

Une introduction élémentaire au 2-groupe de Grothendieck

Corentin Drugmand

Juin 2016

Pour mes enfants, Benoît, François, Sophie et tout ceux qui, éventuellement, viendraient encore. Apprenez, mes chers enfants, à rechercher sans cesse la Vérité. Chérissez-la, laissez-la vous guider et vous émerveiller. Car l'homme qui met la recherche de la Vérité au centre de sa vie a le désir d'agir avec honneur pour le bien des autres.

Remerciements

Je remercie le Seigneur, à qui nous devons tout. Seigneur, toi qui nous guide par ton Esprit, préserve nous du mal et conduis-nous à ta Vérité, ton Amour.

Je remercie Cécile, mon épouse, mon amie, mon égale. Son amour quotidien et son soutien indéfectible, même dans les moments les plus difficiles, ont été pour moi une source de réconfort tout au long de ces six années de thèse. Je lui exprime ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Je remercie mon père et ma mère, qui m'ont élevé comme ils le pouvaient avec ce qu'ils étaient. C'est quand je suis devenu père que j'ai véritablement compris à quel point mes parents m'ont aimé.

Je remercie mon frère Joris et ma soeur Candice pour leur amitié et leur solidarité.

Je remercie Mathieu, Jérémie et Rodrigue pour leur amitié si durable.

Je remercie M. et Mme Coyette qui ont si souvent accepté de s'occuper des enfants. Sans cette aide précieuse, je n'aurais pas pu terminer d'écrire ce texte. À cet égard, je remercie également Alice, Alexis et Jean-Baptiste pour le temps qu'ils ont sacrifié. Je remercie plus particulièrement Michel qui ne rechigne jamais à partager son savoir et sa culture mathématique.

Je remercie Arnaud qui m'a tout appris et a profondément bouleversé mon regard sur le monde. Il m'a inculqué l'amour de la vérité, l'amour de «ce qui est». En ce sens, je n'éprouve aucune honte à dire qu'il est «mon maître».

Je remercie M. Jean Bénabou. Je me suis abreuvé de sa pensée mathématique durant la dernière année de ma thèse. Elle a été pour moi comme une renaissance à la théorie des catégories. Il est dommage que cette influence tardive ne se ressente pas dans ce travail, mais la vision de Jean Bénabou sera, à l'avenir, une grande source d'inspiration pour moi.

Je remercie le professeur Vitale qui m'a proposé de faire ce travail il y a six ans. Je le remercie de m'avoir toujours accueilli et écouté lorsque j'avais une question. Je le remercie d'avoir lu et commenté ce texte. Je le remercie pour sa gentillesse, pour nous avoir aidé à déménager et à transporter le matelas. Je le remercie également pour sa prière très profonde lors de mon mariage.

Je remercie MM. Gran, Van der Linden, Vaz, Caenepeel et Metere, qui ont accepté de lire et de commenter ce texte.

Je remercie Laura Rizzerio pour sa fabuleuse tarte au saumon, un don divin!

Table des Matières

Introduction	3
1 Groupe commutatif libre engendré par un monoïde commutatif	13
1.1 Contexte catégoriel général	14
1.2 Transfert de structure pour les systèmes trivialisants	20
1.3 Systèmes trivialisants et conoyaux dans $\mathsf{MonCom}(\mathbb{C})$. . .	23
1.3.1 Les systèmes trivialisants de $\mathsf{MonCom}(\mathbb{C})$ sont des conoyaux	23
1.3.2 Les conoyaux de $\mathsf{MonCom}(\mathbb{C})$ sont des systèmes trivialisants	26
1.4 Structures cofinales	28
1.5 Adjoint à gauche au foncteur d'oubli entre $\mathsf{GrpCom}(\mathbb{C})$ et $\mathsf{MonCom}(\mathbb{C})$	31
1.6 Résultats existants	35
2 2-groupe symétrique libre engendré par un 2-monoïde symétrique	39
2.1 Contexte 2-catégoriel général	39
2.2 Transfert de structure pour les 2-systèmes trivialisants	57
2.3 2-Systèmes trivialisants et 2-conoyaux dans $2\text{-}\mathsf{MonSym}(\mathcal{C})$. .	64
2.3.1 Les 2-systèmes trivialisants de $2\text{-}\mathsf{MonSym}(\mathcal{C})$ sont (presque) des 2-conoyaux	65
2.3.2 Les 2-conoyaux de $2\text{-}\mathsf{MonSym}(\mathcal{C})$ sont (presque) des 2-systèmes trivialisants	68
2.4 Structures 2-cofinales	70
2.5 Biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli entre $2\text{-}\mathsf{GrpSym}(\mathcal{C})$ et $2\text{-}\mathsf{MonSym}(\mathcal{C})$	73
3 Description ensembliste des 2-systèmes trivialisants	81
3.1 Rappels	82
3.1.1 Produit cartésien, produit fibré, coégalisateur de graphe réflexif	82

3.1.2	2-produit cartésien, 2-produit fibré	84
3.1.3	2-foncteur $\mathbb{I}_0$	87
3.1.4	2-foncteur $\mathbb{I}_1$	88
3.2	Description ensembliste des systèmes trivialisants	89
3.3	2-systèmes trivialisants dans $\mathcal{Grpd}$ relatifs à une 2-action iden- titaire sur la symétrie diagonale	92
3.4	Réduction de 2-actions	111
3.5	2-systèmes trivialisants dans $\mathcal{Grpd}$	120
4	K-théorie algébrique	135
4.1	Rappels K -théoriques	136
4.2	Caractérisation de $K_0(\mathbb{M})$	141
4.3	Caractérisation de $K_1(\mathbb{M})$	142
4.4	Caractérisation de K_F	150
4.5	Généralisation de la suite exacte de la K -théorie algébrique . .	157
	Bibliographie	164

Introduction

- Remarques.** 1. Dans ce texte, nous privilégierons systématiquement la terminologie de «2-monoïde» pour désigner ce que l'on appelle généralement des groupoïdes monoïdaux, c'est-à-dire des groupoïdes $\mathbb{M}$ muni d'un produit $\otimes$, d'un objet unité I et d'isomorphismes naturels a, g, d satisfaisant à des conditions de cohérence et exprimant essentiellement le fait que le produit est associatif et que I est une unité à gauche et à droite, tout cela à «isomorphisme près» (voir, par exemple, le chapitre VII de [Mac97]). Dans le même ordre d'idée, nous appellerons 2-groupe tout 2-monoïde $\mathbb{G}$ muni d'un foncteur $()^* : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ et pour tout objet G de $\mathbb{G}$, d'un isomorphisme naturel $\delta_G : G \otimes G^* \rightarrow I$.
2. La plupart des 2-monoïdes présents dans ce travail sont *symétrique*, c'est-à-dire qu'ils sont munis, pour tout objet M et N , d'un isomorphisme naturel $c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ satisfaisant à des conditions de cohérences, ainsi que la condition de symétrie

$$c_{N,M}c_{M,N} = id_{M \otimes N}.$$

Si $\mathbb{M}$ est un tel 2-monoïde, la symétrie nous permet d'utiliser le fait que le produit $\otimes : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ est un morphisme de 2-monoïdes symétriques. Ceci n'est plus vrai dans le cas dit *tressé*, c'est-à-dire lorsque l'isomorphisme $c_{M,N}$ ne satisfait pas à la condition de symétrie. Nous ne savons pas si les résultats présentés dans ce travail survivent dans ce cas plus général. Toutefois, la plupart des développements et démonstrations introduites ici n'y sont plus valides.

3. Toutes les bilimites (et bicolimites) dont il sera question dans ce rapport sont en fait des 2-limites (ou 2-colimites) strictes (voir, par exemple, le chapitre 7 de [Bor94]). Nous avons en effet sacrifié le souci de généralité sur l'autel de la simplification rédactionnelle. Le lecteur scrupuleux généralisera sans peine aux cas des bilimites les résultats présentés ici. Il est toutefois notable que la biadjonction obtenue au théorème 2.5.1, bien que construite exclusivement à partir de 2-colimites, est une «vraie» biadjonction et non une 2-adjonction au sens strict. Nous orientons le lecteur vers [Gra74] pour l'introduction originelle (à notre connaissance)

de la notion de biadjonction et, par exemple, vers [Fio06] pour une formulation plus récente.

La K -théorie algébrique «à la Bass» relative aux 2-monoïdes symétriques se donne comme objet d'étude, pour tout 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$, les groupes commutatifs $K_0(\mathbb{M})$ et $K_1(\mathbb{M})$, respectivement appelés *groupe de Grothendieck* et *groupe de Whitehead* relatif à $\mathbb{M}$. $K_0(\mathbb{M})$ peut se définir comme suit (voir [Bas68] ou [Bas67]): $K_0(\mathbb{M})$ est un groupe commutatif muni d'une application $[\]_{\mathbb{M},0} : \text{Ob}(\mathbb{M}) \rightarrow K_0(\mathbb{M})$ qui est, parmi toutes les applications dont le domaine est $\text{Ob}(\mathbb{M})$ et dont le codomaine est un groupe commutatif, l'application universelle satisfaisant, pour tout objet A et B de $\mathbb{M}$, aux deux conditions suivantes:

1. si $A \simeq B$ dans $\mathbb{M}$, alors $[A]_{\mathbb{M},0} = [B]_{\mathbb{M},0}$,
2. $[A \otimes B]_{\mathbb{M},0} = [A]_{\mathbb{M},0} * [B]_{\mathbb{M},0}$.

Nous désignons par $\text{Aut}(\mathbb{M})$ le groupoïde dont les objets sont les couples (M, f) , où M est un objet de $\mathbb{M}$ et $f : M \rightarrow M$ est un automorphisme de M dans $\mathbb{M}$ et dont les flèches $s : (M, f) \rightarrow (N, g)$ sont les flèches $s : M \rightarrow N$ de $\mathbb{M}$ telles que $sf = gs$. $K_1(\mathbb{M})$ peut se définir comme suit (voir [Bas68] ou [Bas67]): $K_1(\mathbb{M})$ est un groupe commutatif muni d'une application $[\]_{\mathbb{M},1} : \text{Ob}(\text{Aut}(\mathbb{M})) \rightarrow K_1(\mathbb{M})$ qui est, parmi toutes les applications dont le domaine est $\text{Ob}(\text{Aut}(\mathbb{M}))$ et dont le codomaine est un groupe commutatif, l'application universelle satisfaisant, pour tout objet (M, f) , (M, g) et (N, h) de $\text{Aut}(\mathbb{M})$, aux trois conditions suivantes:

1. si $(M, f) \simeq (N, h)$ dans $\text{Aut}(\mathbb{M})$, alors $[M, f]_{\mathbb{M},1} = [N, h]_{\mathbb{M},1}$,
2. $[M \otimes N, f \otimes h]_{\mathbb{M},1} = [M, f]_{\mathbb{M},1} * [N, h]_{\mathbb{M},1}$,
3. $[M, gf]_{\mathbb{M},1} = [M, g]_{\mathbb{M},1} * [M, f]_{\mathbb{M},1}$.

Si nous introduisons d'emblée les définitions des groupes commutatifs $K_0(\mathbb{M})$ et $K_1(\mathbb{M})$, c'est afin de préciser au lecteur que l'entièreté des travaux effectués lors de nos années de thèse, en ce compris les travaux qui ne seraient pas repris dans ce compte-rendu, l'ont été dans l'objectif de mieux percevoir l'essence de ces deux groupes commutatifs.

Soit $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ un morphisme de 2-monoïdes symétriques. Nous désignons par $K_0(F) : K_0(\mathbb{M}) \rightarrow K_0(\mathbb{N})$ l'unique morphisme de groupes commutatifs tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}(\mathbb{M}) & \xrightarrow{[\]_{\mathbb{M},0}} & K_0(\mathbb{M}) \\ \text{Ob}(F) \downarrow & & \downarrow K_0(F) \\ \text{Ob}(\mathbb{N}) & \xrightarrow{[\]_{\mathbb{N},0}} & K_0(\mathbb{N}) \end{array}$$

commute. Soient alors 2-MonSym la catégorie des 2-monoïdes symétriques, MonCom la catégorie des monoïdes commutatifs, GrpCom la catégorie des groupes commutatifs, $\Pi_0 : 2\text{-MonSym} \rightarrow \text{MonCom}$ le foncteur envoyant tout 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$ sur le monoïde commutatif dont les éléments sont les classes d'isomorphisme des objets de $\mathbb{M}$ et

$$\text{MonCom} \begin{array}{c} \xleftarrow{U} \\ \xrightarrow[\tau]{L} \\ \xrightarrow{L} \end{array} \text{GrpCom},$$

une adjonction à gauche au foncteur d'oubli $U : \text{GrpCom} \rightarrow \text{MonCom}$. Au vu de la définition rappelée ci-dessus, il est bien connu que le groupe de Grothendieck K_0 peut également se concevoir comme un foncteur faisant commuter (éventuellement à isomorphisme naturel près) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-MonSym} & & \\ \Pi_0 \downarrow & \searrow K_0 & \\ \text{MonCom} & \xrightarrow{L} & \text{GrpCom}. \end{array}$$

À partir de là, puisqu'un 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$ est un groupoïde et donc un objet mathématique possédant deux «types d'informations», les objets et les flèches et puisque $K_0(\mathbb{M})$ est, quant à lui, un ensemble, c'est-à-dire un objet mathématique ne possédant qu'un «type d'information», les éléments de l'ensemble lui-même, nous voyons que, dans $K_0(\mathbb{M})$, une partie de l'information contenue dans $\mathbb{M}$ a disparu. Cette perte se produit lors de l'application du foncteur Π_0 qui identifie les objets de $\mathbb{M}$ et «oublie» une grande partie de l'information contenue dans les flèches de $\mathbb{M}$. Cette observation nous permet d'introduire le problème principal traité dans cet ouvrage: en désignant par 2-GrpSym la catégorie des 2-groupes symétriques, est-il possible de construire un foncteur $\mathbb{L} : 2\text{-MonSym} \rightarrow 2\text{-GrpSym}$ qui soit un adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathbb{U} : 2\text{-GrpSym} \rightarrow 2\text{-MonSym}$ et qui soit tel que

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-MonSym} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & 2\text{-GrpSym} \\ \Pi_0 \downarrow & \searrow K_0 & \downarrow \Pi_0 \\ \text{MonSym} & \xrightarrow{L} & \text{GrpSym} \end{array}$$

soit un diagramme commutatif (éventuellement à isomorphisme naturel près)? Et si nous considérons plutôt les 2-catégories 2-MonSym et 2-GrpSym , respectivement des 2-monoïdes symétriques et des 2-groupes symétriques, des foncteurs monoïdaux symétriques et des transformations naturelles monoïdales, l'adjonction construite précédemment (pour autant que celle-ci existe) est-elle

une biadjonction (nous orientons le lecteur vers la définition 9.8 de [Fio06] pour une définition précise de biadjonction)? Pour $\mathbb{M}$ un 2-monoïde symétrique, le 2-groupe symétrique $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ ainsi construit mériterait très certainement (tout du moins à notre sens) l'appellation de 2-groupe de Grothendieck.

Afin de trouver des réponses satisfaisantes aux problèmes ainsi posés, nous nous sommes attelés à étudier plus spécifiquement le foncteur $L : \text{MonSym} \rightarrow \text{GrpSym}$. Une construction possible et bien connue de L est la suivante: pour M est un monoïde commutatif, $L(M)$ peut se décrire comme l'ensemble quotient $(M \times M)/\sim$, où $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ s'il existe un élément x de M tel que

$$m_1 * n_2 * x = n_1 * m_2 * x.$$

Le produit issu de $M \times M$ permet de définir une structure de groupe commutatif sur $L(M)$ pour laquelle l'inverse d'un élément (m, n) est alors (n, m) . Indépendamment de cela, considérons un morphisme de monoïdes commutatifs $f : M \rightarrow N$. Il est bien connu que le conoyau $\text{Coker}(f)$ de f peut se construire comme suit: $\text{Coker}(f)$ est l'ensemble quotient $N/\simeq$, où $n_1 \simeq n_2$ s'il existe deux éléments m_1, m_2 de M tels que

$$n_1 * f(m_1) = n_2 * f(m_2).$$

Si nous présentons successivement la construction du groupe de Grothendieck d'un monoïde commutatif et celle du conoyau d'un morphisme de monoïdes commutatifs, c'est parce que, dès le début de nos travaux, nous avons pressenti qu'un lien devait exister entre ces deux notions. Nous avons mis ce lien en évidence dans la proposition suivante.

Proposition. *Soit M un monoïde commutatif et soit $\Delta_M : M \rightarrow M \times M; m \mapsto (m, m)$ le morphisme diagonal de M . Il existe un isomorphisme de monoïde commutatif entre $L(M)$ et $\text{Coker}(\Delta_M)$. Autrement dit, l'adjoint à gauche L envoie tout monoïde commutatif sur le conoyau de sa diagonale.*

La preuve de ce fait est élémentaire et est un simple jeu de correspondance entre les deux descriptions présentées ci-dessus. Toutefois, celle-ci induit, selon nous, deux questions particulières:

1. Le conoyau du morphisme diagonal Δ_M d'un monoïde symétrique M doit-être, par définition de conoyau, un monoïde symétrique. Dans ce cas, pourquoi possède-t-il en plus une structure de groupe?
2. Le fait que le foncteur L soit le conoyau des morphismes diagonaux est-il spécifique au contexte ensembliste dans lequel nous travaillons jusque alors, ou bien ce résultat peut-il se généraliser de façon interne à une catégorie qui posséderait des propriétés particulières?

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possédant les produits finis. Pour répondre à la question 1 ci-dessus, nous avons introduit une notion originale, que nous avons

appelée *structure cofinale*. Si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$, une structure cofinale sur f est la donnée d'un morphisme de monoïdes symétriques $\zeta : N \rightarrow N$ et d'un morphisme $\theta : N \rightarrow M$ de $\mathbb{C}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{(id_N, \zeta)} & N \times N \\ \theta \downarrow & & \downarrow * \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

est commutatif (définition 1.4.1). Notre résultat est alors le suivant (proposition 1.4.3).

Proposition. *Soient $f : M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et $(Coker(f), p_f)$ un conoyau de f . Si (ζ, θ) est une structure cofinale sur f , alors il existe un unique morphisme $()^* : Coker(f) \rightarrow Coker(f)$ de $\mathbb{C}$ tel que $()^* p_f = p_f \zeta$ et celui-ci est alors tel que $Coker(f)$ est un groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$.*

Ce résultat permet d'expliquer pourquoi le conoyau du morphisme diagonal Δ_M est un groupe commutatif quel que soit le monoïde commutatif M interne à $\mathbb{C}$ considéré. En effet, la permutation canonique $(\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1) : M \times M \rightarrow M \times M$ et le produit $* : M \times M \rightarrow M$ forment une structure cofinale sur Δ_M (lemme 1.5.1).

Nous désignons par $MonCom(\mathbb{C})$ et par $GrpCom(\mathbb{C})$, respectivement la catégorie des monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et la catégorie des groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et nous supposons que $MonCom(\mathbb{C})$ possède les conoyaux des morphismes diagonaux. Pour répondre à la question 2 exposée ci-dessus, nous avons introduit dans la section 1.5 le foncteur L

$$\begin{array}{ccc} L : MonCom(\mathbb{C}) & \rightarrow & GrpCom(\mathbb{C}); \\ M & \mapsto & Coker(\Delta_M) \\ f \downarrow & & \downarrow coker(\Delta_f) \\ N & & Coker(\Delta_N) \end{array}$$

et démontré l'important résultat suivant (théorème 1.5.2)

Théorème. *L est un adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : GrpCom(\mathbb{C}) \rightarrow MonCom(\mathbb{C})$.*

Soulignons que ce dernier théorème est une version plus générale de la proposition 1.7.6 de [BB04] due à Borceux et à Bourn. Nous présentons et discutons cette dernière dans la section 1.6.

Dans la foulée, nous avons montré que les résultats précédemment introduits se généralisent au contexte des 2-catégories. Pour cela, étant donnée une 2-catégorie $\mathcal{C}$ possédant les 2-produits finis, nous avons commencé par introduire la notion de *structure 2-cofinale* sur un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ (définition 2.4.1). Notre résultat est qu'alors, les structures 2-cofinale sur les 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ induisent des structures de 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{C}$ sur les 2-conoyaux de ces 1-morphismes (proposition 2.4.3), ce qui constitue une généralisation de la proposition 1.4.3 exposée ci-dessus. Par ailleurs, en désignant par $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ et par $2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$, respectivement la 2-catégorie des 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et la 2-catégorie des 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{C}$, si $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ possède les 2-conoyaux des 1-morphismes diagonaux, alors le 2-foncteur

$$\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C}) \rightarrow 2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$$

$$F \begin{pmatrix} \mathbb{M} \\ \xRightarrow{\alpha} \\ \mathbb{N} \end{pmatrix} G \mapsto Coker(\Delta_F) \begin{pmatrix} Coker(\Delta_{\mathbb{M}}) \\ \xRightarrow{coker(\Delta_{\alpha})} \\ Coker(\Delta_{\mathbb{N}}) \end{pmatrix} Coker(\Delta_G)$$

introduit dans la section 2.5 est un biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U} : \mathcal{G}rpSym(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ (théorème 2.5.1). Ceci est une généralisation du théorème 1.5.2 présenté ci-dessus.

Dans le cas où la 2-catégorie $\mathcal{C}$ est la 2-catégorie $\mathcal{G}rpd$ des groupoïdes, il suffit, afin de construire le biadjoint à gauche $\mathbb{L}$, de construire le 2-conoyaux du morphisme diagonal d'un 2-monoïde symétrique quelconque. Plus globalement, il suffit de construire le 2-conoyaux d'un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques quelconque. Afin d'apporter un degré de généralité supplémentaire à cette construction, nous avons introduit les développements suivants. Considérons une 2-catégorie $\mathcal{C}$ possédant les 2-produits finis et soit $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ une 2-action (à droite) interne à $\mathcal{C}$ d'un 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$ interne à $\mathcal{C}$ sur un objet $\mathbb{S}$ de $\mathcal{C}$ (voir section 2.1). Nous appellerons 2-système trivialisant relatif à $\odot$ la 2-colimite dans $\mathcal{C}$ de

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} & (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} \\ \downarrow Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \nearrow \alpha & & & \downarrow \odot \\ \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \odot \quad} & \mathbb{S} & & \\ \downarrow (Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) & \nearrow \delta & \downarrow Id_{\mathbb{S}} & & \\ \mathbb{S} & \xrightarrow{\quad \Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 \quad} & \mathbb{S} & & \end{array}$$

et nous désignerons celui-ci par $P_{\odot} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\odot$. Nous montrons dans la section 2.3 qu'à toute 2-action $\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ interne à la 2-catégorie $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

des 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, on peut associer un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques

$$\mathbb{M} \xrightarrow{(I, Id_{\mathbb{M}})} \mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{N}$$

dont les 2-conoyaux sont exactement les 2-systèmes trivialisants $P_{\odot} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}/\odot$ relatif à $\odot$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ (proposition 2.3.1). Inversement, nous montrons qu'à tout 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$, on peut associer une 2-action $\odot_F$ interne à $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times F} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{N}$$

dont les 2-systèmes trivialisants sont exactement les 2-conoyaux $P_F : \mathbb{N} \rightarrow \text{Coker}(F)$. Ainsi, lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{G}rpd$, donner une description des 2-conoyaux des 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques (et donc, en particulier, du bi-adjoint $\mathbb{L}$) est équivalent au fait de donner une description des 2-systèmes trivialisants relatifs aux 2-actions internes à la 2-catégorie $2\text{-}\mathcal{M}onSym$. Par ailleurs, lorsque dans $\mathcal{C}$, les 2-systèmes trivialisants existent et commutent avec les 2-produits binaires, alors les 2-systèmes trivialisants existent dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ et sont préservés par le 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$. Ainsi, dans $\mathcal{C}$, pour donner une description des 2-systèmes trivialisants relatifs aux 2-actions internes à la 2-catégorie $2\text{-}\mathcal{M}onSym$, il suffit de donner une description des 2-systèmes trivialisants relatifs aux 2-actions internes à $\mathcal{G}rpd$ et de démontrer que ceux-ci commutent avec les 2-produits finis. Cette description occupe la majeure partie du chapitre 3 et s'effectue en trois étapes.

Étape 1

Étant donnée une 2-action $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ d'un 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$, nous construisons un groupoïde $\mathbb{S}/\odot$ comme suit

Objets. Les objets de $\mathbb{S}/\odot$ sont ceux de $\mathbb{S}$.

Flèches. Les flèches de $\mathbb{S}/\odot$ sont les classes de la forme $S \xrightarrow{[S \odot M_1 \xrightarrow{s} T \odot M_2]} T$, où M_1, M_2 sont deux objets de $\mathbb{M}$ et s est un isomorphisme de $\mathbb{S}$.

Composition. La composition des flèches $R \xrightarrow{[R \odot M_1 \xrightarrow{s} S \odot M_2]} S \xrightarrow{[S \odot M_3 \xrightarrow{t} T \odot M_4]} T$ est donnée par $R \xrightarrow{[R \odot (M_1 \otimes M_3) \xrightarrow{t \bullet s} S \odot (M_2 \otimes M_4)]} S$ où $t \bullet s =$

$$\begin{array}{ccccccc} R \odot (M_1 \otimes M_3) & \xrightarrow{\alpha_{R, M_1, M_3}} & (R \odot M_1) \odot M_3 & \xrightarrow{s \odot id_{M_3}} & (S \odot M_2) \odot M_3 & \xrightarrow{\alpha_{S, M_2, M_3}^{-1}} & S \odot (M_2 \otimes M_3) \\ & & & & & & \downarrow id_S \odot c_{M_2, M_3} \\ T \odot (M_4 \otimes M_2) & \xleftarrow{\alpha_{T, M_4, M_2}^{-1}} & (T \odot M_4) \odot M_2 & \xleftarrow{t \odot id_{M_4}} & (S \odot M_3) \odot M_2 & \xleftarrow{\alpha_{S, M_3, M_4}} & S \odot (M_3 \otimes M_2). \end{array}$$

Or, avec la composition ainsi définie, $\mathbb{S}/\odot$ n'est pas un groupoïde. En effet, si $S \odot M_1 \xrightarrow{s} T \odot M_2$ est un isomorphisme de $\mathbb{S}$, alors $s^{-1} \bullet s \neq id_{S \odot (M_1 \otimes M_2)}$ puisqu'en général, $id_T \odot c_{M_2, M_2} \neq id_{T \odot (M_2 \otimes M_2)}$. Ceci nous a incité à introduire une notion que nous avons appelée 2-action identitaire sur la symétrie diagonale (définition 3.3.1). Une 2-action $\odot : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ interne à $\mathcal{Grpd}$ sera dénommée de la sorte lorsque, pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout objet M de $\mathbb{M}$, nous aurons l'égalité

$$id_S \odot c_{M, M} = id_{S \odot (M \otimes M)}.$$

Notre résultat est alors le suivant (proposition 3.3.13).

Proposition. *Si $\odot : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ est une 2-action identitaire sur la symétrie diagonale, alors le groupoïde $\mathbb{S}/\odot$ est un 2-système trivialisant relatif à $\odot$ dans $\mathcal{Grpd}$.*

Par ailleurs, nous démontrons dans la proposition 3.3.14 que les 2-systèmes trivialisants relatifs à des 2-actions identitaires sur la symétrie diagonale dans $\mathcal{Grpd}$ commutent avec les 2-produits binaires.

Étape 2

À la section 3.4, nous résolvons le problème général suivant: étant donné une 2-action $\mathbb{S} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{S}$ interne à la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$ et une classe d'endomorphismes $\mathcal{E}$ de $\mathbb{S}$, comment associer un diagramme universel de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{S} \\ P^{\mathcal{E}} \times Id_{\mathbb{M}} \downarrow & & \downarrow P^{\mathcal{E}} \\ \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot^{\mathcal{E}}} & \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \end{array}$$

où $\odot^{\mathcal{E}} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}}$ est une 2-action interne à la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$ et où $P^{\mathcal{E}} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}}$ est un foncteur tel que pour tout $\epsilon \in \mathcal{E}$, $P^{\mathcal{E}}(\epsilon) = id$? Nous appelons de tels diagramme des 2-actions réduites (définition 3.4.3). La résolution de ce problème est l'objet du théorème 3.4.7.

En général, les 2-actions réduites ne commutent pas avec les 2-produits finis, c'est-à-dire que pour tout paire de 2-actions $\mathbb{S} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{S}$ et $\mathbb{T} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\odot} \mathbb{T}$ internes à la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$ et pour toute classe d'endomorphismes $\mathcal{E}$ de $\mathbb{S}$ et toute classe d'endomorphismes $\mathcal{F}$ de $\mathbb{T}$, il n'existe en général pas d'équivalence de groupoïdes

$$((\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{F}} \simeq \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{T}^{\mathcal{F}}).$$

Toujours dans la section 3.4, nous exhibons alors une famille de classes d'endomorphismes, que nous appelons *classes étirantes* (définition 3.4.8) et pour lesquelles les 2-actions réduites commutent avec les 2-produits finis (proposition 3.4.9).

Étape 3

À partir d'une action $\mathbb{S} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{S}$ interne à la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$ et de la classe d'endomorphismes

$$\mathcal{E}_{\odot} := \{id_S \odot (c_{M,M}) \mid S \in \text{Ob}(\mathbb{S}), M \in \text{Ob}(\mathbb{M})\},$$

nous considérons la 2-action réduite $\odot^{\mathcal{E}_{\odot}} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}}$ construite à l'étape précédente, ainsi que le 2-système trivialisant $P_{\odot^{\mathcal{E}_{\odot}}} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} / \odot^{\mathcal{E}_{\odot}}$ décrit à l'étape 1. Nous démontrons que celui-ci est également un 2-système trivialisant relatif à $\odot$ (théorème 3.5.2), ce qui nous fournit une description de tous les 2-systèmes trivialisants dans $\mathcal{Grpd}$ (corollaire 3.5.3). Puisque la classe $\mathcal{E}_{\odot}$ est étirante (lemme 3.5.1), nous en déduisons que les 2-systèmes trivialisants de $\mathcal{Grpd}$ commutent avec les 2-produits finis (théorème 3.5.5). Ceci nous fournit une description des 2-systèmes trivialisants de 2-MonSym (corollaire 3.5.7), des 2-conoyaux de 2-MonSym (corollaire 3.5.8) ainsi que description du biadjoint à gauche $\mathbb{L}$ (corollaire 3.5.10).

Le chapitre 4 est dédié à l'étude des liens entretenus par $\mathbb{L}$ et la K-théorie algébrique. Pour tout 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$, nous obtenons (théorème 4.2.1) un isomorphisme naturel

$$\Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \simeq K_0(\mathbb{M}).$$

En désignant par $\Pi_1(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ le groupe commutatif $\mathbb{L}(\mathbb{M})(I, I)$ (Π_1 est, après Π_0 , le deuxième invariant permettant de classifier les 2-groupes au sens de [Sin75]), nous obtenons un isomorphisme naturel

$$\Pi_1(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \simeq K_1(\mathbb{M}).$$

Autrement dit, $\mathbb{L}$ ne contient pas seulement toute l'information de K_0 , mais également celle de K_1 .

Pour terminer, nous proposons une généralisation de la suite exacte de la K-théorie algébrique. Soient $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ \downarrow & & \downarrow F \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N} \end{array}$$

un 2-produit fibré (rappelons que les objets de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$ sont les triples de la forme $(M_1, M_2, F(M_1) \xrightarrow{f} F(M_2))$, tandis que les flèches sont les carrés commutatifs). Nous désignons par K_F le groupe commutatif engendré par les classes d'isomorphisme des objets de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$ muni des relations $[M_1, M_2, f_1] *$

$[M_3, M_4, f_2] = [M_1 \otimes M_3, M_2 \otimes M_4, f_1 \otimes f_2]$ et $[M_1, M_2, f_1] * [M_2, M_3, f_2] = [M_1, M_3, f_2 f_1]$. Clairement, $d : K_F \rightarrow K_0(\mathbb{M}); [M_1, M_2, f] \mapsto [M_1, M_2]$ est un morphisme de groupes commutatifs. Par ailleurs, si F est un 1-morphisme cofinal (c'est-à-dire si pour tout objet N de $\mathbb{N}$, il existe un objet N' de $\mathbb{N}$, un objet M de $\mathbb{M}$ et un isomorphisme $N \otimes N' \simeq F(M)$), alors il existe un morphisme de groupes symétriques $d' : K_1(\mathbb{N}) \rightarrow K_F$ tel que la suite

$$K_1(\mathbb{M}) \xrightarrow{K_1(F)} K_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{d'} K_F \xrightarrow{d} K_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{K_0(F)} K_0(\mathbb{N})$$

est exacte (théorème 5.3 du chapitre VII de [Bas68]). Ainsi, l'exactitude de cette suite nécessite une hypothèse de cofinalité sur F . Nous avons montré dans ce travail qu'il était possible de construire une suite exacte plus générale ne nécessitant pas une telle hypothèse. Si nous regardons F , non plus comme un 1-morphisme entre $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$, mais plutôt comme une action de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{N}$, alors le 2-produit fibré $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$ peut être pensé comme la catégorie des couples d'objet de $\mathbb{M}$ s'identifiant par leur action sur l'objet unité I de $\mathbb{N}$. Pourquoi se contenter de l'action sur l'objet unité? Pourquoi ne pas regarder les couples d'objets de $\mathbb{M}$ s'identifiant sur un objet quelconque de $\mathbb{N}$? Étant donnée une 2-action $\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{N}$, cette question nous a incité à considérer le 2-égalisateur de

$$\mathbb{N} \times \mathbb{M} \times \mathbb{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1} \\ \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2} \end{array} \mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{N}$$

(les objets sont les quadruples de la forme (N, M_1, M_2, f) , où N est un objet de $\mathbb{N}$, M_1 et M_2 sont deux objets de $\mathbb{M}$ et $f : N \odot M_1 \rightarrow N \odot M_2$ est un isomorphisme de $\mathbb{N}$) et à construire le groupe symétrique $K_{\odot}$ engendré par les classes d'isomorphisme des objets de ce 2-égalisateur et muni des relations $[N_1, M_1, M_2, f_1] * [N_2, M_3, M_4, f_2] = [N_1 \otimes N_2, M_1 \otimes M_3, M_2 \otimes M_4, f_1 \otimes f_2]$ et $[N, M_1, M_2, f_1] * [N, M_2, M_3, f_2] = [N, M_1, M_3, f_2 f_1]$. Nous avons montré qu'il était alors possible de construire un morphisme de groupes symétrique $\partial_1 : K_1(\mathbb{N}) \rightarrow K_{\odot}$ tel que la suite

$$K_1(\mathbb{M}) \xrightarrow{d_1} K_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{\partial_1} K_{\odot} \xrightarrow{\partial_0} K_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{d_0} K_0(\mathbb{N})$$

soit exacte (théorème 4.5.3), sans avoir émis d'hypothèse de cofinalité sur $\odot$. De plus, lorsque $\odot$ est la 2-action $\mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times F} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{N}$ induite par un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ cofinal, alors cette suite exacte est isomorphe à la suite exacte de la K-théorie algébrique et en constitue donc une généralisation (corollaire 4.5.5). C'est avec ce dernier résultat que se clôture notre compte-rendu.

Chapitre 1

Groupe commutatif libre engendré par un monoïde commutatif

Dans ce chapitre 1, nous présentons les résultats généraux pouvant s'énoncer de façon interne à une catégorie $\mathbb{C}$ possédant les produits finis. Dans la section 1, nous rappelons les définitions bien connues de produit binaire, d'objet terminal et d'action d'un monoïde commutatif M interne à $\mathbb{C}$ sur un objet S de $\mathbb{C}$. Nous introduisons également la notion que nous appellerons par la suite *système trivialisant*. Dans la section 2, nous démontrons un théorème de transfert de structure disant que si, dans $\mathbb{C}$, les systèmes trivialisants commutent avec les produits binaires, alors le système trivialisant de toute action $N \times M \rightarrow N$ d'un monoïde commutatif M interne à $\mathbb{C}$ sur un monoïde commutatif N interne à $\mathbb{C}$ hérite d'une structure de monoïde commutatif issue de N tel que celui-ci soit alors le système trivialisant de l'action dans la catégorie des monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ (proposition 1.2.1). Dans la section 3, nous établissons une équivalence entre les actions internes à la catégorie des monoïdes commutatifs et les morphismes de monoïdes commutatifs. Nous établissons également une équivalence entre systèmes trivialisants internes à la catégorie des monoïdes commutatifs et les conoyaux de morphismes de monoïdes commutatifs (proposition 1.3.2 et proposition 1.3.4). Dans la section 4, nous introduisons la définition de structure cofinale (définition 1.4.1) et démontrons que les conoyaux de morphismes de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ possédant une telle structure sont des groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ (proposition 1.4.3). Nous démontrons, en tant que corollaire, que tout conoyau dans la catégorie des monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ d'un morphisme de groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ est également le conoyau de ce morphisme dans la catégorie des groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ (corollaire 1.4.5). Dans la section 5, nous démontrons que

si les conoyaux des morphismes diagonaux relatifs à un monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$ existent, alors le foncteur $L : \text{MonCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GrpCom}(\mathbb{C})$ qui envoie tout monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$ sur le conoyau de sa diagonale est un adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \text{GrpCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{MonCom}(\mathbb{C})$ (théorème 1.5.2). Dans la section 6, nous présentons et discutons deux résultats existants concernant des adjonctions construites à partir de conoyaux de morphismes diagonaux, essentiellement la proposition 1.7.6 de [BB04] et la proposition 3.4 de [Bou03]. Globalement, les résultats du chapitre 1 préfigurent ceux du chapitre 2 qui seront énoncés dans un contexte enrichi. En ce sens, nous pouvons dire que le chapitre 1 prépare le chapitre 2.

1.1 Contexte catégoriel général

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons avec une catégorie $\mathbb{C}$. Nous supposons que celle-ci possède les *produits binaires*, c'est-à-dire que pour A_1, A_2 deux objets de $\mathbb{C}$, il existe un objet de $\mathbb{C}$ noté $A_1 \times A_2$ et deux morphismes de $\mathbb{C}$ notés $\pi_{A_1, A_2}^1 : A_1 \times A_2 \rightarrow A_1$ et $\pi_{A_1, A_2}^2 : A_1 \times A_2 \rightarrow A_2$ satisfaisant à la propriété suivante: si C est un objet de $\mathbb{C}$ et $f_1 : C \rightarrow A_1, f_2 : C \rightarrow A_2$ sont deux morphismes de $\mathbb{C}$, alors il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$ noté $(f_1, f_2) : C \rightarrow A_1 \times A_2$ entre C et $A_1 \times A_2$ tel que

$$\pi_{A_1, A_2}^1(f_1, f_2) = f_1, \pi_{A_1, A_2}^2(f_1, f_2) = f_2.$$

Si $f_1 : A_1 \rightarrow B_1, f_2 : A_2 \rightarrow B_2$ sont deux morphismes de $\mathbb{C}$, alors le morphisme $(f_1 \pi_{A_1, A_2}^1, f_2 \pi_{A_1, A_2}^2)$ sera plus simplement notée $f_1 \times f_2$. Nous rappelons les propriétés élémentaires suivantes.

Propriétés 1.1.1.

1. Si A_1, A_2 sont deux objets de $\mathbb{C}$, alors

$$(\pi_{A_1, A_2}^1, \pi_{A_1, A_2}^2) = id_{A_1 \times A_2}.$$

2. Si A_1, A_2 sont deux objets de $\mathbb{C}$ et si $f_1 : C \rightarrow A_1, f_2 : C \rightarrow A_2, t : B \rightarrow C$ sont trois morphismes de $\mathbb{C}$, alors

$$(f_1, f_2)t = (f_1 t, f_2 t).$$

3. Si $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont six objets de $\mathbb{C}$ et si $f_1 : A_1 \rightarrow B_1, f_2 : A_2 \rightarrow B_2, g_1 : B_1 \rightarrow C_1, g_2 : B_2 \rightarrow C_2$ sont quatre morphismes de $\mathbb{C}$, alors

$$(g_1 \times g_2)(f_1 \times f_2) = ((g_1 f_1) \times (g_2 f_2)).$$

Dans la suite, pour tout triple d'objets A , B et C de $\mathbb{C}$, nous désignerons par $a_{A,B,C}$ l'isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$

$$((\pi_{A,B \times C}^1, \pi_{B,C}^1 \pi_{A,B \times C}^2), \pi_{B,C}^2 \pi_{A,B \times C}^2) : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$$

et pour tout autre objet D de $\mathbb{C}$, nous désignerons par $t_{A,B,C,D}$ l'isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$

$$(\pi_{A,B}^1 \times \pi_{C,D}^1, \pi_{A,B}^2 \times \pi_{C,D}^2) : (A \times B) \times (C \times D) \rightarrow (A \times C) \times (B \times D).$$

Par ailleurs, nous supposerons que $\mathbb{C}$ possède un *objet terminal*, c'est-à-dire que $\mathbb{C}$ possède un objet noté $\{*\}$ tel que pour tout objet A de $\mathbb{C}$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$ noté $1_A : A \rightarrow \{*\}$ entre A et $\{*\}$. Nous rappelons la propriété élémentaire suivante.

Propriété 1.1.2. *Si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathbb{C}$, alors*

$$1_B f = 1_A.$$

Nous appellerons *monoïde interne* à $\mathbb{C}$ la donnée d'un triple $(M, *_M, e_M)$, où M est un objet de $\mathbb{C}$, $*_M : M \times M \rightarrow M$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ tel que le diagramme (appelée *axiome d'associativité*)

$$\begin{array}{ccc} M \times (M \times M) & \xrightarrow{id_M \times *_M} & M \times M \\ a_{M,M,M} \downarrow & & \downarrow *_M \\ (M \times M) \times M & \xrightarrow{*_M \times id_M} M \times M \xrightarrow{*_M} & M \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$ et $e_M : \{*\} \rightarrow M$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ tel que les deux diagrammes (respectivement appelés *axiome d'unité à gauche* et *axiome d'unité à droite*)

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ (e_M 1_M, id_M) \swarrow & & \downarrow id_M & & \searrow (id_M, e_M 1_M) \\ M \times M & \xrightarrow{*_M} & M & \xleftarrow{*_M} & M \times M \end{array}$$

sont commutatifs dans $\mathbb{C}$. De plus, nous dirons que le monoïde interne à $\mathbb{C}$ $(M, *_M, e_M)$ est *commutatif* si le diagramme (appelé *axiome de commutativité*)

$$\begin{array}{ccc} M \times M & & \\ (\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1) \downarrow & \searrow *_M & \\ M \times M & \xrightarrow{*_M} & M \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$.

Soient $(M, *_M, e_M)$ et $(N, *_N, e_N)$ deux monoïdes interne à $\mathbb{C}$ (éventuellement commutatifs), un *morphisme de monoïdes (éventuellement commutatifs) internes à $\mathbb{C}$ entre M et N* est un morphisme $f : M \rightarrow N$ de $\mathbb{C}$ tel que les deux diagrammes (respectivement appelés *axiome de préservation du produit* et *axiome de préservation de l'unité*)

$$\begin{array}{ccccc} M \times M & \xrightarrow{f \times f} & N \times N & \{*\} & \\ *_M \downarrow & & \downarrow *_N & e_M \downarrow & \searrow e_N \\ M & \xrightarrow{f} & N & M & \xrightarrow{f} N \end{array}$$

sont commutatifs dans $\mathbb{C}$. De plus, si $(P, *_P, e_P)$ est un monoïde (éventuellement commutatif) interne à $\mathbb{C}$ et si $g : N \rightarrow P$ est un morphisme de monoïdes (éventuellement commutatifs) internes à $\mathbb{C}$ entre N et P , nous rappelons que $gf : M \rightarrow P$ est un morphisme de monoïdes (éventuellement commutatifs) internes à $\mathbb{C}$ entre M et P . Ceci définit une composition sur les morphismes de monoïdes (éventuellement commutatifs) internes à $\mathbb{C}$ qui est associative et pour laquelle les flèches identités de $\mathbb{C}$ sont des unités à gauche et à droite.

Notations. Nous désignerons par $\text{Mon}(\mathbb{C})$ la catégorie des monoïdes internes à $\mathbb{C}$ et par $\text{MonCom}(\mathbb{C})$ la catégorie des monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1.3. Si $\mathbb{C} = \text{Ens}$ la catégorie des ensembles, on retrouve les définitions classiques de monoïde et de monoïde commutatif (voir, par exemple, [Bou70]).

Nous appellerons *groupe interne à $\mathbb{C}$* la donnée d'un quadruple $(G, *_G, e_G, ()_G^*)$, où $(G, *_G, e_G)$ est un monoïde interne à $\mathbb{C}$ et où $()_G^* : G \rightarrow G$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ tel que le diagramme (appelé *axiome d'inverse à droite*)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(id_G, ()_G^*)} & G \times G \\ 1_G \downarrow & & \downarrow *_G \\ \{*\} & \xrightarrow{e_G} & G \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$. À partir d'un tel groupe interne à $\mathbb{C}$, nous rappelons la commutativité dans $\mathbb{C}$ du diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{()_G^*} & G \\ & \searrow id_G & \downarrow ()_G^* \\ & & G \end{array}$$

de laquelle nous déduisons facilement la commutativité dans $\mathbb{C}$ du diagramme

(appelé *axiome d'inverse à gauche*)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{((\)_G^*, id_G)} & G \times G \\ 1_G \downarrow & & \downarrow *_{\{*\}} \\ \{*\} & \xrightarrow{e_G} & G \end{array} .$$

Nous rappelons également la commutativité dans $\mathbb{C}$ des deux diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xrightarrow{(\)_G^* \times (\)_G^*} & G \times G & \{*\} & \\ (\pi_{G,G}^2, \pi_{G,G}^1) \uparrow & & \downarrow *_{\{*\}} & \downarrow e_G & \\ G \times G & \xrightarrow{*_G} G & \xrightarrow{(\)_G^*} G & \xrightarrow{(\)_G^*} G & \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow e_G \\ G \end{array} .$$

Par ailleurs, si le monoïde $(G, *_G, e_G)$ interne à $\mathbb{C}$ est symétrique, nous dirons que $(G, *_G, e_G, (\)_G^*)$ est un *groupe commutatif interne* à $\mathbb{C}$.

Si $(G, *_G, e_G, (\)_G^*)$ et $(H, *_H, e_H, (\)_H^*)$ sont deux groupes internes à $\mathbb{C}$ et $f : (G, *_G, e_G) \rightarrow (H, *_H, e_H)$ un morphisme de monoïdes internes à $\mathbb{C}$ entre G et H , alors nécessairement, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(\)_G^*} & G \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ H & \xrightarrow{(\)_H^*} & H \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$. Nous dirons, par la suite, que f est un *morphisme de groupes internes à $\mathbb{C}$ entre G et H* . Nous dirons que celui-ci est un *morphisme de groupes commutatifs* si G et H sont tout deux commutatifs.

Notations. Nous désignerons par $\mathsf{Grp}(\mathbb{C})$ la catégorie des groupes internes à $\mathbb{C}$ et par $\mathsf{GrpCom}(\mathbb{C})$ la catégorie des groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1.4. Si $\mathbb{C} = \mathsf{Ens}$ la catégorie des ensembles, on retrouve les définitions classiques de groupe et de groupe commutatif (voir, par exemple, [Bou70]).

Nous rappelons que les quatre catégories $\mathsf{Mon}(\mathbb{C})$, $\mathsf{MonCom}(\mathbb{C})$, $\mathsf{Grp}(\mathbb{C})$ et $\mathsf{GrpCom}(\mathbb{C})$ possèdent les objets terminaux ainsi que les produits binaires et que ceux-ci sont préservés par les différents foncteurs d'oubli $\mathsf{Mon}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathsf{MonCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathsf{Grp}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\mathsf{GrpCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$. Par ailleurs, pour un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$ interne à $\mathbb{C}$, $*_M : M \times M \rightarrow M$ est un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ entre $M \times M$ et M . Pour $(G, *_G, e_G, (\)_G^*)$ un groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$, $(\)_G^* : G \rightarrow G$ est un morphisme de groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ entre G et G .

Pour S un objet de $\mathbb{C}$ et $(M, *_M, e_M)$ monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$, nous appellerons *action de M sur S* tout morphisme $\circ : S \times M \rightarrow S$ de $\mathbb{C}$ tel que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} S \times (M \times M) & \xrightarrow{id_S \times *_M} & S \times M & & S \\ a_{S,M,M} \downarrow & & \downarrow \circ & (id_S, e_M 1_S) \swarrow & \downarrow id_S \\ (S \times M) \times M & \xrightarrow{\circ \times id_M} S \times M \xrightarrow{\circ} & S & S \times M \xrightarrow{\circ} & S \end{array}$$

sont commutatifs dans $\mathbb{C}$. Le 1-morphisme $\pi_{S,M}^1 : S \times M \rightarrow S$ de $\mathbb{C}$ est une action (appelée *action triviale*) de M sur S .

Remarque 1.1.5. La définition d'action peut s'étendre au cas où $(M, *_M, e_M)$ n'est pas nécessairement commutatif. Toutefois, seul le cas commutatif sera traité dans la suite du chapitre. Ceci nous permet d'omettre que les actions considérées seront toujours des actions «à droite».

Pour $(M, *_M, e_M)$ est monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$ et $\circ : S \times M \rightarrow S$ est une action de M sur un objet S de $\mathbb{C}$, un *trivialisateur* de $\circ$ est la donnée d'un couple (T, t) , où T est un objet de $\mathbb{C}$ et $t : S \rightarrow T$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S \times M & \xrightarrow{\circ} & S \\ \pi_{S,M}^1 \downarrow & & \downarrow t \\ S & \xrightarrow{t} & T \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$. Nous appellerons *système trivialisant relatif à $\circ$* la donnée d'un trivialisateur $(S/\circ, p_\circ)$ de $\circ$ tel que pour tout trivialisateur (T, t) de $\circ$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$ noté $\bar{t} : S/\circ \rightarrow T$ entre $S/\circ$ et T tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{p_\circ} & S/\circ \\ & \searrow t & \downarrow \bar{t} \\ & & T \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1.6. Soient $(M, *_M, e_M)$ un monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$ et $\circ : S \times M \rightarrow S$ une action de M sur un objet S de $\mathbb{C}$. Un système trivialisant $(S/\circ, p_\circ)$ relatif à $\circ$ est exactement «la» colimite de $S \times M \xrightarrow[\pi_{S,M}^1]{\circ} S$ dans $\mathbb{C}$

(voir par exemple [Mac97]). Clairement, le système trivialisant $(S/\circ, p_\circ)$ est le coégalisateur de $\circ$ et $\pi_{S,M}^1$ dans $\mathbb{C}$. Nous avons choisi de ne pas définir directement les système trivialisant comme des coégalisateurs, car dans le cas 2-dimensionnel du chapitre 2, les 2-systèmes trivialisants ne seront pas des 2-coégalisateurs. Nous illustrerons ce fait par un exemple dans la remarque 2.1.8.

Nous énonçons la propriété élémentaire suivante.

Propriété 1.1.7. *Soit $(S/\circ, p_\circ)$ un système trivialisant relativement à une action $\circ : S \times M \rightarrow S$ d'un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$ interne à $\mathbb{C}$ sur un objet S de $\mathbb{C}$. $p_\circ$ est un épimorphisme.*

Considérons ensuite deux actions $\circ : S \times M \rightarrow S$ et $\circ' : T \times N \rightarrow T$, respectivement d'un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$ interne à $\mathbb{C}$ sur un objet S de $\mathbb{C}$ et d'un monoïde commutatif $(N, *_N, e_N)$ interne à $\mathbb{C}$ sur un objet T de $\mathbb{C}$. De là, définissons le morphisme de $\mathbb{C}$ noté $\underline{\circ \times \circ'}$ par

$$(S \times T) \times (M \times N) \xrightarrow{t_{S,T,M,N}} (S \times M) \times (T \times N) \xrightarrow{\circ \times \circ'} S \times T.$$

Le morphisme $\underline{\circ \times \circ'}$ est une action du monoïde commutatif produit $M \times N$ sur $S \times T$. Supposons par ailleurs que $(S/\circ, p_\circ)$, $(T/\circ', p_{\circ'})$, $((S \times T)/(\underline{\circ \times \circ'}), p_{\circ \times \circ'})$ sont respectivement un système trivialisant relatif à $\circ$, un système trivialisant relatif à $\circ'$ et un système trivialisant relatif à $\underline{\circ \times \circ'}$. Il est clair que $(p_\circ \times p_{\circ'}) \underline{\circ \times \circ'} = (p_\circ \times p_{\circ'}) \pi_{S \times T, M \times N}^1$; il existe donc un unique morphisme de $\mathbb{C}$ noté $\overline{p_\circ \times p_{\circ'}} : (S \times T)/(\underline{\circ \times \circ'}) \rightarrow S/\circ \times T/\circ'$ entre $(S \times T)/(\underline{\circ \times \circ'})$ et $S/\circ \times T/\circ'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & (S \times M) \times (T \times N) & & \\ & \nearrow t_{S,T,M,N} & & \searrow \circ \times \circ' & \\ (S \times T) \times (M \times N) & \xrightarrow{\pi_{S \times T, M \times N}^1} & S \times T & \xrightarrow{p_{\circ \times \circ'}} & (S \times T)/(\underline{\circ \times \circ'}) \\ \downarrow t_{S,T,M,N} & & \downarrow id_S \times id_T & & \downarrow \overline{p_\circ \times p_{\circ'}} \\ (S \times M) \times (T \times N) & \xrightarrow[\pi_{S,M}^1 \times \pi_{T,N}^1]{\circ \times \circ'} & S \times T & \xrightarrow{p_\circ \times p_{\circ'}} & S/\circ \times T/\circ' \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$. Nous dirons alors que *les systèmes trivialisants commutent avec les produits binaires dans $\mathbb{C}$* si $\overline{p_\circ \times p_{\circ'}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$, quelles que soient les actions $\circ$ et $\circ'$ considérées. De façon équivalente, cela signifie que le couple $(S/\circ \times T/\circ', p_\circ \times p_{\circ'})$ est un système trivialisant relatif à $\underline{\circ \times \circ'}$ et en particulier que $p_\circ \times p_{\circ'}$ est un épimorphisme.

Pour terminer, considérons un monoïde commutatif $((M, *_M, e_M), *_M', e_M')$ interne à $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Il est alors bien connu que $*_M = *_M'$ et $e_M = e_M'$. Ceci est une conséquence du théorème d'Eckmann et Hilton (voir [EH62]). Dans la suite du travail, nous identifierons $((M, *_M, e_M), *_M', e_M')$ et $(M, *_M, e_M)$. De plus, si $(N, *_N, e_N)$ est un monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$, une action de $((M, *_M, e_M), *_M', e_M')$ sur $(N, *_N, e_N)$ dans $\mathbb{M}onSym(\mathbb{C})$ n'est rien d'autre qu'un morphisme de monoïdes commutatifs $\circ : N \times M \rightarrow N$ interne à $\mathbb{C}$ entre $N \times M$ et N .

Remarque 1.1.8. Pour une catégorie $\mathbb{C}$ possédant les produits finis, nous avons en fait les équivalences suivantes:

$$\text{MonCom}(\text{MonCom}(\mathbb{C})) \simeq \text{MonCom}(\mathbb{C})$$

$$\text{GrpCom}(\text{MonCom}(\mathbb{C})) \simeq \text{GrpCom}(\mathbb{C}).$$

1.2 Transfert de structure pour les systèmes trivialisants

Dans cette section, nous supposons que dans $\mathbb{C}$, les systèmes trivialisants commutent avec les produits binaires. L'objectif est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.2.1. *Soient $(M, *_M, e_M)$ et $(N, *_N, e_N)$ deux monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$, $\circ : N \times M \rightarrow N$ une action de M sur N dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$ et $(N/\circ, p_\circ)$ un système trivialisant relatif à $\circ$ dans $\mathbb{C}$. Si, dans $\mathbb{C}$, les systèmes trivialisants commutent avec les produits binaires, alors il existe deux morphismes $*_{N/\circ} : N/\circ \times N/\circ \rightarrow N/\circ$ et $e_{N/\circ} : \{*\} \rightarrow N/\circ$ de $\mathbb{C}$ tels que $((N/\circ, *_{N/\circ}, e_{N/\circ}), p_\circ)$ est un système trivialisant relatif à $\circ$ dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$.*

Considérons deux monoïdes commutatifs $(M, *_M, e_M)$, $(N, *_N, e_N)$ internes à $\mathbb{C}$, $\circ : N \times M \rightarrow N$ une action de M sur N dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$ et $(N/\circ, p_\circ)$ un système trivialisant relatif à $\circ$ dans $\mathbb{C}$. Soit alors le diagramme de $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccccc} (N \times N) \times (M \times M) & \xrightarrow[\pi_{N \times N, M \times M}^1]{\circ \times \circ} & N \times N & \xrightarrow{p_\circ \times p_\circ} & N/\circ \times N/\circ \\ \downarrow *_{N \times N} \times *_{M \times M} & & \downarrow *_{N \times N} & & \\ N \times M & \xrightarrow[\pi_{N, M}^1]{\circ} & N & \xrightarrow{p_\circ} & N/\circ. \end{array}$$

Les deux diagrammes de gauche sont commutatifs puisque $\circ$ est un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$. Puisque $(N/\circ \times N/\circ, p_\circ \times p_\circ)$ est un système trivialisant relatif à $\circ \times \circ$ dans $\mathbb{C}$, par définition de système trivialisant dans $\mathbb{C}$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$ noté $\overline{p_\circ *_{N/\circ}} : N/\circ \times N/\circ \rightarrow N/\circ$ entre $N/\circ \times N/\circ$ et $N/\circ$ tel que

$$\overline{p_\circ *_{N/\circ}}(p_\circ \times p_\circ) = p_\circ *_{N/\circ}.$$

Nous désignerons désormais celui-ci par $*_{N/\circ}$. Par ailleurs, nous désignerons le morphisme $\{*\} \xrightarrow{e_N} N \xrightarrow{p_\circ} N/\circ$ de $\mathbb{C}$ par $e_{N/\circ}$.

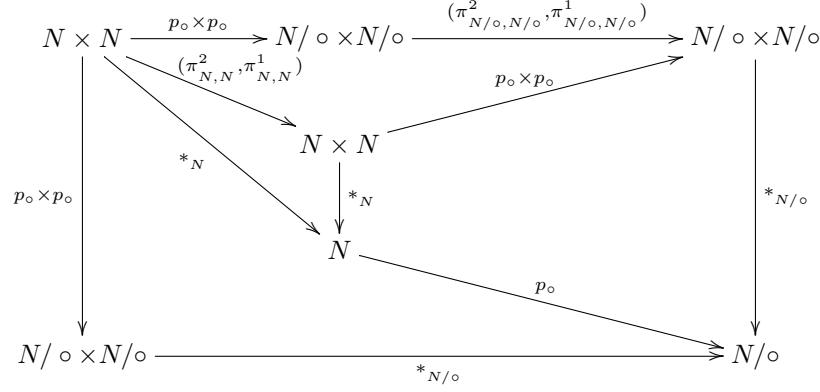
Lemme 1.2.2. *Le triple $(N/\circ, *_{N/\circ}, e_{N/\circ})$ est un monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous observons la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 N \times (N \times N) & \xrightarrow{p_\circ \times (p_\circ \times p_\circ)} & N/\circ \times (N/\circ \times N/\circ) & \xrightarrow{id_{N/\circ} \times *_{N/\circ}} & N/\circ \times N/\circ \\
 \downarrow a_{N,N,N} & \searrow id_N \times *_{N/\circ} & & \nearrow p_\circ \times p_\circ & \downarrow *_{N/\circ} \\
 & & N \times N & & \\
 (N \times N) \times N & \xrightarrow{*_{N/\circ} \times id_N} & N \times N & \xrightarrow{*_{N/\circ}} & N \\
 \downarrow (p_\circ \times p_\circ) \times p_\circ & \searrow p_\circ \times p_\circ & \downarrow *_{N/\circ} & \searrow p_\circ & \\
 (N/\circ \times N/\circ) \times N/\circ & & N & & N/\circ \\
 \downarrow *_{N/\circ} \times id_{N/\circ} & & & & \\
 N/\circ \times N/\circ & \xrightarrow{*_{N/\circ}} & & & N/\circ
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{p_\circ} & N/\circ & \xrightarrow{(e_{N/\circ} 1_{N/\circ}, id_{N/\circ})} & N/\circ \times N/\circ \\
 \downarrow p_\circ & \searrow (e_N 1_N, id_N) & & \nearrow p_\circ \times p_\circ & \downarrow *_{N/\circ} \\
 & & N \times N & & \\
 & \searrow id_N & \downarrow *_{N/\circ} & \searrow p_\circ & \\
 & & N & & N/\circ \\
 N/\circ & \xrightarrow{id_{N/\circ}} & & & N/\circ
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{p_\circ} & N/\circ & \xrightarrow{(id_{N/\circ}, e_{N/\circ} 1_{N/\circ})} & N/\circ \times N/\circ \\
 \downarrow p_\circ & \searrow (id_N, e_N 1_N) & & \nearrow p_\circ \times p_\circ & \downarrow *_{N/\circ} \\
 & & N \times N & & \\
 & \searrow id_N & \downarrow *_{N/\circ} & \searrow p_\circ & \\
 & & N & & N/\circ \\
 N/\circ & \xrightarrow{id_{N/\circ}} & & & N/\circ
 \end{array}$$



La conclusion vient alors du fait que les morphismes p_o , $p_o \times p_o$ et $p_o \times p_o \times p_o$ sont des épimorphismes de $\mathbb{C}$. $\square$

Lemme 1.2.3. $p_o : (N, *_N, e_N) \rightarrow (N/ o, *_{N/ o}, e_{N/ o})$ est un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$.

Démonstration. Le résultat est clair puisque nous avons

$$\begin{aligned} *_{N/ o}(p_o \times p_o) &= \overline{p_o} *_{N/ o}(p_o \times p_o) = p_o *_{N/ o} \\ e_{N/ o} &= p_o e_N. \end{aligned}$$

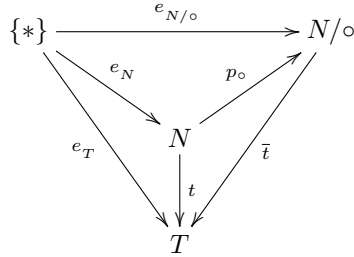
$\square$

Nous terminons cette section en démontrant la proposition 1.2.1

Démonstration. Nous déduisons directement des deux lemmes précédents que $((N/ o, *_{N/ o}, e_{N/ o}), p_o)$ est un trivialisateur de $\circ$ dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$. Soit alors $((T, *_T, e_T), t)$ un autre trivialisateur de $\circ$ dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$. Par définition de système trivialisant dans $\mathbb{C}$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$ noté $\bar{t} : N/ o \rightarrow T$ entre N/ o et T tel que

$$\bar{t} p_o = t.$$

Nous remarquons que $\bar{t} : (N/ o, *_{N/ o}, e_{N/ o}) \rightarrow (T, *_T, e_T)$ est un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$. En effet, cela suit directement de la commutativité dans $\mathbb{C}$ des diagrammes



$$\begin{array}{ccccc}
N \times N & \xrightarrow{p_\circ \times p_\circ} & N/\circ \times N/\circ & \xrightarrow{\bar{t} \times \bar{t}} & T \times T \\
\downarrow p_\circ \times p_\circ & \searrow *_{N/\circ} & \downarrow *_{N/\circ} & \nearrow t \times t & \downarrow *_T \\
N/\circ \times N/\circ & & N/\circ & \xrightarrow{t} & T \\
\downarrow *_{N/\circ} & \nearrow p_\circ & \downarrow p_\circ & \nearrow \bar{t} & \\
N/\circ & & N & & T
\end{array}$$

et du fait que $p_\circ \times p_\circ$ est un épimorphisme. $\square$

1.3 Systèmes trivialisants et conoyaux dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$

L'objectif de cette section est d'établir une équivalence entre l'existence des systèmes trivialisants et des conoyaux dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Afin de ne pas entretenir de confusions inutiles, nous précisons que dans cette section, contrairement à la précédente, il n'est pas nécessaire de supposer que dans $\mathbb{C}$, les systèmes trivialisants commutent avec les produits binaires.

1.3.1 Les systèmes trivialisants de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ sont des conoyaux

Nous allons montrer que les systèmes trivialisants de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ sont des conoyaux particuliers de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Nous basons notre approche sur le lemme suivant.

Lemme 1.3.1. *Soient $(M, *_M, e_M)$ et $(N, *_N, e_N)$ deux monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et $\circ : N \times M \rightarrow N$ une action de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Dans ce cas, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
N \times M & \xrightarrow{\circ} & N \\
\downarrow id_N \times (e_N 1_M, id_M) & & \uparrow *_N \\
N \times (N \times M) & \xrightarrow{id_N \times \circ} & N \times N
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Le résultat découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
N \times M & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & N & & \\
\downarrow \scriptstyle{id_N \times (e_N 1_M, id_M)} & \searrow \scriptstyle{(id_N, e_N 1_N) \times (e_M 1_M, id_M)} & \nearrow \scriptstyle{*_N \times *_M} & \nearrow \scriptstyle{\circ} & \\
& (N \times N) \times (M \times M) & & & \\
& \nwarrow \scriptstyle{(id_N, e_M 1_N) \times (e_N 1_M, id_M)} & \nwarrow \scriptstyle{t_{N,M,N,M}} & \nwarrow \scriptstyle{\circ \times \circ} & \\
& (N \times M) \times (N \times M) & & & \\
\downarrow \scriptstyle{id_N \times (e_N 1_M, id_M)} & \xrightarrow{\quad id_N \times \circ \quad} & N \times N & & \\
& & \uparrow \scriptstyle{*_N} & &
\end{array}$$

□

Nous énonçons le résultat principal de cette sous-section. Nous utilisons dans la preuve le fait que $*_N$ est un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ ce qui découle directement du caractère commutatif de N .

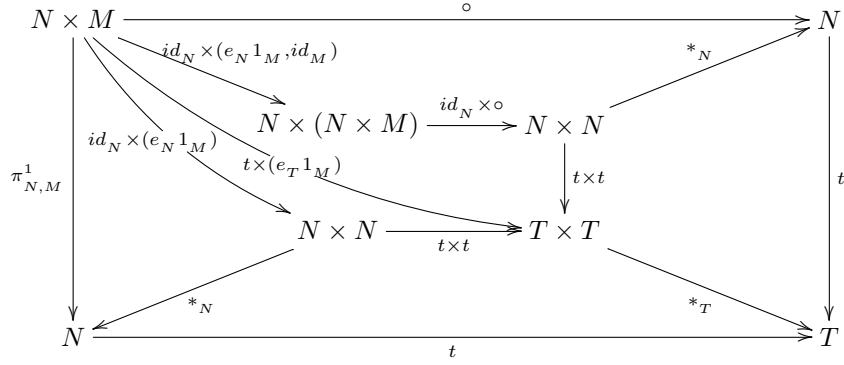
Proposition 1.3.2. *Soient $(M, *_M, e_M)$ et $(N, *_N, e_N)$ deux monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et $\circ : N \times M \rightarrow N$ une action de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Dans ce cas, $((N/\circ, *_N/\circ, e_{N/\circ}), p_\circ)$ est un système trivialisant relatif à $\circ$ dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ si et seulement s'il est un conoyau du morphisme $M \xrightarrow{(e_N 1_M, id_M)} N \times M \xrightarrow{\circ} N$ dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Nous supposons tout d'abord que $((N/\circ, *_N/\circ, e_{N/\circ}), p_\circ)$ est un système trivialisant relatif à $\circ$ dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Nous voyons que

$$p_\circ \circ (e_N 1_M, id_M) = p_\circ \pi_{N,M}^1(e_N 1_M, id_M) = e_{N/\circ} 1_M.$$

Soient alors $(T, *_T, e_T)$ un monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$ et $t : (N, *_N, e_N) \rightarrow (T, *_T, e_T)$ un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ tel que $t \circ (e_N 1_M, id_M) = e_T 1_M$. Du lemme 1.3.1, nous déduisons la commutativité du

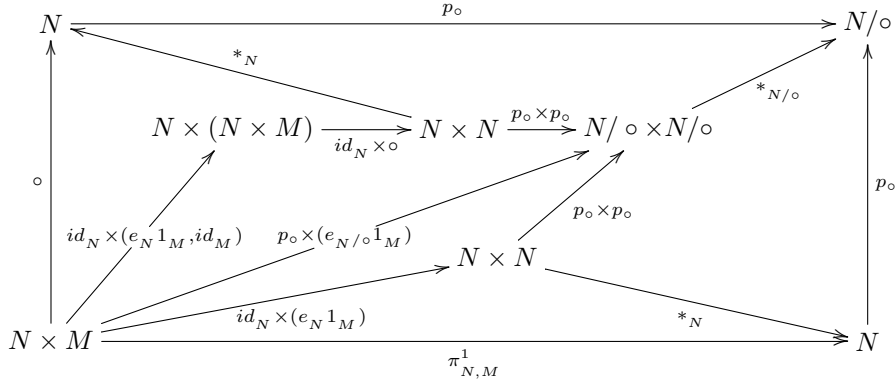
diagramme



et $((T, *_T, e_T), t)$ est un trivialisateur de $\circ$ dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$. Par définition de système trivialisant dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$, il existe un unique morphisme de $\text{MonCom}(\mathbb{C})$ noté $\bar{t} : (N/\circ, *_N/\circ, e_{N/\circ}) \rightarrow (T, *_T, e_T)$ entre $(N/\circ, *_N/\circ, e_{N/\circ})$ et $(T, *_T, e_T)$ tel que

$$\bar{t}p_\circ = t.$$

Supposons réciproquement que $((N/\circ, *_N/\circ, e_{N/\circ}), p_\circ)$ est un conoyau dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$ du morphisme $M \xrightarrow{(e_N 1_M, id_M)} N \times M \xrightarrow{\circ} N$. Par le lemme 1.3.1, nous observons la commutativité du diagramme



et $((N/\circ, *_N/\circ, e_{N/\circ}), p_\circ)$ est un trivialisateur de $\circ$ dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$. Dès lors, si $((T, *_T, e_T), t)$ est un autre trivialisateur de $\circ$ dans $\text{MonCom}(\mathbb{C})$, alors le

diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 N \times M & \xrightarrow{\circ} & N & & \\
 \searrow \pi_{N,M}^1 & & \downarrow t & & \\
 & N & & & \\
 \nearrow e_N 1_M & & \downarrow t & & \\
 M & \xrightarrow{e_T 1_M} & T & &
 \end{array}$$

$(e_N 1_M, id_M)$

est commutatif dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Par définition de conoyau, il existe un unique morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ noté $\bar{t} : (N/\circ, *_{N/\circ}, e_{N/\circ}) \rightarrow (T, *_N, e_T)$ entre $(N/\circ, *_{N/\circ}, e_{N/\circ})$ et $(T, *_N, e_T)$ tel que

$$\bar{t}p_\circ = t.$$

□

1.3.2 Les conoyaux de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ sont des systèmes trivialisants

Nous montrons ici que les conoyaux de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ sont des systèmes trivialisants particuliers de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Pour cela, considérons $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ un morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Nous désignons par $\circ_f$ le morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$

$$N \times M \xrightarrow{id_N \times f} N \times N \xrightarrow{*_N} N.$$

Lemme 1.3.3. $\circ_f$ est une action de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$.

Démonstration. Le résultat découle de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 N \times (M \times M) & \xrightarrow{id_N \times *_M} & N \times M & & \\
 \downarrow a_{N,M,M} & \searrow id_N \times (f \times f) & \downarrow id_N \times f & & \\
 (N \times M) \times M & \xrightarrow{id_N \times *_N} & N \times N & & \\
 \downarrow (id_N \times f) \times id_M & \searrow (id_N \times f) \times f & \downarrow a_{N,N,N} & & \\
 (N \times N) \times M & \xrightarrow{id_N \times *_N} & (N \times N) \times N & & \\
 \downarrow *_N \times id_M & \searrow *_N \times id_N & \downarrow *_N & & \\
 N \times M & \xrightarrow{id_N \times f} & N \times N & \xrightarrow{*_N} & N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
N & \xrightarrow{(id_N, e_M 1_N)} & N \times M \\
& \searrow (id_N, e_N 1_N) & \downarrow id_N \times f \\
& & N \times N \\
& \searrow id_N & \downarrow *_{N_f} \\
& & N.
\end{array}$$

□

Nous énonçons le dernier résultat de cette section.

Proposition 1.3.4. *Le couple $((N_f, *_{N_f}, e_{N_f}), p_f)$ est un conoyau de f dans $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$ si et seulement s'il est un système trivialisant relatif à $\circ_f$ dans $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Le résultat découle de 1.3.2 et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
N \times M & \xrightarrow{id_N \times f} & N \times N & & \\
\uparrow (e_N 1_M, id_M) & \swarrow f \times id_M & \nearrow f \times f & & \downarrow *_{N_f} \\
& M \times M & \xrightarrow{*_{M_f}} & M & \\
\uparrow (e_M 1_M, id_M) & \nearrow id_M & \searrow f & & \\
M & \xrightarrow{f} & N & &
\end{array}$$

□

Remarque 1.3.5. Soit $\mathbf{Act}(\mathbf{MonCom}(\mathbb{C}))$ la catégorie dont les objets sont les actions $N \times M \xrightarrow{\circ} N$ de $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$ et dont les morphismes $(f, g) : (N \times M \xrightarrow{\circ} N) \rightarrow (N' \times M' \xrightarrow{\circ'} N')$ sont les couples de morphismes $f : M \rightarrow M'$, $g : N \rightarrow N'$ de $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
N \times M & \xrightarrow{\circ} & N \\
g \times f \downarrow & & \downarrow g \\
N' \times M' & \xrightarrow{\circ'} & N'
\end{array}$$

est commutatif. Désignons par $\mathbf{Mor}(\mathbf{MonCom}(\mathbb{C}))$ la catégorie dont les objets sont les morphismes $M \xrightarrow{s} N$ de $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$ et dont les morphismes $(f, g) :$

$(M \xrightarrow{s} N) \rightarrow (M' \xrightarrow{s'} N')$ sont les couples de morphismes $f : M \rightarrow M'$, $g : N \rightarrow N'$ de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & N \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ M' & \xrightarrow{s'} & N' \end{array}$$

est commutatif. Les constructions effectuées dans cette section nous permettent d'induire l'existence de deux foncteurs

$$\begin{array}{ccc} F : \mathbb{A}ct(\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})) & \rightarrow & \mathbb{M}or(\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})) \\ (N \times M \xrightarrow{\circ} N) & & (M \xrightarrow{(e_N 1_M, id_M)} N \times M \xrightarrow{\circ} N) \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow (f, g) \\ (N' \times M' \xrightarrow{\circ'} N') & & (M' \xrightarrow{(e_{N'} 1_{M'}, id_{M'})} N' \times M' \xrightarrow{\circ'} N') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G : \mathbb{M}or(\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})) & \rightarrow & \mathbb{A}ct(\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})) \\ (M \xrightarrow{s} N) & & (N \times M \xrightarrow{\circ_s} N) \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow (f, g) \\ (M' \xrightarrow{s'} N') & & (N' \times M' \xrightarrow{\circ_{s'}} N'). \end{array}$$

Du diagramme du lemme 1.3.1 et du diagramme de la preuve de la proposition 1.3.4, nous déduisons directement que ces deux foncteurs sont deux isomorphismes de catégories inverses l'un de l'autre.

1.4 Structures cofinales

Soient $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et $((Coker(f), *_C, e_C), p_f)$ un conoyau de f dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Dans cette section, nous allons établir une condition suffisante pour que ce conoyau possède une structure de groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$. Nous montrerons également que le foncteur d'oubli $U : \mathbb{G}rpCom(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ préserve les conoyaux. Pour ce faire, nous introduisons la définition suivante.

Définition 1.4.1. Une *structure cofinale* sur f est la donnée d'un couple (ζ, θ) où $\zeta : (N, *_N, e_N) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ est un morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ et $\theta :$

$(N, *_N, e_N) \rightarrow (M, *_M, e_M)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{(id_N, \zeta)} & N \times N \\ \theta \downarrow & & \downarrow *_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1.4.2. L'appellation «structure cofinale» s'inspire d'une notion de cofinalité issue du contexte ensembliste. En effet, dans le cas où $\mathbb{C} = \mathbb{E}ns$, un morphisme de monoïdes commutatifs $h : H \rightarrow K$ est dit *cofinal* si pour tout élément x de K , il existe un élément x' de K et un élément y de H tels que $x *_K x' = h(y)$.

Soit (ζ, θ) une structure cofinale sur f . Au vu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{\zeta} & N & \xrightarrow{p_f} & Coker(f) \\ & & \uparrow (e_{Cf} 1_{Cf}, id_{Coker(f)}) & & \downarrow id_{Coker(f)} \\ & & Coker(f) \times Coker(f) & & \\ & \nearrow e_{Cf} 1_M & \uparrow p_f \times p_f & \searrow *_N & \\ & & N \times N & & \\ & \nearrow (id_N, \zeta) & \downarrow *_N & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\theta} & M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p_f} Coker(f), \\ & \searrow e_{Cf} 1_M & & & \end{array}$$

dans $\mathbb{C}$, et donc du fait que $p_f \zeta f = e_{Cf} 1_M$ dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$, nous déduisons de la définition de conoyau l'existence d'un unique morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$, noté $\overline{p_f \zeta} : Coker(f) \rightarrow Coker(f)$, entre $Coker(f)$ et $Coker(f)$ tel que le diagramme de droite

$$\begin{array}{ccc} M \xrightarrow[e_N 1_M]{f} N & \xrightarrow{p_f} & Coker(f) \\ \downarrow \zeta & & \downarrow \overline{p_f \zeta} \\ N & \xrightarrow{p_f} & Coker(f) \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$. Nous désignerons désormais ce morphisme par $(\)_{Cf, \zeta}^*$. Nous énonçons alors le résultat principal de cette section.

Proposition 1.4.3. Soient $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ un morphisme de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$, $((Coker(f), *_Cf, e_Cf), p_f)$ un conoyau de f dans $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$ et (ζ, θ) une structure cofinale sur f . Dans ce cas, le quadruple $(Coker(f), *_Cf, e_Cf, ()_{Cf, \zeta}^*)$ est un groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$.

Démonstration. Le résultat découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{p_f} & Coker(f) & \xrightarrow{(id_N, ()_{Cf, \zeta}^*)} & Coker(f) \times Coker(f) \\
 \downarrow p_f & \searrow (id_N, \zeta) & \searrow f\theta & \searrow p_f \times p_f & \downarrow *_Cf \\
 & & N \times N & & \\
 & & \downarrow *_N & & \\
 & & N & \xrightarrow{p_f} & Coker(f) \\
 & \searrow 1_N & \searrow p_f e_N 1_M \theta & \searrow p_f & \\
 Coker(f) & \xrightarrow{1_{Coker(f)}} & \{*\} & \xrightarrow{e_Cf} & Coker(f)
 \end{array}$$

et du fait que p_f est un épimorphisme. $\square$

Pour terminer, nous considérons $g : (G, *_G, e_G, ()_G^*) \rightarrow (H, *_H, e_H, ()_H^*)$ un morphisme de groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$, ainsi que les morphismes $H \xrightarrow{()_H^*} H$ et $H \xrightarrow{1_H} \{*\} \xrightarrow{e_G} G$, vu ici comme des morphismes de monoïdes commutatifs internes à $\mathbb{C}$.

Lemme 1.4.4. Le couple $(()_H^*, e_G 1_H)$ est une structure cofinale sur g .

Démonstration. Le résultat découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xrightarrow{(id_H, ()_H^*)} & H \times H & & \\
 \downarrow 1_H & \searrow 1_H & & \downarrow *_H & \\
 & & \{*\} & & \\
 \downarrow 1_H & \searrow id_{\{*\}} & \searrow e_H & \downarrow & \\
 \{*\} & \xrightarrow{e_G} & G & \xrightarrow{g} & H
 \end{array}$$

$\square$

Dès lors, si $(Coker(g), *_Cg, e_Cg)$ est un conoyau de g dans $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$, nous déduisons du lemme ci-dessus et de la proposition 1.4.3 que le quadruple $(Coker(g), *_Cg, e_Cg, ()_{Cg, ()_H^*}^*)$ est un groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.4.5. Soient $g : (G, *_G, e_G, ()_G^*) \rightarrow (H, *_H, e_H, ()_H^*)$ un morphisme de groupes commutatifs internes à $\mathbb{C}$ et $(Coker(g), *_Cg, e_Cg)$ un conoyau de g dans $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$. Dans ce cas, le couple $((Coker(g), *_Cg, e_Cg, ()_{Cg, ()_H^*}^*), p_g)$ est un conoyau de g dans $\mathbb{GrpCom}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Le résultat découle directement du fait que $\mathbb{GrpCom}(\mathbb{C})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$. $\square$

1.5 Adjoint à gauche au foncteur d'oubli entre $\mathbb{GrpCom}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$

Soit $(M, *_M, e_M)$ un monoïde commutatif interne à $\mathbb{C}$. Considérons le morphisme $(id_M, id_M) : M \rightarrow M \times M$ de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$ qui est généralement appelé *morphisme diagonal* de M et noté Δ_M . Dans cette section, nous supposerons que $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$ possède les conoyaux de tous les morphismes diagonaux. Nous noterons $((Coker(\Delta_M), *_C\Delta_M, e_C\Delta_M), p_{\Delta_M})$ le conoyau de Δ_M dans $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$. Considérons alors les morphismes $(\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1) : M \times M \rightarrow M \times M$ et $*_M : M \times M \rightarrow M$ de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$.

Lemme 1.5.1. Le couple $((\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1), *_M)$ est une structure cofinale sur Δ_M .

Démonstration. Le résultat découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M & \xrightarrow{(id_{M \times M}, (\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1))} & (M \times M) \times (M \times M) \\
 \downarrow *_M & \searrow ((\pi_{M,M}^1, \pi_{M,M}^2), (\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1)) & \downarrow t_{M,M,M,M} \\
 & & (M \times M) \times (M \times M) \\
 & \searrow (*_M, *_M) & \downarrow *_M \times *_M \\
 M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \times M
 \end{array}$$

$\square$

Nous déduisons alors du lemme ci-dessus et de la proposition 1.4.3 que le quadruple

$$(Coker(\Delta_M), *_C\Delta_M, e_C\Delta_M, ()_{C\Delta_M, (\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^1)}^*)$$

est un groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$.

Soit alors un morphisme $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$.
 Considérons les conoyaux de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & Coker(\Delta_M) \\ f \downarrow & & f \times f \downarrow & & \\ N & \xrightarrow{\Delta_N} & N \times N & \xrightarrow{p_{\Delta_N}} & Coker(\Delta_N). \end{array}$$

Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M \times M & \xrightarrow{f \times f} & N \times N & & \\ \Delta_M \uparrow & & \Delta_N \nearrow & & \downarrow p_{\Delta_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N & & \\ & \searrow (e_N, e_N)1_M & \downarrow (e_N, e_N)1_N & \searrow e_{C\Delta_N}1_N & \\ & N \times N & & & Coker(\Delta_N) \\ & \nearrow (e_N, e_N)1_M & \nearrow p_{\Delta_N} & & \\ & & \searrow e_{C\Delta_N}1_M & & \end{array}$$

est commutatif, nous savons, par définition de conoyau, qu'il existe un unique morphisme de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$, noté $\overline{p_{\Delta_N}(f \times f)} : Coker(\Delta_M) \rightarrow Coker(\Delta_N)$, entre $Coker(\Delta_M)$ et $Coker(\Delta_N)$ tel que le diagramme de droite

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & Coker(\Delta_M) \\ f \downarrow & & f \times f \downarrow & & \downarrow \overline{p_{\Delta_N}(f \times f)} \\ N & \xrightarrow{\Delta_N} & N \times N & \xrightarrow{p_{\Delta_N}} & Coker(\Delta_N) \end{array}$$

est commutatif. Remarquons que $\overline{(p_{\Delta_M}(id_M \times id_M))} = id_{Coker(\Delta_M)}$ par unicité, puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & Coker(\Delta_M) \\ id_M \times id_M \downarrow & & \downarrow id_{(M \times M)\Delta_M} \\ M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & Coker(\Delta_M) \end{array}$$

est commutatif. Par ailleurs, pour $(M, *_M, e_M) \xrightarrow{f} (N, *_N, e_N) \xrightarrow{g} (P, *_P, e_P)$ deux morphismes de $\mathbb{MonCom}(\mathbb{C})$, remarquons également que par unicité,

$\overline{(p_{\Delta_P}(gf \times gf))} = \overline{(p_{\Delta_P}(g \times g))} \overline{(p_{\Delta_N}(f \times f))}$ puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & Coker(\Delta_M) \\
 \downarrow f \times f & & \downarrow \overline{(p_{\Delta_N}(f \times f))} \\
 N \times N & \xrightarrow{p_{\Delta_N}} & Coker(\Delta_N) \\
 \downarrow g \times g & & \downarrow \overline{(p_{\Delta_P}(g \times g))} \\
 P \times P & \xrightarrow{p_{\Delta_P}} & Coker(\Delta_P)
 \end{array}$$

$gf \times gf$ (curved arrow from $M \times M$ to $P \times P$)

est commutatif. Nous avons ainsi construit un foncteur

$$\begin{array}{ccc}
 L : \mathbb{M}onCom(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{G}rpCom(\mathbb{C}); \\
 M & \mapsto & Coker(\Delta_M) \\
 f \downarrow & & \downarrow \overline{(p_{\Delta_N}(f \times f))} \\
 N & & Coker(\Delta_N)
 \end{array}
 .$$

Théorème 1.5.2. *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possédant les produits finis et telle que $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ possède les conoyaux des morphismes diagonaux. Dans ce cas, le foncteur L construit ci-dessus est l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \mathbb{G}rpCom(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Nous définissons l'unité de l'adjonction $\eta : Id_{\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})} \Rightarrow UL$, pour tout monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$ interne à $\mathbb{C}$, par le morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$

$$\eta_M := M \xrightarrow{(id_M, e_M 1_M)} M \times M \xrightarrow{p_{\Delta_M}} Coker(\Delta_M).$$

La transformation η ainsi construite est naturelle puisque pour tout morphisme $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{(id_M, e_M 1_M)} & M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & Coker(\Delta_M) \\
 f \downarrow & \searrow (f, e_N 1_M) & \downarrow f \times f & & \downarrow \overline{(p_{\Delta_N}(f \times f))} \\
 N & \xrightarrow{(id_N, e_N 1_N)} & N \times N & \xrightarrow{p_{\Delta_N}} & Coker(\Delta_N)
 \end{array}$$

est commutatif. Pour démontrer l'adjonction à gauche, nous allons voir que l'association

$$\begin{aligned}
 \omega : \text{Hom}_{\mathbb{G}rpCom(\mathbb{C})}(Coker(\Delta_M), G) & \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})}(M, G) \\
 Coker(\Delta_M) \xrightarrow{u} G & \mapsto M \xrightarrow{\eta_M} Coker(\Delta_M) \xrightarrow{u} G
 \end{aligned}$$

est inversible. Pour cela, soit $v : (M, *_M, e_M) \rightarrow (G, *_G, e_G)$ un morphisme de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ et considérons le morphisme $M \times M \xrightarrow{v \times v} G \times G \xrightarrow{id_G \times (\cdot)_G^*} G \times G \xrightarrow{*_G} G$ qui est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\Delta_M} & M \times M & \xrightarrow{v \times v} & G \times G \\
 \downarrow e_G 1_M & \searrow v & \downarrow e_G 1_G & \searrow \Delta_G & \downarrow id_G \times (\cdot)_G^* \\
 & & G & & G \times G \\
 & \nearrow e_G 1_G & & \nearrow *_G & \downarrow *_G \\
 G & & & & G \\
 & \nearrow id_G & & &
 \end{array}$$

est commutatif. Par définition de conoyau, il existe un unique morphisme $\overline{*_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(v \times v)} : Coker(\Delta_M) \rightarrow G$ de $\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})$ entre $Coker(\Delta_M)$ et G tel que

$$\overline{*_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(v \times v)} p_{\Delta_M} = *_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(v \times v).$$

Dès lors, l'association

$$\begin{aligned}
 \omega^* : \text{Hom}_{\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})}(M, G) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{G}rpCom(\mathbb{C})}(Coker(\Delta_M), G) \\
 M \xrightarrow{v} G &\mapsto Coker(\Delta_M) \xrightarrow{\overline{*_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(v \times v)}} G
 \end{aligned}$$

est l'association inverse de ω . En effet, pour tout $v \in \text{Hom}_{\mathbb{M}onCom(\mathbb{C})}(M, G)$, nous avons que $\omega(\omega^*(v)) : *_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(v \times v)\eta_M = v$ puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\eta_M} & Coker(\Delta_M) & & \\
 \downarrow v & \searrow (id_M, e_M 1_M) & \downarrow p_{\Delta_M} & & \downarrow \overline{*_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(v \times v)} \\
 & & M \times M & \xrightarrow{v \times v} & G \times G \\
 & \searrow (v, e_G 1_M) & \downarrow v \times v & & \downarrow id_G \times (\cdot)_G^* \\
 & & G \times G & & G \times G \\
 & \searrow (id_G, e_G 1_G)v & \downarrow id_G \times (\cdot)_G^* & \searrow *_G & \\
 & & G & \xrightarrow{id_G} & G
 \end{array}$$

est commutatif et pour tout $u \in \text{Hom}_{\text{GrpCom}(\mathbb{C})}(\text{Coker}(\Delta_M), G)$, nous avons que $\omega^*(\omega(u)) = \overline{*_G(id_G \times (\cdot)_G^*)(u\eta_M \times u\eta_M)} = u$ puisque p_{Δ_M} est un épimorphisme et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M & \xrightarrow{p_{\Delta_M}} & \text{Coker}(\Delta_M) \\
 \downarrow (id_M, e_M 1_M) \times (e_M 1_M, id_M) & \searrow \eta_M \times \eta_M & \downarrow \\
 & L(M) \times L(M) \xrightarrow{u \times u} G \times G & \\
 & \downarrow id_{L(M)} \times (\cdot)_{C\Delta_M}^* & \downarrow id_G \times (\cdot)_G^* \\
 (M \times M) \times (M \times M) & \xrightarrow{p_{\Delta_M} \times p_{\Delta_M}} & L(M) \times L(M) \xrightarrow{u \times u} G \times G \\
 \downarrow t_{M, M, M, M} & \downarrow p_{\Delta_M} \times p_{\Delta_M} & \downarrow u \times u \\
 (M \times M) \times (M \times M) & \xrightarrow{*_M \times *_M} & M \times M \\
 \downarrow *_M \times *_M & \downarrow *_M \times *_M & \downarrow p_{\Delta_M} \\
 M \times M & \xrightarrow{*_{C\Delta_M}} & \text{Coker}(\Delta_M) \\
 \downarrow p_{\Delta_M} & \downarrow *_M \times *_M & \downarrow u \\
 \text{Coker}(\Delta_M) & \xrightarrow{u} & G
 \end{array}$$

est commutatif. Dans ce dernier diagramme, nous avons parfois écrit $L(M)$ au lieu de $\text{Coker}(\Delta_M)$ afin de gagner un peu de place. $\square$

1.6 Résultats existants

Dans la section précédente, nous avons construit une adjonction à partir de conoyaux de morphismes diagonaux. De tels résultats existent déjà dans la littérature. Nous pensons essentiellement à la proposition 1.7.6 de [BB04] et la proposition 3.4 de [Bou03]. Dans cette section, nous effectuons une brève présentation de ces derniers. Nous commençons par la proposition 1.7.6 de [BB04] dont nous donnons un énoncé équivalent.

Proposition (1.7.6 de [BB04]). *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie finiment cocomplète, régulière et unitale. Le foncteur d'oubli $U : \text{GrpCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{MonCom}(\mathbb{C})$ possède un adjoint à gauche. Plus explicitement, étant donné un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$, le conoyau dans $\mathbb{C}$ de la diagonale $\Delta_M : M \rightarrow M \times M$ est le groupe commutatif libre engendré par le monoïde commutatif M .*

Dans cette proposition, le caractère finiment cocomplet de $\mathbb{C}$ n'est pas indispensable et assure uniquement l'existence du conoyau de Δ_M dans $\mathbb{C}$. Contrairement au théorème 1.5.2 présenté dans la section précédente, le résultat de Borceux et de Bourn s'énonce dans le cas particulier d'une catégorie $\mathbb{C}$ régulière et unitale. Cette particularisation se comprend au regard de la proposition 1.7.5 de [BB04] que nous rappelons via un énoncé équivalent.

Proposition (1.7.5 de [BB04]). *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie finiment cocomplète, régulière et unitale. Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{MonCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ possède un adjoint à gauche. Plus explicitement, étant donné un objet Z de $\mathbb{C}$, le coégalisateur dans $\mathbb{C}$ de la paire $Z \xrightleftharpoons[(id_Z, 0)]{(0, id_Z)} Z \times Z$ est le monoïde commutatif libre engendré par Z .*

En combinant les résultats des deux dernières propositions, Borceux et Bourn déduisent l'existence d'une adjonction

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \mathbb{C} & \xrightleftharpoons[L]{\tau} & \mathbf{GrpCom}(\mathbb{C}) \end{array}$$

lorsque $\mathbb{C}$ est une catégorie régulière et unitale. Ce résultat est une généralisation de la proposition 3.4 de [Bou03] due à Bourn et dont le cadre est celui d'une catégorie pointée, régulière et de Mal'cev (qui est donc un cadre plus particulier que le précédent puisque (pointée + Mal'cev $\Rightarrow$ unital) par le corollaire 2.2.10 de [BB04]). L'énoncé (équivalent) est le suivant.

Proposition (3.4 de [Bou03]). *Soient $\mathbb{C}$ une catégorie pointée, régulière et de Mal'cev et X un objet de $\mathbb{C}$. Un objet A de $\mathbb{C}$ est un groupe commutatif libre engendré par X si et seulement s'il est obtenu par le coproduit fibré dans $\mathbb{C}$ suivant (c'est-à-dire le conoyau de la diagonale $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$):*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{p_{\Delta_X}} & A \\ \Delta_X \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Une autre différence importante entre la proposition 1.7.6 de [BB04] et le théorème 1.5.2 de la section précédente est que dans le résultat de Borceux et de Bourn, le conoyau de Δ_M est une colimite de $\mathbb{C}$, tandis que dans le théorème 1.5.2, le conoyau de Δ_M est une colimite de $\mathbf{MonCom}(\mathbb{C})$, une partie de la preuve de la proposition 1.7.6 de [BB04] étant d'ailleurs consacrée à montrer que le conoyau de Δ_M possède une structure de groupe commutatif interne à $\mathbb{C}$. Afin de mieux mettre ce fait en évidence, nous dirons qu'un foncteur $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ entre deux catégories pointées préservant les objets zéros *reflète les*

conoyaux si, étant donné un morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathbb{C}$, le conoyau de $F(f)$ existe dans $\mathbb{D}$, alors le conoyau de f existe dans $\mathbb{C}$ et celui-ci est préservé par F .

Lemme 1.6.1. *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie régulière et unitale. Le foncteur d'oubli $U : \text{MonCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ reflète les conoyaux.*

Démonstration. Le résultat découle des propositions 1.4.11 et 1.6.10 de [BB04]. $\square$

La proposition 1.7.6 de [BB04] se déduit alors directement du théorème 1.5.2 et du lemme précédent. Ceci suggère un léger dépouillement au niveau des hypothèses de la proposition 1.7.6 de [BB04]. Celui-ci s'effectue via l'énoncé suivant.

Proposition 1.6.2. *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie pointée, possédant les produits binaires ainsi que le conoyau du morphisme diagonal Δ_M de tout monoïde commutatif M et telle que le foncteur d'oubli $U : \text{MonCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ reflète les conoyaux. Dans ce cas, le foncteur d'oubli $U : \text{GrpCom}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{MonCom}(\mathbb{C})$ possède un adjoint à gauche. Plus explicitement, étant donné un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$, le conoyau dans $\mathbb{C}$ de la diagonale $\Delta_M : M \rightarrow M \times M$ est le groupe commutatif libre engendré par le monoïde commutatif M .*

Ce dernier énoncé est équivalent au théorème 1.5.2. La preuve de ce fait nous a été suggérée par le professeur M. Gran. Nous la présentons ci-dessous.

Proposition 1.6.3. *Le théorème 1.5.2 et la proposition 1.6.2 se déduisent réciproquement l'un de l'autre. En particulier, la proposition 1.6.2 est vraie.*

Démonstration. Il est clair que la proposition 1.6.2 se déduit du théorème 1.5.2. Nous montrons alors que le théorème 1.5.2 se déduit de la proposition 1.6.2. Pour cela, soit une catégorie $\mathbb{C}$ possédant les produits finis et telle que $\text{MonCom}(\mathbb{C})$ possède les conoyaux des morphismes diagonaux. Au vu de la remarque 1.1.8, le foncteur d'oubli $U : \text{MonCom}(\text{MonCom}(\mathbb{C})) \rightarrow \text{MonCom}(\mathbb{C})$ est une équivalence et reflète donc les conoyaux. En appliquant la proposition 1.6.2 à la catégorie $\text{MonCom}(\mathbb{C})$, nous obtenons une adjonction

$$\text{MonCom}(\text{MonCom}(\mathbb{C})) \begin{array}{c} \xleftarrow{U} \\ \xrightarrow[\tau]{L} \end{array} \text{GrpCom}(\text{MonCom}(\mathbb{C}))$$

Par la remarque 1.1.8, nous obtenons l'adjonction désirée

$$\text{MonCom}(\mathbb{C}) \begin{array}{c} \xleftarrow{U} \\ \xrightarrow[\tau]{L} \end{array} \text{GrpCom}(\mathbb{C}).$$

$\square$

Chapitre 2

2-groupe symétrique libre engendré par un 2-monoïde symétrique

Dans ce chapitre, nous transposons les résultats introduits dans le premier chapitre au contexte 2-catégoriel.

2.1 Contexte 2-catégoriel général

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons avec une 2-catégorie $\mathcal{C}$. Nous supposons que celle-ci possède les *2-produits binaires*, c'est-à-dire que pour $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ deux objets de $\mathcal{C}$, il existe un objet de $\mathcal{C}$ noté $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ et deux 1-morphismes de $\mathcal{C}$ notés $\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^1 : \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$ et $\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^2 : \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_2$ tels que, pour $\mathbb{C}$ un objet de $\mathcal{C}$ et $F_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_1, F_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_2$ deux 1-morphismes de $\mathcal{C}$, il existe un unique 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $(F_1, F_2) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ tel que

$$\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^1 (F_1, F_2) = F_1, \Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^2 (F_1, F_2) = F_2;$$

de plus, pour $\alpha_1 : F_1 \Rightarrow F'_1, \alpha_2 : F_2 \Rightarrow F'_2$ deux 2-morphismes de $\mathcal{C}$, il existe un unique 2-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $(\alpha_1, \alpha_2) : (F_1, F_2) \Rightarrow (F'_1, F'_2)$ entre (F_1, F_2) et (F'_1, F'_2) tel que

$$i_{\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^1} * (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1, \text{ et } i_{\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^2} * (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2.$$

Pour $F_1 : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{B}_1, F_2 : \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{B}_2$ deux 1-morphismes de $\mathcal{C}$, le 1-morphisme $(F_1 \Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^1, F_2 \Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^2)$ sera plus simplement notée $F_1 \times F_2$. Pour $\alpha_1 : F_1 \Rightarrow F'_1, \alpha_2 : F_2 \Rightarrow F'_2$ deux 2-morphismes de $\mathcal{C}$, le 2-morphisme $(\alpha_1 * i_{\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^1}, \alpha_2 * i_{\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^2})$

sera plus simplement noté $\alpha_1 \times \alpha_2$. Nous rappelons les propriétés élémentaires suivantes.

Propriétés 2.1.1.

1. Pour deux objets $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$(\Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^1, \Pi_{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2}^2) = id_{\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2}.$$

2. Pour deux objets $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ de $\mathcal{C}$ et trois 1-morphismes $F_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_1$, $F_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_2$, $T : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$(F_1, F_2)T = (F_1T, F_2T).$$

3. Pour deux 1-morphismes $F_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_1$, $F_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_2$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$(i_{F_1}, i_{F_2}) = i_{(F_1, F_2)}.$$

4. Pour six 1-morphismes $F_1, F'_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_1$, $F_2, F'_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_2$, $T, T' : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\mathcal{C}$ et trois 2-morphismes $\alpha_1 : F_1 \Rightarrow F'_1$, $\alpha_2 : F_2 \Rightarrow F'_2$, $\tau : T \Rightarrow T'$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$(\alpha_1, \alpha_2) * \tau = (\alpha_1 * \tau, \alpha_2 * \tau).$$

5. Pour six 1-morphismes $F_1, F'_1, F''_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_1$, $F_2, F'_2, F''_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}_2$ de $\mathcal{C}$ et trois 2-morphismes $\alpha_1 : F_1 \Rightarrow F'_1$, $\alpha'_1 : F'_1 \Rightarrow F''_1$, $\alpha_2 : F_2 \Rightarrow F'_2$, $\alpha'_2 : F'_2 \Rightarrow F''_2$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$(\alpha'_1, \alpha'_2)(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha'_1\alpha_1, \alpha'_2\alpha_2).$$

Dans la suite, pour tout triple d'objets $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ de $\mathcal{C}$, nous désignerons par $A_{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}}$ le 1-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$((\Pi_{\mathbb{A}, \mathbb{B} \times \mathbb{C}}^1, \Pi_{\mathbb{B}, \mathbb{C}}^1 \Pi_{\mathbb{A}, \mathbb{B} \times \mathbb{C}}^2), \Pi_{\mathbb{B}, \mathbb{C}}^2 \Pi_{\mathbb{A}, \mathbb{B} \times \mathbb{C}}^2) : \mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) \rightarrow (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C}$$

et pour tout autre objet $\mathbb{D}$ de $\mathcal{C}$, nous désignerons par $T_{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}}$ le 1-isomorphisme canonique de $\mathcal{C}$

$$(\pi_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}^1 \times \pi_{\mathbb{C}, \mathbb{D}}^1, \pi_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}^2 \times \pi_{\mathbb{C}, \mathbb{D}}^2) : (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{D}) \rightarrow (\mathbb{A} \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{B} \times \mathbb{D}).$$

Par ailleurs, nous supposons que $\mathcal{C}$ possède un *objet 2-terminal*, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ possède un objet noté $\mathbb{1}$ tel que pour tout objet $\mathbb{A}$ de $\mathcal{C}$, il existe un unique 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $1_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{1}$ entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{1}$; de plus, pour tout 2-morphisme $\alpha : 1_{\mathbb{A}} \Rightarrow 1_{\mathbb{A}}$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$\alpha = i_{1_{\mathbb{A}}}.$$

Nous rappelons la propriété élémentaire suivante.

Propriété 2.1.2. Pour tout 1-morphisme $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ de $\mathbb{C}$, nous avons

$$1_{\mathbb{B}} F = 1_{\mathbb{A}};$$

de plus, pour tout autre 1-morphisme $F' : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ de $\mathbb{C}$ et tout 2-morphisme $\alpha : F \Rightarrow F'$ de $\mathcal{C}$, nous avons

$$i_{1_{\mathbb{B}}} * \alpha = i_{1_{\mathbb{A}}}.$$

Nous appellerons *2-monoïde interne* à $\mathcal{C}$ la donnée d'un sextuple $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}})$, où $\mathbb{M}$ est un objet de $\mathcal{C}$, $\otimes_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ est un 1-morphisme de $\mathcal{C}$, $a_{\mathbb{M}} : \otimes_{\mathbb{M}}(Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \Rightarrow \otimes_{\mathbb{M}}(\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}})A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}}$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ (appelé *contrainte d'associativité*) tel que l'égalité (appelée *axiome du pentagone*)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times (Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}})} & \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & & \\
\downarrow Id_{\mathbb{M}} \times A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} & \searrow i_{Id_{\mathbb{M}}} \times a_{\mathbb{M}} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & & \\
\mathbb{M} \times ((\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times (\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}})} & \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \\
\downarrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M} \times \mathbb{M},\mathbb{M}} & & \downarrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} & \searrow a_{\mathbb{M}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \\
(\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} & (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & & \\
\downarrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow a_{\mathbb{M}} \times i_{Id_{\mathbb{M}}} & \searrow \otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & & \\
((\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} & (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} \mathbb{M} \\
& & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \\
& & & & \mathbb{M}
\end{array}$$

||

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times (Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}})} & \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & & \\
\downarrow Id_{\mathbb{M}} \times A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} & \searrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & & \\
\mathbb{M} \times ((\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \\
\downarrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M} \times \mathbb{M},\mathbb{M}} & \searrow \otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow a_{\mathbb{M}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \\
(\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \\
\downarrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow A_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} & \searrow a_{\mathbb{M}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \\
((\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} & (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} \mathbb{M} \\
& & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \\
& & & & \mathbb{M}
\end{array}$$

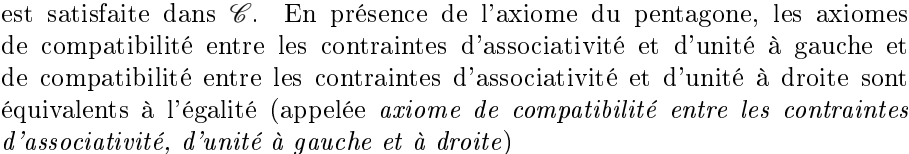
est satisfaite dans $\mathcal{C}$, $I_{\mathbb{M}} : \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{M}$ est un 1-morphisme de $\mathcal{C}$, $g_{\mathbb{M}} : Id_{\mathbb{M}} \Rightarrow \otimes_{\mathbb{M}}(I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ (appelé *contrainte d'unité à gauche*)

tel que l'égalité (appelée *axiome de compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité à gauche*)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & & \\
 & \swarrow^{(I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow^{\otimes_{\mathbb{M}}} & \\
 (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \\
 & & \swarrow^{g_{\mathbb{M}} \times i_{Id_{\mathbb{M}}}} & & \\
 & & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & &
 \end{array} \\
 || \\
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & & \\
 & \swarrow^{(I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow^{\otimes_{\mathbb{M}}} & \\
 (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \\
 & \swarrow^{A_{\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \searrow^{g_{\mathbb{M}}} & \\
 & & \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \\
 & & \swarrow^{a_{\mathbb{M}}} & & \searrow^{Id_{\mathbb{M}}} \\
 & & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & & \mathbb{M}
 \end{array}
 \end{array}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$, et $d_{\mathbb{M}} : Id_{\mathbb{M}} \Rightarrow \otimes_{\mathbb{M}}(Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}})$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ (appelé *contrainte d'unité à droite*) tel que l'égalité (appelée *axiome de compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité à droite*)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & & \\
 & \swarrow^{Id_{\mathbb{M}} \times (Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}})} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow^{\otimes_{\mathbb{M}}} & \\
 \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \\
 & & \swarrow^{i_{Id_{\mathbb{M}}} \times d_{\mathbb{M}}} & &
 \end{array}$$



Nous rappelons également que l'égalité

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \text{M} \\
 \swarrow (I_{\text{M}}, I_{\text{M}}) \quad \downarrow I_{\text{M}} \quad \searrow I_{\text{M}} \\
 \text{M} \\
 \swarrow (I_{\text{M}} 1_{\text{M}}, Id_{\text{M}}) \quad \swarrow g_{\text{M}} \quad \searrow Id_{\text{M}} \\
 \text{M} \times \text{M} \xrightarrow{\otimes_{\text{M}}} \text{M}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{c}
 \text{M} \\
 \swarrow (I_{\text{M}}, I_{\text{M}}) \quad \downarrow I_{\text{M}} \quad \searrow I_{\text{M}} \\
 \text{M} \\
 \swarrow (Id_{\text{M}}, I_{\text{M}} 1_{\text{M}}) \quad \swarrow d_{\text{M}} \quad \searrow Id_{\text{M}} \\
 \text{M} \times \text{M} \xrightarrow{\otimes_{\text{M}}} \text{M}
 \end{array}
 \end{array}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$.

Nous appellerons *2-monoïde symétrique interne* à $\mathcal{C}$ la donnée d'un septuplet $(\text{M}, \otimes_{\text{M}}, a_{\text{M}}, I_{\text{M}}, g_{\text{M}}, d_{\text{M}}, c_{\text{M}})$, où $(\text{M}, \otimes_{\text{M}}, a_{\text{M}}, I_{\text{M}}, g_{\text{M}}, d_{\text{M}})$ est un 2-monoïde interne à $\mathcal{C}$ et $c_{\text{M}} : \otimes_{\text{M}} \Rightarrow \otimes_{\text{M}}(\Pi^2_{\text{M}, \text{M}}, \Pi^1_{\text{M}, \text{M}})$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ tel que les deux égalités (respectivement appelées *axiome de compatibilité entre les contraintes d'associativité et de symétrie* et *axiome de symétrie*)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \text{M} \times (\text{M} \times \text{M}) & & \\
 & \swarrow A_{\text{M}, \text{M}, \text{M}} & & \searrow Id_{\text{M}} \times \otimes_{\text{M}} & \\
 (\text{M} \times \text{M}) \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}} \times Id_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} & \xrightarrow{a_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} \\
 \downarrow (\Pi^2_{\text{M} \times \text{M}, \text{M}}, \Pi^1_{\text{M} \times \text{M}, \text{M}}) & & \downarrow (\Pi^2_{\text{M}, \text{M}}, \Pi^1_{\text{M}, \text{M}}) & & \downarrow \otimes_{\text{M}} \\
 \text{M} \times (\text{M} \times \text{M}) & \xrightarrow{Id_{\text{M}} \times \otimes_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} & \xrightarrow{c_{\text{M}}} & \text{M} \\
 \downarrow A_{\text{M}, \text{M}, \text{M}} & & \downarrow a_{\text{M}} & & \downarrow \otimes_{\text{M}} \\
 (\text{M} \times \text{M}) \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}} \times Id_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}}} & \text{M}
 \end{array} \\
 || \\
 \begin{array}{ccccc}
 & & \text{M} \times (\text{M} \times \text{M}) & & \\
 & \swarrow A_{\text{M}, \text{M}, \text{M}} & & \searrow Id_{\text{M}} \times \otimes_{\text{M}} & \\
 (\text{M} \times \text{M}) \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}} \times Id_{\text{M}}} & \text{M} \times (\text{M} \times \text{M}) & \xrightarrow{Id_{\text{M}} \times \otimes_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} \\
 \downarrow (\Pi^2_{\text{M} \times \text{M}, \text{M}}, \Pi^1_{\text{M} \times \text{M}, \text{M}}) & & \downarrow Id_{\text{M}} \times (\Pi^2_{\text{M}, \text{M}}, \Pi^2_{\text{M}, \text{M}}) & & \downarrow \otimes_{\text{M}} \\
 \text{M} \times (\text{M} \times \text{M}) & \xrightarrow{Id_{\text{M}} \times \otimes_{\text{M}}} & \text{M} \times (\text{M} \times \text{M}) & \xrightarrow{Id_{\text{M}} \times \otimes_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} \\
 \downarrow A_{\text{M}, \text{M}, \text{M}} & & \downarrow A_{\text{M}, \text{M}, \text{M}} & & \downarrow \otimes_{\text{M}} \\
 (\text{M} \times \text{M}) \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}} \times Id_{\text{M}}} & (\text{M} \times \text{M}) \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}} \times Id_{\text{M}}} & \text{M} \times \text{M} \\
 & & \downarrow \otimes_{\text{M}} \times Id_{\text{M}} & & \downarrow \otimes_{\text{M}} \\
 & & \text{M} \times \text{M} & \xrightarrow{\otimes_{\text{M}}} & \text{M}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M} \\
\downarrow Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \searrow (\Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1) \searrow c_{\mathbb{M}} & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M} \\
\downarrow Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \searrow (\Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1) \searrow c_{\mathbb{M}} & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M}
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M} \\
\downarrow Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \searrow i_{\otimes_{\mathbb{M}}} \searrow & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M}
\end{array}
\end{array}$$

sont satisfaites dans $\mathcal{C}$. Nous rappelons que dans ce cas, les deux égalités suivantes (respectivement appelées *propriété de compatibilité entre les contraintes de symétrie et d'unité à gauche et à droite* et *propriété de symétrie stricte par rapport à $I_{\mathbb{M}}$*)

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \\
\downarrow (Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}) & \searrow d_{\mathbb{M}} \searrow & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M}
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \\
\downarrow (Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}) & \searrow (I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) \searrow g_{\mathbb{M}} \searrow & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M} \\
\downarrow (\Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1) & \searrow c_{\mathbb{M}} \searrow & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
1 & \xrightarrow{(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}})} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} \mathbb{M} \\
\downarrow (I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}) & \searrow (\Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1) \searrow c_{\mathbb{M}} & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M}
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
1 & \xrightarrow{(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}})} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} \mathbb{M} \\
\downarrow (I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}) & \searrow i_{\otimes_{\mathbb{M}}} (I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}) \searrow & \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \otimes_{\mathbb{M}} \quad} & \mathbb{M}
\end{array}
\end{array}$$

sont satisfaites dans $\mathcal{C}$.

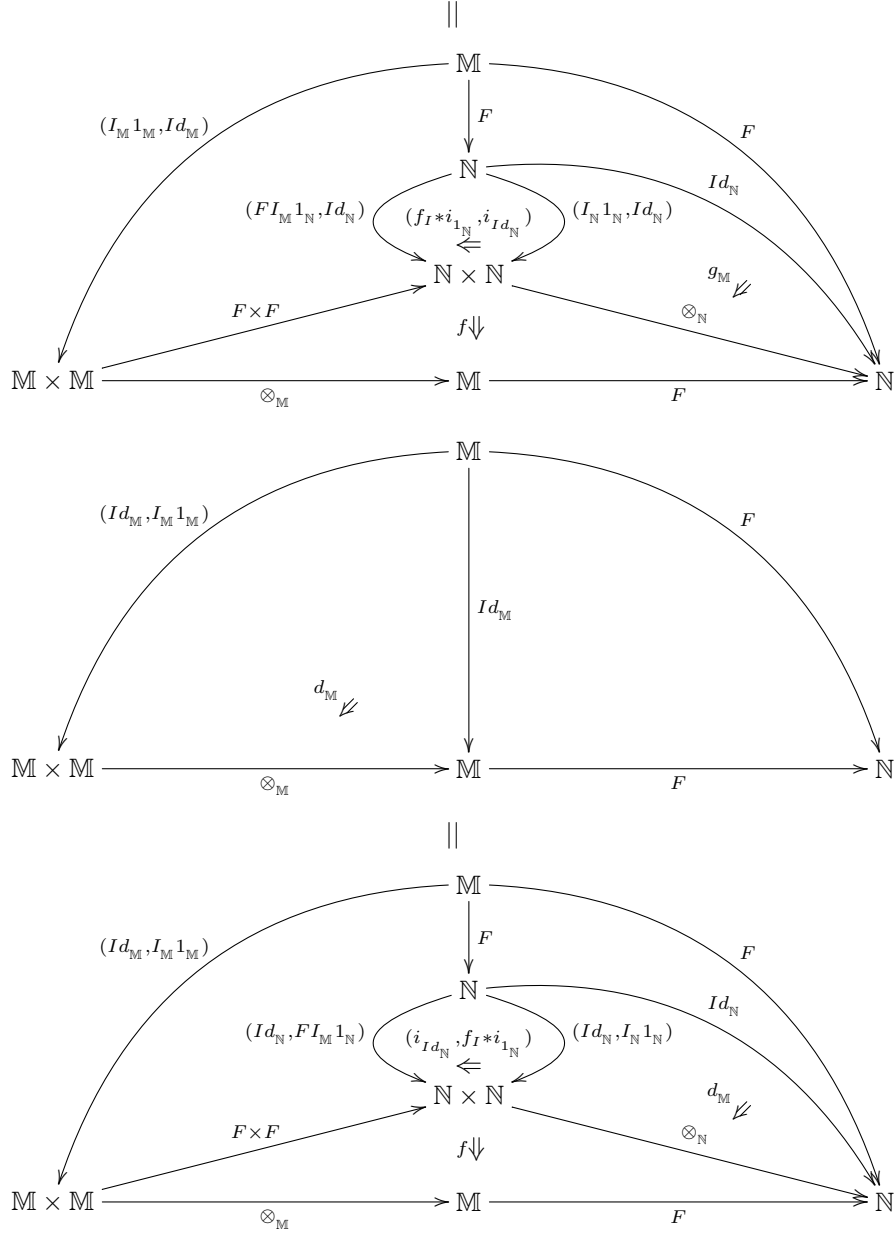
Pour $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}})$ et $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$ deux 2-monoïdes interne à $\mathcal{C}$, nous appellerons *1-morphisme de 2-monoïdes internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$* la donnée d'un triple (F, f, f_I) , où $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ est un 1-morphisme de $\mathcal{C}$, $f : \otimes_{\mathbb{N}}(F \times F) \Rightarrow F \otimes_{\mathbb{M}}$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ (appelé *contrainte de préservation du produit*) tel que l'égalité (appelée *axiome de compatibilité*)

entre les contraintes d'associativité et de préservation du produit)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{F \times (F \times F)} & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\
 \downarrow A_{\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & & \swarrow A_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}} & & \downarrow Id_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}} \\
 (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(F \times F) \times F} & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} & \xleftarrow{a_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow f \times i_F & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \times Id_{\mathbb{N}} & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\
 \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \\
 & \searrow \otimes_{\mathbb{M}} & \downarrow f & \nearrow F & \\
 & & \mathbb{M} & &
 \end{array} \\
 || \\
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{F \times (F \times F)} & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\
 \downarrow A_{\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \searrow Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \downarrow Id_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}} \\
 (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{i_F \times f} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow a_{\mathbb{M}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} & \searrow f & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\
 \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N}
 \end{array}
 \end{array}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$ et $f_I : I_{\mathbb{N}} \Rightarrow FI_{\mathbb{M}}$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ (appelée *contrainte de préservation de l'unité*) tel que les deux égalités (respectivement appelées *axiome de compatibilité entre les contraintes d'unité à gauche et de préservation de l'unité* et *axiome de compatibilité entre les contraintes d'unité à droite et de préservation de l'unité*)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{M} & & \\
 & \searrow^{(I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})} & \downarrow Id_{\mathbb{M}} & \searrow^F & \\
 \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N} \\
 & & \downarrow g_{\mathbb{M}} & &
 \end{array}$$



sont satisfaites dans $\mathcal{C}$. Si de plus, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ se dotent respectivement d'une symétrie $c_{\mathbb{M}}$ et d'une symétrie $c_{\mathbb{N}}$, nous dirons que le triple (F, f, f_I) est un *1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes* à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ si l'égalité

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
\downarrow (\Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1) & \searrow f & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \xrightarrow{F} \mathbb{N} \\
\downarrow c_{\mathbb{M}} & & \\
\mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N}
\end{array}$$

Rappelons dès lors que si $(\mathbb{P}, \otimes_{\mathbb{P}}, a_{\mathbb{P}}, I_{\mathbb{P}}, g_{\mathbb{P}}, d_{\mathbb{P}})$ est un 2-monoïde interne à $\mathcal{C}$ (éventuellement muni d'une symétrie $c_{\mathbb{M}}$) et si (G, g, g_I) est un 1-morphisme de 2-monoïdes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}$, alors le triple $(GF, (i_G * f)(g * i_{F \times F}), (i_G * f_I)g_I)$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{M}$ et $\mathbb{P}$. Ceci définit une 1-composition sur les 1-morphismes de 2-monoïdes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$ qui est associative et pour laquelle les triples de la forme $(Id_{\mathbb{M}}, i_{\otimes_{\mathbb{M}}}, i_{I_{\mathbb{M}}})$ sont des unités à gauche et à droite.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
\downarrow \otimes_{\mathbb{M}} & \searrow f & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\
\mathbb{M} & \xrightarrow[\alpha \Downarrow]{F} & \mathbb{N} \\
& \searrow G & \\
& & \mathbb{M} \xrightarrow{G} \mathbb{N}
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
\downarrow \otimes_{\mathbb{M}} & \searrow \alpha \times \alpha \Downarrow & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\
\mathbb{M} & \xrightarrow[\alpha \Downarrow]{g \searrow G \times G} & \mathbb{N} \\
& \searrow G & \\
& & \mathbb{M} \xrightarrow{G} \mathbb{N}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
& \mathbb{1} & \\
I_{\mathbb{M}} \swarrow & & \searrow I_{\mathbb{N}} \\
\mathbb{M} & \xrightarrow[\alpha \Downarrow]{gI} & \mathbb{N} \\
& \searrow G & \\
& & \mathbb{M} \xrightarrow{G} \mathbb{N}
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
& \mathbb{1} & \\
I_{\mathbb{M}} \swarrow & & \searrow I_{\mathbb{N}} \\
\mathbb{M} & \xrightarrow[\alpha \Downarrow]{fI \searrow F} & \mathbb{N} \\
& \searrow G & \\
& & \mathbb{M} \xrightarrow{G} \mathbb{N}
\end{array}
\end{array}$$

48

à $\mathcal{C}$ et que la 2-composition horizontale de deux 2-morphismes de 2-monoïdes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$ est encore un 2-morphisme de 2-monoïdes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$.

Notations. Nous désignerons par $2\text{-}\mathcal{M}on(\mathcal{C})$ la 2-catégorie des 2-monoïdes internes à $\mathcal{C}$ et par $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ la 2-catégorie des 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$.

Remarque 2.1.3. Si $\mathcal{C} = \mathcal{Cat}$ la 2-catégorie des catégories, des foncteurs et des transformations naturelles, nous retrouvons les définitions classiques de catégorie monoïdale (voir [Bé63]) et de catégorie monoïdale symétrique. Si $\mathcal{C} = \mathcal{Grpd}$ la 2-catégorie des groupoïdes, nous retrouvons les définitions classiques de groupoïde monoïdal et de groupoïde monoïdal symétrique.

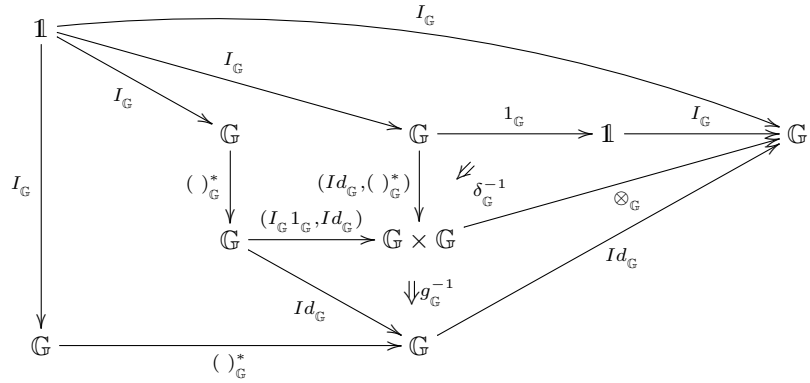
Nous appellerons *2-groupe interne à $\mathcal{C}$* la donnée d'un octuplet $(\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, (\)_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}})$, où $(\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}})$ est un 2-monoïde interne à $\mathcal{C}$, $(\)_{\mathbb{G}}^* : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ est un 1-morphisme de $\mathcal{C}$ et $\delta_{\mathbb{G}} : \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}}, (\)_{\mathbb{G}}^*) \Rightarrow I_{\mathbb{G}}1_{\mathbb{G}}$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$. Nous désignerons par $u_{\mathbb{G}}$ le 2-isomorphisme canonique de $\mathcal{C}$

$$\otimes_{\mathbb{G}}((\)_{\mathbb{G}}^* \times (\)_{\mathbb{G}}^*)(\Pi_{\mathbb{G}, \mathbb{G}}^2, \Pi_{\mathbb{G}, \mathbb{G}}^1) \Rightarrow (\)_{\mathbb{G}}^* \otimes_{\mathbb{G}},$$

par $v_{\mathbb{G}}$ le 2-isomorphisme canonique de $\mathcal{C}$

$$Id_{\mathbb{G}} \Rightarrow (\)_{\mathbb{G}}^* (\)_{\mathbb{G}}^*$$

et par $(\)_{I_{\mathbb{G}}}^*$ le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$



Nous désignerons par ϵ_G le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & \xrightarrow{I_G} & G \\
 & & \uparrow 1_G & \searrow 1_G & \downarrow \delta_G^{-1} \\
 & & & G & \\
 & & & \uparrow ()_G^* & \downarrow (Id_G, ()_G^*) \\
 G & \xrightarrow{(()_G^*, ()_G^*)} & G & \xrightarrow{(Id_G, ()_G^*)} & G \times G \\
 & \searrow (i_G^*, v_G^{-1}) & & & \uparrow \otimes_G \\
 & & G & \xrightarrow{(()_G^*, Id_G)} & G \times G
 \end{array}$$

qui est l'unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ tel que l'égalité (appelée *première identité triangulaire*)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Id_G & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 G & \xrightarrow{(Id_G, I_G 1_G)} & G \times G & \xrightarrow{\otimes_G} & G \\
 & \searrow (Id_G, (()_G^*, Id_G)) & \uparrow (i_{Id_G}, \epsilon_G) & & \downarrow d_G \\
 & & G \times (G \times G) & \xrightarrow{Id_G \times \otimes_G} & G \\
 & \searrow ((Id_G, ()_G^*), Id_G) & \downarrow A_{G, G, G} & & \downarrow a_G \\
 & & (G \times G) \times G & \xrightarrow{\otimes_G \times Id_G} & G \times G \\
 & \searrow (\eta_G, i_{Id_G}) & & & \uparrow \otimes_G = g_M \\
 G & \xrightarrow{(I_G 1_G, Id_G)} & G \times G & & \\
 & \downarrow Id_G & & &
 \end{array}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$. Cette dernière égalité est encore équivalente à l'égalité

suivante (appelée *seconde identité triangulaire*)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & ()_{\mathbb{G}}^* \\
 & & & & \curvearrowright \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{(I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*)} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{G}}} & \mathbb{G} \\
 \downarrow Id_{\mathbb{G}} & \searrow (()_{\mathbb{G}}^*, Id_{\mathbb{G}}), ()_{\mathbb{G}}^* & \uparrow \otimes_{\mathbb{G}} \times Id_{\mathbb{G}} & \searrow a_{\mathbb{G}}^{-1} & \uparrow \otimes_{\mathbb{G}} = d_{\mathbb{M}} * i_{()_{\mathbb{G}}^*} \\
 & & (\mathbb{G} \times \mathbb{G}) \times \mathbb{G} & & \\
 & \searrow (()_{\mathbb{G}}^*, (Id_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*)) & \uparrow A_{\mathbb{G}, \mathbb{G}, \mathbb{G}} & \searrow Id_{\mathbb{G}} \times \otimes_{\mathbb{G}} & \\
 & & \mathbb{G} \times (\mathbb{G} \times \mathbb{G}) & & \\
 & \searrow (i_{()_{\mathbb{G}}^*}, \eta_{\mathbb{G}}) & & & \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{(()_{\mathbb{G}}^*, I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{G}})} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} & &
 \end{array}$$

Si le 2-monoïde $\mathbb{G}$ interne à $\mathcal{C}$ possède une symétrie $c_{\mathbb{G}}$, nous dirons que $\mathbb{G}$ est un *2-groupe symétrique interne* à $\mathcal{C}$.

Si $(\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}})$ et $(\mathbb{H}, \otimes_{\mathbb{H}}, a_{\mathbb{H}}, I_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{H}}, ()_{\mathbb{H}}^*, \delta_{\mathbb{H}})$ sont deux 2-groupes interne à $\mathcal{C}$ et $(F, f, f_I) : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ un 1-morphisme de 2-monoïdes internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ (vu comme des 2-monoïdes internes à $\mathcal{C}$), nous désignerons par $\phi_F : F()_{\mathbb{G}}^* \Rightarrow ()_{\mathbb{H}}^* F$ l'unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ tel que les deux égalités suivantes

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{G} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*)} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\
 \downarrow 1_{\mathbb{G}} & \searrow F & \downarrow F \times F \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{1_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H} \\
 \downarrow I_{\mathbb{G}} & \searrow f_I & \downarrow I_{\mathbb{H}} \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{F} & \mathbb{H}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{G} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*)} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\
 \downarrow 1_{\mathbb{G}} & \searrow \delta_{\mathbb{G}} & \downarrow F \times F \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{G}}} & \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\
 \downarrow I_{\mathbb{G}} & \searrow f & \downarrow \otimes_{\mathbb{H}} \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{F} & \mathbb{H}
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{G} & \xrightarrow{(()_{\mathbb{G}}^*, Id_{\mathbb{G}})} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\
 \downarrow 1_{\mathbb{G}} & \searrow F & \downarrow F \times F \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{1_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H} \\
 \downarrow I_{\mathbb{G}} & \searrow f_I & \downarrow I_{\mathbb{H}} \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{F} & \mathbb{H}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{G} & \xrightarrow{(()_{\mathbb{G}}^*, Id_{\mathbb{G}})} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\
 \downarrow 1_{\mathbb{G}} & \searrow \epsilon_{\mathbb{G}}^{-1} & \downarrow F \times F \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{G}}} & \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\
 \downarrow I_{\mathbb{G}} & \searrow f & \downarrow \otimes_{\mathbb{H}} \\
 \mathbb{G} & \xrightarrow{F} & \mathbb{H}
 \end{array}
 \end{array}$$

sont satisfaites dans $\mathcal{C}$. Nous dirons, par la suite, que le triple (F, f, f_I) est un *1-morphisme de 2-groupes internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$* . Ce 1-morphisme est *symétrique* si $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ se dotent chacun d'une symétrie et si (F, f, f_I) est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Si (G, g, g_I) est un autre 1-morphisme de 2-groupes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ et si $\alpha : (F, f, f_I) \Rightarrow (G, g, g_I)$ est un 2-morphisme de 2-monoïdes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$, alors α est appelé un *2-morphisme de 2-groupes (éventuellement symétriques) internes à $\mathcal{C}$* .

Notations. Nous désignerons par $2\text{-}\mathcal{G}rp(\mathcal{C})$ la 2-catégorie des 2-groupes internes à $\mathcal{C}$ et par $2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$ la 2-catégorie des 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{C}$.

Remarque 2.1.4. Si $\mathcal{C} = \mathbb{G}rpd$ la 2-catégorie des groupoïdes, nous retrouvons les définitions classiques de Gr-catégorie (ou cat-groupe) et de Pic-catégorie (ou cat-groupe symétrique) (voir, par exemple, [Sin75] ou [FW74]).

Nous rappelons que les quatre 2-catégories $2\text{-}\mathcal{M}on(\mathcal{C})$, $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, $2\text{-}\mathcal{G}rp(\mathcal{C})$ et $2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$ possèdent les objets 2-terminaux ainsi que les deux produits binaires et ceux-ci sont préservés par les différents 2-foncteurs d'oubli $2\text{-}\mathcal{M}on(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, $2\text{-}\mathcal{G}rp(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ et $2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$.

Par ailleurs, pour tout 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{C}$, le triple $(\otimes_{\mathbb{M}}, \gamma_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}} * i_{\mathbb{M}})$, où $\gamma_{\mathbb{M}}$ désigne le 2-isomorphisme canonique de $\mathcal{C}$ entre $\otimes_{\mathbb{M}}(\otimes_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}})$ et $\otimes_{\mathbb{M}}(\otimes_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}})(\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1 \times \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2 \times \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2)$, est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques entre $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ et $\mathbb{M}$. De plus, les 2-isomorphismes de $\mathcal{C}$, $a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}$ et $c_{\mathbb{M}}$ sont des 2-isomorphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Si $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ est un autre 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$ et si (F, f, f_I) est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, alors f et f_I sont des 2-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Si $(\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}})$ est un 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$, alors le triple $(()_{\mathbb{G}}^*, ()_{\otimes_{\mathbb{G}}}^*, ()_I^*)$, où $()_{\otimes_{\mathbb{G}}}^*$ désigne le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \otimes_{\mathbb{G}}(()_{\mathbb{G}}^*, ()_{\mathbb{G}}^*) &= \otimes_{\mathbb{G}}(()_{\mathbb{G}}^*, ()_{\mathbb{G}}^*)(\Pi_{\mathbb{G},\mathbb{G}}^2, \Pi_{\mathbb{G},\mathbb{G}}^1) \xrightarrow{u_{\mathbb{G}} * i_{(\Pi_{\mathbb{G},\mathbb{G}}^2, \Pi_{\mathbb{G},\mathbb{G}}^1)}} \\ &= ()_{\mathbb{G}}^* \otimes_{\mathbb{G}} (\Pi_{\mathbb{G},\mathbb{G}}^2, \Pi_{\mathbb{G},\mathbb{G}}^1) \xrightarrow{i_{()_{\mathbb{G}}^*} * c_{\mathbb{G}}^{-1}} ()_{\mathbb{G}}^* \otimes_{\mathbb{G}}, \end{aligned}$$

est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques et les 2-isomorphismes de $\mathcal{C}$, $\delta_{\mathbb{G}}, \epsilon_{\mathbb{G}}$ sont des 2-isomorphismes de 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Si $(\mathbb{H}, \otimes_{\mathbb{H}}, a_{\mathbb{H}}, I_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{H}}, c_{\mathbb{H}}, ()_{\mathbb{H}}^*, \delta_{\mathbb{H}})$ est un autre 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$ et si (K, k, k_I) est un 1-morphisme de 2-groupes symétriques entre $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$, alors le 2-isomorphisme ϕ_K de $\mathcal{C}$ est un 2-isomorphisme de 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{C}$.

Soient $\mathbb{S}$ un objet de $\mathcal{C}$ et $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$. Une 2-action de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{S}$ est la donnée d'un triple $(\odot, \alpha, \delta)$, où $\odot : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ est un 1-morphisme de $\mathcal{C}$, $\alpha : \odot(Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \Rightarrow \odot(\odot \times Id_{\mathbb{M}})A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ tel que l'égalité

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times (Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}})} & \mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & & \\
\downarrow Id_{\mathbb{S}} \times A_{\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \searrow i_{Id_{\mathbb{S}}} \times a_{\mathbb{M}} & \downarrow Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & & \\
\mathbb{S} \times ((\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times (\otimes_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}})} \mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & & \\
\downarrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \downarrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \downarrow \odot & & \\
(\mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} \mathbb{S} \\
\downarrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow \alpha \times i_{Id_{\mathbb{M}}} & \searrow \alpha & & \\
((\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(\odot \times Id_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{S} \\
& \parallel & & & \\
\mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times (Id_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}})} & \mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & & \\
\downarrow Id_{\mathbb{S}} \times A_{\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \searrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \downarrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \searrow Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \\
\mathbb{S} \times ((\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} \\
\downarrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \downarrow \odot \times Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}} & \downarrow \odot \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow \alpha & \\
(\mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} \mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{S} \\
\downarrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \searrow \alpha & & \\
((\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) \times Id_{\mathbb{M}}} (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{S}
\end{array}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$ et $\delta : Id_{\mathbb{S}} \Rightarrow \odot(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ tel que l'égalité

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & & \\
& \swarrow Id_{\mathbb{S}} \times (Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}) & \downarrow Id_{\mathbb{S}} \times Id_{\mathbb{M}} & \searrow \odot & \\
\mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{S} \\
& \searrow i_{Id_{\mathbb{S}}} \times d_{\mathbb{M}} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\parallel \\
\text{---} \text{S} \times \text{M} \text{---} \\
\begin{array}{ccc}
\text{---} \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{(Id_{\text{S} \times \text{M}}, I_{\text{M}}^1 \Pi_{\text{S}, \text{M}}^2)} & \text{S} \times \text{M} \\
\text{---} \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{(Id_{\text{S}}, I_{\text{M}}^1 1_{\text{S}})} & \text{S} \\
\text{---} \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{Id_{\text{S}}} & \text{S}
\end{array} \\
\text{---} \text{S} \times (\text{M} \times \text{M}) \text{---} & \xrightarrow{Id_{\text{S}} \times \otimes_{\text{M}}} & \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{Id_{\text{S}}} & \text{S} \\
\text{---} \text{S} \times (\text{M} \times \text{M}) \text{---} & \xrightarrow{A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}}} & (\text{S} \times \text{M}) \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{\odot \times Id_{\text{M}}} & \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{\delta} & \text{S} \\
\text{---} \text{S} \times (\text{M} \times \text{M}) \text{---} & \xrightarrow{Id_{\text{S}} \times \otimes_{\text{M}}} & \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \text{S} \times \text{M} \text{---} & \xrightarrow{\delta} & \text{S}
\end{array}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$.

Exemple 2.1.5. Le 1-morphisme $\Pi_{\text{S}, \text{M}}^1$ de $\mathcal{C}$, muni des 2-identités

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 (Id_{\text{S}} \times \otimes_{\text{M}}) &= \Pi_{\text{S}, \text{M} \times \text{M}}^1 = \Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 (\Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 \times Id_{\text{M}}) A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}} \\
Id_{\text{S}} &= \Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 (Id_{\text{S}}, I_{\text{M}}^1 1_{\text{S}}),
\end{aligned}$$

est une 2-action de M sur S appelée *2-action triviale de M sur S* .

Remarque 2.1.6. La définition de 2-action s'étend au cas où le 2-monoïde $(\text{M}, \otimes_{\text{M}}, a_{\text{M}}, I_{\text{M}}, g_{\text{M}}, d_{\text{M}})$ n'est pas symétrique. Toutefois, seul le cas symétrique sera traité dans la suite du chapitre. Pour approfondir la notion de 2-action, nous invitons le lecteur à consulter [Bre92], [CGJ00] et [GE15].

Pour tout 2-monoïde symétrique $(\text{M}, \otimes_{\text{M}}, a_{\text{M}}, I_{\text{M}}, g_{\text{M}}, d_{\text{M}}, c_{\text{M}})$ interne à $\mathcal{C}$ et toute 2-action $(\odot, \alpha, \delta) : \text{S} \times \text{M} \rightarrow \text{S}$ de M sur un objet S de $\mathcal{C}$, un *2-trivialisateur* $de (\odot, \alpha, \delta)$ est la donné d'un triple $(\mathbb{T}, T, \tau)$, où $\mathbb{T}$ est un objet de $\mathcal{C}$, $T : \text{S} \rightarrow \mathbb{T}$ est un 1-morphisme de $\mathcal{C}$ et $\tau : T \odot \Rightarrow T \Pi_{\text{S}, \text{M}}^1$ est un 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
T \odot (Id_{\text{S}} \times \otimes_{\text{M}}) & \xrightarrow{\tau * i_{Id_{\text{S}} \times \otimes_{\text{M}}}} & T \Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 (Id_{\text{S}} \times \otimes_{\text{M}}) = P_{\odot} \Pi_{\text{S}, \text{M} \times \text{M}}^1 \\
\downarrow i_T * \alpha & & \parallel \\
T \odot (\odot \times Id_{\text{M}}) A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}} & & \\
\downarrow \tau * i_{(\odot \times Id_{\text{M}}) A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}}} & & \\
T \Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 (\odot \times Id_{\text{M}}) A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}} & & \\
\parallel & & \parallel \\
T \odot \Pi_{\text{S} \times \text{M}, \text{M}}^1 A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}} & \xrightarrow{\tau * i_{\Pi_{\text{S} \times \text{M}, \text{M}}^1 A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}}}} & T \Pi_{\text{S}, \text{M}}^1 \Pi_{\text{S} \times \text{M}, \text{M}}^1 A_{\text{S}, \text{M}, \text{M}}
\end{array}$$

est commutatif dans $\mathcal{C}$.

Remarque 2.1.7. Si $(\mathbb{T}, T, \tau)$ est un 2-trivialisateur d'une 2-action $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{C}$ sur un objet $\mathbb{S}$ de $\mathcal{C}$, alors nous déduisons de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
T & \xrightarrow{i_T * \delta} & T \odot (Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) \\
\parallel & & \parallel \\
T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) & & T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1(\odot(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}), I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) \\
\downarrow \tau^{-1} * i_{(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})} & & \downarrow \tau^{-1} * i_{(\odot(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}), I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})} \\
T \odot (Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) & \xrightarrow{i_{T \odot} * (\delta, i_{I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}})} & T \odot (\odot(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}), I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) \\
\downarrow \tau^{-1} * i_{(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})} & \searrow i_{T \odot} * (i_{Id_{\mathbb{S}}}, d * i_{I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}}) & \searrow i_T * \alpha * i_{(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) \times (I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})} \\
& & T \odot (Id_{\mathbb{S}}, \otimes_{\mathbb{M}}(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}) 1_{\mathbb{S}}) \\
& & \downarrow \tau * i_{(Id_{\mathbb{S}}, \otimes_{\mathbb{M}}(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}) 1_{\mathbb{S}})} \\
& & T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1(Id_{\mathbb{S}}, \otimes_{\mathbb{M}}(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}) 1_{\mathbb{S}}) \\
& \nearrow i_{T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1} * (i_{Id_{\mathbb{S}}}, d * i_{I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}}) & \\
T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) & \xrightarrow{i_{T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1} * (\delta, i_{I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}})} & T \\
& & \parallel \\
& & T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})
\end{array}$$

que $\tau * i_{(Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}})} = i_T * \delta$. Il n'est donc pas obligatoire de requérir cette condition de compatibilité entre τ et δ dans la définition de 2-trivialisateur que nous avons introduite ci-dessus.

Nous dirons d'un 2-trivialisateur $(\mathbb{S}/\odot, P_{\odot}, \eta_{\odot})$ de $(\odot, \alpha, \delta)$ qu'il est un *2-système trivialisant relatif* à $(\odot, \alpha, \delta)$ si, pour tout 2-trivialisateur $(\mathbb{T}, T, \tau)$ de $(\odot, \alpha, \delta)$, il existe un unique 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\bar{T} : \mathbb{S}/\odot \rightarrow \mathbb{T}$ entre $\mathbb{S}/\odot$ et $\mathbb{T}$ tel que

$$\bar{T}P_{\odot} = T, \quad i_{\bar{T}} * \eta_{\odot} = \tau;$$

et si, de plus, pour tout autre 2-trivialisateur $(\mathbb{T}, T', \tau')$ de $(\odot, \alpha, \delta)$ et tout 2-morphisme $\alpha : T \Rightarrow T'$ de $\mathcal{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
TP_{\odot} & \xrightarrow{\tau} & T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 \\
\alpha * i_{P_{\odot}} \downarrow & & \downarrow \alpha * i_{\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1} \\
T'P_{\odot} & \xrightarrow{\tau'} & T'\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1
\end{array}$$

est commutatif, il existe un unique 2-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\bar{\alpha} : \bar{T} \rightarrow \bar{T}'$ entre $\bar{T}$ et $\bar{T}'$ tel que

$$\bar{\alpha} * i_{P_{\odot}} = \alpha.$$

Remarque 2.1.8. Si $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ est un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$ et si $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ est une 2-action de $\mathbb{M}$ sur un objet $\mathbb{S}$ de $\mathcal{C}$, alors un 2-système trivialisant $(\mathbb{S}/\odot, P_{\odot}, \eta_{\odot})$ relatif à $(\odot, \alpha, \delta)$ est exactement «la» 2-colimite de

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{S} \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{A_{\mathbb{S}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} & (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot \times Id_{\mathbb{M}}} & \mathbb{S} \times \mathbb{M} \\
 \downarrow Id_{\mathbb{S}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \nearrow \alpha & & & \downarrow \odot \\
 \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \odot \quad} & \mathbb{S} & & \\
 \uparrow (Id_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{S}}) & \nearrow \delta & \uparrow \Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 & \nearrow Id_{\mathbb{S}} & \\
 \mathbb{S} & & & &
 \end{array}$$

dans $\mathcal{C}$ (voir, par exemple, [Bor94], pour une définition précise de 2-colimite). Contrairement au cadre catégoriel traité dans le chapitre précédent, les 2-systèmes trivialisants ne sont ici pas des 2-coégalisateurs. Par exemple, lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{G}rpd$ est la 2-catégorie des groupoïdes, $\mathbb{1}$ est le groupoïde à un objet et une flèche et nous pouvons considérer la 2-action canonique $\mathbb{1} \times \mathbb{1} \xrightarrow{1_{\mathbb{1} \times \mathbb{1}}} \mathbb{1}$ munie des isomorphismes naturels évidents. Dans ce cas, $\mathbb{1} \xrightarrow{id_{\mathbb{1}}} \mathbb{1}$ est un 2-système trivialisant relatif à $1_{\mathbb{1} \times \mathbb{1}}$ mais n'est pas un 2-coégalisateur de la paire $\mathbb{1} \times \mathbb{1} \xrightarrow[1_{\mathbb{1}, \mathbb{1}}]{1_{\mathbb{1} \times \mathbb{1}}} \mathbb{1}$. Un tel 2-coégalisateur est en fait isomorphe au groupoïde $\mathbb{Z}!$, c'est-à-dire le groupoïde à un seul objet et dont l'ensemble des flèches est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Nous laissons en exercice pour le lecteur la vérification de cette dernière affirmation.

Considérons deux 2-actions $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ et $(\odot', \alpha', \delta') : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$, respectivement d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{C}$ sur un objet $\mathbb{S}$ de $\mathcal{C}$ et d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ interne à $\mathcal{C}$ sur un objet $\mathbb{T}$ de $\mathcal{C}$. De là, nous considérons le 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\underline{\odot \times \odot'}$

$$(\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{N}) \xrightarrow{T_{\mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{M}, \mathbb{N}}} (\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{T} \times \mathbb{N}) \xrightarrow{\odot \times \odot'} \mathbb{S} \times \mathbb{T}$$

et les deux 2-morphismes évidents de $\mathcal{C}$ induits par $\alpha \times \alpha'$ et $\delta \times \delta'$, que nous notons $\underline{\alpha \times \alpha'}$ et $\underline{\delta \times \delta'}$ et qui font du triple $(\underline{\odot \times \odot'}, \underline{\alpha \times \alpha'}, \underline{\delta \times \delta'})$ une 2-action du 2-monoïde symétrique produit $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$. Supposons par ailleurs que $(\mathbb{S}/\odot, P_{\odot}, \eta_{\odot})$, $(\mathbb{T}/\odot', P_{\odot'}, \eta_{\odot'})$ et $((\mathbb{S} \times \mathbb{T})/(\underline{\odot \times \odot'}), P_{\underline{\odot \times \odot'}}, \eta_{\underline{\odot \times \odot'}})$ sont

respectivement un 2-système trivialisant relatif à $(\odot, \alpha, \delta)$, un 2-système trivialisant relatif à $(\odot', \alpha', \delta')$ et un 2-système trivialisant relatif à $(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')$. Il est clair que $(\mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot', P_\odot \times P_{\odot'}, \eta_\odot \times \eta_{\odot'})$ est un 2-trivialisateur de $\odot \times \odot'$; il existe donc un unique 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\overline{P_\odot \times P_{\odot'}} : (\mathbb{S} \times \mathbb{T})/(\odot \times \odot') \rightarrow \mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot'$ entre $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})/(\odot \times \odot')$ et $\mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot'$ tel que

$$\overline{P_\odot \times P_{\odot'}} P_{\odot \times \odot'} = P_\odot \times P_{\odot'}, \quad i_{\overline{P_\odot \times P_{\odot'}}} * \eta_{\odot \times \odot'} = \eta_\odot \times \eta_{\odot'}.$$

Nous dirons que *les 2-systèmes trivialisants commutent avec les 2-produits binaires dans $\mathcal{C}$* si $\overline{P_\odot \times P_{\odot'}}$ est un 1-isomorphisme de $\mathcal{C}$, quelles que soient les 2-actions $(\odot, \alpha, \delta)$ et $(\odot', \alpha', \delta')$ considérées. De façon équivalente, cela signifie que le triple $(\mathbb{S}/\odot \times \mathbb{S}/\odot, P_\odot \times P_{\odot'}, (\eta_\odot \times \eta_{\odot'}) * i_{T_{N,N,M,M}})$ est un 2-système trivialisant relatif à $(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')$.

Pour finir, considérons un 2-monoïde symétrique $((\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}), (\otimes'_{\mathbb{M}}, \circ, \circ_I), a'_{\mathbb{M}}, (I'_{\mathbb{M}}, i, i_I), g'_{\mathbb{M}}, d'_{\mathbb{M}}, c'_{\mathbb{M}})$ interne à la 2-catégorie $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$ des 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. En généralisant l'argument employé à la fin de la section 1.1, nous avons que $\otimes'_{\mathbb{M}} = \otimes_{\mathbb{M}}$, que $\circ = \gamma_{\mathbb{M}}$ le 2-isomorphisme canonique introduit précédemment dans cette section, que $\circ_I = g_{\mathbb{M}} * i_{I_{\mathbb{M}}}$, que $a'_{\mathbb{M}} = a_{\mathbb{M}}$, que $I'_{\mathbb{M}} = I_{\mathbb{M}}$, que $i = g_{\mathbb{M}}^{-1} * i_{I_{\mathbb{M}}^{-1} \times 1}$, que $i_I = i_{I_{\mathbb{M}}}$, que $g'_{\mathbb{M}} = g_{\mathbb{M}}$, que $d'_{\mathbb{M}} = d_{\mathbb{M}}$ et que $c'_{\mathbb{M}} = c_{\mathbb{M}}$.

Dans la suite du travail, nous identifierons $((\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}), (\otimes'_{\mathbb{M}}, \circ, \circ_I), a'_{\mathbb{M}}, (I'_{\mathbb{M}}, i, i_I), g'_{\mathbb{M}}, d'_{\mathbb{M}}, c'_{\mathbb{M}})$ et $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$. De plus, si $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ est un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$, et $((\odot, \gamma, \gamma_I), \alpha, \delta) : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ est une 2-action de $((\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}), (\otimes'_{\mathbb{M}}, \circ, \circ_I), a'_{\mathbb{M}}, (I'_{\mathbb{M}}, i, i_I), g'_{\mathbb{M}}, d'_{\mathbb{M}}, c'_{\mathbb{M}})$ sur $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$, alors il est facile de voir que

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}})} & \mathbb{N} \times \mathbb{M} \\ & \searrow I_{\mathbb{N}} & \downarrow \odot \\ & & \mathbb{N} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}})} & \mathbb{N} \times \mathbb{M} \\ & \searrow I_{\mathbb{N}} & \downarrow \odot \\ & & \mathbb{N} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}})} & \mathbb{N} \times \mathbb{M} \\ & \searrow I_{\mathbb{N}} & \downarrow \odot \\ & & \mathbb{N} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}})} & \mathbb{N} \times \mathbb{M} \\ & \searrow I_{\mathbb{N}} & \downarrow \odot \\ & & \mathbb{N} \end{array}$$

et c'est pourquoi nous identifierons $((\odot, \gamma, \gamma_I), \alpha, \delta)$ au quadruple $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ par la suite.

2.2 Transfert de structure pour les 2-systèmes trivialisants

Dans cette section, nous supposons que dans $\mathcal{C}$, les 2-systèmes trivialisants commutent avec les 2-produits binaires. L'objectif est de démontrer le résultat

suivant.

Proposition 2.2.1. *Soient $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$, $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ deux 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ une 2-action de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{N}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ et $(N/\odot, P_{\odot}, \eta_{\odot})$ un 2-système trivialisant relatif à $(\odot, \alpha, \delta)$ dans $\mathcal{C}$. Si, dans $\mathcal{C}$, les 2-systèmes trivialisants commutent avec les 2-produits binaires, alors on peut munir $N/\odot$ d'une structure de 2-monoïde symétrique $(N/\odot, \otimes_{N/\odot}, a_{N/\odot}, I_{N/\odot}, g_{N/\odot}, d_{N/\odot}, c_{N/\odot})$ interne à $\mathcal{C}$, $P_{\odot}$ d'une structure de 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques $(P_{\odot}, p, p_I)$ internes à $\mathcal{C}$, de sorte que le triple*

$$((N/\odot, \otimes_{N/\odot}, a_{N/\odot}, I_{N/\odot}, g_{N/\odot}, d_{N/\odot}, c_{N/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \eta_{\odot})$$

soit un 2-système trivialisant relatif à $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$.

Considérons deux 2-monoïdes symétriques $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ et $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ internes à $\mathcal{C}$, $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ une 2-action de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{N}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ et $(N/\odot, P_{\odot}, \eta_{\odot})$ un 2-système trivialisant relatif à $(\odot, \alpha, \delta)$ dans $\mathcal{C}$. Soit alors le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \odot \times \odot & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} & (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{\odot \times \odot} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 \downarrow \Pi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}^1 & \searrow Id_{(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M})} & \downarrow T_{\mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{M}} & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\
 & & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & & \\
 & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \swarrow \gamma & \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{N} \\
 & & \downarrow \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1 & \swarrow \eta_{\odot} & \downarrow P_{\odot} \\
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot.
 \end{array}$$

Par définition de 2-système trivialisant dans $\mathcal{C}$, il existe un unique 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\overline{P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}}}$: $\mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot \rightarrow \mathbb{N}/\odot$ entre $\mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot$ et $\mathbb{N}/\odot$ tel que

$$\overline{P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}}}(P_{\odot} \times P_{\odot}) = P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}}$$

$$i_{\overline{P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}}}} * (\eta_{\odot} \times \eta_{\odot}) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} = (\eta_{\odot} * i_{\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}})(i_{P_{\odot}} * \gamma * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}).$$

Nous désignerons désormais ce 1-morphisme par $\otimes_{N/\odot}$. Nous désignerons également le 1-morphisme $\mathbb{1} \xrightarrow{I_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \xrightarrow{P_{\odot}} \mathbb{N}/\odot$ de $\mathcal{C}$ par $I_{N/\odot}$. Considérons alors le

2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot}, Id_{\mathbb{N}/\odot})} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot \\
 & \searrow (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}, Id_{\mathbb{N}}) & & \nearrow P_{\odot} \times P_{\odot} & \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & & \\
 & \searrow Id_{\mathbb{N}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} & & \\
 & & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \\
 P_{\odot} \downarrow & & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot} \\
 \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}/\odot}} & & & \mathbb{N}/\odot
 \end{array}$$

En utilisant la définition de $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}$, la définition de 2-trivialisateur, la remarque 2.1.7 et le fait que $(\odot, \gamma, \delta * i_{I_{\mathbb{N}}})$ est un 1-morphisme de 2-monoïde symétrique, nous montrons facilement que

$$\begin{array}{ccc}
 \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot}, Id_{\mathbb{N}/\odot}) P_{\odot} \odot & \xrightarrow{i_{\otimes_{\mathbb{N}/\odot} (I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot}, Id_{\mathbb{N}/\odot})} * \eta_{\odot}} & \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot}, Id_{\mathbb{N}/\odot}) P_{\odot} \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1 \\
 \parallel & & \parallel \\
 \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (P_{\odot} \times P_{\odot}) (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}, Id_{\mathbb{N}}) \odot & & \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (P_{\odot} \times P_{\odot}) (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}, Id_{\mathbb{N}}) \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1 \\
 \parallel & & \parallel \\
 P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}} (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}, Id_{\mathbb{N}}) \odot & & P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}} (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}, Id_{\mathbb{N}}) \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1 \\
 i_{P_{\odot}} * g * i_{\odot} \uparrow & & \uparrow i_{P_{\odot}} * g * i_{\Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1} \\
 P_{\odot} \odot & \xrightarrow{\eta_{\odot}} & P_{\odot} \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1
 \end{array}$$

est commutatif. De plus, par définition de 2-système trivialisant, il existe un unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ noté $i_{P_{\odot}} * g_{\mathbb{N}} : Id_{\mathbb{N}/\odot} \Rightarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot}, Id_{\mathbb{N}/\odot})$ entre $Id_{\mathbb{N}/\odot}$ et $\otimes_{\mathbb{N}/\odot} (I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot}, Id_{\mathbb{N}/\odot})$ tel que

$$\overline{i_{P_{\odot}} * g_{\mathbb{N}}} * i_{P_{\odot}} = i_{P_{\odot}} * g_{\mathbb{N}}.$$

Nous désignerons désormais ce 2-isomorphisme par $g_{\mathbb{N}/\odot}$. De la même manière,

des 2-isomorphismes de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot})} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot \\
& \searrow (Id_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}) & & \nearrow P_{\odot} \times P_{\odot} & \\
& & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & & \\
& \searrow Id_{\mathbb{N}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} & & \\
& & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \\
P_{\odot} \downarrow & & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot} \\
\mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}/\odot}} & & & \mathbb{N}/\odot
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & \xrightarrow{P_{\odot} \times (P_{\odot} \times P_{\odot})} & \mathbb{N}/\odot \times (\mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}/\odot} \times \otimes_{\mathbb{N}/\odot}} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot \\
& \searrow Id_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}} & & \nearrow P_{\odot} \times P_{\odot} & \\
& & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & & \\
& \searrow a_{\mathbb{N}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} & & \\
& & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \\
A_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}} \downarrow & & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot} \\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}} \times Id_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \\
& \searrow & \nearrow P_{\odot} \times P_{\odot} & & \\
& & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \\
(P_{\odot} \times P_{\odot}) \times P_{\odot} \downarrow & & & & \\
(\mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot) \times \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}/\odot} \times Id_{\mathbb{N}/\odot}} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}} & \mathbb{N}/\odot
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot} \times P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{(\Pi_{\mathbb{N}/\odot, \mathbb{N}/\odot}^2, \Pi_{\mathbb{N}/\odot, \mathbb{N}/\odot}^1)} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot \\
& \searrow (\Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}^2, \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{N}}^1) & & \nearrow P_{\odot} \times P_{\odot} & \\
& & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & & \\
& \searrow \otimes_{\mathbb{N}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} & & \\
& & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \\
P_{\odot} \times P_{\odot} \downarrow & & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot} \\
\mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}} & & & \mathbb{N}/\odot
\end{array}
\end{array}$$

nous déduisons l'existence d'un unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ noté $\overline{i_{P_\odot} * d_{\mathbb{N}}}$: $Id_{\mathbb{N}/\odot} \Rightarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot}(Id_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot})$ entre $Id_{\mathbb{N}/\odot}$ et $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(Id_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot} 1_{\mathbb{N}/\odot})$ tel que

$$\overline{i_{P_\odot} * d_{\mathbb{N}}} * i_{P_\odot} = i_{P_\odot} * d_{\mathbb{N}},$$

l'existence d'un unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ noté $\overline{i_{P_\odot} * a_{\mathbb{N}}}$: $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(Id_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}}) \Rightarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot}(\otimes_{\mathbb{N}} \times Id_{\mathbb{N}})$ entre $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(Id_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}})$ et $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(\otimes_{\mathbb{N}} \times Id_{\mathbb{N}})$ tel que

$$\overline{i_{P_\odot} * a_{\mathbb{N}}} * i_{P_\odot \times P_\odot \times P_\odot} = i_{P_\odot} * a_{\mathbb{N}},$$

ainsi que l'existence d'un unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ noté $\overline{i_{P_\odot} * c_{\mathbb{N}}}$: $\otimes_{\mathbb{N}/\odot} \Rightarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot}(\Pi_{\mathbb{N}/\odot, \mathbb{N}/\odot}^2, \Pi_{\mathbb{N}/\odot, \mathbb{N}/\odot}^1)$ entre $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(P_\odot \times P_\odot)$ et $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(\Pi_{\mathbb{N}/\odot, \mathbb{N}/\odot}^2, \Pi_{\mathbb{N}/\odot, \mathbb{N}/\odot}^1)$ tel que

$$\overline{i_{P_\odot} * c_{\mathbb{N}}} * i_{P_\odot \times P_\odot} = i_{P_\odot} * c_{\mathbb{N}}.$$

Nous désignerons désormais ces 2-isomorphismes respectivement par $d_{\mathbb{N}/\odot}$, $a_{\mathbb{N}/\odot}$, $c_{\mathbb{N}/\odot}$. Le lemme suivant est laissé en exercice au lecteur.

Lemme 2.2.2. *Le septuple $(\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot})$ est un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$.*

Puisque $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(P_\odot \times P_\odot) = P_\odot \otimes_{\mathbb{N}} P_\odot$ et $I_{\mathbb{N}/\odot} = P_\odot I_{\mathbb{N}}$, le lemme suivant est immédiat au vu des définitions de $a_{\mathbb{N}/\odot}$, $g_{\mathbb{N}/\odot}$, $d_{\mathbb{N}/\odot}$, $c_{\mathbb{N}/\odot}$.

Lemme 2.2.3. *$(P_\odot, i_{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(P_\odot \times P_\odot)}, i_{e_{\mathbb{N}/\odot}})$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$.*

Lemme 2.2.4. *$\eta_\odot$ est un 2-morphisme de monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Le fait que $\eta_\odot$ est compatible avec les contraintes de préservation du produit découle immédiatement de la définition de $\otimes_{\mathbb{N}/\odot}$. Le fait que $\eta_\odot$ est compatible avec les contraintes de préservation de l'unité se déduit directement de la remarque 2.1.7. $\square$

Nous terminons cette section en démontrant la proposition 2.2.1

Démonstration. Soit $((\mathbb{T}, \otimes_{\mathbb{T}}, a_{\mathbb{T}}, I_{\mathbb{T}}, g_{\mathbb{T}}, d_{\mathbb{T}}, c_{\mathbb{T}}), (T, t, t_I), \tau)$ un 2-trivialisateur de $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-MonSym}(\mathcal{C})$. Puisque $(\mathbb{T}, T, \tau)$ est en particulier un 2-trivialisateur relatif à $\odot$ dans $\mathcal{C}$, il existe un unique 1-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\overline{T} : \mathbb{N}/\odot \rightarrow \mathbb{T}$ entre $\mathbb{N}/\odot$ et $\mathbb{T}$ tel que

$$\overline{T} P_\odot = T,$$

$$i_{\overline{T}} * \eta_\odot = \tau.$$

Nous considérons le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\odot} \times P_{\odot}} & \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{\bar{T} \times \bar{T}} & \mathbb{T} \times \mathbb{T} \\
 P_{\odot} \times P_{\odot} \downarrow & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}/\odot} & & \downarrow \otimes_{\mathbb{T}} \\
 \mathbb{N}/\odot \times \mathbb{N}/\odot & & & & \mathbb{T} \\
 & \searrow \otimes_{\mathbb{N}} & \nearrow T & & \\
 & & \mathbb{N} & & \\
 & \nearrow P_{\odot} & \searrow T & & \\
 \mathbb{N}/\odot & \xrightarrow{\bar{T}} & \mathbb{T} & &
 \end{array}$$

Puisque τ est un 2-isomorphisme de $2\text{-MonSym}(\mathcal{C})$, nous voyons immédiatement que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \otimes_{\mathbb{T}}(\bar{T} \times \bar{T})(P_{\odot} \times P_{\odot})\odot \times \odot & \xrightarrow{i_{\otimes_{\mathbb{T}}(\bar{T} \times \bar{T})} * (\eta_{\odot} \times \eta_{\odot}) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}} & \otimes_{\mathbb{T}}(\bar{T} \times \bar{T})(P_{\odot} \times P_{\odot})\Pi^1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \otimes_{\mathbb{T}}(T \times T)\odot \times \odot & & \otimes_{\mathbb{T}}(T \times T)\Pi^1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}} \\
 \downarrow t * i_{\odot \times \odot} & & \downarrow t * i_{\Pi^1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}} \\
 T \otimes_{\mathbb{N}} \odot \times \odot & & T \otimes_{\mathbb{N}} \Pi^1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \bar{T} P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}} \odot \times \odot & & \bar{T} P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}} \Pi^1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \bar{T} \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (P_{\odot} \times P_{\odot})\odot \times \odot & \xrightarrow{i_{\bar{T} \otimes_{\mathbb{N}/\odot}} * (\eta_{\odot} \times \eta_{\odot}) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}} & \bar{T} \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (P_{\odot} \times P_{\odot})\Pi^1_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}
 \end{array}$$

Dès lors, par définition de 2-système trivialisant dans $\mathcal{C}$, il existe un unique 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$ noté $\bar{t} : \otimes_{\mathbb{T}}(\bar{T} \times \bar{T}) \Rightarrow \bar{T} \otimes_{\mathbb{N}/\odot}$ entre $\otimes_{\mathbb{T}}(\bar{T} \times \bar{T})$ et $\bar{T} \otimes_{\mathbb{N}/\odot}$ tel que

$$\bar{t} * i_{P_{\odot} \times P_{\odot}} = t.$$

Par ailleurs, nous désignons par $\bar{t}_I$ le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{I_{\mathbb{N}/\odot}} & \mathbb{N}/\odot \\
 & \searrow I_{\mathbb{N}} \quad \nearrow P_{\odot} & \\
 & \mathbb{N} & \\
 I_{\mathbb{T}} \nearrow & \downarrow T & \nwarrow \bar{T} \\
 & \mathbb{T} &
 \end{array}$$

Nous laissons alors le soin au lecteur de vérifier que le triple $(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I)$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques entre $\mathbb{N}/\odot$ et $\mathbb{T}$. Il est alors clair que

$$(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I)(P_{\odot}, i_{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}(P_{\odot} \times P_{\odot})}, i_{e_{\mathbb{N}/\odot}}) = (\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I),$$

que

$$i_{\bar{T}} * \eta_{\odot} = \tau$$

et que $(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I)$ est l'unique 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques entre $\mathbb{N}/\odot$ et $\mathbb{T}$ possédant ces propriétés.

Supposons que $((\mathbb{T}, \otimes_{\mathbb{T}}, a_{\mathbb{T}}, I_{\mathbb{T}}, g_{\mathbb{T}}, d_{\mathbb{T}}, c_{\mathbb{T}}), (T', t', t'_I), \tau')$ soit un autre 2-trivialisateur de $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$ et que $\alpha : (T, t, t_I) \Rightarrow (T', t', t'_I)$ soit un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ tel que

$$\begin{array}{ccc}
 TP_{\odot} & \xrightarrow{\tau} & T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 \\
 \alpha * i_{P_{\odot}} \downarrow & & \downarrow \alpha * i_{\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1} \\
 T'P_{\odot} & \xrightarrow{\tau'} & T'\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1.
 \end{array}$$

Par définition de 2-système trivialisant dans $\mathcal{C}$, nous savons qu'il existe un unique 2-morphisme de $\mathcal{C}$ noté $\bar{\alpha} : \bar{T} \Rightarrow \bar{T}'$ entre $\bar{T}$ et $\bar{T}'$ tel que

$$\bar{\alpha} * i_{P_{\odot}} = \alpha.$$

Dans $\mathcal{C}$, puisque le 2-morphisme $(\alpha * i_{\otimes_{\mathbb{N}}})t : \otimes_{\mathbb{T}}(T \times T) \Rightarrow T' \otimes_{\mathbb{N}}$ est tel que

$$\begin{array}{ccccc}
 \otimes_{\mathbb{T}}(T \times T) \odot \times \odot & \xrightarrow{i_{\otimes_{\mathbb{T}}} * (\tau \times \tau) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}} & \otimes_{\mathbb{T}}(T \times T) \Pi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}^1 & & \\
 \downarrow t * i_{\odot \times \odot} & & \downarrow t * i_{\Pi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}^1} & & \\
 T \otimes_{\mathbb{N}} \odot \times \odot & \xrightarrow{i_T * \gamma * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}} T \odot (\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) & \xrightarrow{\tau * i_{\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}}} T \otimes_{\mathbb{N}} \Pi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}^1 & & \\
 \downarrow \alpha * i_{\otimes_{\mathbb{N}}} * i_{\odot \times \odot} & \downarrow \alpha * i_{\odot (\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}})} & \downarrow \alpha * i_{\otimes_{\mathbb{N}}} * i_{\Pi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}^1} & & \\
 T' \otimes_{\mathbb{N}} \odot \times \odot & \xrightarrow{i_{T'} * \gamma * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}} T' \odot (\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}) & \xrightarrow{\tau' * i_{\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}}} T' \otimes_{\mathbb{N}} \Pi_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{M} \times \mathbb{M}}^1, & &
 \end{array}$$

puisque le 1-morphisme $\otimes_{\mathbb{T}}(\overline{T} \times \overline{T})$ est tel que

$$\otimes_{\mathbb{T}}(\overline{T} \times \overline{T})(P_{\odot} \times P_{\odot}) = \otimes_{\mathbb{T}}(T \times T)$$

et

$$i_{\otimes_{\mathbb{T}}(\overline{T} \times \overline{T})} * (\eta_{\odot} \times \eta_{\odot}) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} = i_{\otimes_{\mathbb{T}}} * (\tau \times \tau) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}},$$

puisque le 1-morphisme $\overline{T}' \otimes_{\mathbb{N}/\odot}$ est tel que

$$\overline{T}' \otimes_{\mathbb{N}/\odot} (P_{\odot} \times P_{\odot}) = \overline{T}' P_{\odot} \otimes_{\mathbb{N}} = T' \otimes_{\mathbb{N}}$$

et

$$\begin{aligned} i_{\overline{T}' \otimes_{\mathbb{N}/\odot}} * (\eta_{\odot} \times \eta_{\odot}) * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}} \\ = i_{\overline{T}'} * ((\eta_{\odot} * i_{\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}})(i_{P_{\odot}} * \gamma * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}})) \\ = (\tau' * i_{\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}}})(i_{T'} * \gamma * i_{T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}}}) \end{aligned}$$

et puisque le 2-morphisme $(\overline{\alpha} * i_{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}})\overline{t} : \otimes_{\mathbb{T}}(\overline{T} \times \overline{T}) \Rightarrow \overline{T}' \otimes_{\mathbb{N}/\odot}$ est tel que

$$((\overline{\alpha} * i_{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}})\overline{t}) * i_{P_{\odot} \times P_{\odot}} = (\alpha * i_{\otimes_{\mathbb{N}}})t$$

ce dernier est donc l'unique 2-morphisme de $\mathcal{C}$ entre $\otimes_{\mathbb{T}}(\overline{T} \times \overline{T})$ et $\overline{T}' \otimes_{\mathbb{N}/\odot}$ possédant cette propriété, par définition de 2-système trivialisant dans $\mathcal{C}$. Dès lors, puisque

$$(\overline{t}'(i_{\otimes_{\mathbb{T}}} * (\overline{\alpha} \times \overline{\alpha}))) * i_{P_{\odot} \times P_{\odot}} = t'(i_{\otimes_{\mathbb{T}}} * (\alpha \times \alpha)) = (\alpha * i_{\otimes_{\mathbb{N}}})t,$$

nous voyons que $(\overline{\alpha} * i_{\otimes_{\mathbb{N}/\odot}})\overline{t} = (\overline{t}'(i_{\otimes_{\mathbb{T}}} * (\overline{\alpha} \times \overline{\alpha})))$. De plus, nous remarquons immédiatement la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} I_{\mathbb{T}} & \xrightarrow{t_I} & T I_{\mathbb{N}} & \xlongequal{\quad} & \overline{T} P_{\odot} I_{\mathbb{N}} & \xlongequal{\quad} & \overline{T} I_{\mathbb{N}/\odot} \\ \parallel & & \alpha * i_{I_{\mathbb{N}}} \downarrow & & \overline{\alpha} * i_{P_{\odot} I_{\mathbb{N}}} \downarrow & & \downarrow \overline{\alpha} * i_{I_{\mathbb{N}/\odot}} \\ I_{\mathbb{T}} & \xrightarrow{t'_I} & T' I_{\mathbb{N}} & \xlongequal{\quad} & \overline{T}' P_{\odot} I_{\mathbb{N}} & \xlongequal{\quad} & \overline{T}' I_{\mathbb{N}/\odot} \end{array}$$

ce qui montre que $\overline{\alpha}$ est un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. $\square$

2.3 2-Systèmes trivialisants et 2-conoyaux dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$

L'objectif de cette section est d'établir une équivalence entre l'existence des 2-systèmes trivialisants et des 2-conoyaux dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$. Afin de ne pas entretenir de confusions inutiles, nous précisons que dans cette section, contrairement à la précédente, il n'est pas nécessaire de supposer que dans $\mathcal{C}$, les 2-systèmes trivialisants commutent avec les 2-produits binaires.

2.3.1 Les 2-systèmes trivialisants de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ sont (presque) des 2-conoyaux

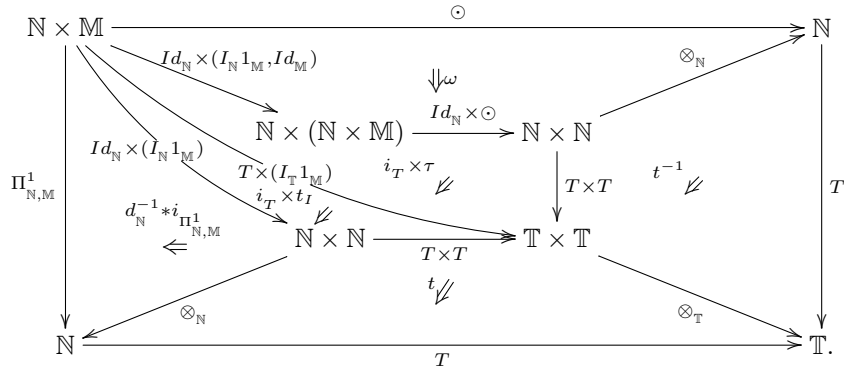
Nous établissons ici un lien unissant les 2-systèmes trivialisants aux 2-conoyaux de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Pour cela, considérons $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ et $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ deux 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et $(\odot, \gamma, \alpha, \delta) : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ une 2-action de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{N}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Nous désignons par ω le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{N} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \odot \quad} & \mathbb{N} & & \\
 \downarrow Id_{\mathbb{N}} \times (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) & \searrow (Id_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}) \times (I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) & \nearrow \otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \nearrow \gamma^{-1} & \\
 & (Id_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{N}}) \times (I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) \searrow & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & & \\
 & & \downarrow d_{\mathbb{N}} \times g_{\mathbb{M}} & & \\
 & & (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{T_{\mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{M}}} & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \\
 & \swarrow \delta^{-1} \times i_{\odot(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})} & & \searrow \odot \times \odot & \\
 \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times \odot} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & &
 \end{array}$$

Proposition 2.3.1. *Si le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \eta_{\odot})$ est un 2-système trivialisant relatif à la 2-action $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, alors le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \tilde{\eta}_{\odot})$ est un 2-conoyau du 1-morphisme $\mathbb{M} \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})} \mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{N}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, où $\tilde{\eta}_{\odot} = (p_I * i_{1_{\mathbb{M}}})(\eta_{\odot} * i_{(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})})$. Réciproquement, si le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \eta_{\odot})$ est un 2-conoyau du 1-morphisme $\mathbb{M} \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})} \mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{N}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, alors le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \tilde{\eta}_{\odot})$ est un 2-système trivialisant relatif à la 2-action $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$,*

[illegible]

Démonstration. Soient $(\mathbb{T}, \otimes_{\mathbb{T}}, a_{\mathbb{T}}, I_{\mathbb{T}}, g_{\mathbb{T}}, d_{\mathbb{T}}, c_{\mathbb{T}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$, $(T, t, t_I) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques et $\tau : T \odot (I_{\mathbb{N}1_{\mathbb{M}}}, Id_{\mathbb{M}}) \Rightarrow I_{\mathbb{T}1_{\mathbb{M}}}$ un 2-morphisme de 1-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Nous désignons par $\hat{\tau}$ le 2-isomorphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$


$$i_{\overline{T}} * \eta_{\odot} = \hat{\tau}.$$
$$(\overline{T}, \bar{t}, \bar{t}_I)(P_\odot, p, p_I) = (T, t, t_I)$$

$$(t_I^{-1} * i_{1_M})(i_{\bar{T}} * \eta_{\odot}) = \tau.$$

Supposons de plus que $(T', t', t'_I) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$ soit un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques, que $\tau' : T' \odot (I_{\mathbb{N}} 1_M, Id_M) \Rightarrow I_{\mathbb{T}} 1_M$ soit un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et que $\alpha : T \Rightarrow T'$ soit un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ tel que $\tau'(\alpha * i_{\odot(I_{\mathbb{N}} 1_M, Id_M)}) = \tau$. Il est alors clair que $\hat{\tau}'(\alpha * i_{\odot}) = (\alpha * i_{\Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1})\hat{\tau}$. Par définition de 2-système trivialisant dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, il existe un unique 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ noté $\bar{\alpha} : \bar{T} \Rightarrow T'$ entre $\bar{T}$ et T' tel que

$$\bar{\alpha} * i_{P_{\odot}} = \alpha$$

et le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \eta_{\odot})$ est un 2-conoyau comme annoncé.

Réciproquement, supposons que le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \eta_{\odot})$ soit un 2-conoyau du 1-morphisme $\mathbb{M} \xrightarrow{(I_{\mathbb{N}} 1_M, Id_M)} \mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{N}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Soit alors $((\mathbb{T}, \otimes_{\mathbb{T}}, a_{\mathbb{T}}, I_{\mathbb{T}}, g_{\mathbb{T}}, d_{\mathbb{T}}, c_{\mathbb{T}}), (T, t, t_I), \tau)$ un 2-trivialisateur de $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Nous désignons par $\tilde{\tau}$ le 2-isomorphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad \odot \quad} & \mathbb{N} \\ \uparrow (I_{\mathbb{N}} 1_M, Id_M) & \searrow \Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1 & \swarrow \tau \\ & \mathbb{N} & \\ \uparrow I_{\mathbb{N}} 1_M & \searrow T & \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad I_{\mathbb{T}} 1_M \quad} & \mathbb{T} \\ & \downarrow t_I^{-1} & \\ & \mathbb{T} & \end{array}$$

Par définition de 2-conoyau dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, nous voyons qu'il existe un unique 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ noté $(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I) : \mathbb{N}/\odot \rightarrow \mathbb{T}$ entre $\mathbb{N}/\odot$ et $\mathbb{T}$ tel que

$$(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I)(P_{\odot}, p, p_I) = (T, t, t_I)$$

$$(\bar{t}_I^{-1} * i_{1_M})(i_{\bar{T}} * \eta_{\odot}) = \tilde{\tau}.$$

Nous laissons alors le soin au lecteur de vérifier que $(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I) : \mathbb{N}/\odot \rightarrow \mathbb{T}$ est l'unique 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{N}/\odot$ et $\mathbb{T}$ tel que

$$(\bar{T}, \bar{t}, \bar{t}_I)(P_{\odot}, p, p_I) = (T, t, t_I)$$

$$i_{\bar{T}} * \hat{\eta}_{\odot} = \tau.$$

Supposons de plus que $((\mathbb{T}, \otimes_{\mathbb{T}}, a_{\mathbb{T}}, I_{\mathbb{T}}, g_{\mathbb{T}}, d_{\mathbb{T}}, c_{\mathbb{T}}), (T', t', t'_I), \tau')$ soit un autre 2-trivialisateur de $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$ et que $\alpha : T \Rightarrow T'$ soit un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ tel que $\tau'(\alpha * i_{\odot}) = (\alpha * i_{\Pi_{\mathbb{N}, \mathbb{M}}^1})\tau$. Il est alors clair que

$$(t_I^{-1} * i_{1_{\mathbb{M}}})(\tau * i_{(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})}) = (t_I'^{-1} * i_{1_{\mathbb{M}}})(\tau' * i_{(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})})(\alpha * i_{\odot(I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}})}).$$

Par définition de 2-conoyau, il existe un unique 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ noté $\bar{\alpha} : \bar{T} \Rightarrow \bar{T}'$ entre $\bar{T}$ et $\bar{T}'$ tel que

$$\bar{\alpha} * i_{P_{\odot}} = \alpha$$

et le triple $((\mathbb{N}/\odot, \otimes_{\mathbb{N}/\odot}, a_{\mathbb{N}/\odot}, I_{\mathbb{N}/\odot}, g_{\mathbb{N}/\odot}, d_{\mathbb{N}/\odot}, c_{\mathbb{N}/\odot}), (P_{\odot}, p, p_I), \hat{\eta}_{\odot})$ est un 2-système trivialisant comme annoncé. $\square$

Remarque 2.3.2. Les passages de $\eta_{\odot}$ à $\hat{\eta}_{\odot}$ et $\tilde{\eta}_{\odot}$ montre que les 2-systèmes trivialisants ne sont pas exactement des 2-conoyaux et inversement. Ceci justifie le terme «presque» dans le titre de cette sous-section, ainsi que dans celui de la suivante.

2.3.2 Les 2-conoyaux de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$ sont (presque) des 2-systèmes trivialisants

Nous établissons ici un lien unissant les 2-conoyaux aux 2-systèmes trivialisants de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$. Pour cela, considérons un 1-morphisme $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$. Nous désignons par $\odot_F$ le 1-morphisme de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times F} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}}} \mathbb{N},$$

et par γ_F le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{N}} \times F) \times (Id_{\mathbb{N}} \times F)} & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \downarrow T_{\mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{M}} & & \downarrow T_{\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \nearrow \tilde{c} & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\ (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{N}} \times Id_{\mathbb{N}}) \times (F \times F)} & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\ \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{M}} & \nearrow i_{\otimes_{\mathbb{N}}} \times f & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \times \otimes_{\mathbb{N}} & & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N}. \end{array}$$

où $\tilde{c}$ désigne le 2-isomorphisme canonique évident induit par c_N . Nous désignons également par α_F le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc}
N \times M \times M & \xrightarrow{Id_N \times \otimes_M} & N \times M & & \\
Id_N \times F \times Id_M \downarrow & \searrow Id_N \times F \times F & \downarrow Id_N \times F & & \\
N \times N \times M & \xrightarrow{Id_N \times \otimes_N} & N \times N & & \\
\otimes_N \times Id_M \downarrow & \searrow \otimes_N \times Id_N & \downarrow \otimes_N & & \\
N \times M & \xrightarrow{Id_N \times F} & N \times N & \xrightarrow{\otimes_N} & N
\end{array}$$

et par δ_F le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccc}
N & \xrightarrow{(Id_N, I_M 1_N)} & N \times M \\
& \searrow (Id_N, I_N 1_N) & \downarrow Id_N \times F \\
& & N \times N \\
& \searrow Id_N & \downarrow \otimes_N \\
& & N
\end{array}$$

Lemme 2.3.3. $(\odot_F, \gamma_F, \alpha_F, \delta_F)$ est une 2-action de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$.

Démonstration. Le résultat se déduit directement des définitions de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et de 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. $\square$

Nous désignons par ν le 2-isomorphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
N \times M & \xrightarrow{Id_N \times F} & N \times N & & \\
\uparrow (I_N 1_M, Id_M) & \swarrow F \times Id_M & \swarrow F \times F & & \\
M \times M & \xrightarrow{f} & M & & \\
\downarrow (I_M 1_M, Id_M) & \swarrow Id_M & \downarrow F & & \\
M & \xrightarrow{F} & N & & \\
& & \downarrow \otimes_N & & \\
& & N & &
\end{array}$$

Le résultat suivant découle directement de la proposition 2.3.1.

Proposition 2.3.4. *Soit $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ un 1-morphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Si le triple $((\mathbb{N}/\odot_F, \otimes_{\mathbb{N}/\odot_F}, a_{\mathbb{N}/\odot_F}, I_{\mathbb{N}/\odot_F}, g_{\mathbb{N}/\odot_F}, d_{\mathbb{N}/\odot_F}, c_{\mathbb{N}/\odot_F}), (P_{\odot_F}, p, p_I), \eta_{\odot_F})$ est un 2-système trivialisant relatif à $(\odot_F, \gamma_F, \alpha_F, \delta_F)$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, alors $((\mathbb{N}/\odot_F, \otimes_{\mathbb{N}/\odot_F}, a_{\mathbb{N}/\odot_F}, I_{\mathbb{N}/\odot_F}, g_{\mathbb{N}/\odot_F}, d_{\mathbb{N}/\odot_F}, c_{\mathbb{N}/\odot_F}), (P_{\odot_F}, p, p_I), \eta_{\odot_F}(i_{P_{\odot_F}} * \nu))$ est un 2-conoyau de F dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Réciproquement, si le triple $((\mathbb{N}/\odot_F, \otimes_{\mathbb{N}/\odot_F}, a_{\mathbb{N}/\odot_F}, I_{\mathbb{N}/\odot_F}, g_{\mathbb{N}/\odot_F}, d_{\mathbb{N}/\odot_F}, c_{\mathbb{N}/\odot_F}), (P_{\odot_F}, p, p_I), \eta_{\odot_F})$ est un 2-conoyau de F dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, alors $((\mathbb{N}/\odot_F, \otimes_{\mathbb{N}/\odot_F}, a_{\mathbb{N}/\odot_F}, I_{\mathbb{N}/\odot_F}, g_{\mathbb{N}/\odot_F}, d_{\mathbb{N}/\odot_F}, c_{\mathbb{N}/\odot_F}), (P_{\odot_F}, p, p_I), (\eta_{\odot_F}(\widehat{i_{P_{\odot_F}} * \nu^{-1}})))$ est un 2-système trivialisant relatif à la 2-action $(\odot_F, \gamma_F, \alpha_F, \delta_F)$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$.*

2.4 Structures 2-cofinales

Soient $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et $((\text{Coker}(F), \otimes_{\text{Coker}(F)}, a_{\text{Coker}(F)}, I_{\text{Coker}(F)}, g_{\text{Coker}(F)}, d_{\text{Coker}(F)}, c_{\text{Coker}(F)}), (P_F, p, p_I), \eta_F)$ un 2-conoyau de (F, f, f_I) dans la 2-catégorie $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Dans cette section, nous établissons une condition suffisante pour que ce dernier possède une structure de 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$. Si $2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$ désigne la 2-catégorie Nous montrerons également que le 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U} : 2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C}) \rightarrow 2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ préserve les 2-conoyaux. Dans ce but, nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.4.1. Une *structure 2-cofinale* sur (F, f, f_I) est la donnée d'un triple $((Z, \zeta, \zeta_I), (\Theta, \theta, \theta_I), \delta)$, où $(Z, \zeta, \zeta_I) : (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ et $(\Theta, \theta, \theta_I) : (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ sont deux 1-morphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ et où

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{N}}, Z)} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \Theta \downarrow & \delta \swarrow & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N} \end{array}$$

est un 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$.

Remarque 2.4.2. Contrairement à la définition 1.4.1, il devient ici nécessaire que $(\Theta, \theta, \theta_I)$ soit un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques.

Soit $((Z, \zeta, \zeta_I), (\Theta, \theta, \theta_I), \delta)$ une structure 2-cofinale sur (F, f, f_I) . Nous

considérons le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{N} & \xrightarrow{Z} & \mathbb{N} & \xrightarrow{P_F} & \mathbb{C}oker(F) \\
 \uparrow F & & & & \downarrow Id_{\mathbb{C}oker(F)} \\
 & & \mathbb{C}oker(F) \times \mathbb{C}oker(F) & & \\
 & \nearrow (I_{\mathbb{C}F} 1_{\mathbb{M}}, P_F Z F) & \uparrow P_F \times P_F & \nwarrow g_{\mathbb{C}F} & \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & & \\
 & \nearrow (\eta_F^{-1}, i_{P_F Z F}) & \downarrow \delta & \nwarrow \otimes_{\mathbb{C}F} & \\
 \mathbb{M} & \xrightarrow{F} \mathbb{N} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{N}}, Z)} \mathbb{M} & \xrightarrow{F} \mathbb{N} & \xrightarrow{P_F} \mathbb{C}oker(F) \\
 & \searrow \Theta & \downarrow \eta_F * i_{\Theta F} & & \\
 & & \mathbb{M} & \xrightarrow{F} \mathbb{N} & \xrightarrow{P_F} \mathbb{C}oker(F) \\
 & & \downarrow I_{\mathbb{C}F} 1_{\mathbb{M}} \Theta F = I_{\mathbb{C}F} 1_{\mathbb{M}} & &
 \end{array}
 \end{array}$$

Dès lors, par définition de 2-conoyau, il existe un unique 1-morphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ noté $(\overline{P_F Z}, \overline{p\zeta}, \overline{p_I \zeta_I}) : \mathbb{C}oker(F) \rightarrow \mathbb{C}oker(F)$ entre $\mathbb{C}oker(F)$ et $\mathbb{C}oker(F)$ tel que

$$(\overline{P_F Z}, \overline{p\zeta}, \overline{p_I \zeta_I})(P_F, p, p_I) = (P_F, p, p_I)(Z, \zeta, \zeta_I)$$

$$i_{\overline{P_F Z}} * \eta_F = (\eta_F * i_{\Theta F})(i_{P_F} * \delta * i_F)(p * i_{(Id_{\mathbb{N}}, Z) F})(i_{\otimes_{\mathbb{C}F}} * (\eta_F^{-1}, i_{P_F Z F}))(g_{\mathbb{C}F} * i_{P_F Z F}).$$

Nous désignerons désormais ce 1-morphisme par $((\)_{\mathbb{C}F, Z}^*, (\)_{\otimes}^*, (\)_I^*)$. Considérons alors le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{N} & \xrightarrow{P_F} & \mathbb{C}oker(F) & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{C}F}, (\)_{\mathbb{C}F, Z}^*)} & \mathbb{C}oker(F) \times \mathbb{C}oker(F) \\
 \downarrow P_F & \searrow (Id_{\mathbb{N}}, Z) & \downarrow \delta & \nearrow P_F \times P_F & \downarrow \otimes_{\mathbb{C}F} \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & & \\
 & \searrow F\Theta & \downarrow \otimes_{\mathbb{N}} & \nwarrow p & \\
 & & \mathbb{N} & & \\
 & \searrow \eta_F * i_{\Theta} & \downarrow P_F & & \\
 & & \mathbb{C}oker(F) & & \\
 & \searrow P_F I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}} \Theta & & & \\
 & & \downarrow p_I^{-1} * i_{1_{\mathbb{M}} \Theta} & & \\
 \mathbb{C}oker(F) & \xrightarrow{1_{\mathbb{C}F}} & \mathbb{1} & \xrightarrow{I_{\mathbb{C}F}} & \mathbb{C}oker(F)
 \end{array}$$

que nous notons $\tilde{\delta}$. Nous avons déjà rappelé dans la section 2.1 en introduisant la définition de 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$ que l'égalité

$$c_{\mathcal{C}F} * i_{(I_{\mathcal{C}F}, I_{\mathcal{C}F})} = i_{\otimes_{\mathcal{C}F}(I_{\mathcal{C}F}, I_{\mathcal{C}F})}$$

est satisfaite dans $\mathcal{C}$. À partir de cette dernière, nous montrons sans difficulté particulière que

$$\begin{aligned} & (d_{\mathcal{C}F}^{-1} * i_{I_{\mathcal{C}F}1_{\mathbb{M}}})(i_{\otimes_{\mathcal{C}F}} * (i_{I_{\mathcal{C}F}1_{\mathbb{M}}}, ()_I^{*-1}))(i_{\otimes_{\mathcal{C}F}(Id_{\mathcal{C}F}, ()_{\mathcal{C}F}^*)} * \eta_F) \\ &= (i_{I_{\mathbb{N}}1_{\mathcal{C}F}} * \eta_F)(\tilde{\delta} * i_F). \end{aligned}$$

Par définition de 2-conoyau dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, il existe donc un unique 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ noté $\tilde{\delta} : \otimes_{\mathcal{C}F}(Id_{\mathcal{C}F}, ()_{\mathcal{C}F,Z}^*) \Rightarrow I_{\mathcal{C}F}1_{\mathcal{C}F}$ entre $\otimes_{\mathcal{C}F}(Id_{\mathcal{C}F}, ()_{\mathcal{C}F,Z}^*)$ et $I_{\mathcal{C}F}1_{\mathcal{C}F}$ tel que

$$\tilde{\delta} * i_{P_F} = \tilde{\delta}.$$

Nous désignerons désormais ce 2-isomorphisme par $\delta_{\mathcal{C}F,Z}$. Nous énonçons alors le résultat principal de cette section. Celui-ci découle directement de la définition de 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$.

Proposition 2.4.3. *Soient $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et $((\text{Coker}(F), \otimes_{\mathcal{C}F}, a_{\mathcal{C}F}, I_{\mathcal{C}F}, g_{\mathcal{C}F}, d_{\mathcal{C}F}, c_{\mathcal{C}F}), (P_F, p, p_I), \eta_F)$ un 2-conoyau de (F, f, f_I) dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Si le triple $((Z, \zeta, \zeta_I), (\Theta, \theta, \theta_I), \delta)$ est une structure 2-cofinale sur (F, f, f_I) , alors le nonuple $(\text{Coker}(F), \otimes_{\mathcal{C}F}, a_{\mathcal{C}F}, I_{\mathcal{C}F}, g_{\mathcal{C}F}, d_{\mathcal{C}F}, c_{\mathcal{C}F}, ()_{\mathcal{C}F,Z}^*, \delta_{\mathcal{C}F,Z})$ est un 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$.*

Pour terminer, considérons un 1-morphisme de 2-groupes symétriques $(G, g, g_I) : (\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}}) \rightarrow (\mathbb{H}, \otimes_{\mathbb{H}}, a_{\mathbb{H}}, I_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{H}}, c_{\mathbb{H}}, ()_{\mathbb{H}}^*, \delta_{\mathbb{H}})$ internes à $\mathcal{C}$. Nous avons rappelé dans la section 2.1 que le triple $(()_{\mathbb{H}}^*, ()_{\otimes_{\mathbb{H}}}^*, ()_I^*)$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ entre $\mathbb{H}$ et lui-même. Par ailleurs, le 1-morphisme $\mathbb{H} \xrightarrow{1_{\mathbb{H}}} \mathbb{1} \xrightarrow{I_{\mathbb{G}}} \mathbb{G}$ muni des 2-isomorphismes de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \xrightarrow{1_{\mathbb{H}} \times 1_{\mathbb{H}}} & \mathbb{1} \times \mathbb{1} & \xrightarrow{I_{\mathbb{H}} \times I_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\ & \searrow & \downarrow 1_{\mathbb{1} \times \mathbb{1}} & \nearrow (I_{\mathbb{H}}1_{\mathbb{H}}, Id_{\mathbb{H}}) & \downarrow \otimes_{\mathbb{H}} \\ & & \mathbb{H} & \nearrow I_{\mathbb{H}} & \\ \otimes_{\mathbb{H}} \downarrow & 1_{\mathbb{H} \times \mathbb{H}} & & & \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{1_{\mathbb{H}}} & \mathbb{1} & \xrightarrow{I_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H} \\ & & & \searrow Id_{\mathbb{H}} & \\ & & & & \downarrow \otimes_{\mathbb{H}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbb{1} & \\
I_{\mathbb{H}} \swarrow & \downarrow Id_{\mathbb{1}} & \searrow I_{\mathbb{G}} \\
\mathbb{H} & \xrightarrow{1_{\mathbb{H}}} \mathbb{1} & \xrightarrow{I_{\mathbb{G}}} \mathbb{G}
\end{array}$$

est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Enfin, le 2-isomorphisme de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{H}}, ()_{\mathbb{H}}^*)} & \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\
1_{\mathbb{H}} \downarrow & \searrow 1_{\mathbb{H}} & \delta_{\mathbb{H}} \swarrow \\
& \mathbb{1} & \\
Id_{\mathbb{1}} \nearrow & \downarrow g_I & \searrow I_{\mathbb{H}} \\
\mathbb{1} & \xrightarrow{I_{\mathbb{G}}} \mathbb{G} & \xrightarrow{G} \mathbb{H}.
\end{array}$$

est un 2-isomorphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, ce qui suit à nouveau des rappels effectués dans la section 2.1. Dès lors, le triple

$$\left((()_{\mathbb{H}}^*, ()_{\otimes_{\mathbb{H}}}^*, ()_{I_{\mathbb{H}}}^*), (I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}^{-1} * i_{I_{\mathbb{H}} 1_{\mathbb{H}} \otimes_{\mathbb{H}}}, i_{I_{\mathbb{G}}}), (g_I * i_{1_{\mathbb{H}}}) \delta_{\mathbb{H}} \right)$$

est une structure 2-cofinale sur (G, g, g_I) et si $((Coker(G), \otimes_{\mathbb{C}G}, a_{\mathbb{C}G}, I_{\mathbb{C}G}, g_{\mathbb{C}G}, d_{\mathbb{C}G}, c_{\mathbb{C}G}), (P_G, p, p_I), \eta_G)$ est un 2-conoyau de (G, g, g_i) dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$, nous déduisons de la proposition 2.4.3 que le nonuple $(Coker(G), \otimes_{\mathbb{C}G}, a_{\mathbb{C}G}, I_{\mathbb{C}G}, g_{\mathbb{C}G}, d_{\mathbb{C}G}, c_{\mathbb{C}G}, ()_{\mathbb{C}G, ()_{\mathbb{H}}}^*, \delta_{\mathbb{C}G, ()_{\mathbb{H}}}^*)$ est un 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$.

Corollaire 2.4.4. *Soient $(G, g, g_I) : (\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}}) \rightarrow (\mathbb{H}, \otimes_{\mathbb{H}}, a_{\mathbb{H}}, I_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{H}}, c_{\mathbb{H}}, ()_{\mathbb{H}}^*, \delta_{\mathbb{H}})$ un 1-morphisme de 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et $((Coker(G), \otimes_{\mathbb{C}G}, a_{\mathbb{C}G}, I_{\mathbb{C}G}, g_{\mathbb{C}G}, d_{\mathbb{C}G}, c_{\mathbb{C}G}), (P_G, p, p_I), \eta_G)$ un 2-conoyau de (G, g, g_I) dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$. Le triple $((Coker(G), \otimes_{\mathbb{C}G}, a_{\mathbb{C}G}, I_{\mathbb{C}G}, g_{\mathbb{C}G}, d_{\mathbb{C}G}, c_{\mathbb{C}G}, ()_{\mathbb{C}G, ()_{\mathbb{H}}}^*, \delta_{\mathbb{C}G, ()_{\mathbb{H}}}^*), (P_G, p, p_I), \eta_G)$ est un 2-conoyau de (G, g, g_I) dans $2\text{-}\mathcal{GrpSym}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Le résultat découle directement du fait que $2\text{-}\mathcal{GrpSym}(\mathcal{C})$ est une sous 2-catégorie localement isomorphe de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$. $\square$

2.5 Biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli entre $2\text{-}\mathcal{GrpSym}(\mathcal{C})$ et $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$

Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{C}$. Considérons le 1-morphisme $(Id_{\mathbb{M}}, Id_{\mathbb{M}}) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{M}$ de $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$ qui est

généralement appelé *1-morphisme diagonal* de $\mathbb{M}$. Nous désignerons celui-ci par $\Delta_{\mathbb{M}}$. Dans cette section, nous supposons que $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ possède les 2-conoyaux de tous les 1-morphismes diagonaux. Ceux-ci seront alors notés $((Coker(\Delta_{\mathbb{M}}), \otimes_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, a_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, I_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, g_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, d_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, c_{C\Delta_{\mathbb{M}}}), (P_{\Delta_{\mathbb{M}}}, p, p_I), \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}})$. Soient les 1-morphismes $(\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1) : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{M}$ et $\otimes_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Considérons également le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}}, (\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1))} & (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \\
\downarrow \otimes_{\mathbb{M}} & \searrow (Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{M}}, (\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1)) & \downarrow T_{\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M},\mathbb{M}} \\
& & (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \\
& \searrow (\otimes_{\mathbb{M}}, \otimes_{\mathbb{M}}) & \downarrow (i_{\otimes_{\mathbb{M}}}, c_{\mathbb{M}}^{-1}) \\
& & \downarrow \otimes_{\mathbb{M}} \times \otimes_{\mathbb{M}} \\
\mathbb{M} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M}
\end{array}$$

Le triple $((\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1), \otimes_{\mathbb{M}}, (i_{\otimes_{\mathbb{M}}}, c_{\mathbb{M}}^{-1}))$ est alors une structure 2-cofinale sur $\Delta_{\mathbb{M}}$ et de la proposition 2.4.3, nous déduisons que $((Coker(\Delta_{\mathbb{M}}), \otimes_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, a_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, I_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, g_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, d_{C\Delta_{\mathbb{M}}}, c_{C\Delta_{\mathbb{M}}}), (\cdot)_{C\Delta_{\mathbb{M}}, (\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1)}^*, \delta_{C\Delta_{\mathbb{M}}, (\Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^2, \Pi_{\mathbb{M},\mathbb{M}}^1)})$ est un 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{C}$.

Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Considérons les 2-conoyaux de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{M}}} \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} Coker(\Delta_{\mathbb{M}}) \\
\downarrow F & \downarrow F \times F & \\
\mathbb{N} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} Coker(\Delta_{\mathbb{N}})
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} : P_{\Delta_{\mathbb{M}}} \Delta_{\mathbb{M}} \Rightarrow I_{C\Delta_{\mathbb{M}}} 1_{\mathbb{M}} \\
\eta_{\Delta_{\mathbb{N}}} : P_{\Delta_{\mathbb{N}}} \Delta_{\mathbb{N}} \Rightarrow I_{C\Delta_{\mathbb{N}}} 1_{\mathbb{N}}.
\end{array}$$

Du 2-isomorphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{F \times F} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
\uparrow \Delta_{\mathbb{M}} & \nearrow \Delta_{\mathbb{N}} & \downarrow P_{\Delta_{\mathbb{N}}} \\
& \mathbb{N} & \\
& \nwarrow I_{C\Delta_{\mathbb{N}}} 1_{\mathbb{N}} & \\
\mathbb{M} & \xrightarrow{I_{C\Delta_{\mathbb{N}}} 1_{\mathbb{M}}} & Coker(\Delta_{\mathbb{N}})
\end{array}$$

nous déduisons de la définition de 2-conoyau qu'il existe un unique 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, noté $\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))} : \mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}}) \rightarrow \mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{N}})$ entre $\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}})$ et $\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{N}})$ tel que

$$\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))} P_{\Delta_{\mathbb{M}}} = P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F)$$

$$i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}} * \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} = \eta_{\Delta_{\mathbb{N}}} * i_F.$$

Notons que par unicité, $\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{M}}}(Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}}))} = Id_{\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}})}$ puisque

$$Id_{\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}})} P_{\Delta_{\mathbb{M}}} = P_{\Delta_{\mathbb{M}}} = P_{\Delta_{\mathbb{M}}}(Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{M}})$$

$$i_{Id_{\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}})}} * \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} = \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} = \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} * i_{Id_{\mathbb{M}}}.$$

Notons également que si $\mathbb{M} \xrightarrow{(F,f,f_I)} \mathbb{N} \xrightarrow{(G,g,g_I)} \mathbb{P}$ sont deux 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, alors par unicité,

$$\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(GF \times GF))} = \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G))} \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}$$

vu que

$$\begin{aligned} \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G))} \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))} P_{\Delta_{\mathbb{M}}} &= \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G))} P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F) \\ &= P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G)(F \times F) \\ &= P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(GF \times GF). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G))} \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}} * \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} &= i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G))}} * i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}} * \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} \\ &= i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{P}}}(G \times G))}} * \eta_{\Delta_{\mathbb{N}}} * i_F \\ &= \eta_{\Delta_{\mathbb{P}}} * i_G * i_F \\ &= \eta_{\Delta_{\mathbb{P}}} * i_{GF}. \end{aligned}$$

Soient $(F, f, f_I), (G, g, g_I) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ deux 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et soit $\alpha : F \Rightarrow G$ un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$. Celui-ci induit un 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques $i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha) : P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F) \Rightarrow P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(G \times G)$ internes à $\mathcal{C}$ qui

est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F)\Delta_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha) * i_{\Delta_{\mathbb{M}}}} & P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(G \times G)\Delta_{\mathbb{M}} \\
\parallel & & \parallel \\
P_{\Delta_{\mathbb{N}}}\Delta_{\mathbb{N}}F & \xrightarrow{i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}\Delta_{\mathbb{N}}}} & P_{\Delta_{\mathbb{N}}}\Delta_{\mathbb{N}}G \\
\eta_{\Delta_{\mathbb{N}}} * i_F \downarrow & & \downarrow \eta_{\Delta_{\mathbb{N}}} * i_G \\
I_{\mathbb{C}\Delta_{\mathbb{N}}}1_{\mathbb{N}}F & \xrightarrow{i_{I_{\mathbb{C}\Delta_{\mathbb{N}}}1_{\mathbb{N}}}} & I_{\mathbb{C}\Delta_{\mathbb{N}}}1_{\mathbb{N}}G \\
& \searrow & \swarrow \\
& I_{\mathbb{C}\Delta_{\mathbb{N}}}1_{\mathbb{M}} &
\end{array}$$

est commutatif dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$. Par définition de 2-conoyau dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{C})$, il existe un unique 2-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, noté $\overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))} : \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))} \Rightarrow \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(G \times G))}$ entre $\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}$ et $\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(G \times G))}$ tel que

$$\overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))} * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} = i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} * (\alpha \times \alpha).$$

Notons que par unicité, $\overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (i_F \times i_F))} = i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}}$ puisque

$$i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}} * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} = i_{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} = i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F)} = i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}}i_{(F \times F)} = i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (i_F \times i_F).$$

Notons également que si $(F, f, f_I), (G, g, g_I), (H, h, h_I) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ sont trois 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et que si $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ sont deux 2-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$, alors par unicité, $\overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\beta\alpha \times \beta\alpha))} = \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\beta \times \beta))} \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))}$ car

$$\begin{aligned}
& \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\beta \times \beta))} \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))} * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} \\
&= \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\beta \times \beta)) * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}}} \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha)) * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}}} \\
&= (i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\beta \times \beta))(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha)) \\
&= i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * ((\beta \times \beta)(\alpha \times \alpha)) \\
&= i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\beta\alpha \times \beta\alpha).
\end{aligned}$$

Notons enfin que si $(F, f, f_I), (G, g, g_I) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ et $(H, h, h_I), (K, k, k_I) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ sont quatre 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{C}$ et que si $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : H \Rightarrow K$ sont deux 2-morphismes de 2-monoïdes symétriques

internes à $\mathcal{C}$, alors par unicité, $\overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{P}}}} * ((\beta * \alpha) \times (\beta * \alpha)))} = \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{P}}}} * (\beta \times \beta)) * (i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))}$ puisque

$$\begin{aligned} \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{P}}}} * (\beta \times \beta)) * (i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))} * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} &= \overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{P}}}} * (\beta \times \beta))} * i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha) \\ &= i_{P_{\Delta_{\mathbb{P}}}} * (\beta \times \beta) * (\alpha \times \alpha) \\ &= i_{P_{\Delta_{\mathbb{P}}}} * ((\beta * \alpha) \times (\beta * \alpha)) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi construit un 2-foncteur

$$\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C}) \rightarrow 2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N} \\ & \Downarrow \alpha & \\ & G & \end{array} & \mapsto & \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))}} & \\ \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}) & \xrightarrow[\overline{(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha))}]{\parallel} & \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{N}}) \\ & \xrightarrow[\overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(G \times G))}]{} & \end{array} \end{array}$$

Nous pouvons alors démontrer le résultat central de ce chapitre.

Théorème 2.5.1. *Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie possédant les 2-produits finis et telle que $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ possède les 2-conoyaux des 1-morphismes diagonaux. Dans ce cas, le 2-foncteur $\mathbb{L}$ construit ci-dessus est le biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U} : 2\text{-}\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C}) \rightarrow 2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Nous définissons la 2-unité $N : \mathbb{L}d_{2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})} \Rightarrow \mathbb{U}\mathbb{L}$ de la biadjonction, pour tout 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{C}$, par le 1-morphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$N_{\mathbb{M}} := \mathbb{M} \xrightarrow{(Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}})} \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}})$$

et pour tout 1-morphisme $(F, f, f_I) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, par le 2-isomorphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$

$$n_F := \begin{array}{ccccc} \mathbb{M} & \xrightarrow{(Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}})} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} & \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}) \\ \downarrow F & \searrow (i_F, f_I^{-1} * i_{1_{\mathbb{M}}}) & \downarrow F \times F & & \downarrow \overline{(P_{\Delta_{\mathbb{N}}}(F \times F))} \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{(F, I_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{M}})} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} & \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{N}}) \end{array}$$

La 2-transformation N ainsi construite est naturelle. En effet, si $\alpha : (F, f, f_I) \Rightarrow (G, g, g_I)$ est un 2-morphisme de $2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$, alors $n_G(i_{P_{\Delta_{\mathbb{N}}}} * (\alpha \times \alpha)) = (i_{N_{\mathbb{N}}} * \alpha)n_F$ vu que $g_I^{-1}(\alpha * i_{I_{\mathbb{M}}}) = f_I^{-1}$.

Pour démontrer la biadjonction à gauche, au vu de la caractérisation proposée par Fiore dans le théorème 9.16 de [Fio06], il suffit de démontrer que le foncteur

$$\Omega : \mathbb{H}om_{2-\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})}(\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}}), \mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{H}om_{2-\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})}(\mathbb{M}, \mathbb{G})$$

$$\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{U_1} \\ \Downarrow \mu \\ \xrightarrow{U_2} \end{array} \mathbb{G} \mapsto M \xrightarrow{N_M} \mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{U_1} \\ \Downarrow \mu \\ \xrightarrow{U_2} \end{array} \mathbb{G}$$

est une équivalence. Pour cela, soit $(V, v, v_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}})$ un 1-morphisme de $2-\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Soient également le 1-morphisme $\mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{V \times V} \mathbb{G} \times \mathbb{G} \xrightarrow{Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*} \mathbb{G} \times \mathbb{G} \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{G}}} \mathbb{G}$ et le 2-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{M} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{V \times V} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\ & \searrow V & & \searrow \Delta_{\mathbb{G}} & \downarrow Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^* \\ & & \mathbb{G} & & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\ & \nearrow I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{G}} & & \nearrow \delta_{\mathbb{G}} & \downarrow \otimes_{\mathbb{G}} \\ \mathbb{G} & & \mathbb{G} & & \mathbb{G} \\ & \nearrow \otimes_{\mathbb{G}} & \searrow Id_{\mathbb{G}} & & \\ & & \mathbb{G} & & \end{array}$$

de $2-\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Par définition de 2-conoyau, il existe un unique morphisme $\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)(V \times V) : \mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}}) \rightarrow \mathbb{G}$ de $2-\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$ entre $\mathbb{C}oker(\Delta_{\mathbb{M}})$ et $\mathbb{G}$ tel que

$$\begin{aligned} \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)(V \times V) P_{\Delta_{\mathbb{M}}} &= \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)(V \times V) \\ i_{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)(V \times V)} * \eta_{\Delta_{\mathbb{M}}} &= \delta_{\mathbb{G}} * i_V. \end{aligned}$$

Soient également $(V_1, v_1, v_{1_I}), (V_2, v_2, v_{2_I}) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}})$ deux 1-morphismes et $\nu : (V_1, v_1, v_{1_I}) \rightarrow (V_2, v_2, v_{2_I})$ un 2-morphisme de $2-\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})$. Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)(V_1 \times V_1) \Delta_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{i_{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)} * (\nu \times \nu) * i_{\Delta_{\mathbb{M}}}} & \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*)(V_2 \times V_2) \Delta_{\mathbb{M}} \\ \parallel & & \parallel \\ \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*) \Delta_{\mathbb{G}} V_1 & \xrightarrow{i_{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*) \Delta_{\mathbb{G}}} * \nu} & \otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*) \Delta_{\mathbb{G}} V_2 \\ \downarrow \delta_{\mathbb{G}} * i_{V_1} & & \downarrow \delta_{\mathbb{G}} * i_{V_2} \\ I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{G}} V_1 & \xrightarrow{i_{I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{G}}} * \nu} & I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{G}} V_2 \\ \parallel & & \parallel \\ I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & I_{\mathbb{G}} 1_{\mathbb{M}}, \end{array}$$

de $2\text{-MonSym}(\mathcal{C})$ entre $\overline{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times (\cdot)_{\mathbb{G}}^*)(V_1 \times V_1)}$ et $\overline{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times (\cdot)_{\mathbb{G}}^*)(V_2 \times V_2)}$ tel que

$$\overline{i_{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times (\cdot)_{\mathbb{G}}^*)} * (\nu \times \nu)} * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} = i_{\otimes_{\mathbb{G}}(Id_{\mathbb{G}} \times (\cdot)_{\mathbb{G}}^*)} * (\nu \times \nu).$$
$$\Omega^* : \mathrm{Hom}_{2\text{-MonSym}(\mathcal{C})}(\mathbb{M}, \mathbb{G}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{2\text{-GrpSym}(\mathcal{C})}(\mathrm{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}), \mathbb{G})$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \begin{array}{c} \xrightarrow{V_1} \\ \Downarrow \nu \\ \xrightarrow{V_2} \end{array} & \mathbf{G} \\ \mapsto & & \text{Coker}(\Delta_{\mathbf{M}}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{\otimes_{\mathbf{G}} (Id_{\mathbf{G}} \times (\cdot)_{\mathbf{G}}^*) (V_1 \times V_1)} \\ \parallel \\ i_{\otimes_{\mathbf{G}} (Id_{\mathbf{G}} \times (\cdot)_{\mathbf{G}}^*)}^* (\nu \times \nu) \\ \downarrow \\ \overline{\otimes_{\mathbf{G}} (Id_{\mathbf{G}} \times (\cdot)_{\mathbf{G}}^*) (V_2 \times V_2)} \end{array} \quad \mathbf{G}$$

$$\Omega(\Omega^*(V)) : \overline{\otimes_{\mathbb{G}} (Id_{\mathbb{G}} \times (\)^*)(V \times V) N_{\mathbb{M}}} \xrightarrow{\theta_V} V$$
$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{M} & \xrightarrow{\eta_{\mathbb{M}}} & \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}) & & \\
\downarrow V & \nearrow (Id_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{M}}) & \nearrow P_{\Delta_{\mathbb{M}}} & & \\
& & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \searrow V \times V & \\
& \nearrow (V, I_G^{-1} 1_{\mathbb{M}}) & & & \\
& & \mathbb{G} \times \mathbb{G} & \swarrow Id_{\mathbb{G}} \times (\cdot)_G^* & \\
& \nearrow (Id_G, I_G^{-1} 1_G)V & \swarrow (i_{Id_G}, (\cdot)_{I_G}^{-1} * i_{1_G}) * i_V & & \\
& & \mathbb{G} \times \mathbb{G} & \searrow \otimes_G & \\
& \nearrow d_G^{-1} * i_V & & & \\
& & \mathbb{G} & \xrightarrow{Id_G} & \mathbb{G}
\end{array}$$
$$\theta : \Omega \circ \Omega^* \Rightarrow Id_{\mathrm{Hom}_{2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{C})}(\mathbf{M}, \mathbf{G})}.$$

Par ailleurs, pour tout objet (U, u, u_I) de $\text{Hom}_{2-\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})}(\text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}), \mathbb{G})$, nous avons un 2-isomorphisme x_U de $2-\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$ défini comme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} & \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}) \\
\downarrow & \searrow N_{\mathbb{M}} \times N_{\mathbb{M}} & \downarrow \\
& \mathbb{L}(\mathbb{M}) \times \mathbb{L}(\mathbb{M}) \xrightarrow{U \times U} \mathbb{G} \times \mathbb{G} & \\
& \downarrow i_U \times \phi_U^{-1} & \downarrow Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^* \\
& (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{G}} (Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*) (UN_{\mathbb{M}} \times UN_{\mathbb{M}})} \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\
& \downarrow T_{\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}} & \downarrow P_{\Delta_{\mathbb{M}}} \times P_{\Delta_{\mathbb{M}}} \\
& (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{M}) & \downarrow U \times U \\
& \downarrow i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} * (d_{\mathbb{M}}^{-1} \times g_{\mathbb{M}}^{-1}) & \downarrow \otimes_{\mathbb{G}} \\
& \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \downarrow \otimes_{\mathbb{G}} \\
& \downarrow P_{\Delta_{\mathbb{M}}} & \downarrow \\
& \text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}) & \xrightarrow{U} \mathbb{G}
\end{array}$$

Celui-ci induit un unique 2-isomorphisme $\chi_U : \overline{\otimes_{\mathbb{G}} (Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*) (UN_{\mathbb{M}} \times UN_{\mathbb{M}})} \Rightarrow U$ de $2-\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})$ entre $\Omega^*(\Omega(U)) = \overline{\otimes_{\mathbb{G}} (Id_{\mathbb{G}} \times ()_{\mathbb{G}}^*) (UN_{\mathbb{M}} \times UN_{\mathbb{M}})}$ et U tel que

$$\chi_U * i_{P_{\Delta_{\mathbb{M}}}} = x_U.$$

Celui-ci est naturel, puisque l'isomorphisme ϕ_U intervenant dans le diagramme ci-dessus est naturel par construction (voir section 2.1) et que, par définition, les 2-morphisme de 2-groupes symétriques sont compatibles avec les contraintes de compatibilités avec le produit u intervenant dans ce même diagramme. Nous obtenons ainsi un isomorphisme naturel

$$\chi : \Omega^* \circ \Omega \Rightarrow Id_{\text{Hom}_{2-\mathcal{G}rpSym(\mathcal{C})}(\text{Coker}(\Delta_{\mathbb{M}}), \mathbb{G})},$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Chapitre 3

Description ensembliste des 2-systèmes trivialisants

Dans le chapitre 3, nous donnons une description ensembliste des 2-systèmes trivialisants et des 2-conoyaux internes à la 2-catégorie des groupoïdes $\mathcal{Grpd}$, ainsi qu'une description ensembliste du biadjoint à gauche $\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{MonSym} \rightarrow 2\text{-}\mathcal{GrpSym}$. Dans la section 1, nous rappelons les descriptions ensemblistes usuelles des produits cartésiens et des produits fibrés dans la catégorie $\mathbb{Ens}$ des ensembles, ainsi que les descriptions ensemblistes usuelles des 2-produits cartésiens et des 2-produits fibrés dans la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$ des groupoïdes. Nous rappelons également les définitions des 2-foncteurs $\mathbb{I}_0$ et $\mathbb{I}_1$. Dans la section 2, nous donnons une description ensembliste d'un système trivialisant relatif à une action d'un monoïde commutatif M sur un ensemble S (proposition 3.2.1). Nous démontrons que dans $\mathbb{Ens}$, les systèmes trivialisants commutent avec les produits binaires (proposition 3.2.3) et nous déduisons des théorèmes de transfert du chapitre 1 une description des systèmes trivialisants internes à la catégorie des monoïdes commutatifs (corollaire 3.2.4). Des théorèmes d'équivalence du chapitre 1, nous en déduisons une description ensembliste des conoyaux des morphismes de monoïdes commutatifs (corollaire 3.2.5) et donc une description ensembliste de l'adjoint à gauche $L : \mathbb{MonCom} \rightarrow \mathcal{GrpCom}$ (corollaire 3.2.6). De la même façon que le chapitre 1 préparait le chapitre 2, la section 2 de ce chapitre prépare les dernières sections de celui-ci: les résultats sont essentiellement ceux de la section 2 énoncés dans le contexte enrichi de la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$. Dans la section 3, nous donnons une description ensembliste d'un 2-système trivialisant relatif à une 2-action identitaire sur la symétrie diagonale d'une 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ (proposition 3.3.13). Dans la section 4, nous donnons une description ensembliste des 2-actions réduites relativement à une classe d'endomorphismes $\mathcal{E}$ (proposition 3.4.7) et démontrons que les 2-actions réduites relativement à des classes d'endomorphismes étirantes commutent avec les 2-produits binaires (proposi-

tion 3.4.9). Dans la section 5, nous démontrons que les 2-systèmes trivialisants relatifs à une 2-action réduite $\odot^{\mathcal{E}\odot}$ relativement à la classe d'endomorphismes $\mathcal{E}_{\odot} = \{id_N \odot c_{M,M} | N \in \text{Ob}(\mathbb{N}), M \in \text{Ob}(\mathbb{M})\}$ sont des systèmes trivialisants de la 2-action $\odot$ (théorème 3.5.2). Nous en déduisons une description ensembliste des 2-systèmes trivialisants relatifs à une 2-action $\odot : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ d'un 2-monoïde symétrique $\mathbb{M}$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$. Puisque la classe $\mathcal{E}_{\odot}$ est étirante (lemme 3.5.1), nous démontrons que dans $\mathcal{G}rpd$, les 2-systèmes trivialisants commutent avec les 2-produits binaires (théorème 3.5.5) et nous déduisons des théorèmes de transfert du chapitre 2 une description des 2-systèmes trivialisants internes à la 2-catégorie des 2-monoïdes symétriques (corollaire 3.5.7). Des théorèmes d'équivalence du chapitre 2, nous en déduisons une description ensembliste des 2-conoyaux des 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques (corollaire 3.5.8) et donc une description ensembliste du biadjoint à gauche $\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym \rightarrow 2\text{-}\mathcal{G}rpSym$ (corollaire 3.5.10).

3.1 Rappels

3.1.1 Produit cartésien, produit fibré, coégalisateur de graphe réflexif

A) Produit cartésien dans $\mathbb{E}ns$

Nous rappelons la description ensembliste du produit cartésien dans $\mathbb{E}ns$. Si C et D sont deux ensembles, alors les éléments de $C \times D$ sont les couples (c, d) , où $c \in C$ et $d \in D$. Nous avons les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} \pi_{C,D}^1 : C \times D \rightarrow C & & \pi_{C,D}^2 : C \times D \rightarrow D \\ (c, d) \mapsto c & & (c, d) \mapsto d \end{array}$$

Si $b_1 : B \rightarrow C$ et $b_2 : B \rightarrow D$ sont deux applications, alors l'application canonique (b_1, b_2) se décrit comme

$$\begin{array}{ccc} (b_1, b_2) : B \rightarrow C \times D \\ x \mapsto (b_1(x), b_2(x)). \end{array}$$

B) Produit fibré dans $\mathbb{E}ns$

Étant donné deux applications d'ensemble

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \downarrow f & \\ D & \xrightarrow{g} & E, \end{array}$$

le *produit fibré* de f et g est l'ensemble $C_f \times_g D$ défini par

$$\{(c, d) | c \in C, d \in D, f(c) = g(d)\}.$$

Nous considérons les applications canoniques

$$\begin{array}{ll} p_{f,g}^1 : C_f \times_g D \rightarrow C & p_{f,g}^2 : C_f \times_g D \rightarrow D \\ (c, d) \mapsto c & (c, d) \mapsto d \end{array}$$

qui sont telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_f \times_g D & \xrightarrow{p_{f,g}^1} & C \\ p_{f,g}^2 \downarrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

est commutatif. Le produit fibré $C_f \times_g D$ possède la propriété suivante: si

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{b_1} & C \\ b_2 \downarrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

est un diagramme commutatif, alors

$$\begin{array}{l} \langle b_1, b_2 \rangle : B \rightarrow C_f \times_g D \\ x \mapsto (b_1(x), b_2(x)) \end{array}$$

est l'unique application entre B et $C_f \times_g D$ tel que

$$p_{f,g}^1 \langle b_1, b_2 \rangle = b_1, \quad p_{f,g}^2 \langle b_1, b_2 \rangle = b_2.$$

De plus, si les applications f et g sont des morphismes de monoïdes, alors le produit fibré $C_f \times_g D$ se dote d'une structure de monoïde évidente. Nous laissons les détails et les vérifications usuelles en exercice pour le lecteur.

C) Coégalisateur dans $\mathbb{E}ns$

Nous rappelons également le résultat suivant que nous utiliserons dans ce

chapitre: si $A \xrightarrow[f]{g} B \xrightarrow{q_{f,g}} \text{Coeg}(f, g)$, $C \xrightarrow[h]{k} D \xrightarrow{q_{h,k}} \text{Coeg}(h, k)$

et $A \times C \xrightleftharpoons[g \times k]{f \times h} B \times D \xrightarrow{q_{f \times h, g \times k}} \text{Coeg}(f \times h, g \times k)$ sont trois coégalisateurs

dans $\mathbb{E}ns$ et si $r_1 : B \rightarrow A$, $r_2 : D \rightarrow C$ sont deux applications telles que $fr_1 = id_B = gr_1$, $hr_2 = id_D = kr_2$, alors il existe un isomorphisme canonique entre $\text{Coeg}(f \times h, g \times k)$ et $\text{Coeg}(f, g) \times \text{Coeg}(h, k)$ (voir par exemple la remarque 3.2 de [ARV11]).

3.1.2 2-produit cartésien, 2-produit fibré

A) 2-produit cartésien dans $\mathcal{G}rpd$

Nous rappelons la description ensembliste du 2-produit dans $\mathcal{G}rpd$. Si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ sont deux groupoïdes, alors les objets du groupoïdes $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ sont les couples (C, D) , où C est un objet de $\mathbb{C}$ et D est un objet de $\mathbb{D}$. Un morphisme $(C, D) \rightarrow (C', D')$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ est un couple (f, g) , où $f : C \rightarrow C'$ est une morphisme de $\mathbb{C}$ et $g : D \rightarrow D'$ est une morphisme de $\mathbb{D}$. Nous avons les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{\mathbb{C}, \mathbb{D}}^1 : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} & & \Pi_{\mathbb{C}, \mathbb{D}}^2 : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ \begin{array}{ccc} (C, D) & & C \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow f \\ (C', D') & & C' \end{array} & & \begin{array}{ccc} (C, D) & & D \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow g \\ (C', D') & & D' \end{array} \end{array}$$

Si $B_1 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ et $B_2 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ sont deux foncteurs, alors le foncteur canonique (B_1, B_2) est défini par

$$\begin{array}{ccc} (B_1, B_2) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{D} & & \\ \begin{array}{ccc} X & & (B_1(X), B_2(X)) \\ u \downarrow & \mapsto & \downarrow (B_1(u), B_2(u)) \\ Y & & (B_1(Y), B_2(Y)) \end{array} \end{array}$$

Si $B'_1 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ et $B'_2 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ sont deux autres foncteurs et si $\omega_1 : B_1 \Rightarrow B'_1$, $\omega_2 : B_2 \Rightarrow B'_2$ sont deux isomorphismes naturels, alors l'isomorphisme naturel canonique $(\omega_1, \omega_2) : (B_1, B_2) \Rightarrow (B'_1, B'_2)$ est défini, pour tout objet X de $\mathbb{B}$, par l'application

$$(B_1(X), B_2(X)) \xrightarrow{(\omega_{1_X}, \omega_{2_X})} (B'_1(X), B'_2(X)).$$

B) 2-produit fibré dans $\mathcal{G}rpd$

Étant donné deux foncteurs entre des groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ & \downarrow F & \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{G} & \mathbb{E}, \end{array}$$

le *2-produit fibré* de F et G est le groupoïde $\mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D}$ défini comme suit: les objets sont les triples (C, D, s) , où C est un objet de $\mathbb{C}$, D est un objet de $\mathbb{D}$ et $s : F(C) \rightarrow G(D)$ est un isomorphisme de $\mathbb{E}$. Un morphisme $(C, D, s) \rightarrow (C', D', s')$ de $\mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D}$ est une flèche $(f, g) : (C, D) \rightarrow (C', D')$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ telle que

$$G(g)s = s'F(f).$$

Nous considérons les foncteurs canoniques

$$\begin{array}{ccc} P_{F,G}^1 : \mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} & & P_{F,G}^2 : \mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ \begin{array}{ccc} (C, D, s) & & C \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow f \\ (C', D', s') & & C' \end{array} & & \begin{array}{ccc} (C, D, s) & & D \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow g \\ (C', D', s') & & D' \end{array} \end{array}$$

et l'isomorphisme naturel

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D} & \xrightarrow{P_{F,G}^1} & \mathbb{C} \\ P_{F,G}^2 \downarrow & \pi_{F,G} \swarrow & \downarrow F \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{G} & \mathbb{E}, \end{array}$$

défini pour tout $(C, D, s) \in \text{Ob}(\mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D})$ par

$$\pi_{F,G,(C,D,s)} := F\left(P_{F,G}^1((C, D, s))\right) = F(C) \xrightarrow{s} G(D) = G\left(P_{F,G}^2((C, D, s))\right).$$

Le 2-produit fibré $\mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D}$ possède la propriété suivante: si

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \xrightarrow{B_1} & \mathbb{C} \\ B_2 \downarrow & \beta \swarrow & \downarrow F \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{G} & \mathbb{E}, \end{array}$$

est un isomorphisme naturel, alors

$$\begin{array}{ccc} \langle B_1, B_2, \beta \rangle : \mathbb{B} & \rightarrow & \mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D} \\ \begin{array}{c} X \\ \downarrow u \\ Y \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} (B_1(X), B_2(X), \beta_X) \\ \downarrow (B_1(u), B_2(u)) \\ (B_1(Y), B_2(Y), \beta_Y) \end{array} \end{array}$$

est l'unique foncteur entre $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D}$ tel que

$$P_{F,G}^1 \langle B_1, B_2, \beta \rangle = B_1, \quad P_{F,G}^2 \langle B_1, B_2, \beta \rangle = B_2$$

et tel que

$$\pi_{F,G} * i_{\langle B_1, B_2, \beta \rangle} = \beta;$$

de plus, si

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \xrightarrow{B'_1} & \mathbb{C} \\ \downarrow B'_2 & \searrow \beta' & \downarrow F \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{G} & \mathbb{E}, \end{array}$$

est un isomorphisme naturel et si $\omega_1 : B_1 \Rightarrow B'_1$, $\omega_2 : B_2 \Rightarrow B'_2$ sont deux isomorphismes naturels tels que

$$\beta'(i_F * \omega_1) = (i_F * \omega_2)\beta,$$

alors l'isomorphisme naturel $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle : \langle B_1, B_2, \beta \rangle \Rightarrow \langle B'_1, B'_2, \beta' \rangle$ défini pour tout $X \in \text{Ob}(\mathbb{M})$ par

$$\begin{aligned} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_B &:= \langle B_1, B_2, \beta \rangle(X) = (B_1(X), B_2(X), \beta_X) \xrightarrow{(\omega_{1_X}, \omega_{2_X})} \\ & (B'_1(X), B'_2(X), \beta'_X) = \langle B'_1, B'_2, \beta' \rangle(X) \end{aligned}$$

est l'unique isomorphisme naturel entre $\langle B_1, B_2, \beta \rangle$ et $\langle B'_1, B'_2, \beta' \rangle$ tel que

$$i_{P_{F,G}^1} * \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \omega_1 \text{ et } i_{P_{F,G}^2} * \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \omega_2.$$

Nous rappelons également que si les foncteurs F et G sont munis d'une structure de 1-morphisme de 2-monoïdes, alors le 2-produit fibré $\mathbb{C}_F \times_G \mathbb{D}$ se dote d'une structure de 2-monoïde évidente. Nous laissons les détails et les vérifications usuelles en exercice pour le lecteur.

3.1.3 2-foncteur Π_0

Soit $\mathbb{C}$ un groupoïde. Nous représentons par $\Pi_0(\mathbb{C})$ l'ensemble dont les éléments sont les classes d'isomorphismes des objets de $\mathbb{C}$ (ces classes seront notées entre crochets $[]$). Tout foncteur entre groupoïdes $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ induit une application

$$\begin{aligned} \Pi_0(F) : \Pi_0(\mathbb{C}) &\rightarrow \Pi_0(\mathbb{D}) \\ [A] &\mapsto [F(A)]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\alpha : F \Rightarrow G$ est un isomorphisme naturel, alors $\Pi_0(F) = \Pi_0(G)$. Nous construisons ainsi un 2-foncteur

$$\Pi_0 : \mathcal{G}rpd \rightarrow \mathcal{E}ns,$$

où $\mathcal{E}ns$ désigne la 2-catégorie discrète des ensembles et des applications. Notons que ce 2-foncteur préserve les 2-produits binaires puisque si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ sont deux groupoïdes, alors

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{C}, \mathbb{D}} : \Pi_0(\mathbb{C}) \times \Pi_0(\mathbb{D}) &\rightarrow \Pi_0(\mathbb{C} \times \mathbb{D}) \\ ([A], [B]) &\rightarrow [(A, B)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{C}, \mathbb{D}}^{-1} : \Pi_0(\mathbb{C} \times \mathbb{D}) &\rightarrow \Pi_0(\mathbb{C}) \times \Pi_0(\mathbb{D}) \\ [(A, B)] &\rightarrow ([A], [B]) \end{aligned}$$

sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre. Si $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}})$ est un 2-monoïde de $\mathcal{G}rpd$, nous considérons le produit sur $\Pi_0(\mathbb{M})$ défini par

$$[A] *_{\Pi_0(\mathbb{M})} [B] := [A \otimes_{\mathbb{M}} B]$$

ainsi que l'élément neutre définit par

$$e_{\Pi_0(\mathbb{M})} := [I_{\mathbb{M}}].$$

Nous avons ainsi un 2-foncteur

$$\Pi_0 : 2\text{-}\mathcal{M}on(\mathcal{G}rpd) \rightarrow \mathcal{M}on(\mathbb{E}ns),$$

où $\mathcal{M}on(\mathbb{E}ns)$ désigne la 2-catégorie discrète des monoïdes de la catégorie des ensembles. Nous pouvons le restreindre au 2-foncteur

$$\Pi_0 : 2\text{-}\mathcal{M}onSym(\mathcal{G}rpd) \rightarrow \mathcal{M}onCom(\mathbb{E}ns),$$

où $\mathcal{M}onCom(\mathbb{E}ns)$ désigne la 2-catégorie discrète des monoïdes commutatifs internes à la catégorie des ensembles.

Remarque 3.1.1. Dans la suite, les monoïdes (commutatifs) et les groupes (commutatifs) internes à $\mathbb{E}ns$ seront respectivement appelés monoïdes (commutatifs) et groupes (commutatifs). Les 2-monoïdes (symétriques) et les 2-groupes (symétriques) internes à $\mathcal{C}at$ seront simplement appelés catégories monoïdales (symétriques) et catégories groupales (symétriques). Les 2-monoïdes (symétriques) et les 2-groupes (symétriques) internes à $\mathcal{G}rpd$ seront, quant à eux, simplement appelés 2-monoïdes (symétriques) et 2-groupes (symétriques)

Remarque 3.1.2. Toute 2-action $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ induit une action du monoïde commutatif $\Pi_0(\mathbb{M})$ sur l'ensemble $\Pi_0(\mathbb{S})$

$$\Pi_0(\mathbb{S}) \times \Pi_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}} \Pi_0(\mathbb{S} \times \mathbb{M}) \xrightarrow{\Pi_0(\odot)} \Pi_0(\mathbb{S})$$

que nous désignons par $\overline{\Pi_0(\odot)}$.

3.1.4 2-foncteur Π_1

Soient $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde de $\mathcal{G}rpd$ et $f, g \in Hom_{\mathbb{M}}(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}})$. Au vu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{f} & I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{g} & I_{\mathbb{M}} \\
 \downarrow d_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}} & & \downarrow d_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}} = g_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}} & & \downarrow g_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}} \\
 I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{f \otimes id_{I_{\mathbb{M}}}} & I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{id_{I_{\mathbb{M}}} \otimes g} & I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}} \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{id_{I_{\mathbb{M}}} \otimes g} & I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{f \otimes id_{I_{\mathbb{M}}}} & I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}} \\
 \downarrow g_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}}^{-1} & & \downarrow g_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}}^{-1} = d_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}}^{-1} & & \downarrow d_{\mathbb{M}I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
 I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{g} & I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{f} & I_{\mathbb{M}}
 \end{array}$$

$Id_{I_{\mathbb{M}}}$ (sur la courbe gauche) et $id_{I_{\mathbb{M}}}$ (sur la courbe droite)

nous rappelons que $Hom_{\mathbb{M}}(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}})$ est un groupe commutatif pour la composition des flèches (voir par exemple, [Sin75]). Nous le notons $\Pi_1(\mathbb{M})$. Si $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes de $\mathcal{G}rpd$, on construit un morphisme de groupes commutatifs

$$\begin{aligned}
 \Pi_1(F) : \Pi_1(\mathbb{M}) &\rightarrow \Pi_1(\mathbb{N}) \\
 t &\mapsto f_I^{-1} F(t) f_I.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\alpha : (F, f, f_I) \Rightarrow (G, g, g_I)$ est un 2-morphisme de 2-monoïde de $\mathcal{G}rpd$, alors $\Pi_1(F) = \Pi_1(G)$. Nous construisons ainsi un 2-foncteur

$$\Pi_1 : 2\text{-}\mathcal{M}on(\mathcal{G}rpd) \rightarrow \mathcal{G}rpCom(\mathbb{E}ns),$$

où $\mathcal{GrpCom}(\mathbb{E}ns)$ désigne la 2-catégorie discrète des groupes commutatifs internes à $\mathbb{E}ns$. Nous pouvons le restreindre au 2-foncteur

$$\Pi_1 : 2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{Grpd}) \rightarrow \mathcal{GrpCom}(\mathbb{E}ns).$$

3.2 Description ensembliste des systèmes trivialisants

Dans cette section, nous donnons une description ensembliste des systèmes trivialisants dans la catégorie $\mathbb{E}ns$. Pour cela, considérons une action $\circ : S \times M \rightarrow S$ d'un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$ sur un ensemble S . Soit alors $R_\circ$ une relation sur S définie par:

$$R_\circ := \{(s, s') \in S \times S \mid \exists (m, m') \in M \times M : s \circ m = s' \circ m'\}.$$

Si $s \in S$, alors $(s, s) \in R_\circ$ puisque $s \circ e_M = s \circ e_M$ et $R_\circ$ est une relation réflexive. Si $(s, s') \in R_\circ$, alors $s \circ m = s' \circ m'$ pour un certain couple $(m, m') \in M \times M$ et puisque $s' \circ m' = s \circ m$, nous avons que $(m', m) \in M \times M$ et donc que $R_\circ$ est une relation symétrique. Si $(s, s'), (s', s'')$ sont deux éléments de $R_\circ$, alors il existe quatre éléments m, m', n, n' de M tels que $s \circ m = s' \circ m'$ et $s' \circ n = s'' \circ n'$. Dès lors, $m *_M n$ et $n' *_M m'$ sont deux éléments de M tels que

$$\begin{aligned} s \circ (m *_M n) &= (s \circ m) \circ n \\ &= (s' \circ m') \circ n \\ &= s' \circ (m' *_M n) \\ &= s' \circ (n *_M m') \\ &= (s' \circ n) \circ m' \\ &= (s'' \circ n') \circ m' \\ &= s'' \circ (n' *_M m') \end{aligned}$$

et donc $(s, s'') \in R_\circ$ ce qui montre que $R_\circ$ est une relation transitive. Nous avons ainsi montré que $R_\circ$ est une relation d'équivalence sur S . Soient alors l'ensemble quotient $S/R_\circ$ (si $s \in S$, nous noterons $[s]$ sa classe d'équivalence dans $S/R_\circ$) et la projection canonique

$$\begin{aligned} p_\circ : S &\rightarrow S/R_\circ; \\ s &\mapsto [s]. \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. *Le couple $(S/R_\circ, p_\circ)$ construit précédemment est un système trivialisant relatif à $\circ$.*

Démonstration. Remarquons que si $(s, m) \in S \times M$, alors $(s \circ m, s) \in R_\circ$ puisque $(s \circ m) \circ e_M = s \circ (m *_M e_M) = s \circ m$. Ainsi $[s \circ m] = [s]$ et $p_\circ \circ = p_\circ \pi_{S,M}^1$. En particulier, $(S/R_\circ, p_\circ)$ est un système trivialisant relatif à $\circ$. Supposons que T soit un ensemble et $t : S \rightarrow T$ une application telle que $tp_\circ = t\pi_{S,M}^1$. Notons que si $[s] = [s']$ dans $S/R_\circ$, alors il existe $m, m' \in M$ tels que $s \circ m = s' \circ m'$ et donc

$$\begin{aligned} t(s) &= t(s \circ m) \\ &= t(s' \circ m') \\ &= t(s'). \end{aligned}$$

Nous considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \bar{t} : S/R_\circ &\rightarrow T \\ [s] &\mapsto t(s). \end{aligned}$$

Clairement, $\bar{t}p_\circ = t$ et $\bar{t}$ est l'unique application entre $S/R_\circ$ et T possédant cette propriété. $\square$

Remarque 3.2.2. Soit une action $\circ : S \times M \rightarrow S$ d'un monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$ sur un ensemble S . Pour $s \in S$, nous avons l'application

$$\begin{aligned} s \circ_- : M &\rightarrow S \\ m &\mapsto s \circ m \end{aligned}$$

Pour s et $s' \in S$, nous considérons le produit fibré

$$M_{s \circ_-} \times_{s' \circ_-} M = \{(m, m') \in M \times M \mid s \circ m = s' \circ m'\},$$

que nous désignons plus simplement par $M_{s \times_{s'}}, M$. Si $R_\circ$ désigne la relation d'équivalence sur S introduite ci-dessus, alors nous pouvons dire que $(s, s') \in R_\circ$ si et seulement si $M_{s \times_{s'}}, M$ est non vide. Cette observation nous sera utile dans la prochaine section, lorsque nous construirons les 2-systèmes trivialisants de $\mathcal{G}rpd$.

Proposition 3.2.3. *La catégorie $\mathbb{E}ns$ possède les systèmes trivialisants et ceux-ci commutent avec le produit binaire sur la diagonale.*

Démonstration. L'application $(id_S, e_M 1_S) : S \rightarrow S \times M$ est telle que

$$\circ(id_S, e_M 1_S) = id_S = \pi_{S,M}^1(id_S, e_M 1_S).$$

Dès lors, la conclusion découle du rappel C de la sous-section 3.1.1 $\square$

L'isomorphisme inverse de l'application canonique

$$\overline{p_\circ \times p_\circ} : (S \times S)/R_{\circ \times \circ} \rightarrow S/R_\circ \times S/R_\circ$$

est l'application

$$\begin{aligned} \overline{p_\circ \times p_\circ}^{-1} : S/R_\circ \times S/R_\circ &\rightarrow (S \times S)/R_{\circ \times \circ} \\ ([s], [s']) &\mapsto [(s, s')]. \end{aligned}$$

Le résultat suivant découle alors de la proposition 1.2.1.

Corollaire 3.2.4. *Si $(N, *_N, e_N)$ et $(M, *_M, e_M)$ sont deux monoïdes commutatifs et si $\circ : N \times M \rightarrow N$ est une action interne à la catégorie des monoïdes commutatifs, alors $N/R_\circ$ muni du produit*

$$\begin{aligned} *_N : N/R_\circ \times N/R_\circ &\rightarrow N/R_\circ \\ ([n], [n']) &\mapsto [n *_N n'] \end{aligned}$$

*et de l'élément neutre $e_{N/R_\circ} := [e_N]$ est un monoïde commutatif et le couple $((N/R_\circ, *_N, e_{N/R_\circ}), p_\circ)$ est un système trivialisant relatif à $\circ$ dans la catégorie des monoïdes commutatifs.*

Le résultat suivant se déduit de la proposition 1.3.4, de la proposition 1.4.3 et du corollaire 1.4.5.

Corollaire 3.2.5. *Soit $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$ un morphisme de monoïdes commutatifs. Le système trivialisant $((N/\circ_f, *_N/\circ_f, e_{N/\circ_f}), p_{\circ_f})$, où $\circ_f$ désigne l'action interne à la catégorie des monoïdes commutatifs*

$$N \times M \xrightarrow{id_N \times f} N \times N \xrightarrow{*_N} N,$$

*est le conoyau de f dans $\mathbf{MonCom}$. De plus, si (ζ, θ) est une structure cofinale sur f , alors $(N/\circ_f, *_N/\circ_f, e_{N/\circ_f})$ muni de l'application*

$$\begin{aligned} (\)_{N/\circ_f, \zeta}^* : N/\circ_f &\rightarrow N/\circ_f \\ [n] &\mapsto [\zeta(n)] \end{aligned}$$

*est un groupe commutatif. Dans ce cas, si f est un morphisme de groupes commutatifs, alors $((N/\circ_f, *_N/\circ_f, e_{N/\circ_f}), (\)_{N/\circ_f, (\)_N}^*, p_{\circ_f})$ est le conoyau de f dans $\mathbf{GrpCom}$.*

Le résultat suivant se prouve à partir du corollaire précédent et du théorème 1.5.2.

Corollaire 3.2.6. *Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{GrpCom} \rightarrow \mathbf{MonCom}$ possède un adjoint à gauche L . Pour tout monoïde commutatif $(M, *_M, e_M)$, il existe un unique isomorphisme de groupes commutatifs l_M*

$$L(M) \rightarrow (Coker(\Delta_M), *_M, e_M, (\)_{Coker(\Delta_M), (\)_M}^*),$$

où $((\text{Coker}(\Delta_M), *_{C\Delta_M}, e_{C\Delta_M}), p_{\Delta_M})$ est un conoyau du morphisme diagonal Δ_M et où $(\)_{C\Delta_M, (\pi_{M,M}^2, \pi_{M,M}^2)}^* : \text{Coker}(\Delta_M) \rightarrow \text{Coker}(\Delta_M)$ est l'application d'inversion issue du lemme 1.5.1, tel que pour tout morphisme de monoïdes commutatifs $f : (M, *_M, e_M) \rightarrow (N, *_N, e_N)$, on ait

$$\overline{p_{\Delta_N}(f \times f)} l_M = l_N L(f).$$

3.3 2-systèmes trivialisants dans $\mathcal{Grpd}$ relatifs à une 2-action identitaire sur la symétrie diagonale

L'objectif des trois prochaines sections est de donner une description ensembliste des 2-systèmes trivialisants dans la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$. Dans cette section, nous construisons des 2-systèmes trivialisants relatifs à des 2-actions particulières que nous appellerons «identitaires sur la symétrie diagonale» et dont la définition est la suivante.

Définition 3.3.1. Soit $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ une 2-action d'une catégorie monoïdale symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ de $\mathcal{Grpd}$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$. Celle-ci est dite *identitaire sur la symétrie diagonale* si pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout objet M de $\mathbb{M}$, l'identité

$$id_S \odot c_{\mathbb{M}_{M,M}} = id_{S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} M)}$$

est satisfaite.

Remarque 3.3.2. Le fait, pour une 2-action, d'être identitaire sur la symétrie diagonale comme introduit ci-dessus, n'est pas une notion totalement inédite dans la littérature catégorique existante. En effet, dans le point 1.4.1 de l'exposé XVIII «*La formule de dualité globale*» de [Del73], P.Deligne introduit, pour le produit $\otimes_{\mathbb{M}}$ d'une catégorie monoïdale symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ le fait d'être *strictement commutatif*, c'est-à-dire que pour tout objet M de $\mathbb{M}$, l'identité

$$c_{\mathbb{M}_{M,M}} = id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M}$$

est satisfaite. Cette notion de Deligne est un cas particulier de celle introduite ci-dessus, puisque le produit $\otimes_{\mathbb{M}}$ est strictement commutatif si et seulement si la 2-action $\otimes_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ est identitaire sur la symétrie diagonale.

À partir de maintenant, nous travaillerons exclusivement dans la 2-catégorie $\mathcal{Grpd}$ et toutes les catégories rencontrées seront des groupoïdes. Étant donnée une 2-action identitaire sur la symétrie diagonale $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{Grpd}$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$, nous construisons un groupoïde noté $\mathbb{S}/\odot$ de la façon suivante.

Remarque 3.3.3. L'hypothèse que la 2-action $(\odot, \alpha, \delta)$ est identitaire sur la symétrie diagonale sera utilisée pour montrer que les flèches de la catégorie $\mathbb{S}/\odot$ sont inversibles (voir proposition 3.3.8).

Objets. Les objets de $\mathbb{S}/\odot$ sont ceux de $\mathbb{S}$.

Flèches. Si S est un objet de $\mathbb{S}$, nous commençons par remarquer que celui-ci induit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} S \odot - : \mathbb{M} & \rightarrow & \mathbb{S} \\ \begin{array}{c} M \\ f \downarrow \\ N \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} S \odot M \\ \downarrow id_S \odot f \\ S \odot N \end{array} \end{array}$$

Si S et T sont deux objets de $\mathbb{S}$. Nous pouvons alors considérer le 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{S \odot -} \times_{T \odot -} \mathbb{M} & \xrightarrow{P_{S \odot -, T \odot -}^1} & \mathbb{M} \\ P_{S \odot -, T \odot -}^2 \downarrow & \pi_{S \odot -, T \odot -} \swarrow & \downarrow S \odot - \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{T \odot -} & \mathbb{S} \end{array}$$

que nous désignons plus simplement par $(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}, P_{S,T}^1, P_{S,T}^2, \pi_{S,T})$. Nous avons alors un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{S,T} : (\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}) \times \mathbb{M} & \rightarrow & \mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M} \\ ((M, N, s), P) & & (M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P, \alpha_{T,N,P}^{-1}(s \odot id_P) \alpha_{S,M,P}) \\ ((f,g), h) \downarrow & \mapsto & \downarrow (f \otimes_{\mathbb{M}} h, g \otimes_{\mathbb{M}} h) \\ ((U, V, t), Q) & & (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, V \otimes_{\mathbb{M}} Q, \alpha_{T,V,Q}^{-1}(t \odot id_Q) \alpha_{S,U,Q}). \end{array}$$

Notons que pour tout objet (M, N, s) de $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$ et tout objet P, Q de $\mathbb{M}$, nous avons une flèche de $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$

$$\alpha_{(M,N,s),P,Q}^{S,T} : (M, N, s) \otimes_{S,T} (P \otimes Q) \rightarrow ((M, N, s) \otimes_{S,T} P) \otimes_{S,T} Q$$

définie par $\alpha_{(M,N,s),P,Q}^{S,T} := (a_{\mathbb{M}_M,P,Q}, a_{\mathbb{M}_N,P,Q})$ puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
(S \odot M) \odot (P \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{s \otimes id_{P \otimes_{\mathbb{M}} Q}} & (T \odot N) \odot (P \otimes_{\mathbb{M}} Q) \\
\alpha_{S,M,P \otimes_{\mathbb{M}} Q} \nearrow & & \nwarrow \alpha_{T,N,P \otimes_{\mathbb{M}} Q}^{-1} \\
S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} (P \otimes_{\mathbb{M}} Q)) & & T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} (P \otimes_{\mathbb{M}} Q)) \\
id_S \odot a_{\mathbb{M}_M,P,Q} \downarrow & & \downarrow id_T \odot a_{\mathbb{M}_N,P,Q} \\
S \odot ((M \otimes_{\mathbb{M}} P) \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{\alpha_{S \odot M,P,Q}} & T \odot ((N \otimes_{\mathbb{M}} P) \otimes_{\mathbb{M}} Q) \\
\alpha_{S,M \otimes_{\mathbb{M}} P,Q} \downarrow & & \uparrow \alpha_{T,N \otimes_{\mathbb{M}} P,Q}^{-1} \\
(S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P)) \otimes_{\mathbb{M}} Q & & (T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} P)) \otimes_{\mathbb{M}} Q \\
\alpha_{S,M,P} \otimes_{\mathbb{M}} id_Q \searrow & & \nearrow \alpha_{T,N,P}^{-1} \otimes_{\mathbb{M}} id_Q \\
((S \odot M) \odot P) \otimes_{\mathbb{M}} Q & \xrightarrow{(s \odot id_P) \otimes_{\mathbb{M}} id_Q} & ((T \odot N) \odot P) \otimes_{\mathbb{M}} Q
\end{array}$$

est commutatif. Clairement, la famille de flèche $\alpha^{S,T}$ ainsi construite est naturelle. Notons également que pour tout objet (M, N, s) de $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$, nous avons une flèche de $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$

$$\delta_{(M,N,s)}^{S,T} : (M, N, s) \rightarrow (M, N, s) \otimes_{S,T} I_{\mathbb{M}}$$

définie par $\delta_{(M,N,s)}^{S,T} := (d_{\mathbb{M}_M}, d_{\mathbb{M}_N})$ puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
S \odot M & \xrightarrow{s} & T \odot N \\
id_S \odot d_{\mathbb{M}_M} \swarrow & & \searrow id_T \odot d_{\mathbb{M}_N} \\
S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) & \xrightarrow{\delta_{S \odot M}} & T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) \\
\alpha_{S,M,I_{\mathbb{M}}} \searrow & & \nearrow \alpha_{T,N,I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
(S \odot M) \odot I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{s \odot id_{I_{\mathbb{M}}}} & (T \odot N) \odot I_{\mathbb{M}}
\end{array}$$

est commutatif. Clairement, la famille de flèche $\delta^{S,T}$ ainsi construite est naturelle. Nous considérons alors le triple $(\otimes_{S,T}, \alpha^{S,T}, \delta^{S,T})$ qui est clairement une 2-action à droite de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$. En effet, les différents axiomes de la définition de 2-action se ramènent dans ce cas aux axiomes du pentagone et de compatibilité entre les contraintes d'associativité et d'unité à droite de la définition de 2-monoïde (voir rappels de la section 2.1). Par la remarque 3.1.2,

cette 2-action induit une action, que nous désignons par $\overline{\Pi_0(\otimes_{S,T})}$

$$\begin{aligned} \Pi_0(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}) \times \Pi_0(\mathbb{M}) &\rightarrow \Pi_0(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}) \\ ([(M, N, s)], [P]) &\mapsto [(M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P, \alpha_{T,N,P}^{-1}(s \odot id_P) \alpha_{S,M,P})] \end{aligned}$$

du monoïde $\Pi_0(\mathbb{M})$ sur l'ensemble $\Pi_0(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M})$. Soit alors le système trivialisant $\Pi_0(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}) / \overline{\Pi_0(\otimes_{S,T})}$ relatif à $\overline{\Pi_0(\otimes_{S,T})}$. Nous définissons

$$\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T) := \Pi_0(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}) / \overline{\Pi_0(\otimes_{S,T})}.$$

Autrement dit, $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la forme $[[(M, N, s)]]$, où $[(M, N, s)] \in \Pi_0(\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M})$, avec la relation d'égalité $[[(M, N, s)]] = [[(U, V, t)]]$ si et seulement s'il existe deux objets P, Q de $\mathbb{M}$ tels que

$$[(M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P, \alpha_{T,N,P}^{-1}(s \odot id_P) \alpha_{S,M,P})] = [(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, V \otimes_{\mathbb{M}} Q, \alpha_{T,V,Q}^{-1}(t \odot id_Q) \alpha_{S,U,Q})],$$

c'est-à-dire s'il existe deux flèches $f : M \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow U \otimes_{\mathbb{M}} Q$, $g : N \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow V \otimes_{\mathbb{M}} Q$ de $\mathbb{M}$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{\alpha_{S,M,P}} & (S \odot M) \odot P & \xrightarrow{s \odot id_P} & (T \odot N) \odot P & \xrightarrow{\alpha_{T,N,P}^{-1}} & T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} P) \\ \downarrow id_S \odot f & & & & & & \downarrow id_T \odot g \\ S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{\alpha_{S,U,Q}} & (S \odot U) \odot Q & \xrightarrow{t \odot id_Q} & (T \odot V) \odot Q & \xrightarrow{\alpha_{T,V,Q}^{-1}} & T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} Q) \end{array}$$

est commutatif. Pour plus de clarté, les classes d'équivalence de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ seront notées par la suite $[M, N, s]$ au lieu de $[[(M, N, s)]]$.

Composition. Soient R, S et T trois objets de $\mathbb{S}$. Nous définissons une relation de $\overline{\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, S)} \times \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, T)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \circ_{R,S,T} : \overline{\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, S)} \times \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, T) \\ ([M, N, s], [U, V, t]) &\mapsto [M \otimes_{\mathbb{M}} U, V \otimes_{\mathbb{M}} N, t \bullet s], \end{aligned}$$

où $t \bullet s$ désigne la flèche de $\mathbb{S}$

$$\begin{array}{ccccccc} R \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} U) & \xrightarrow{\alpha_{R,M,U}} & (R \odot M) \odot U & \xrightarrow{s \odot id_U} & (S \odot N) \odot U & \xrightarrow{\alpha_{S,N,U}^{-1}} & S \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} U) \\ & & & & & & \downarrow id_S \odot c_{M,N,U} \\ T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} N) & \xleftarrow{\alpha_{T,V,N}^{-1}} & (T \odot V) \odot N & \xleftarrow{t \odot id_N} & (S \odot U) \odot N & \xleftarrow{\alpha_{S,U,N}} & S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} N). \end{array}$$

Nous laissons la preuve du lemme suivant en exercice pour le lecteur.

Lemme 3.3.4. Soient R, S, T trois objets de $\mathbb{S}$. La relation $\circ_{R,S,T}$ est une application de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, S) \times \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, T)$

Nous avons ainsi défini une loi de composition sur $\mathbb{S}/\odot$.

Proposition 3.3.5. La loi de composition ainsi définie sur $\mathbb{S}/\odot$ est associative.

Démonstration. Si O, R, S et T sont quatre objets de $\mathbb{S}$ et si $[A, B, r] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(O, R)$, $[M, N, s] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, S)$, $[U, V, t] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$, alors il faut voir que

$$[A \otimes_{\mathbb{M}} (M \otimes_{\mathbb{M}} U), (V \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} B, (t \bullet s) \bullet r] = [(A \otimes_{\mathbb{M}} M) \otimes_{\mathbb{M}} U, V \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} B), t \bullet (s \bullet r)].$$

Par construction de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(O, T)$, il suffit de vérifier que les triples $(A \otimes_{\mathbb{M}} (M \otimes_{\mathbb{M}} U), (V \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} B, (t \bullet s) \bullet r)$ et $((A \otimes_{\mathbb{M}} M) \otimes_{\mathbb{M}} U, V \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} B), t \bullet (s \bullet r))$ sont isomorphes dans $\mathbb{M}_O \times_T \mathbb{M}$. Pour cela, nous commençons par considérer les diagrammes commutatifs suivants,

$$\begin{array}{ccccc}
O \odot (A \otimes (M \otimes U)) & \xrightarrow{\alpha_{O,A,M \otimes U}} & (O \odot A) \odot (M \otimes U) \\
\downarrow id_O \odot a_{A,M,U} & & \downarrow \alpha_{O,A,M \otimes U} \\
O \odot ((A \otimes M) \otimes U) & \xrightarrow{\alpha_{O,A \otimes M,U}} (O \odot (A \otimes M)) \odot U \xrightarrow{\alpha_{O,A,M} id_U} & ((O \odot A) \odot M) \odot U \\
\\
(O \odot A) \odot (M \otimes U) & \xrightarrow{r \odot id_{M \otimes U}} (R \odot B) \odot (M \otimes U) \xrightarrow{\alpha_{R,B,M \otimes U}^{-1}} & R \odot (B \otimes (M \otimes U)) \\
\downarrow \alpha_{O \odot A,M,U} & \downarrow \alpha_{R \odot B,M,U} & \downarrow id_R \odot a_{B,M,U} \\
((O \odot A) \odot M) \odot U & \xrightarrow{(r \odot id_M) \odot id_U} ((R \odot B) \odot M) \odot U \xrightarrow{\alpha_{R,B,M}^{-1} id_U} & R \odot ((B \otimes M) \otimes U) \\
\downarrow \alpha_{R,B \otimes M,U} & & \downarrow \alpha_{R,B \otimes M,U} \\
((O \odot A) \odot M) \odot U & \xrightarrow{(r \odot id_M) \odot id_U} ((R \odot B) \odot M) \odot U \xrightarrow{\alpha_{R,B,M}^{-1} id_U} & (R \odot (B \otimes M)) \odot U \\
\\
R \odot (B \otimes (M \otimes U)) & \xrightarrow{id_R \odot c_{B,M \otimes U}} & R \odot ((M \otimes U) \otimes B) \\
\downarrow id_R \odot a_{B,M,U} & & \downarrow id_R \odot a_{M,U,B}^{-1} \\
R \odot ((B \otimes M) \otimes U) & \xrightarrow{id_R \odot (c_{B,M} id_U)} & R \odot (M \otimes (U \otimes B)) \\
\downarrow \alpha_{R,B \otimes M,U} & & \downarrow id_R \odot (id_M \otimes c_{U,B}) \\
R \odot ((B \otimes M) \otimes U) & \xrightarrow{id_R \odot (c_{B,M} id_U)} & R \odot (M \otimes (B \otimes U)) \\
\downarrow \alpha_{R,B \otimes M,U} & & \downarrow id_R \odot a_{M,B,U} \\
(R \odot (B \otimes M)) \odot U & \xrightarrow{(id_R \odot c_{B,M}) \odot id_U} & R \odot ((M \otimes B) \otimes U) \\
\downarrow \alpha_{R,M \otimes B,U} & & \downarrow \alpha_{R,M \otimes B,U} \\
(R \odot (B \otimes M)) \odot U & \xrightarrow{(id_R \odot c_{B,M}) \odot id_U} & (R \odot (M \otimes B)) \odot U
\end{array}$$

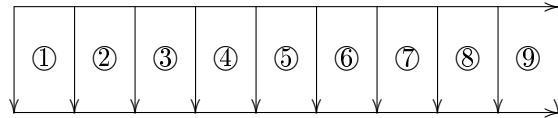
$$\begin{array}{ccc}
R \odot ((M \otimes U) \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{R,M \otimes U,B}} (R \odot (M \otimes U)) \odot B & \xrightarrow{\alpha_{R,M,U} \odot id_B} ((R \odot M) \odot U) \odot B \\
\downarrow id_{R \odot a_{M,U,B}^{-1}} & & \downarrow \alpha_{R \odot M,U,B}^{-1} \\
R \odot (M \otimes (U \otimes B)) & \xrightarrow{\alpha_{R,M,U \otimes B}} (R \odot M) \odot (U \otimes B) & \\
\downarrow id_{R \odot (id_M \otimes c_{U,B})} & & \downarrow id_{R \odot M \odot c_{U,B}} \\
R \odot (M \otimes (B \otimes U)) & \xrightarrow{\alpha_{R,M,B \otimes U}} (R \odot M) \odot (B \otimes U) & \\
\downarrow id_{R \odot a_{M,B,U}} & & \downarrow \alpha_{R \odot M,B,U} \\
R \odot ((M \otimes B) \otimes U) & & \\
\downarrow \alpha_{R,M \otimes B,U} & & \downarrow \alpha_{R \odot M,B,U} \\
(R \odot (M \otimes B)) \odot U & \xrightarrow{\alpha_{R,M,B} \odot id_U} ((R \odot M) \odot B) \odot U & \\
\downarrow (s \odot id_U) \odot id_B & & \downarrow \alpha_{R \odot M,U,B}^{-1} \\
((R \odot M) \odot U) \odot B & \xrightarrow{(s \odot id_U) \odot id_B} ((S \odot N) \odot U) \odot B & \\
\downarrow \alpha_{R \odot M,U,B}^{-1} & & \downarrow \alpha_{S \odot N,U,B}^{-1} \\
(R \odot M) \odot (U \otimes B) & \xrightarrow{s \odot id_{U \otimes B}} (S \odot N) \odot (U \otimes B) & \\
\downarrow id_{R \odot M \odot c_{U,B}} & & \downarrow id_{S \odot N \odot c_{U,B}} \\
(R \odot M) \odot (B \otimes U) & \xrightarrow{s \odot id_{B \otimes U}} (S \odot N) \odot (B \otimes U) & \\
\downarrow \alpha_{R \odot M,B,U} & & \downarrow \alpha_{S \odot N,B,U} \\
((R \odot M) \odot B) \odot U & \xrightarrow{(s \odot id_B) \odot id_U} ((S \odot N) \odot B) \odot U & \\
\downarrow \alpha_{S \odot N,U,B}^{-1} & & \downarrow \alpha_{S,N,B}^{-1} \odot id_B \\
((S \odot N) \odot U) \odot B & \xrightarrow{\alpha_{S,N,B}^{-1} \odot id_B} (S \odot (N \otimes U)) \odot B & \\
\downarrow \alpha_{S \odot N,U,B}^{-1} & & \downarrow \alpha_{S,N \otimes U,B}^{-1} \\
(S \odot N) \odot (U \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{S,N,U \otimes B}^{-1}} S \odot ((N \otimes U) \otimes B) & \\
\downarrow id_{S \odot N \odot c_{U,B}} & & \downarrow id_{S \odot (id_N \otimes c_{U,B})} \\
(S \odot N) \odot (B \otimes U) & \xrightarrow{\alpha_{S,N,B \otimes U}^{-1}} S \odot (N \otimes (B \otimes U)) & \\
\downarrow \alpha_{S \odot N,B,U} & & \downarrow id_{S \odot a_{N,B,U}} \\
((S \odot N) \odot B) \odot U & \xrightarrow{\alpha_{S,N,B}^{-1} \odot id_U} (S \odot (N \otimes B)) \odot U & \xrightarrow{\alpha_{S,N \otimes B,U}^{-1}} S \odot ((N \otimes B) \otimes U)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(S \odot (N \otimes U)) \odot B & \xrightarrow{(id_S \odot c_{N,U}) \odot id_B} & (S \odot (U \otimes N)) \odot B \\
\downarrow \alpha_{S,N \otimes U,B}^{-1} & & \downarrow \alpha_{S,U \otimes N,B}^{-1} \\
S \odot ((N \otimes U) \otimes B) & \xrightarrow{id_S \odot (c_{N,U} \otimes id_B)} & S \odot ((U \otimes N) \otimes B) \\
\downarrow id_S \odot a_{N,U,B}^{-1} & & \downarrow id_S \odot a_{U,N,B}^{-1} \\
S \odot (N \otimes (U \otimes B)) & & \\
\downarrow id_S \odot (id_N \otimes c_{U,B}) & & \\
S \odot (N \otimes (B \otimes U)) & & \\
\downarrow id_S \odot \alpha_{N,B,U} & & \\
S \odot ((N \otimes B) \otimes U) & \xrightarrow{id_S \odot c_{N \otimes B,U}} & S \odot (U \otimes (N \otimes B)) \\
\downarrow \alpha_{S,U,N \otimes B} & & \downarrow \alpha_{S,U,N \otimes B}^{-1} \\
(S \odot (U \otimes N)) \odot B & \xrightarrow{\alpha_{S,U,N \otimes B}} & ((S \odot U) \odot N) \odot B \xrightarrow{(t \odot id_N) \odot id_B} ((T \odot V) \odot N) \odot B \\
\downarrow \alpha_{S,U \otimes N,B}^{-1} & & \downarrow \alpha_{T \odot V,N,B}^{-1} \\
S \odot ((U \otimes N) \otimes B) & & \\
\downarrow id_S \odot a_{U,N,B}^{-1} & & \\
S \odot (U \otimes (N \otimes B)) & \xrightarrow{\alpha_{S,U,N \otimes B}} (S \odot U) \odot (N \otimes B) \xrightarrow{t \odot id_{N \otimes B}} (T \odot V) \odot (N \otimes B) \\
\downarrow \alpha_{T \odot V,N,B}^{-1} & & \downarrow id_{T \odot V,N,B}^{-1} \\
((T \odot V) \odot N) \odot B & \xrightarrow{\alpha_{T,V,N \otimes B}^{-1}} (T \odot (V \otimes N)) \odot B \xrightarrow{\alpha_{T,V \otimes N,B}^{-1}} T \odot ((V \otimes N) \otimes B) \\
\downarrow \alpha_{T \odot V,N,B}^{-1} & & \downarrow id_{T \odot V,N,B}^{-1} \\
(T \odot V) \odot (N \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{T,V,N \otimes B}^{-1}} & T \odot (V \otimes (N \otimes B))
\end{array}$$

que nous désignons respectivement par ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ et ⑨. Dès lors, les flèches $a_{\mathbb{M}_A, M, U}$ et $a_{\mathbb{M}_V, N, B}^{-1}$ sont telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
O \odot (A \otimes_{\mathbb{M}} (M \otimes_{\mathbb{M}} U)) & \xrightarrow{(t \bullet s) \bullet r} & T \odot ((V \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} B) \\
\downarrow id_O \odot a_{\mathbb{M}_A, M, U} & & \downarrow id_T \odot a_{\mathbb{M}_V, N, B}^{-1} \\
O \odot ((A \otimes_{\mathbb{M}} M) \otimes_{\mathbb{M}} U) & \xrightarrow{t \bullet (s \bullet r)} & T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} B))
\end{array}$$

commute puisque celui-ci se décompose comme



□

Flèches identités. Pour tout objet S de $\mathbb{S}$, nous considérons $[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, S)$.

Proposition 3.3.6. *Pour tout objet S de $\mathbb{S}$, l'élément $[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}]$ est une flèche identité sur S pour la loi de composition définie précédemment.*

Démonstration. Soit T un objet de $\mathbb{S}$ et $[M, N, s] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$. Il faut voir que

$$[M, N, s] \circ_{S, S, T} [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}] = [M, N, s],$$

c'est-à-dire que

$$[I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} M, N \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, s \bullet id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}] = [M, N, s].$$

Par construction de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$, il suffit de voir que les triplets $(I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} M, N \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}} \bullet s)$ et (M, N, s) sont isomorphes dans $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$. Pour cela, nous commençons par remarquer que

$$s \bullet id_{S \odot I_{\mathbb{M}}} = \alpha_{S, N, I_{\mathbb{M}}}^{-1} (s \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \alpha_{S, M, I_{\mathbb{M}}} (id_S \odot c_{\mathbb{M}, I_{\mathbb{M}}}).$$

Dès lors, les flèches $g_{\mathbb{M}_M}^{-1}$ et $d_{\mathbb{M}_N}^{-1}$ sont telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
& & S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) & \xrightarrow{\alpha_{S, M, I_{\mathbb{M}}}} & (S \odot M) \odot I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{s \odot id_{I_{\mathbb{M}}}} & (T \odot N) \odot I_{\mathbb{M}}^{-1} \\
& \nearrow id_S \odot c_{\mathbb{M}, I_{\mathbb{M}}, M} & \downarrow id_S \odot d_{\mathbb{M}_M}^{-1} & \nearrow \delta_{S \odot M}^{-1} & & \downarrow \delta_{T \odot N}^{-1} & \searrow \alpha_{T, N, I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
S \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} M) & & & & & & T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) \\
& \searrow id_S \odot g_{\mathbb{M}_M}^{-1} & & & & \downarrow id_T \odot d_{\mathbb{M}_N}^{-1} & \\
& & S \odot M_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{s} & T \odot N & &
\end{array}$$

est commutatif. Nous montrons similairement que si $[U, V, t] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(T, S)$, alors

$$[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}] \circ_{T, S, S} [U, V, t] = [U, V, t].$$

□

En conséquence des propositions 3.3.5 et 3.3.6, nous avons muni $\mathbb{S}/\odot$ d'une structure de catégorie.

Lemme 3.3.7. *Si S est un objet de $\mathbb{S}$ et si P est un objet de $\mathbb{M}$, alors $[P, P, id_{S \odot P}]$ est une flèche identité sur S dans $\mathbb{S}/\odot$.*

Démonstration. Par construction de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, S)$, nous avons immédiatement que $[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}] = [I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P, I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P, \alpha_{S, I_{\mathbb{M}}, P}^{-1}(id_{S \odot I_{\mathbb{M}}} \odot id_P) \alpha_{S, I_{\mathbb{M}}, P}]$. Il est par ailleurs clair que les triplets $(I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P, I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P, id_{S \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P)})$ et $(P, P, id_{S \odot P})$ sont isomorphes dans $\mathbb{M}_S \times_S \mathbb{M}$ par naturalité de $g_{\mathbb{M}P}$. Dès lors, $[P, P, id_{S \odot P}] = [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}]$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, S)$ et la conclusion découle de la proposition 3.3.6. $\square$

Flèches inverses. Soient S et T deux objets de $\mathbb{S}/\odot$. Nous définissons une relation de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(T, S)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} (\)_{S,T}^{-1} : \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(T, S) \\ [M, N, s] &\mapsto [N, M, s^{-1}]. \end{aligned}$$

Il est immédiat que cette relation est une application. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.3.8. *Le quadruplet $(\mathbb{S}/\odot, \circ, id, (\)^{-1})$ est un groupoïde.*

Démonstration. Nous avons montré précédemment que le triplet $(\mathbb{S}/\odot, \circ, id)$ est une catégorie. Il reste donc à voir que si S et T sont deux objets de $\mathbb{S}/\odot$ et si $[M, N, s] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$, alors

$$\begin{aligned} [N, M, s^{-1}] \circ_{S,T,S} [M, N, s] &= [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}] \\ [M, N, s] \circ_{T,S,T} [N, M, s^{-1}] &= [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{T \odot I_{\mathbb{M}}}] \end{aligned}$$

ce qui revient à montrer que

$$\begin{aligned} [M \otimes_{\mathbb{M}} N, M \otimes_{\mathbb{M}} N, s^{-1} \bullet s] &= [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I}] \\ [N \otimes_{\mathbb{M}} M, N \otimes_{\mathbb{M}} M, s \bullet s^{-1}] &= [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{T \odot I}]. \end{aligned}$$

Nous commençons par remarquer que $s^{-1} \bullet s = id_{S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} N)}$ et que $s \bullet s^{-1} = id_{T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} M)}$ puisque la 2-action $\odot$ est identitaire sur la symétrie diagonale. Dès lors, les égalités désirées se déduisent du lemme 3.3.7. $\square$

Dans la proposition précédente, nous avons utilisé le fait que l'action $\odot$ est identitaire sur la symétrie diagonale. Nous construisons alors un foncteur de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}/\odot$, noté $P_{\odot}$, de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccc} P_{\odot} : \mathbb{S} & \rightarrow & \mathbb{S}/\odot \\ \begin{array}{c} S \\ f \downarrow \\ T \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} S \\ \downarrow [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}] \\ T \end{array} \end{array}$$

Proposition 3.3.9. $P_{\odot}$ est un foncteur.

Démonstration. Nous commençons par remarquer que pour tout objet S de $\mathbb{S}$, $P_{\odot}(id_S) = [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_S \odot id_{I_{\mathbb{M}}}] = [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}]$ et $P_{\odot}$ préserve les flèches identités. Soient alors R, S, T trois objets de $\mathbb{S}$ et soient $f \in \text{Hom}_{\mathbb{S}}(R, S)$, $g \in \text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T)$. Il faut voir que $P_{\odot}(g)P_{\odot}(f) = P_{\odot}(gf)$. Cette dernière égalité s'écrit également $[I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, (g \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \bullet (f \odot id_{I_{\mathbb{M}}})] = [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (gf) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]$. Par construction de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, T)$, il suffit de voir que les triples $(I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, (g \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \bullet (f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}))$ et $(I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (gf) \odot id_{I_{\mathbb{M}}})$ sont isomorphes dans $\mathbb{M}_{R \times_T \mathbb{M}}$. Pour cela, puisque $c_{I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}} = id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}$, nous calculons immédiatement que $(g \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \bullet (f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) = \alpha_{T, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}}^{-1} ((gf) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \odot id_{I_{\mathbb{M}}} \alpha_{R, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}}$. Dès lors, la conclusion vient du fait que la flèche $d_{I_{\mathbb{M}}}^{-1}$ est telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & (R \odot I_{\mathbb{M}}) \odot I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{(gf) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}} (T \odot I_{\mathbb{M}}) \odot I_{\mathbb{M}} \\
 \alpha_{R, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}} \nearrow & & \searrow \alpha_{T, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
 R \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) & & T \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) \\
 id_R \odot d_{I_{\mathbb{M}}}^{-1} \downarrow & \delta_{R \odot I_{\mathbb{M}}}^{-1} \nearrow & \delta_{T \odot I_{\mathbb{M}}}^{-1} \searrow \downarrow id_T \odot d_{I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
 R \odot I_{\mathbb{M}} & \xrightarrow{(gf) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}} & T \odot I_{\mathbb{M}}
 \end{array}$$

est commutatif. $\square$

Nous construisons enfin une transformation $\eta_{\odot} : P_{\odot} \Rightarrow P_{\odot} \Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1$ définie par la famille de flèches

$$\{\eta_{\odot(S, M)} := S \odot M \xrightarrow{[I_{\mathbb{M}}, M, \delta_{S \odot M}^{-1}]} S\}_{(S, M) \in \text{Ob}(\mathbb{S} \times \mathbb{M})}$$

Proposition 3.3.10. $\eta_{\odot}$ est une transformation naturelle.

Démonstration. Soient $(S, M), (T, N)$ deux objets de $\mathbb{S} \times \mathbb{M}$ et soit $(f, u) \in \text{Hom}_{\mathbb{S} \times \mathbb{M}}((S, M), (T, N))$. Nous devons montrer que

$$P_{\odot}(f)\eta_{\odot(S, M)} = \eta_{\odot(T, N)}P_{\odot}(f \odot u).$$

Il faut donc voir que $[I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} M, (f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \bullet \delta_{S \odot M}^{-1}] = [I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, N \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, \delta_{T \odot N}^{-1} \bullet ((f \odot u) \odot id_{I_{\mathbb{M}}})]$. Par construction de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S \odot M, T)$, il suffit de voir que ces deux triplets sont isomorphes dans $\mathbb{M}_{S \odot M \times_T \mathbb{M}}$. Pour cela, par naturalité de α , nous calculons que $(f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \bullet \delta_{S \odot M}^{-1} = (f \odot (id_{I_{\mathbb{M}}} \otimes_{\mathbb{M}} id_M))(id_S \odot c_{M, I_{\mathbb{M}}})\alpha_{S, M, I_{\mathbb{M}}}^{-1}(\delta_{S \odot M}^{-1} \odot id_{I_{\mathbb{M}}})\alpha_{S \odot M, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}}$. D'autre part, puisque $c_{I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}} = id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}$, nous calculons que $\delta_{T \odot N}^{-1} \bullet ((f \odot u) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) = \alpha_{T, N, I_{\mathbb{M}}}^{-1}(\delta_{T \odot N}^{-1} \odot id_{I_{\mathbb{M}}})\alpha_{T \odot N, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}}$.

$id_{I_M})(((f \odot u) \odot id_{I_M}) \odot id_{I_M})\alpha_{S \odot M, I_M, I_M}$. Dès lors, la conclusion vient du fait que les flèches $id_{I_M \otimes_M I_M}$ et $c_{M, I_M, N}(id_{I_M} \otimes_M u)$ sont telles que le diagramme

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& (S \odot M) \odot I_M \xrightarrow{\alpha_{S, M, I_M}^{-1}} S \odot (M \otimes_M I_M) & \\
\delta_{S \odot M}^{-1} \odot id_{I_M} \nearrow & & \searrow id_S \odot c_{M, I_M, I_M} \\
((S \odot M) \odot I_M) \odot I & & S \odot (I_M \otimes_M M) \\
\alpha_{S \odot M, I_M, I_M} \nearrow & & \searrow f \odot (id_{I_M} \otimes_M id_M) \\
(S \odot M) \odot (I_M \otimes_M I_M) & & f \odot (u \otimes_M id_{I_M}) \quad T \odot (I_M \otimes_M M) \\
\downarrow id_{S \odot M} \odot id_{I_M \otimes_M I_M} & \searrow (f \odot u) \odot id_{I_M} & \downarrow id_T \odot (id_{I_M} \otimes_M u) \\
(S \odot M) \odot (I_M \otimes_M I_M) & & T \odot (I_M \otimes_M N) \\
\alpha_{S \odot M, I_M, I_M} \searrow & & \downarrow id_T \odot c_{M, I_M, N} \\
((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M & & T \odot (N \otimes_M I_M) \\
\downarrow (f \odot u) \odot id_{I_M} \odot id_{I_M} & \nearrow \delta_{T \odot N}^{-1} \odot id_{I_M} & \\
((T \odot N) \odot I_M) \odot I_M & & (T \odot N) \odot I_M
\end{array}
\end{array}$$

commute. $\square$

L'important lemme suivant permet de décomposer les flèches de $\mathbb{S}/\odot$.

Lemme 3.3.11. Soient S, T deux objets de $\mathbb{S}/\odot$ et $[M, N, v] \in Hom_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
S & \xrightarrow{[M, N, v]} & T \\
\eta_{\odot(S, M)}^{-1} \downarrow & & \uparrow \eta_{\odot(T, N)} \\
S \odot M & \xrightarrow{P_{\odot}(v)} & T \odot N
\end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{S}/\odot$.

Démonstration. Nous devons montrer que $[M, N, v] = [M \otimes_M (I_M \otimes_M I_M), (N \otimes_M I_M) \otimes_M I_M, (\delta_{T \odot N}^{-1} \bullet (v \odot id_{I_M})) \bullet \delta_{S \odot M}^{-1}]$. Par construction de $Hom_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$, il suffit de voir que ces deux triplets sont isomorphes dans $\mathbb{M}_S \times_T \mathbb{M}$. Puisque $c_{M, I_M, I_M} = id_{I_M \otimes_M I_M}$, nous déduisons de la compatibilité entre les contraintes

d'associativité et de symétrie que $c_{I_M, I_M \otimes_M I_M} = a_{I_M, I_M, I_M}$. Nous calculons alors que $(\delta_{T \odot N}^{-1} \bullet (v \odot id_{I_M})) \bullet \delta_{S \odot M}^{-1} = \alpha_{T, N \otimes_M I_M, I_M}^{-1} (\alpha_{T, N, I_M}^{-1} \odot id_{I_M}) ((\delta_{T \odot N}^{-1} \odot id_{I_M}) \odot id_{I_M}) ((v \odot id_{I_M}) \odot id_{I_M}) \alpha_{(S \odot M) \odot I_M, I_M, I_M} (\delta_{S \odot M} \odot id_{I_M \otimes_M I_M}) \alpha_{S, M, I_M \otimes_M I_M}$. Nous remarquons par ailleurs que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
S \odot M & \xrightarrow{v} & T \odot N \\
\delta_{S \odot M} \searrow & & \nearrow \delta_{T \odot N}^{-1} \\
(S \odot M) \odot I_M & \xrightarrow{v \odot id_{I_M}} & (T \odot N) \odot I_M \\
\delta_{S \odot M} \odot id_{I_M} \searrow & & \nearrow \delta_{T \odot N}^{-1} \odot id_{I_M} \\
((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M & \xrightarrow{(v \odot id_{I_M}) \odot id_{I_M}} & ((T \odot N) \odot I_M) \odot I_M \\
\delta_{((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M} \downarrow & & \uparrow \delta_{((T \odot N) \odot I_M) \odot I_M}^{-1} \\
(((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M) \odot I_M & \xrightarrow{(v \odot id_{I_M}) \odot id_{I_M} \odot id_{I_M}} & (((T \odot N) \odot I_M) \odot I_M) \odot I_M
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
S \odot M \xrightarrow{\delta_{S \odot M}} (S \odot M) \odot I_M \\
\begin{array}{l}
id_S \odot d_{M \otimes_M I_M} \downarrow \quad \nearrow \alpha_{M, S, M, I_M} \\
S \odot (M \otimes_M I_M) \\
id_S \odot (id_M \otimes_M d_{I_M}) \downarrow \quad id_{S \odot M} \odot d_{M \otimes_M I_M} \nearrow \\
S \odot (M \otimes_M (I_M \otimes_M I_M)) \quad \rightarrow \quad ((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M
\end{array} \\
\begin{array}{l}
\alpha_{S, M, I_M \otimes_M I_M} \nearrow \quad id_{(S \odot M) \odot I_M} \odot d_{M \otimes_M I_M} \nearrow \quad \delta_{((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M} \nearrow \\
(S \odot M) \odot (I_M \otimes_M I_M) \quad \rightarrow \quad ((S \odot M) \odot I_M) \odot (I_M \otimes_M I_M) \\
\delta_{S \odot M} \odot id_{I_M \otimes_M I_M} \nearrow \quad \alpha_{(S \odot M) \odot I_M, I_M, I_M} \nearrow \\
(((S \odot M) \odot I_M) \odot (I_M \otimes_M I_M)) \odot I_M \quad \rightarrow \quad (((S \odot M) \odot I_M) \odot I_M) \odot I_M
\end{array}
\end{array}$$

sont commutatifs. Nous les désignons respectivement par ①, ② et ③. Dès lors la conclusion vient du fait que les flèches $(id_M \otimes_{\mathbb{M}} d_{\mathbb{M}_{I_{\mathbb{M}}}})d_{\mathbb{M}_M}$ et $(d_{\mathbb{M}_N} \otimes_{\mathbb{M}} id_{I_{\mathbb{M}}})d_{\mathbb{M}_{N\mathbb{M}}}$ sont telles que le diagramme

est commutatif. □

Lemme 3.3.12. *Le triple $(\mathbb{S}/\odot, P_\odot, \eta_\odot)$ est un 2-trivialisateur relatif à $\odot$.*

Démonstration. Nous devons montrer que pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout pair d'objets M et P de $\mathbb{M}$, le diagramme

104

est commutatif, ce qui revient à montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\eta_{S,M}^{-1}} & S \odot M \\
 \eta_{S,M \otimes_{\mathbb{M}} P}^{-1} \downarrow & & \uparrow \eta_{S \odot M, P} \\
 S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{P \odot (\alpha_{S,M,P})} & (S \odot M) \odot P.
 \end{array}$$

Par le lemme 3.3.11, cela revient encore à montrer que $[M \otimes_{\mathbb{M}} P, P, \alpha_{S,M,P}] = [M, I_{\mathbb{M}}, \delta_{S \odot M}]$. Pour voir cela, nous commençons par remarquer que les triples $(M \otimes_{\mathbb{M}} P, P, \alpha_{S,M,P})$ et $(M \otimes_{\mathbb{M}} P, P \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, id_{(S \odot M) \odot P} \bullet \delta_{S \odot M})$ sont isomorphes dans $\mathbb{M}_S \times_{S \odot M} \mathbb{M}$. En effet, nous calculons directement que

$$id_{(S \odot M) \odot P} \bullet \delta_{S \odot M} = \alpha_{S \odot M, P, I_{\mathbb{M}}} (id_S \odot c_{M, I_{\mathbb{M}}, P}) \alpha_{S \odot M, I_{\mathbb{M}}, P}^{-1} (\delta_{S \odot M} \odot id_P) \alpha_{S, M, P}$$

et dès lors, les flèches $id_{M \otimes_{\mathbb{M}} P}$ et $d_{M, P}$ sont telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{\alpha_{S, M, P}} & (S \odot M) \odot P & & \\
 \downarrow id_S \odot id_{M \otimes_{\mathbb{M}} P} & & \downarrow id_{S \odot M} \odot d_{M, P} & & \\
 S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \searrow id_S \odot (id_M \otimes_{\mathbb{M}} g_{M, P}) & S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P)) & \xrightarrow{id_{S \odot M} \odot c_{M, I_{\mathbb{M}}, P}} & (S \odot M) \odot (P \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) \\
 \downarrow \alpha_{S, M, P} & \searrow id_S \odot (d_{M, \mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} id_P) & \downarrow id_S \odot a_{M, I_{\mathbb{M}}, P} & \searrow \alpha_{S, M, I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P} & \downarrow id_{S \odot M} \odot c_{M, I_{\mathbb{M}}, P} \\
 (S \odot M) \odot P & & S \odot ((M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}) \otimes_{\mathbb{M}} P) & & (S \odot M) \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P) \\
 & & \downarrow \alpha_{S, M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, P} & & \downarrow id_{S \odot M} \odot c_{M, I_{\mathbb{M}}, P} \\
 & & (S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}})) \odot P & & \\
 & & \downarrow \alpha_{S, M, I_{\mathbb{M}}} \odot id_P & & \downarrow \alpha_{S \odot M, I_{\mathbb{M}}, P}^{-1} \\
 & & ((S \odot M) \odot I_{\mathbb{M}}) \odot P & &
 \end{array}$$

est commutatif. Nous calculons alors que

$$\begin{aligned}
[M \otimes_{\mathbb{M}} P, P, \alpha_{S,M,P}] &= [M \otimes_{\mathbb{M}} P, P \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, id_{(S \odot M) \odot P} \bullet \delta_{S \odot M}] \\
&= [P, P, id_{(S \odot M) \odot P}] \circ_{S, S \odot M, S \odot M} [M, I_{\mathbb{M}}, \delta_{S \odot M}] \\
&= [M, I_{\mathbb{M}}, \delta_{S \odot M}]
\end{aligned}$$

par le lemme 3.3.7. $\square$

Nous énonçons alors le résultat principal de cette section.

Proposition 3.3.13. *Le triple $(\mathbb{S}/\odot, P_{\odot}, \eta_{\odot})$ est un 2-système trivialisant relatif à $\odot$.*

Démonstration. Soit $(\mathbb{X}, X, \chi)$ un 2-trivialisateur relatif à $\odot$. Nous remarquons que pour toute paire d'objets S et T de $\mathbb{S}/\odot$

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{X}}(X(S), X(T)) \\
[M, N, s] &\mapsto X(S) \xrightarrow{\chi_{S,M}^{-1}} X(S \odot M) \xrightarrow{X(s)} X(T \odot N) \xrightarrow{\chi_{T,N}} X(T)
\end{aligned}$$

est une application de $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{X}}(X(S), X(T))$. En effet, si $[M, N, s] = [U, V, t]$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$, alors il existe deux objets P, Q et deux flèches $M \otimes_{\mathbb{M}} P \xrightarrow{f} U \otimes_{\mathbb{M}} Q, N \otimes_{\mathbb{M}} P \xrightarrow{g} V \otimes_{\mathbb{M}} Q$ de $\mathbb{M}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{\alpha_{S,M,P}} & (S \odot M) \odot P & \xrightarrow{s \odot id_P} & (T \odot N) \odot P & \xrightarrow{\alpha_{T,N,P}^{-1}} & T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} P) \\
\downarrow id_S \odot f & & & & & & \downarrow id_T \odot g \\
S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{\alpha_{S,U,Q}} & (S \odot U) \odot Q & \xrightarrow{t \odot id_Q} & (T \odot V) \odot Q & \xrightarrow{\alpha_{T,V,Q}^{-1}} & T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} Q)
\end{array}$$

est commutatif. Dès lors, par la commutativité du diagramme,

$$\begin{array}{ccccc}
& & X(S \odot M) & \xrightarrow{X(s)} & X(T \odot N) \\
& & \downarrow \chi_{S \odot M, P}^{-1} & & \downarrow \chi_{T \odot N, P}^{-1} \\
& & X((S \odot M) \odot P) & \xrightarrow{X(s \odot id_P)} & X((T \odot N) \odot P) \\
\chi_{S, M}^{-1} \nearrow & & \downarrow X(\alpha_{S, M, P}^{-1}) & & \downarrow X(\alpha_{T, N, P}^{-1}) \\
X(S) & & X(S \odot (M \otimes_M P)) & & X(T \odot (N \otimes_M P)) \\
\chi_{S, M \otimes_M P}^{-1} \nearrow & & \downarrow X(id_S \odot f) & & \downarrow X(id_T \odot g) \\
& & X(S \odot (U \otimes_M Q)) & & X(T \odot (V \otimes_M Q)) \\
\chi_{S, U \otimes_M Q}^{-1} \nearrow & & \downarrow X(\alpha_{S, U, Q}) & & \downarrow X(\alpha_{T, V, Q}) \\
& & X((S \odot U) \odot Q) & \xrightarrow{X(t \odot id_Q)} & X((T \odot V) \odot Q) \\
\chi_{S, U}^{-1} \nearrow & & \downarrow \chi_{S \odot U, Q} & & \downarrow \chi_{T \odot V, Q} \\
& & X(S \odot U) & \xrightarrow{X(t)} & X(T \odot V)
\end{array}$$

nous concluons que $\chi_{T, N} X(s) \chi_{S, M}^{-1} = \chi_{T, V} X(t) \chi_{S, U}^{-1}$, ce qui termine de montrer que la relation définie ci-dessus est une application. Nous pouvons alors définir

$$\begin{array}{ccc}
\overline{X} : \mathbb{S}/\odot & \rightarrow & \mathbb{X} \\
\begin{array}{c} S \\ \downarrow [M, N, s] \\ T \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} X(S) \\ \downarrow \chi_{S, M}^{-1} \\ X(S \odot M) \\ \downarrow X(s) \\ X(T \odot N) \\ \downarrow \chi_{T, N} \\ X(T) \end{array}
\end{array}$$

Si R, S, T sont trois objets de $\mathbb{S}/\odot$ et si $[M, N, s] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(R, S)$, $[U, V, t] \in \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot}(S, T)$ sont deux flèches de $\mathbb{S}/\odot$, alors par la commutativité du dia-

gramme

$$\begin{array}{ccc}
X(R) & \xrightarrow{\chi_{R,M \otimes_{\mathbb{M}} U}^{-1}} & X(R \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} U)) \\
\chi_{R,M}^{-1} \downarrow & & \downarrow X(\alpha_{R,M,U}) \\
X(R \odot M) & \xrightarrow{\chi_{R \odot M, U}^{-1}} & X((R \odot M) \odot U) \\
X(s) \downarrow & & \downarrow X(s \odot id_U) \\
X(S \odot N) & \xrightarrow{\chi_{S \odot N, U}^{-1}} & X((S \odot N) \odot U) \\
\chi_{S,N} \downarrow & & \downarrow X(\alpha_{S,N,U}^{-1}) \\
X(S) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi_{S,N \otimes_{\mathbb{M}} U}^{-1}} \\ \xrightarrow{\chi_{S,U \otimes_{\mathbb{M}} N}^{-1}} \end{array} & \begin{array}{c} X(S \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} U)) \\ X(S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} N)) \end{array} \\
\chi_{S,U}^{-1} \downarrow & & \downarrow X(id_S \odot c_{\mathbb{M},U}) \\
X(S \odot U) & \xrightarrow{\chi_{S \odot U, N}^{-1}} & X((S \odot U) \odot N) \\
X(t) \downarrow & & \downarrow X(t \odot id_N) \\
X(T \odot V) & \xrightarrow{\chi_{T \odot V, N}^{-1}} & X((T \odot V) \odot N) \\
\chi_{T,V} \downarrow & & \downarrow X(\alpha_{T,V,N}^{-1}) \\
X(T) & \xleftarrow{\chi_{T,V \otimes_{\mathbb{M}} N}} & X(T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} N))
\end{array}$$

nous voyons directement que $\overline{X}([U, V, t])\overline{X}([M, N, s]) = \overline{X}([M \otimes U, V \otimes N, t \bullet s])$ et donc que $\overline{X}$ préserve la composition des flèches de $\mathbb{S}/\odot$. Par ailleurs, pour tout objet S de $\mathbb{S}/\odot$, nous avons que $\overline{X}([I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}]) = \chi_{S, I_{\mathbb{M}}} X(id_{S \odot I_{\mathbb{M}}}) \chi_{S, I_{\mathbb{M}}}^{-1} = id_{X(S)}$, et donc $\overline{X}$ préserve les flèches identités. Il s'ensuit que $\overline{X}$ est un foncteur. Celui-ci est tel que $\overline{X}P_{\odot} = X$ puisque pour toute flèche $S \xrightarrow{f} T$ de $\mathbb{S}$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\overline{X}(P_{\odot}(f)) &= \chi_{T, I_{\mathbb{M}}} X(f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \chi_{S, I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
&= X(f)
\end{aligned}$$

par naturalité de χ ; celui-ci est également tel que $i_{\overline{X}} * \eta_{\odot} = \chi$ puisque pour tout objet (S, M) de $\mathbb{S} \times \mathbb{M}$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\overline{X}(\eta_{\odot(S, M)}) &= \chi_{S, M} X(\delta_{S \odot M}^{-1}) \chi_{S \odot M, I_{\mathbb{M}}}^{-1} \\
&= \chi_{S, M}
\end{aligned}$$

par la remarque 2.1.7. Clairement, par le lemme 3.3.11, $\overline{X}$ est l'unique foncteur de $\mathbb{S}/\odot$ dans $\mathbb{X}$ possédant ces deux propriétés. Soit alors $(\mathbb{X}, X', \chi')$ un second 2-système trivialisant relatif à $\odot$ (nous désignons par $\overline{X}'$ l'unique foncteur de $\mathbb{S}/\odot$ dans $\mathbb{X}$ tel que $\overline{X}'P_{\odot} = X'$ et $i_{\overline{X}'} * \eta = \chi'$). Soit $\psi : X \Rightarrow X'$ une transformation naturelle telle que $(\psi * i_{\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}}^{-1})\chi = \chi'(\psi * i_{\odot})$. Nous construisons une transformation $\overline{\psi} : \overline{X} \rightarrow \overline{X}'$ définie par la famille de flèches

$$\{\overline{\psi}_S := X(S) \xrightarrow{\psi_S} X'(S)\}_{S \in \text{Ob}(\mathbb{S}/\odot)}.$$

Cette transformation est naturelle. En effet, si $S \xrightarrow{[M,N,s]} T$ est une flèche de $\mathbb{S}/\odot$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(S) & \xrightarrow{\psi_S} & X'(S) \\ \bar{X}([M,N,s]) \downarrow & & \downarrow \bar{X}'([M,N,s]) \\ X(T) & \xrightarrow[\psi_T]{} & X'(T) \end{array}$$

se décompose comme

$$\begin{array}{ccc} X(S) & \xrightarrow{\psi_S} & X'(S) \\ \chi_{S,M}^{-1} \downarrow & & \downarrow \chi'_{S,M} \\ X(S \odot M) & \xrightarrow{\psi_{S \odot M}} & X'(S \odot M) \\ X(s) \downarrow & & \downarrow X'(s) \\ X(T \odot N) & \xrightarrow[\psi_{T \odot N}]{} & X'(T \odot N) \\ \chi_{T,N} \downarrow & & \downarrow \chi'_{T,N} \\ X(T) & \xrightarrow[\psi_T]{} & X'(T) \end{array}$$

et est donc commutatif. Clairement, $\bar{\psi} * i_{P_\odot} = \psi$ puisque $P_\odot$ est l'identité sur les objets de $\mathbb{S}$ et $\bar{\psi}$ est l'unique transformation naturelle entre $\bar{X}$ et $\bar{X}'$ possédant cette propriété puisque $\bar{X}$ et $\bar{X}'$ s'identifient respectivement à X et X' sur les objets de $\mathbb{S}/\odot$. $\square$

Nous allons maintenant montrer que les 2-systèmes trivialisant de 2-actions identitaires sur la symétrie diagonale commutent avec les 2-produits binaires. Soient $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ et $(\odot', \alpha', \delta') : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$ deux 2-actions de $\mathcal{G}rpd$ identitaires sur la symétrie diagonale. Dans ce cas, la 2-action produit $(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')$ est alors également identitaire sur la symétrie diagonale. Considérons alors les 2-systèmes trivialisants $(\mathbb{S}/\odot, P_\odot, \eta_\odot)$, $(\mathbb{T}/\odot', P_{\odot'}, \eta_{\odot'})$, $(\mathbb{S} \times \mathbb{T}/\odot \times \odot', P_{\odot \times \odot'}, \eta_{\odot \times \odot'})$ construits précédemment et l'unique foncteur

$$\overline{P_\odot \times P_{\odot'}} : \mathbb{S} \times \mathbb{T}/\odot \times \odot' \rightarrow \mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot'$$

$$\begin{array}{ccc} (S, T) & & (S, T) \\ \downarrow [(M,N), (M',N'), (f,g)] & \mapsto & \downarrow [(M,M',f), [N,N',g]] \\ (S', T') & & (S', T') \end{array}$$

entre $\mathbb{S} \times \mathbb{T}/\odot \times \odot'$ et $\mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot'$ tel que

$$\overline{P_\odot \times P_{\odot'}} P_{\odot \times \odot'} = P_\odot \times P_{\odot'}$$

et

$$i_{\overline{P_{\odot} \times P_{\odot'}}} * \eta_{\odot \times \odot'} = (\eta_{\odot} \times \eta_{\odot'}) * i_{(\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^1 \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{N}}^1, \Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^2 \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{N}}^2)}.$$

Proposition 3.3.14. $\overline{P_{\odot} \times P_{\odot'}}$ est un isomorphisme de groupoïdes.

Démonstration. Si S, S' sont deux objets de $\mathbb{S}/\odot$ et T, T' sont deux objets de $\mathbb{T}/\odot'$, nous commençons par remarquer que la relation

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot'}((S, T), (S', T')) &\rightarrow \text{Hom}_{(\mathbb{S} \times \mathbb{T})/\odot \times \odot'}((S, T), (S', T')) \\ ([M, M', s], [N, N', t]) &\mapsto [(M, N), (M', N'), (s, t)] \end{aligned}$$

est une application. En effet si $([M, M', s], [N, N', t]) = ([U, U', s'], [V, V', t'])$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot'}((S, T), (S', T'))$, alors il existe deux objets P et Q ainsi que deux flèches $M \otimes_{\mathbb{M}} P \xrightarrow{f} U \otimes_{\mathbb{M}} Q$, $M' \otimes_{\mathbb{M}} P \xrightarrow{g} U' \otimes_{\mathbb{M}} Q$ de $\mathbb{M}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{\alpha_{S, M, P}} & (S \odot M) \odot P & \xrightarrow{s \odot id_P} & (S' \odot M') \odot P & \xrightarrow{\alpha_{S', M', P}^{-1}} & S' \odot (M' \otimes_{\mathbb{M}} P) \\ \downarrow id_S \odot f & & & & & & \downarrow id_{S'} \odot g \\ S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{\alpha_{S, U, Q}} & (S \odot U) \odot Q & \xrightarrow{s' \odot id_Q} & (S' \odot U') \odot Q & \xrightarrow{\alpha_{S', U', Q}^{-1}} & S' \odot (U' \otimes_{\mathbb{M}} Q) \end{array}$$

est commutatif et il existe deux objets X et Y ainsi que deux flèches $N \otimes_{\mathbb{M}} X \xrightarrow{h} V \otimes_{\mathbb{M}} Y$, $N' \otimes_{\mathbb{M}} X \xrightarrow{k} V' \otimes_{\mathbb{M}} Y$ de $\mathbb{N}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} X) & \xrightarrow{\alpha_{T, N, X}} & (T \odot N) \odot X & \xrightarrow{t \odot id_X} & (T' \odot N') \odot X & \xrightarrow{\alpha_{T', N', X}^{-1}} & T' \odot (N' \otimes_{\mathbb{M}} X) \\ \downarrow id_T \odot h & & & & & & \downarrow id_{T'} \odot k \\ T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} Y) & \xrightarrow{\alpha_{T, V, Y}} & (T \odot V) \odot Y & \xrightarrow{t' \odot id_Y} & (T' \odot V') \odot Y & \xrightarrow{\alpha_{T', V', Y}^{-1}} & T' \odot (V' \otimes_{\mathbb{M}} Y) \end{array}$$

est commutatif. Mais alors $(P, X), (Q, Y), (M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} X) \xrightarrow{(f, h)} (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, V \otimes_{\mathbb{M}} Y), (M' \otimes_{\mathbb{M}} P, N' \otimes_{\mathbb{M}} X) \xrightarrow{(g, k)} (U' \otimes_{\mathbb{M}} Q, V' \otimes_{\mathbb{M}} Y)$ sont respectivement deux objets et deux flèches de $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})/\odot \times \odot'$ telles que le produit cartésien des deux diagrammes précédemment cités est commutatif. Ainsi $[(M, N), (M', N'), (s, t)] = [(U, V), (U', V'), (s', t')]$. Nous définissons alors

$$\begin{array}{ccc} (\overline{P_{\odot} \times P_{\odot'}})^{-1} : \mathbb{S}/\odot \times \mathbb{T}/\odot' & \rightarrow & (\mathbb{S} \times \mathbb{T})/\odot \times \odot' \\ (S, T) & & (S, T) \\ \downarrow ([M, M', s], [N, N', t]) & \mapsto & \downarrow [(M, N), (M', N'), (s, t)] \\ (S', T') & & (S', T') \end{array}$$

Clairement, $(\overline{P_\odot \times P_{\odot'}})^{-1}$ préserve les flèches identités. Par ailleurs, si $S \odot M \xrightarrow{s} S' \odot M'$ et $S' \odot M'' \xrightarrow{s'} S'' \odot M'''$ sont deux flèches de $\mathbb{S}$ et si $T \odot' N \xrightarrow{t} T' \odot' N'$ et $T' \odot' N'' \xrightarrow{t'} T'' \odot' N'''$ sont deux flèches de $\mathbb{T}$, alors $(s' \bullet s, t' \bullet t) = (s', t') \bullet (s, t)$ dans $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ et il suit que $(\overline{P_\odot \times P_{\odot'}})^{-1}$ préserve la composition des flèches. Ainsi, $(\overline{P_\odot \times P_{\odot'}})^{-1}$ est un foncteur et il est alors évident que $\overline{P_\odot \times P_{\odot'}}$ et que $(\overline{P_\odot \times P_{\odot'}})^{-1}$ sont deux isomorphismes de catégories inverses l'un de l'autre. $\square$

3.4 Réduction de 2-actions

Définition 3.4.1. Soient $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ et $(\odot', \alpha', \delta') : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux 2-actions, respectivement d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ et d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ sur un groupoïde $\mathbb{T}$. Un 1-morphisme de 2-actions est la donnée d'un triple $(P, (F, f, f_I), \eta)$ où:

1. $P : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ est un foncteur;
2. $(F, f, f_I) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ est un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques;
3. $\eta : P \odot \Rightarrow \odot'(P \times F)$ est un isomorphisme naturel tel que pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout objet M et N de $\mathbb{M}$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
P(S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} N)) & \xrightarrow{P(\alpha_{S, M, N})} & P((S \odot M) \odot N) \\
\eta_{S, M \otimes_{\mathbb{M}} N} \downarrow & & \downarrow \eta_{S \odot M, N} \\
P(S) \odot' F(M \otimes_{\mathbb{M}} N) & & P(S \odot M) \odot' F(N) \\
id_{P(S)} \odot' f_{M, N}^{-1} \downarrow & & \downarrow \eta_{S, M} \odot' id_{F(N)} \\
P(S) \odot' (F(M) \otimes_{\mathbb{N}} F(N)) & \xrightarrow{\alpha'_{P(S), F(M), F(N)}} & (P(S) \odot' F(M)) \odot' F(N)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
P(S) & \xrightarrow{P(\delta_S)} & P(S \odot I_{\mathbb{M}}) \\
\delta'_{P(S)} \downarrow & & \downarrow \eta_{S, I_{\mathbb{M}}} \\
P(S) \odot' I_{\mathbb{N}} & \xrightarrow{id_{P(S)} \odot' f_I} & P(S) \odot' F(I_{\mathbb{M}})
\end{array}$$

sont commutatifs.

Si $(P, (F, f, f_I), \eta)$ et $(Q, (G, g, g_I), \theta) : (\odot, \alpha, \delta) \rightarrow (\odot', \alpha', \delta')$ sont deux 1-morphismes de 2-actions, un 2-morphisme de 2-actions est donné par un couple

(ρ, ϕ) , où $\rho : P \Rightarrow Q$ et $\phi : F \Rightarrow G$ sont deux isomorphismes naturels tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P \odot & \xRightarrow{\eta} & \odot'(P \times F) \\ \rho * i_{\odot} \downarrow & & \downarrow i_{\odot'} * (\rho \times \phi) \\ Q \odot & \xRightarrow{\theta} & \odot'(Q \times G) \end{array}$$

est commutatif.

Remarque 3.4.2. Les 2-actions, les 1-morphismes de 2-actions ainsi que les 2-morphismes de 2-actions forment une 2-catégorie; la 1-composition ainsi que les 2-compositions horizontales et verticales sont définies dans le sens le plus évident. Nous laissons les vérifications usuelles au lecteur.

Définition 3.4.3. Soit $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ une 2-action d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ et soit $\mathcal{E}$ une classe d'endomorphismes de $\mathbb{S}$. Une 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$ est la donnée d'un couple $\left(((\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}) : \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{M}^{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}}), (P^{\mathcal{E}}, (F^{\mathcal{E}}, f^{\mathcal{E}}, f_I^{\mathcal{E}}), \eta^{\mathcal{E}}) \right)$, où:

1. $(\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}) : \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{M}^{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}}$ est une 2-action;
2. $(P^{\mathcal{E}}, (F^{\mathcal{E}}, f^{\mathcal{E}}, f_I^{\mathcal{E}}), \eta^{\mathcal{E}}) : (\odot, \alpha, \delta) \rightarrow (\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}})$ est un 1-morphisme de 2-actions tel que pour tout $(A \xrightarrow{\epsilon} A) \in \mathcal{E}$, $P^{\mathcal{E}}(\epsilon) = id_{P^{\mathcal{E}}(A)}$.

Cette 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$ est dite *universelle* si pour toute 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$ $\left(((\square, \beta, \gamma) : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}), (Q, (G, g, g_I), \zeta) \right)$, il existe un unique 1-morphisme de 2-actions noté $(\overline{Q}, (\overline{G}, \overline{g}, \overline{g}_I), \overline{\zeta}) : (\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}) \rightarrow (\square, \beta, \gamma)$ entre $(\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}})$ et $(\square, \beta, \gamma)$ tel que

$$(\overline{Q}, (\overline{G}, \overline{g}, \overline{g}_I), \overline{\zeta}) (P^{\mathcal{E}}, (F^{\mathcal{E}}, f^{\mathcal{E}}, f_I^{\mathcal{E}}), \eta^{\mathcal{E}}) = (Q, (G, g, g_I), \zeta);$$

de plus, si $\left(((\square, \beta, \gamma) : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}), (Q', (G', g', g'_I), \zeta') \right)$ est une autre 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$ et $(\rho, \phi) : (Q, (G, g, g_I), \zeta) \Rightarrow (Q', (G', g', g'_I), \zeta')$ un 2-morphisme de 2-actions, alors il existe un unique 2-morphisme de 2-actions noté $(\overline{\rho}, \overline{\phi}) : (\overline{Q}, (\overline{G}, \overline{g}, \overline{g}_I), \overline{\zeta}) \Rightarrow (\overline{Q}', (\overline{G}', \overline{g}', \overline{g}'_I), \overline{\zeta}')$ entre $(\overline{Q}, (\overline{G}, \overline{g}, \overline{g}_I), \overline{\zeta})$ et $(\overline{Q}', (\overline{G}', \overline{g}', \overline{g}'_I), \overline{\zeta}')$ tel que

$$(\overline{\rho}, \overline{\phi}) * (i_{P^{\mathcal{E}}}, i_{F^{\mathcal{E}}}) = (\rho, \phi).$$

Étant donnée une 2-action $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ et une classe $\mathcal{E}$ d'endomorphismes de $\mathbb{S}$, nous introduisons les définitions suivantes afin de construire une 2-action réduite universelle relativement à $\mathcal{E}$.

Définition 3.4.4. Soient S et T deux objets de $\mathbb{S}$ et $s, t \in \text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T)$. Nous dirons que s est strictement compris dans t relativement à $\mathcal{E}$ et nous noterons $s <_{S,T}^{\mathcal{E}} t$ s'il existe un naturel non nul n , n objets $S_1, S_2, \dots, S_n$ de $\mathbb{S}$, $n+1$ flèches $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}$ de $\mathbb{S}$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ (en notant $S_0 = S, S_{n+1} = T$) telles que

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

et n endomorphismes $a_i : S_i \rightarrow S_i$ de $\mathbb{S}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un endomorphisme ϵ_i de $\mathbb{S}$ qui est tel que $\epsilon_i \in \mathcal{E}$ ou $\epsilon_i^{-1} \in \mathcal{E}$, de sorte que $a_i = \epsilon_i$ ou il existe un naturel non nul n_i et n_i objets $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in_i}$ de $\mathbb{M}$ tels que $a_i = \left(\dots ((\epsilon_i \odot id_{M_{i1}}) \odot id_{M_{i2}}) \odot \dots \right) \odot id_{M_{in_i}}$. Nous dirons que s est compris dans t relativement à $\mathcal{E}$ et nous noterons $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$ si $s = t$ ou si $s <_{S,T}^{\mathcal{E}} t$.

Remarque 3.4.5. Pour aider à la compréhension de la définition précédente, les deux morphismes

$$s := S \xrightarrow{s_0} (E_1 \odot M_1) \odot M_2 \xrightarrow{s_1} E_2 \xrightarrow{s_2} T$$

$t := S \xrightarrow{s_0} (E_1 \odot M_1) \odot M_2 \xrightarrow{(\epsilon_1^{-1} \odot id_{M_1}) \odot id_{M_2}} (E_1 \odot M_1) \odot M_2 \xrightarrow{s_1} E_2 \xrightarrow{\epsilon_2} E_2 \xrightarrow{s_2} T$, où $E_1 \xrightarrow{\epsilon_1} E_1, E_2 \xrightarrow{\epsilon_2} E_2 \in \mathcal{E}$ et où M_1, M_2 sont deux objets de $\mathbb{M}$, sont un exemple de deux morphismes tels que $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$. Par rapport à la définition précédente, il s'agit d'un cas particulier où $n = 2, n_1 = 2, n_2 = 0$.

Proposition 3.4.6. Soient R, S et T trois objets de $\mathbb{S}$, u et v deux éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(R, S)$, r, s , et t trois éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T)$, $M \xrightarrow{f} N$ un morphisme de $\mathbb{M}$ et $S' \xrightarrow{\epsilon} S'$ un élément de $\mathcal{E}$. Les propriétés suivantes sont satisfaites:

1. $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} s$;
2. si $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$, alors $t \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} s$;
3. si $r \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} s$ et $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$, alors $r \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$;
4. si $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$ et $u \leq_{R,S}^{\mathcal{E}} v$, alors $su \leq_{R,T}^{\mathcal{E}} tv$;
5. si $s \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$, alors $s \odot f \leq_{S \odot M, T \odot N}^{\mathcal{E}} t \odot f$;
6. $id_{S'} \leq_{S',S'}^{\mathcal{E}} \epsilon$.

Démonstration. 1. Par définition, il est clair que s est compris à s relativement à $\mathcal{E}$.

2. Si $s = t$, le résultat est clair. Sinon, soient

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

deux décompositions comme dans la définition 3.4.4. Dans ce cas

$$t = (s_n a_n)(s_{n-1} a_{n-1}) \dots (s_1 a_1) s_0$$

$$s = (s_n a_n) a_n^{-1} (s_{n-1} a_{n-1}) a_{n-1}^{-1} \dots (s_1 a_1) a_1^{-1} s_0$$

sont également deux telles décompositions et $t \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} s$.

3. Si $r = s$ ou $s = t$, alors le résultat est clair. Sinon, soient

$$r = r_m r_{m-1} \dots r_1 r_0$$

$$s = r_m b_m r_{m-1} b_{m-1} \dots r_1 b_1 r_0$$

et

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

deux paires de décompositions comme dans la définition 3.4.4. Dans ce cas

$$r = s_n s_{n-1} \dots s_1 (s_0 s^{-1} r_m) r_{m-1} \dots r_1 r_0$$

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 (s_0 s^{-1} r_m) b_m r_{m-1} b_{m-1} \dots r_1 b_1 r_0$$

sont également deux telles décompositions et $r \leq_{S,T}^{\mathcal{E}} t$.

4. Quatre cas sont à envisager. Si $s = t$ et $u = v$, alors $su = tv$ et le résultat est clair. Si $s \neq t$ et $u = v$, alors soient

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

deux décompositions comme dans la définition 3.4.4. Dans ce cas

$$su = s_n s_{n-1} \dots s_1 (s_0 u)$$

$$tv = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 (s_0 u)$$

sont également deux telles compositions et $su \leq_{R,T}^{\mathcal{E}} tv$. Le cas où $s = t$ et $u \neq v$ se démontre de la même façon. Si $s \neq t$ et $u \neq v$, alors par ce qui précède, nous savons que $su \leq_{R,T}^{\mathcal{E}} tu$ et que $tu \leq_{R,T}^{\mathcal{E}} tv$. Dès lors, par 3.4.6.3, nous trouvons que $su \leq_{R,T}^{\mathcal{E}} tv$.

5. Si $s = t$, le résultat est clair. Sinon, soient

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

deux décompositions comme dans la définition 3.4.4. Dans ce cas

$$s \odot f = (s_n \odot id_N)(s_{n-1} \odot id_N) \dots (s_1 \odot id_N)(s_0 \odot f)$$

$$t \odot f = (s_n \odot id_N)(a_n \odot id_N)(s_{n-1} \odot id_N) \dots (s_1 \odot id_N)(a_1 \odot id_N)(s_0 \odot f)$$

sont également deux telles compositions et $s \odot f \leq_{S \odot M, T \odot N}^{\mathcal{E}} t \odot f$

6. Le résultat découle directement des deux décompositions

$$id_{s'} = id_{s'} id_{s'}$$

$$\epsilon = (id_{s'}) (\epsilon) (id_{s'}).$$

□

Il suit de 3.4.6.1, de 3.4.6.2 et de 3.4.6.3 que pour chaque paire d'objets S et T de $\mathbb{S}$, $\leq_{S,T}^{\mathcal{E}}$ est une relation d'équivalence sur $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T)$. De plus, en vertu de 3.4.6.4, la famille de relations d'équivalence $(\leq_{S,T}^{\mathcal{E}})$ est compatible avec la loi de composition de $\mathbb{S}$. Nous définissons dès lors un le groupoïde $\mathbb{S}^{\mathcal{E}}$ de la façon suivante: les objets de $\mathbb{S}^{\mathcal{E}}$ sont les objets de $\mathbb{S}$, et pour toute paire d'objets S et T de $\mathbb{S}$, $\text{Hom}_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}}}(S, T) = \text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T) / \leq_{S,T}^{\mathcal{E}}$ (si $s \in \text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T)$, nous noterons $[s]$ sa classe d'équivalence dans $\text{Hom}_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}}}(S, T)$), la composition des flèches et les flèches identités étant celles induites par la composition et les flèches identités de $\mathbb{S}$. Dès lors, en vertu de 3.4.6.5, nous avons une 2-action

$$\begin{array}{ccc} (\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}) : \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{M} & \rightarrow & \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \\ \begin{array}{ccc} (S, M) & & S \odot M \\ ([s], f) \downarrow & \mapsto & \downarrow [s \odot f] \\ (T, N) & & T \odot N \end{array} \end{array}$$

où pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout objet M et N de $\mathbb{N}$, $\alpha_{S,M,N}^{\mathcal{E}} = [\alpha_{S,M,N}]$ et $\delta_S^{\mathcal{E}} = [\delta_S]$. Notons également que nous avons un foncteur

$$\begin{array}{ccc} P^{\mathcal{E}} : \mathbb{S} & \rightarrow & \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \\ \begin{array}{ccc} S & & S \\ s \downarrow & \mapsto & \downarrow [s] \\ T & & T \end{array} \end{array}$$

et par définition de $\odot^{\mathcal{E}}$, celui-ci est tel que

$$P^{\mathcal{E}} \odot = \odot^{\mathcal{E}}(P^{\mathcal{E}} \times Id_{\mathbb{M}}).$$

Ainsi, nous déduisons des définitions de $\alpha^{\mathcal{E}}$ et de $\delta^{\mathcal{E}}$ que

$$(P^{\mathcal{E}}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}} \odot}) : (\odot, \alpha, \delta) \rightarrow (\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}})$$

est un 1-morphisme de 2-actions. Dès lors, puisque par la proposition 3.4.6.6, $P^{\mathcal{E}}(\epsilon) = id_{S'}$ pour tout $S' \xrightarrow{\epsilon} S' \in \mathcal{E}$, nous concluons que

$$\left((\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}), (P^{\mathcal{E}}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}} \odot}) \right)$$

est une 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$.

Théorème 3.4.7. *La 2-action réduite*

$$\left((\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}), (P^{\mathcal{E}}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}} \odot}) \right)$$

construite précédemment est universelle.

Démonstration. Soit $\left(((\square, \beta, \gamma) : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}), (Q, (G, g, g_I), \zeta) \right)$ une 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$. Nous commençons par remarquer que si S et T sont deux objets de $\mathbb{S}$ et si s et t sont deux éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, T)$ tels que $f \leq_{S, T}^{\mathcal{E}} g$, alors $Q(s) = Q(t)$. En effet, si $s = t$, cela est évident. Sinon, nous pouvons considérer une décomposition

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

$$t = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

comme dans la définition 3.4.4 et nous remarquons immédiatement

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(s_n)Q(a_n)Q(s_{n-1})Q(a_{n-1})\dots Q(s_1)Q(a_1)Q(s_0) \\ &= Q(s_n)id_{A_n}Q(s_{n-1})id_{A_{n-1}}\dots Q(s_1)id_{A_1}Q(s_0) \\ &= Q(s). \end{aligned}$$

Nous définissons alors

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}} & \rightarrow & \mathbb{T} \\ \begin{array}{c} S \\ \downarrow [s] \\ T \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} Q(S) \\ \downarrow Q(s) \\ Q(T) \end{array} \end{array}$$

qui est tel que $\overline{Q}P^{\mathcal{E}} = Q$. Il est par ailleurs clair que $\overline{Q}$ est un foncteur. Notons également qu'il existe une transformation

$$\bar{\zeta} : \overline{Q} \odot^{\mathcal{E}} \Rightarrow \square(\overline{Q} \times G)$$

définie par la famille de flèches

$$\{\bar{\zeta}_{(S,M)} : Q(S \odot^{\mathcal{E}} M) \xrightarrow{\zeta_{(S,M)}} Q(S) \square G(M)\}_{(S,M) \in \text{Ob}(\mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{M})}$$

Par naturalité de ζ et au vu de la définition de $\bar{Q}$, il est clair que $\bar{\zeta}$ est naturelle. Il est également facile de montrer que $(\bar{Q}, (G, g, g_I), \bar{\zeta}) : (\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}) \rightarrow (\square, \beta, \gamma)$ est l'unique 1-morphisme de 2-actions entre $(\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}})$ et $(\square, \beta, \gamma)$ tel que

$$(\bar{Q}, (G, g, g_I), \bar{\zeta})(P^{\mathcal{E}}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}} \odot}) = (Q, (G, g, g_I), \zeta).$$

De plus, si $((\square, \beta, \gamma) : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}), (Q', (G', g', g'_I), \zeta')$ est une autre 2-action réduite relativement à $\mathcal{E}$ et si $(\rho, \phi) : (Q, (G, g, g_I), \zeta) \Rightarrow (Q', (G', g', g'_I), \zeta')$ est un 2-morphisme de 2-actions, alors il existe une transformation

$$\bar{\rho} : \bar{Q} \Rightarrow \bar{Q}'$$

définie par la famille de flèches

$$\{\bar{\rho}_S : Q(S) \xrightarrow{\rho_S} Q'(S)\}_{S \in \text{Ob}(\mathbb{S}^{\mathcal{E}})}.$$

Par définition de $\bar{Q}$ et par naturalité de ρ , il est clair que $\bar{\rho}$ est naturelle. Dès lors, puisque pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout objet M de $\mathbb{M}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{Q}(S \odot M) = Q(S \odot M) & \xrightarrow{\zeta_{S,M} = \bar{\zeta}_{S,M}} & Q(S) \square G(M) = \bar{Q}(S) \square G(M) \\ \rho_{S \odot M} = \bar{\rho}_{S \odot M} \downarrow & & \downarrow \rho_S \square \phi_M = \bar{\rho}_S \square \phi_M \\ \bar{Q}'(S \odot M) = Q'(S \odot M) & \xrightarrow{\zeta'_{S,M} = \bar{\zeta}'_{S,M}} & Q'(S) \square G'(M) = \bar{Q}'(S) \square G'(M) \end{array}$$

est commutatif, le couple $(\bar{\rho}, \phi) : (\bar{Q}, (G, g, g_I), \bar{\zeta}) \Rightarrow (\bar{Q}', (G', g', g'_I), \bar{\zeta}')$ est un 2-morphisme de 2-actions. Celui-ci est tel que $(\bar{\rho} * i_{P^{\mathcal{E}}}, \phi * i_{Id_{\mathbb{M}}}) = (\rho, \phi)$ puisque $P^{\mathcal{E}}$ est identitaire sur les objets de $\mathbb{S}$. Il est clair que $(\bar{\rho}, \phi)$ est l'unique 2-morphisme entre $(\bar{Q}, (G, g, g_I), \bar{\zeta})$ et $(\bar{Q}', (G', g', g'_I), \bar{\zeta}')$ possédant cette propriété. $\square$

Nous allons maintenant montrer que les 2-actions réduites universelles relativement à des classes d'endomorphismes données préservent les 2-produits, moyennant une certaine condition sur les classes d'endomorphismes que nous expliciterons plus loin. Soient $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ et $(\odot', \alpha', \delta') : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$ deux 2-actions, respectivement d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{G}rpd$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ et d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ interne à $\mathcal{G}rpd$ sur un groupoïde $\mathbb{T}$. Soient également $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, respectivement une classe d'endomorphismes de $\mathbb{S}$ et une classe d'endomorphismes de $\mathbb{T}$. De là, nous pouvons considérer la 2-action produit

$(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta') : (\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \times (\mathbb{M} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ et sa 2-action réduite universelle relativement à $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$,

$$\left((\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta'), (P^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}, (Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{N}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'} \odot \times \odot'}) \right).$$

Nous considérons également les 2-actions réduites universelles relativement à $\mathcal{E}$ et à $\mathcal{E}'$,

$$\begin{aligned} & \left((\odot^{\mathcal{E}}, \alpha^{\mathcal{E}}, \delta^{\mathcal{E}}), (P^{\mathcal{E}}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}} \odot}) \right) \\ & \left((\odot'^{\mathcal{E}'}, \alpha'^{\mathcal{E}'}, \delta'^{\mathcal{E}'}), (P^{\mathcal{E}'}, (Id_{\mathbb{N}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}'} \odot'}) \right). \end{aligned}$$

Il est alors aisé de montrer que le couple

$$\left((\odot^{\mathcal{E}} \times \odot'^{\mathcal{E}'}, \alpha^{\mathcal{E}} \times \alpha'^{\mathcal{E}'}, \delta^{\mathcal{E}} \times \delta'^{\mathcal{E}'}), (P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}, Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{N}}, i_{(P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}')} \odot^{\mathcal{E}} \times \odot'^{\mathcal{E}'}}) \right)$$

est une 2-action réduite relativement à $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$. En vertu du théorème 3.4.7, il existe un unique morphisme de 2-actions

$$(\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}}), Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{N}}, i_{\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}} \odot^{\mathcal{E}} \times \odot'^{\mathcal{E}'}})$$

de $(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}$ à $(\odot^{\mathcal{E}} \times \odot'^{\mathcal{E}'}, \alpha^{\mathcal{E}} \times \alpha'^{\mathcal{E}'}, \delta^{\mathcal{E}} \times \delta'^{\mathcal{E}'})$ tel que $\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}} P^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'} = P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}$. Au vu de la preuve du théorème 3.4.7, nous savons que $\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}}$ peut se décrire comme

$$\begin{array}{ccc} \overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}} : (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'} & \rightarrow & \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}'} \\ \begin{array}{c} (S, T) \\ \downarrow [(s, t)] \\ (S', T') \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} (S, T) \\ \downarrow ([s], [t]) \\ (S', T') \end{array} \end{array}$$

Avant de démontrer le dernier résultat de cette section, nous introduisons la définition suivante

Définition 3.4.8. Soit $\mathbb{S}$ un groupoïde. Une classe d'endomorphismes $\mathcal{E}$ de $\mathbb{S}$ est dite *étirante* si pour tout objet S de $\mathbb{S}$, il existe un objet E de $\mathbb{S}$ tel que $id_E \in \mathcal{E}$ et il existe un isomorphisme $f : S \rightarrow E$

Proposition 3.4.9. Si les classes d'endomorphismes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont étirantes, alors le 1-morphisme de 2-actions $(\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}}), Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{N}}, i_{\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}} \odot^{\mathcal{E}} \times \odot'^{\mathcal{E}'}})$ construit ci-dessus est un 1-isomorphisme de 2-actions.

Démonstration. Soient S, S' deux objets de $\mathbb{S}$ et T, T' deux objets de $\mathbb{T}$. Soient également $s, s' \in \text{Hom}_{\mathbb{S}}(S, S')$ et $t, t' \in \text{Hom}_{\mathbb{S}}(T, T')$ tels que $[s] = [s']$ dans $\mathbb{S}^{\mathcal{E}}$ et $[t] = [t']$ dans $\mathbb{T}^{\mathcal{E}'}$. Nous allons commencer par montrer que dans ce cas, $[(s, t)] = [(s', t')]$ dans $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}$. Il y a quatre cas à considérer.

Cas 1. Si $s = s'$ et $t = t'$, le résultat est clair.

Cas 2. Si $s \neq s'$ et $t = t'$, alors soient

$$s = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

$$s' = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

deux décompositions comme dans la définition 3.4.4. Puisque $\mathcal{E}'$ est étirante, il existe un objet E de $\mathbb{T}$ tel que $id_E \in \mathcal{E}$ et un isomorphisme $T \xrightarrow{f} E$ de $\mathbb{T}$. Si m est un naturel, nous noterons

$$\begin{aligned} f_m &:= T \xrightarrow{\delta'_T} T \odot' I \xrightarrow{\delta'_{T \odot' I_{\mathbb{N}}}} (T \odot' I_{\mathbb{N}}) \odot' I_{\mathbb{N}} \xrightarrow{\delta'_{(T \odot' I_{\mathbb{N}}) \odot' I_{\mathbb{N}}}} \dots \rightarrow \\ &\left(\dots \underbrace{((T \odot' I_{\mathbb{N}}) \odot' I_{\mathbb{N}}) \dots}_{m \text{ fois}} \odot' I_{\mathbb{N}} \xrightarrow{\left(\dots ((f \odot' id_{I_{\mathbb{N}}}) \odot' id_{I_{\mathbb{N}}}) \dots \right) \odot' id_{I_{\mathbb{N}}}} \left(\dots ((E \odot' I_{\mathbb{N}}) \odot' I_{\mathbb{N}}) \dots \right) \odot' I_{\mathbb{N}} \right. \\ &\quad \left. \tilde{a}_m := \left(\dots ((id_E \odot' id_{I_{\mathbb{N}}}) \odot' id_{I_{\mathbb{N}}}) \dots \right) \odot' id_{I_{\mathbb{N}}} \right. \end{aligned}$$

(par convention, $f_0 = f$ et $\epsilon_0 = \epsilon$). Il est clair, par fonctorialité de $\odot'$, que $f_m^{-1} \epsilon_m f_m = id_T$. Rappelons que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe un endomorphisme $\epsilon_i \in \mathcal{E}$, un naturel n_i et n_i objets $M_{i,1}, M_{i,2}, \dots, M_{i,n_i}$ de $\mathbb{M}$ tels que

$$a_i = \left(\dots ((\epsilon_i \odot id_{M_{i,1}}) \odot id_{M_{i,2}}) \dots \right) \odot id_{M_{i,n_i}}$$

(par convention, $a_i = \epsilon_i$ si $n_i = 0$). Dè lors,

$$\begin{aligned} (s, t) &= (s_n, t f_{n_n}^{-1})(s_{n-1}, f_{n_n} f_{n_{n-1}}^{-1}) \dots (s_1, f_{n_2} f_{n_1}^{-1})(s_0, f_{n_1}) \\ (s', t) &= (s_n, t f_{n_n}^{-1})(a_n, \tilde{a}_{n_n})(s_{n-1}, f_{n_n} f_{n_{n-1}}^{-1})(a_{n-1}, \tilde{a}_{n_{n-1}}) \dots (s_1, f_{n_2} f_{n_1}^{-1})(a_1, \tilde{a}_{n_1})(s_0, f_{n_1}) \end{aligned}$$

sont deux décompositions comme dans la définition 3.4.4 et $[(s, t)] = [(s', t)] = [(s', t')]$ dans $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}$.

Cas 3. Si $s = s'$ et $t \neq t'$, alors nous montrons de façon similaire que $[(s, t)] = [(s', t')]$ dans $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}$ en utilisant le fait que $\mathcal{E}$ est étirante.

Cas 4. Si $s \neq s'$ et $t \neq t'$, alors par ce qui précède, nous savons que $[(s, t)] = [(s', t)]$ et que $[(s', t)] = [(s', t')]$ dans $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}$, et donc que $[(s, t)] = [(s', t')]$ dans $(\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}$ par transitivité.

Nous pouvons alors construire

$$\begin{array}{ccc} (\overline{P^{\mathcal{E}} \times P^{\mathcal{E}'}})^{-1} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}'} & \rightarrow & (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'} \\ \begin{array}{c} (S, T) \\ \downarrow ([s], [t]) \\ (S', T') \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} (S, T) \\ \downarrow [(s, t)] \\ (S', T') \end{array} \end{array}$$

Il est clair que $(\overline{P^\mathcal{E} \times P^{\mathcal{E}'}})^{-1}$ est un foncteur et que celui-ci est l'isomorphisme inverse de $\overline{P^\mathcal{E} \times P^{\mathcal{E}'}}$. Il est alors aisé de vérifier que

$$((\overline{P^\mathcal{E} \times P^{\mathcal{E}'}})^{-1}, Id_{\mathbb{M}} \times Id_{\mathbb{N}}, i_{\overline{(P^\mathcal{E} \times P^{\mathcal{E}'})^{-1} \odot^\mathcal{E} \times \odot^{\mathcal{E}'}}})$$

est un morphisme de 2-actions ayant $(\odot^\mathcal{E} \times \odot^{\mathcal{E}'}, \underline{\alpha^\mathcal{E} \times \alpha'^{\mathcal{E}'}, \delta^\mathcal{E} \times \delta'^{\mathcal{E}'}})$ pour domaine et $(\underline{\odot \times \odot'^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}, \alpha \times \alpha'^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}, \delta \times \delta'^{\mathcal{E} \times \mathcal{E}'}})$ pour codomaine. $\square$

3.5 2-systèmes trivialisants dans $\mathcal{Grpd}$

Soit $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ une 2-action d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$. Nous considérons la classe $\mathcal{E}_\odot$ d'endomorphismes de $\mathbb{S}$ définie par

$$\mathcal{E}_\odot := \{id_S \odot (c_{\mathbb{M}, M, M}) | S \in \text{Ob}(\mathbb{S}), M \in \text{Ob}(\mathbb{M})\}.$$

Lemme 3.5.1. *La classe d'endomorphismes $\mathcal{E}_\odot$ est étirante.*

Démonstration. Pour tout objet S de $\mathbb{S}$, nous avons un isomorphisme $S \xrightarrow{\delta_S} S \odot I_{\mathbb{M}} \xrightarrow{id_S \odot d_{\mathbb{M}, I_{\mathbb{M}}}} S \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}})$ et $id_S \odot c_{\mathbb{M}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}} \in \mathcal{E}_\odot$. La conclusion vient alors du fait que $id_S \odot c_{\mathbb{M}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}} = id_{S \odot (I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}})}$ puisque dans tout 2-monoïde symétrique, $c_{\mathbb{M}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}} = id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}$. $\square$

Soit alors $((\odot^{\mathcal{E}_\odot}, \alpha^{\mathcal{E}_\odot}, \delta^{\mathcal{E}_\odot}), (P^{\mathcal{E}_\odot}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{P^{\mathcal{E}_\odot} \odot}))$ la 2-action réduite universelle relative à $\mathcal{E}_\odot$ construite dans la section précédente. Puisque $\odot^{\mathcal{E}_\odot}$ est identitaire sur la symétrie diagonale, nous pouvons considérer $(\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}})$ le 2-système trivialisant relatif à $\odot^{\mathcal{E}_\odot}$ construit à la section 3.3

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(\odot, \alpha, \delta)} & \mathbb{S} \\ P^{\mathcal{E}_\odot} \times Id_{\mathbb{M}} \downarrow & & \downarrow P^{\mathcal{E}_\odot} \\ \mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{(\odot^{\mathcal{E}_\odot}, \alpha^{\mathcal{E}_\odot}, \delta^{\mathcal{E}_\odot})} & \mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} \xrightarrow{P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}}} \mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot} \end{array} \quad , \eta : P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \odot^{\mathcal{E}_\odot} \Rightarrow P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \Pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot}, \mathbb{M}}^1.$$

Remarquons que puisque $P^{\mathcal{E}_\odot} \Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 = \Pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot}, \mathbb{M}}^1 (P^{\mathcal{E}_\odot} \times Id_{\mathbb{M}})$, le triple $(\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} P^{\mathcal{E}_\odot}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} * i_{P^{\mathcal{E}_\odot} \times Id_{\mathbb{M}}})$ est un 2-trivialisateur de $\odot$. Nous pouvons alors énoncer et démontrer le résultat central de cette section.

Théorème 3.5.2. *$(\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} P^{\mathcal{E}_\odot}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} * i_{P^{\mathcal{E}_\odot} \times Id_{\mathbb{M}}})$ est un 2-système trivialisant relatif à $\odot$.*

Démonstration. Soit $(\mathbb{T}, T, \tau)$ un 2-trivialisateur de $\odot$. Celui-ci induit un 1-morphisme de 2-actions

$$(T, Id_{\mathbb{M}}, \tau) : (\mathbb{S} \times \mathbb{M} \xrightarrow{(\odot, \alpha, \delta)} \mathbb{S}) \rightarrow (\mathbb{T} \times \mathbb{M} \xrightarrow{(\Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1, id, id)} \mathbb{T})$$

puisque pour tout objet S de $\mathbb{S}$ et tout objet M et N de $\mathbb{M}$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T(S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} N)) & \xrightarrow{T(\alpha_{S, M, N})} & T((S \odot M) \odot N) \\ \tau_{S, M \otimes_{\mathbb{M}} N} \downarrow & & \downarrow \tau_{S \odot M, N} \\ T(S) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & T(S \odot M) \\ id_{T(S)} \downarrow & \searrow & \downarrow \tau_{S, M} \\ T(S) & \xrightarrow{id_{T(S)}} & T(S) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T(S) & \xrightarrow{T(\delta_S)} & T(S \odot I_{\mathbb{M}}) \\ id_{T(S)} \downarrow & \searrow & \downarrow \tau_{S, I_{\mathbb{M}}} \\ T(S) & \xrightarrow{id_{T(S)}} & T(S) \end{array}$$

sont commutatifs, par définition de 2-système trivialisant et par la remarque 2.1.7. De plus, par naturalité de τ , nous savons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} M)) & \xrightarrow{\tau_{S, M \otimes_{\mathbb{M}} M}} & T(S) \\ T(id_S \odot c_{M, M}) \downarrow & & \downarrow id_{T(S)} \\ T(S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} M)) & \xrightarrow{\tau_{S, M \otimes_{\mathbb{M}} M}} & T(S) \end{array}$$

est commutatif, et donc que $T(id_S \odot c_{M, M}) = id_{T(S)}$. Par définition de 2-action réduite universelle, il existe donc un unique morphisme de 2-actions

$$(\bar{T}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), \bar{\tau}) : (\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} \times \mathbb{M} \xrightarrow{(\odot^{\mathcal{E}\odot}, \alpha^{\mathcal{E}\odot}, \delta^{\mathcal{E}\odot})} \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}) \rightarrow (\mathbb{T} \times \mathbb{M} \xrightarrow{(\Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1, id, id)} \mathbb{T})$$

telle que $\bar{T}P^{\mathcal{E}\odot} = T$ et $\bar{\tau} * i_{(P^{\mathcal{E}\odot} \times Id_{\mathbb{M}})} = \tau$. On a ainsi un isomorphisme naturel $\bar{\tau} : \bar{T} \odot^{\mathcal{E}\odot} \Rightarrow \Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1(\bar{T} \times Id_{\mathbb{M}}) = \bar{T} \Pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}, \mathbb{M}}^1$. Par définition de 2-système trivialisant relatif à $\odot^{\mathcal{E}\odot}$, il existe alors un unique foncteur $\bar{\bar{T}} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} \rightarrow \mathbb{T}$ tel que $\bar{\bar{T}}P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} = \bar{T}$ et $i_{\bar{\bar{T}}} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} = \bar{\tau}$. Ce foncteur est alors tel que $\bar{\bar{T}}P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot} = \bar{\bar{T}}P^{\mathcal{E}\odot} = T$ et tel que

$$\begin{aligned} i_{\bar{\bar{T}}} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} * i_{(P^{\mathcal{E}\odot} \times Id_{\mathbb{M}})} &= \bar{\tau} * i_{(P^{\mathcal{E}\odot} \times Id_{\mathbb{M}})} \\ &= \tau. \end{aligned}$$

Supposons alors que $\tilde{T} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} \rightarrow \mathbb{T}$ soit un foncteur tel que $\tilde{T}P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}P^{\mathcal{E}\odot} = T$ et tel que $i_{\tilde{T}} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} * i_{(P^{\mathcal{E}\odot} \times Id_{\mathbb{M}})} = \tau$. Dans ce cas

$$(\tilde{T}P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), i_{\tilde{T}} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}) : (\odot^{\mathcal{E}\odot}, \alpha^{\mathcal{E}\odot}, \delta^{\mathcal{E}\odot}) \rightarrow (\Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1, id, id)$$

est un 1-morphisme de 2-actions puisque pour tout objet S de $\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}$ et tout objet M et N de $\mathbb{M}$, les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}(S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} N)) & \xrightarrow{\tilde{T}(P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}(\alpha_{S, M, N}^{\mathcal{E}\odot}))} & \tilde{T}((S \odot M) \odot N) \\ \downarrow \tilde{T}(\eta_{\odot_{S, M \otimes_{\mathbb{M}} N}}^{\mathcal{E}\odot}) & & \downarrow \tilde{T}(\eta_{\odot_{S \odot M, N}}^{\mathcal{E}\odot}) \\ \tilde{T}(S) & \xRightarrow{\quad} & \tilde{T}(S \odot M) \\ \downarrow id_{\tilde{T}(S)} & & \downarrow \tilde{T}(\eta_{\odot_{S, M}}^{\mathcal{E}\odot}) \\ \tilde{T}(S) & \xrightarrow{id_{\tilde{T}(S)}} & \tilde{T}(S) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}(S) & \xrightarrow{\tilde{T}(P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}(\delta_S^{\mathcal{E}\odot}))} & \tilde{T}(S \odot I_{\mathbb{M}}) \\ \downarrow id_{\tilde{T}(S)} & & \downarrow \tilde{T}(\eta_{\odot_{S, I}}^{\mathcal{E}\odot}) \\ \tilde{T}(S) & \xrightarrow{id_{\tilde{T}(S)}} & \tilde{T}(S) \end{array}$$

sont commutatifs. En effet, $(\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}})$ est un 2-système trivialisant et ces deux diagrammes sont l'image par $\tilde{T}$ des diagrammes commutatifs de la définition de 2-système trivialisant et de la remarque 2.1.7. Par définition de $\tilde{T}$ et par universalité de $(\bar{T}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), \bar{\tau})$, nous déduisons que $\tilde{T}P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} = \bar{T}$ et que $i_{\tilde{T}} * \eta = \bar{\tau}$. Dès lors, par unicité de $\bar{T}$, nous déduisons que $\tilde{T} = \bar{T}$, ce qui termine de montrer que $\bar{T}$ est l'unique foncteur entre $\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot}$ et $\mathbb{T}$ tel que $\bar{T}P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}P^{\mathcal{E}\odot} = T$ et $i_{\bar{T}} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} = \bar{\tau}$.

Soit alors $(\mathbb{T}, T', \tau')$ un autre 2-trivialisateur relatif à $\odot$ et $\mu : T \Rightarrow T'$ un isomorphisme naturel tel que $(\mu * i_{\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1})\tau = \tau'(\mu * i_{\odot})$. Puisque $T\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 = \Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1(T \times Id_{\mathbb{M}})$, $T'\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1 = \Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1(T' \times Id_{\mathbb{M}})$ et que $\mu * i_{\Pi_{\mathbb{S}, \mathbb{M}}^1} = i_{\Pi_{\mathbb{T}, \mathbb{M}}^1}(\mu * i_{Id_{\mathbb{M}}})$, nous remarquons que μ induit un 2-morphisme de 2-actions

$$(\mu, i_{Id_{\mathbb{M}}}) : (T, Id_{\mathbb{M}}, \tau) \Rightarrow (T', Id_{\mathbb{M}}, \tau').$$

Par définition de 2-action réduite universelle, il existe un unique 2-morphisme de 2-actions

$$(\bar{\mu}, i_{Id_{\mathbb{M}}}) : (\bar{T}, (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), \bar{\tau}) \Rightarrow (\bar{T}', (Id_{\mathbb{M}}, id, id_I), \bar{\tau}')$$

tel que $\bar{\mu} * i_{P^{\mathcal{E}\odot}} = \mu$. Par définition de 2-morphisme de 2-actions, nous savons donc que

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} \odot^{\mathcal{E}\odot} & \xRightarrow{\bar{\tau}} & \Pi_{T,M}^1(\bar{T} \times Id_M) = \bar{T} \Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1 \\ \bar{\mu} * i_{P^{\mathcal{E}\odot}} \downarrow & & \downarrow i_{\Pi_{T,M}^1} * (\bar{\mu} \times Id_M) \quad \downarrow \bar{\mu} * i_{\Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1} \\ \bar{T}' \odot^{\mathcal{E}\odot} & \xRightarrow{\bar{\tau}'} & \Pi_{T,M}^1(\bar{T}' \times Id_M) = \bar{T}' \Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1 \end{array}.$$

Dès lors, puisque $(S^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}})$ est un 2-système trivialisant, il existe un unique isomorphisme naturel $\bar{\bar{\mu}} : \bar{\bar{T}} \rightarrow \bar{\bar{T}}'$ tel que $\bar{\bar{\mu}} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}} = \bar{\mu}$. Celui-ci est donc tel $\bar{\bar{\mu}} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}} = \bar{\mu} * i_{P^{\mathcal{E}\odot}} = \mu$. Supposons qu'il existe un isomorphisme naturel $\tilde{\mu} : \bar{\bar{T}} \Rightarrow \bar{\bar{T}}'$ tel que $\tilde{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}} = \mu$. De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} \odot^{\mathcal{E}\odot} & \xRightarrow{\bar{\tau}} & \Pi_{T,M}^1(\bar{T} \times Id_M) \\ \downarrow (\bar{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}}) * i_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} & \searrow & \downarrow (\tilde{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}}) * i_{\Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1} \\ \bar{\bar{T}} P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \odot^{\mathcal{E}\odot} & \xRightarrow{i_{\bar{\bar{T}}} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}} & \bar{\bar{T}} P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1 \\ \downarrow \tilde{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \odot^{\mathcal{E}\odot}} & \searrow & \downarrow \bar{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1} \\ \bar{\bar{T}}' P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \odot^{\mathcal{E}\odot} & \xRightarrow{i_{\bar{\bar{T}}'} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}} & \bar{\bar{T}}' P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1 \\ \downarrow (\bar{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}}) * i_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} & \swarrow & \downarrow (\tilde{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}}) * i_{\Pi_{S^{\mathcal{E}\odot}, M}^1} \\ \bar{T}' \odot^{\mathcal{E}\odot} & \xRightarrow{\bar{\tau}'} & \Pi_{T,M}^1(\bar{T}' \times Id_M) \end{array}$$

nous déduisons le fait que

$$(\tilde{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}}, i_{Id_M}) : (\bar{T}, (Id_M, id, id_I), \bar{\tau}) \Rightarrow (\bar{T}', (Id_M, id, id_I), \bar{\tau}')$$

est un 2-morphisme de 2-actions. Au vu de la définition de $\tilde{\mu}$, nous déduisons que $\tilde{\mu} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}}} = \bar{\mu}$ par universalité du 2-morphisme de 2-actions $(\bar{\mu}, i_{Id_M})$. Dès lors, par universalité de $\bar{\bar{\mu}}$, nous trouvons que $\tilde{\mu} = \bar{\bar{\mu}}$, ce qui termine de montrer que $\bar{\bar{\mu}}$ est l'unique isomorphisme naturel entre $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{T}}'$ tel que $\bar{\bar{\mu}} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}} = \mu$. $\square$

Corollaire 3.5.3. *Le 2-système trivialisant relatif à $\odot$ et construit ci-dessus $(S^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} * i_{P^{\mathcal{E}\odot} \times Id_M})$ se décrit comme suit: les objets de $S^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}$ sont les objets de S , tandis que les flèches sont les triples de la forme $S \xrightarrow{[M, N, [s]]} T$, où M et N sont deux objets de M et $S \odot M \xrightarrow{[s]} T \odot N$ une flèche*

de $\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}$; deux flèches parallèles $S \xrightarrow[\substack{[U,V,[t]]}]{\substack{[M,N,[s]]}} T$ sont égales s'il existe deux objets P et Q de $\mathbb{M}$ et deux isomorphismes $f : M \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow U \otimes_{\mathbb{M}} Q$, $g : N \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow V \otimes_{\mathbb{M}} Q$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{\alpha_{S,M,P}} & (S \odot M) \odot P & \xrightarrow{s \odot id_P} & (T \odot N) \odot P & \xrightarrow{\alpha_{T,N,P}^{-1}} & T \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} P) \\ \downarrow id_S \odot f & & & & & & \downarrow id_T \odot g \\ S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{\alpha_{S,U,Q}} & (S \odot U) \odot Q & \xrightarrow{t \odot id_Q} & (T \odot V) \odot Q & \xrightarrow{\alpha_{T,V,Q}^{-1}} & T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} Q) \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}$: ceci signifie que soit ce diagramme est commutatif dans $\mathbb{S}$, soit il existe un naturel non nul n , n objets $S_1, S_2, \dots, S_n$ de $\mathbb{S}$, $n+1$ flèches $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}$ de $\mathbb{S}$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ (en notant $S_0 = S \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} P)$, $S_{n+1} = T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} Q)$) telles que

$$(id_T \odot g) \alpha_{T,N,P}^{-1} (s \odot id_P) \alpha_{S,M,P} = s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0$$

dans $\mathbb{S}$ et il existe n endomorphismes $a_i : S_i \rightarrow S_i$ de $\mathbb{S}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\alpha_{T,V,Q}^{-1} (t \odot id_Q) \alpha_{S,U,Q} (id_S \odot f) = s_n a_n s_{n-1} a_{n-1} \dots s_1 a_1 s_0$$

dans $\mathbb{S}$, de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un objet S^i de $\mathbb{S}$ et un objet M_i de $\mathbb{M}$ de façon telle que $a_i = id_{S^i} \odot c_{\mathbb{M}_{M_i}, M_i}$ ou il existe un naturel non nul n_i et n_i objets $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in_i}$ de $\mathbb{M}$ tels que $a_i = \left(\dots ((id_{S^i} \odot c_{\mathbb{M}_{M_i}, M_i}) \odot id_{M_{i1}}) \odot \dots \right) \odot id_{M_{in_i}}$; ainsi, $Hom_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}(S, T)$ est le système trivialisant décrit dans la proposition 3.2.1 et relatif à l'action canonique de $\Pi_0(\mathbb{M})$ sur $\Pi_0(\mathbb{M}_{P^{\mathcal{E}\odot} S} \times_{P^{\mathcal{E}\odot} T} \mathbb{M})$, où $\mathbb{M}_{P^{\mathcal{E}\odot} S} \times_{P^{\mathcal{E}\odot} T} \mathbb{M}$ désigne le 2-produit fibré de

$$\begin{array}{c} \mathbb{M} \\ \downarrow S \odot - \\ \mathbb{S} \\ \downarrow P^{\mathcal{E}\odot} \\ \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} \end{array} \quad \mathbb{M} \xrightarrow{T \odot -} \mathbb{S} \xrightarrow{P^{\mathcal{E}\odot}} \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot};$$

la composée de deux flèches composables $R \xrightarrow{[M,N,[s]]} S \xrightarrow{[U,V,[t]]} T$ est la flèche

$$\begin{array}{ccccccc}
R \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} U) & \xrightarrow{\alpha_{R,M,U}} & (R \odot M) \odot U & \xrightarrow{s \odot id_U} & (S \odot N) \odot U & \xrightarrow{\alpha_{S,N,U}^{-1}} & S \odot (N \otimes_{\mathbb{M}} U) \\
& & & & & & \downarrow id_S \odot c_{\mathbb{M},N,U} \\
T \odot (V \otimes_{\mathbb{M}} N) & \xleftarrow{\alpha_{T,V,N}^{-1}} & (T \odot V) \odot N & \xleftarrow{t \odot id_N} & (S \odot U) \odot N & \xleftarrow{\alpha_{S,U,N}} & S \odot (U \otimes_{\mathbb{M}} N);
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
P_{\odot^{\mathcal{E}_{\odot}}} P^{\mathcal{E}_{\odot}} : \mathbb{S} & \rightarrow & \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} / \odot^{\mathcal{E}_{\odot}} \\
\begin{array}{c} S \\ s \downarrow \\ T \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} S \\ [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [s \odot id_{I_{\mathbb{M}}}}] \downarrow \\ T \end{array}
\end{array}$$
$$\{S \odot M \xrightarrow{[I_M, M, [\delta_{S \odot M}^{-1}]]} S\}_{(S, M) \in Ob(\mathbb{S} \times \mathbb{M}).}$$
$$\begin{array}{ccc} \overline{T} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}\circ} / \circ^{\mathcal{E}\circ} & \rightarrow & \mathbb{T} \\ \begin{array}{c} S \\ [M, N, [s]] \downarrow \\ S' \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} T(S) \\ \downarrow \tau_{S'}, NT(s) \tau_{S, M}^{-1} \\ T(S') \end{array} \end{array}$$
$$\overline{T}P_{\odot^{\mathcal{E}}\odot}P^{\mathcal{E}\odot}=T$$
$$i_{\overline{T}} * \eta_{\odot^{\varepsilon} \odot} * i_{P^{\varepsilon} \odot \times Id_M} = \tau.$$
$$\{\bar{\psi}_S := T(S) \xrightarrow{\psi_S} T'(S)\}_{S \in \text{Ob}(\mathbb{S}^{\mathcal{E} \odot} / \odot^{\mathcal{E} \odot})}$$

est l'unique transformation naturelle entre $\overline{T}$ et $\overline{T'}$ telle que

$$\overline{\psi} * i_{P_{\odot^{\mathcal{E}_{\odot}} \odot} P^{\mathcal{E}_{\odot}}} = \psi.$$

En particulier, si $\overline{\Pi_0(\odot)}$ désigne l'action canonique induite par $\odot$ (introduite dans la remarque 3.1.2) du monoïde commutatif $\Pi_0(\mathbb{M})$ sur l'ensemble $\Pi_0(\mathbb{S})$ et si $\Pi_0(\mathbb{S})/\overline{\Pi_0(\odot)}$ est un système trivialisant relatif à cette action dans $\mathbb{Ens}$, alors il existe un isomorphisme d'ensembles

$$\Pi_0(\mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}}/\odot^{\mathcal{E}_{\odot}}) \simeq \Pi_0(\mathbb{S})/\overline{\Pi_0(\odot)}.$$

Démonstration. Le résultat découle de la description des 2-systèmes trivialisant relatifs à une 2-action identitaires sur la symétrie diagonale proposée dans la section 3.3 et de la description d'une 2-action réduite proposée dans la section 3.4. Le fait que $\Pi_0(\mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}}/\odot^{\mathcal{E}_{\odot}}) \simeq \Pi_0(\mathbb{S})/\overline{\Pi_0(\odot)}$ découle alors de la description des systèmes trivialisant introduite dans la proposition 3.2.1. $\square$

Nous terminons cette section en montrant que les 2-systèmes trivialisants universels construits dans cette section commutent avec les 2-produits binaires de 2-actions. Pour cela, nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant.

Lemme 3.5.4. Soient $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ et $(\odot', \alpha', \delta') : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux 2-actions, respectivement d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{Grpd}$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ et d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ interne à $\mathcal{Grpd}$ sur un groupoïde $\mathbb{T}$, soit $(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')$ une 2-action produit de $\odot$ et $\odot'$, soient $\mathcal{E}_{\odot}$, $\mathcal{E}_{\odot'}$ et $\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}$ les classes d'endomorphismes construites au début de cette section et soient

$$\begin{aligned} & (\mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} \times \mathbb{M} \xrightarrow{(\odot^{\mathcal{E}_{\odot}}, \alpha^{\mathcal{E}_{\odot}}, \delta^{\mathcal{E}_{\odot}})} \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}}, P^{\mathcal{E}_{\odot}}) \\ & (\mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}} \times \mathbb{N} \xrightarrow{(\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}, \alpha'^{\mathcal{E}_{\odot'}}, \delta'^{\mathcal{E}_{\odot'}})} \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}, P^{\mathcal{E}_{\odot'}}) \\ & ((\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} \mathbb{S} \times \mathbb{T} \xrightarrow{(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')} \mathbb{S} \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} (\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} P^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}) \end{aligned}$$

les 2-actions réduites universelles relativement à ces classes d'endomorphismes construites dans la section précédentes. Il existe un isomorphisme de groupoïdes $Q : (\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} \mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}$ tel que

$$\begin{aligned} Q \odot \times \odot' & \xrightarrow{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} \odot^{\mathcal{E}_{\odot}} \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}} (Q \times Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{N}}) \\ Q \Pi^1_{(\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}, \mathbb{M} \times \mathbb{N}} & = \Pi^1_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}_{\odot}} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}, \mathbb{M} \times \mathbb{N}} (Q \times Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

et tel que

$$QP^{\mathcal{E}_{\odot} \times \mathcal{E}_{\odot'}} = P^{\mathcal{E}_{\odot}} \times P^{\mathcal{E}_{\odot'}}.$$

Démonstration. Puisque les classes d'endomorphismes $\mathcal{E}_\odot$, $\mathcal{E}_{\odot'}$ sont étirantes (voir lemme 3.5.1), et qu'il est clair que $\mathcal{E}_{\odot \times \odot'} = \mathcal{E}_\odot \times \mathcal{E}_{\odot'}$, le résultat découle directement de la proposition 3.4.9. $\square$

Théorème 3.5.5. *Soient $(\odot, \alpha, \delta) : \mathbb{S} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ et $(\odot', \alpha', \delta') : \mathbb{T} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux 2-actions, respectivement d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{G}rpd$ sur un groupoïde $\mathbb{S}$ et d'un 2-monoïde symétrique $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ interne à $\mathcal{G}rpd$ sur un groupoïde $\mathbb{T}$, soit $(\odot \times \odot', \alpha \times \alpha', \delta \times \delta')$ une 2-action produit de $\odot$ et $\odot'$, soient $(\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot}, P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}}, \eta_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}})$, $(\mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}} / \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}, P_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}}, \eta_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}})$ et $((\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} / \odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}, P_{\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}}, \eta_{\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}})$, respectivement les trois 2-systèmes trivialisants relatifs à $\odot^{\mathcal{E}_\odot}$, $\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}$ et $\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}$ construits dans cette section, et soit $Q : (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}$ l'isomorphisme de groupoïdes issu du corollaire précédent. Il existe un isomorphisme de groupoïdes*

$$F : (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} / \odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}} / \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}$$

tel que

$$FP_{\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}} = (P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \times P_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}})Q$$

et tel que

$$i_F * \eta_{\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}} = (\eta_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \times \eta_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}}) * i_{(\Pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot}, \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}}^1 \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{N}}^1, \Pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot}, \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}}^2 \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{N}}^2)(Q \times Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{N}})}.$$

Démonstration. Au vu des propriétés de Q (voir corollaire précédent), nous voyons par définition de 2-système trivialisant qu'il existe un isomorphisme de groupoïdes

$$\overline{Q} : (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} / \odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}} \rightarrow (\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}) / \odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}$$

tel que

$$\overline{Q}P_{\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}} = P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}} \overline{Q}$$

et tel que

$$i_{\overline{Q}} * \eta_{\odot \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot \times \odot'}}} = \eta_{\odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}} * i_{(Q \times Id_{\mathbb{M} \times \mathbb{N}})}.$$

Par ailleurs, par la proposition 3.3.14, il existe un isomorphisme de groupoïdes

$$\overline{(P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \times P_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}})} : (\mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}}) / \odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}} \rightarrow \mathbb{S}^{\mathcal{E}_\odot} / \odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}_{\odot'}} / \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}$$

tel que

$$\overline{(P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \times P_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}})} P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot} \times \odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}} = (P_{\odot^{\mathcal{E}_\odot}} \times P_{\odot'^{\mathcal{E}_{\odot'}}})$$

et tel que

$$\overline{i_{(P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \times P_{\odot'^{\mathcal{E}\odot'}})} * \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot} \times \odot'^{\mathcal{E}\odot'}}} = (\eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \times \eta_{\odot'^{\mathcal{E}\odot'}}) * i_{(\pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}, \mathbb{T}^{\mathcal{E}\odot'}}^1 \times \pi_{\mathbb{M}, \mathbb{N}}^1, \pi_{\mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot}, \mathbb{T}^{\mathcal{E}\odot'}}^2 \times \pi_{\mathbb{M}, \mathbb{N}}^2)}.$$

Dès lors, il suffit de poser $F = \overline{(P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} \times P_{\odot'^{\mathcal{E}\odot'}})Q}$. La vérification des deux propriétés que doit satisfaire le foncteur F est immédiate. $\square$

Remarque 3.5.6. L'isomorphisme de groupoïde F construit dans la preuve précédente peut se décrire comme

$$\begin{array}{ccc} F : (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\frac{\mathcal{E}\odot \times \odot'}{\odot \times \odot'}} / \underline{\odot \times \odot'}^{\frac{\mathcal{E}\odot \times \odot'}{\odot \times \odot'}} & \rightarrow & \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}'\odot} / \odot'^{\mathcal{E}'\odot} \\ (S, T) & & (S, T) \\ \downarrow [(M, N), (M', N'), (s, t)] & \mapsto & \downarrow ([M, M', s], [N, N', t]) \\ (S', T') & & (S', T') \end{array}$$

tandis que l'isomorphisme inverse F^{-1} se décrit comme

$$\begin{array}{ccc} F^{-1} : \mathbb{S}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} \times \mathbb{T}^{\mathcal{E}'\odot} / \odot'^{\mathcal{E}'\odot} & \rightarrow & (\mathbb{S} \times \mathbb{T})^{\frac{\mathcal{E}\odot \times \odot'}{\odot \times \odot'}} / \underline{\odot \times \odot'}^{\frac{\mathcal{E}\odot \times \odot'}{\odot \times \odot'}} \\ (S, T) & & (S, T) \\ \downarrow ([M, M', s], [N, N', t]) & \mapsto & \downarrow [(M, N), (M', N'), (s, t)] \\ (S', T') & & (S', T') \end{array}$$

Corollaire 3.5.7. Soient $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ et $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ deux 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{G}rpd$ et soit $(\odot, \gamma, \alpha, \delta) : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ une 2-action de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{N}$ interne à 2- $\mathcal{M}onSym$. Le groupoïde $\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot}$ décrit dans le corollaire 3.5.3, muni du produit $\otimes_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} \times \mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} & \rightarrow & \mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot} \\ (N, N') & & N \otimes_{\mathbb{N}} N' \\ \downarrow ([M, M', [f]], [K, K', [g]]) & \mapsto & \downarrow [M \otimes_{\mathbb{M}} K, M' \otimes_{\mathbb{M}} K', [\gamma_{N'', M', N''', K'} (f \otimes_{\mathbb{N}} g) \gamma_{N, M, N', K'}^{-1}]] \\ (N'', N''') & & N'' \otimes_{\mathbb{N}} N''' \end{array}$$

de la contrainte d'associativité $a_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot} / \odot^{\mathcal{E}\odot}}$ définie par la famille d'isomorphismes

$$\left\{ N \otimes_{\mathbb{N}} (N' \otimes_{\mathbb{N}} N'') \xrightarrow{[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [a_{\mathbb{N}, N', N''} \odot id_{I_{\mathbb{M}}]}]} (N \otimes_{\mathbb{N}} N') \otimes_{\mathbb{N}} N'' \right\}_{N, N', N'' \in Ob(\mathbb{N})},$$

de l'objet unité $I_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}} := I_{\mathbb{N}}$, des contraintes d'unité à gauche et à droite $g_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}$ et $d_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}$ définies par les familles d'isomorphismes

$$\left\{ N \xrightarrow{[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [g_{\mathbb{N}} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]]} I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} N \right\}_{N \in Ob(\mathbb{N})},$$

$$\left\{ N \xrightarrow{[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [d_{\mathbb{N}} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]]} N \otimes_{\mathbb{N}} I_{\mathbb{N}} \right\}_{N \in Ob(\mathbb{N})},$$

et de la contrainte de symétrie $c_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}$ définie par la famille d'isomorphisme

$$\left\{ N \otimes_{\mathbb{N}} N' \xrightarrow{[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [c_{\mathbb{N}, N'} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]]} N' \otimes_{\mathbb{N}} N \right\}_{N, N' \in Ob(\mathbb{N})},$$

est un 2-monoïde symétrie interne à $\mathcal{Grpd}$. Le foncteur $P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}$ muni des identités canoniques

$$\begin{aligned} & \{ P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}(N) \otimes_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}} P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}(N') = N \otimes_{\mathbb{N}} N' \\ & = P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}(N \otimes_{\mathbb{N}} N') \}_{N, N' \in Ob(\mathbb{N})} \end{aligned}$$

et $I_{\mathbb{N}} = P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}(I_{\mathbb{N}})$ est un 1-morphisme de 2-monoïde symétrique de sorte que le triple $((\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}, \otimes_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}, a_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}, I_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}, g_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}, d_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}, c_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}}), (P_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} P^{\mathcal{E}\odot}, id, id_I), \eta_{\odot^{\mathcal{E}\odot}} * i_{P^{\mathcal{E}\odot} \times Id_{\mathbb{M}}}))$ est un 2-système trivialisant relativement à $(\odot, \gamma, \alpha, \delta)$ dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}$. En particulier, si $\overline{\Pi_0(\odot)}$ désigne l'action dans $\mathbb{MonCom}$ induite par $\odot$ (introduite dans la remarque 3.1.2) et si $\Pi_0(\mathbb{N})/\overline{\Pi_0(\odot)}$ désigne un système trivialisant dans $\mathbb{MonSym}$, alors il existe un isomorphisme de monoïdes commutatifs

$$\Pi_0(\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot}/\odot^{\mathcal{E}\odot}) \simeq \Pi_0(\mathbb{N})/\overline{\Pi_0(\odot)}.$$

Démonstration. Le résultat découle de la proposition 2.2.1, du théorème 3.5.2 et du théorème 3.5.5. $\square$

Corollaire 3.5.8. Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un morphisme de 2-monoïdes symétriques. Le 2-système trivialisant $((\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}, \otimes_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}}, a_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}}, I_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}}, g_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}}, d_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}}, c_{\mathbb{N}^{\mathcal{E}\odot_F}/\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}}), (P_{\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}} P^{\mathcal{E}\odot_F}, id, id_I), \eta_{\odot_F^{\mathcal{E}\odot_F}} * i_{P^{\mathcal{E}\odot_F} \times Id_{\mathbb{M}}}))$ décrit dans le corollaire

précédent, où $\odot_F$ désigne la 2-action interne à la 2-catégorie des 2-monoïdes symétriques

$$\mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times F} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{N}}} \mathbb{N}$$

munie de l'isomorphisme naturel γ_F défini pour tout objet N, N' de $\mathbb{N}$ et tout objet M, M' de $\mathbb{M}$ par

$$\begin{aligned} & (N \otimes_{\mathbb{N}} F(M)) \otimes_{\mathbb{N}} (N' \otimes_{\mathbb{N}} F(M')) \xrightarrow{a_{\mathbb{N}N \otimes_{\mathbb{N}} F(M), N', F(M')}} \\ & \xleftarrow{a_{\mathbb{N}N, F(M), N'}^{-1} \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M')}} ((N \otimes_{\mathbb{N}} F(M)) \otimes_{\mathbb{N}} N') \otimes_{\mathbb{N}} F(M') \\ & (N \otimes_{\mathbb{N}} (F(M) \otimes_{\mathbb{N}} N')) \otimes_{\mathbb{N}} F(M') \xleftarrow{(id_N \otimes_{\mathbb{N}} c_{\mathbb{N}F(M), N'}) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M')}} \\ & \xrightarrow{a_{\mathbb{N}N, N', F(M)} \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M')}} (N \otimes_{\mathbb{N}} (N' \otimes_{\mathbb{N}} F(M))) \otimes_{\mathbb{N}} F(M') \\ & ((N \otimes_{\mathbb{N}} N') \otimes_{\mathbb{N}} F(M)) \otimes_{\mathbb{N}} F(M') \xleftarrow{a_{\mathbb{N}N \otimes_{\mathbb{N}} N', F(M), F(M')}^{-1}} \\ & \xrightarrow{id_{N \otimes_{\mathbb{N}} N'} \otimes_{\mathbb{N}} f_{M, M'}} (N \otimes_{\mathbb{N}} N') \otimes_{\mathbb{N}} (F(M) \otimes_{\mathbb{N}} F(M')) \\ & (N \otimes_{\mathbb{N}} N') \otimes_{\mathbb{N}} F(M \otimes_{\mathbb{M}} M'), \end{aligned}$$

de l'isomorphisme naturel α_F défini pour tout objet N de $\mathbb{N}$ et tout objet M, M' de $\mathbb{M}$ par

$$\begin{aligned} & N \otimes_{\mathbb{N}} F(M \otimes_{\mathbb{M}} M') \xrightarrow{id_N \otimes_{\mathbb{N}} f_{M, M'}^{-1}} N \otimes_{\mathbb{N}} (F(M) \otimes_{\mathbb{N}} F(M')) \\ & (N \otimes_{\mathbb{N}} F(M)) \otimes_{\mathbb{N}} F(M') \xleftarrow{a_{\mathbb{N}N, F(M), F(M')}} \end{aligned}$$

et de l'isomorphisme naturel δ_F défini pour tout objet N de $\mathbb{N}$ par

$$N \xrightarrow{d_{\mathbb{N}N}} N \otimes_{\mathbb{N}} I_{\mathbb{N}} \xrightarrow{id_N \otimes_{\mathbb{N}} f_I} N \otimes_{\mathbb{N}} F(I_{\mathbb{M}}),$$

est un 2-conoyau de (F, f, f_I) dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}$. De plus, si $Coker(\Pi_0(F))$ désigne un conoyau de $\Pi_0(F) : \Pi_0(\mathbb{M}) \rightarrow \Pi_0(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{MonCom}$, alors il existe un isomorphisme de monoïdes commutatifs

$$\Pi_0(\mathbb{N}^{\mathcal{E}_{\odot_F}} / \odot_F^{\mathcal{E}_{\odot_F}}) \simeq Coker(\Pi_0(F))$$

et si, dans $\mathcal{MonCom}$, $Coker(\Pi_0(\Delta_F))$ désigne un conoyau de $\Pi_0(\Delta_F)$, où Δ_F

désigne la factorisation canonique de $\mathbb{M}$ à travers le 2-produit fibré

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{M} \xrightarrow{\Delta_F} \mathbb{M}_{P^{\mathcal{E} \odot_F} F} \times_{P^{\mathcal{E} \odot_F} F} \mathbb{M} \xrightarrow{\quad} \mathbb{M} \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow F \\
 \mathbb{M} \xrightarrow{F} \mathbb{N} \xrightarrow{P^{\mathcal{E} \odot_F}} \mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F},
 \end{array}$$

alors il existe un isomorphisme de monoïdes symétriques

$$\Pi_1(\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}) \simeq \text{Coker}(\Pi_0(\Delta_F)).$$

Si $((Z, \zeta, \zeta_I), (\Theta, \theta, \theta_I), \nu)$ est une structure 2-cofinale sur (F, f, f_I) , alors le septuple $(\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}, \otimes_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}, a_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}, I_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}, g_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}, d_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}, c_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}})$ muni du foncteur

$$(\)_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}^* : \mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}$$

et de l'isomorphisme naturel

$$\delta_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}} : \otimes_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}} (Id_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}, (\)_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}^*) \Rightarrow Id_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}}$$

issus de la proposition 2.4.3 (nous rappelons que pour tout objet N de $\mathbb{N}$, $(N)^*_{\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}} = Z(N)$ et laissons le reste des descriptions explicites en exercice pour le lecteur) est un 2-groupe symétrique interne à $\mathcal{Grpd}$. Dès lors, si (F, f, f_I) est un 1-morphisme de 2-groupes symétriques, alors $\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}$ est un 2-conoyau de (F, f, f_I) dans $2\text{-}\mathcal{GrpSym}$ puisque $(\)_{\mathbb{N}}^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $I_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M}$ et $(f_I * i_{1_{\mathbb{N}}}) \delta_{\mathbb{N}} : \otimes_{\mathbb{N}} (Id_{\mathbb{N}}, (\)_{\mathbb{N}}^*) \Rightarrow FI_{\mathbb{M}} 1_{\mathbb{N}}$ est une structure 2-cofinale sur F .

Démonstration. Nous montrons seulement que

$$\Pi_1(\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}) \simeq \text{Coker}(\Pi_0(\Delta_F)),$$

le reste du résultat découlant directement de la proposition 2.3.4, de la proposition 2.4.3, du corollaire 2.4.4 et du corollaire 3.5.7. Par construction de

$\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F}$, nous savons que $\Pi_1(\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F})$ est le système trivialisant relatif à l'action canonique de $\Pi_0(\mathbb{M})$ sur le Π_0 du 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{M} & \xrightarrow{\times_{P^{\mathcal{E} \odot_F} (I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} F(-))}} & \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} F(-) \\
 \mathbb{M} & \xrightarrow{I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} F(-)} & \mathbb{N} & \xrightarrow{P^{\mathcal{E} \odot_F}} & \mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F}
 \end{array}$$

Puisque le foncteur $I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} (-) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est monoïdalement équivalent à $Id_{\mathbb{N}}$, $\Pi_1(\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F})$ est donc le système trivialisant relatif à l'action canonique de $\Pi_0(\mathbb{M})$ sur le Π_0 du 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{M} & \xrightarrow{\times_{P^{\mathcal{E} \odot_F} F}} & \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow F \\
 \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N} & \xrightarrow{P^{\mathcal{E} \odot_F}} & \mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F}
 \end{array}$$

et cette action est celle induite par le Π_0 du 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques Δ_F . Le résultat découle alors de la proposition 1.3.4. $\square$

Remarque 3.5.9. Le corollaire précédent nous permet d'obtenir une description ensembliste des 2-conoyaux de $2\text{-}\mathcal{M}onSym$. Il nous permet également d'obtenir une description ensembliste des 2-conoyaux des 1-morphismes de 2-groupes symétriques. Remarquons qu'une description des 2-conoyaux de $2\text{-}\mathcal{G}rpSym$ a déjà été proposée par E. Vitale dans [Vit02]. La description de Vitale est donc équivalente à celle proposée ici, quoique beaucoup plus simple d'accès. Ceci s'explique par le fait que la description de Vitale s'applique uniquement au contexte des 2-groupe symétrique, qui est un contexte beaucoup plus riche que celui des 2-monoïdes symétriques.

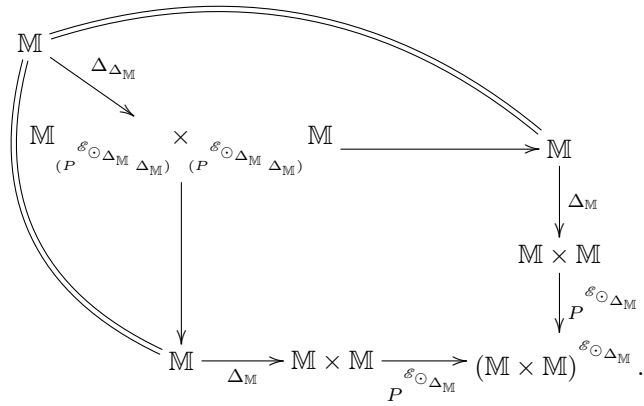
Le dernier résultat de ce chapitre découle directement du corollaire précédent et du théorème 2.5.1.

Corollaire 3.5.10. *Le 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U} : 2\text{-}\mathcal{G}rpSym \rightarrow 2\text{-}\mathcal{M}onSym$ possède un biadjoint à gauche $\mathbb{L}$. Pour tout 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$, $\mathbb{U}(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ est un 2-conoyau dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym$ du 1-morphisme diagonal $\Delta_{\mathbb{M}}$. En particulier, si $Coker(\Pi_0(\Delta_{\mathbb{M}}))$ est un conoyau dans $\mathcal{M}onSym$*

du morphisme de monoïdes commutatifs $\Pi_0(\Delta_{\mathbb{M}}) : \Pi_0(\mathbb{M}) \rightarrow \Pi_0(\mathbb{M} \times \mathbb{M})$,
alors il existe un isomorphisme de groupes symétriques

$$\Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \simeq \text{Coker}(\Pi_0(\Delta_{\mathbb{M}}))$$

et si $\text{Coker}(\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}}))$ est un conoyau de $\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}})$ dans $\text{MonSym}(\mathbb{E}ns)$, où $\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}}$ est la factorisation canonique à travers le 2-produit fibré



alors il existe un isomorphisme de groupes commutatifs

$$\Pi_1(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \simeq \text{Coker}(\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}}))$$

Chapitre 4

K -théorie algébrique

Dans le chapitre 4, nous étudions les rapports entretenus par le biadjoint à gauche $\mathbb{L}$ construit au chapitre précédent avec les deux groupes commutatifs K_0 et K_1 de la K -théorie algébrique. Dans la section 1, nous rappelons les définitions de K_0 et K_1 , ainsi que la construction de la suite exacte

$$K_1(\mathbb{M}) \xrightarrow{K_1(F)} K_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{d'} K_F \xrightarrow{d} K_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{K_0(F)} K_0(\mathbb{N}).$$

Dans la section 2, nous établissons l'existence d'un 2-isomorphisme naturel $\Pi_0 \mathbb{L} \simeq K_0$. Dans la section 3, nous établissons l'existence d'un 2-isomorphisme naturel $\Pi_1 \mathbb{L} \simeq K_1$. Dans la section 4, si $\text{Coker}(\Pi_0(\Delta_F))$ désigne le conoyau du Π_0 de la factorisation canonique à travers le 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \xrightarrow{\Delta_F} & \mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{M} \xrightarrow{F} \mathbb{N}, \end{array}$$

alors nous établissons l'existence d'un isomorphisme de groupes commutatifs $\Pi_0(\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M})_{\Pi_0(\Delta_F)} \simeq K_F$ dans le cas particulier où F est identitaires sur la symétrie diagonale, c'est à dire $F(c_{M,M}) = id$ (théorème 4.4.2) ou dans le cas particulier où F est un 1-morphisme de 2-groupes symétriques (théorème 4.4.4). Dans ce dernier cas, nous en déduisons que la suite exacte de la K -théorie est isomorphe à la suite exacte associée à un 2-groupe symétrique introduite par Rousseau dans [Rou00] (remarque 4.4.5). Dans la section 5, à partir d'une 2-action $\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ d'un 2-monoïdes symétriques $\mathbb{M}$ sur un 2-monoïde symétrique $\mathbb{N}$, nous construisons une suite exacte

$$K_1(\mathbb{M}) \xrightarrow{d_1} K_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{\partial_1} K_{\odot} \xrightarrow{\partial_0} K_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{d_0} K_0(\mathbb{N})$$

sans émettre d'hypothèse particulière sur $\odot$ (théorème 4.5.3). Dans le cas particulier où $\odot$ est la 2-action $\mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{Id_{\mathbb{N}} \times F} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{N}$ induite par un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ cofinal, nous montrons que cette suite exacte est isomorphe à la suite exacte de la K-théorie algébrique (corollaire 4.5.5) et en constitue donc une généralisation.

4.1 Rappels K-théoriques

Nous rappelons les définitions et résultats basiques de la K-théorie algébrique. Pour les détails, nous renvoyons le lecteur vers [Bas68].

Définition 4.1.1. Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{Grpd}$. Une *composition* sur $\mathbb{M}$ est la donnée d'un couple $(C, \circ)$ où $C \subseteq \text{Ob}(\mathbb{M}) \times \text{Ob}(\mathbb{M})$ et $\circ : C \rightarrow \text{Ob}(\mathbb{M})$ est une application telle que si $(M, M'), (N, N') \in C$ sont tels que $(M \otimes_{\mathbb{M}} M', M' \otimes_{\mathbb{M}} N') \in C$ également, alors

$$(M \otimes_{\mathbb{M}} N) \circ (M' \otimes_{\mathbb{M}} N') = (M \circ M') \otimes_{\mathbb{M}} (N \circ N').$$

Définition 4.1.2. Soient $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{Grpd}$ et $(C, \circ)$ une composition sur $\mathbb{M}$. Un *groupe de Grothendieck* pour $\mathbb{M}$ par rapport à $(C, \circ)$ est la donnée d'un couple $(K_{\circ}(\mathbb{M}), [\]_{\mathbb{M}})$, où:

1. $K_{\circ}(\mathbb{M})$ est un groupe commutatif;
2. $[\]_{\mathbb{M}} : \Pi_0(\mathbb{M}) \rightarrow K_{\circ}(\mathbb{M})$ est un morphisme de monoïdes commutatifs tel que $[M \circ N]_{\mathbb{M}} = [M]_{\mathbb{M}} + [N]_{\mathbb{M}}$ pour tout élément (M, N) de C

de sorte que si $(G, *_G, e_G, (\)_G^*)$ est un groupe commutatif et si $f : \Pi_0(\mathbb{M}) \rightarrow G$ est un morphisme de monoïdes commutatifs tel que $f(M \circ N) = f([M]) *_G f([N])$ pour tout élément (M, N) de C , alors il existe un unique morphisme de groupes commutatifs noté $\bar{f} : K_{\circ}(\mathbb{M}) \rightarrow G$ entre $K_{\circ}(\mathbb{M})$ et G tel que

$$\bar{f}[\]_{\mathbb{M}} = f.$$

L'existence, pour tout 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ et toute composition $(C, \circ)$ sur $\mathbb{M}$ d'un groupe de Grothendieck $(K_{\circ}(\mathbb{M}), [\]_{\mathbb{M}})$ découle de la construction suivante: $(\Pi_0(\mathbb{M} \times \mathbb{M}))/R$, où $([M, N], [M', N']) \in R$ s'il existe un objet X de $\mathbb{M}$, deux objets $(D_0, D_1), (E_0, E_1)$ de C et un isomorphisme de $\mathbb{M}$

$$\left(\left(((M \otimes N') \otimes X) \otimes (D_0 \circ D_1) \right) \otimes E_0 \right) \otimes E_1 \simeq \left(\left(((M' \otimes N) \otimes X) \otimes D_0 \right) \otimes D_1 \right) \otimes (E_0 \circ E_1).$$

Dans ce cas, l'application $[\]_{\mathbb{M}}$ est définie par

$$\begin{aligned} [\]_{\mathbb{M}} : \Pi_0(\mathbb{M}) &\rightarrow K_{\circ}(\mathbb{M}) \\ M &\mapsto [(M, I)] \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que le couple $(K_o(\mathbb{M}), [\]_{\mathbb{M}})$ est un groupe de Grothendieck comme dans la définition ci-dessus.

Soient $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$ et $(C_{\mathbb{M}}, \circ_{\mathbb{M}}), (C_{\mathbb{N}}, \circ_{\mathbb{N}})$, respectivement une composition sur $\mathbb{M}$ et une composition sur $\mathbb{N}$ telles que si $(M, M') \in C_{\mathbb{M}}$, alors $(F(M), F(M')) \in C_{\mathbb{N}}$ et $F(M \circ_{\mathbb{M}} M') = F(M) \circ_{\mathbb{N}} F(M')$. Dans ce cas, il existe un unique morphisme de groupes commutatifs $K_o(F) : K_{o_{\mathbb{M}}}(\mathbb{M}) \rightarrow K_{o_{\mathbb{N}}}(\mathbb{N})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Pi_0(\mathbb{M}) & \xrightarrow{[\]_{\mathbb{M}}} & K_{o_{\mathbb{M}}}(\mathbb{M}) \\ \text{Ob}(F) \downarrow & & \downarrow K_o(F) \\ \Pi_0(\mathbb{N}) & \xrightarrow{[\]_{\mathbb{N}}} & K_{o_{\mathbb{N}}}(\mathbb{N}) \end{array}$$

est commutatif. Nous notons $2\text{-}\mathcal{MonSymComp}$ la 2-catégorie des 2-monoïdes symétriques munis d'une composition, des 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques compatibles avec les compositions (voir ci-dessus pour une définition précise) et des 2-isomorphismes de 2-monoïdes symétriques. Nous définissons un 2-foncteur

$$\begin{array}{ccc} K_o : 2\text{-}\mathcal{MonSymComp} & \rightarrow & \mathbb{D}(\text{GrpCom}) \\ \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{F} & \\ (\mathbb{M}, (C_{\mathbb{M}}, \circ_{\mathbb{M}})) & \Downarrow \alpha & (\mathbb{N}, (C_{\mathbb{N}}, \circ_{\mathbb{N}})) \\ & \xrightarrow{G} & \end{array} & \mapsto & \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{K_o(F)} & \\ K_{o_{\mathbb{M}}}(\mathbb{M}) & \parallel & K_{o_{\mathbb{N}}}(\mathbb{N}) \\ & \xrightarrow{K_o(G)} & \end{array} \end{array}$$

où $\mathbb{D}(\text{GrpCom})$ désigne la 2-catégorie discrète des groupes commutatifs et des morphismes de groupes commutatifs.

Nous présentons trois exemples importants de groupes de Grothendieck.

1. Tout 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ possède une composition triviale $(\emptyset, \emptyset_{\text{Ob}(\mathbb{M})})$. Dans ce cas, le groupe de Grothendieck $K_{\emptyset_{\text{Ob}(\mathbb{M})}}(\mathbb{M})$ est simplement noté $K_0(\mathbb{M})$ et ceci définit un 2-foncteur

$$K_0 : 2\text{-}\mathcal{MonSym} \rightarrow \mathbb{D}(\text{GCom}).$$

Si $L : \text{MonCom} \rightarrow \text{GrpCom}$ désigne un adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \text{GrpCom} \rightarrow \text{MonCom}$, celui-ci s'étend en un 2-foncteur $\mathbb{D}(L) : \mathbb{D}(\text{MonCom}) \rightarrow \mathbb{D}(\text{GrpCom})$ et il est alors clair, par définition de K_0 , que nous obtenons un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-}\mathcal{MonSym} & & \\ \Pi_0 \downarrow & \simeq & \searrow K_0 \\ \mathbb{D}(\text{MonCom}) & \xrightarrow{\mathbb{D}(L)} & \mathbb{D}(\text{GrpCom}). \end{array}$$

2. Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique. Nous notons $(Aut(\mathbb{M}), \Sigma_{\mathbb{M}}, \sigma_{\mathbb{M}})$ le 2-égalisateur de la paire de 1-morphismes de 2-monoïdes symétriques $\mathbb{M} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}}} \\ \xrightarrow{Id_{\mathbb{M}}} \end{smallmatrix} \mathbb{M}$ (la propriété universelle de ce que nous appelons 2-égalisateur est similaire à celle du 2-produit fibré rappelée à la section 3.1). La notation $Aut(\mathbb{M})$ est justifiée par le fait que les objets de $Aut(\mathbb{M})$ sont exactement les couples de la forme (M, s) , où M est un objet de $\mathbb{M}$ et $s : M \rightarrow M$ est un automorphisme de M . $Aut(\mathbb{M})$ possède la composition suivante:

$$C_{Aut(\mathbb{M})} = \{((M, s), (N, t)) \in \text{Ob}(Aut(\mathbb{M})) \times \text{Ob}(Aut(\mathbb{M})) \mid M = N\}$$

et

$$\begin{aligned} \circ_{Aut(\mathbb{M})} : C_{Aut(\mathbb{M})} &\rightarrow \text{Ob}(Aut(\mathbb{M})) \\ ((M, s), (M, t)) &\mapsto (M, ts) \end{aligned}$$

Soit alors le groupe de Grothendieck $(K_{\circ_{Aut(\mathbb{M})}}(Aut(\mathbb{M})), [\]_{Aut(\mathbb{M})})$, que nous notons plus simplement $K_1(\mathbb{M})$. Celui-ci est appelé le *groupe de Whitehead* de $\mathbb{M}$. Il est facile de voir que ceci définit un 2-foncteur

$$K_1 : 2\text{-}\mathcal{M}onSym \rightarrow \mathbb{D}(\text{GrpCom}).$$

Par ailleurs, nous remarquons que tout objet (M, id_M) de $Aut(\mathbb{M})$ est tel que

$$[(M, id_M)]_{Aut(\mathbb{M})} = [(I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}})]_{Aut(\mathbb{M})}$$

puisque par définition de groupe de Grothendieck, $[(M, id_M)]_{Aut(\mathbb{M})} + [(M, id_M)]_{Aut(\mathbb{M})} = [(M, id_M)]_{Aut(\mathbb{M})}$. Nous en déduisons que pour tout objet (M, s) de $Aut(\mathbb{M})$

$$[(M, s)]_{Aut(\mathbb{M})} = [(I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}}), (M, s^{-1})]$$

puisque

$$[(M, s)]_{Aut(\mathbb{M})} + [(M, s^{-1})]_{Aut(\mathbb{M})} = [(M, id_M)]_{Aut(\mathbb{M})} = [(I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}})]_{Aut(\mathbb{M})}.$$

Dès lors, tout élément $[(M, s), (N, t)]$ de $K_1(\mathbb{M})$ est égal à $[(M \otimes_{\mathbb{M}} N, s \otimes_{\mathbb{M}} t^{-1}), (I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}})]$. Par ailleurs, si $[(M, s), (N, t)]$ et $[(M', s'), (N', t')]$ sont deux éléments de $K_1(\mathbb{M})$, alors

$$\begin{aligned} &\left[((M \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} (M' \otimes_{\mathbb{M}} N'), (s \otimes_{\mathbb{M}} t^{-1}) \otimes_{\mathbb{M}} (s' \otimes_{\mathbb{M}} t'^{-1})), (I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}}) \right] \\ &= \left[((M \otimes_{\mathbb{M}} M') \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} N'), (s \otimes_{\mathbb{M}} s') \otimes_{\mathbb{M}} (t^{-1} \otimes_{\mathbb{M}} t'^{-1})), (I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}}) \right] \end{aligned}$$

puisque $[(M \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} (M' \otimes_{\mathbb{M}} N'), (s \otimes_{\mathbb{M}} t^{-1}) \otimes_{\mathbb{M}} (s' \otimes_{\mathbb{M}} t'^{-1})]$ et $((M \otimes_{\mathbb{M}} M') \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} N'), (s \otimes_{\mathbb{M}} s') \otimes_{\mathbb{M}} (t^{-1} \otimes_{\mathbb{M}} t'^{-1}))$ sont isomorphes dans $Aut(\mathbb{M})$. Ceci nous autorise à identifier $K_1(\mathbb{M})$, en tant que groupe commutatif, à l'ensemble quotient

$$\{[(M, s)] \mid (M, s) \in \text{Ob}(Aut(\mathbb{M}))\},$$

où $[(M, s)] = [(N, t)]$ si et seulement s'il existe cinq objets (X, x) , (D, d_0) , (D, d_1) , (E, e_0) , (E, e_1) de $Aut(\mathbb{M})$ et un isomorphisme de $Aut(\mathbb{M})$

$$\begin{aligned} & \left(\left(((M \otimes_{\mathbb{M}} X) \otimes_{\mathbb{M}} D) \otimes_{\mathbb{M}} E \right) \otimes_{\mathbb{M}} E, \left((s \otimes_{\mathbb{M}} x) \otimes_{\mathbb{M}} (d_0 d_1) \right) \otimes_{\mathbb{M}} e_0 \right) \otimes_{\mathbb{M}} e_1 \simeq \\ & \left(\left(((N \otimes_{\mathbb{M}} X) \otimes_{\mathbb{M}} D) \otimes_{\mathbb{M}} D \right) \otimes_{\mathbb{M}} E, \left((t \otimes_{\mathbb{M}} x) \otimes_{\mathbb{M}} d_0 \right) \otimes_{\mathbb{M}} d_1 \right) \otimes_{\mathbb{M}} (e_0 e_1) \end{aligned}$$

Nous rappelons la proposition 1.9 du chapitre 7 de [Bas68] dont nous nous servirons dans la démonstration du lemme 4.5.2

Proposition 4.1.3. *Si $[M, s] = 0$ dans $K_1(\mathbb{M})$, alors il existe un objet F de $\mathbb{M}$ et quatre isomorphismes $a, b, c, d : M \otimes_{\mathbb{M}} (F \otimes_{\mathbb{M}} F)$ tels que*

$$s \otimes_{\mathbb{M}} id_{F \otimes_{\mathbb{M}} F} = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}.$$

3. Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de 2-monoides symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$. Nous considérons le 2-produit fibré $\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}$ sur lequel nous définissons la composition suivante:

$$C_{\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}} = \{((M, M', s), (N, P, t)) \in \text{Ob}(\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}) \times \text{Ob}(\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}) \mid M' = N\}.$$

et

$$\begin{aligned} \circ_{\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}} : C_{\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}} & \rightarrow \text{Ob}(\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}) \\ ((M, N, s), (N, P, t)) & \mapsto (M, P, ts) \end{aligned}$$

Soit alors le groupe de Grothendieck $(K_{\circ_{\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}}}(\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}), [\]_{\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}})$, que nous notons plus simplement K_F . Par un argument semblable à celui employé au point précédent, nous montrons que K_F s'identifie en tant que groupe symétrique à l'ensemble quotient

$$\{[(M, M', s)] \mid (M, M', s) \in \text{Ob}(\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M})\},$$

où l'égalité $[(M, M', s)] = [(P, P', t)]$ est vérifiée si et seulement s'il existe cinq éléments (X, X', x) , (D, D', d_0) , (D', D'', d_1) , (E, E', e_0) , (E', E'', e_1) de $\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}$ et un isomorphisme de $\mathbb{M}_{F \times_F} \times_F \mathbb{M}$

$$\left(\left(((M \otimes_{\mathbb{M}} X) \otimes_{\mathbb{M}} D) \otimes_{\mathbb{M}} E \right) \otimes_{\mathbb{M}} E', \left((M' \otimes_{\mathbb{M}} X') \otimes_{\mathbb{M}} D'' \right) \otimes_{\mathbb{M}} E' \right) \otimes_{\mathbb{M}} E''$$

$$\begin{aligned}
& f_{M', X', D'', E', E''} \left(\left(\left((s \otimes_{\mathbb{M}} x) \otimes_{\mathbb{M}} (d_0 d_1) \right) \otimes_{\mathbb{M}} e_0 \right) \otimes_{\mathbb{M}} e_1 \right) f_{M, X, D, E, E'}^{-1} \simeq \\
& \left(\left(\left((P \otimes_{\mathbb{M}} X) \otimes_{\mathbb{M}} D \right) \otimes_{\mathbb{M}} D' \right) \otimes_{\mathbb{M}} E, \left(\left((P' \otimes_{\mathbb{M}} X') \otimes_{\mathbb{M}} D' \right) \otimes_{\mathbb{M}} D'' \right) \otimes_{\mathbb{M}} E'' \right. \\
& \left. f_{P', X', D', D'', E''} \left(\left(\left((t \otimes_{\mathbb{M}} x) \otimes_{\mathbb{M}} d_0 \right) \otimes_{\mathbb{M}} d_1 \right) \otimes_{\mathbb{M}} (e_0 e_1) \right) f_{P, X, D, D', E}^{-1} \right),
\end{aligned}$$

où pour tout objet M, X, D, E, E' de $\mathbb{M}$, $f_{M, X, D, E, E'}$ désigne l'isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}
& \left(\left((F(M) \otimes_{\mathbb{N}} F(X)) \otimes_{\mathbb{N}} F(D) \right) \otimes_{\mathbb{N}} F(E) \right) \otimes_{\mathbb{N}} F(E') \simeq \\
& F \left(\left(\left((M \otimes_{\mathbb{M}} X) \otimes_{\mathbb{M}} D \right) \otimes_{\mathbb{M}} E \right) \otimes_{\mathbb{M}} E' \right)
\end{aligned}$$

Nous décrivons, pour terminer ces rappels, la manière dont le groupe de Grothendieck K_F que nous venons d'introduire est connecté aux groupes K_0 et K_1 de $\mathbb{M}$ et de $\mathbb{N}$ au moyen d'une suite exacte. Pour cela, nous considérons le morphisme de groupes commutatifs

$$\begin{aligned}
d : K_F & \rightarrow K_0(\mathbb{M}) \\
[(M, M', s)] & \mapsto [(M, M')].
\end{aligned}$$

Afin de construire un morphisme de groupes commutatifs entre $K_1(\mathbb{M})$ et K_F , nous rappelons la définition suivante.

Définition 4.1.4. Un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ est *cofinal* si pour tout objet N de $\mathbb{N}$, il existe un objet N' de $\mathbb{N}$, un objet M de $\mathbb{M}$ et un isomorphisme de $\mathbb{N}$

$$t : N \otimes_{\mathbb{N}} N' \rightarrow F(M).$$

Nous rappelons alors la proposition suivante qui découle de 3.1 de [Bas67] (ou de la proposition 4.3 du chapitre VII de [Bas68]).

Proposition 4.1.5. Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme cofinal de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$. Il existe un unique morphisme de groupes commutatifs $d' : K_1(\mathbb{N}) \rightarrow K_F$ entre $K_1(\mathbb{N})$ et K_F tel que pour tout objet M de $\mathbb{M}$ et tout $[F(M), f] \in K_1(\mathbb{N})$, on ait $d'([F(M), f]) = [M, M, f]$.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème 4.6 de [Bas67] (ou le théorème 5.3 du chapitre VII de [Bas68]).

Théorème 4.1.6. Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme cofinal de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{G}rpd$. La suite

$$K_1(\mathbb{M}) \xrightarrow{K_1(F)} K_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{d'} K_F \xrightarrow{d} K_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{K_0(F)} K_0(\mathbb{N})$$

est exacte.

4.2 Caractérisation de $K_0(\mathbb{M})$

Soit $\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym \rightarrow 2\text{-}\mathcal{G}rpSym$ un biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U}$ dont l'existence est assurée par le corollaire 3.5.10. L'objectif de cette section est de montrer qu'il existe un 2-isomorphisme naturel κ_0

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-}\mathcal{M}onSym & \xrightarrow{\mathbb{L}} & 2\text{-}\mathcal{G}rpSym \\ & \searrow K_0 & \downarrow \mathbb{I}I_0 \\ & & \mathbb{D}(\mathcal{G}rpCom). \end{array}$$

κ_0 (entre les flèches)

Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique. Nous désignons par $Coker(\mathbb{I}I_0(\Delta_{\mathbb{M}}))$ un conoyau de $\mathbb{I}I_0(\Delta_{\mathbb{M}})$ dans $\mathbb{D}(\mathcal{M}onCom)$, où $\Delta_{\mathbb{M}}$ est le 1-morphisme diagonal de $\mathbb{M}$ dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym$. Étant donné que $\mathbb{I}I_0(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \simeq Coker(\mathbb{I}I_0(\Delta_{\mathbb{M}}))$ au vu du corollaire 3.5.10, nous déduisons de la proposition 3.2.1 et du corollaire 3.2.4 que $\mathbb{I}I_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ peut se décrire comme le groupe commutatif dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble quotient

$$(\mathbb{I}I_0(\mathbb{M} \times \mathbb{M}))/R,$$

où $([M, N], [M', N']) \in R$ s'il existe deux éléments P, Q de $\mathbb{I}I_0(\mathbb{M})$ tels que

$$[M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P] = [M' \otimes_{\mathbb{M}} Q, N' \otimes_{\mathbb{M}} Q]$$

dans $\mathbb{I}I_0(\mathbb{M} \times \mathbb{M})$, c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme de $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})$

$$(f, g) : (M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P) \rightarrow (M' \otimes_{\mathbb{M}} Q, N' \otimes_{\mathbb{M}} Q).$$

Théorème 4.2.1. Si K_0 désigne le 2-foncteur décrit dans la section précédente, alors $K_0 = \mathbb{I}I_0\mathbb{L}$.

Démonstration. Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{G}rpd$. Nous commençons par voir que $K_0(\mathbb{M}) = \mathbb{I}I_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ comme groupes commutatifs. Pour cela, prenons $[(M, N)] = [(M', N')]$ dans $K_0(\mathbb{M})$. Dans ce cas, il existe un objet X de $\mathbb{M}$ et un isomorphisme $t : (M \otimes_{\mathbb{M}} N') \otimes_{\mathbb{M}} X \rightarrow (N \otimes_{\mathbb{M}} M') \otimes_{\mathbb{M}} X$ de $\mathbb{M}$. Dès lors, $N' \otimes_{\mathbb{M}} X$ et $N \otimes_{\mathbb{M}} X$ sont deux objets de $\mathbb{M}$ et

$$M \otimes_{\mathbb{M}} (N' \otimes_{\mathbb{M}} X) \xrightarrow{a_{M, N', X}} (M \otimes_{\mathbb{M}} N') \otimes_{\mathbb{M}} X \xrightarrow{t} (N \otimes_{\mathbb{M}} M') \otimes_{\mathbb{M}} X \xrightarrow{c_{M, M'} \otimes_{\mathbb{M}} id_X}$$

$$\begin{aligned}
(M' \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} X &\xrightarrow{a_{M', N, X}^{-1}} M' \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} X), \\
N \otimes_{\mathbb{M}} (N' \otimes_{\mathbb{M}} X) &\xrightarrow{a_{N, N', X}} (N \otimes_{\mathbb{M}} N') \otimes_{\mathbb{M}} X \xrightarrow{c_{N, N'} \otimes_{\mathbb{M}} id_X} (N' \otimes_{\mathbb{M}} N) \otimes_{\mathbb{M}} X \\
&\xrightarrow{a_{N', N, X}^{-1}} N' \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} X)
\end{aligned}$$

sont deux isomorphismes de $\mathbb{M}$ induisant un isomorphisme de $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$

$$(M \otimes_{\mathbb{M}} (N' \otimes_{\mathbb{M}} X), N \otimes_{\mathbb{M}} (N' \otimes_{\mathbb{M}} X)) \simeq (M' \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} X), N' \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} X)),$$

et donc $[(M, N)] = [(M', N')]$ dans $\Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$. Réciproquement, si $[(M, N)] = [(M', N')]$ dans $\Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$, alors il existe deux objets P, Q de $\mathbb{M}$ et un isomorphisme

$$(s, t) : (M \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P) \rightarrow (M' \otimes_{\mathbb{M}} Q, N' \otimes_{\mathbb{M}} Q)$$

de $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})$. Dans ce cas, il est clair qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{M}$

$$\begin{aligned}
(M \otimes_{\mathbb{M}} N') \otimes_{\mathbb{M}} (P \otimes_{\mathbb{M}} Q) &\simeq (M \otimes_{\mathbb{M}} P) \otimes_{\mathbb{M}} (N' \otimes_{\mathbb{M}} Q) \xrightarrow{s \otimes_{\mathbb{M}} t^{-1}} \\
(M' \otimes_{\mathbb{M}} Q) \otimes_{\mathbb{M}} (N \otimes_{\mathbb{M}} P) &\simeq (N \otimes_{\mathbb{M}} M') \otimes_{\mathbb{M}} (P \otimes_{\mathbb{M}} Q)
\end{aligned}$$

et $[(M, N)] = [(M', N')]$ dans $K_0(\mathbb{M})$. Ceci montre que $K_0(\mathbb{M}) = \Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ comme ensembles. De plus, comme les structures de groupe de $K_0(\mathbb{M})$ et de $\Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ coïncident, cette égalité est également une égalité de groupes commutatifs.

Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques interne à $\mathcal{G}rp d$. Si $[(M, N)] \in K_0(\mathbb{M}) = \Pi_0(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$, alors

$$K_0(F)([(M, N)]) = (F(M), F(N)) = \Pi_0(\mathbb{L}(F))([(M, N)])$$

et $K_0(F) = \Pi_0(\mathbb{L}(F))$, ce qui termine de montrer que $K_0 = \Pi_0 \mathbb{L}$. □

Corollaire 4.2.2. *Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{G}rp d$. Il existe un isomorphisme de groupes commutatifs*

$$K_0(\mathbb{M}) \simeq Coker(\Pi_0(\Delta_{\mathbb{M}})).$$

4.3 Caractérisation de $K_1(\mathbb{M})$

Soit $\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym \rightarrow 2\text{-}\mathcal{G}rpSym$ un biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U}$ dont l'existence est assurée par le corollaire 3.5.10. L'objectif de cette section

est de montrer qu'il existe un 2-isomorphisme naturel κ_1

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-}\mathcal{M}onSym & \xrightarrow{\mathbb{L}} & 2\text{-}\mathcal{G}rpSym \\ & \searrow K_1 & \downarrow \Pi_1 \\ & & \mathbb{D}(\mathcal{G}rpCom). \end{array}$$

κ_1 is indicated by a curved arrow from $2\text{-}\mathcal{M}onSym$ to $\mathbb{D}(\mathcal{G}rpCom)$.

Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique. Nous désignons par $Coker(\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}}))$ un conoyau de $\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}})$ dans $\mathcal{M}onCom$, où $\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}}$ est la factorisation canonique à travers le 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{M} & & & & \mathbb{M} \\ \Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}} \searrow & & & & \downarrow \Delta_{\mathbb{M}} \\ \mathbb{M} & \times & \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ \downarrow \mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}} & & \downarrow \mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}} & & \downarrow \mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}} \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{M}}} & \mathbb{M} \times \mathbb{M} & \xrightarrow{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}} & (\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}} \end{array}$$

P is indicated by a curved arrow from $\mathbb{M}$ to $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$.

Du corollaire 3.5.10, nous savons que

$$\Pi_1(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \simeq Coker(\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}})).$$

Nous déduisons de la proposition 3.2.1 et du corollaire 3.2.4 que $\Pi_1(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ peut se décrire comme le groupe commutatif dont les éléments sont les classes d'équivalence de la forme $[M, N, [s, t]]$, où M et N sont deux objets de $\mathbb{M}$ et $[s, t] : (M, M) \rightarrow (N, N)$ est un morphisme de $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$. Deux telles classes $[M, N, [s, t]]$ et $[U, V, [u, v]]$ sont égales s'il existe deux objets P et Q de $\mathbb{M}$ et deux isomorphismes $f : M \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow U \otimes_{\mathbb{M}} Q$, $g : N \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow V \otimes_{\mathbb{M}} Q$ de $\mathbb{M}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes_{\mathbb{M}} P, M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{[s \otimes_{\mathbb{M}} id_P, t \otimes_{\mathbb{M}} id_P]} & (N \otimes_{\mathbb{M}} P, N \otimes_{\mathbb{M}} P) \\ \downarrow [f, f] & & \downarrow [g, g] \\ (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, U \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{[u \otimes_{\mathbb{M}} id_Q, v \otimes_{\mathbb{M}} id_Q]} & (V \otimes_{\mathbb{M}} Q, V \otimes_{\mathbb{M}} Q) \end{array}$$

est commutatif dans $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$. Si $[M, N, [s, t]]$ et $[U, V, [u, v]]$ sont deux éléments de $\Pi_1 \mathbb{L}(\mathbb{M})$, alors leur produit est donné par

$$[M, N, [s, t]] [U, V, [u, v]] = [M \otimes_{\mathbb{M}} U, V \otimes_{\mathbb{M}} N, [s \otimes_{\mathbb{M}} u, v \otimes_{\mathbb{M}} t]].$$

L'élément neutre est la classe $\left[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}, id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}] \right]$ et nous avons déjà montré dans le lemme 3.3.7 que les classes $\left[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}, id_{I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}}] \right]$ et $[M, M, [id_M, id_M]]$ sont égales pour tout objet M de $\mathbb{M}$. L'inverse d'une classe $[M, N, [s, t]]$ est donné par la classe $[M, N, [s, t]]^{-1} = [N, M, [s^{-1}, t^{-1}]]$. Le lemme suivant va nous aider à établir un lien entre $\Pi_1 \mathbb{L}(\mathbb{M})$ et $\Pi_0(Aut(\mathbb{M}))$.

Lemme 4.3.1. *Soit $[M, N, [s, t]] \in \Pi_1 \mathbb{L}(\mathbb{M})$. Nous avons que*

$$[M, N, [s, t]] = [M, M, [t^{-1}s, id_M]].$$

Démonstration. Le résultat se déduit du fait que (id_M, t^{-1}) est un isomorphisme entre $(M, N, (s, t))$ et $(M, M, (t^{-1}s, id_M))$ dans $\mathbb{M}_{\Delta_{\mathbb{M}}} \times_{\Delta_{\mathbb{M}}} \mathbb{M}$, puisque

$$(t^{-1}, t^{-1})(s, t) = (t^{-1}s, id_M)(id_M, id_M)$$

dans $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$. □

Nous considérons alors la relation

$$\begin{aligned} [\]_1 : \Pi_0(Aut(\mathbb{M})) &\rightarrow \Pi_1 \mathbb{L}(\mathbb{M}) \\ (M, s) &\mapsto [M, M, [s, id_M]] \end{aligned}$$

qui est clairement un morphisme de monoïdes commutatifs.

Afin de démontrer, pour tout 2-monoïde symétrique $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ interne à $\mathcal{Grpd}$, l'existence d'un isomorphisme de groupes commutatifs entre $\Pi_1 \mathbb{L}(\mathbb{M})$ et $K_1(\mathbb{M})$, nous introduisons le lemme suivant.

Lemme 4.3.2. *Soient un groupe commutatif $(G, *_G, e_G, ()_G^*)$ et un morphisme de monoïdes commutatifs $f : \Pi_0(Aut(\mathbb{M})) \rightarrow G$ tels que si (M, s) et (M, t) sont deux éléments de $Aut(\mathbb{M})$, alors $f([M \otimes_{\mathbb{M}} M, t \otimes s]) = f([M, ts])$. Dans ce cas*

1. *Si M et N sont deux objets de $\mathbb{M}$ et $u : M \rightarrow N$, $e : N \rightarrow N$, $u' : N \rightarrow M$ trois morphismes de $\mathbb{M}$, alors*

$$f([M, u'eu]) = f([M, u'u]) *_G f([N, e]).$$

2. *Si (M, id_M) est un élément de $Aut(\mathbb{M})$, alors*

$$f([M, id_M]) = e_G.$$

3. *Si (M, s) est un objet de $Aut(\mathbb{M})$, alors*

$$f([M, s^{-1}]) = (f([M, s]))_G^*.$$

Démonstration.

1. Nous calculons que

$$\begin{aligned} f([M, u'eu]) &= f([M, u'eu'^{-1}u'u]) \\ &= f([M, u'eu'^{-1}]) *_G f([M, u'u]) \end{aligned}$$

et $f([M, u'eu'^{-1}]) = f([N, e])$ puisque $u'^{-1} : (M, u'eu'^{-1}) \rightarrow (N, e)$ est un isomorphisme de $\text{Aut}(\mathbb{M})$.

2. Nous calculons que

$$\begin{aligned} f([M, id_M]) &= f([M, id_M id_M]) \\ &= f([M, id_M]) *_G f([M, id_M]) \end{aligned}$$

et donc $f([M, id_M]) = e_G$.

3. Le résultat découle du point précédent, puisque

$$\begin{aligned} f([M, s]) *_G f([M, s^{-1}]) &= f([M, id_M]) \\ &= e_G. \end{aligned}$$

□

Nous énonçons alors le résultat principal de cette section.

Théorème 4.3.3. *Le couple $(\mathbb{I}_1\mathbb{L}(\mathbb{M}), [\]_1)$ est un groupe de Grothendieck pour $(\text{Aut}(\mathbb{M}), \circ_{\text{Aut}(\mathbb{M})})$.*

Démonstration. Soient (M, s) et (M, t) deux objets de $\text{Aut}(\mathbb{M})$. Nous devons montrer que $[(M \otimes_{\mathbb{M}} M, t \otimes_{\mathbb{M}} s)]_1 = [(M, ts)]_1$, c'est-à-dire que

$$\left[M \otimes_{\mathbb{M}} M, M \otimes_{\mathbb{M}} M, \left[t \otimes_{\mathbb{M}} s, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \right] = [M, M, [ts, id_M]].$$

Or, puisque $[M, M, [id_M, id_M]]$ est l'élément neutre de $\mathbb{I}_1\mathbb{L}(\mathbb{M})$, il est encore équivalent de montrer que

$$\begin{aligned} &\left[M \otimes_{\mathbb{M}} M, M \otimes_{\mathbb{M}} M, \left[t \otimes_{\mathbb{M}} s, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \right] \\ &= [M \otimes_{\mathbb{M}} M, M \otimes_{\mathbb{M}} M, [id_M \otimes_{\mathbb{M}} (ts), id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M}]]. \end{aligned}$$

Or, dans $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$, nous calculons que

$$\begin{aligned} &\left[t \otimes_{\mathbb{M}} s, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \\ &= \left[c_{\mathbb{M}_{M,M}}, c_{\mathbb{M}_{M,M}} \right] \left[id_M \otimes_{\mathbb{M}} t, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \left[c_{\mathbb{M}_{M,M}}, c_{\mathbb{M}_{M,M}} \right] \left[id_M \otimes_{\mathbb{M}} s, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \\ &= [id_M \otimes_{\mathbb{M}} (ts), id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M}] \end{aligned}$$

puisque dans $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$, nous avons que

$$\begin{aligned} & \left[c_{\mathbb{M}M, M}, c_{\mathbb{M}M, M} \right] \\ &= \left[g_{\mathbb{M}M \otimes_{\mathbb{M}} M}^{-1}, g_{\mathbb{M}M \otimes_{\mathbb{M}} M}^{-1} \right] \left[id_{I_{\mathbb{M}}} \otimes_{\mathbb{M}} c_{\mathbb{M}M, M}, id_{I_{\mathbb{M}}} \otimes_{\mathbb{M}} c_{\mathbb{M}M, M} \right] \left[g_{\mathbb{M}M \otimes_{\mathbb{M}} M}, g_{\mathbb{M}M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \\ &= \left[id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M}, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} M} \right] \end{aligned}$$

ce qui termine de montrer l'identité désirée.

Soient alors un groupe commutatif $(G, *_G, e_G, ()_G^*)$ et un morphisme de monoïdes commutatifs $f : \Pi_0(Aut(\mathbb{M})) \rightarrow G$ tels que si (M, s) et (M, t) sont deux éléments de $Aut(\mathbb{M})$, alors $f([M \otimes_{\mathbb{M}} M, t \otimes s]) = f([M, ts])$. Considérons $[M, N, [s, t]]$ un élément de $\Pi_1\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Par le lemme 4.3.1, nous savons que

$$[M, N, [s, t]] = [M, M, [t^{-1}s, id_M]] = [(M, t^{-1}s)]_1.$$

Ceci nous incite à définir la relation

$$\begin{aligned} \hat{f} : \Pi_1\mathbb{L}(\mathbb{M}) &\rightarrow G \\ [M, N, [s, t]] &\mapsto f((M, t^{-1}s)). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\hat{f}$ est une application. Supposons que $[M, N, [s, t]]$ et $[U, V, [u, v]]$ soient deux objets de $\Pi_1\mathbb{L}(\mathbb{M})$ tels que $[M, N, [s, t]] = [U, V, [u, v]]$, et donc tels que $[M, M, [t^{-1}s, id_M]] = [U, U, [v^{-1}u, id_U]]$. Ainsi, il existe deux objets P, Q de $\mathbb{M}$ et deux flèches parallèles $h, g : M \otimes P \rightarrow U \otimes Q$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes_{\mathbb{M}} P, M \otimes_{\mathbb{M}} P) & \xrightarrow{[(t^{-1}s) \otimes_{\mathbb{M}} id_P, id_{M \otimes_{\mathbb{M}} P}]} & (M \otimes_{\mathbb{M}} P, M \otimes_{\mathbb{M}} P) \\ \downarrow [h, f] & & \downarrow [g, g] \\ (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, U \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{[(v^{-1}u) \otimes_{\mathbb{M}} id_Q, id_{U \otimes_{\mathbb{M}} Q}]} & (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, U \otimes_{\mathbb{M}} Q) \end{array}$$

commute dans $(\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$. Deux cas sont alors possibles. Soit ce diagramme commute dans $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ et dans ce cas, $h = g$ et $h : (M \otimes P, (t^{-1}s) \otimes_{\mathbb{M}} id_P) \rightarrow (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, (v^{-1}u) \otimes_{\mathbb{M}} id_Q)$ est un isomorphisme de $Aut(\mathbb{M})$, ce qui implique par définition de morphisme de monoïdes que $f((M, t^{-1}s)) *_G f((P, id_P)) = f((U, v^{-1}u)) *_G f((Q, id_Q))$ et il suit alors du point 2 du lemme 4.3.2 que $f((M, t^{-1}s)) = f((U, v^{-1}u))$, soit ce diagramme ne commute pas dans $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ et dans ce cas, il existe un naturel n non nul, n objets $(M_1, M'_1), (M_2, M'_2), \dots, (M_n, M'_n)$ de $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$, $n+1$ flèches $(G_i, g_i) : (M_i, M'_i) \rightarrow (M_{i+1}, M'_{i+1})$ de $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ (en notant $(M_0, M'_0) = (M \otimes_{\mathbb{M}} P, M \otimes_{\mathbb{M}} P)$, $(M_{n+1}, M'_{n+1}) = (U \otimes_{\mathbb{M}} Q, U \otimes_{\mathbb{M}} Q)$) telles que

$$(g((t^{-1}s) \otimes_{\mathbb{M}} id_P), g) = (G_n G_{n-1} \dots G_1 G_0, g_n g_{n-1} \dots g_1 g_0)$$

et il existe n endomorphismes $(a_i, a'_i) : (M_i, M'_i) \rightarrow (M_i, M'_i)$ de $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\left(((v^{-1}u) \otimes_{\mathbb{M}} id_Q) h, h \right) = (G_n a_n G_{n-1} a_{n-1} \dots G_1 a_1 G_0, g_n a'_n g_{n-1} a'_{n-1} \dots g_1 a'_1 g_0)$$

de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un objet (M^i, M'^i) de $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ et un objet X_i de $\mathbb{M}$ de sorte que, soit

$$a_i = id_{M^i} \otimes_{\mathbb{M}} c_{\mathbb{M}_{X_i, X_i}}$$

$$a'_i = id_{M'^i} \otimes_{\mathbb{M}} c_{\mathbb{M}_{X_i, X_i}},$$

soit il existe un naturel n_i non nul et n_i objets $M_{i,1}, M_{i,2}, \dots, M_{i,n_i}$ tels que

$$a_i = \left(\dots \left((id_{M^i} \otimes_{\mathbb{M}} c_{\mathbb{M}_{X_i, X_i}}) \otimes_{\mathbb{M}} id_{M_{i,1}} \right) \otimes_{\mathbb{M}} id_{M_{i,2}} \right) \otimes_{\mathbb{M}} \dots \otimes_{\mathbb{M}} id_{M_{i,n_i}}$$

$$a'_i = \left(\dots \left((id_{M'^i} \otimes_{\mathbb{M}} c_{\mathbb{M}_{X_i, X_i}}) \otimes_{\mathbb{M}} id_{M_{i,1}} \right) \otimes_{\mathbb{M}} id_{M_{i,2}} \right) \otimes_{\mathbb{M}} \dots \otimes_{\mathbb{M}} id_{M_{i,n_i}}.$$

En vertu du point 2 du lemme 4.3.2, nous calculons que

$$\begin{aligned} & f\left((U, v^{-1}u) \right) \\ &= f\left(\left(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, (v^{-1}u) \otimes_{\mathbb{M}} id_Q \right) \right) \\ &= f\left(\left(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, ((v^{-1}u) \otimes_{\mathbb{M}} id_Q) h h^{-1} \right) \right) \\ &= f\left(\left(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, G_n a_n G_{n-1} a_{n-1} \dots G_1 a_1 G_0 g_0^{-1} a_1'^{-1} g_1^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} a_n'^{-1} g_n^{-1} \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant le point 1 du lemme 4.3.2, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
f\left(\left(U, v^{-1}u\right)\right) &= f\left(\left(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, G_n G_{n-1} \dots G_1 G_0 g_0^{-1} g_1^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} g_n^{-1}\right)\right) \\
&\quad *_G f\left(\left(M_n, a_n\right)\right) *_G \dots *_G f\left(\left(M_1, a_1\right)\right) \\
&\quad *_G f\left(\left(M'_1, a'^{-1}_1\right)\right) *_G \dots *_G f\left(\left(M'_n, a'^{-1}_n\right)\right) \\
&= f\left(\left(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, g((t^{-1}s) \otimes_{\mathbb{M}} id_P)g^{-1}\right)\right) \\
&\quad *_G f\left(\left(M_n, a_n\right)\right) *_G \dots *_G f\left(\left(M_1, a_1\right)\right) \\
&\quad *_G f\left(\left(M'_1, a'^{-1}_1\right)\right) *_G \dots *_G f\left(\left(M'_n, a'^{-1}_n\right)\right) \\
&= f\left(\left(U \otimes_{\mathbb{M}} Q, gg^{-1}\right)\right) *_G f\left(\left(M \otimes_{\mathbb{M}} P, (t^{-1}s) \otimes_{\mathbb{M}} id_P\right)\right) \\
&\quad *_G f\left(\left(M_n, a_n\right)\right) *_G \dots *_G f\left(\left(M_1, a_1\right)\right) \\
&\quad *_G f\left(\left(M'_1, a'^{-1}_1\right)\right) *_G \dots *_G f\left(\left(M'_n, a'^{-1}_n\right)\right).
\end{aligned}$$

Nous calculons par ailleurs, en utilisant le point 2 du lemme 4.3.2, que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f\left(\left(M_i, a_i\right)\right) = f\left(\left(X_i \otimes_{\mathbb{M}} X_i, c_{X_i, X_i}\right)\right)$ et $f\left(\left(M'_i, a'^{-1}_i\right)\right) = f\left(\left(X_i \otimes_{\mathbb{M}} X_i, c_{\mathbb{M}_{X_i, X_i}}^{-1}\right)\right)$, ce qui implique au vu du point 3 du lemme 4.3.2 que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f\left(\left(M_i, a_i\right)\right) *_G f\left(\left(M'_i, a'^{-1}_i\right)\right) = 0$. Dès lors, en utilisant une dernière fois le point 2 du lemme 4.3.2, nous trouvons finalement que

$$f\left(\left(U, v^{-1}u\right)\right) = f\left(\left(M, t^{-1}s\right)\right).$$

En conclusion, nous avons bien montré dans chacun des deux cas que

$$\hat{f}([M, N, [s, t]]) = \hat{f}([U, V, [u, v]])$$

et donc que $\hat{f}$ est une application.

Nous devons alors montrer que $\hat{f}$ est un morphisme de groupes commutatifs. Pour cela, nous commençons par remarquer que $\hat{f}$ préserve l'élément neutre car $\hat{f}([I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [id_{I_{\mathbb{M}}}, id_{I_{\mathbb{M}}}]]) = f((I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{M}}})) = e_G$ par définition de morphisme de monoïdes commutatifs. D'autre part, $\hat{f}$ préserve la loi de groupe, puisque

pour tout objet $[M, N, [s, t]]$, $[U, V, [u, v]]$ de $\mathbb{I}_1\mathbb{L}(\mathbb{M})$, on a que

$$\begin{aligned}\hat{f}([U, V, [u, v]][M, N, [s, t]]) &= \hat{f}([M \otimes_{\mathbb{M}} U, N \otimes_{\mathbb{M}} V, [s \otimes_{\mathbb{M}} u, t \otimes_{\mathbb{M}} v]]) \\ &= f([M \otimes_{\mathbb{M}} U, (t \otimes_{\mathbb{M}} v)^{-1}(s \otimes_{\mathbb{M}} u)]) \\ &= f([M \otimes_{\mathbb{M}} U, (t^{-1}s) \otimes_{\mathbb{M}} (v^{-1}u)]) \\ &= f([M, t^{-1}s] *_G f([U, v^{-1}u])) \\ &= \hat{f}([M, N, [s, t]]) *_G \hat{f}([U, V, [u, v]])\end{aligned}$$

Finalement, il est clair que $\hat{f}[\]_1 = f$ et au vu du lemme 4.3.1, $\hat{f}$ est l'unique morphisme de groupes commutatifs entre $\mathbb{I}_1\mathbb{L}(\mathbb{M})$ et G possédant cette propriété. $\square$

Nous montrons enfin qu'il existe un 2-isomorphisme $\kappa_1 : K_1 \Rightarrow \mathbb{I}_1\mathbb{L}$.

Proposition 4.3.4. *Il existe un 2-isomorphisme naturel*

$$\kappa_1 : K_1 \Rightarrow \mathbb{I}_1\mathbb{L}.$$

Démonstration. Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{G}rpd$. Par le théorème 4.3.3, il existe un unique isomorphisme de groupes commutatifs $\kappa_{1,\mathbb{M}} : K_1(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{I}_1(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ entre $K_1(\mathbb{M})$ et $\mathbb{I}_1(\mathbb{L}(\mathbb{M}))$ tel que

$$\kappa_{1,\mathbb{M}}[\]_{Aut(\mathbb{M})} = [\]_{1,\mathbb{M}}.$$

Soit alors $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{G}rpd$. Celui-ci induit un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{G}rpd$

$$\begin{array}{ccc} Aut(F) : Aut(\mathbb{M}) & \rightarrow & Aut(\mathbb{N}) \\ (M, s) & & (F(M), F(s)) \\ \downarrow u & \mapsto & \downarrow F(u) \\ (M', t) & & (F(M'), F(t)). \end{array}$$

Il est alors clair que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}_0(Aut(\mathbb{M})) & \xrightarrow{[\]_{Aut(\mathbb{M})}} & K_1(\mathbb{M}) \\ \downarrow \mathbb{I}_0(Aut(F)) & \searrow [\]_{1,\mathbb{M}} & \downarrow \kappa_{1,\mathbb{M}} \\ & & \mathbb{I}_1(\mathbb{L}(\mathbb{M})) \\ & & \downarrow \mathbb{I}_1(\mathbb{L}(F)) \\ \mathbb{I}_0(Aut(\mathbb{N})) & \xrightarrow{[\]_{1,\mathbb{N}}} & \mathbb{I}_1(\mathbb{L}(\mathbb{N})) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_0(\text{Aut}(\mathbb{M})) & \xrightarrow{[\]_{\text{Aut}(\mathbb{M})}} & K_1(\mathbb{M}) \\
\downarrow \Pi_0(\text{Aut}(F)) & & \downarrow K_1(F) \\
\Pi_0(\text{Aut}(\mathbb{N})) & \xrightarrow{[\]_{\text{Aut}(\mathbb{N})}} & K_1(\mathbb{N}) \\
& \searrow [\]_{1,\mathbb{N}} & \downarrow \kappa_{1,\mathbb{N}} \\
\Pi_0(\text{Aut}(\mathbb{N})) & \xrightarrow{[\]_{1,\mathbb{N}}} & \Pi_1(\mathbb{L}(\mathbb{N}))
\end{array}$$

sont commutatifs. Dès lors, par l'unicité de la factorisation dans la définition 4.1.2, nous voyons que $\Pi_1(\mathbb{L}(F))\kappa_{1,\mathbb{M}} = \kappa_{1,\mathbb{N}}K_1(F)$, ce qui termine de montrer que l'isomorphisme κ_1 est naturel. $\square$

Corollaire 4.3.5. *Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique interne à $\mathcal{Grpd}$. Il existe un isomorphisme de groupes commutatifs*

$$K_1(\mathbb{M}) \simeq \text{Coker}(\Pi_0(\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}})),$$

où $\Delta_{\Delta_{\mathbb{M}}}$ est la factorisation canonique rappelée en début de section.

4.4 Caractérisation de K_F

Soient $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques et $((\text{Coker}(F), \otimes_{\text{CF}}, a_{\text{CF}}, I_{\text{CF}}, g_{\text{CF}}, d_{\text{CF}}, c_{\text{CF}}), (P_F, p, p_I), \eta_F)$ un 2-conoyau de F dans $2\text{-}\mathcal{MonSym}$. L'objectif de cette section est d'établir l'existence d'un isomorphisme de groupes symétriques entre K_F et $\Pi_1(\mathbb{N}_F)$ dans chacun des deux cas particuliers suivants:

- la 2-action $\odot_F$ induite par F (voir corollaire 3.5.8) est identitaire sur la symétrie diagonale (ce qui signifie que pour tout objet M de $\mathbb{M}$ et tout objet N de $\mathbb{N}$, que l'égalité $id_N \otimes_N F(c_{\mathbb{M}_{M,M}}) = id_{N \otimes_N F(M \otimes_{\mathbb{M}} M)}$ est satisfaite);
- F est un morphisme de 2-groupes symétriques.

Nous désignons par $Coker(\Pi_0(\Delta_F))$ un conoyau de $\Pi_0(\Delta_F)$ dans $\mathbb{M}onCom$, où Δ_F est la factorisation canonique à travers le 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{M} & & & & \\
 \Delta_F \searrow & & & & \\
 \mathbb{M} & \xrightarrow{P \mathcal{E} \odot_F} & \times & \xrightarrow{P \mathcal{E} \odot_F} & \mathbb{M} \\
 \downarrow & & & & \downarrow F \\
 \mathbb{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N} & \xrightarrow{P \mathcal{E} \odot_F} & \mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F}
 \end{array}$$

En vertu de la proposition 3.5.8, nous avons

$$\Pi_1(\mathbb{N}_F) \simeq Coker(\Pi_0(\Delta_F)).$$

Nous déduisons de la proposition 3.2.1 et du corollaire 3.2.4 que $\Pi_1(\mathbb{N}_F)$ peut se décrire comme le groupe commutatif dont les éléments sont les classes d'équivalence de la forme $[M_1, M_2, [s]]$, où M_1, M_2 sont deux objets de $\mathbb{M}$ et $[s] : F(M_1) \rightarrow F(M_2)$ est un isomorphisme de $\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F}$. Deux classes $[M_1, M_2, [s]]$, $[U_1, U_2, [u]]$ sont égales s'il existe deux objets P et Q de $\mathbb{M}$ et deux isomorphismes $f : M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow U_1 \otimes_{\mathbb{M}} Q$, $g : M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow U_2 \otimes_{\mathbb{M}} Q$ de $\mathbb{M}$ tels que

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P & \xrightarrow{[s \otimes_{\mathbb{M}} id_P]} & M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P \\
 [f] \downarrow & & \downarrow [g] \\
 U_1 \otimes_{\mathbb{M}} Q & \xrightarrow{[u \otimes_{\mathbb{M}} id_Q]} & U_2 \otimes_{\mathbb{M}} Q
 \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F}$. Si $[M_1, M_2, [s]]$ et $[U_1, U_2, [u]]$ sont deux éléments de $\Pi_1(\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F} / \odot_F^{\mathcal{E} \odot_F})$, alors leur produit est donné par

$$[M_1, M_2, [s]][U_1, U_2, [u]] = [M_1 \otimes_{\mathbb{M}} U_1, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} U_2, [f_{M_2, U_2}(s \otimes_{\mathbb{M}} t)f_{M_1, U_1}^{-1}]].$$

L'élément neutre est la classe $[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [id_{F(I_{\mathbb{M}})}]]$ et nous avons déjà montré dans le lemme 3.3.7 que les classes $[I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, [id_{F(I_{\mathbb{M}})}]]$ et $[M, M, [id_{F(M)}]]$ sont égales pour tout objet M de $\mathbb{M}$. L'inverse d'une classe $[M_1, M_1, [s]]$ est donné par la classe $[M_1, M_2, [s]]^{-1} = [M_2, M_1, [s^{-1}]]$. Nous considérons alors la relation

$$\begin{array}{ccc}
 []_F : \Pi_0(\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}) & \rightarrow & \Pi_1(\mathbb{N}_F) \\
 [M_1, M_2, s] & \mapsto & [M_1, M_2, [s]]
 \end{array}$$

qui est clairement un morphisme de monoïdes commutatifs.

Lemme 4.4.1. Soient un groupe commutatif $(G, *_G, e_G, ()_G^*)$ et un morphisme de monoïdes commutatifs $f : \Pi_0(\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}) \rightarrow G$ tel que si (M_1, M_2, s) et (M_2, M_3, t) sont deux objets de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$, alors $f([M_1, M_2, s][M_2, M_3, t]) = f([M_1, M_3, ts])$. Dans ce cas

1. Si $(M, M, id_{F(M)})$ est un objet de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$, alors

$$f([M, M, id_{F(M)}]) = e_G.$$

2. Si $e : M_1 \rightarrow M_2$ est un morphisme de $\mathbb{M}$, alors

$$[M_1, M_2, F(e)] = [M_2, M_2, id_{F(M_2)}]$$

dans $\Pi_0(\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M})$. En particulier si K_1, K_2 sont deux objets de $\mathbb{M}$ et si $s : F(K_1) \rightarrow F(M_1)$ et $t : F(M_2) \rightarrow F(K_2)$ sont deux isomorphismes de $\mathbb{N}$, alors

$$f([K_1, K_2, tF(e)s]) = f([K_1, M_1, s]) *_G f([M_2, K_2, t])$$

et si $M_1 = M_2$, alors

$$f([K_1, K_2, tF(e)s]) = f([K_1, K_2, ts])$$

3. Si (M_1, M_2, s) est un objet de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$, alors

$$f([M_2, M_1, s^{-1}]) = (f([M_1, M_2, s]))_G^*.$$

Démonstration.

1. Par définition de f , nous calculons que

$$\begin{aligned} f([M, M, id_{F(M)}]) &= f([M, M, id_{F(M)} id_{F(M)}]) \\ &= f([M, M, id_{F(M)}]) *_G f([M, M, id_{F(M)}]) \end{aligned}$$

et donc $f([M, M, id_{F(M)}]) = e_G$ puisque G est un groupe.

2. Le premier résultat suit du fait que le couple $(e, id_{M_2}) : (M_1, M_2, F(e)) \rightarrow (M_2, M_2, id_{F(M_2)})$ est un isomorphisme de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$. Dès lors, par définition de f et au vu du point précédent, nous calculons que

$$\begin{aligned} f([K_1, K_2, tF(e)s]) &= f([K_1, M_1, s]) *_G f([M_1, M_2, F(e)]) *_G f([M_2, K_2, t]) \\ &= f([K_1, M_1, s]) *_G f([M_2, M_2, id_{F(M_2)}]) *_G f([M_2, K_2, t]) \\ &= f([K_1, M_1, s]) *_G f([M_2, K_2, t]) \end{aligned}$$

et $f([K_1, M_1, s]) *_G f([M_2, K_2, t]) = f([K_1, K_2, ts])$ si $M_1 = M_2$ par définition de f , ce qui termine la preuve du point 2.

3. Par définition de f , nous calculons que

$$\begin{aligned} f([M_2, M_1, s^{-1}]) *_G f([M_1, M_2, s]) &= f([M_2, M_2, id_{F(M_2)}]) \\ &= e_G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([M_1, M_2, s]) *_G f([M_2, M_1, s^{-1}]) &= f([M_1, M_1, id_{F(M_1)}]) \\ &= e_G \end{aligned}$$

et donc $f([M_2, M_1, s^{-1}]) = (f([M_1, M_2, s]))_G^*$.

□

Nous énonçons alors le premier résultat important de cette section.

Théorème 4.4.2. *Si la 2-action $\odot_F$ induite par F (voir lemme 2.3.3) est identitaire sur la symétrie diagonale, alors le couple $(\mathbb{I}_1(\mathbb{N}_F), [\]_F)$ est un groupe de Grothendieck pour $(\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}, \circ_{\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}})$.*

Démonstration. Soient (M_1, M_2, s) et (M_2, M_3, t) deux objets de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$. Nous devons tout d'abord montrer que $[(M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_3, f_{M_2, M_3}(s \otimes_{\mathbb{M}} t)f_{M_1, M_2}^{-1})]_F = [(M_1, M_3, ts)]_F$, c'est à dire que

$$[M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_3, [f_{M_2, M_3}(s \otimes_{\mathbb{M}} t)f_{M_1, M_2}^{-1}]] = [M_1, M_3, [ts]]$$

dans $\mathbb{I}_1(\mathbb{N}/\odot_F)$. Or, puisque $[M_2, M_2, [id_{F(M_2)}]]$ est un élément neutre, il est encore équivalent de montrer que

$$\begin{aligned} &[M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_3, [f_{M_2, M_3}(s \otimes_{\mathbb{M}} t)f_{M_1, M_2}^{-1}]] \\ &= [M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, M_3 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, f_{M_3, M_2}[(ts) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M_2)}]f_{M_1, M_2}^{-1}]. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $(id_{M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2}, c_{M_2, M_3})$ est un isomorphisme de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$ entre $(M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_3, [f_{M_2, M_3}(s \otimes_{\mathbb{M}} t)f_{M_1, M_2}^{-1}])$ et $(M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, M_3 \otimes_{\mathbb{M}} M_2, f_{M_3, M_2}[(ts) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M_2)}]f_{M_1, M_2}^{-1})$. En effet, dans $\mathbb{N}^{\odot_F}$, nous avons que

$$\begin{aligned} &[F(c_{M_2, M_3})][f_{M_2, M_3}][s \otimes_{\mathbb{N}} t][f_{M_1, M_2}^{-1}] \\ &= [f_{M_3, M_2}][c_{M_{F(M_2)}, F(M_3)}][s \otimes_{\mathbb{N}} t][f_{M_1, M_2}^{-1}] \\ &= [f_{M_3, M_2}][t \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M_2)}][c_{M_{F(M_2)}, F(M_2)}][s \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M_2)}][f_{M_1, M_2}^{-1}] \\ &= [f_{M_3, M_2}][ts \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(M_2)}][f_{M_1, M_2}^{-1}] \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} &[c_{M_{F(M_2)}, F(M_2)}] \\ &= [f_{M_2, M_2}^{-1}][F(c_{M_{M_2}, M_3})][f_{M_2, M_2}] \\ &= [f_{M_2, M_2}^{-1}][g_{N_{F(M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_2)}}^{-1}][id_{I_{\mathbb{N}}} \otimes_{\mathbb{N}} F(c_{M_{M_2}, M_3})][g_{N_{F(M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_2)}}][f_{M_2, M_2}] \\ &= [id_{F(M_2) \otimes_{\mathbb{N}} F(M_2)}] \end{aligned}$$

ce qui termine de montrer l'identité désirée.

Soient $(G, *_G, e_G, ()_G^*)$ un groupe commutatif et un morphisme de monoïdes commutatifs $f : \mathbb{I}_0(\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}) \rightarrow G$ tels que si (M_1, M_2, s) et (M_2, M_3, t) sont deux objets de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$, alors $f([M_1, M_2, s][M_2, M_3, t]) = f([M_1, M_3, ts])$. Nous considérons la relation

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{I}_1(\mathbb{N}_F) &\rightarrow G \\ [M_1, M_2, [s]] &\mapsto f([M_1, M_2, s]). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\hat{f}$ est une application. Pour cela, supposons que $[M_1, M_2, [s]] = [M_3, M_4, [s]]$ dans $\mathbb{I}_1(\mathbb{N}_F)$. Dans ce cas, il existe deux objets P et Q de $\mathbb{M}$ et deux isomorphismes $h : M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow M_3 \otimes_{\mathbb{M}} Q$, $k : M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow M_4 \otimes_{\mathbb{M}} Q$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & [f_{M_1, P}^{-1}] & F(M_1) \otimes_{\mathbb{N}} F(P) & \xrightarrow{[s \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(P)}]} & F(M_2) \otimes_{\mathbb{N}} F(P) & \xrightarrow{[f_{M_2, P}]} & F(M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P) \\ & \nearrow & & & & & & \downarrow [F(k)] \\ F(M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P) & & & & & & & F(M_4 \otimes_{\mathbb{M}} Q) \\ & \downarrow [F(h)] & & & & & & \\ & F(M_3 \otimes_{\mathbb{M}} Q) & \xrightarrow{[f_{M_3, P}^{-1}]} & F(M_3) \otimes_{\mathbb{N}} F(Q) & \xrightarrow{[t \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(Q)}]} & F(M_4) \otimes_{\mathbb{N}} F(Q) & \xrightarrow{[f_{M_4, Q}]} & \\ & & & & & & & \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{N}^{\mathcal{E} \odot_F}$. Nous en déduisons que ce diagramme est commutatif dans $\mathbb{N}$ puisque, par hypothèse, $\odot_F$ est identitaire sur la symétrie diagonale. Dès lors, $(h, k) : (M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P, f_{M_2, P}(s \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(P)})f_{M_1, P}^{-1}) \rightarrow (M_3 \otimes_{\mathbb{M}} Q, M_4 \otimes_{\mathbb{M}} Q, f_{M_4, Q}(t \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(Q)})f_{M_3, Q}^{-1})$ est un isomorphisme de $\mathbb{M}_F \times_F \mathbb{M}$. Nous calculons alors, en utilisant la définition de f et le point 1 du lemme 4.4.1, que

$$\begin{aligned} f([M_1, M_2, s]) &= f([M_1, M_2, s]) *_G f([P, P, id_{F(P)}]) \\ &= f([M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P, f_{M_2, P}(s \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(P)})f_{M_1, P}^{-1}]) \\ &= f([M_3 \otimes_{\mathbb{M}} Q, M_4 \otimes_{\mathbb{M}} Q, f_{M_4, Q}(t \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(Q)})f_{M_3, Q}^{-1}]) \\ &= f([M_3, M_4, t]) *_G f([Q, Q, id_{F(Q)}]) \\ &= f([M_3, M_4, t]), \end{aligned}$$

et $\hat{f}([M_1, M_2, [s]]) = \hat{f}([M_3, M_4, [t]])$, ce qui termine de montrer que $\hat{f}$ est une application. Il est alors clair que $\hat{f}$ est un morphisme de groupes commutatifs, que $\hat{f}[]_F = f$ et que $\hat{f}$ est l'unique morphisme de groupes commutatifs entre $\mathbb{I}_1(\mathbb{N}_F)$ et G possédant cette propriété. $\square$

Remarque 4.4.3. Soit $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ un 2-monoïde symétrique. Considérons la factorisation canonique à travers l'objet 2-terminal $1_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbf{1}$. Le 2-produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{1_{\mathbb{M}}} \times_{1_{\mathbb{M}}} \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{M}} \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{1_{\mathbb{M}}} & \mathbf{1} \end{array}$$

est clairement le 2-produit binaire $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ et la factorisation canonique $\Delta_{1_{\mathbb{M}}} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}_{1_{\mathbb{M}}} \times_{1_{\mathbb{M}}} \mathbb{M}$ est le 1-morphisme diagonal $\Delta_{\mathbb{M}}$. Dès lors, en combinant le corollaire 4.2.2, le théorème précédent et le fait que la 2-action induite $\odot_{1_{\mathbb{M}}}$ est identitaire sur la symétrie diagonale, nous voyons qu'il existe un isomorphisme de groupes commutatifs $K_{1_{\mathbb{M}}} \simeq K_0(\mathbb{M})$. D'autre part, si nous considérons le

1-morphisme $\mathbb{M} \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{M}}} \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightarrow{P} (\mathbb{M} \times \mathbb{M})^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}}$ qui est clairement tel que la 2-action induite $\odot_{(P^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}} \Delta_{\mathbb{M}})}$ est identitaire sur la symétrie diagonale, alors nous déduisons du corollaire 4.3.5 et du théorème précédent qu'il existe un isomorphisme de groupes commutatifs $K_{(P^{\mathcal{E} \odot \Delta_{\mathbb{M}}} \Delta_{\mathbb{M}})} \simeq K_1(\mathbb{M})$.

Supposons à présent que $(F, f, f_I) : (\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}}, (\cdot)_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}}) \rightarrow (\mathbb{H}, \otimes_{\mathbb{H}}, a_{\mathbb{H}}, I_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{H}}, c_{\mathbb{H}}, (\cdot)_{\mathbb{H}}^*, \delta_{\mathbb{H}})$ soit un 1-morphisme de 2-groupes symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$. Supposons que $\mathcal{Coker}(F)$ soit un 2-conoyau de F dans la 2-catégorie $2\text{-}\mathcal{MonSym}(\mathcal{Grpd})$ (nous omettons d'écrire toute la structure sous-jacente à $\mathcal{Coker}(F)$). Nous savons, par le théorème 2.4.4, que $\mathcal{Coker}(F)$ est également un 2-conoyau de F dans $2\text{-}\mathcal{GrpSym}(\mathcal{Grpd})$. Nous avons déjà souligné dans la remarque 3.5.9 qu'une description des 2-conoyaux de $2\text{-}\mathcal{GrpSym}(\mathcal{Grpd})$ existait déjà dans [Vit02]. En suivant cette description, nous pouvons dire que les objets de $\mathcal{Coker}(F)$ sont ceux de $\mathbb{H}$, tandis que les flèches de $\mathcal{Coker}(F)$ entre deux objets N_1 et N_2 sont les classes de la forme $[X, h]$, où X est un objet de $\mathbb{G}$ et $h : N_1 \otimes_{\mathbb{H}} F(X) \rightarrow N_2$ est un morphisme de $\mathbb{H}$ et deux classes $[X_1, h_1]$, $[X_2, h_2]$ sont égales si et seulement s'il existe un morphisme $t : X_1 \rightarrow X_2$ de $\mathbb{G}$ tel que $h_2(id_{N_1} \otimes_{\mathbb{H}} F(t)) = h_1$. La composition des flèches $[X_1, h_1] : N_1 \rightarrow N_2$, $[X_2, h_2] : N_2 \rightarrow N_3$ est donnée par $[X_1 \otimes_{\mathbb{G}} X_2, h_2(h_1 \otimes_{\mathbb{H}} id_{F(X_2)})]$. La structure de 2-groupe symétrique est alors évidente. Nous considérons la relation

$$\begin{aligned} [\cdot]_F : \Pi_0(\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}) &\rightarrow \Pi_1(\mathcal{Coker}(F)) \\ [G_1, G_2, s] &\mapsto [G_1 \otimes_{\mathbb{G}} G_2^*, d_{\mathbb{H}, I_{\mathbb{H}}}^{-1} (id_{I_{\mathbb{H}}} \otimes_{\mathbb{H}} (f_I^{-1} F(\delta_{\mathbb{H}, G_2}) f_{G_2, G_2^*} \\ &\quad (s \otimes_{\mathbb{H}} id_{F(G_2^*)} f_{G_1, G_2^*}^{-1})))] \end{aligned}$$

qui est clairement un morphisme de monoïdes commutatifs. Nous énonçons alors le second résultat de cette section.

Théorème 4.4.4. *Le couple $(\Pi_1(\mathbb{H}_F), [\cdot]_F)$ est un groupe de Grothendieck pour $(\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}, \circ_{\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}})$.*

Démonstration. Soient (G_1, G_2, s) et (G_2, G_3, t) deux objets de $\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}$. Nous devons tout d'abord montrer que $[(G_1 \otimes_{\mathbb{G}} G_2, G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3, f_{G_2, G_3}(s \otimes_{\mathbb{M}} t) f_{G_1, G_2}^{-1})]_F = [(G_1, G_3, ts)]_F$, c'est à dire que

$$\begin{aligned} & [(G_1 \otimes_{\mathbb{G}} G_2) \otimes_{\mathbb{G}} (G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3)^*, d_{\mathbb{H}, I_{\mathbb{H}}}^{-1} (id_{I_{\mathbb{H}}} \otimes_{\mathbb{H}} (f_I^{-1} F(\delta_{\mathbb{H}, G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3}) f_{G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3, (G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3)^*}) \\ & ((f_{G_2, G_3}(s \otimes_{\mathbb{M}} t) f_{G_1, G_2}^{-1}) \otimes_{\mathbb{H}} id_{F((G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3)^*)}) f_{G_1 \otimes_{\mathbb{G}} G_2, (G_2 \otimes_{\mathbb{G}} G_3)^*}^{-1}))] = [G_1 \otimes_{\mathbb{G}} G_3^*, d_{\mathbb{H}, I_{\mathbb{H}}}^{-1} \\ & (id_{I_{\mathbb{H}}} \otimes_{\mathbb{H}} (f_I^{-1} F(\delta_{\mathbb{H}, G_3}) f_{G_3, G_3^*}(ts \otimes_{\mathbb{H}} id_{F(G_3^*)}) f_{G_1, G_3^*}^{-1})))] \end{aligned}$$

dans $\mathbb{I}_1(\text{Coker}(F))$. Ceci découle directement du fait que $\delta_{\mathbb{G}}$ est un 2-isomorphisme de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{G}rpd$.

Soient un groupe commutatif $(G, *_G, e_G, ()_G^*)$ et un morphisme de monoïdes commutatifs $f : \mathbb{I}_0(\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}) \rightarrow G$ tel que si (G_1, G_2, s) et (G_2, G_3, t) sont deux objets de $\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}$, alors $f([G_1, G_2, s][G_2, G_3, t]) = f([G_1, G_3, ts])$. Nous considérons la relation

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{I}_1(\text{Coker}(F)) & \rightarrow G \\ [X, h] & \mapsto f([X, I_{\mathbb{G}}, f_I h g_{\mathbb{H}, F(X)}]). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\hat{f}$ est une application. Pour cela, supposons que $[X_1, h_1] = [X_2, h_2]$ dans $\mathbb{I}_1(\text{Coker}(F))$. Dans ce cas, il existe un morphisme $t : X_1 \rightarrow X_2$ de $\mathbb{G}$ tel que $h_2(id_{I_{\mathbb{H}}} \otimes_{\mathbb{H}} F(t)) = h_1$. Mais alors, $(t, id_{I_{\mathbb{G}}})$ est un isomorphisme de $\mathbb{G}_F \times_F \mathbb{G}$ entre $(X_1, I_{\mathbb{G}}, f_I h g_{\mathbb{H}, F(X_1)})$ et $(X_2, I_{\mathbb{G}}, f_I h g_{\mathbb{H}, F(X_2)})$ et $f([X_1, I_{\mathbb{G}}, f_I h g_{\mathbb{H}, F(X_1)}]) = f([X_2, I_{\mathbb{G}}, f_I h g_{\mathbb{H}, F(X_2)}])$ ce qui termine de montrer que $\hat{f}$ est une application. Il est alors clair que $\hat{f}$ est un morphisme de groupes commutatifs, que $\hat{f}[]_F = f$ et que $\hat{f}$ est l'unique morphisme de groupes commutatifs entre $\mathbb{I}_1(\mathbb{H}_F)$ et G possédant cette propriété. $\square$

Remarque 4.4.5. Soient un 1-morphisme de 2-groupes symétriques $(F, f, f_I) : (\mathbb{G}, \otimes_{\mathbb{G}}, a_{\mathbb{G}}, I_{\mathbb{G}}, g_{\mathbb{G}}, d_{\mathbb{G}}, c_{\mathbb{G}}, ()_{\mathbb{G}}^*, \delta_{\mathbb{G}}) \rightarrow (\mathbb{H}, \otimes_{\mathbb{H}}, a_{\mathbb{H}}, I_{\mathbb{H}}, g_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{H}}, c_{\mathbb{H}}, ()_{\mathbb{H}}^*, \delta_{\mathbb{H}})$ et $\mathbb{L} : 2\text{-}\mathcal{M}onSym \rightarrow 2\text{-}\mathcal{G}rpSym$ un biadjoint à gauche au 2-foncteur d'oubli $\mathbb{U}$. Comme $\mathbb{U}$ est localement une équivalence de groupoïdes, nous avons clairement

$$\mathbb{L}(\mathbb{G}) \simeq \mathbb{G}, \quad \mathbb{L}(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{H}$$

et donc au vu des théorèmes 4.2.1 et 4.3.3, il existe des isomorphismes de groupes commutatifs

$$K_0(\mathbb{G}) \simeq \mathbb{I}_0(\mathbb{G}), \quad K_1(\mathbb{G}) \simeq \mathbb{I}_1(\mathbb{G}), \quad K_0(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{I}_0(\mathbb{H}), \quad K_1(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{I}_1(\mathbb{H}).$$

Par ailleurs, si $\text{Coker}(F)$ désigne un 2-conoyau de F dans $2\text{-}\mathcal{M}onSym$, nous savons par le théorème 2.4.4 que ce dernier est également un 2-conoyau de F dans $2\text{-}\mathcal{G}rpSym$. Or, à la fin de la section 2 de [Vit02], Vitale établit l'existence d'un isomorphisme de groupes commutatifs entre $\mathbb{I}_1(\text{Coker}(F))$ et

$\Pi_0(\mathbb{K}er(F))$, où $\mathbb{K}er(F)$ désigne un 2-noyau de F dans $2\text{-}\mathcal{GrpSym}$. Dès lors, par les théorèmes 4.4.2 et 4.1.6, nous obtenons une suite exacte

$$\Pi_1(\mathbb{G}) \xrightarrow{\Pi_1(F)} \Pi_1(\mathbb{H}) \xrightarrow{d'} \Pi_0(\mathbb{K}er(F)) \xrightarrow{d} \Pi_0(\mathbb{G}) \xrightarrow{\Pi_0(F)} \Pi_0(\mathbb{H}).$$

Cette dernière est, dans le cas des 2-groupes symétriques, la suite exacte bien connue introduite par Rousseau dans la proposition 3.1.5 de [Rou00] (également dans [Rou03]).

4.5 Généralisation de la suite exacte de la K-théorie algébrique

Soient $(\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}})$ et $(\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ deux 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$ et $(\odot, \alpha, \delta, \tau) : \mathbb{N} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ une 2-action interne à la 2-catégorie des 2-monoïdes symétriques internes $\mathcal{Grpd}$. Le résultat suivant est clair.

Lemme 4.5.1. $(\odot, \alpha, \delta, \tau)$ induit les morphismes de groupes commutatifs

$$\begin{aligned} d_0 : K_0(\mathbb{M}) &\rightarrow K_0(\mathbb{N}) \\ [M, M'] &\mapsto [I_{\mathbb{N}} \odot M, I_{\mathbb{N}} \odot M'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 : K_1(\mathbb{M}) &\rightarrow K_1(\mathbb{N}) \\ [M, f] &\mapsto [I_{\mathbb{N}} \odot M, id_{I_{\mathbb{N}}} \odot f] \end{aligned}$$

Nous appellerons 2-égalisateur de

$$\mathbb{N} \times \mathbb{M} \times \mathbb{M} \xrightleftharpoons[\text{Id}_{\mathbb{N}} \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^2]{\text{Id}_{\mathbb{N}} \times \Pi_{\mathbb{M}, \mathbb{M}}^1} \mathbb{N} \times \mathbb{M} \xrightarrow{\odot} \mathbb{N}$$

le 2-monoïde symétrique $\mathbb{E}g$ dont les objets sont les quadruples de la forme (N, M_1, M_2, f) , où N est un objet de $\mathbb{N}$, M_1 et M_2 sont deux objets de $\mathbb{M}$ et $f : N \odot M_1 \rightarrow N \odot M_2$ est un isomorphisme de $\mathbb{N}$. Les flèches entre deux objets (N, M_1, M_2, f) , (N', M'_1, M'_2, f') sont les triples de la forme (h, s, t) , où $h : N \rightarrow N'$ est un morphisme de $\mathbb{N}$, $s : M_1 \rightarrow M'_1$ et $t : M_2 \rightarrow M'_2$ sont deux morphismes de $\mathbb{M}$ tels que $(h \odot t)f = f'(h \odot s)$. La composition des flèches est la composition évidente et si (N, M_1, M_2, f) , (N', M'_1, M'_2, f') sont deux objets, leur produit est le quadruple $(N \otimes_{\mathbb{N}} N', M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M'_1, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M'_2, \tau_{N, M_2, N', M'_2}(f \otimes_{\mathbb{N}} f')\tau_{N, M_1, N', M'_1}^{-1})$. On peut définir sur $\mathbb{E}g$ la composition suivante:

$$C = \{((N_1, M_1, M_2, f), (N_2, M_3, M_4, f')) | N_1 = N_2, M_2 = M_3\}$$

et

$$\begin{aligned} \circ : C &\rightarrow \text{Ob}(\mathbb{E}g) \\ ((N, M_1, M_2, f), (N, M_2, M_3, f')) &\mapsto (N, M_1, M_3, f'f) \end{aligned}$$

Nous désignons par $(K_\odot, [\]_{\mathbb{E}g})$ le groupe de Grothendieck associé à cette composition sur $\mathbb{E}g$.

Lemme 4.5.2.

1. Pour tout objet N de $\mathbb{N}$ et tout objet M de $\mathbb{M}$, $[N, M, M, id_{N \odot M}]_{\mathbb{E}g} = [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g}$.
2. Pour tout objet N de $\mathbb{N}$ et tout objet M de $\mathbb{M}$, $[N, M_1, M_2, f]_{\mathbb{E}g}^* = [N, M_2, M_1, f^{-1}]_{\mathbb{E}g}$.
3. Tout élément $[(N_1, M_1, M_2, f_1), (N_2, M_3, M_4, f_2)]$ de $K_\odot$ est égal à $[N_1 \otimes_{\mathbb{N}} N_2, M_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_4, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_3, \tau_{N_1, M_2, N_2, M_3} (f_1 \otimes_{\mathbb{N}} f_2^{-1}) \tau_{N_1, M_1, N_2, M_4}^{-1}]_{\mathbb{E}g}$.
4. Si (P, X, X, s) est un objet de $\mathbb{E}g$ tel qu'il existe un objet Q de $\mathbb{N}$ de sorte que $s \otimes_{\mathbb{N}} id_Q$ soit un produit de commutateurs formés d'automorphismes de $(P \odot M) \otimes_{\mathbb{N}} Q$, alors $[P, X, X, s]_{\mathbb{E}g} = [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g}$. Il en résulte que si (N, M, M, f) est un objet de $\mathbb{E}g$, alors $[N, M, M, f]_{\mathbb{E}g} = [N \odot M, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g}$.
5. Si $f : M \rightarrow M$ est un automorphisme de $\mathbb{M}$ et N un objet de $\mathbb{N}$, alors $[N, M, M, id_N \odot f]_{\mathbb{E}g} = [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g}$.

Démonstration.

1. Nous calculons

$$[N, M, M, id_{N \odot M}]_{\mathbb{E}g} + [N, M, M, id_{N \odot M}]_{\mathbb{E}g} = [N, M, M, id_{N \odot M}]_{\mathbb{E}g}.$$

2. Nous calculons

$$\begin{aligned} [N, M_2, M_1, f^{-1}]_{\mathbb{E}g} + [N, M_1, M_2, f]_{\mathbb{E}g} &= [N, M_2, M_2, id_{N \odot M_2}]_{\mathbb{E}g} \\ &= [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [N, M_1, M_2, f]_{\mathbb{E}g} + [N, M_2, M_1, f^{-1}]_{\mathbb{E}g} &= [N, M_1, M_1, id_{N \odot M_1}]_{\mathbb{E}g} \\ &= [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g} \end{aligned}$$

en vertu du point précédent.

3. Nous calculons que

$$\begin{aligned} & [(N_1, M_1, M_2, f_1), (N_2, M_3, M_4, f_2)] \\ &= [N_1, M_1, M_2, f_1]_{\mathbb{E}g} + [N_2, M_3, M_4, f_2]_{\mathbb{E}g}^* \\ &= [N_1, M_1, M_2, f_1]_{\mathbb{E}g} + [N_2, M_4, M_3, f_2^{-1}]_{\mathbb{E}g} \end{aligned}$$

par le point précédent. La conclusion suit alors du fait que $[\]_{\mathbb{E}g}$ est un morphisme de monoïdes symétriques.

4. En utilisant le point 1 et le fait que $[\]_{\mathbb{E}g}$ est un morphisme de monoïdes symétriques, nous calculons que

$$\begin{aligned} & [P, X, X, s]_{\mathbb{E}g} \\ &= [P, X, X, s]_{\mathbb{E}g} + [Q, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{Q \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g} \\ &= [P \otimes_{\mathbb{N}} Q, X \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, X \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, \tau_{P, M, Q, I_{\mathbb{M}}}(s \otimes_{\mathbb{N}} id_{Q \odot I_{\mathbb{M}}})\tau_{P, M, Q, I_{\mathbb{M}}}^{-1}]_{\mathbb{E}g} \\ &= [P \otimes_{\mathbb{N}} Q, X \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, X \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, \tau_{P, M, Q, I_{\mathbb{M}}}(id_{P \odot X} \otimes_{\mathbb{N}} \delta_Q)(s \otimes_{\mathbb{N}} id_Q) \\ &\quad (id_{P \odot X} \otimes_{\mathbb{N}} \delta_Q)^{-1}\tau_{P, M, Q, I_{\mathbb{M}}}^{-1}]_{\mathbb{E}g}. \end{aligned}$$

Dès lors, puisque $s \otimes_{\mathbb{N}} id_Q$ est un produit de commutateurs formés d'automorphismes de $(P \odot M) \otimes_{\mathbb{N}} Q$, nous voyons que

$$\tau_{P, M, Q, I_{\mathbb{M}}}(id_{P \odot X} \otimes_{\mathbb{N}} \delta_Q)(s \otimes_{\mathbb{N}} id_Q)(id_{P \odot X} \otimes_{\mathbb{N}} \delta_Q)^{-1}\tau_{P, M, Q, I_{\mathbb{M}}}^{-1}$$

est un produit de commutateurs formés d'automorphismes de $(P \otimes_{\mathbb{N}} Q) \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}})$. Par définition de $K_{\odot}$, nous trouvons immédiatement que $[P, X, X, s]_{\mathbb{E}g} = [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g}$. Nous calculons alors que

$$\begin{aligned} & [N, M, M, f]_{\mathbb{E}g} + [N \odot M, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f^{-1} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g} = \\ & [N \otimes_{\mathbb{N}} (N \odot M), M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}, \tau_{N, M, N \odot M, I_{\mathbb{M}}}(f \otimes_{\mathbb{N}} (f^{-1} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}))\tau_{N, M, N \odot M, I_{\mathbb{M}}}^{-1}]_{\mathbb{E}g}. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$[(N \otimes_{\mathbb{N}} (N \odot M)) \odot (M \otimes_{\mathbb{M}} I_{\mathbb{M}}), \tau_{N, M, N \odot M, I_{\mathbb{M}}}(f \otimes_{\mathbb{N}} (f^{-1} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}))\tau_{N, M, N \odot M, I_{\mathbb{M}}}^{-1}] = 0$$

dans $K_1(\mathbb{N})$. Nous déduisons de la proposition 4.1.3 et de ce qui précède que

$$[N, M, M, f]_{\mathbb{E}g} + [N \odot M, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f^{-1} \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g} = 0$$

dans $K_{\odot}$ et donc que

$$[N, M, M, f]_{\mathbb{E}g} = [N \odot M, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g}$$

dans $K_{\odot}$ au vu du point 2.

5. Puisque $[I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}]_{\mathbb{E}g} = [N, M, M, id_{N \odot M}]_{\mathbb{E}g}$ au vu du point 1, la conclusion vient du fait que (id_N, f, id_M) est un isomorphisme de $\mathbb{E}g$ entre $(N, M, M, id_N \odot f)$ et $(N, M, M, id_{N \odot M})$

□

Nous considérons alors les morphismes canoniques de groupes commutatifs

$$\begin{aligned} \partial_0 : K_\odot &\rightarrow K_0(\mathbb{M}) & \partial_1 : K_1(\mathbb{M}) &\rightarrow K_\odot \\ [N, M_1, M_2, f] &\mapsto [(M_1, M_2)] & [N, f] &\mapsto [N, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}] \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 4.5.3. *La suite*

$$K_1(\mathbb{M}) \xrightarrow{d_1} K_1(\mathbb{N}) \xrightarrow{\partial_1} K_\odot \xrightarrow{\partial_0} K_0(\mathbb{M}) \xrightarrow{d_0} K_0(\mathbb{N})$$

est exacte.

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes.

Exactitude en $K_0(\mathbb{M})$. Soit $[N, M_1, M_2, f] \in K_\odot$. Nous calculons que

$$\begin{aligned} d_0(\partial_0([N, M_1, M_2, f])) &= [I_{\mathbb{N}} \odot M_1, I_{\mathbb{N}} \odot M_2] \\ &= [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}] \end{aligned}$$

puisque l'objet N est tel que nous avons un isomorphisme dans $\mathbb{N}$,

$$(I_{\mathbb{N}} \odot M_1) \otimes_{\mathbb{N}} N \simeq N \odot M_1 \xrightarrow{f} N \odot M_2 \simeq (I_{\mathbb{N}} \odot M_2) \otimes_{\mathbb{N}} N$$

et donc $d_0 \partial = 0$. Soit alors $[M_1, M_2] \in K_0(\mathbb{M})$ tel que $d_0([M_1, M_2]) = 0$. Par la caractérisation issue du corollaire 4.2.2, il existe deux objets N et N' de $\mathbb{N}$ et un isomorphisme de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$((I_{\mathbb{N}} \odot M_1) \otimes_{\mathbb{N}} N, (I_{\mathbb{N}} \odot M_2) \otimes_{\mathbb{N}} N) \xrightarrow{(s,t)} (I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} N', I_{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{N}} N').$$

En particulier, nous avons un isomorphisme de $\mathbb{N}$

$$f := N \odot M_1 \simeq (I_{\mathbb{N}} \odot M_1) \otimes_{\mathbb{N}} N \xrightarrow{t^{-1}s} (I_{\mathbb{N}} \odot M_2) \otimes_{\mathbb{N}} N \simeq N \odot M_2$$

et $[N, M_1, M_2, f] \in K_\odot$ est tel que $\partial_0([N, M_1, M_2, f]) = [M_1, M_2]$.

Exactitude en $K_\odot$. Soit $[(N, f)] \in K_1(\mathbb{N})$. Nous calculons que

$$\partial_0(\partial_1([N, f])) = [I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}]$$

et donc $\partial_0 \partial_1 = 0$. Soit alors $[N, M_1, M_2, f] \in K_\odot$ tel que $\partial_0([N, M_1, M_2, f]) = 0$. Par construction de $K_0(\mathbb{M})$, il existe un objet P et un isomorphisme $s : M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P \rightarrow M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P$ de $\mathbb{M}$. Par le point 1 du lemme 4.5.2, nous voyons alors que $[N, M_1, M_2, f] = [N, M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P, M_2 \otimes_{\mathbb{M}} P, \alpha_{N, M_2, P}^{-1}(f \odot id_P) \alpha_{N, M_1, P}]$ et donc que $[N, M_1, M_2, f] = [N, M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P, M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P, (id_N \odot t^{-1}) \alpha_{N, M_2, P}^{-1}(f \odot id_P) \alpha_{N, M_1, P}]$.

Par le point 4 du lemme 4.5.2, nous avons alors $[N, M_1, M_2, f] = [N \odot (M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P), I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, ((id_N \odot t^{-1})\alpha_{N, M_2, P}^{-1}(f \odot id_P)\alpha_{N, M_1, P}) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}]$ et $[N \odot (M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P), (id_N \odot t^{-1})\alpha_{N, M_2, P}^{-1}(f \odot id_P)\alpha_{N, M_1, P}] \in K_1(\mathbb{N})$ est tel que $\partial_1([N \odot (M_1 \otimes_{\mathbb{M}} P), (id_N \odot t^{-1})\alpha_{N, M_2, P}^{-1}(f \odot id_P)\alpha_{N, M_1, P}]) = [N, M_1, M_2, f]$.

Exactitude en $K_1(\mathbb{N})$. Soit $[M, f] \in K_1(\mathbb{M})$. Nous calculons que

$$\begin{aligned} \partial_1(d_1([M, f])) &= [I_{\mathbb{N}} \odot M, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (id_{I_{\mathbb{M}}} \odot f) \odot id_{I_{\mathbb{M}}}] \\ &= [I_{\mathbb{N}}, M, M, id_{I_{\mathbb{M}}} \odot f] \\ &= [I_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, id_{I_{\mathbb{N}} \odot I_{\mathbb{M}}}] \end{aligned}$$

en utilisant les points 4 et 5 du lemme 4.5.2. Ainsi, $\partial_1 d_1 = 0$. Soit alors $[N, f] \in K_1(\mathbb{N})$ tel que $\partial_1([N, f]) = 0$. Par définition de $K_{\odot}$, il existe cinq objets $(X, P_1, P_2, s), (D, M_1, M_2, u), (D, M_2, M_3, v), (E, M_4, M_5, h), (E, M_5, M_6, k)$ de $\mathbb{E}g$ tels que

$$\begin{aligned} &\left(\left(((N, I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \otimes (X, P_1, P_2, s)) \otimes (D, M_1, M_3, vu) \right) \otimes (E, M_4, M_5, h) \right) \\ &\quad \otimes (E, M_5, M_6, k) \simeq \\ &\quad \left(((X, P_1, P_2, s) \otimes (D, M_1, M_2, u)) \otimes (D, M_2, M_3, v) \right) \otimes (E, M_4, M_6, kh) \end{aligned}$$

dans $\mathbb{E}g$. Afin de soulager les écritures, nous noterons

$$\begin{aligned} T_1 &:= \left(\left((N \otimes_{\mathbb{N}} X) \otimes_{\mathbb{N}} D \right) \otimes_{\mathbb{N}} E \right) \otimes_{\mathbb{N}} E \\ T_2 &:= \left((X \otimes_{\mathbb{N}} D) \otimes_{\mathbb{N}} D \right) \otimes_{\mathbb{N}} E \\ A_1 &:= \left(\left((I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P_1) \otimes_{\mathbb{M}} M_1 \right) \otimes_{\mathbb{M}} M_4 \right) \otimes_{\mathbb{M}} M_5 \\ A_2 &:= \left((P_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_1) \otimes_{\mathbb{M}} M_2 \right) \otimes_{\mathbb{M}} M_4 \\ B_1 &:= \left(\left((I_{\mathbb{M}} \otimes_{\mathbb{M}} P_2) \otimes_{\mathbb{M}} M_3 \right) \otimes_{\mathbb{M}} M_5 \right) \otimes_{\mathbb{M}} M_6 \\ B_2 &:= \left((P_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_2) \otimes_{\mathbb{M}} M_3 \right) \otimes_{\mathbb{M}} M_6 \\ H_1 &:= \left(\left(((N \odot I_{\mathbb{M}}) \otimes_{\mathbb{N}} (X \odot P_1)) \otimes_{\mathbb{N}} (D \odot M_1) \right) \otimes_{\mathbb{N}} (E \odot M_4) \right) \otimes_{\mathbb{N}} (E \odot M_5) \\ H_2 &:= \left(\left(((N \odot I_{\mathbb{M}}) \otimes_{\mathbb{N}} (X \odot P_2)) \otimes_{\mathbb{N}} (D \odot M_3) \right) \otimes_{\mathbb{N}} (E \odot M_5) \right) \otimes_{\mathbb{N}} (E \odot M_6) \\ H_3 &:= \left(((X \odot P_1) \otimes_{\mathbb{N}} (D \odot M_1)) \otimes_{\mathbb{N}} (D \odot M_2) \right) \otimes_{\mathbb{N}} (E \odot M_4) \end{aligned}$$

$$H_4 := \left(((X \odot P_2) \otimes_{\mathbb{N}} (D \odot M_2)) \otimes_{\mathbb{N}} (D \odot M_3) \right) \otimes_{\mathbb{N}} (E \odot M_6).$$

Soient alors $can_1 : T_1 \odot A_1 \rightarrow H_1$, $can_2 : H_2 \rightarrow T_1 \odot B_1$, $can_3 : T_2 \odot A_2 \rightarrow H_3$, $can_4 : H_4 \rightarrow T_2 \odot B_2$ les isomorphismes canoniques évidents de $\mathbb{N}$ et $\tau : T_1 \rightarrow T_2$, $\alpha : A_1 \rightarrow A_2$, $\beta : B_1 \rightarrow B_2$, respectivement l'isomorphisme de $\mathbb{N}$ et les deux isomorphismes de $\mathbb{M}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 \odot A_1 & \xrightarrow{can_1} & H_1 & \xrightarrow{\left(\left((f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}) \otimes_{\mathbb{N}} s \right) \otimes_{\mathbb{N}} vu \right) \otimes_{\mathbb{N}} h \right) \otimes_{\mathbb{N}} k} & H_2 & \xrightarrow{can_2} & T_1 \odot B_1 \\ \tau \odot \alpha \downarrow & & & & & & \downarrow \tau \odot \beta \\ T_2 \odot A_2 & \xrightarrow{can_3} & H_3 & \xrightarrow{(s \otimes_{\mathbb{N}} u) \otimes_{\mathbb{N}} v) \otimes_{\mathbb{N}} kh} & H_4 & \xrightarrow{can_4} & T_2 \odot B_2 \end{array}$$

est commutatif dans $\mathbb{N}$. Dès lors, si nous notons $A := (P_2 \otimes_{\mathbb{M}} M_3) \otimes_{\mathbb{M}} M_4$, $B := (P_1 \otimes_{\mathbb{M}} M_1) \otimes_{\mathbb{M}} M_4$ et $c_1 : A_1 \otimes_{\mathbb{M}} A \rightarrow B_1 \otimes_{\mathbb{M}} B$, $c_2 : A_2 \otimes_{\mathbb{M}} A \rightarrow B_2 \otimes_{\mathbb{M}} B$ les isomorphismes canoniques évidents de $\mathbb{M}$, il est clair que

$$[A_1 \otimes_{\mathbb{M}} A, c_1^{-1}(\beta^{-1} \otimes_{\mathbb{M}} id_B) c_2(\alpha \otimes_{\mathbb{M}} id_A)] \in K_1(\mathbb{M})$$

est tel que

$$d_1([A_1 \otimes_{\mathbb{M}} A, c_1^{-1}(\beta^{-1} \otimes_{\mathbb{M}} id_B) c_2(\alpha \otimes_{\mathbb{M}} id_A)]) = [N \odot I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}] .$$

La conclusion vient alors du fait que $[N \odot I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}}] = [N, f]$ puisque δ_N est un isomorphisme de $Aut(\mathbb{N})$ entre $(N \odot I_{\mathbb{M}}, f \odot id_{I_{\mathbb{M}}})$ et (N, f) . $\square$

Pour finir, nous considérons un 1-morphisme de 2-monoïdes symétriques $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$. Soit $\odot_F$ la 2-action canonique issue de F et introduite à la section 2.3. Nous considérons également le morphisme de groupes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} d_F : K_F & \rightarrow & K_{\odot_F} \\ [M_1, M_2, f] & \mapsto & [I_{\mathbb{N}}, M_1, M_2, id_{I_{\mathbb{N}}} \otimes_{\mathbb{N}} f] \end{array}$$

qui est tel que

$$\begin{array}{ccc} & K_{\odot_F} & \\ d_F \uparrow & \searrow \partial_0 & \\ K_F & \xrightarrow{d} & K_0(\mathbb{M}). \end{array}$$

Par ailleurs, si F est cofinal, nous pouvons remarquer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & K_{\odot_F} \\ & \nearrow \partial_1 & \uparrow d_F \\ K_1(\mathbb{N}). & \xrightarrow{d'} & K_F. \end{array}$$

En effet, si $[N, f] \in K_1(\mathbb{N})$, alors il existe un objet N' de $\mathbb{N}$, un objet M de $\mathbb{M}$ et un isomorphisme $t : N \otimes_{\mathbb{N}} N' \rightarrow F(M)$ de $\mathbb{N}$. Puisque $[N, f] = [N \otimes_{\mathbb{N}} N', f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'}] = [F(M), t(f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'})t^{-1}]$ dans $K_1(\mathbb{N})$, nous calculons que

$$\partial_1([N, f]) = [N \otimes_{\mathbb{N}} N', I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'}) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(I_{\mathbb{M}})}]$$

et que

$$\begin{aligned} d_F(d'([N, f])) &= [I_{\mathbb{N}}, M, M, id_{I_{\mathbb{N}}} \otimes_{\mathbb{N}} (t(f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'})t^{-1})] \\ &= [F(M), I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (t(f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'})t^{-1}) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(I_{\mathbb{M}})}] \end{aligned}$$

en vertu des points 1 et 4 du lemme 4.5.2. La conclusion vient alors du fait que $(t, id_{I_{\mathbb{M}}}, id_{I_{\mathbb{M}}})$ est un isomorphisme de $\mathbb{E}g$ entre $[N \otimes_{\mathbb{N}} N', I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'}) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(I_{\mathbb{M}})}]$ et $[F(M), I_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, (t(f \otimes_{\mathbb{N}} id_{N'})t^{-1}) \otimes_{\mathbb{N}} id_{F(I_{\mathbb{M}})}]$. Nous obtenons alors le résultat suivant.

Proposition 4.5.4. *Soit $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme cofinal de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$. Le morphisme de groupes commutatifs d_F introduit ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. Le résultat découle directement du lemme des cinq. □

Corollaire 4.5.5. *Soient $(F, f, f_I) : (\mathbb{M}, \otimes_{\mathbb{M}}, a_{\mathbb{M}}, I_{\mathbb{M}}, g_{\mathbb{M}}, d_{\mathbb{M}}, c_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \otimes_{\mathbb{N}}, a_{\mathbb{N}}, I_{\mathbb{N}}, g_{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}, c_{\mathbb{N}})$ un 1-morphisme cofinal de 2-monoïdes symétriques internes à $\mathcal{Grpd}$ et $\odot_F$ la 2-action canonique induite par F . Il existe un isomorphisme de suites exactes entre la suite exacte issue du théorème 4.5.3 associée à $\odot_F$ et la suite exacte de la K -théorie associée à F .*

Bibliographie

- [ARV11] J. Adamek, J. Rosicky, and E. Vitale, *Algebraic theories: A categorical introduction to general algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [Bas67] H. Bass, *Lectures on topics in algebraic k-theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.
- [Bas68] ———, *Algebraic k-theory*, W.A. Benjamin, Inc., New-York, 1968.
- [BB04] F. Borceux and D Bourn, *Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [Bor94] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1. basic category theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Bou70] Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1970.
- [Bou03] D. Bourn, *The denormalized 3×3 lemma*, Journal of Pure and Applied Algebra **177** (2003), 113–129.
- [Bre92] L. Breen, *Théorie de schreier supérieure*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure **25** (1992), 465–514.
- [Bé63] J. Bénabou, *Catégories avec multiplication*, C.R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 1887–1890.
- [CGJ00] P. Carrasco, A.R. Garzon, and Miranda J.G., *Schreier theory for singular extensions of categorical groups*, Communications in Algebra **28** (2000), 2585–2613.
- [Del73] P. Deligne, *La formule de dualité globale*, Lecture Note in Mathematics **305** (1973), 481–587.
- [EH62] B. Eckmann and P.J. Hilton, *Group-like structures in general categories. I. Multiplications and comultiplications*, Mathematische Annalen **145** (1962), 227–255.

- [Fio06] T.M. Fiore, *Pseudo limits, biadjoints, and pseudo algebra: Categorical foundations of conformal field theory*, Memoirs of the American Mathematical Society 182 **860** (2006).
- [FW74] A. Fröhlich and C. Wall, *Graded monoidal categories*, Compositio Mathematica **28** (1974), 229–285.
- [GE15] A.R. Garzon and Vitale E., *On the second cohomology categorical group and a hochschild-serre 2-exact sequence*, Theory and Applications of Categories **30** (2015), 933–984.
- [Gra74] J.W. Gray, *Formal category theory: adjointness for 2-categories*, Lecture Notes in Mathematics **391** (1974).
- [Mac97] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [Rou00] A. Rousseau, *Extensions de gr-catégories*, Ph.D. thesis, Université de Paris 13, 2000.
- [Rou03] ———, *Bicatégories monoïdales et extensions de gr-catégories*, Homology, Homotopy and Applications **5** (2003), 437–547.
- [Sin75] H.X. Sinh, *Gr-catégories*, Ph.D. thesis, Université Paris VII, 1975.
- [Vit02] E. Vitale, *A Picard-Brauer exact sequence of categorical groups*, Journal of Pure and Applied Algebra 175 (2002), 383–408.