



UNIVERSITE CATHOLIQUE
DE LOUVAIN

FACULTE DES SCIENCES
APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE MECANIQUE
BAT. STEVIN - PLACE DU LEVANT 2
B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE

Identification des paramètres dynamiques des robots manipulateurs

*Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en
Sciences Appliquées dans le département de Mécanique.*

Le 21 juin 1990.

Par **BENOIT RAUCENT**
Ingénieur Civil Mécanicien

Membres du jury:

A. BARRACO (ENSAM Paris)
G. CAMPION (UCL)
R. GOREZ, président (UCL)
A. LIEGEOIS (USTL Montpellier)
J.C. SAMIN, copromoteur (UCL)
P. Y. WILLEMS, copromoteur (UCL)
J. WITTENBURG (Univ. Karlsruhe)

Année académique 89-90

à *Léon,*
Béatrice
et *Camille*

Remerciements

Que Monsieur *J.C Samin*, chargé de cours à l'Université Catholique de Louvain et Monsieur *P.Y. Willems*, professeur à l'UCL acceptent toute ma gratitude pour m'avoir intégré dans leurs unités et avoir dirigé mes travaux. Je tiens également à les remercier pour les remarques intéressantes qu'ils ont émis à la lecture de ce document.

Je remercie Monsieur *A. Barraco*, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris pour avoir accepté de faire partie de mon comité d'encadrement et à ce titre d'avoir orienté mes travaux.

Je remercie Monsieur *R. Gorez*, professeur à l'UCL pour l'intérêt qu'il m'a témoigné tout au long de mes travaux et en présidant ce jury.

Je tiens également à remercier Monsieur *G. Campion*, chercheur qualifié au FNRS pour la participation active qu'il a pris dans mon travail notamment dans le domaine de l'estimation.

Je suis profondément honoré par la présence dans ce jury de Monsieur *A. Liégeois*, professeur à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier II et de Monsieur *J. Wittenburg*, professeur à Universität Karlsruhe. Je les remercie vivement.

Tous mes remerciements vont également à Monsieur *Y. Lewyckij*, chef de travaux à l'UCL pour sa collaboration dans la réalisation de la phase expérimentale de mon travail et Monsieur *P. Maes*, Assitant à l'UCL pour l'aide informatique qu'il m'a apportée.

Je remercie enfin tous les membres du Département de Mécanique de l'UCL, professeurs, chercheurs, secrétaires et techniciens sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 Introduction

Présentation du problème	1.1
Etat de l'art.....	1.4
Identification externe	1.7
Agencement du travail.....	1.8

Chapitre 2

Principes de base de l'identification des paramètres

2.1. Introduction	2.1
2.2. Recherche de la solution au sens des moindres carrés	2.2
a) Cas particulier.....	2.2
b) Cas général.....	2.3
c) Factorisation QR.....	2.4
2.3. Estimation de combinaisons linéaires de δ	2.6
2.4. Précision d'estimation	2.7
2.5. Application	2.9
2.6. Conclusions.....	2.12

Chapitre 3

Modélisation

3.1. Introduction	3.1
3.2. Les paramètres barycentriques: Définitions	3.3
a) Corps augmentés	3.5
b) Masses Barycentriques	3.5
c) Vecteurs Barycentriques	3.5
d) Tenseurs Barycentriques	3.6
3.3. Modélisation Dynamique	3.7
3.3.1. Cinématique	3.7
3.3.2. Modélisation dynamique	3.8
3.3.3. Forme vectorielle des équations	3.9
Equation de translation	3.9
Equations de rotation	3.10
3.3.4. Propriétés des paramètres et du modèle	3.12
a) indépendance	3.12
b) linéarité	3.12
c) descendance	3.12
d) combinaisons nécessaires	3.13
3.3.5. Modèle dynamique	3.15
Propriétés du modèle dynamique	3.15
a) linéarité	3.15
b) descendance	3.15
d) combinaisons nécessaires mais insuffisantes	3.15
3.4. Exemples	3.16
a) Exemple 1	3.16
b) Exemple 2	3.20
c) Exemple 3	3.21
3.5. Conclusions	3.25

Chapitre 4

Combinaisons des paramètres

4.1. Introduction	4.1
4.2. Arborescence sans contrainte	4.2
4.2.1. Règles de combinaisons.....	4.2
Modèle de travail.....	4.4
Cinématique.....	4.6
a) Articulation rotoïde.....	4.6
Etude de $\tilde{L}^2$	4.7
Etude de $\tilde{L}^1$	4.11
Etude de $\tilde{F}^1$	4.13
b) Articulation prismatique.....	4.13
Etude de $\tilde{F}^2$	4.13
Etude de $\tilde{L}^1$	4.14
c) Règles générales de combinaisons	4.14
4.2.2. Interprétation.....	4.16
4.2.3. Exemples.....	4.19
4.2.4. Cas particuliers	4.21
Articulation rotoïde.....	4.21
Articulation prismatique	4.22
4.2.5. Conclusions.....	4.23
4.3. Arborescence avec contraintes.....	4.24
4.3.1. Propriétés du modèle réduit.....	4.27
a) linéarité	4.27
b) combinaisons	4.27
Inertie des actionneurs inconnue.....	4.28
Inertie des actionneurs connue.....	4.28
4.3.2. Exemple.....	4.29
a) Inerties actionneurs inconnues.....	4.31
b) Les inerties des actionneurs sont supposées connues.....	4.32
4.4. Conclusions.....	4.33

Chapitre 5

Identification interne et externe

5.1. Introduction	5.1
5.2. Identification interne	5.4
5.3. Identification externe.....	5.5
5.3.1. Structure sans contrainte	5.5
a) Modèle de réaction	5.5
b) Propriétés du modèle de réaction	5.5
c) Correspondance des paramètres entre les deux modèles.....	5.6
d) Choix de la trajectoire.....	5.6
e) Exemple	5.7
5.3.2. Structure avec contrainte	5.11
Exemple	5.14
5.3.3. Simulation.....	5.15
a) Comparaison des deux méthodes.....	5.15
b) Influence des frottements sur l'identification interne.....	5.17
5.4. Conclusions.....	5.21

Chapitre 6

Expérimentation

6.1. Introduction	6.1
6.2. Dispositif de mesure	6.2
6.2.1. Choix du dispositif de mesure des positions	6.2
a) Spécifications	6.2
b) Quelques dispositifs de mesure disponibles	6.3
6.2.2. Dispositif expérimental	6.5
a) Dispositif de mesure SELSPOT	6.5
b) Mesure des efforts internes	6.7
c) Mesure des efforts de réactions.....	6.8
6.3. Traitement du signal (Filtrage et dérivation).....	6.11
6.4. Estimation des paramètres.....	6.13
6.5. Expérimentation	6.13
6.5.1. Manipulateur à un degré de liberté	6.13
a) Description du manipulateur	6.13
b) Résultats expérimentaux	6.18
c) Conclusions.....	6.21
6.5.2. PUMA 562.....	6.22
a) Description	6.22
b) Résultats expérimentaux.....	6.27
6.6. Conclusions.....	6.34

Chapitre 7

Etude de l'influence de l'erreur d'estimation

7.1. Introduction.....	7.1
7.2. Principe de la simulation.....	7.2
7.3. Le régulateur.....	7.3
7.4. La trajectoire	7.5
7.5. Simulation.....	7.7
7.6. Résultats et interprétations.....	7.8
7.6.1. Influence relative des paramètres.....	7.9
7.6.2. Influence de chacun des termes.....	7.11
7.6.3. Influence de la vitesse.	7.13
7.7. Conclusions.....	7.14

Chapitre 8

Conclusions

Choix des paramètres	8.2
Identification externe.....	8.2
Expérimentation	8.3
Perspectives.....	8.4

Bibliographie

Annexes

Modèle dynamique du PUMA 562

Modèle de réaction du PUMA 562

Chapitre 1

Introduction

Présentation du problème

Ces dernières années, un intérêt de plus en plus marquant est apparu pour la précision des robots manipulateurs. En effet, cette propriété est devenue un élément indispensable à la bonne marche de nouvelles applications. L'assemblage, le suivi de joint, l'ébavurage, etc ... ainsi que la possibilité de programmation hors-ligne demandent une grande précision et l'utilisation de lois de commande sophistiquées.

La *précision statique* est déterminée par la *géométrie et la souplesse* des différents éléments, elle conditionne la possibilité de programmation hors-ligne ainsi que la portabilité des programmes (c'est-à-dire la possibilité de transporter sans modification un programme d'un robot à un autre). Elle est également indispensable à l'utilisation d'un robot pour des tâches de haute précision. Sans une bonne connaissance de ce type de paramètres, la seule manière d'obtenir une précision d'exécution équivalente à la répétabilité est de recourir à une programmation par apprentissage.

La *précision dynamique* caractérise à la fois l'aptitude à suivre une *trajectoire* donnée et le *parcours temporel* voulu le long de cette même trajectoire. Outre un simple écart géométrique entre la trajectoire réel et celle programmée, le robot peut présenter un écart de "trainage" (même en l'absence de toute erreur géométrique). Cet aspect prend son importance pour des tâches telles que, par exemple, la dépose d'un joint de colle où la vitesse du robot doit être contrôlée avec précision. L'amélioration des performances dynamiques des robots passe par l'utilisation de lois de commandes plus sophistiquées (par exemple une commande du type du couple calculé ou une commande adaptative) qui en plus des paramètres statiques, nécessitent la connaissance des *paramètres dynamiques* du manipulateur. Nous distinguons les *paramètres inertiels* caractérisant la répartition de masse dans les segments (masse, position du centre de gravité, tenseur d'inertie), les *paramètres inertiels de la charge* et enfin les *paramètres liés aux articulations* comprenant les actionneurs et les transmissions (jeu, frottement).

Par conséquent, pour répondre au nouveau besoin de précision, il est indispensable de connaître l'ensemble de ces paramètres. Comme chaque robot est un cas unique, il doit faire l'objet d'une *étude individualisée*. Cette étude fournit une sorte de carte d'identité du manipulateur.

Pour clarifier les idées, prenons le cas du manipulateur à un degré de liberté rotoïde représenté à la figure 1.1. Supposons que l'actionneur est un moteur à courant continu à aimants permanents.

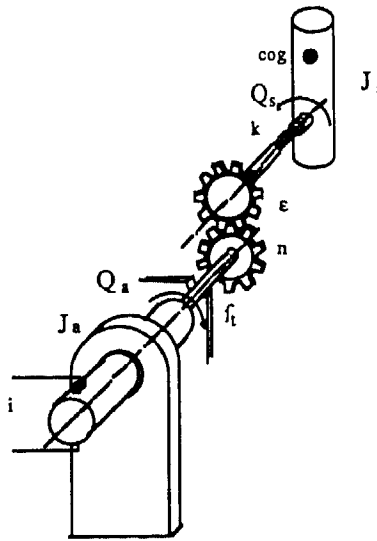


fig. 1.1 Manipulateur à un degré de liberté.

Développons l'ensemble des paramètres caractérisant ce manipulateur en distinguant les paramètres connus et inconnus.

Actionneur:

Paramètres connus (donnés par le constructeur):

J_a : inertie principale de l'actionneur autour de l'axe de rotation

Paramètres inconnus (ou mal connus):

k_c : caractéristiques de l'actionneur, par exemple; la constante de couple pour un moteur à courant continu (donné avec trop peu de précision par le constructeur)

Transmission:

Paramètres connus:

géométrie

Paramètres inconnus (ou mal connus):

- f_t : coefficient de frottement
- ϵ : jeu
- k : raideur de la transmission
- n : rapport de réduction de la transmission (dans la mesure où il est donné avec trop peu de précision par le constructeur)

Segment:

Paramètres connus:

néant

Paramètres inconnus (ou mal connus):

- paramètres géométriques (généralement donnés avec trop peu de précision par le constructeur)
- J_s : tenseur d'inertie du segment
- cog: centre de gravité du segment
- m : masse du segment
- souplesse du segment

Ces paramètres sont représentés dans le schéma du modèle de référence présenté à la figure 1.2. Prenons comme entrée du modèle le courant d'alimentation de l'actionneur (pour un moteur à courant continu à aimants permanents) et comme sortie la position opérationnelle de l'outil. Nous définissons Q_a comme le couple fourni par l'actionneur et Q_s le couple appliqué sur le segment.

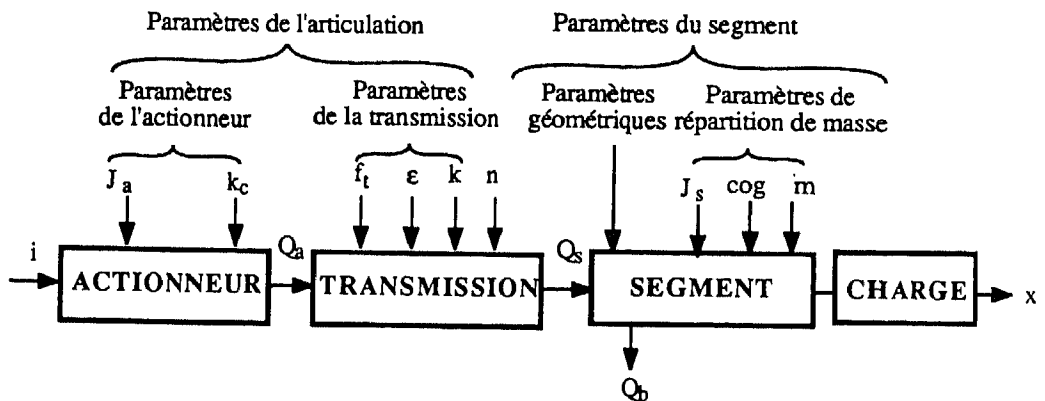


fig. 1.2 Le modèle de référence.

L'estimation de l'ensemble des paramètres est un travail considérable. Aussi, nous nous sommes limités à l'identification des paramètres les plus influents dans le modèle dynamique. Nous posons alors les deux hypothèses suivantes:

Nous supposons la géométrie du manipulateur exacte et connue.

Nous supposons les segments rigides et les articulations idéales (c'est-à-dire sans jeu ni souplesse).

Par conséquent, les seuls paramètres encore inconnus sont : les *paramètres inertiels* des segments, les *paramètres des actionneurs* (par exemple la constante de couple) et les *coefficients de frottements*.

Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'estimation des paramètres géométriques aux travaux de Duellen, Held, Kirchoff, Schröer et Spur, (Duelen 87) et (Spur 84). Pour l'estimation des caractéristiques de la charge, le lecteur averti pourra facilement étendre les développements présentés sur l'étude des paramètres inertiels des segments.

Etat de l'art

Dans la littérature, nous distinguons plusieurs méthodes de détermination des paramètres inertiels des segments.

a) CAO

Le premier type d'approche, utilisé par Tarn, Bejczy et Yun (Tarn 85), consiste à *calculer les paramètres sur base des plans*. Cette méthode, économique à mettre en oeuvre, ne saurait tenir compte ni de tous les composants des segments (par exemple, les boulons, les accouplements, ...), ni des particularités liées à chaque manipulateur.

b) Robot démonté

La seconde approche consiste à effectuer des essais simples (type pendule) sur *chaque segment démonté* (voir par exemple les travaux de Armstrong, Khatib et Burdick (Armstrong 86)). Du point de vue de l'utilisateur, il n'est pas souhaitable, ni possible, de démonter le manipulateur. Etant donné que c'est le point de vue que nous avons choisi, il nous faut exclure cette méthode.

c) Identification

Nous arrivons ainsi à des méthodes procédant par identification. La procédure la plus classique, cfr (Mayedas 84), (Ferreira 84), (Olsen 85), (Gautier 86) et (Schiehlen 86), consiste à utiliser comme modèle d'identification le modèle dynamique (correspondant à celui utilisé pour la commande), voir figure 1.3. Ce modèle relie la cinétique du segment au couple fourni par l'actionneur, voir fig. 1.2. Dans le cas d'un actionneur électrique à courant continu, le couple est obtenu via la mesure du courant d'alimentation (le couple est, en première approximation, proportionnel au courant). Par conséquent, cette approche suppose la *constante de couple connue*. Sous cette hypothèse, on *identifie simultanément les paramètres inertiels et les coefficients de frottements* des transmissions.

Les paramètres inertiels (masses, positions des centres de masses et tenseurs d'inertie) apparaissent sous une forme *non linéaire* dans les équations du modèle dynamique, mais il est possible de trouver des *combinaisons* (masses, moments du premier ordre et moments du second ordre) qui y apparaissent linéairement. Nous sommes ainsi ramenés à un cas d'estimation linéaire simple et bien connu. Pour assurer l'estimation, il faut que les colonnes de la matrice des coefficients des paramètres (matrice d'estimation) soient indépendantes, c'est-à-dire que la matrice soit de plein rang. Il existe deux sources de perte de rang. La première est structurelle, elle ne dépend que du choix des paramètres à estimer. Par exemple, un modèle "sur-paramétré" n'est jamais identifiable et cela quelque soit la trajectoire d'essai choisie. La deuxième source de perte de rang est fonction de la trajectoire qui doit "exciter" tous les paramètres à identifier. Nous parlerons de *trajectoire excitante ou sensibilisante*. Le problème principal est donc de trouver un jeu (ensemble) de paramètres identifiables et une trajectoire d'essai excitante. Nous distinguons deux approches différentes.

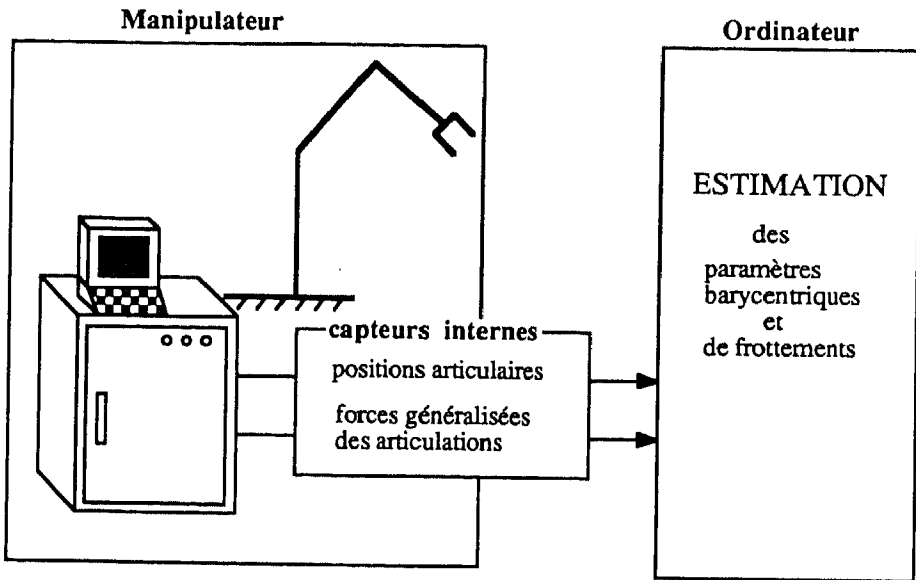


fig. 1.3 Principe de l'identification interne.

Dans leurs travaux, Olsen et Bekey (Olsen 85 et 86) ainsi que Mayeda, Osuka et Kangawa (Mayeda 84) n'ont pas trouvé de jeu de paramètres linéaire dans les équations globales. Ils contournent la difficulté en *décomposant la procédure d'estimation en un certain nombre de tests simples où seuls quelques paramètres interviennent*. Pour autant que la trajectoire test soit bien choisie, il est aisé de faire ressortir la propriété de linéarité dans les paramètres présents, car ceux-ci sont en général peu nombreux. Le jeu complet de paramètres est alors formé par l'union des paramètres trouvés pour chaque test. Cette méthode est délicate à mettre en oeuvre. En effet, son principal inconvénient est de coupler le choix des trajectoires tests avec la mise en évidence de paramètres. Après chaque essai, il faut mettre à jour le jeu globale de paramètres. Par conséquent, en fonction du choix des trajectoires, certains paramètres pourraient être "oubliés". La difficulté est donc de trouver les trajectoires tests. Pour un manipulateur ne possédant que des articulations rotoïdes, cette recherche est relativement simple car les termes sont soit fonctions linéaires de la gravité ou des accélérations, soit

fonctions quadratiques des vitesses. Il suffit alors pour faire apparaître tous les paramètres de procéder à trois types d'essais: statiques; à vitesses variables mais chaque axe séparément et enfin à vitesses constantes axe par axe et deux axes à la fois. Par contre, pour un manipulateur avec joints prismatiques, les termes sont plus complexes et il devient très difficile de trouver les trajectoires adéquates. Cette approche est schématisée à la figure 1.4.

La deuxième approche découple la recherche du jeu de paramètres de celle de la trajectoire, cfr Gautier (Gautier 86), Ferreira (Ferreira 84) et Schiehlen et Kallenback (Schiehlen 86). Cette procédure consiste à prendre comme jeu de départ l'ensemble des paramètres inertiels (masses, position du centre de masse, tenseur d'inertie). En fonction de ces paramètres, on calcule les équations du modèle. En effectuant quelques combinaisons évidentes (masse, moments du premier ordre, moments du second ordre) il est possible de rendre le modèle linéaire. Enfin, en étudiant les équations, on combine les paramètres pour trouver un jeu identifiable. Il ne reste plus alors qu'à trouver une trajectoire excitante. Cette approche est représentée à la figure 1.4.

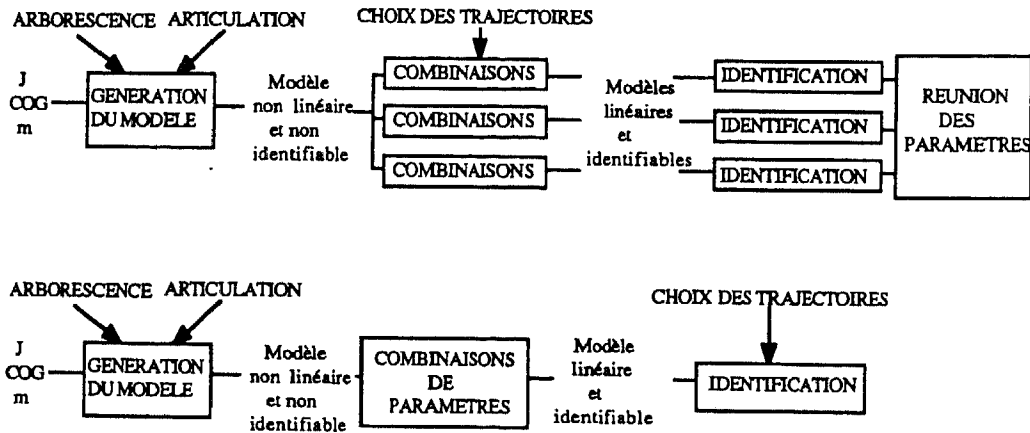


fig. 1.4 Les différentes procédures d'identification.

Le jeu de paramètres à estimer est donc constitué de combinaisons effectuées a posteriori, c'est-à-dire sur base des équations, sans règles bien précises. Gautier et Khalil (Gautier 88) ont amélioré cette approche en proposant des règles systématiques permettant de générer les combinaisons. Remarquons que ces règles peuvent être appliquées a priori avant de générer le modèle.

Cette approche classique possède deux inconvénients majeurs. Premièrement, la mesure du couple fourni par l'actionneur est peu fiable. En effet, elle suppose connues les caractéristiques des actionneurs, ce qui est rarement le cas dans la pratique. Par exemple, la constante de couple du moteur à courant continu est donnée par le constructeur à $\pm 10\%$. Deuxièmement, on estime simultanément les paramètres inertiels et les coefficients des frottements. Or, ces deux familles de paramètres sont très différentes. Les paramètres inertiels des segments sont constants tout au long de la vie du manipulateur. A l'opposé, les frottements varient au cours du temps en fonction de l'usure des composants. De plus, ils sont difficiles à modéliser correctement. Par conséquent, l'estimation des coefficients de frottements dégrade l'estimation des paramètres inertiels.

Mukerjee et Ballard (Mukerjee 84 et 85) ont proposé une alternative permettant de découpler l'estimation des paramètres inertiels de celle des coefficients de frottements. Le principe de la méthode est de mesurer l'effort fourni par l'actionneur non pas sur l'alimentation du moteur mais directement sur le segment, par exemple, en plaçant des jauges de contraintes. Nous mesurons alors directement Q_s ce qui rend le modèle d'estimation indépendant des paramètres des articulations (frottements, constantes de couple, ...). Cette approche demande donc une instrumentation individuelle pour chaque manipulateur.

Identification externe

L'approche traditionnelle que nous avons présentée dans les paragraphes précédents est basée sur le modèle dynamique classique (utilisé pour la commande) et les mesures qui s'y rapportent (la position de l'actionneur et le couple fourni par l'actionneur via la mesure du courant d'alimentation). Ces mesures sont proprioceptives c'est-à-dire qu'elles sont obtenues par des capteurs internes au manipulateur sans demander d'instrumentation supplémentaire. Nous parlons alors de *méthode interne*. Nous avons présenté les inconvénients relatifs à cette approche: estimation conjointe des paramètres inertiels et des coefficients de frottements et faible précision des mesures des couples fournis par les actionneurs. La méthode proposée par Mukerjee permet de découpler l'estimation des deux familles de paramètres, mais elle est très lourde à mettre en oeuvre. Nous proposons alors une approche originale basée sur l'utilisation d'une plate-forme de force.

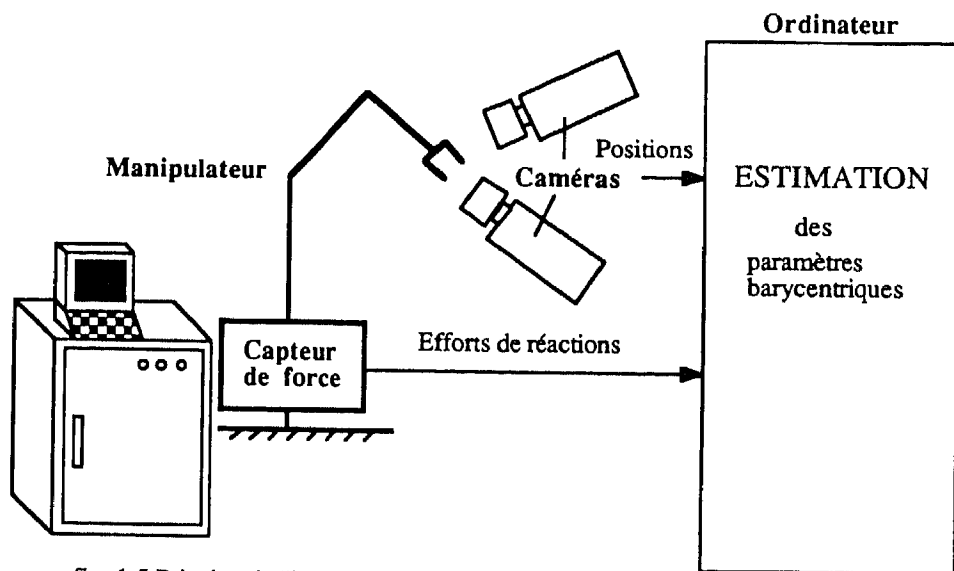


fig. 1.5 Principe de l'identification externe.

Plaçons le manipulateur sur une plate-forme de force permettant de mesurer les trois composantes de force et de couple à la base du manipulateur. Nous écrivons alors le *modèle de réaction* qui met en relation les six composantes des efforts entre le robot et le bâti avec la cinématique des segments. Par ailleurs, les positions des segments peuvent également être obtenues par des capteurs extérieurs, par exemple par un système de visions, cfr figure 1.5. Par comparaison avec la méthode interne, nous parlerons alors d'*approche externe*. L'avantage de cette méthode est triple.

Premièrement, grâce au principe d'action-réaction, le modèle de réaction considère les efforts dans les articulations (et donc les frottements qui y sont associés) comme des efforts internes. Ce modèle est donc *indépendant des frottements*. Les paramètres inertiels peuvent donc être identifiés séparément.

Deuxièmement, les mesures sont obtenues via un capteur externe de *haute précision*. L'estimation des paramètres inertiels est *indépendant des caractéristiques des actionneurs* et en particulier de la constante de couple.

Troisièmement, le *dispositif de mesure est externe et standard*; il peut donc facilement être appliqué sur différents types de robots sans demander de grande connaissance sur l'architecture informatique de ce dernier et sans étalonnage particulier.

Cette approche n'a pas que des avantages. En effet, le dispositif de mesure est plus *complexe et coûteux* que celui de la méthode interne, ce qui limite toute application en temps réel sur le robot en service. De plus, le modèle d'identification est différent du modèle de commande. Comme notre objectif est d'estimer les paramètres du modèle de commande, il nous faudra démontrer la *correspondance des paramètres* entre les deux modèles.

Agencement du travail.

Nous débuterons notre travail en présentant dans le chapitre deuxième les bases nécessaires à l'estimation d'un modèle linéairement paramétré ainsi que les conditions qui y sont associées. Sur l'exemple d'un corps disposant d'une mobilité totale, nous mettrons en évidence la notion d'*indépendance des paramètres* inertiels et de *jeu de paramètres identifiables*.

Une fois la théorie relative à l'estimation exposée, nous entamons au *chapitre troisième* la "*modélisation*" de chaîne arborescente sans contrainte. Le point de départ de ce chapitre est la définition des *corps augmentés* et des *paramètres barycentriques* qui y sont associés, cfr (Fischer 06), (Roberson 66), (Wittenburg 77) (Liégeois 74 et 80) et (Renaud 87). Ces paramètres exprimés dans un repère lié au corps sont constants et jouent pour un corps augmenté le même rôle que la masse, le vecteur moment du centre de masse et le tenseur d'inertie pour un corps rigide classique. En outre, ils dépendent uniquement de l'arborescence de la structure. Ensuite, après avoir développé le principe de la génération des équations du modèle dynamique, nous discutons des propriétés de ce modèle et des paramètres barycentriques: *indépendance*, *linéarité*, *règle de descendance*. Enfin, nous montrons que les paramètres barycentriques constituent des *combinaisons des paramètres indispensables à l'estimation*. Nous clôturons ce chapitre en présentant une série d'exemples. En particulier, nous montrons que les combinaisons provenant des paramètres barycentriques ne sont *pas toujours suffisantes*, elles doivent être complétées par des combinaisons qui dépendront, cette fois, de la mobilité des corps, c'est-à-dire des caractéristiques des articulations.

L'étude de ces combinaisons complémentaires indispensables à l'estimation est présentée dans le quatrième chapitre. La règle de descendance définie dans le troisième chapitre nous indique que l'équation d'une articulation ne peut contenir que des paramètres de ces descendants. Cette propriété nous permet de distinguer deux types de combinaisons: les *regroupements* entre les paramètres d'un même segment et les *reports* de paramètres d'un segment sur un/des segments ascendants. Une étude menée sur une structure limitée à deux corps nous permet de dégager des règles générales de combinaisons qui seront utilisées par la suite pour trouver le jeu de paramètres identifiables. Nous terminons ce chapitre en introduisant dans la structure les actionneurs et les efforts dynamiques associés.

Dans le cinquième chapitre, nous introduisons la *méthode d'identification externe*. Nous montrons la correspondance entre les paramètres du modèle dynamique (méthode interne) et du modèle de réaction (méthode externe). Grâce à une simulation, nous comparons les précisions attendues pour les deux approches. Enfin, nous étudions, toujours par simulation, l'influence néfaste des frottements sur l'identification interne.

Dans le sixième chapitre, nous comparons expérimentalement les deux approches. Le dispositif expérimental de la méthode externe se compose d'une part d'un système de vision SELSPOT (Selcom AB) pour mesurer les positions articulaires qui seront ensuite dérivées numériquement et d'autre part d'une plate-forme de mesure de force KISTLER. Nous mesurons également les courants d'alimentation des actionneurs pour en déduire les mesures de couples indispensables à la méthode d'estimation interne. Sur base de ces dispositifs, nous proposons une *validation* sur un manipulateur à un degré de liberté. Finalement, nous appliquons nos travaux sur un robot industriel PUMA 562.

Enfin, dans le septième chapitre, nous discutons des *précisions d'estimation* obtenues. Ne disposant d'aucune valeur de référence pour faire une comparaison objective, nous entamons cette discussion par une *simulation*. Son principe consiste à fournir au régulateur (basé sur le principe du couple calculé) les paramètres estimés augmentés de l'erreur correspondante à l'incertitude de l'estimation. Nous pouvons alors sur une trajectoire typique, analyser l'influence de cette erreur pour chacun des paramètres.

Chapitre 2

Principes de base de l'identification des paramètres.

2.1. Introduction

Dans le paragraphe relatif à l'état de l'art du chapitre introductif, nous avons vu que si la littérature propose plusieurs méthodes d'identification des paramètres caractérisant la répartition de masses dans les segments, la plupart des auteurs s'accordent pour dire qu'il est possible de mettre le modèle dynamique sous une *forme linéaire* vis-à-vis de ces paramètres. Nous ne désirons pas discuter de cette propriété dans ce chapitre, nous en reparlerons abondamment au début du chapitre troisième, nous voulons simplement *présenter les bases nécessaires à l'estimation des paramètres d'un modèle linéaire*, en discutant des conditions et des précisions que l'on peut attendre d'une identification.

A la fin de ce chapitre, nous introduisons un certain nombre de concepts indispensables à nos travaux. Pour le cas simple d'un corps rigide disposant d'une mobilité totale, nous montrons que la répartition de masses peut être définie par *dix paramètres indépendants* (entre eux): la masse, les trois moments du premier ordre et les six moments du deuxième ordre. Nous observons que ces paramètres *apparaissent linéairement dans les équations* de la dynamique. Pour former le *jeu de paramètres identifiables*, il faut encore éliminer des paramètres inertiels ceux qui sont absents du modèle dynamique. Enfin, la dernière condition d'identifiabilité est de trouver une *trajectoire excitante* ou *sensibilisante*.

L'ensemble de ces résultats sera utilisé dans la suite de ce travail pour estimer les paramètres barycentriques des manipulateurs.

2.2. Recherche de la solution au sens des moindres carrés

Nous verrons dans l'application présentée au paragraphe 2.5 que le problème d'estimation se ramène à la solution du système suivant:

$$\phi \delta = Z \quad (2.1)$$

avec ϕ la matrice ($m \times n$) de rang ρ avec $m \geq n$
 δ le vecteur (n) des inconnues
 Z le vecteur (m) des mesures

Si la matrice ϕ est inversible, la résolution du système est évidente. Dans le cas contraire, on peut rechercher une solution $\hat{\delta}$ qui minimise le carré des erreurs $\|\phi\hat{\delta} - Z\|^2$. On parle alors de solution par moindres carrés. Recherchons la forme de la pseudo-inverse de ϕ qui fournit cette solution.

a) Cas particulier

Dans le cas où tous les éléments non nuls de ϕ sont placés sur la "diagonale", la solution du système est facile à trouver.

Soit l'équation:

$$\Sigma \delta = Z \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mu_p & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \dots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Cette équation admet comme solution :

$$\hat{\delta}_i = \frac{z_i}{\mu_i} \quad (\text{pour } i = 1, \dots, \rho) \quad (2.3 \text{ a})$$

$\hat{\delta}_j$, a priori indéterminés (pour $j = \rho+1, \dots, n$). Nous les choisissons égaux à zéro pour obtenir la solution $\hat{\delta}$ de norme minimale. (2.3 b)

Cette solution s'exprime sous la forme $\hat{\delta} = \Sigma^+ Z$, avec:

$$\Sigma^+ = \text{la pseudo-inverse de } \Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mu_\rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice } (n \times m) \quad (2.4)$$

La condition d'estimation s'énonce clairement.

Pour que tous les éléments de δ soient identifiables, il faut que $\rho = n$ ($n \leq m$) c'est-à-dire que la matrice Σ soit de plein rang.

b) Cas général

Toute matrice ϕ ($m \times n$) peut être factorisée comme suit, cfr (Strang 76):

$$\phi = U \Sigma V^t \quad (2.5)$$

avec U une matrice orthogonale ($m \times m$) avec $m \geq n$

V la matrice orthogonale ($n \times n$) des vecteurs propres de $\phi^t \phi$

Σ la matrice quasi-diagonale ($m \times n$) de rang ρ des valeurs singulières de ϕ (racines carrées des valeurs propres de $\phi^t \phi$)

Nous cherchons à minimiser la norme de l'erreur d'estimation $\|\phi \hat{\delta} - Z\|^2$. En utilisant la factorisation (2.5) nous écrivons:

$$\|\phi \hat{\delta} - Z\| = \|U \Sigma V^t \hat{\delta} - Z\| \quad (2.6)$$

Comme le produit d'un vecteur par une matrice orthogonale ne modifie pas la norme, (2.6) peut s'écrire:

$$\|\phi \hat{\delta} - Z\| = \|\Sigma V^t \hat{\delta} - U^t Z\| \quad (2.7)$$

Si on pose $\theta = V^t \delta$ comme inconnue auxiliaire, le problème de moindres carrés revient donc à résoudre:

$$\Sigma \theta = U^t Z \quad (2.8)$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas particulier a), (2.2). En partitionnant (2.8) en fonction des valeurs singulières nulles et non nulles, nous écrivons:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^t \delta \\ V_2^t \delta \end{pmatrix} = U^t Z \quad (2.9)$$

avec Σ_1 la matrice diagonale ($p \times p$) des valeurs singulières non nulles de ϕ

La solution s'écrit alors:

$$\theta_1 = V_1^t \delta = \Sigma_1^{-1} U_1^t Z \quad (2.10 \text{ a})$$

$$\theta_2 = V_2^t \delta \text{ est indéterminé} \quad (2.10 \text{ b})$$

Comme dans le cas particulier, nous posons $\theta_2 = 0$ pour obtenir la solution de norme minimale. Cette solution s'exprime alors:

$$\hat{\delta} = V \hat{\theta} = V \Sigma^+ U^t Z = \phi^+ Z \quad (2.11)$$

avec la pseudo-inverse de ϕ : $\phi^+ = V \Sigma^+ U^t \quad (2.12)$

La condition d'estimation s'énonce clairement.

Pour que tous les éléments de θ , et par conséquent tous les éléments de δ , soient identifiables, il faut que $p = n$ ($n \leq m$) c'est-à-dire que la matrice ϕ soit de plein rang.

c) Factorisation QR

L'utilisation de la décomposition en valeurs singulières pour résoudre un problème de moindres carrés est coûteuse en temps calcul. C'est pourquoi, lorsque les colonnes de ϕ sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire que la matrice ϕ est de plein rang et par conséquent, δ est identifiable), on préfère utiliser la méthode de factorisation QR pour l'estimation.

Soit la factorisation QR de ϕ :

$$\phi = Q R \quad (2.13)$$

avec Q une matrice ($m \times n$) contenant des colonnes orthonormées ($Q^t Q = I$)
 R une matrice ($n \times n$) régulière et triangulaire supérieure

Comme ϕ est de plein rang, sa pseudo-inverse (2.12) peut également s'écrire, cfr (Strang 76):

$$\phi^+ = (\phi^t \phi)^{-1} \phi^t \quad (2.14)$$

En introduisant la factorisation QR (2.13) de ϕ dans l'expression (2.14), on trouve:

$$\begin{aligned} \phi^+ &= (\mathbf{R}^t \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{Q}^t \\ &= \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}^t)^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{Q}^t \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^t \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'avantage de cette présentation est qu'il n'est pas nécessaire de calculer complètement $\mathbf{R}^{-1}$ pour trouver la solution. En effet, puisque $\hat{\delta} = \phi^+ \mathbf{Z} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^t \mathbf{Z}$, on calcule d'abord le produit $\mathbf{Q}^t \mathbf{Z}$ et ensuite, par substitution régressive ($\mathbf{R}$ est triangulaire) on résout le système $\mathbf{R} \hat{\delta} = \mathbf{Q}^t \mathbf{Z}$. En procédant de la sorte, on gagne en temps calcul et surtout en place mémoire, ce qui peut s'avérer très intéressant dans le cas d'une estimation sur un grand nombre d'essais.

2.3. Estimation de combinaisons linéaires de δ

Nous nous intéressons maintenant à identifier une (ou des) combinaison(s) linéaire(s) γ de δ dont toutes les composantes ne sont pas nécessairement identifiables. Si, à partir de (2.1), on peut écrire un autre système, $\phi' \gamma = Z$, le problème est trivial. La condition d'identifiabilité de γ est que ϕ' soit de plein rang. Préoccupons nous maintenant du cas où il est impossible d'écrire une telle relation. L'intérêt de cette étude apparaîtra dans le chapitre sixième relatif à l'estimation externe.

Nous cherchons à identifier γ grâce à l'expression (2.1), avec $\gamma = s^t \delta$

La condition d'identifiabilité de δ est dans ce cas une condition suffisante mais elle n'est pas nécessaire. Recherchons alors une condition moins restrictive.

$$\gamma = s^t \delta \quad (2.16)$$

Remplaçons δ par $V\theta$, cfr § 2.2.b, dans cette expression; nous obtenons:

$$\gamma = s^t V \theta \quad (2.17)$$

En partitionnant cette expression comme dans (2.9), nous écrivons:

$$\begin{aligned} &= (s^t V_1 \quad s^t V_2) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= s^t V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^t Z + s^t V_2 \theta_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Par conséquent, la condition d'identifiabilité s'écrit:

$$\begin{aligned} \gamma \text{ est identifiable} &\text{ ssi } s^t V_2 = 0 \\ \text{ou encore} &\text{ ssi } s \text{ appartient à l'espace engendré par les colonnes de } V_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

(car les espaces engendrés par les colonnes de V_1 et V_2 sont orthogonaux)

Cette condition exprime que la combinaison γ est identifiable ssi γ est une projection de δ sur une direction "identifiable", c'est-à-dire située dans l'espace engendré par les colonnes de V_1 (les vecteurs propres à valeurs propres non nulles de $\phi\phi$).

Dans la pratique, cette condition est difficile à appliquer, aussi nous nous contenterons au chapitre six d'exprimer que toutes les composantes de δ qui interviennent dans le calcul de γ sont identifiables.

2.4. Précision d'estimation

La précision d'estimation peut être évaluée sur les valeurs singulières. Plus le rapport entre la plus petite et la plus grande valeur singulière sera grand, meilleure sera la précision d'estimation. En particulier, si certaines valeurs singulières sont nulles, la matrice ϕ n'est plus de plein rang et δ n'est plus identifiable. Cette étude ne permet malheureusement pas de déterminer l'erreur sur l'estimation des paramètres. Une alternative intéressante permettant de quantifier cette valeur consiste à étudier l'espace de confiance des paramètres estimés.

On a montré, cfr (Ljung 87), que si l'on suppose que les mesures $\mathbf{Z}$ sont affectées par un bruit additif, blanc, indépendant et de moyenne nulle, la répartition des valeurs estimées tend vers une distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{P}_\delta$.

Soit un bruit $\mathbf{v}$ de mesure sur $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{v} \quad (2.20)$$

avec les caractéristiques suivantes:

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}\mathbf{v}^t) = \mathbf{P}_v \quad (\text{matrice diagonale}) \quad (2.22)$$

Dès lors:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta &= \mathbf{E}(\delta\delta^t) \\ &= \mathbf{E}((\phi^+ \mathbf{Z})(\phi^+ \mathbf{Z})^t) \\ &= \phi^+ \mathbf{P}_v (\phi^+)^t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Posons $\mathbf{P}_v = \sigma_v^2 \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ la matrice unité), c'est-à-dire que l'on suppose le bruit non corrélé avec la même variance sur toutes les composantes. Sous cette hypothèse, l'expression (2.23) se réécrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta &= \sigma_v^2 \phi^+ (\phi^+)^t \\ &= \sigma_v^2 (\mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^t)(\mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^t)^t \\ &= \sigma_v^2 \mathbf{V} \Sigma^+ (\Sigma^+)^t \mathbf{V}^t \end{aligned} \quad (2.24)$$

On tire de cette expression le vecteur σ_δ des écarts-type:

$$\sigma_\delta \mathbf{V} = \sigma_v \sqrt{\text{diag}(\Sigma^+ (\Sigma^+)^t)} \quad (2.25 \text{ a})$$

$$\sigma_{\delta} V = \sigma_v \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} \\ \dots \\ \mu_i^{-1} \\ \dots \\ \mu_n^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.25 \text{ b})$$

En utilisant la décomposition QR, l'expression de la matrice de covariance (2.24) devient:

$$P_{\delta} = \sigma_v^2 (R^T R)^{-1} \quad (2.26)$$

et le vecteur des écarts-type se réécrit:

$$\sigma_{\delta} = \sigma_v \sqrt{\text{diag}(R^T R)^{-1}} \quad (2.27)$$

Cette expression est difficile à utiliser car on ne connaît que rarement la valeur de σ_v . On utilise alors une estimation de σ_v grâce au résidu de l'estimation, cfr (Ljung 87):

Soit r le résidu de l'estimation,

$$r = Z - \hat{\phi} \hat{\delta} \quad (2.28)$$

$$e_{\delta} = \sqrt{\frac{r^T r}{m-n}} \sqrt{\text{diag}(R^T R)^{-1}} \quad (2.29)$$

2.5 Application

Appliquons les résultats obtenus dans le paragraphe 2.2 à l'estimation des paramètres inertiels d'un corps rigide totalement libre, c'est-à-dire qui possède six degrés de liberté.

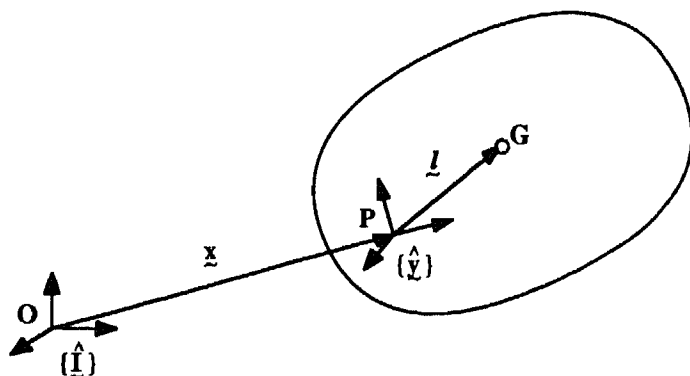


Fig. 2.1 Corps rigide totalement libre.

Soit le corps rigide représenté à la figure 2.1; sa cinématique est caractérisée par la position du point P et l'orientation du repère $\{\hat{Y}\}$. Nous définissons:

- $\{\hat{I}\}$ un repère inertiel positionné en O
- $\{\hat{Y}\}$ un repère lié au corps et positionné en P
- $\underline{x} = [\hat{I}]^t \mathbf{x}$ le vecteur (O P)
- $\underline{\omega} = [\hat{Y}]^t \boldsymbol{\omega}$ le vecteur vitesse angulaire du repère $\{\hat{Y}\}$

La répartition de masse dans ce corps est caractérisée par les dix paramètres suivants:

- m la masse
- $\underline{l} = [\hat{Y}]^t \mathbf{l}$ le vecteur (P G), avec G la position du centre de masse
- I^P le tenseur d'inertie du corps par rapport au point P

Ecrivons les équations de la dynamique de ce corps. Les détails de ce calcul seront donnés dans le chapitre suivant, cfr (3.27) et (3.37). Nous obtenons les trois équations de translation et les trois équations de rotation:

$$\underline{\underline{F}} = m (\underline{\underline{\ddot{x}}} - \underline{\underline{g}}) + (\underline{\underline{\dot{\omega}}} + \underline{\underline{\omega}} \underline{\underline{\omega}}) m \underline{\underline{l}} \quad (2.30)$$

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{x}} \times \left(m (\underline{\underline{\ddot{x}}} - \underline{\underline{g}}) + (\underline{\underline{\dot{\omega}}} + \underline{\underline{\omega}} \underline{\underline{\omega}}) m \underline{\underline{l}} \right) + m \underline{\underline{l}} \times (\underline{\underline{\ddot{x}}} - \underline{\underline{g}}) + \mathbf{I}^P \underline{\underline{\dot{\omega}}} + \underline{\underline{\omega}} \times \mathbf{I}^P \underline{\underline{\omega}} \quad (2.31)$$

où $\underline{\underline{g}}$ représente le vecteur de gravité

$\underline{\underline{\omega}}$ représente le tenseur de préproduit vectoriel, cfr (3.8)

Les six équations (2.30) et (3.31) sont fonctions des *dix paramètres inertiels* suivants:

- la masse m
- les trois moments du premier ordre $m l_x, m l_y, m l_z$
- les six moments du second ordre $I_{xx}^P, I_{xy}^P, I_{xz}^P, I_{yy}^P, I_{yz}^P, I_{zz}^P$

Ces paramètres sont *indépendants* (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas combinaisons l'un de l'autre) et apparaissent *linéairement* dans les équations de la dynamique. Par conséquent, si l'on dispose des mesures de $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{L}}$ d'une part et de $\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{\omega}}, \underline{\underline{\dot{\omega}}}$ ainsi que de l'orientation du repère $\{\hat{\underline{\underline{y}}}\}$ d'autre part, nous écrivons les équations (2.30) et (2.31) sous la forme:

$$\Phi \delta = Q \quad (2.32)$$

où: Φ est la matrice (6 x 10) fonction de $\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{\omega}}, \underline{\underline{\dot{\omega}}}$ ainsi que de l'orientation du repère $\{\hat{\underline{\underline{y}}}\}$

δ est le vecteur des paramètres à estimer, de dimension (10)

$Q = \begin{pmatrix} F \\ L \end{pmatrix}$ est le vecteur des mesures, de dimension (6)

Dans le système (2.32), le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Nous considérons alors cette expression à M instants différents. Nous obtenons ainsi le système suivant:

$$\Phi \delta = Z \quad (2.33)$$

$$\text{où } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_M \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_M \end{pmatrix}$$

Le système (2.33) est identifiable si la matrice ϕ est de plein rang, c'est-à-dire si on dispose d'une série d'échantillons permettant d'estimer tous les éléments de δ . Nous parlons de *trajectoire excitante* (Persistant Excitation), ou encore de *trajectoire sensibilisante*.

A titre d'exemple, nous remarquons que des mesures statiques (à vitesses nulles) permettent d'estimer la masse et les moments du premier ordre. Pour estimer les moments du deuxième ordre, il faut obligatoirement effectuer des essais à vitesses angulaires variables.

Le rang de la matrice ϕ ne dépend pas uniquement des trajectoires choisies pour l'identification, il est également fonction de la mobilité dont dispose le corps. Dans notre exemple, le corps a six degrés de liberté et donc les dix paramètres inertiels apparaissent dans le modèle dynamique. Comme de plus les colonnes de ϕ sont indépendantes ces paramètres forment un *jeu identifiable*.

Par contre, si nous limitons la mobilité du corps en maintenant le point P fixe grâce à une force $\underline{F}$ que l'on ne peut mesurer, le système (2.33) est amputé de toutes les équations de translation. Nous observons alors que la masse disparaît du modèle dynamique. Le jeu de paramètres dynamiques identifiables est donc réduit à neuf. Nous parlons alors de *perte de rang structurelle*.

Étendons cet exemple à un robot manipulateur comportant n segments. La répartition de masse de la structure est donc caractérisée par $10n$ paramètres inertiels indépendants. Comme les articulations n'ont généralement qu'un seul degré de liberté, il est fort probable que certains des paramètres inertiels n'apparaîtront pas dans les équations de la dynamique. La taille du jeu de paramètres identifiables sera donc inférieure à $10n$.

Notre exemple est limité à un seul corps; nous verrons par la suite, cfr § 3.3.4 d, qu'en effectuant le même type de travail sur une structure à plusieurs corps, il est possible de mettre en évidence dans les équations du modèle des *combinaisons de colonnes de ϕ* . Quelle que soit la trajectoire d'essai, la matrice ϕ ne pourra donc jamais être de plein rang. Par conséquent, avant de rechercher une trajectoire excitante, il faut d'abord rechercher un jeu de paramètres identifiables. Cette recherche doit comprendre deux étapes. Premièrement, il faut supprimer les paramètres n'apparaissant pas dans le modèle. Deuxièmement, des combinaisons de paramètres sont indispensables pour assurer l'indépendance des colonnes de ϕ .

2.6 Conclusions

Parmi tous les développements présentés dans ce chapitre, le point essentiel à retenir pour notre application concerne les conditions d'estimation: *la matrice ϕ doit être de plein rang*. Nous avons montré que la perte de rang de ϕ pouvait avoir une origine structurelle ou être liée à la trajectoire.

Il est important de bien dissocier ces deux sources de perte de rang. Nous avons montré au premier chapitre que certains auteurs définissent le jeu de paramètres au fur et à mesure des essais. C'est donc l'essai qui conditionne la présence d'un paramètre. Par conséquent, il existe un risque "d'oublier" un paramètre. Inversement, on peut prendre comme point de départ les 10n paramètres inertiels. Ensuite, on élimine (ou on combine) des paramètres en fonction du conditionnement de la matrice ϕ pour une trajectoire donnée. A nouveau, la définition du jeu de paramètres dépend du choix des trajectoires.

Nous avons montré sur un exemple que la perte de rang structurelle est due à une surparamétrisation. Les paramètres inertiels (masse, moments du premier ordre et moments du second ordre) forment un *jeu de paramètres indépendants* (au sens de l'algèbre linéaire). Mais, en fonction des particularités de l'arborescence et des articulations, certains paramètres n'apparaissent pas dans les équations de la dynamique. De plus, certaines colonnes de la matrice ϕ peuvent être combinaisons l'une de l'autre. Par conséquent, le jeu des 10n paramètres inertiels n'est pas nécessairement identifiable. Le jeu de *paramètres identifiables* est constitué des paramètres inertiels *combinés* et diminués des paramètres *absents* du modèle.

Nous proposons alors de décomposer la procédure en deux étapes, voir figure 2.2. On commence par rechercher un jeu de paramètres identifiables en se basant uniquement sur les équations du modèle pour éviter toute surparamétrisation structurelle. Une fois le jeu de paramètres identifiables déterminé, la perte de rang de ϕ ne peut plus être due qu'à un mauvais choix de la trajectoire. Nous chercherons donc une trajectoire *excitante* ou sensibilisante.

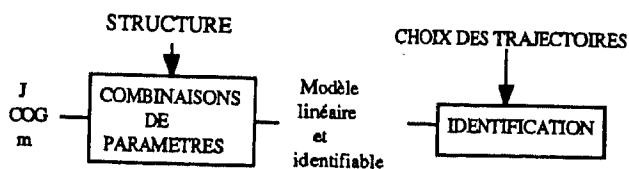


Fig. 2.2 Procédure d'estimation.

Nous allons, dans les deux chapitres suivants étudier la perte de rang structurelle en décomposant les combinaisons suivant leurs natures. Nous distinguerons des combinaisons qui dépendent uniquement de l'arborescence et celles qui dépendent de la mobilité résultant de la nature des articulations. Dans le chapitre troisième nous traiterons de la première famille de combinaisons tandis que la deuxième famille sera traitée au chapitre quatrième.