

Le temps caractéristique “volume/flux” n'est pas toujours pertinent...

Eric Deleersnijder, 26 mai 2020

Considérons un *plug flow* stationnaire dans un canal de longueur L , dont la section vaut $S(x)$, où x est la coordonnée spatiale adéquate ($0 \leq x \leq L$). Le volume d'eau vaut

$$V = \int_0^L S(x) dx \quad (1)$$

Le débit volumique (m^3/s), Q , est constant. Donc, la vitesse vaut $U(x) = Q / S(x)$. A l'entrée du canal ($x = 0$), l'âge de l'eau est supposé nul. Par conséquent, en tout point, l'âge de l'eau vaut

$$a(x) = \int_0^x \frac{dx'}{U(x')} = \frac{1}{Q} \int_0^x S(x') dx' \quad (2)$$

A la sortie du canal, l'âge vaut

$$a^s = a(L) = \frac{1}{Q} \underbrace{\int_0^L S(x) dx}_{=V, \text{ voir (1)}} = \frac{V}{Q} \quad (3)$$

Examinons maintenant un écoulement dans une géométrie plus complexe. On considère un bassin avec une entrée et une sortie bien définies. On suppose que l'écoulement dans ce domaine peut être idéalisé comme la superposition de deux *plug flows*, que l'on identifie par les indices “1” et “2”. A la sortie coexistent donc deux âges, $a_1^s = a_1(L_1) = V_1 / Q_1$ et $a_2^s = a_2(L_2) = V_2 / Q_2$, avec $V = V_1 + V_2$ et $Q = Q_1 + Q_2$. Par conséquent, l'âge moyen de sortie vaut

$$a^s = \frac{S_1(L_1)a_1^s + S_2(L_2)a_2^s}{S_1(L_1) + S_2(L_2)} \quad (4)$$

Par souci de simplification, on suppose que les deux sections de sorties sont égales, c'est-à-dire $S_1(L_1) = S_2(L_2)$. Il vient alors

$$a^s = \frac{a_1^s + a_2^s}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_1}{Q_1} + \frac{V_2}{Q_2} \right) \quad (5)$$

On simplifie encore plus en posant $V_1 = V_2 = V / 2$. Dans ce cas, (5) devient

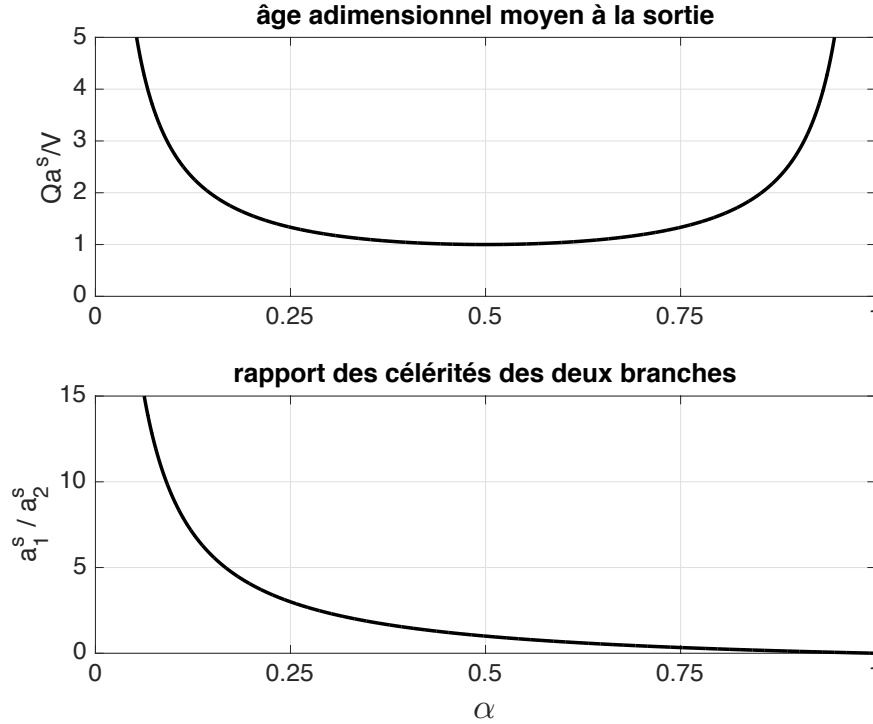
$$a^s = \frac{a_1^s + a_2^s}{2} = \frac{V}{4} \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \right) \quad (6)$$

La première branche reprend la fraction α du débit total et la seconde la fraction $(1 - \alpha)$, avec $0 < \alpha < 1$. On a donc $Q_1 = \alpha Q$ et $Q_2 = (1 - \alpha)Q$, ce qui permet de transformer (6) en

$$a^s = \frac{1}{4\alpha(1-\alpha)} \frac{V}{Q} \quad (7)$$

Une inspection trop rapide de la formule (7) pourrait conduire à la conclusion que le quotient V/Q fournit bien l'ordre de grandeur de l'âge moyen de sortie. En réalité, V/Q

représente l'âge de sortie minimal, qui est évidemment obtenu pour $\alpha = 1/2$. Dans ce cas, les deux *plug flows* sont identiques: il n'est pas nécessaire de les distinguer l'un de l'autre de sorte que la formule (3) s'applique, c'est-à-dire la formule qui convient à un *plug flow* unique. Ce résultat est conforme à l'intuition physique la plus élémentaire.



A l'évidence, la formule (7) présente la propriété de symétrie suivante $a^s(\alpha) = a^s(1-\alpha)$. On peut donc se contenter d'explorer les valeurs de l'âge moyen de sortie pour $0 < \alpha \leq 1/2$. Ainsi, on suppose que la première branche reprend une fraction du débit inférieure à la seconde. La première branche est donc la branche lente, tandis que l'autre est la branche rapide:

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{V}{Q} = a_1^s \geq a_2^s = \frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{V}{Q} \quad (8)$$

A la limite $\alpha \rightarrow 0$, l'âge de la branche lente diverge ($a_1^s \rightarrow \infty$), de sorte que l'âge moyen de sortie diverge également et, ainsi, admet l'expression asymptotique

$$a^s \sim \frac{1}{4\alpha} \frac{V}{Q}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (9)$$

Dans ce cas, il est difficile de prétendre que V/Q fournit l'ordre de grandeur de l'âge moyen de sortie. En fait, ce dernier satisfait la propriété suivante:

$$\frac{V}{Q} \leq a^s < \infty \quad (10)$$

Comme le montre la figure ci-dessus, la valeur de l'âge moyen de sortie reste assez stable dans le voisinage de $\alpha = 1/2$. Si l'on admet que a^s n'est plus du même ordre de grandeur dès que $a^s > 3V/Q$, alors il faut que la condition suivante soit satisfaite:

$$\alpha < \frac{3-\sqrt{6}}{6} \approx 0.09 \quad (11)$$

En d'autres termes, la région dans laquelle l'âge moyen de sortie n'est plus d'ordre V/Q est relativement étroite, mais elle montre une divergence très rapide de l'âge moyen de sortie par rapport à cette valeur de référence usuelle. Si le paramètre α satisfait le critère (11), alors le rapport des célérités des deux branches est tel que (voir figure ci-dessus)

$$\frac{a_1^s}{a_2^s} > \frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} \approx 9.9 \quad (12)$$

Ainsi, il faut donc que les vitesses des deux branches soient significativement différentes pour que V/Q cesse d'être un ordre de grandeur approprié. Mais, dès que cette condition est remplie, alors V/Q perd très rapidement sa pertinence à mesure que la valeur de α diminue.

Dans son mémoire de fin d'études d'ingénierie à l'UCLouvain, Tom Adam (2017) a proposé d'interpréter l'âge de sortie d'un bassin peu profond en évoquant l'existence d'une branche lente et d'une branche rapide. Mais, en tant que co-promoteur de ce mémoire, j'aurais dû insister pour que cette métaphore soit explorée bien plus avant et pour que tous les études diagnostiques subséquentes contiennent des moyennes de toutes les variables sur la section de sortie du bassin étudié. *Mea culpa...*

Adam T., 2017, *Interprétation au moyen de temps caractéristiques de l'écoulement symétrique et asymétrique dans des bassins rectangulaires*, Mémoire de Second Cycle, Ecole Polytechnique de Louvain, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, 85 pages, disponible en ligne à l'adresse suivante: <http://hdl.handle.net/2078.1/thesis:12875>
