A propos des conditions aux limites employées dans l'étude de ventilation de Bendtsen et al. (*JMS*, 2009)

Eric Deleersnijder, le 9 mai 2017

Motivation

Bendtsen et al. (2009) ont utilisé CART[1] pour une étude numérique de ventilation (au sens large du terme) dans la zone de transition entre la mer du Nord et la Baltique. Anne Mouchet (voir note de travail d'avril 2017 en annexe du présent document) critique certaines des conditions aux limites de l'étude précitée, plus particulièrement celles employées pour étudier l'âge de l'eau de surface (voir note de travail précitée).

Les conditions aux limites au fond et à la surface ne posent aucun problème: elles sont d'ailleurs identiques à employées par Deleersnijder et al. (2001) à l'occasion de l'étude de ventilation effectuée en examinant la pénétration d'eau de surface dans l'Océan Mondial.

Certaines des frontières latérales de Bendtsen et al. (2009) sont ouvertes: sur ces frontières, ils imposent que la concentration du traceur passif étudié (supposé représenter l'eau de surface) soit nulle, ce qui signifie qu'une particule touchant une de ces frontières ouvertes cesse d'appartenir à l'eau de surface. Par contre, pour la concentration d'âge, ils imposent que le gradient normal à la frontière soit nul. Par conséquent, la concentration d'âge n'est pas forcément nulle sur la frontière, ce qui implique que l'âge pourrait tendre vers l'infini. Cette anomalie a été remarquée par Anne Mouchet (voir sa note de travail précitée): l'âge pourrait, à l'intérieur du domaine (ou, à tout le moins, dans une partie de celui-ci), être supérieur au temps écoulé, ce qui est évidemment absurde.

Si je souscris largement aux commentaires et critiques d'Anne Mouchet, j'ai l'impression qu'il faudrait tenter de tirer des leçons plus générales de l'étude de Bendtsen et al. (2009). En effet, la concentration et la concentration d'âge ne sont pas indépendantes, ce qui implique que les conditions aux limites imposées à ces variables ne peuvent pas être indépendantes. Par ailleurs, on n'a pas encore beaucoup réfléchi à la construction de conditions de radiation appropriées pour CART, une lacune qu'il faudra combler un jour ou l'autre.

Cette note de travail vise à documenter ce que je crois être une approche erronée de Bendtsen et al. (2009) et à tenter d'en tirer les leçons appropriées.

Variables principales de CART

Il est primordial de se rappeler que ni la concentration $C(t,\mathbf{x})$ ni la concentration d'âge $\alpha(t,\mathbf{x})$ ne sont des variables primitives de CART. Elles dérivent de la fonction de distribution de l'âge $c(t,\mathbf{x},\tau)$:

[1] Constituent-oriented Age and Residence time Theory (CART, www.climate.be/cart_flyer).

$$C(t,\mathbf{x}) = \int_0^\infty c(t,\mathbf{x},\tau)\, d\tau \tag{1}$$

et

$$\alpha(t,\mathbf{x}) = \int_0^\infty \tau\, c(t,\mathbf{x},\tau)\, d\tau \quad . \tag{2}$$

Selon l'*age averaging hypothesis* (Deleersnijder et al. 2001), l'âge moyen vaut

$$a(t,\mathbf{x}) = \frac{\alpha(t,\mathbf{x})}{C(t,\mathbf{x})} = \frac{\int_0^\infty \tau\, c(t,\mathbf{x},\tau)\, d\tau}{\int_0^\infty c(t,\mathbf{x},\tau)\, d\tau} \quad . \tag{3}$$

Comme l'expliquent Delhez et al. (1999) et Deleersnijder et al. (2001), il n'est pas conseillé de résoudre directement l'équation pour l'âge. Il est préférable de résoudre d'abord l'équation pour la concentration (on l'aurait probablement fait de toute façon) et l'équation pour la concentration d'âge. Finalement, on obtiendra l'âge moyen en utilisant (3).

Compatibilité des paires de conditions aux limites

Même si l'on se contente de l'âge moyen (et que l'on ne calcule donc pas explicitement la fonction de distribution), il est souhaitable d'écrire d'abord les conditions aux limites que l'on imposerait pour résoudre l'équation pour la fonction de distribution. Il semble naturel de s'en tenir à des expressions linéaires en la fonction de distribution et son gradient. En effet, jusqu'ici, aucune application de CART n'a requis l'emploi de conditions aux limites non linéaires. Si Γ désigne la frontière du domaine, alors une expression relativement générale de la condition aux limites s'écrit

$$\left[\boldsymbol{\gamma}\bullet\nabla c + \lambda c + \mu\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = 0 \ , \tag{4}$$

où $\boldsymbol{\gamma}(t,\mathbf{x})$ est un vecteur approprié, tandis que $\lambda(t,\mathbf{x})$ et $\mu(t,\mathbf{x},\tau)$ sont des fonctions scalaires dont la forme dépend de la nature de la condition que l'on impose.

Pour obtenir la condition à imposer sur la concentration, on intègre (4) sur l'âge et on utilise la relation (1). Il vient ainsi

$$\left[\boldsymbol{\gamma}\bullet\nabla C + \lambda C + \int_0^\infty \mu(t,\mathbf{x},\tau)\, d\tau\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = 0 \quad . \tag{5}$$

On applique un procédé semblable à la concentration d'âge:

$$\left[\boldsymbol{\gamma}\bullet\nabla \alpha + \lambda \alpha + \int_0^\infty \tau\,\mu(t,\mathbf{x},\tau)\, d\tau\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = 0 \quad . \tag{6}$$

Une simple inspection des formules (5) et (6) suggère que les conditions en mer ouverte de Bendtsen et al. (2009) ne sont pas compatibles avec (5) et (6). La condition de Bendtsen et al. (2009) pour la concentration suggère $\boldsymbol{\gamma}(t,\mathbf{x}) = 0$, $\lambda(t,\mathbf{x}) \neq 0$ et $\mu(t,\mathbf{x},\tau) = 0$, de telle sorte

que la concentration soit nulle sur la frontière. Mais, pour la concentration d'âge, il faudrait poser $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n}$ (où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la frontière) et $\lambda(t,\mathbf{x}) = 0 = \mu(t,\mathbf{x},\tau)$. Il semble impossible de déduire les conditions en mer ouverte de Bendtsen et al. (2009) de (4).

Par contre, on peut établir facilement des paires de conditions aux limites fréquemment utilisées qui sont également compatibles avec (4).

Exemples de paires compatibles de conditions aux limites

Si δ représente l'impulsion de Dirac, on obtient une condition de Dirichlet en posant $\boldsymbol{\gamma}(t,\mathbf{x}) = 0$, $\lambda(t,\mathbf{x}) = 1$ et

$$\mu(t,\mathbf{x},\tau) = -C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})\,\delta[\tau - a^{\Gamma}(t,\mathbf{x})] \quad , \tag{7}$$

où, comme va le voir, $C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})$ est la concentration imposée sur la frontière tandis que $a^{\Gamma}(t,\mathbf{x})$ est l'âge associé. Ainsi, en utilisant (4), il vient

$$\left[C(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; \int_0^{\infty} C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})\,\delta[\tau - a^{\Gamma}(t,\mathbf{x})]\,d\tau \;=\; C^{\Gamma}(t,\mathbf{x}) \tag{8}$$

et

$$\left[\alpha(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; \int_0^{\infty} \tau\, C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})\,\delta[\tau - a^{\Gamma}(t,\mathbf{x})]\,d\tau \;=\; C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})\,a^{\Gamma}(t,\mathbf{x}) \quad . \tag{9}$$

A l'évidence, on peut prescrire (comme c'est souvent le cas) que l'âge est nul sur la frontière en imposant $a^{\Gamma}(t,\mathbf{x}) = 0$.

Si $\mathbf{K}$ et $\mathbf{v}$ désignent respectivement le tenseur des diffusivités et la vitesse, alors en posant $\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{n}\bullet\mathbf{K}$, $\lambda = \mathbf{n}\bullet\mathbf{v}$ et $\mu = 0$, il vient aisément

$$\left[\mathbf{n}\bullet(-\mathbf{K}\bullet\nabla C + \mathbf{v}C)\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; 0 \tag{10}$$

et

$$\left[\mathbf{n}\bullet(-\mathbf{K}\bullet\nabla\alpha + \mathbf{v}\alpha)\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; 0 \quad . \tag{11}$$

Ce sont des conditions dites de “flux normal nul”. De la même manière, si l'on pose $\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{n}\bullet\mathbf{K}$, $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, on impose alors que le flux diffusif traversant la frontière soit nul:

$$\left[-\mathbf{n}\bullet(\mathbf{K}\bullet\nabla C)\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; 0 \tag{12}$$

et

$$\left[-\mathbf{n}\bullet(\mathbf{K}\bullet\nabla\alpha)\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; 0 \quad . \tag{13}$$

On obtient une condition de Robin en posant $\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{n}\bullet\mathbf{K}$, $\lambda(t,\mathbf{x}) = -\chi(t,\mathbf{x})$ et

$$\mu(t,\mathbf{x},\tau) = \chi(t,\mathbf{x})\,C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})\,\delta[\tau - a^{\Gamma}(t,\mathbf{x})] \quad , \tag{14}$$

où $\chi(t,\mathbf{x})$ (≥ 0) est la *piston velocity*, tandis que $C^{\Gamma}(t,\mathbf{x})$ et $a^{\Gamma}(t,\mathbf{x})$ est la concentration à saturation du traceur provenant de l'atmosphère et l'âge de celui-ci au moment où il pénètre dans l'océan. Cet âge n'est pas nécessairement nul: voir aussi la note de travail de Deleersnijder (2017a). En introduisant (14) dans (4), il vient

$$\left[\mathbf{n}\bullet(\mathbf{K}\bullet\nabla C) + \chi(C - C^{\Gamma})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; 0 \tag{15}$$

et

$$\left[\mathbf{n}\bullet(\mathbf{K}\bullet\nabla\alpha)+\chi(\alpha-C^{\Gamma}a^{\Gamma})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = 0 \quad . \tag{16}$$

Aucune des paires de conditions aux limites proposées ci-dessus n'est similaire à celle utilisée par Bendtsen et al. (2009) sur leurs frontières ouvertes. Cela n'est guère étonnant...

L'étude de Bendtsen et al. (2009) est mise en cause à propos des conditions aux limites en mer ouverte. Sur de telles frontières, on peut aussi envisager des conditions de radiation, en particulier quand la frontière est "sortante". Les conditions de radiation sont parfois écrites dans un formalisme continu et, très probablement, erroné[2]. Toutefois, c'est la formulation discrétisée (dans le temps et l'espace) qui importe. Or, rien n'empêche d'intégrer cette dernière selon l'âge τ, ce qui devrait conduire à des paires de conditions aux limites compatibles à l'instar de ce qui a été fait ci-dessus pour quelques conditions aux limites classiques.

Un problème unidimensionnel hautement idéalisé

Il convient désormais de tenter d'évaluer l'impact des conditions aux limites problématiques de Bendtsen et al. (2009). Dans cette perspective, une première démarche consiste à examiner un problème unidimensionnel, stationnaire et hautement idéalisé. On utilise des variables rendues adimensionnelles selon les *scalings* habituels. L'advection n'est pas prise en compte; seule la diffusion est supposée être à l'oeuvre.

La variable indépendante ξ représente la distance (adimensionnelle) à la surface. Celle-ci est située en $\xi = 0$ (Figure 1). L'extrémité du domaine d'intérêt ($\xi = 1$) est associée à la frontière ouverte. Conformément à Bendtsen et al. (2009), la concentration du traceur représentant l'eau de surface est la solution du problème différentiel suivant:

$$\frac{d^2C}{d\xi^2} = 0 \quad , \quad C(0) = 1 \quad , \quad C(1) = 0 \quad . \tag{17}$$

Il vient aisément (Figure 2)

$$C(\xi) = 1 - \xi \quad . \tag{18}$$

La concentration d'âge (adimensionnelle) est la solution de

$$\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} + C = 0 \quad , \quad \alpha(0) = 0 = \alpha(0) \tag{19}$$

Ici, on a utilisé des conditions aux limites compatibles (au sens de la discussion ci-dessus), qui conduisent à

$$\alpha(\xi) = \frac{2\xi - 3\xi^2 + \xi^3}{6} \quad . \tag{20}$$

L'âge (adimensionnel) correspondant vaut (Figure 2)

[2] Pour l'équation d'advection-diffusion, les conditions aux limites peuvent contenir des fonctions du temps et des coordonnées spatiales, la fonction inconnue et ses dérivées premières dans l'espace; aucune autre espèce de dérivée n'est admissible. Certaines conditions de radiation font apparaître la dérivée temporelle de la fonction que l'on calcule, ce qui n'est pas permis; voir, par exemple, la relation (15) de Blumberg and Kantha (1985). Au sens strict cette écriture est fautive, mais c'est l'implémentation discrète qui compte. Je regrette toutefois qu'il semble malaisé d'écrire correctement en formalisme continu la plupart des conditions de radiation. En effet, cela rend difficile l'étude théorique des propriétés de leur solutions.

$$a(\xi) = \frac{\alpha(\xi)}{C(\xi)} = \frac{2\xi - 3\xi^2 + \xi^3}{6(1-\xi)} = \frac{\xi(2-\xi)}{6} \quad . \tag{21}$$

A l'extrémité considérée comme ouverte du domaine ($\xi = 1$), la concentration et la concentration d'âge sont nuls par construction. Mais, l'âge correspondant a une valeur finie, qui est $a(1) = 1/6$.

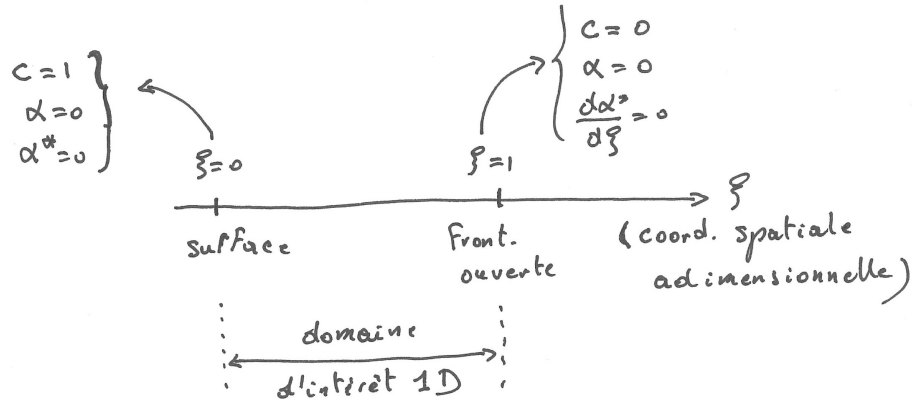


Figure 1. Illustration du domaine d'intérêt 1D utilisé pour une étude hautement idéalisée de l'âge obtenu avec des conditions aux limites compatibles, $a = \alpha / C$, et celui inspiré de Bendtsen et al. (2009), $a^* = \alpha^* / C$. Toutes les variables sont adimensionnelles.

Si l'on s'inspire de Bendtsen et al. (2009), alors la concentration est inchangée mais la concentration d'âge est la solution du problème différentiel

$$\frac{d^2\alpha^*}{d\xi^2} + C = 0 \quad , \quad \alpha^*(0) = 0 = \left[\frac{d\alpha^*}{d\xi}\right]_{\xi=1} \tag{22}$$

La seule différence entre (19) et (22) est la condition imposée à la frontière ouverte ($\xi = 1$). La concentration d'âge et l'âge valent (Figure 2)

$$\alpha^*(\xi) = \frac{3\xi - 3\xi^2 + \xi^3}{6} \tag{23}$$

et

$$a^*(\xi) = \frac{3\xi - 3\xi^2 + \xi^3}{6(1-\xi)} \quad . \tag{24}$$

L'âge alternatif a^* est supérieur à celui obtenu au moyen de conditions aux limites compatibles:

$$a^*(\xi) - a(\xi) = \frac{\xi}{6(1-\xi)} \tag{25}$$

avec

$$a^*(1) = \infty \tag{26a}$$

et

$$\frac{d}{d\xi}(a^* - a) = \frac{1}{6(1-\xi)^2} > 0 \quad , \qquad a^*(0) - a(0) = 0 \quad , \qquad a^*(1) - a(1) = \infty \quad . \tag{26b}$$

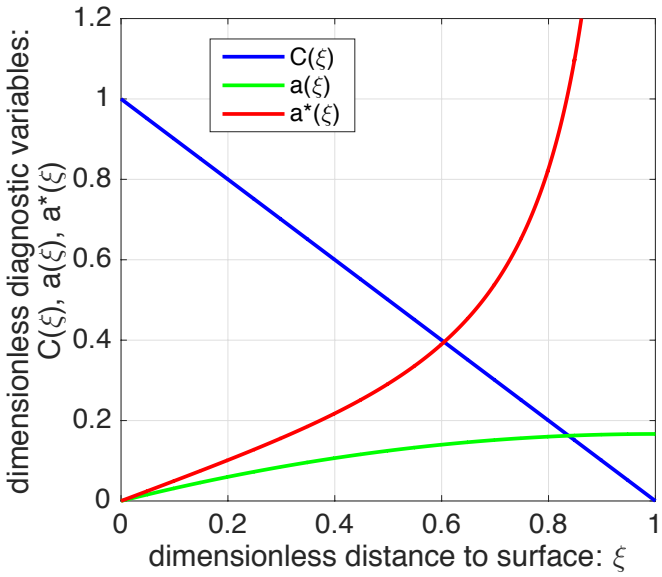


Figure 2. Concentration d'eau de surface $C(\xi)$, âge obtenu avec des conditions aux limites compatible $a(\xi)$ et âge inspiré de Bendtsen et al. (2009) $a^*(\xi)$. Toutes les variables sont adimensionnelles et stationnaires.

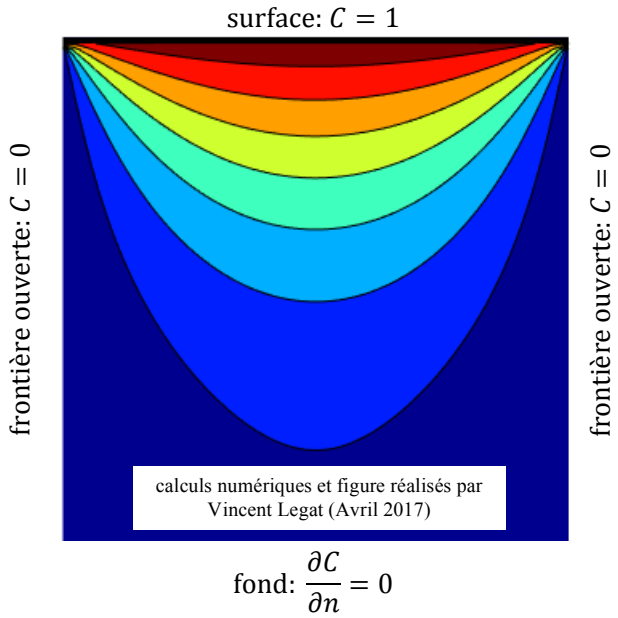


Figure 3. Concentration stationnaire d'eau de surface dans un domaine idéalisé 2D "horizontal-vertical". La solution a été obtenue numériquement par une méthode très précise.

La différence entre les deux âges ne semble pas confinée à une “couche limite” qui serait située à proximité de la frontière considérée comme ouverte. Le problème étant purement diffusif, cela ne doit pas étonner. Le comportement de la différence d'âges serait peut-être différent si l'advection était également présente — mais il semble difficile de la prendre en compte d'une manière acceptable dans un problème 1D comme celui-ci. Le fait que l'âge alternatif soit supérieur à l'âge “compatible” semble qualitativement en accord l'observation d'Anne Mouchet selon qui les âges calculés par Bendtsen et al. (2009) sont étonnamment élevés.

Pour pousser plus loin l'analyse, on pourrait songer à traiter un problème diffusif plus complexe. Il s'agirait d'un domaine 2D “horizontal-vertical”, qui permettrait de distinguer trois types de frontière (surface, fond et frontière ouverte). On aurait alors trois types de paires de conditions aux limites, à l'image de ce que l'on trouve dans l'étude de Bendtsen et al. (2009). Malheureusement, il est certain que les solutions analytiques associées sont complexes. Est-ce opportun d'investir du temps dans l'obtention de ces solutions analytiques? Pourrait-on se contenter de solutions numériques (Figure 3), sachant que celles-ci peuvent être très précises (car il s'agit de problèmes elliptiques classiques)? Serait-il préférable d'abandonner cette étude (car son rapport coût/bénéfice serait trop élevé)? A méditer...

Tentative d'analyse du problème instationnaire tridimensionnel

On va maintenant tenter d'analyser un problème semblable à celui de l'eau de surface dans Bendtsen et al. (2009). On note Ω le domaine d'intérêt, qui est limité par la surface Γ. Celle-ci est composée de l'interface air-mer (Γ^s), de la frontière ouverte (Γ^o) et des frontières imperméables (Γ^i), c'est-à-dire le fond et les côtes (Figure 4). La surface de la mer est considérée comme immobile, ce qui n'est pas le cas dans Bendtsen et al. (2009). Toutefois, il est clair les mouvements de la surface ne jouent pas un rôle déterminant dans la présente étude, qui se focalise sur la simulation du transport de traceurs à des fins diagnostiques.

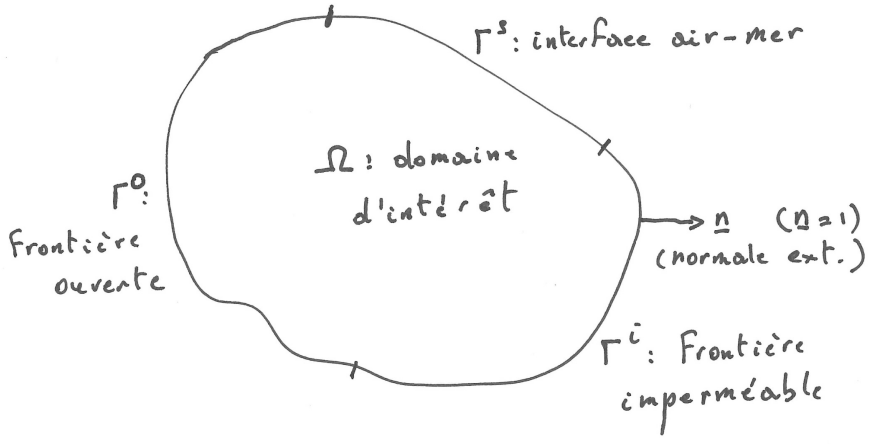


Figure 4. Illustration du domaine d'intérêt 3D (Ω), ainsi que la partition de sa frontière (frontière imperméable, frontière ouverte et interface air-mer).

Soient t et $\mathbf{x}$ le temps et le vecteur position. La vitesse $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ est indivergentielle

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0 \tag{27}$$

et satisfait la condition aux limites

$$\left[\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^i\cup\Gamma^s} = 0 \quad . \tag{28}$$

Le tenseur des diffusivités $\mathbf{K}(t,\mathbf{x})$ est symétrique et défini positif.

La concentration de l'eau de surface $C(t,\mathbf{x})$ est la solution de l'équation d'advection-diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \bullet (C\mathbf{v} - \mathbf{K} \bullet \nabla C) \tag{29}$$

sous les conditions aux limites

$$\left[C(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^s} = 1 \quad , \tag{30}$$

$$\left[C(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^o} = 0 \tag{31}$$

et

$$\left[(-\mathbf{K} \bullet \nabla C) \bullet \mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^i} = 0 \quad . \tag{32}$$

A l'instant initial, on pose

$$C(0,\mathbf{x}) = 0 \quad . \tag{33}$$

En utilisant la méthode intégrale inspirée de l'Appendice C de Deleersnijder et al. (2001), on peut montrer que la concentration, définie comme la solution du problème différentiel (29)-(33), satisfait les inégalités suivantes

$$0 \le C(t,\mathbf{x}) \le 1 \quad . \tag{34}$$

La concentration d'âge $\alpha(t,\mathbf{x})$ est la solution de l'équation suivante

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = C - \nabla \bullet (\alpha\mathbf{v} - \mathbf{K} \bullet \nabla \alpha) \quad . \tag{35}$$

On impose que l'âge de l'eau soit nul à la surface. Les conditions auxiliaires compatibles avec celles introduites pour la concentration s'écrivent

$$\left[\alpha(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^s} = 0 \quad , \tag{36}$$

$$\left[\alpha(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^o} = 0 \quad , \tag{37}$$

$$\left[(-\mathbf{K} \bullet \nabla \alpha) \bullet \mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^i} = 0 \quad . \tag{38}$$

$$\alpha(0,\mathbf{x}) = 0 \quad . \tag{39}$$

En utilisant la méthode intégrale précitée, on peut prouver que la concentration d'âge satisfait les inégalités

$$0 \le \alpha(t,\mathbf{x}) \le t\,C(t,\mathbf{x}) \quad . \tag{40}$$

Par conséquent, l'âge $a(t,\mathbf{x}) = \alpha(t,\mathbf{x}) / C(t,\mathbf{x})$ satisfait les inégalités

$$0 \le a(t,\mathbf{x}) \le t \quad . \tag{41}$$

Ce problème semble être bien posé.

Si l'on adopte une approche semblable à celle de Bendtsen et al. (2009), la concentration d'âge alternatif $\alpha^*(t,\mathbf{x})$ est la solution du problème différentiel suivant

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial t} = C - \nabla \bullet (\alpha^*\mathbf{v} - \mathbf{K} \bullet \nabla \alpha^*) \quad , \tag{42}$$

$$\left[\alpha^*(t,\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^s} = 0 \quad , \tag{43}$$

$$\left[(-\mathbf{K}\bullet\nabla\alpha^*)\bullet\mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^i} = 0 \quad , \tag{44}$$

$$\left[(-\mathbf{K}\bullet\nabla\alpha^*)\bullet\mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma^o} = 0 \quad , \tag{45}$$

$$\alpha^*(0,\mathbf{x}) = 0 \quad . \tag{46}$$

En utilisant la méthode intégrale inspirée de l'Appendice C de Deleersnijder et al. (2001), on ne peut pas démontrer que la concentration d'âge alternative est positive. La condition auxiliaire problématique concerne la partie “entrante” ($\mathbf{v}\bullet\mathbf{n}<0$) de la frontière ouverte. Imposer un flux diffusif nul sur une telle frontière n'est généralement pas conseillé (e.g. Deleersnijder et al. 2017b). Par ailleurs, comme la concentration est nulle sur la frontière ouverte, il est fort probable que l'âge y sera infini. Donc, au moins dans une partie du domaine, l'âge sera supérieur au temps écoulé, ce qui est évidemment inacceptable.

En utilisant la méthode intégrale susmentionnée, on ne peut pas démontrer que $\alpha^*(t,\mathbf{x})\geq\alpha(t,\mathbf{x})$. Cette méthode montre ici ces limites. On devrait peut-être tenter d'analyser les propriétés des solutions aux moyens de la fonction de Green. Pour ce faire, il faudrait maîtriser la théorie qui permet d'exprimer la solution générale d'un problème d'advection diffusion au moyen de la fonction de Green. Toutefois, je ne suis pas certain que cette approche soit fructueuse non plus, car, dès le moment où l'on change la nature des conditions aux limites, il me semble que la fonction de Green change aussi. En d'autres termes, la fonction de Green pour le problème (35)-(39) n'est pas la même que celle qui permettrait d'écrire la solution du problème (42)-(46).

Conclusions

La présente discussion suggère que les conditions aux limites en mer ouverte pour la concentration et la concentration d'âge proposées par Bendtsen et al. (2009) ne sont pas compatibles. Pour s'en persuader, il faut s'en remettre aux fondements de CART, c'est-à-dire la fonction de distribution de l'âge et tout établir à partir de ce point de départ même si l'on ne souhaite pas calculer explicitement cette fonction de distribution.

A ce stade, il n'est pas possible d'estimer dans quelle mesure les solutions numériques de Bendtsen et al. (2009) sont inacceptables. S'agit-il d'une erreur mineure, qui serait concentrée près des frontières ouvertes, ou d'un problème tellement important qu'il serait de nature à invalider leur étude? Je ne sais...

Pour documenter plus avant le problème, j'aimerais aborder un problème idéalisé comprenant de l'advection qui admettrait des solutions analytiques. Toutefois, je pressens que la définition d'un tel problème ne sera pas simple...

En toute hypothèse, il ne serait peut-être pas inutile d'acquérir des compétences supplémentaires dans la formulation des solutions de problèmes d'advection-diffusion au moyen de la fonction de Green.

On ne pourra sans doute pas faire l'économie d'une étude numérique qui serait au moins 2D “horizontale-verticale”.

Finalement, je me demande si le présent débat ne serait pas rendu inutile si l'on utilisait des

âges partiels. Cela nécessiterait de travailler avec un domaine plus grand, mais le jeu en vaut peut-être la chandelle...

Références

Bendtsen J., K.E. Gustafsson, J. Söderkvist and J.L.S. Hansen, 2009, Ventilation of bottom water in the North Sea-Baltic Sea transition zone, *Journal of Marine Systems*, 75, 138-149

Blumberg A.F. and L.H Kantha, 1985, Open boundary conditions for circulation models, *Journal of Hydraulic Engineering*, 111, 237-255

Deleersnijder E., 2017a, On the impact of the atmosphere on the time-varying age of a passive tracer in the ocean, Université catholique de Louvain, Working Note, 4 pages, disponible en ligne à l'adresse http://hdl.handle.net/2078.1/184324

Deleersnijder E., 2017b, Conditions aux limites et stabilité de la solution d'un problème de transport advectif et diffusif en eaux peu profondes, Université catholique de Louvain, Working Note, 6 pages, disponible en ligne à l'adresse http://hdl.handle.net/2078.1/183125

Deleersnijder E., J.-M. Campin and E.J.M. Delhez, 2001, The concept of age in marine modelling: I. Theory and preliminary model results, *Journal of Marine Systems*, 28, 229-267

Delhez E.J.M., J.-M. Campin, A.C. Hirst and E. Deleersnijder, 1999, Toward a general theory of the age in ocean modelling, *Ocean Modelling*, 1, 17-27

Anne Mouchet, communication personnelle, avril 2017

PB with BC as in *Bendtsen et al.* (2009)

Anne

April 21, 2017

The domain (Fig. 1) is delimited by the sea surface, the sea bottom and two open boundaries on the north and east sides.
A surface age is defined $a_S = \alpha_S/C_S$ with the boundary conditions applied to C_S and α_S are

Surface	$C_S = 1$ & $\alpha_S = 0$
North boundary	$C_S = 0$ & $\partial\alpha_S/\partial y = 0$
East boundary	$C_S = 0$ & $\partial\alpha_S/\partial x = 0$
Bottom	$\partial C_S/\partial z = 0$ & $\partial\alpha_S/\partial z = 0$,

where x,y, and z denote the direction perpendicular to the eastern, northern, and bottom boundary, respectively.
The mixed condition on east and north open boundaries are problematic: since α is finite and is not modified, setting C_S to zero results in infinite age for individual 'particles', and in mean ages which might exceed the elapsed time. Illustrated in the following figure and table.
Concentrations and ages at time t:

	C_S	α_S	a_S
Particle 1	0	$t1 - t0$	∞
Particle 2	1	$t - t0$	t-t0
Particle 3	0	$t3 - t0$	∞
Water parcel	1/3	$((t1 + t + t3)/3) - t0$	$(t - t0) + (t1 + t3 - 2t0)$

Since $t0 < t1 < t3$, the mean age of the water parcel $((t - t0) + (t1 + t3 - 2t0))$ is larger than the elapsed time $t - t0$.

References

Bendtsen, J., K. E. Gustafsson, J. Sderkvist, and J. L. Hansen (2009), Ventilation of bottom water in the north seabaltic sea transition zone, *Journal of Marine Systems*, *75*, 138–149, doi: 10.1016/j.jmarsys.2008.08.006.

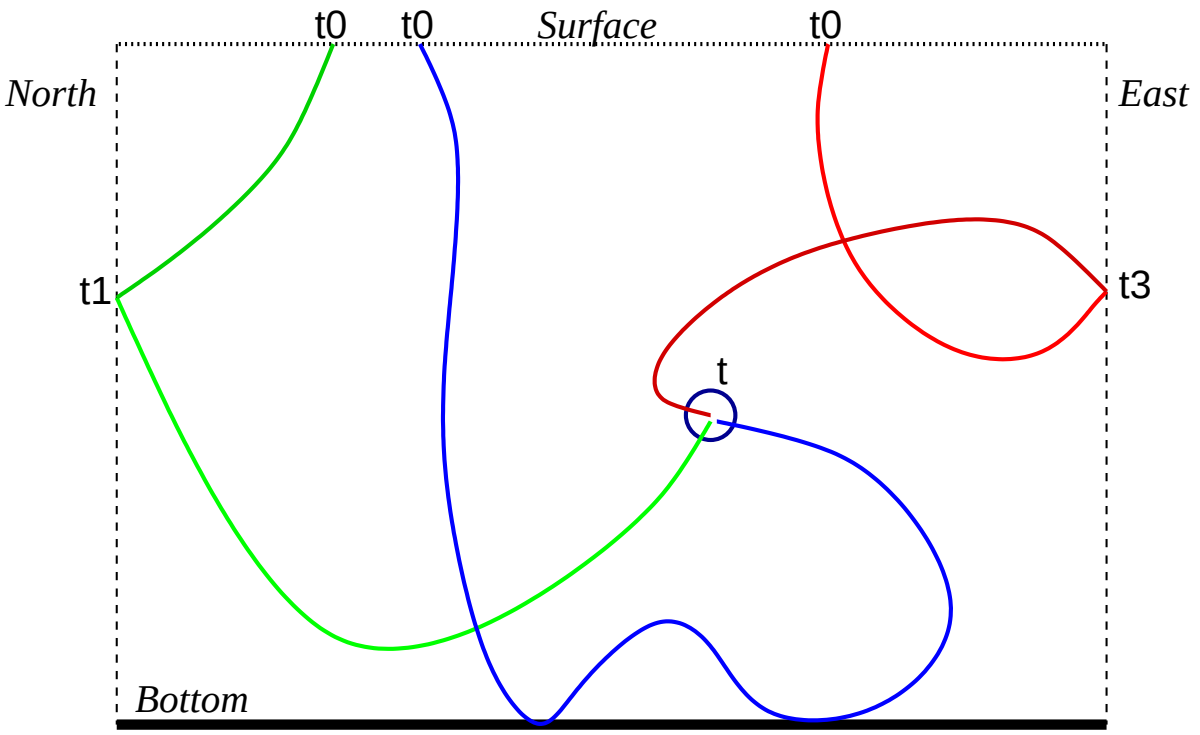


Figure 1: Water parcel made of three particles: the first (green) touches the northern boundary at time t1, the third (red) reaches the eastern boundary at time t3, while the trajectory of particle 2 (blue) proceeds far from these boundaries. For simplicity we consider that all particles leave the surface at the same time t0, and that $t0 < t1 < t3 < t$.