplication par -1 en homotopie, on a $\varepsilon_\#(S^n) = 1$. De même, $\varepsilon_\#(\mathbb{C}P^n) = 1$.

Exemple 3.1.6 Pour $q > p > 1$, $\varepsilon_{\#}(S^p \times S^q)$ est un groupe abélien.

Preuve : Il est bien connu ([39]) que le produit $S^p \times S^q$ admet une décomposition cellulaire de la forme $S^p \vee S^q \cup_w e^{p+q}$ où l'application d'attachement $w : S^{p+q-1} \to S^p \vee S^q$ est l'application de Whitehead. Posons $X = S^p \times S^q$, et considérons l'application

$$\varphi : \pi_{p+q}(X) \cong \pi_{p+q}(S^p) \oplus \pi_{p+q}(S^q) \to [X, X]$$

qui envoit le représentant $\sigma \in \pi_{p+q}(S^p \times S^q)$ sur la classe de $\varphi(\sigma) = g_\sigma$ où

$$g_\sigma : X \xrightarrow{\text{pincer}} X \vee S^{p+q} \xrightarrow{id \vee \sigma} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

est la composée de l'application pincement de la cellule e^{p+q} avec l'application qui envoit S^{p+q} sur X par σ et l'application de pliage ∇.
Montrons que $\text{Im}\varphi \subseteq \varepsilon_{\#}(X)$. Soit donc $\sigma \in \pi_{p+q}(X)$ et montrons que $\pi_k(g_\sigma)$ est l'application identité pour tout k. Notons $j : S^p \vee S^q \hookrightarrow X$ l'inclusion. Clairement, $g_\sigma \circ j$ est l'application identité sur $S^p \vee S^q$. Par conséquent le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S^p \vee S^q & \xrightarrow{\text{Id}} & S^p \vee S^q \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ S^p \times S^q & \xrightarrow[g_\sigma]{} & S^p \times S^q \end{array}$$

Rappelons que les projections sur les composantes S^p et S^q induisent un isomorphisme $\pi_k(X) \cong \pi_k(S^p) \oplus \pi_k(S^q)$. Comme le composé de l'injection $S^p \hookrightarrow S^p \vee S^q \hookrightarrow S^p \times S^q$ et de la projection $S^p \times S^q \longrightarrow S^p$ est l'identité, tout élément de $\pi_k(S^p)$ est l'image d'un élément de $\pi_p(S^p \vee S^q)$. De même pour $\pi_k(S^q)$. Par conséquent, si $\tau \in \pi_k(X)$, $\tau = \pi_k(j)(\rho)$ pour un $\rho \in \pi_k(S^p \vee S^q)$. Finalement,

$$\pi_k(g_\sigma)(\tau) = g_\sigma \circ \tau = g_\sigma \circ j \circ \rho = j \circ \rho = \tau,$$

et donc $\pi_k(g_\sigma)$ est bien l'application identité. D'autre part, l'applicaton φ est un morphisme de groupes. Ceci s'obtient facilement à partir des définitions ([3]). Rappelons que si $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow C_f$ est une cofibration, alors pour toute application continue $\sigma : \Sigma X \to Z$ et $g : C_f \to Z$, on a une application

$$g_\sigma : C_f \xrightarrow{\text{pincer}} C_f \vee \Sigma X \xrightarrow{g \vee \sigma} Z \vee Z \xrightarrow{\nabla} Z .$$

Dans la suite exacte

$$[\Sigma X, Z] \longrightarrow [C_f, Z] \xrightarrow{h} [Y, Z] \ ,$$

si $h(r) = h(s)$, alors $r = s^\sigma$ pour un certain σ. Montrons maintenant que $\varepsilon_\#(X) \subset Im\varphi$, ce qui terminera la preuve. Puisque $Cone(w) \simeq S^p \times S^q$ et $\sum S^{p+q-1} \simeq S^{p+q}$, la suite

$$S^{p+q-1} \xrightarrow{w} S^p \vee S^q \xrightarrow{j} S^p \times S^q \xrightarrow{q} S^{p+q}$$

est une suite de cofibrations. Une partie de la suite exacte de Baratt-Puppe associée est alors une suite d'ensembles pointés respectivement par l'application constante, l'identité et j.

$$[S^{p+q}, S^p \times S^q] \xrightarrow{q_*} [S^p \times S^q, S^p \times S^q] \xrightarrow{j_*} [S^p \vee S^q, S^p \times S^q]$$

Si $f : S^p \times S^q \to S^p \times S^q$ induit l'identité en homotopie, alors $j_*(j) = j_*(Id)$. Il en résulte que $f = Id^\sigma$ pour un $\sigma : S^{p+q} \to S^p \times S^q$, c'est-à-dire $f = g_\sigma$.

Remarque 3.1.7 *On montre plus précisément que*

$$\varepsilon_\#(S^p \times S^q) = (\pi_{p+q}(S^p)/[\iota_p, \pi_{q+1}(S^p)]) \oplus (\pi_{p+q}(S^q)/[\iota_q, \pi_{p+1}(S^q)])$$

avec $\iota_k \in \pi_k(S^k)$ l'application identité et où $[.,.]$ désigne le crochet de Whitehead.

3.2 Structure du groupe $\varepsilon_\#(X)$

Nilpotence et finitude

Le groupe $\varepsilon_\#(X)$ est difficile à calculer, même pour des espaces "simples", comme l'a montré le dernier exemple de la section précédente. Les deux théorèmes importants suivants montrent que le groupe $\varepsilon_\#(X)$ n'est pas si sauvage si l'espace X est relativement gentil.
Le premier théorème est dû à Arkowitz et Curjel ([2],[4]) :

Théorème 3.2.1 *Si X est un CW-complexe fini simplement connexe ou quand X admet une tour de Postnikov finie, alors, le groupe $\varepsilon_\#(X)$ est finiment engendré.*

et le second à Dror et Zabrodsky ([17]) :

Théorème 3.2.2 *Si X est un CW-complexe fini simplement connexe ou quand X admet une tour de Postnikov finie, alors, le groupe $\varepsilon_{\#}(X)$ est nilpotent.*

Localisation

Si X est un CW-complexe fini simplement connexe ou quand X est un espace simplement connexe admettant une tour de Postnikov finie, alors, le théorème 1.2.11, nous assure que le rationalisé $X_{\mathbb{Q}}$ existe et est muni d'une application rationalisante $h : X \to X_{\mathbb{Q}}$. D'autre part, le théorème 3.2.2 montre que le groupe $\varepsilon_{\#}(X)$ est nilpotent et est donc rationalisable par le théorème 1.2.6. Il existe donc un espace rationnel $(\varepsilon_{\#}(X))_{\mathbb{Q}}$ muni d'une application rationalisante $k : \varepsilon_{\#}(X) \to (\varepsilon_{\#}(X))_{\mathbb{Q}}$. Le théorème suivant est du à Maruyama ([26],[27]) :

Théorème 3.2.3 *L'homomorphisme naturel $\varepsilon_{\#}(h) : \varepsilon_{\#}(X) \to \varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$ induit par la rationalisation de X est la rationalisation k des groupes nilpotents. Les groupes $(\varepsilon_{\#}(X))_{\mathbb{Q}}$ et $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$ sont donc isomorphes.*

3.3 Homotopie rationnelle des self-equivalences

A partir de ce chapitre, nous allons nous intéresser au calcul de la rationalisation du groupe $\varepsilon_{\#}(X)$, avec X un CW-complexe fini simplement connexe ou admettant une tour de Postnikov finie. Par le théorème 3.2.3, ce groupe est le groupe des self-equivalences du rationalisé de X. L'avantage de ce restreindre aux invariants rationnels de $\varepsilon_{\#}(X)$ est la possibilité d'appliquer les techniques de l'homotopie rationnelle rappelées au chapitre 2. Plus précisément, D. Sullivan ([37]) a donné un algorithme pour calculer l'algèbre de Lie nilpotente rationnelle associée par la correspondance de Mal'cev au groupe $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$. Sa philosophie générale est que l'algèbre de Lie associée au groupe $\varepsilon(X)$ correspond au niveau algébrique à une algèbre de dérivations associée au modèle minimal $\mathcal{M}_X$ de l'espace X.
Le théorème 2.2.11 nous permet de dire que si X est CW-complexe simplement connexe dont l'homologie est de type fini, alors, il existe un (anti-)isomorphisme entre le groupe $\varepsilon(X_{\mathbb{Q}})$ et le groupe $\varepsilon(\mathcal{M}_X)$ des classes d'équivalence d'homotopie des équivalences d'homotopie du modèle minimal $\mathcal{M}_X$. Maintenant, la correspondance (voir chapitre 2) entre les indécomposables de degré i du modèle $\mathcal{M}_X$ et le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie rationnel de X nous donne un (anti)-isomorphisme entre le

groupe $\varepsilon_\#(X_\mathbb{Q})$ et le groupe $\varepsilon_\#(\mathcal{M}_X)$[2] des classes d'homotopie de self-equivalence de $\mathcal{M}_X$ qui induisent l'identité sur les indécomposables.
Le but de la fin de cette section est de calculer l'algèbre de Lie rationnelle nilpotente associée à $\varepsilon_\#(\mathcal{M}_X)$ par la correspondance de Mal'cev. Considérons pour cela l'algèbre de Lie différentielle graduée des dérivations $(Der(\mathcal{M}_X), [,], d)$ du modèle minimal $\mathcal{M}_X$ définie à l'exemple 2.4.2. Notons $\mathrm{Der}_\#(\mathcal{M}_X)$ l'algèbre de Lie différentielle graduée définie par

$$Der_{\#i}(\Lambda V, d) = Der_i(\Lambda V, d) \text{ si } i \neq 0$$

et $Der_{\#0}(\Lambda V, d)$ désigne le sous-espace vectoriel rationnel de $\mathrm{Der}_0 M$ constitué des dérivations θ vérifiant $\theta(V) \subset \Lambda^{\geq 2}V$ si $\mathcal{M}_X = (\Lambda V, d)$. Le théorème suivant ([37],[33]) est l'outil principal de cette thèse. Par souci de complétude, et pour donner une intuition, nous allons écrire un résumé de sa preuve.

Théorème 3.3.1 *Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\mathcal{L}(\varepsilon_\#(\mathcal{M}_X)) = H_0(Der_\#(\mathcal{M}_X, d))$$

où $\mathcal{L}(\varepsilon_\#(\mathcal{M}_X))$ désigne l'algèbre de Lie associée à $\varepsilon_\#(\mathcal{M}_X)$ par la correspondance de Mal'cev.

Preuve : (résumé) On montre plutôt que

$$\mathcal{G}(H_0(Der_\#(\mathcal{M}_X, d))) = \varepsilon_\#(\mathcal{M}_X).$$

Rappelons que le groupe $\mathcal{G}(H_0(Der_\#(\mathcal{M}_X, d)))$ est isomorphe au groupe $(H_0(Der_\#(\mathcal{M}_X, d)), \star)$ où la multiplication $\star$ est donnée par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Si $\mathcal{M}_X = \Lambda V$, la première étape de la démonstration consiste à montrer que tout élément de $Der_{\#0}(\Lambda V, d)$ est localement nilpotent, à savoir, pour tout $\theta \in Der_{\#0}(\Lambda V, d)$, si $v \in \Lambda V$, alors, il existe un nombre naturel k tel que $\theta^k(v) = 0$. Ceci se montre à l'aide d'une simple induction en utilisant le fait que $\theta(V) \subset \Lambda^{\geq 2}V$. Ceci donne un sens à l'application exponentielle

$$exp : Der_{\#0}(\Lambda V, d) \to Aut_\# \Lambda V$$

où $Aut_\#\Lambda V$ est le groupe des automorphismes de ΛV induisant l'identité sur les indécomposables. L'exponentielle défini donc une bijection entre $Der_{\#0}(\Lambda V, d)$ et $Aut_\#\Lambda V$. Sullivan ([37]) montre alors que $exp(x \star y) =$

[2] Ce goupe est bien nilpotent [8]

$exp(X) \circ exp(Y)$ et que les automorphismes homotopes à l'identité correspondent aux bords. D'autre part, une simple induction permet de montrer que l'élément $x - y$ est un bord si et seulement si $x \star y^{-1}$ l'est ([33]). On obtient donc que deux cycles x, y correspondent à deux automorphismes homotopes si et seulement si ils sont homologues. En effet,

$$x-y = dz \iff x\star y^{-1} = dz \iff exp(x\star y^{-1}) \sim Id \iff exp(x) \sim exp(y).$$

Nous avons donc construit un isomorphisme de groupes

$$exp : \mathcal{G}(H_0(Der_{\#}(\mathcal{M}_X, d))) \to \varepsilon_{\#}(\mathcal{M}_X).$$

□

3.4 Enoncé des problèmes

En 2001, M. Arkowitz a publié une liste de questions ouvertes concernant les self-equivalences d'homotopie ([7]). Dans ce travail, nous nous sommes particulièrement intéressés à deux de ces questions. La première concerne le problème de réalisation du groupe des self-equivalences d'homotopie et la seconde un résultat de finitude portant sur ce groupe. Nous énonçons dans cette section les deux problèmes et donnons une brève revue de la littérature les concernant.

Problème de réalisation

Un problème de base est de savoir si tout groupe nilpotent G peut apparaître comme $\varepsilon(X)$ pour un espace X. Ce problème date de longtemps et beaucoup d'auteurs s'y sont déjà intéressés, par exemple dans ([2], [22]). Ce problème admet beaucoup de variations. Par exemple, si $X_{\mathbb{Q}}$ est un espace simplement connexe rationnel admettant une tour de Postnikov finie, on sait que le groupe $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$ est un groupe nilpotent rationnel finiment engendré par les théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. Une question naturelle est donc

Problème 3.4.1 *Tout groupe finiment engendré rationnel nilpotent est-il réalisable comme $\varepsilon_{\#}(X)$ pour un espace rationnel simplement connexe X ?*

Des réponses partielles on été fournies par M. Arkowitz et G. Lupton ([6]), S. Piccarreta ([30]). Par exemple, dans ([30]), S. Piccarreta réalise

les groupes rationnels de nilpotence 1 et les groupes rationnels de nilpotence 2 et de rang inférieur ou égal à 6, dont le sous-groupe commutateur a un rang égal à 1.
Remarquons enfin que les théorèmes 1.3.4 et 3.3.1 montrent que ce problème est équivalent au suivant :

Problème 3.4.2 *Toute algèbre de Lie nilpotente rationnelle finiment engendrée est-elle réalisable comme* $H_0(Der_{\#}(\mathcal{M}_X), d)$ *pour un certain modèle minimal* $\mathcal{M}_X$.

Problème de finitude

Dans l'exemple 2.2.9.(4), nous avons défini les F_0-espaces. Halperin a étudié ces espaces en profondeurs, par exemple dans ([19]), où il énonce la célèbre conjecture suivante :

Conjecture 3.4.3 *Si* F *est un* F_0-*espace, la suite spectrale rationelle de Serre dégénère au terme* E_2 *pour toute fibration* $\mathbb{Q}$*-orientable de la forme* $F \to E \to B$.

Cette conjecture a été prouvée dans certains cas particuliers, par exemple dans [23], [25], [35] et [36] mais reste un problème ouvert en général. Dans [28], Meier montre le théorème suivant :

Théorème 3.4.4 *Si* F *est un* F_0-*espace, alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La conjecture d'Halperin est vraie.*
2. $Der_{\#}^{\leq 0} H^*(F, \mathbb{Q}) = 0$.

En degré zéro, la conjecture de Halperin est donc équivalente à dire que $DER_{\#}(H^*(F, \mathbb{Q}))$ est nul. Elle est donc équivalente, vu la forme de $H^*(F, \mathbb{Q})$ et par le théorème 3.3.1, à montrer que $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})) = H_0(Der_{\#}((\mathcal{M}_X, d))) = 0$ et donc que $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}) = 1$. Par le théorème de localisation de Maruyama 3.2.3, la conjecture de Halperin en degré zéro se ramène donc au problème intéressant suivant concernant le groupe de self-equivalences d'homotopie d'un F_0- espace :

Problème 3.4.5 *Soit* X *un* F_0-*espace, alors, le groupe* $\varepsilon_{\#}(X)$ *est un groupe fini.*

3.5 Algèbres de Lie de dérivations et fibrations

Soit X un espace de modèle minimal $(\Lambda V, d)$ et Y un espace de modèle minimal les cochaînes sur une algèbre de Lie différentielle graduée (L, d_L). Nous montrons ici le lien entre les morphismes de Lie $L \to Der_{\#}(\Lambda V, d)$ et les fibrations de base Y et fibre X.
Soit $\varphi : L \to Der_{\#}(\Lambda V, d)$ un morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées. On associe à φ la fibration de base Y et de fibre X de modèle de Sullivan $[C^*(L) \otimes \Lambda V, D]$ où $D(v) = dv - \sum_i w_i.\varphi(e_i)(v)$. Les e_i et w_j étant définis à la section 2.5.

Lemme 3.5.1 $D^2 = 0$

Preuve :

$$\begin{aligned} D^2v &= d^2v - \sum w_i\varphi(e_i)(dv) - \sum d_0w_i.\varphi(e_i)(v) - \sum d_1w_i.\varphi(e_i)(v) \\ &- \sum(-1)^{|w_i|}w_i.d(\varphi(e_i)(v)) + \sum_{ij}(-1)^{|w_i|}w_i \wedge w_j\varphi(e_j)\varphi(e_i)(v) \end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned} -\sum w_i[\varphi(e_i)(dv) + (-1)^{|w_i|}d\varphi(e_i)(v)] &= -\sum(-1)^{|w_i|}w_i.D(\varphi(e_i))(v) \\ &= -\sum(-1)^{|w_i|}w_i.\varphi(d_L(e_i))(v) \\ &= -\sum(-1)^{|w_i|}w_i.\varphi(\sum a_i^r e_r)(v) \\ &= -\sum(-1)^{|w_i|}a_i^r w_i\varphi(e_r)(v) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$-\sum d_0w_i.\varphi(e_i)(v) = -\sum_{i,j}(-1)^{|w_i|+1}a_j^i w_j\varphi(e_i)(v)$$

Les second, troisième et cinquième terme de D^2v s'annulent donc ensemble. Calculons maintenant le quatrième et le $6^{\text{ème}}$ pour montrer que leur somme vaut 0.

$$-\sum_i d_1w_i.\varphi(e_i)v = -\sum_i[\sum_{r<s}(-1)^{|w_r|}C_{sr}^i w_r\wedge w_s.\varphi(e_i)v + \frac{1}{2}\sum_r C_{rr}^i w_r\wedge w_r\varphi(e_i).v]$$

Tandis que

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{ij} \quad & (-1)^{|w_i|} w_i \wedge w_j \varphi(e_j)\varphi(e_i)(v) \\
= \quad & \sum_{i<j} (-1)^{|w_i|} w_i \wedge w_j [\varphi(e_j), \varphi(e_i)](v) + \sum_i \frac{w_i \wedge w_i}{2} [\varphi(e_i), \varphi(e_i)](v) \\
= \quad & \sum_{i<j} (-1)^{|w_i|+|e_i||e_j|+1} w_i \wedge w_j (\varphi[e_i, e_j])(v) + \sum_i \frac{w_i \wedge w_i}{2} \varphi[e_i, e_j](v) \\
= \quad & \sum_{i<j} (-1)^{|w_i|+|e_i||e_j|+1} w_i \wedge w_j \sum_k C_{ij}^k \varphi(e_k)(v) + \sum_i \frac{w_i \wedge w_i}{2} \sum_k C_{ii}^k \varphi(e_k)(v) \\
= \quad & \sum_k [\sum_{i<j} (-1)^{|w_i|} C_{ji}^k w_i \wedge w_j + \sum C_{ii}^k \frac{w_i \wedge w_i}{2}] \varphi(e_k)(v)
\end{aligned}$$

□

Inversément tout modèle de Sullivan de la forme $(C^*(L) \otimes \Lambda V, D)$ où D et d ont même partie quadratique définit un morphisme d'algèbres de Lie $H_0(L, d_L) \to \mathcal{L}(\varepsilon_\#(\Lambda V, d))$. Décomposons D sous la forme

$$Dv = dv - \sum w_i \varphi_i(v) + \sum_{ij} w_i \wedge w_j \theta_{ij}(v) + \sum_{ijk} w_i \wedge w_j \wedge w_k \theta_{ijk}(v) + \cdots$$

où $\varphi_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk} : \Lambda V \to \Lambda V$. Par hypothèse $\varphi_i(v)$ est décomposable pour tout v. De plus, $\varphi_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk} \ldots$ s'étendent en des dérivations de ΛV. on définit une application linéaire

$$\varphi : L \to Der_\#(\Lambda V, d)$$

en posant $\varphi(e_i) = \varphi_i$. L'application φ est un morphisme d'espaces vectoriels différentiels. En effet, en considérant le coefficient de w_i dans $D^2 v = 0$, on obtient $-\varphi_i dv - \sum (-1)^{|w_i|} d\varphi_i(v) = 0$.

Lemme 3.5.2 *En homologie, φ devient un homomorphisme d'algèbres de Lie.*

Preuve : On considère le coefficient de $w_i \wedge w_j$ dans $D^2 v = 0$. On obtient

$$\sum_i (-1)^{|w_i|} w_i \wedge w_j \varphi_j \varphi_i(v) - \sum d_1 w_i \varphi_i(v) + \sum (-1)^{|w_i|+|w_j|} w_i \wedge w_j d\theta_{ij}(v) = 0.$$

Cette expression donne

$$\sum_{r \le s} (-1)^{|w_r|} w_r \wedge w_s [[\varphi_s, \varphi_r](v) - \varphi[e_s, e_r](v) + (-1)^{|w_s|} d\theta_{rs}(v)] = 0.$$

□

En conséquence, en degré 0, φ induit un homomorphisme d'algèbre de Lie $H_0(L, d_L) \to \mathcal{L}(\varepsilon_\#(\Lambda V, d))$.

4

Réalisations en cascade

Rappelons que le problème de réalisation consiste à voir si pour toute algèbre de Lie rationnelle nilpotente finiment engendrée L, il existe un espace X tel que $H_0(Der_{\#}(\mathcal{M}_X), d) \cong L$. Le but de ce chapitre est de donner des exemples d'algèbres de Lie réalisables de différentes formes, par exemples, à partir de produit de sphères impaires.

4.1 Algèbres de Lie abéliennes

L'exemple le plus simple que l'on peut considérer est la réalisation des algèbres de Lie rationnelles finiment engendrées abéliennes $Ab(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposition 4.1.1 *Toute algèbre de Lie rationnelle finiment engendrée abélienne est réalisable comme $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}))$ avec X un produit de sphères impairs.*

Preuve : Soit donc $L = Ab(x_1, \ldots, x_n)$, l'algèbre de Lie abélienne rationnelle finiment engendrée à n générateurs. Considérons l'espace formel $X = (S^3)^3 \times (S^9)^n$. Par l'exemple 2.2.9 (1), le modèle minimal de X est donné par

$$\mathcal{M}_X = (\Lambda(u_1, u_2, u_3, v_1, \ldots, v_n), 0)$$

avec $|u_i| = 3$ et $|v_i| = 9$. Nous savons par le théorème 3.3.1 que $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}))$ $= H_0(Der_{\#}((\Lambda(u_1, u_2, u_3, v_1, \ldots, v_n), 0)))$. Puisque $d = 0$, on en déduit que

$$\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})) = Der_{\#0}((\Lambda(u_1, u_2, u_3, v_1, \ldots, v_n), 0)).$$

Une base de $Der_{\#0}((\Lambda(u_1, u_2, u_3, v_1, \ldots, v_n), 0))$, en tant qu'espace vectoriel, est maintenant donnée par les applications f_i définies par $f_i(v_i) =$

$u_1u_2u_3$ et $f_i(w) = 0$ sur tout autre générateur w du modèle $\mathcal{M}_X$. L'application

$$\varphi : Ab(x_1, \ldots, x_n) \to Der_{\#0}((\Lambda(u_1, u_2, u_3, v_1, \ldots, v_n), 0))$$

définie par $\varphi(x_i) = f_i$ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Maintenant puisque quelque soit i et j, tous les crochets $[f_i, f_j]$ sont nuls, l'application φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. □

Remarque 4.1.2 *Puisque les groupes abéliens rationnels finiment engendrés correspondent exactement aux algèbres de Lie abéliennes nilpotentes finiment engendrées par le théorème 1.3.4, nous venons de montrer que tout groupe abélien rationnel nilpotent finiment engendré est réalisable comme $\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}})$ pour X un complexe fini.*

Remarque 4.1.3 *Un calcul similaire nous donne que $Ab(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}))$ avec $X = (S^m)^k \times (S^{mk})^n$ avec $1 < m \leq k$ et m, k des nombres impairs. Nous n'avons donc pas unicité de la réalisation.*

4.2 Les algèbres de Lie d'Heisenberg

Rappelons que l'algèbre de Lie d'Heisenberg H_n est l'algèbre de Lie non graduée admettant pour base $(p_1, \ldots, p_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ avec z central et

$$[p_i, p_j] = 0, [p_i, q_j] = \delta_{ij} z, [q_i, q_j] = 0.$$

Proposition 4.2.1 *Pour tout n, l'algèbre de Lie de Heisenberg H_n est réalisable comme $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}))$ pour X un produit de sphères impaires.*

Preuve : On peut obtenir H_n pour tout $n \geq 1$ comme algèbre de Lie de dérivations associée à un produit de sphères

$$X = (S^3)^3 \times (S^9)^n \times (S^{11})^2 \times S^{31}$$

Le modèle de Sullivan minimal associé à X est donnée par

$$\mathcal{M}_X = (\Lambda(u, v, w, x_1, \ldots, x_n, t_1, t_2, y), 0)$$

avec

$$|u| = |v| = |w| = 3, \quad |x_i| = 9, \quad |t_1| = 11, \quad |t_2| = 11, \quad |y| = 31.$$

Puisque $d = 0$, $H_0(Der_{\#}(\mathcal{M})) = Der_{\#0}(\mathcal{M})$. Une base de $DER_{\#}(\mathcal{M})$, en tant qu'espace vectoriel, est donnée par les dérivations f_i pour $i = 1 \dots n$, g_i pour $i = 1, \dots, n$ et g définies par

$$f_i(x_i) = uvw \text{ et } f_i \text{ est nulle sur les autres générateurs}$$

$$g_i(y) = t_1 t_2 x_i \text{ et } g_i \text{ est nulle sur les autres générateurs}$$

$$h(y) = uvwt_1t_2 \text{ et } h \text{ est nulle sur les autres générateurs}$$

Dans l'algèbre de Lie $Der_{\#0}((\Lambda(u, v, w, x_1, \dots, x_n, t_1, t_2, y), 0))$, on calcule alors que $[f_i, g_i](y) = f_i(t_1 t_2 x_i) = uvwt_1t_2 = h(y)$ et $[f_i, g_i]$ est nul sur les autres générateurs. Tous les autres crochets sont nuls. Par conséquent, l'application

$$\varphi : H_n \to Der_{\#0}((\Lambda(u, v, w, x_1, \dots, x_n, t_1, t_2, y), 0))$$

définie par $\varphi(p_i) = f_i$, $\varphi(z) = h$ et $\varphi(q_i) = g_i$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. □

4.3 Algèbres de Lie de grande nilpotence

Pour le moment, nous avons réalisé des algèbres de nilpotence au plus 2. Le but de l'exemple qui suit est de montrer qu'il est possible de réaliser des algèbres de Lie de nilpotence aussi grande que l'on veut.

Proposition 4.3.1 *Pour tout $n \geq 1$, il existe des produits finis de sphères impaires X_n avec $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}((X_n)_{\mathbb{Q}}))$ de nilpotence n.*

Preuve : Fixons $n \geq 1$. Considérons le modèle minimal

$$\mathcal{M} = (\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, z_1, v_1, y_2, z_2, v_2, \dots, y_n, z_n, v_n), 0)$$

avec

$$\begin{cases} |x_1| = |x_2| = |x_3| = 3 \\ |y_1| = 9, \quad |z_1| = |v_1| = 11 \\ |y_i| = |y_{i-1} z_{i-1} v_{i-1}|, \quad i \geq 2 \\ |z_i| = |v_i| > |x_1 x_2 x_3 y_1 v_1 z_1 \dots y_{i-1} v_{i-1} z_{i-1} y_i|, \quad i \geq 2 \\ |z_i| = |v_i| \text{ impair} \end{cases}$$

Clairement, $\mathcal{M}$ est le modèle d'un produit fini de sphères impaires. Pour des raisons de degré, toutes les dérivations s'annulent sur x_1, x_2, x_3, les

z_i et les v_i. Considérons alors les dérivations θ_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq i$ définies par

$$\theta_{ij}(y_r) = 0 \text{ si } r \neq i,$$

$$\theta_{11}(y_1) = x_1x_2x_3$$

$$\theta_{i1}(y_i) = y_{i-1}z_{i-1}v_{i-1} \quad i > 1$$

$$\theta_{i2}(y_i) = (y_{i-2}z_{i-2}v_{i-2})(z_{i-1}v_{i-1}) \quad i > 2$$

$$\vdots$$

$$\theta_{ii}(y_i) = (x_1x_2x_3)(z_1v_1)(z_2v_2)\dots(z_{i-1}v_{i-1}) \quad i > 1.$$

Un calcul direct montre que

$$[\theta_{11}[\theta_{21}, [\dots[\theta_{n-1,1}, \theta_{n,1}]\dots]]] = \theta_{n,n}.$$

Puisque $d = 0$, le résultat est prouvé. □

Remarque 4.3.2 *Puisque les groupes rationnels $n-$nilpotents finiment engendrés correspondent exactement aux algèbres de Lie $n-$nilpotentes finiment engendrées par le théorème 1.3.4, nous venons de montrer que pour tout entier n, il existe un espace X admettant une tour de Postnikov finie tel que $\varepsilon_{\#}(X)$ est un groupe $n-$nilpotent.*

Proposition 4.3.3 *Pour tout entier n, il existe un espace formel X, admettant une tour de Postnikov finie, réalisant l'algèbre de Lie $n-$nilpotente (filiforme) F_n admettant pour base $(x_1, \dots, x_{n+1})$ avec $x_{i+1} = [x_1, x_i]$, $i \geq 2$.*

Preuve : Considérons le modèle de Sullivan $\mathcal{M} = (\Lambda(u, v, w), 0)$ avec $|u| = 2, |v| = 4$ et $|w| = 4n$. Puisque $d = 0$, on a $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(\mathcal{M})) = Der_{\#0}(\mathcal{M})$. Une base de $Der_{\#0}(\mathcal{M})$, en tant qu'espace vectoriel, est alors donnée par les dérivations g, et $f_i, i = 0, \dots, n$ avec

$$\begin{cases} g(v) = u^2 \text{ et } g(v) = g(w) = 0 \\ f_i(w) = \frac{n!}{(n-i)!}.v^{n-i}u^{2i} \text{ et } f_i(u) = f_i(v) = 0 \text{ si } 0 \leq i \leq n, \end{cases}$$

Dans l'algèbre de Lie $Der_{\#0}(\mathcal{M})$, on calcule alors que

$$[g, f_i](w) = g(f_i(w)) = g(\frac{n!}{(n-i)!}.v^{n-i}u^{2i}) = \frac{n!}{(n-i-1)!}v^{n-i-1}u^{2(i+1)} = f_{i+1}(w)$$

et

$$[g, f_i](u) = 0 = [g, f_i](v).$$

Tous les autres crochets sont nuls. Par conséquent, l'application

$$\varphi : F_n \to Der_{\#}((\Lambda(u, v, w), 0))$$

définie par $\varphi(x_1) = g$ et $\varphi(x_i) = f_{i-2}$ pour $i \geq 2$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Finalement, il suffit de prendre $X = |\mathcal{M}|$, où $|.|$ désigne le foncteur réalisation géométrique de Sullivan. □

4.4 Algèbre de Lie 3−nilpotente libre

Toutes les algèbres de Lie que nous avons réalisées jusqu'à présent l'ont été comme algèbres de dérivations de modèles de Sullivan minimaux dont la différentielle était nulle. Nous allons donner un exemple de calcul où ce n'est pas le cas. Pour cela, considérons l'algèbre de Lie rationnelle libre $\mathbb{L}(x_1, x_2)$ à deux générateurs x_1 et x_2. Au premier chapitre de ce texte, nous avons défini la suite centrale descendante de $\mathbb{L}(x_1, x_2)$, que l'on a notée $\{C_n(\mathbb{L}(x_1, x_2))\}_{n>0}$. Considérons alors l'algèbre de Lie 3-nilpotente libre

$$L = \frac{\mathbb{L}(x_1, x_2)}{C_4(\mathbb{L}(x_1, x_2))}.$$

Une famille de Hall pour L (voir premier chapitre, section 1.1) est donnée par

$$x_1, x_2, [x_1, x_2], [x_1, [x_1, x_2]] \text{ et } [x_2, [x_1, x_2]].$$

Proposition 4.4.1 *L'algèbre de Lie L est réalisable comme $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}))$ avec X un espace admettant une tour de Postnikov finie.*

Preuve : Il suffit de construire un modèle de Sullivan minimal $(\Lambda V, d)$ tel que $H_0(Der_{\#}(\Lambda V, d)) = L$.
Choisissons un nombre premier $p_1 > 1000$ et un autre $p_2 > p_1$ tel que $p_2 \equiv 1$ modulo p_1. Soit aussi $N > 1000$, un nombre naturel. Considérons le modèle minimal

$$(\Lambda V, d) = (\Lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x, y, w, t_1, t_2, t_3, t_4, t, r, r', s), d)$$

dont la différentielle d est définie, si nous posons $\alpha = \alpha_1.\alpha_2$ et $\beta = \beta_1.\beta_2$, par

$$\begin{cases} d(\alpha_1) = d(\alpha_2) = d(\beta_1) = d(\beta_2) = d(x) = d(y) = d(w) = 0 \\ dt_1 = \alpha y^2 w^3,\ dt_2 = \beta x^2 w^3,\ dt_3 = \alpha\beta y w^2 \\ dt_4 = \alpha\beta x w^2,\ dt = x^2 y^2 w^4,\ dr = \alpha^2\beta w \\ dr' = \alpha\beta^2 w,\ ds = \alpha r' w^3 - \beta r w^3. \end{cases}$$

et dont les degrés sont donnés par

$$\begin{cases} |\alpha_1| = 22p_1p_2,\ |\alpha_2| = 24p_1p_2,\ |\beta_1| = 26p_1p_2,\ |\beta_2| = 28p_1p_2, \\ |x| = 46p_1p_2,\ |y| = 54p_1p_2,\ |w| = (2Np_1 + 2)p_2 + 2 \end{cases}$$

Les degrés des autres variables sont tous définis par la différentielle. Nous allons montrer que ce modèle minimal convient.
Pour pouvoir calculer $H_0(Der_\#(\Lambda V, d))$, nous devons déterminer pour le degré p de chaque générateur une base de l'espace vectoriel $(\Lambda V)^p$. Nous allons le faire en ordre croissant de degré. Pour les variables de degré plus petit où égal au degré de w, c'est facile :

Lemme 4.4.2 *Si $q_1 = |\alpha_1|$, $q_2 = |\alpha_2|$, $q_3 = |\beta_1|$ et $q_4 = |\beta_2|$, alors,*

$$(\Lambda V)^{q_1} = \mathbb{Q}.\alpha_1, \quad (\Lambda V)^{q_2} = \mathbb{Q}.\alpha_2, \quad (\Lambda V)^{q_3} = \mathbb{Q}.\beta_1 \text{ et } (\Lambda V)^{q_4} = \mathbb{Q}.\beta_2.$$

□

Lemme 4.4.3 *Si $q_1 = |x|$, $q_2 = |y|$, alors,*

$$(\Lambda V)^{q_1} = \mathbb{Q}.x \oplus \mathbb{Q}.\alpha, \quad (\Lambda V)^{q_2} = \mathbb{Q}.y \oplus \mathbb{Q}.\beta$$

□

Lemme 4.4.4 *Si $q = |w|$, alors,*

$$(\Lambda V)^q = \mathbb{Q}.w.$$

Preuve : Tous les générateurs d'un degré plus petit ont un degré divisible par p_2. □

Les seules variables ayant un degré entre $|w|$ et $|w^2|$ sont r et r' :

Lemme 4.4.5 *Si $q_1 = |r|$ et $q_2 = |r'|$, alors,*

$$(\Lambda V)^{q_1} = \mathbb{Q}.r \text{ et } (\Lambda V)^{q_2} = \mathbb{Q}.r'.$$

Preuve : Il suffit de remarquer que

$$\begin{cases} |r| = |r'| \equiv 1 \bmod p_2 \\ |r'| - |r| = |y| - |x| = 8p_1p_2. \end{cases}$$

□

Les seuls éléments ayant un degré entre $|w^2|$ et $|w^3|$ sont t_3 et t_4 :

Lemme 4.4.6 *Si $q_1 = |t_3|$ et $q_2 = |t_4|$, alors,*

$$(\Lambda V)^{q_1} = \mathbb{Q}.t_3 \oplus \mathbb{Q}(wr'), \quad (\Lambda V)^{q_2} = \mathbb{Q}.t_4 \oplus \mathbb{Q}(wr)$$

Preuve : Le résultat découle directement des égalités suivantes :

$$\begin{cases} |t_3| = |t_4| \equiv 3 \bmod p_2 \\ |t_4| - |t_3| = |y| - |x| = 8p_1p_2. \end{cases}$$

□

Les seuls éléments de degré entre $|w^3|$ et $|w^4|$ sont t_1 et t_2 :

Lemme 4.4.7 *Si $q_1 = |t_1|$ et $q_2 = |t_2|$, alors,*

$(\Lambda V)^{q_1} = \mathbb{Q}.t_1 \oplus \mathbb{Q}(wt_3) \oplus \mathbb{Q}.(w^2r'), \quad (\Lambda V)^{q_2} = \mathbb{Q}.t_2 \oplus \mathbb{Q}(wt_4) \oplus \mathbb{Q}(w^2r).$

Preuve : Il suffit d'observer que

$$\begin{cases} |t_1| = |t_2| \equiv 5 \bmod p_2 \\ |t_1| - |t_2| = |y| - |x| = 8p_1p_2. \end{cases}$$

□

Les seuls générateurs de degré entre $|w^4|$ et $|w^5|$ sont t et s :

Lemme 4.4.8 *Si $q = |s|$, alors,*

$$(\Lambda V)^q = \mathbb{Q}.s.$$

Preuve : Remarquons que, puisque $p_2 \equiv 1$ modulo p_1, on obtient

$$\begin{cases} |s| \equiv 6 \bmod p_2 \\ |s| \equiv 14 \bmod p_1 \\ |t_1r| > |s|, \quad |t_3t_4| > |s|, \quad |w^2rr'| > |s| \\ |rwt_3| > |s|. \end{cases}$$

Le résultat s'en suit donc. □

Lemme 4.4.9 *Les monômes dans le degré de t sont les éléments*

$$xt_1w,\ yt_2w,\ \alpha_1\alpha_2t_1w,\ \beta_1\beta_2t_2w,\ xt_3w^2,\ xr'w^3,\ yt_4w^2,\ yrw^3,$$

$$\alpha_1\alpha_2t_3w^2,\ \alpha_1\alpha_2r'w^3,\ \beta_1\beta_2t_4w^2,\ \beta_1\beta_2rw^3.$$

Preuve : Il suffit de constater que $t \equiv 7$ modulo p_2 et que $|sr| > |t|$. □

Définissons maintenant les dérivations φ et ψ de $(\Lambda V, d)$ par

$$\begin{cases} \varphi(y) = \varphi(w) = \varphi(t_1) = \varphi(t_3) = 0, \\ \varphi(x) = \alpha, \\ \varphi(t) = 2xt_1w, \\ \varphi(t_2) = 2wt_4, \\ \varphi(t_4) = wr. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \psi(x) = \psi(w) = \psi(t_2) = \psi(t_4) = 0, \\ \psi(y) = \beta, \\ \psi(t) = 2yt_2w, \\ \psi(t_1) = 2wt_3, \\ \psi(t_3) = wr'. \end{cases}$$

Les dérivations φ et ψ commutent avec la différentielle d, et leur image est contenue dans $\Lambda^{\geq 2}(V)$. Elle définissent donc des cocycles dans le complexe $Der_{\#}(\Lambda V, d)$, c'est-à-dire,

$$\varphi, \psi \in Z_0(Der_{\#}(\Lambda V)).$$

Recherchons les autres dérivations de $Z_0(Der_{\#}(\Lambda V))$. Si $\theta \in Z_0(Der_{\#}(\Lambda V))$ est une dérivation différente de φ et ψ, quitte à additionner à θ un multiple de φ et un multiple de ψ, on peut supposer que $\theta(x) = \theta(y) = 0$. En conséquence, on obtient successivement

$$\theta(\alpha_1) = \theta(\alpha_2) = \theta(\beta_1) = \theta(\beta_2) = \theta(w) = \theta(r) = \theta(r') = \theta(s) = 0$$

puisque il n'y a pas de déformation possible pour ces variables,

$$\theta(t_1) = \theta(t_2) = 0$$

puisque aucun des mots wr et wr' ne sont des cocycles,

$$\theta(t_3) = \theta(t_4) = 0$$

puisqu'aucune combinaison des mots wt_3, wt_4, w^2r' et w^2r ne forme un cocycle, et finalement,

$$\theta(t) \text{ est un cocycle}$$

puisqu'on doit avoir $d(\theta(t)) = \theta(dt) = \theta(x^2y^2w^4) = 0$.
Maintenant, une vérification directe nous fournit la base de $Z^{|t|}(\Lambda V, d)$ suivante :

$$(xt_3 - yt_4)w^2, \quad xr'w^3 - \beta t_4 w^2, \quad yrw^3 - \alpha t_3 w^2 \text{ et } \alpha r'w^3 - \beta rw^3.$$

Une base de $Z_0(Der_{\#}(\Lambda V))$, en tant qu'espace vectoriel est donc donnée par les dérivations $\varphi, \psi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ avec

$$\theta_1(t) = (xt_3 - yt_4)w^2 \text{ et zéro sur les autres générateurs,}$$

$$\theta_2(t) = xr'w^3 - \beta t_4 w^2 \text{ et zéro sur les autres générateurs,}$$

$$\theta_3(t) = yrw^3 - \alpha t_3 w^2 \text{ et zéro sur les autres générateurs,}$$

$$\theta_4(t) = \alpha r'w^3 - \beta rw^3 \text{ et zéro sur les autres générateurs.}$$

Notons $q : Z_0(Der_{\#}(\Lambda V, d)) \to H_0(Der_{\#}(\Lambda V, d))$, l'application quotient. Une dérivation θ appartient au noyau de q si et seulement si il existe une dérivation ρ de degré -1 telle que $\theta = d\rho + \rho d$.

Lemme 4.4.10 *La dérivation θ_4 engendre le noyau de l'application q.*

Preuve : Supposons que θ soit dans le noyau de q. Il existe donc une dérivation ρ de degré -1 telle que $\theta = d\rho + \rho d$. Comme $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x, y$ et w sont de degrés pairs, ρ est nulle sur ces éléments. Comme $|\rho(r)| \equiv 2 \mod p_1$ et $|w| \equiv 4 \mod p_1$, on a que $|\rho(r)| = 0$. Il en est de même pour $\rho(r')$.
Comme $|\rho(t_3)| \equiv 6 \mod p_1$, $|w| \equiv 4 \mod p_1$, $|r| \equiv |r'| \equiv 3 \mod p_1$ et $|t_3| < |rr'|$, on a $|\rho(t_3)| = 0$. De même $|\rho(t_4)| = 0$.
L'élément $|\rho(t_1)|$ est pair. Comme $|rr'| > |t_1|$, $|\rho(t_1)|$ est un polynôme en $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x, y$. L'équation $|\rho(t_1)| \equiv 10 \mod p_1$ entraîne $\rho(t_1) = 0$. De même $|\rho(t_2)| = 0$.

L'élément $|\rho(s)|$ est impair. L'analyse des équations

$$\begin{cases} |\rho(s)| \equiv 5 \quad (p_2) \\ |t_1| \equiv 5 \quad (p_2) \\ |t_3| \equiv 3 \quad (p_2) \\ |w| \equiv 2 \quad (p_2) \\ |r| \equiv 1 \quad (p_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} |\rho(s)| \equiv 13 \quad (p_1) \\ |t_1| \equiv 11 \quad (p_1) \\ |t_3| \equiv 7 \quad (p_1) \\ |w| \equiv 4 \quad (p_1) \\ |r| \equiv 3 \quad (p_1) \end{cases}$$

montre que $\rho(s) = 0$. Finalement, $\rho(t)$ est de degré impair ; et le seul monôme de degré $< |t|$ et congru à $|\rho(t)|$ modulo p_1 et p_2 est s. □
Une base de $H_0(Der_{\#}(\Lambda V, d))$, en tant qu'espace vectoriel est donc donnée par les dérivations $\varphi, \psi, \theta_1, \theta_2$ et θ_3. Une vérification directe montre alors que l'application

$$\gamma : L \to H_0(Der_{\#}(\Lambda V, d))$$

définie par $\gamma(x_1) = \varphi$ et $\gamma(x_2) = \psi$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie car

$$[\varphi, \psi] = -4\theta_1,$$
$$[\varphi, [\varphi, \psi]] = 4\theta_3$$
$$[\varphi, [\varphi, \psi]] = -4\theta_2$$

□

4.5 L'algèbre de Lie $\mathbf{Tr}_0(n, \mathbb{Q})$ et le théorème d'injection

Toutes les algèbres de Lie réalisées dans les exemples précédents sont des algèbres de Lie 2-résolubles. Nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une algèbre de Lie rationnelle nilpotente finiment engendrée et $n-$résoluble qui est réalisable comme algèbre de Lie de dérivations. Rappelons pour cela que $\mathrm{Tr}_0(n, \mathbb{Q})$ est l'algèbre de Lie rationnelle des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{Q}$ triangulaires supérieures avec des zéros sur la diagonale.

Proposition 4.5.1 *Pour tout entier n, l'algèbre de Lie $Tr_0(n, \mathbb{Q})$ est réalisable comme $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X_{\mathbb{Q}}))$ avec X un CW-complexe elliptique formel.*

Preuve : Considérons l'algèbre différentielle

$$(\wedge V, d) = (\wedge(x_1, \ldots, x_n, u, v), d)$$

où la différentielle est définie par

$$d(u) = d(x_1) = d(x_2) = \ldots = d(x_n) = 0,\ d(v) = u^{2n+1}$$

et les degrés sont donnés par

$$|u| = 4, |x_i| = 4n + 4(n-i) + 1, |v| = 8n + 3.$$

En particulier $|x_1| = 8n - 3$. Tous les x_i sont dans des degrés congrus à 1 modulo 4, et le produit de deux d'entre eux est de degré supérieur à celui de tout x_i. Le produit de trois x_i est quant à lui de degré supérieur au degré de v. Soit φ une dérivation de $DER_{\#}(\Lambda V, d)$. Comme u est le seul monôme de degré 4 et $|v| \equiv 3$ modulo 4, on doit avoir $\varphi(u) = 0$ et $\varphi(v) = 0$.
D'autre part, les monômes de degré $4n + 4(n-i) + 1$ sont clairement donnés par

$$x_i, ux_{i+1}, u^2x_{i+2}, \ldots, u^{n-i}x_n.$$

Donc la dérivation φ est telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\varphi(x_i) = \sum_{j>i} a_{ij} x_j u^{(j-i)}$$

pour certains coefficients $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. A toute dérivation φ on associe ainsi une matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ appartenant à $\mathrm{Tr}_0(n,\mathbb{Q})$. L'application ainsi définie de $Z_0(\mathrm{Der}_{\#}((\Lambda V, d)))$ dans $\mathrm{Tr}_0(n,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Maintenant, au vu de la différentielle, pour toutes ces dérivations, il n'est pas possible que φ soit de la forme $d\theta + \theta d$. Par conséquent, $H_0(Der_{\#}((\Lambda V, d))) = Z_0(Der_{\#}((\Lambda V, d)))$ et une vérification directe montre que l'application définie de $H_0(Der_{\#}((\Lambda V, d)))$ dans $\mathrm{Tr}_0(n,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.
D'autre part, La cohomologie de $(\Lambda V, d)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[u]/u^{2n+1} \otimes E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $E(-)$ désignant le foncteur algèbre extérieure. L'espace X réalisation géométrique de $(\lambda V, d)$ a donc homotopie et cohomologie finie. □

Remarque 4.5.2 *On peut choisir dans la proposition précédente X un produit de $\mathbb{H}P(2n)$ et d'un produit de sphères impaires.*

Corollaire 4.5.3 *Soit L une algèbre de Lie nilpotente rationnelle finiment engendrée. Alors, il existe un espace X tel que L est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\varepsilon_{\#}(X))$.*

Preuve : Le résultat découle directement de la proposition 4.5.1 et du théorème 1.1.5. □

5

Algèbres de Lie nilpotentes 2-résolubles

Dans ce chapitre, nous montrons que tout groupe rationnel finiment engendré nilpotent 2-résoluble est réalisable comme $\varepsilon_{\#}(X)$ avec X un CW-complexe simplement connexe admettant une tour de Postnikov finie, résultat principal de ([13]).
Puisque les algèbres de Lie rationnelles nilpotentes 2-résolubles finiment engendrées correspondent exactement aux groupes rationnels finiment engendrés nilpotents 2-résolubles par le théorème 1.3.4, nous devons prouver le théorème suivant :

Théorème 5.0.4 *Toute algèbre de Lie rationnelle nilpotente finiment engendrée 2-résoluble est réalisable comme $H_0(Der_{\#}(\mathcal{M}), d)$ pour un certain modèle minimal $\mathcal{M}$.*

5.1 La preuve du théorème 5.0.4

Fixons donc une algèbre de Lie 2-résoluble rationnelle N-nilpotente L, et notons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une base des générateurs.

L'algèbre de Lie F

Considérons l'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(X)$ sur l'ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{G_n(\mathbb{L}(X))\}_{n\geq 1}$, sa série dérivée. Nous avons vu au premier chapitre qu'une base de $\frac{G_2(\mathbb{L}(X))}{G_3(\mathbb{L}(X))}$ est donnée par les éléments

$$[x_{i_1}, [x_{i_2}, [\ldots x_{i_r}, [x_i, x_j]\ldots]$$

avec $i_1 \geq \ldots \geq i_r \geq i$ et $i < j$. Considérons maintenant l'application d'adjonction

$$\bigoplus_{i<j} \mathbb{Q}[x_i,\ldots,x_n]\cdot a_{ij} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathbb{L}(x_1,\ldots,x_n)}{G_3(\mathbb{L}(x_1,\ldots,x_n))}\ ,$$

définie par

$$\varphi(x_{i_1}.\ldots.x_{i_r}\cdot a_{ij}) = [x_{i_1},[x_{i_2},[\ldots[x_{i_r},[x_i,x_j]\ldots]$$

pour $i_1 \geq \ldots \geq i_r \geq i$ et $i < j$.
L'algèbre de Lie F est définie comme le quotient de $\frac{\mathbb{L}(X)}{G_3(\mathbb{L}(X))}$ par l'idéal engendré par les éléments

$$\begin{cases} \varphi(x_k^N.a_{ij}) \text{ pour tout } i<j \text{ et tout } k \\ \varphi(x_i^{N-1}.a_{ij}) \text{ et } \varphi(x_j^{N-1}.a_{ij}) \text{ pour tout } i<j \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une courte suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i<j} \frac{\mathbb{Q}[x_i,\ldots,x_n]}{(x_k^N,x_i^{N-1},x_j^{N-1})}\cdot a_{ij} \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}.x_i \longrightarrow 0\ .$$

Par définition de F il existe une surjection naturelle $\pi : F \to L$ qui envoit chaque x_i sur lui même. Le noyau I est contenu dans $[F,F]$ et est donc un $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$-module. Notons I_r l'espace vectoriel

$$I_r = \Lambda^{\geq r}(x_1,\ldots,x_n)\cdot I/\Lambda^{\geq r+1}(x_1,\ldots,x_n)\cdot I\,.$$

Chaque I_r est un espace vectoriel de dimension finie et en prenant les sections σ_r des projections $\Lambda^{\geq r}(x_1,\ldots,x_n)\cdot I \to I_r$, on obtient un isomorphisme

$$I \cong \oplus_{r\leq nN}\ I_r\,.$$

L'idée principale de la construction du modèle $\mathcal{M}$

Le modèle de Sullivan minimal $\mathcal{M}$ que nous allons construire sera de la forme $(\Lambda(V\oplus J),d)$ avec $F \cong H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V,d))$ et $L \cong H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda(V\oplus J),d))$. Le modèle $\mathcal{M}$ sera donc la solution de notre problème de réalisation. Nous construisons tout d'abord l'algèbre différentielle graduée

$$(\Lambda(u,x_1,x_{11},x_{12},x_2,x_{21},x_{22},\ldots,x_n,x_{n1},x_{n2}),d=0)$$

avec $|x_i| = |x_{i1}|+|x_{i2}|$. Des dérivations φ_i sont définies sur cette algèbre par la règle $\varphi_i(x_j) = x_{j1}x_{j2}$ si $i=j$, et 0 sinon.

Nous introduisons maintenant de nouvelles variables $y_1, \dots, y_n$ et z, avec $d(z) = \prod_i x_i^{N-1} \prod_{i,j} x_{ij}^{N-1} u^{nN}$ et $dy_i = x_{i1}x_{i2} \prod_{r,j} x_{rj}^{N-1}$. Les dérivations φ_i s'étendent à z et aux y_i par

$$\varphi_i(y_j) = 0 \text{ et } \varphi_i(z) = (N-1)x_1^{N-1} \dots x_i^{N-2} \dots x_n^{N-1} u^{nN} y_i.$$

Notons V l'espace vectoriel gradué engendré par les éléments $u, x_1, \dots, x_n$, $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{n2}, z, y_1, \dots, y_n$. Le degré de tout ces éléments est défini de sorte que l'algèbre de Lie $H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V, d))$ est engendrée par la classe des φ_i. Nous prouvons alors que $H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V, d))$ est isomorphe à F. Pour réaliser l'algèbre de Lie L, nous remarquerons que l'évaluation en z donne un isomorphisme entre $[F, F]$ et $H^{|z|}(\Lambda V, d)$. Nous définirons alors l'espace vectoriel $J = \oplus_r J_r$, avec J_r isomorphe à I_r et concentré en degré $|z| - r|u| - 1$. Rappelons que $I \subset [F, F]$ est le noyau de la projection $\pi : F \to L$. L'isomorphisme ci-dessus entre $[F, F]$ et $H^{|z|}(\Lambda V, d)$ est alors la clé pour la définition d'une différentielle d sur $\Lambda(V \oplus J)$ telle que $H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda(V \oplus J), d)) \cong L$.

L'algèbre $\Lambda(V \oplus J)$, ses générateurs et degrés

Proposition 5.1.1 *Soit N et n des nombres entiers. Il existe alors des entiers pairs m_0 et m_{ij}, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2\}$, et un nombre premier ℓ tels que*

1. *$m_0 \equiv 0$ mod ℓ, et $m_{ij} \equiv 0$ mod ℓ,*
2. *$n^2 N < m_0 < nNm_0 < m_{11} < m_{12} < m_{21} < m_{22} < \cdots < m_{n1} < m_{n2}$,*
3. *Si*

$$\sum_{ij} a_{ij}\, m_{ij} + a\, m_0 = \sum_{ij} b_{ij}\, m_{ij} + b\, m_0$$

avec $a_{ij}, a \in \{1, \dots, 2nN\}$, $b, b_{ij} \in \mathbb{N}$, alors $b_{ij} = a_{ij}$ pour tout i, j, et $b = a$.

Preuve : Choisissons des nombres premiers impairs $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{n2}$, ℓ tels que

$$8n^2 N < p_{11} < p_{12} < p_{21} < \cdots < p_{n1} < p_{n2} < \ell$$

et définissons les entiers m_0 et m_{ij} par les formules

$$\begin{cases} m_0 = 2p_{11}p_{12}\dots p_{n1}p_{n2}\,\ell \\ m_{i1} = 2nN\,(p_{11}+1)(p_{12}+1)\dots(p_{i1}+1)\,p_{i2}p_{(i+1)1}\dots p_{n1}p_{n2}\,\ell \\ m_{i2} = 2nN\,(p_{11}+1)(p_{12}+1)\dots(p_{i2}+1)p_{(i+1)1}\dots p_{n1}p_{n2}\,\ell \end{cases}$$

Les propriétés (1) et (2) sont triviallement satisfaites. Ecrivons $(0,0) = 0$, $a_{00} = a$ et $b_{00} = b$, et munissons l'ensemble $(0,0) \cup \{(i,j)|\, i = 1,\dots,n\,;\, j = 1,2\}$ de l'ordre lexicographique. Nous allons maintenant prouver la propriété (3) en effectuant une récurrence descendante sur les coefficients m_{ij}. Supposons que $a_{ij} = b_{ij}$ pour $(i,j) > (i_0,j_0)$. Nous pouvons donc éliminer ces termes de l'équation ci-dessus. Nous obtenons alors

$$a_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} \equiv 0 \bmod p_{i_0j_0}.$$

Comme $0 \le a_{i_0j_0} \le 2nN < p_{i_0j_0}$, il existe un entier $q \ge 0$ tel que

$$b_{i_0j_0} = a_{i_0j_0} + qp_{i_0j_0}.$$

Si $q \ge 1$, la condition $p_{i_0j_0} > 8Nn^2$ nous assure que

$$\sum_{(i,j)\le(i_0,j_0)} b_{ij}m_{ij} \ge b_{i_0j_0}\,m_{i_0j_0} \ge p_{i_0j_0}m_{i_0j_0} > 8Nn^2\,m_{i_0j_0} \ge \sum_{(i,j)\le(i_0,j_0)} a_{ij}m_{ij}$$

ce qui est absurde. □

Définissons V l'espace vectoriel gradué de base

$$\begin{cases} u, \quad |u| = m_0 \\ x_{ij}, i = 1,\cdots n;\ j = 1,2\,, \quad |x_{ij}| = m_{ij} \\ x_i\,, i = 1,\dots,n\,, \quad |x_i| = |x_{i1}| + |x_{i2}| \\ z\,, \quad |z| = (2(N-1)\sum_{k=1}^n |x_k|) + nN|u| - 1 \\ y_i\,, i = 1,\dots,n\,, \quad |y_i| = (N-1)(\sum_{i=1}^n |x_i|) + |x_j| - 1 \end{cases}$$

L'espace vectoriel J est la somme directe, $J = \oplus_{r\ge0}J_r$ où J_r est isomorphe à I_r comme espace vectoriel et est concentré en degré $|z|-r|u|-1$. Notons a_{rs} une base de J_r.

Pour étudier $H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda(V\oplus J),d))$, nous devons déterminer pour le degré p de chaque générateur, une base de l'espace vectoriel $(\Lambda(V\oplus J))^p$. Par définitions, les variables u, x_{ij} et x_i sont de degré pair et leurs degrés sont congruents à zero modulo ℓ. Les variables y_j et z sont de

degré impair, congruents à -1 modulo ℓ. Les variables a_{rs} sont de degré pair congruent à -2 modulo ℓ. Puisque $nN|u| < |x_{ij}|$ pour chaque i, j, nous avons la suite d'inégalités

$$|u| < |x_{ij}| < |y_t| < |a_{rs}| < |z| < |y_{t_1} y_{t_2}|\,.$$

Lemme 5.1.2 *Si $q = |x_{ij}|$, alors,*

$$(\Lambda V)^q = \mathbb{Q}.x_{ij}.$$

Preuve : Les seuls monômes de $(\Lambda V)^q$ du même degré que x_{ij} sont de la forme $\prod x_r \prod x_{ls}$. Supposons qu'il existe un tel monôme. En remplaçant x_r par $x_{r1}x_{r2}$, nous obtenons un monôme de la forme $\prod x_{ls}$ avec $(l, s) < (i, j)$ mais ceci est impossible par la Proposition 5.1.1(3). □

Tous les x_i sont dans des degrés différents et $|x_i| < |x_j|$ si $i < j$. Bien sûr, $|x_{i1}x_{i2}| = |x_i|$.

Lemme 5.1.3 *Si $q = |x_i|$, alors*

$$(\Lambda V)^q = \mathbb{Q}.(x_{i1}x_{i2}) \oplus \mathbb{Q}.x_i.$$

Preuve : Nous ne pouvons pas avoir en le degré des x_i des monômes de la forme $\prod x_{ls}$ autres que $x_{i1}x_{i2}$ parceque sinon, nous aurions que

$$|x_{i1}| + |x_{i2}| = |x_i| = \sum |x_{ls}|$$

avec au moins un (l, s) différent de $i_1$ou i_2, en contradiction avec la Proposition 5.1.1(3). En remplaçant les x_j par $x_{j1}x_{j2}$, nous voyons qu'il n'y a pas d'autre possibilité. □

Les y_j sont tous dans des degrés différents et $|y_i| < |y_j|$ si $i < j$.

Lemme 5.1.4 *Si $q = |y_i|$, alors,*

$$(\Lambda V)^q = \mathbb{Q}.y_i$$

Preuve : Puisque y_i est de degré impair, aucun produit des éléments x_i et x_{ij} ne peut être de degré q. Les seuls générateurs de degré impair sont les y_j et z. Puisque le produit de deux d'entre eux est de degré

strictement plus grand que le degré de y_i, les seuls monômes de degré q sont de la forme $y_j \prod x_{ls}$ avec $j \leq i$. Nous avons alors,

$$|x_{i1}| + |x_{i2}| = (\sum |x_{ls}|) + |x_{j1}| + |x_{j2}|$$

ce qui n'est seulement possible que si $j = i$ et $\prod x_{ls} = 1$ par la Proposition 5.1.1(3). □

Le générateur z est de degré impair congruent à -1 modulo ℓ. Tout monôme du même degré que z est un produit $\prod x_i^{n_i} \prod (x_{ri})^{\alpha_{ri}} y_j$ pour un certain j.

Lemme 5.1.5 *Les seuls monômes dans le degré de z sont z et les éléments de la forme*

$$u^{nN} \cdot y_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} (x_k^{r_k} (x_{k1} x_{k2})^{N - r_k - 1}) \cdot x_j^{r_j} (x_{j1} x_{j2})^{N-2-r_j} .$$

Tous les monômes sont obtenus en considérant tous les remplacements possibles de certains x_k par $x_{k1}x_{k2}$ dans $u^{nN} \cdot y_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} (x_k^{N-1}) \cdot x_j^{N-2}$.

Preuve : Supposons que

$$|z| = |\prod x_i^{n_i} \prod (x_{ri})^{\alpha_{ri}} \, y_j \, u^{\alpha}|.$$

Une fois de nouveau, quitte à remplacer $|x_i|$ par $|x_{i1}x_{i2}|$, on peut supposer que les n_i sont nuls. Nous avons alors,

$$(N-1)(\sum_{i=1}^{n} (|x_{i1}| + |x_{i2}|) + nN|u| = \sum \alpha_{rs} |x_{rs}| + \alpha |u| + |x_{j1}| + |x_{j2}|$$

Il s'ensuit alors par la Proposition 5.1.1(3) que $\alpha = nN$, $\alpha_{rs} = N - 1$ si $r \neq j$ et $\alpha_{js} = N - 2$. □

Lemme 5.1.6 *Les seuls monômes dans le degré d'un élément a_{rs} sont les monômes $a_{r's'} u^{r'-r}$ avec $r' \geq r$.*

Preuve : Puisque $|a_{rs}| \equiv -2 \bmod \ell$, les seuls monômes du même degré que a_{rs} ont la forme $a_{r's'} \prod_i x_i^{n_i} \prod_{i,j} x_{ij}^{n_{ij}} u^{n_0}$. Une fois encore, par la Proposition 5.1.1(3), les seules possibilités sont celles ci-dessus. □

L'algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ et l'algèbre de Lie $H_0(\mathbf{Der}_{\#}(\lambda V, d))$

Nous faisons de $(\Lambda V, d)$ une algèbre différentielle graduée en posant

$$\begin{cases} d(u) = d(x_i) = d(x_{ij}) = 0 \\ d(y_j) = \prod_{k=1}^{n} (x_{k1}x_{k2})^{N-1} \cdot x_{j1}x_{j2} \\ d(z) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x_{k1}x_{k2})^{N-1} \cdot u^{nN} \end{cases}$$

Nous définissons maintenant les dérivations $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de ΛV par

$$\varphi_i(x_i) = x_{i1}x_{i2}$$

$$\varphi_i(x_r) = 0, \quad i \neq r$$

$$\varphi_i(u) = \varphi_i(x_{rs}) = \varphi_i(y_j) = 0$$

$$\varphi_i(z) = (N-1)(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} x_k^{N-1}) \cdot x_i^{N-2} \cdot u^{nN} \cdot y_i$$

Les dérivations φ_i commutent avec d, et leurs images sont contenues dans $\Lambda^{\geq 2}(V)$. Les φ_i sont donc des cocycles dans le complexe $\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V)$,

$$\varphi_i \in Z_0\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V)\,.$$

Notons

$$a_r = (N-1)\,(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq r}}^{n} x_k^{N-1})\, x_r^{N-2}\, u^{nN}\, y_r\,.$$

Nous avons alors $\varphi_r(z) = a_r$.

Notons M la sous-algèbre de Lie de $Z_0\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V, d)$ engendrée par les φ_i. Sur z les dérivations ne commutent pas car

$$\varphi_i\varphi_j(z) = \varphi_i(a_j) \neq \varphi_j(a_i) = \varphi_j\varphi_i(z)\,.$$

Au contraire, sur les éléments a_j les dérivations commutent et le UM-

module engendré par a_j est donné par

$$\begin{aligned} UM \cdot a_j &= \frac{\mathbb{Q}[\varphi_i] \cdot a_j}{(\varphi_i^N, \varphi_j^{N-1})} \\ &= \bigoplus_{r_1, r_2, \cdots, r_n} u^{nN} \cdot y_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} x_k^{r_k} (x_{k1} x_{k2})^{N-r_k-1} \cdot x_j^{r_j} (x_{j1} x_{j2})^{N-2-r_j} \, \mathbb{Q} \, . \end{aligned}$$

Lemme 5.1.7 *1. L'action de M sur z induit une surjection $UM \to (\Lambda V)^{|z|}$.*

2. La restriction à $[M, M]$ induit un isomorphisme $[M, M] \to Z^{|z|}(\Lambda V, d)$.

3. $Z^{|z|}(\Lambda V, d) \cong H^{|z|}(\Lambda V, d)$ et une base de $Z^{|z|}(\Lambda V, d)$ est donnée par les éléments

$$\varphi_n^{\alpha_n} \ldots \varphi_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \varphi_i^{\alpha_i} (\varphi_i a_j - \varphi_j a_i), \; i < j,$$

avec $\alpha_i \leq N-2$, $\alpha_j \leq N-2$ et $\alpha_k \leq N-1$ pour $k \neq i, j$.

Preuve :
(1) Est une conséquence directe de la description ci-dessus de $UM \cdot a_j$.
(2) Puisque $[M, M]$ agit trivialement sur tous les générateurs excepté z, l'évaluation en z, $[M, M] \to (\Lambda V)^{|z|}$ est injective. Pour voir la surjectivité, nous devons montrer que les cocycles $[\varphi_i, \varphi_j](z) = \varphi_i a_j - \varphi_j a_i$, avec $i < j$, engendrent le noyau de d comme $\mathbb{Q}[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$-module. Rappelons ici que $\mathbb{Q}[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ agit par adjonction sur les a_j. En effet, notons L le sous-module engendré par ces éléments. Modulo L, tout élément peut s'écrire

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n + vz$$

avec $p_i \in \mathbb{Q}[\varphi_1, \ldots, \varphi_i]$ et $v \in \mathbb{Q}$. Si $d(p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n + vz) = 0$, alors, $v = 0$ et $d(p_n a_n) = 0$ puisque $d(p_n a_n)$ est le seul terme contenant $x_{n1} x_{n2}$ et donc $p_n = 0$. Nous montrons ainsi par récurrences que tous les p_i sont nuls. Par conséquent, l'application d induit une application $\overline{d} : \frac{(\Lambda V)^q}{L} \longrightarrow (\Lambda V)^{q+1}$ et l'application quotient $\overline{d}$ est injective, ce qui montre bien que les éléments $\varphi_i a_j - \varphi_j a_i$ forment un ensemble de générateurs.
(3) L'isomorphisme $Z^{|z|}(\Lambda V, d) \simeq H^{|z|}(\Lambda V, d)$ est une conséquence directe de l'égalité $(\Lambda V)^{|z|-1} = 0$. La relation

$$\varphi_s(\varphi_i a_j - \varphi_j a_i) = \varphi_i(\varphi_s a_j - \varphi_j a_s) - \varphi_j(\varphi_s a_i - \varphi_i a_s)$$

valide pour $s < i < j$ montre que les éléments

$$\varphi_n^{\alpha_n} \dots \varphi_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \varphi_i^{\alpha_i} (\varphi_i a_j - \varphi_j a_i),\ i < j,$$

avec $\alpha_i \leq N-2$, $\alpha_j \leq N-2$ et $\alpha_k \leq N-1$ pour $k \neq i, j$, forment un ensemble de générateurs de Ker d. Une combinaison linéaire de ces éléments peut s'écrire

$$\sum_{i<j} p_{ij}(\varphi_i a_j - \varphi_j a_i)$$

avec $p_{ij} \in \mathbb{Q}[\varphi_i, \dots, \varphi_n]$. Supposons que cette combinaison linéaire soit nulle. Le coefficient de a_j est $(\sum_{i,i<j} p_{ij} - \sum_{i,i>j} p_{ji})\varphi_i = 0$. Le coefficient de a_n est alors $\sum_{i,i<n} p_{in}\varphi_i = 0$ et le coefficient de φ_1 dans cette somme est $p_{1n}\varphi_1$. Il est donc nul et $p_{1n} = 0$. Dans le complément, le coefficient de φ_2 est nul, et donc $p_{2n} = 0$. Par induction, tous les p_{in} sont nuls. Nous supposons alors par récurrence que $p_{ij} = 0$, $j > r$. Nous considérons alors le terme en a_r et nous montrons que les p_{ir} sont nuls. □

Notons maintenant $\pi : Z_0\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V) \to H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V))$ la projection naturelle. Nous avons alors

Lemme 5.1.8 *L'inclusion naturelle $i : M \subset Z_0Der_{\#}(\Lambda V)$ et la projection $\pi : Z_0Der_{\#}(\Lambda V) \to H_0(Der_{\#}(\Lambda V))$ sont des isomorphismes.*

Preuve : Pour montrer que i est surjective, prenons une dérivation ψ qui commute à la différentielle et qui envoit V dans $\Lambda^{\geq 2}V$. Quitte a ajouter des dérivations dans l'algèbre de Lie M, on peut supposer que $\psi(x_{ij}) = \psi(x_i) = \psi(y_i) = 0$. En particulier, $\psi(z)$ est un cocycle. Par le lemme 5.1.7, on peut ajouter des éléments dans $[M, M]$ de sorte que $\psi(z) = 0$.

Remarquons que $(\Lambda V)^q = 0$ quand $q = |x_{ij}| \pm 1$ puisque alors q est congruent à ± 1 modulo ℓ et $q < |y_j|$. De façon similaire, $(\Lambda V)^q = 0$ quand $q = |z| - 1$ puisque alors q est congruent à -2 modulo ℓ et il n'existe pas d'élément de degré congruent à -2 modulo ℓ dans un degré $\leq |z|$. Dès lors, il n'y a pas de derivation de degré -1 et $Z_0\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V) \cong H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda V))$. □

Nous déduisons donc

Proposition 5.1.9 *(a) Le morphisme $\psi : F \to M$ qui envoit x_i sur φ_i est un isomorphisme d'algèbres de Lie. (b) L'évaluation en z induit un isomorphisme $[F,F] \to Z^{|z|}(\Lambda V, d) = H^{|z|}(\Lambda V, d)$.*

Preuve :
(a) Par définition ψ induit un isomorphisme entre les algèbres de Lie abélianisées. Avec les notations précédentes, $\psi\varphi(a_{ij}) = [\varphi_i, \varphi_j]$ et le Lemme 5.1.7(3) montre que ψ induit un isomorphisme entre $[F,F]$ et $[M,M]$.
(b) C'est une réécriture du Lemme 5.1.7(2). □

Construction de $(\Lambda(V \oplus J), d)$

Revenons à notre problème initial de réalisation pour l'algèbre de Lie L. Rappelons que I dénote le noyau de la projection $\pi : F \to L$. L'idéal I est contenu dans $[F,F]$ et nous avons défini I_r par $I_r = \Lambda^{\geq r}(x_1, \ldots, x_n) \cdot I / \Lambda^{r+1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot I$. Notons σ_r une section de la projection $\Lambda^{\geq r}(x_1, \ldots, x_n) \cdot I \to I_r$, et par I'_r son image. Nous avons alors des isomorphismes

$$\oplus_{r=r_0}^{nN} I'_r \cong \Lambda^{\geq r_0}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cdot I \,.$$

Construisons maintenant l'espace vectoriel J comme la somme directe $J = \oplus_{j \geq 0} J_r$ où J_r est un espace vectoriel isomorphe à I'_r,

$$\psi_r : J_r \to I'_r \,.$$

Nous supposons que J_r est concentré en degré $|z| - r|u| - 1$. Notons par a_{rs}, $s = 1, \ldots n_s$, une base de J_r et construisons l'élément

$$b_{r,s} = ev_z \circ \psi \circ \psi_r(a_{rs}) \,.$$

Nous définissons alors $d(a_{rs}) = \dfrac{b_{rs}}{u^r}$.
Par construction, nous avons $\varphi_i\psi(I'_r) \subset \psi(\oplus_{t>r} I'_t)$. En particulier, $\varphi_i(b_{rs}) = \sum_{t>r} c_t$ avec $c_t \in \psi(I'_t)$. La dérivation φ_i s'étend donc aux a_{rs} par la formule

$$\varphi_i(a_{rs}) = \sum_{t>r} u^{t-r} \cdot (ev_z \circ \psi \circ \psi_t)^{-1}(c_t) \,.$$

Les dérivations φ_i sont des cocycles dans le complexe $\mathrm{Der}_{\#}(\Lambda(V \oplus J), d)$. Nous avons donc

Proposition 3. *L'algèbre de Lie $H_0(Der_{\#}(\Lambda(V \oplus J), d))$ est isomorphe à L.*

Preuve : Si $q = |a_{rs}|$ pour certains r, s, alors, la restriction de d à $(\Lambda(V \oplus J))^q$ est injective par le Lemme 5.1.6. En effet, si ω est un cocycle du même degré que a_{rs},

$$p_{rs}a_{rs} + \sum p_{r's'}a_{r's'}u^{r'-r} ,$$

avec les p_{rs} et les $p_{r's'} \in \mathbb{Q}$. En multipliant par u^r, nous obtenons un cocycle de la forme $\sum p_{rs}a_{rs}u^r$. Ceci veut dire que $\sum p_{rs}b_{rs} = 0$, ce qui est impossible puisque les b_{rs} forment une famille linéairement indépendante.
Ceci montre que F est isomorphe à l'algèbre de Lie $Z_0\mathrm{D}er_{\#}(\Lambda(V \oplus J), d)$. Notons $q : F \to H_0(\mathrm{D}er_{\#}(\Lambda(V \oplus J), d))$ la projection. Une dérivation θ appartient au noyau de $q \circ \psi^{-1}$ si et seulement si il existe une dérivation ρ de degré -1 telle que $\theta = d\rho + \rho d$. Puisqu'il n'existe aucun élément de degré impair avant le degré des y_i, $\rho = 0$ sur les x_i. Il s'ensuit qu'un tel ρ existe si et seulement si il existe un élément $\rho(z)$ tel que $\theta(z) = d\rho(z)$. Mais ceci existe si et seulement si l'élément θ appartient à l'idéal $\psi(I)$. En d'autres termes, I est le noyau de q, et L est isomorphe à $H_0(\mathrm{D}er_{\#}(\Lambda(V \oplus J), d)$. □

□

6

Une nouvelle preuve d'un théorème de G. Lupton

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la conjecture d'Halperin en degré zéro. Rappelons que cette dernière peut s'énoncer de la façon suivante :

Conjecture : Si X est un F_0-espace, alors, le groupe $\varepsilon_{\#}(X)$ est un groupe fini.

Nous montrons tout d'abord que cette conjecture est vraie pour un F_0-espace dont la cohomologie rationnelle est le quotient d'un anneau de polynômes par des monômes, et ensuite pour un F_0-espace X dont la cohomologie $H^*(X,\mathbb{Q})$ possède moins de 3 générateurs, retrouvant ainsi le résultat de Lupton de [23].

6.1 Cas monomial

Si X est un F_0-espace dont la cohomologie rationnelle est de la forme

$$H^*(X,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_i]/I$$

où I est engendré par une suite régulière de monômes, alors, nécessairement I est engendré par des monômes de type $x_i^{m_i}$ avec $m_i \geq 2$. En effet, si $x_{i_0}^{m_{i_0}}$ n'apparaît pas dans la liste des générateurs de I, alors aucune puissance de x_{i_0} n'appartient à I et on a une surjection

$$\mathbb{Q}[x_i]/I \to \mathbb{Q}[x_{i_0}],$$

ce qui contredit le fait que $\mathbb{Q}[x_i]/I$ est de dimension finie. En particulier, un produit de sphères de degré pair est un espace de ce type.

Proposition 6.1.1 *Si X est un F_0-espace dont les relations polynomiales dans la cohomologie rationnelle sont des monômes, alors, le groupe $\varepsilon_\#(X)$ est un groupe fini.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathcal{L}(\varepsilon_\#(X)) = 0$. Le modèle de Sullivan d'un tel X est donné par

$$\mathcal{M}_X = (\Lambda(x_i, y_i), d)$$

avec $|x_i| = 2n_i$, $|x_i| \leq |x_j|$ pour $i \leq j$ et la différentielle définie par $dy_i = x_i^{m_i}$. Supposons que $\varphi \in Z_0(\mathrm{Der}_\#(\mathcal{M}_X))$.

Lemme 6.1.2 *Pour tout i, l'élément $\varphi(x_i)$ est nul dans $H^{|x_i|}(\Lambda(x_i, y_i), d)$.*

Preuve : Pour des raisons de degré, $\varphi(x_i) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}]$. Par définition de $Z_0(\mathrm{Der}_\#(\mathcal{M}_X))$,

$$\varphi(d(y_i)) = d(\varphi(y_i)) \Longleftrightarrow m_i x_i^{m_i-1}\varphi(x_i) = d(\varphi(y_i))$$

Par conséquent, $\varphi(x_i) = dw_i$ pour un certain $w_i \in \Lambda(x_i, y_i)$, ce qui prouve le lemme. □

La preuve du lemme montre que pour tout i, il existe un élément $z_i \in \Lambda(x_i, y_i)$ tel que $\varphi(y_i) = m_i x_i^{m_i-1} w_i + dz_i$. Définissons alors la dérivation ρ de degré -1 de $\Lambda(x_i, y_i)$ par

$$\begin{cases} \rho(x_i) = w_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p \\ \rho(y_i) = z_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p \end{cases}$$

On calcule directement que

$$[\rho d + d\rho](x_i) = \varphi(x_i)$$

et

$$[\rho d + d\rho](y_i) = \rho(x_i^{m_i}) + dz_i = m_i x_i^{m_i-1}\rho(x_i) + dz_i = m_i x_i^{m_i-1} w_i + dz_i = \varphi(y_i)$$

Par conséquent φ est nulle dans $H_0(Der_\#(\mathcal{M}_W))$ □

6.2 Equations différentielles fondamentales

Système homogène

Cette section est consacrée à la résolution d'une équation différentielle linéaire. La connaissance de ses solutions sera d'une grande importance pour la suite.

Soit n un entier fixé. Considérons des polynômes homogènes R_i dans $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{i-1}]$, $i = 2, \ldots, n$ avec $|R_i| = |x_i|$. Notons k le plus petit indice j avec $R_j \neq 0$ et considérons le sous-anneau $S = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, R_k^{-1}]$ des fractions rationnelles en les variables $x_1, \ldots, x_n$ formé de quotients $\frac{p(x_1,\ldots,x_n)}{R_k^q}$ avec $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ et $q \geq 0$. Les opérations $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\int dx_i$ sont des applications linéaires de S dans S de degré respectif $-|x_i|$ et $|x_i|$. Ici, $\int P dx_i$ désigne la primitive de P qui est multiple de x_i.

Proposition 6.2.1 *Les solutions homogènes dans $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, R_k^{-1}]$ de l'équation différentielle*

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.R_i = 0 \qquad (*)$$

forment l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[y_1, \ldots, \widehat{y_k}, \ldots, y_n][R_k^{-1}]$ avec

1. *$y_i = x_i$ si $R_i = 0$,*
2. *$y_k = x_k$,*
3. *$y_i = R_k x_i - J_i$ avec $J_i = \int R_i(y_1, \ldots, y_{i-1}) dy_k$ si $R_i \neq 0$ et $i \neq k$.*

Remarque 6.2.2 *Homogène dans l'énoncé signifie homogène par rapport aux graduations.*

Preuve : Montrons tout d'abord que pour $j \neq k$, on a $\sum_{i \leq j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.R_i = 0$. C'est vrai si $j < k$ car alors $i < k$ et $R_i = 0$.
Pour $j = k + 1$, $y_{k+1} = R_k x_{k+1} - \int R_{k+1} dy_k$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k+1} \frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_i}.R_i &= \frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_{k+1}} R_{k+1} + \frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_k} R_k \\ &= R_k R_{k+1} - R_{k+1} R_k = 0. \end{aligned}$$

Supposons donc le résultat vrai pour j' avec $k < j' < j$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} \frac{\partial J_j}{\partial x_i}.R_i &= \sum_{i<j} (\sum_{i \leq l} \frac{\partial J_j}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}) R_i \\ &= \sum_{\substack{l<j \\ l \neq k}} \frac{\partial J_j}{\partial y_l} (\sum_{i \leq l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}.R_i) + \frac{\partial J_j}{\partial y_k} R_k \\ &= \frac{\partial J_j}{\partial y_k}.R_k \quad \text{(par récurrence)} \\ &= R_j R_k \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\sum_{i\leq j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}R_i &= \frac{\partial y_j}{\partial x_j}.R_j+\sum_{i<j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.R_i\\ &= R_kR_j-\sum_{i<j}\frac{\partial J_j}{\partial x_i}.R_i=0\end{aligned}$$

Ceci montre que les y_j pour $j\neq k$ sont des solutions de l'équation $(*)$. D'autre part, l'équation $(*)$

$$0=\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}R_i=\sum_j\frac{\partial u}{\partial y_j}(\sum_{i\leq j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}R_i)$$

se réduit à $\frac{\partial u}{\partial y_k}=0$. Autrement dit, les solutions sont exactement les fonctions en les variables $y_1,\ldots,\widehat{y_k},\ldots,y_n$. Comme $y_i=x_i$, $i<k$, $R_k\in\mathbb{Q}[y_1,\ldots,y_{i-1}]$. La sous-algèbre engendrée par les y_i, $i\neq k$, est donc l'anneau $\mathbb{Q}[y_1,\ldots,\widehat{y_k},\ldots,y_n][R_k^{-1}]$. □

Clairement s'il y a exactement un seul R_i non nul, les solutions de l'équation homogène ci-dessus dans $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$ forment une sous-algèbre de polynômes de $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$. De plus, on a la proposition suivante :

Proposition 6.2.3 *Si $n=3$ et R_2,R_3 sont des polynômes non nuls, alors, les solutions homogènes dans $\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$ de l'équation différentielle*

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}.R_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}.R_3=0\qquad(FH)$$

forment une algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[x_1,z]$ avec $z\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$ un multiple de y_3, premier avec R_2.

Preuve : La construction de la proposition 6.2.1 montre que $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3=R_2x_3-\int R_3dy_2$. Ecrivons $y_3=x_1^pz$ avec $z\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$ non divisible par x_1. Les solutions u de (FH) sont donc les polynômes en x_1,x_2,x_3 contenus dans $\mathbb{Q}[x_1,x_1^{-1}][y_3]=\mathbb{Q}[x_1,x_1^{-1}][z]$. On a donc $u=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z},\gamma\in\mathbb{N}}c_{\alpha,\gamma}x_1^\alpha z^\gamma$. Considérons alors le minimum des α tel que $c_{\alpha,\gamma}$ soit non nul. Si $\alpha<0$, on a que $x_1^{-\alpha}.u=z^\gamma+x_1.Q$ avec Q un certain polynôme homogène. Et donc z est divisible par x_1, ce qui est absurde. □

Remarque : Pour $n\geq 4$, les solutions de (FH) ne forment pas en général une algèbre de polynômes. En effet, supposons $n=4$ et posons

$$R_2=x_1^2,\quad R_3=x_1x_2,\quad\text{ et }R_4=x_2^2$$

On calcule alors

$$y_3 = R_2 x_3 - \int (R_3) dy_2 = R_2 x_3 - \int (R_3) dy_2 = x_1^2 x_3 - \frac{x_1 x_2^2}{2}$$

et puisque R_4 ne contient pas la variable x_3,

$$y_4 = R_2 x_4 - \int (R_4) dx_2 = x_1^2 x_4 - \frac{x_2^3}{3}$$

Posons maintenant $z_3 = \frac{y_3}{x_1}$ et $z_4 = y_4$ de sorte que z_3 et z_4 ne soient pas divisible par x_1. On calcule directement que $t = \frac{1}{x_1}(z_3^3 + \frac{9}{8} z_4^2)$ est une solution qui n'est pas dans les polynômes en x_1, z_3 et z_4. De plus, en regardant les éléments donnés, les polynômes de degré inférieur à 3 en x_3, x_4 solutions de l'équation différentielle sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 en z_3, z_4 multiplié par toutes les puissances de x_1 auquel il faut ajouter le polynôme t. Il n'existe pas dans cet ensemble deux éléments qui avec x_1 engendreraient tous ces polynômes.

Système non homogène

Proposition 6.2.4 *Soit $R_2 \in \mathbb{Q}[x_1]$, $R_3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ et $S \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$, avec R_2 et R_3 des polynômes non nuls. Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}.R_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}.R_3 = S \quad (**)$$

Avec les notations de la proposition 6.2.2, notons $P = \int \frac{S}{R_2} dy_2$. Les solutions de $(**)$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3][R_2^{-1}]$ sont les sommes $P + u'$ avec $u' \in \mathbb{Q}[x_1, x_1^{-1}, z]$.

Preuve : Comme $y_3 = x_3 R_2 - \int R_3 dy_2$, on a $x_3 = \frac{y_3}{R_2} - \frac{1}{R_2} \int R_3 dy_2$. Dès lors, $\frac{\partial x_3}{\partial y_2} = \frac{R_3}{R_2}$. Dès lors l'équation $(**)$ devient dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3][R_2^{-1}]$,

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} R_2 = S.$$

Les solutions dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3][R_2^{-1}]$ sont donc de la forme $u = P + u'$ avec $P = \int \frac{S}{R_2} dy_2$ et $u' \in \mathbb{Q}[x_1, x_1^{-1}, y_3] = \mathbb{Q}[x_1, x_1^{-1}, z]$. □

Remarque : Il existe des solutions de $(**)$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ si et seulement si $S = AR_2 + BR_3$ avec $\frac{\partial A}{\partial x_3} = \frac{\partial B}{\partial x_2}$ (dans ce cas, la primitive de A par rapport à x_2 est solution). De plus, si dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ l'équation non homogène admet des solutions, alors elles sont toutes somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Notons v_0 la solution particulière non homogène trouvée dans le cas où on inverse x_1. Cette solution s'écrit $x_1^n.P$ où P est un polynôme en les variables x_1, x_2, x_3 non divisible par x_1. Si $n \geq 0$, on peut poser $u_0 = v_0$ et on a une solution particulière dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$. Dans le cas contraire $n < 0$, on aura une solution particulière s'il existe un polynôme Q en x_1, z tel que $Q + P$ est divisible par $x_1^{n'}$ avec $n = -n', n' > 0$.

Exemple : Prenons $R_2 = x_1^2$, $R_3 = x_2^2$ et $S = 2x_2^2x_3$. On sait qu'une solution particulière de $(**)$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3][R_2^{-1}]$ est donnée par

$$\begin{aligned} v_0 &= \int \frac{S}{R_2} dy_2 \\ &= \frac{1}{x_1^2} \int 2y_2^2(y_3 + \frac{y_2^3}{3}) dy_2 \\ &= \frac{1}{x_1^4}[\frac{2}{3}x_1^2x_2^3x_3 - \frac{x_2^6}{9}] \end{aligned}$$

Dans ce cas, $v_0 = x_1^{-4}.P$ avec $P = \frac{2}{3}x_1^2x_2^3x_3 - \frac{x_2^6}{9}$. Maintenant, Un calcul direct montre que $P + z^2 = x_1^4x_3^2$. Dès lors, x_3^2 est une solution particulière de $(**)$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$.

6.3 F_0-espace à cohomologie rationnelle à moins de 3 générateurs

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 6.3.1 *Si X est un F_0-espace dont la cohomologie rationnelle possède moins de trois générateurs, alors, $\varepsilon_{\#}(X)$ est un groupe fini.*

Preuve : Nous allons prouver ce théorème pour un F_0-espace X dont la cohomologie rationnelle possède 3 générateurs, les cas avec moins de générateurs étant plus simples. Nous savons que le modèle minimal de X est de la forme $\mathcal{M}_X = (\Lambda V_0 \otimes \Lambda V_1, d)$ avec $V_0 = \mathbb{Q}\{x_1, x_2, x_3\}$, $|x_i|$ pair, $V_1 = \mathbb{Q}\{y_1, y_2, y_3\}$, $d(y_i) = P_i$. Puisque toute permutation d'une suite régulière de polynômes est encore une suite régulière, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $|P_i| \leq |P_j|$ si $i \leq j$. Nous pouvons aussi supposer que $|x_i| \leq |x_j|$ si $i \leq j$.

Lemme 6.3.2 *Si $q = |x_i|$, $Z^q(\mathcal{M}_X) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_i]$.*

Preuve : Puisque q est un nombre pair et $|x_i| \geq |x_{i-1}|$, les polynomes de degré q sont de la forme $z = A + \alpha_1 y_1 y_2 + \alpha_2 y_2 y_3 + \alpha_3 y_3.y_1$ avec $A \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_i]$ et les $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Par régularité de la suite P_1, P_2, P_3, l'un des polynômes P_j est de la forme $P_j = x_i^N + \cdots$, avec $N \geq 2$. Par conséquent, puisque $|P_j| = |y_j| + 1 \geq 2|x_i|$, on a que $z = A + \alpha y_1 y_2$. Maintenant, si $dz = 0$, on doit avoir que $\alpha(P_1 y_2 - y_1 P_2) = 0$, ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$. □

Lemme 6.3.3 *Si $q = |y_i|$, $H^q(\mathcal{M}_X) = 0$.*

Preuve : Puisque q est un nombre impair, les seuls polynomes décomposables de degré q sont de la forme $z = \sum_{j=1}^{i-1} w_j y_j$ avec $w_j \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$. Si $dz = 0$, on a $\sum_{j=1}^{i-1} w_j P_j = 0$. Dès lors, pour $i = 1, 2$, on trouve que $z = 0$. Pour $i = 3$, la régularité de la suite P_1, P_2 nous assure que $z = \alpha(P_2 y_1 - P_1 y_2)$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$. Par conséquent, $z = d(\alpha y_2 y_1)$. □

Supposons que $\theta \in Z_0(\mathrm{Der}_{\#}(\mathcal{M}_X))$, alors, par définition, $d(\theta(x_i)) = \theta(d(x_i)) = 0$. Par le lemme 6.3.2, $\theta(x_i) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{i-1}]$, avec en particulier, $\theta(x_1) = 0$. Nous allons montrer que $\theta = 0$ dans $H_0(\mathrm{Der}_{\#}(\mathcal{M}_X))$. Posons $\theta(x_i) = R_i$.

Lemme 6.3.4 *Si $R_i = 0$ dans $\frac{\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]}{(P_1,P_2,P_3)}$, alors, $\theta = 0$ dans $H_0(Der_{\#}(\mathcal{M}_X))$.*

Preuve : Supposons $\theta(x_i) = dz_i$ et définissons la dérivation ρ de degré -1 par $\rho(x_i) = z_i$ et $\rho(y_i) = 0$. La dérivation $\theta' = \theta - (d\rho + \rho d)$ est nulle sur les x_i. En remplaçant θ par θ', on peut donc supposer $\theta(x_i) = 0$ pour tout i. Puisque $d(\theta(y_i)) = \theta(d(y_i)) = \theta(P_i) = 0$, $\theta(y_i)$ est un cocycle. Par le lemme 6.3.3, $\theta(y_i) = d(z_i)$. Considérons alors la dérivation ρ de $\mathcal{M}_X$ de degré -1 définie par $\rho(x_i) = 0$ et $\rho(y_i) = z_i$. On a clairement $(\rho d + d\rho)(x_i) = 0 = \theta(x_i)$ et $(\rho d + d\rho)(y_i) = d(z_i) = \theta(y_i)$. □

Proposition 6.3.5 *Les polynômes R_i appartiennent à l'idéal engendré par P_1, P_2, P_3. Ils sont donc nuls dans le quotient $\frac{\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]}{(P_1,P_2,P_3)}$.*

Preuve : Cas n^{0}1 : Supposons qu'un seul des R_i soit non nul, disons R_j. Pour des raisons de degré, $\theta(y_i) = \sum_{j=1}^{i-1} w_{ij} y_j$. Puisque $\theta(y_1) = 0$ et $\theta \in Z_0(\mathrm{Der}\#(\mathcal{M}_X))$

$$0 = \theta(P_1) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P_1}{\partial x_i} R_i$$

on en déduit que $\frac{\partial P_1}{\partial x_j} = 0$ et que $P_1 \in \mathbb{Q}[\{x_1, x_2, x_3\}/\{x_j\}]$.
Si $w_{21} = 0$, alors, $P_2 \in \mathbb{Q}[\{x_1, x_2, x_3\}/\{x_j\}]$. La régularité de la suite P_1, P_2, P_3 nous assure alors que le polynôme P_3 est de la forme $x_j^N + V$, avec V de degré $< N$ en x_j. Puisque $\theta \in Z_0(\mathrm{Der}_{\#}(M))$, $\theta(P_3)$ appartient à l'idéal I engendré par P_1 et P_2 et comme

$$\theta(P_3) = \frac{\partial P_3}{\partial x_j} R_j = (N x_j^{N-1} + \frac{\partial V}{\partial x_j}) R_j,$$

$R_j \in I$ c'est-à-dire, $R_j = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$.
Supposons que w_{21} soit non nul, et écrivons P_2 sous la forme $P_2 = \sum_{i=0}^{n} U_i x_j^i$ avec $U_i \in \mathbb{Q}[\{x_1, x_2, x_3\}/\{x_j\}]$. Puisque $\theta d(y_2) = d\theta(y_2)$, nous avons

$$(\sum_{i=1}^{n} i U_i x_j^{i-1}) R_j = w_{21} P_1.$$

Par conséquent, $P_1 = T.S$ avec T divisant U_i pour $i \geq 1$ et S maximal divisant R_j. On suppose $T \notin \mathbb{Q}$ et donc $U_n \notin \mathbb{Q}$. Comme la suite P_1, P_2 est régulière, $U_0 \neq 0$. En effet, autrement, $P_2 = bT$ et donc $bP_1 = SP_2$ contredisant la régularité de la suite. On remarque aussi que $n > 0$ car autrement $P_1 = 0$. D'autre part la suite P_1, P_2, P_3 étant régulière, on a forcément,

$$P_3 = (\sum_{i=0}^{m-1} V_i x_j^i) + x_j^m.$$

La condition $\theta(P_3) = w_{31} P_1 + w_{32} P_2$ donne

$$((\sum_{i=1}^{m-1} i V_i x_j^{i-1}) + m x_j^{m-1}) R_j = w_{31} P_1 + w_{32} P_2 \qquad (**)$$

Comme $n > 0$ et $U_n \notin \mathbb{Q}$, $|U_0| = |P_2| > |x_j|$. Maintenant observons que $w_{31} P_1 + w_{32} P_2 = w_{31} T.S + w_{32} U_0 + w_{32}.T.b$. Par conséquent $(**)$ peut s'écrire

$$((\sum_{i=1}^{m-1} i V_i x_j^{i-1}) + m x_j^{m-1}) R_j = w_{31} T.S + w_{32} U_0 + w_{32}.T.b$$

Puisque $U_0 \in \mathbb{Q}[\{x_1, x_2, x_3\}/\{x_j\}]$ et $|U_0| > |x_j| = |R_j|$, $w_{32} U_0$ est un polynôme de degré $< m - 1$ en x_j. Par conséquent, en identifiant les coefficients du polynôme x_j^{m-1}, nous obtenons que T divise R_j.
Comme (P_1, P_2) forme une suite régulière, U_0 et T ne peuvent avoir aucun facteur commun. En conséquence, T divise w_{32}.
D'autre part, comme S était le pgcd de P_1 et R_j, comme T divise R_j, T divise S.

En conséquence T^2 divise le coefficient de x_j^{m-1} à droite. Il divise donc R_j, et par ricochet S et w_{32}. Il s'ensuit que T^3, $T^4, \ldots$ divise R_j. Ceci n'est possible que si $T \in \mathbb{Q}$, auquel cas P_1 divise R_j.

Cas n^{0}2 :
Supposons que R_2 et R_3 soient tous les deux non nuls. Si R_2 divise R_3 alors, en effectuant le changement de variable

$$x_3' = x_3 - \int (\frac{R_3}{R_2}) dx_2, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2$$

on se ramène à étudier les dérivations de la forme $\theta(x_1') = 0$, $\theta(x_2') = R_2$ et $\theta(x_3') = 0$. On est donc ramené au cas n^{0}1.
Notons $P_1 = x_1^n \overline{P_1}$ avec $\overline{P_1}$ non divisible par x_1. Si R_2 ne divise pas R_3, alors notons x_1^m leur pgcd

$$R_2 = x_1^m \overline{R_2}; \quad R_3 = x_1^m \overline{R_3}.$$

Dans ce cas les solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} R_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} R_3 = 0$$

sont $\mathbb{Q}[x_1, z]$ avec $z = \overline{R_2} x_3 - \int \overline{R_3} dx_2$. Le polynôme $P_1 \in \mathbb{Q}[x_1, z]$.

Lemme 6.3.6 *Le polynôme P_2 peut s'écrire sous la forme*

$$P_2 = Q + \overline{P_1} P,$$

avec $Q \in \mathbb{Q}[x_1, z]$, $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$.

Preuve : Le polynôme P_2 est somme d'une solution particulière $\overline{P_1} \int \frac{w_{21}}{x_1^n R_2} dy_2$ et d'une solution de l'équation homogène appartenant à $\mathbb{Q}[x_1, z][x_1^{-1}]$. On peut donc écrire

$$P_2 = \frac{Q}{x_1^r} + \frac{\overline{P_1} P}{x_1^s}$$

avec $Q \in \mathbb{Q}[x_1, z]$ et $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ des polynômes non divisibles par x_1. Si $r \leq 0$, alors $s \leq 0$ et on a le résultat.
Comme P_2 est un polynôme $r = s$. Ecrivons $Q = z^p + \cdots$ et $\overline{P_1} = z^q + \cdots$ Pour des raisons de degré $p \geq q$. Dès lors

$$Q + \overline{P_1} P = (Q - z^{p-q} \overline{P_1}) + \overline{P_1} (P + z^{p-q}).$$

De nouveau pour des raisons de degré $Q - z^{p-q} \overline{P_1}$ et en conséquence $P + z^{p-q}$ sont divisibles par x_1. On continue par récurrence. □

Considérons tout d'abord le cas particulier $P_1 = x_1^N$, on peut supposer $|R_2| < |P_1|$. L'équation

$$\frac{\partial P_2}{\partial x_2} R_2 + \frac{\partial P_2}{\partial x_3} R_3 = w_{21} P_1$$

nous assure que $\frac{\partial P_2}{\partial x_3} = \overline{R_2} A$. En conséquence $P_2 = x_2^r + x_1 V$.
Si $V = 0$, on déduit de l'équation ci-dessus

$$p x_2^{p-1} R_2 = w_{21} P_1,$$

ce qui est absurde. Par régularité de la suite (P_1, P_2, P_3), $P_3 = x_3^N + \cdots$.
On considère alors le terme en x_3^{N-1}, dans l'équation

$$\frac{\partial P_3}{\partial x_2}\overline{R_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\overline{R_3} = w_{31}.\frac{P_1}{x_1^m} + \frac{w_{32}}{x_1^m} P_2.$$

Si $|P_2| > |\overline{R_3}|$, on déduit que x_1 divise $\overline{R_3}$, ce qui est absurde. Par contre si $|P_2| \leq |\overline{R_3}|$, alors, P_2 est un polynôme en x_1 et x_2 et on a

$$\frac{\partial P_2}{\partial x_2} R_2 = w_{21} P_1$$

Ce qui montre que P_1 divise R_2 en contradiction avec l'hypothèse $|R_2| < |P_1|$. On peut donc supposer que P_1 n'est pas une puissance de x_1.
Comme l'un des 3 polynômes P_1, P_2 ou P_3 doit contenir un terme de la forme αx_3^m, $\alpha \in \mathbb{Q}$, ce doit être P_3. Supposons donc que $P_3 = x_3^m + \sum_{i=0}^{m-1} V_i x_3^i$.
Appliquons le lemme 6.3.6 ; Le polynôme P_2 s'écrit $P_2 = Q + P\overline{P_1}$ avec $Q \in [x_1, z]$ et $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$. On a alors

$$\frac{\partial P_3}{\partial x_2}\overline{R_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\overline{R_3} = \frac{w_{31} P_1 + w_{32} P_2}{x_1^m} = \frac{w'\overline{P_1} + w''\overline{Q}}{x_1^r}, \quad r \leq m,$$

avec w' et w'' non divisibles par x_1, $\overline{Q} \in \mathbb{Q}[x_1, z]$. Ecrivons $\overline{P_1} = z^q + \ldots$ et $\overline{Q} = z^l + \ldots$. Si $q \geq l$, alors

$$w'\overline{P_1} + w''\overline{Q} = w'(\overline{P_1} - z^{q-l}\overline{Q}) + \overline{Q}(w'' + w' z^{q-l}).$$

Puisque $|z| > |x_3| \geq |x_2| \geq |x_1^{r+1}|$, $\overline{P_1} - z^q$ et $\overline{Q} - z^l$ sont divisibles par x_1^{r+1} et il en est de même pour $\overline{P_1} - z^{q-l}\overline{Q}$. En conséquence

$$\frac{\partial P_3}{\partial x_2}\overline{R_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\overline{R_3} = x_1 A + BQ.$$

On regarde le terme en x_3^{m-1}. Si $\overline{Q}$ n'est pas constante, il contient des terme en z et son terme dominant est divisible par x_1. Dans ce cas, $\overline{R_3}$ est

divisible par x_1, ce qui est absurde. En conséquence, on peut supposer $Q = x_1^\alpha$. Donc $P_2 = x_1^\alpha + \overline{P_1}P$. Or $|x_1^\alpha| \geq |P_1| > |x_2|$. On a donc

$$\frac{\partial P_3}{\partial x_2}\overline{R_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\overline{R_3} = \frac{w_{31}}{x_1^n}\overline{P_1} + x_1 A.$$

De nouveau, en considérant le terme x_3^{m-1}, on déduit que x_1 divise $\overline{R_3}$, ce qui est absurde.
Lorsque $q \leq l$, on effectue la transformation

$$w'\overline{P_1} + w''\overline{Q} = w''(\overline{Q} - z^{l-q}\overline{P_1}) + \overline{P_1}(w' + w''z^{l-q})$$

et le même raisonnement permet de conclure.

Bibliographie

[1] Ancochea, J.M., Goze, M., *Classification des algebres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7,* Arch. Math., 52 (1989), 175 – 185.

[2] Arkowitz M., *The group of self-homotopy equivalences-A survey* Lectures Notes in Mathematics, 1425, Springer-Verlag, pp. 170-203.

[3] Arkowitz M., Lupton G., Murillo A., *Subgroups of the Group of Self-Homotopy Equivalences*, Contempory Mathematics Volume 274, (2001), 21-32.

[4] Arkowitz, M., Curjel, C, *Groups of homotopy Classes,* Springer Lecture Notes in Mathematics, 4 (1964).

[5] Arkowitz M., Lupton G., *On Finiteness of Subgroups of Self-Homotopy Equivalences,* Contemporary Mathematics Volume 181, (1995), 1-25.

[6] Arkowitz M.and Lupton G., *Rational obstruction theory and rational homotopy sets,* Math. Z., 235 (2000), 525-539.

[7] Arkowitz, M., *Problems on Self-homotopy equivalences,* Contemporary Mathematics, 274, (2001), 309-315.

[8] Arkowitz M. and Lupton G., *On the nilpotency of subgroups of self-homotopy equivalences,* BCAT 94 conference, Progress in Math 136, Birkhauser 1996, 1-22.

[9] Barcus W., Barratt M., *On the Homotopy Classification of the Extensions of a Fixed Map,* Trans. A.M.S. 88 (1958), 57-74.

[10] Birkoff, G., *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices*, Ann. Math. (2) 38 (1937), 526-532.

[11] [Bourbaki, N.] *Groupes et algèbres de Lie, Chap. 2-3* Paris : Hermann, 1972.

[12] Deligne P., Griffiths P., Morgan J., Sullivan D., *Real homotopy theory of Kähler manifolds,* Inventiones 29 (1975), 245-274.

[13] Federinov J., Felix Y., *Realization of 2-solvable nilpotent groups as groups of classes of homotopy self-equivalences,* Topology and its Applications 154 (2007), 2425-2433.

[14] Felix Y., Halperin S., . Thomas J.C, *Rational Homotopy Theory,* Graduate Text in Mathematics 205, Springer-Verlag, 2000.

[15] Goze, M., Khakimdjanov, Y., *Nilpotent Lie Algebras,* Kluwer Academic Publisher, Dordretch, The Netherlands, 1996.

[16] De Graaf, W. A. , *Classification of solvable Lie Algebras*, Experimental Mathematics, Vol. 14(2005), No. 1.

[17] Dror-Farjoun E., Zabrodsky A., *Unipotency and nilpotency in homotopy equivalences,* Topology 18 (1979), 187-197.

[18] Hall, P., *Nilpotent groups,* Canad. Math. Congr. Summer Seminar, Univ. of Alberta, 1957.

[19] Halperin S., *Finiteness in the minimal models of Sullivan,* Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 269-331.

[20] Hilton P.J., Mislin G., Roitberg J., *Localization of nilpotent groups and spaces,* Notas de Matematica, 15, North Holland, 1975.

[21] Jacobson N., *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962.

[22] Kahn D., *Realization Problems for the Group of Self-Homotopy Equivalences,* Math. Ann. 230 (1976), 37-46.

[23] G. Lupton, *A note on the conjecture of S. Halperin*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1440, Springer-Verlag (1990), 148-163.

[24] Mal'cev A.I., *Nilpotent torsion-free groups,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 13 (1949) 201-212 (Russian)

[25] Markl M., *Towards one conjecture on collapsing of the Serre spectral sequence*, Supplemento di Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 22, (1989), 151-159.

[26] Maruyama K.I, *Localization of a certain subgroups of self-homotopy equivalences,* Pac. J. of Math. 136 (1989), 293-301.

[27] Maruyama K.I, *Finiteness properties of self-homotopy equivalences inducing the identity on homology,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108 (1990), 291-297.

[28] Meier W., *Rational universal fibrations and flag manifolds*, Math. Ann. 258 (1982), 329-340.

[29] Neisendorfer J., Miller T., *Formal and coformal spaces,* Illinois J. Math., 22 (1978), 565-580.

[30] Piccarreta S., *Rational nilpotent group as subgroups of self-homotopy equivalences,* Cahiers de topologie et geometrie différentielle catégorique, Volume XLII-2 (2001), 137-151.

[31] Plotkin B., *Algebraic logic, varieties of algebras and algebraic varieties,* Proc. Int. Alg. Conf., St. Petersbourg, 1995, Walter Gruyter, New York, London, (1999), pp. 189-271.

[32] Reutenauer C., *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs New series-7, Oxford Science Publication.

[33] Salvatore P., *Rational homotopy nilpotency of self-equivalences,* Topology and its Applications 77 (1997) 37-50.

[34] Stewart I.N, *An algebraic treatment of malcev theorems concerning nilpotent Lie groups and their Lie Algebras*, Compositio Mathematica, tome 22, n^0 3 (1970), p. 289-312.

[35] Shiga H. and Tezuka M., *Rational fibrations, homogeneous spaces with positive Euler characteristic and Jacobians*, Ann. Inst. Fourier 37 (1987), 81-106. 269-331.

[36] Smith S. B., *Rational L.S. Category of Function Space Components for F_0-Spaces*, Bull. Belg. Math. Soc. 6(1999), 295-304.

[37] Sullivan D., *Infinitesimal computations in topology*, Publi. Math. IHES 47 (1977), 269-331.

[38] Tanré D., *Homotopie rationnelle : modeles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes in Math. 1025. (Springer, Berlin, 1983).

[39] Whitehead G. W., *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.