

Ecole Polytechnique de Louvain
FSA / ELEC / LEI

Observatoire Royal de Belgique

*Etude et réalisation d'un procédé expérimental
novateur dédié à la mesure de la constante
universelle de gravitation G*

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences de l'Ingénieur

par

Sébastien Naslin

Promoteurs:

Dr Michel van Ruymbeke, Professeur UCL, Chef de travaux à l'Observatoire
Royal de Belgique.

Dr Ernest Matagne, Professeur FSA LEI UCL.

Président du jury

Dr Luc Vandendorpe, professeur FSA TELE UCL

Membres du jury

Dr Olivier Francis, Professeur, Université du Luxembourg

Dr Hervé Buyse, Professeur FSA LEI UCL.

Dr Alain Cornet, Unité de physique atomique, moléculaire et d'optique, UCL

Présenté à Louvain-La-Neuve, le 5 juin 2009

« Il faut créer ses forces et les solutions suivront. »

Antoine de Saint-Exupéry

Résumé

La subsistance d'erreurs systématiques non maîtrisées dans certaines expériences récentes dédiées à la mesure de la constante universelle de gravitation G a conduit la commission CODATA 2006 à encourager le développement de nouvelles expériences reposant sur des principes de fonctionnement indépendants.

Nous proposons dans ce travail d'étudier la faisabilité d'une nouvelle approche basée sur un pendule astatisé asservi en position par le biais d'un actionneur électrostatique.

La quasi coïncidence de la position du centre de masse du pendule astatisé avec son axe de rotation permet d'atténuer sensiblement les mouvements du bras produits par l'activité microsismique locale, tandis que son unique degré de liberté de mouvement en rotation permet de piloter la boucle de rétroaction de position avec une grande précision.

La présence de cette dernière permet d'assurer la linéarité et la stabilité de la balance en atténuant le travail mécanique du pivot du pendule, source de nombreux biais difficilement maîtrisables liés à son comportement non parfaitement élastique.

Le facteur d'étalonnage des couples gravitationnels appliqués au bras du pendule est fixé par la valeur des couples électrostatiques assurant la rétroaction de position et par un deuxième étalon de couple indépendant basé sur le poids d'une masse étalon appliqué avec un bras de levier variable autour du pivot du pendule. Celui-ci est matérialisé sur notre dispositif expérimental par la rotation dans le plan horizontal du poids des aiguilles d'une montre solidaire du bras pendulaire.

Nous détaillerons les différents concepts de notre approche et les modèles théoriques correspondants en parallèle de la description du dispositif expérimental que nous avons conçu pour les tester. Notre appareil est dimensionné pour offrir une précision théorique de l'ordre du pour cent sur l'amplitude des échelons de couple gravitationnel appliqués. Les résolutions de notre capteur de position capacitif et de notre actionneur électrostatique sont respectivement de l'ordre de 10^{-9} rad et 10^{-9} N·m.

Nous présenterons également les effets des principaux facteurs d'influence environnementaux liés à ce type de mesure, ainsi qu'un algorithme simple permettant de calculer l'amplitude des effets gravitationnels pour toute géométrie de masse.

Les enseignements tirés de notre étude théorique et expérimentale nous permettront d'établir une série de propositions et de recommandations quant à la réalisation d'une nouvelle balance compatible avec des mesures de couples gravitationnels au niveau du ppm.

Mots clés : Balance gravitationnelle, constante universelle de gravitation G , pendule vertical astatisé, actionneur électrostatique, asservissement de position.

Abstract

Remains of systematic errors in recent experiments dedicated to the measurement of the universal constant of gravitation lead the 2006 CODATA comity to promote the development of new experiments relying on conceptually different principles.

In this work we propose to study the feasibility of a new approach based on an astatic vertical pendulum driven in position feedback loop by means of an electrostatic actuator.

The very close position between the center of mass of the pendulum and his axis of rotation provides a low sensitivity of the angular position of pendulum's arm to the local micro-seismic ground acceleration while its one degree of rotational freedom enables a very precise position feedback loop control.

The use of the position feedback loop enables to achieve linearity and stability of the balance by compensating the mechanical work of pendulum's hinge, cause of various biases due to anelastic effects which are hard to manage.

Calibration factor of gravitational torques applied on the pendulum's arm is set by two independent ways: the electrostatic torque used for the position feedback loop and a small calibration mass applied with a variable cantilever around the pendulum's axis of rotation. This one is materialised on our apparatus by the horizontal rotation of the weight of the needle of a watch fixed on the pendulum's arm.

We will detail the main concepts of our approach and corresponding theoretical models in parallel with the description of our experimental apparatus. This one is designed to achieve a theoretical precision of few percent on the measurement of the gravitational torque. The resolutions of our capacitive position sensor and our electrostatic actuator are respectively about 10^{-9} rad and 10^{-9} N·m.

We will also introduce the effect of the main background noises factors related to this kind of experiment as well as a very simple algorithm enabling us to compute gravitational effects for any geometry of masses.

The conclusions coming from our theoretical and experimental study will allow us to provide a set of suggestions and recommendations to reach a resolution of a few ppm in the measurement of the gravitational torque.

Keywords : Gravitational balance, universal constant of gravitation G , astatic vertical pendulum, electrostatic actuator, position feedback loop control.

Remerciements

Je souhaite remercier les différents partenaires et les différentes personnes ayant permis de mener à bien ce projet.

Mes promoteurs et les membres de mon jury :

Je remercie premièrement et tout particulièrement les professeurs Michel van Ruymbeke et Ernest Matagne, promoteurs de cette thèse, pour leur soutien constant, leurs précieux conseils et leur aide à la préparation du manuscrit.

Je remercie également les différents membres du jury : le Pr Luc Vanderdorpe qui m'a fait l'honneur de le présider, le Pr Olivier Francis pour son implication et la confiance qu'il m'a donnée, le Pr Alain Cornet pour ses conseils et sa pédagogie et enfin le Pr Hervé Buyse qui m'a accompagné d'un œil bienveillant depuis le début de mon cursus universitaire.

Le personnel de l'Observatoire Royal de Belgique :

Je remercie le Dr Ronald van der Linden, directeur de l'Observatoire Royal de Belgique pour m'avoir proposé de réaliser ce doctorat, ainsi que les précédents directeurs, le Dr Paul Paquet et le Dr Roland Verbeiren, pour avoir mis à disposition l'infrastructure scientifique utilisée lors de mes années passées d'abord en tant qu'ingénieur en instrumentation géophysique et ensuite lors des travaux développés dans le cadre du doctorat.

Je remercie les différents membres de l'équipe du laboratoire dirigée par Michel van Ruymbeke : Mr Jean-Philippe Noël pour son expertise en électronique et dans le domaine des microcontrôleurs sans qui rien n'aurait été possible dans les délais impartis, Mr Francis Renders pour la réalisation des nombreuses pièces mécaniques constituant notre instrument ainsi que le Dr François Beauducel, le Dr Nicoleta Cadicheanu, le Dr Michel Everaerts, Eric de Kerchove, David Lopez, André Somerhausen, Geneviève Tuts, Frédéric van Ruymbeke et Ping Zhu pour les discussions et les collaborations fructueuses que nous avons eues.

Je remercie également Véronique Wellens et Christiane Verbeemen pour leur bonne humeur et le traitement efficace des différents dossiers administratifs.

L'équipe du Centre Européen de Géodynamique et Séismologie (ECGS) :

Je remercie l'équipe du Centre Européen de Géodynamique et Séismologie (ECGS) en charge du Laboratoire Souterrain de Géodynamique de Walferdange pour la mise à disposition des infrastructures ayant permis l'installation de notre dispositif expérimental. Je pense particulièrement à la collaboration scientifique avec Olivier Francis et à l'aide et à la disponibilité de Gilles Celli lors de la réalisation du réseau VPN vers l'observatoire.

Je remercie le groupe SWATCH[®] qui nous a aimablement transmis les caractéristiques des aiguilles de la montre utilisée sur notre balance pour générer les étalons de couple.

Je remercie aussi le Dr Terry Quinn, directeur du BIPM, qui a pris le temps de me recevoir lors de ma participation à la campagne d'inter comparaison ICAG 2005 [53] et de me présenter l'expérience de mesure de G menée au BIPM.

Je tiens également à remercier mes proches :

-Mon grand père Pierre Naslin (X, 1939) dont la méthode éponyme de réglage de systèmes peu amortis a permis d'assurer efficacement l'asservissement en position de notre balance.

-Mes parents, ma grand-mère, mes soeurs ainsi qu'Anne-Erminie et sa famille pour le soutien constant qu'ils m'ont apporté.

Je tiens enfin à remercier tout particulièrement et chaleureusement le sponsor de notre projet Mr Guy Berthault (X, 1945) pour l'intérêt qu'il nous a témoigné.

Que ce manuscrit soit un gage de notre gratitude envers la confiance qu'il nous a si aimablement octroyée.

Lexique

Anélasticité : Caractéristique d'un matériau ayant un comportement non parfaitement élastique. Nous parlons de matériaux viscoélastiques pour désigner les matériaux ne suivant pas instantanément la contrainte qui leur est appliquée et de matériaux viscoplastiques pour désigner les matériaux ayant un comportement non réversible.

Pendule horizontal : Pendule dont le plan d'oscillation présente un angle faible avec le plan horizontal. Le couple de rappel induit par le champ de pesanteur local est alors réduit à la projection de celui-ci dans le plan d'oscillation du pendule, offrant une excellente sensibilité mécanique à ce type de pendule.

Pendule astatisé : Pendule oscillant dans un plan vertical, dont la position de l'axe de rotation est ramené à une faible distance au dessus de son centre de masse, Le couple de rappel induit par le champ de pesanteur local est ainsi sensiblement diminué. Il est théoriquement nul dans le cas où ces deux positions sont coïncidentes.

TABLE DES MATIERES

1	Introduction	1
1.1	Loi de Newton	1
1.2	Mesure de G, méthodologie.....	1
1.2.1	Historique et état de l'art	4
1.3	Motivations, historique de notre approche et concepts	6
1.1.1	Compensation des effets anélastiques	6
1.1.2	Pendule horizontal :	7
1.1.3	Pendule astatisé :	7
1.4	Objectifs	8
1.5	Apports du travail et principaux points abordés.....	9
2	Principes et Concepts de l'expérience	11
2.1	Pendule astatisé	11
2.2	Application de couples gravitationnels.....	12
2.3	Fonctionnement en asservissement de position.....	13
2.4	Couple étalon engendré par la rotation d'une masse excentrique	15
2.5	Conclusions	16
3	Présentation générale du dispositif expérimental	19
3.1	Installation au Walferdange Underground Laboratory for Geodynamic.....	26
3.2	Contrôle à distance	30
3.2.1	Flux d'information descendant.....	31
3.2.2	Flux d'information ascendant.....	32
3.2.3	Interface de commande et de visualisation.....	32
4	Pendule astatisé	35
4.1	Paramètres géométriques du bras pendulaire	35
4.2	Équilibre statique des couples autour de l'axe de rotation	36
4.3	Équilibre Dynamique des couples autour de l'axe de rotation.....	39
4.3.1	Facteur d'atténuation de la composante X de l'accélération du sol	40
4.4	Capteur de position angulaire capacitif	41
4.4.1	Étalonnage du capteur de position.....	45
4.4.2	Courbe d'étalonnage et gain du capteur de position.....	47
4.4.3	Commentaires et perspectives	49
4.5	Étalon de couple généré par la rotation des aiguilles d'une montre solidaire du bras pendulaire.....	50
4.6	Masselotte de réglage de zéro.....	52
4.7	Axe de rotation	53
4.7.1	Introduction	53
4.7.2	Pivot à Lames flexibles	54
4.7.3	Perspectives : Pivot à billes et pivot flexible.....	55
4.8	Dimensionnement lié à une suspension à lames flexibles.....	56
4.8.1	Constante de rappel mécanique : mise en équation.....	57
4.8.2	Rappel : Dimensionnement des balances de torsion	58
4.8.3	Dimensionnement des lames flexibles	59
4.8.4	Dimensionnement du pendule astatisé monté sur un pivot à lames flexibles	60
4.8.4.1	Valeur des masses suspendues	60

4.8.4.2	Facteur de qualité du pendule en fonction de son degré d'astatisation	61
4.8.5	Conclusions :	62
5	Actionneur gravitationnel	63
5.1	Détermination de la force gravitationnelle agissant entre deux objets de géométrie et de masse quelconque.	63
5.1.1	Décomposition en masses ponctuelles :	64
5.1.2	Décomposition en barres élémentaires:	66
5.1.3	Précision et Convergence de l'algorithme	67
5.1.4	Conclusions	69
5.2	Géométrie de l'actionneur gravitationnel	70
5.3	Caractéristiques des paires de masses inférieures et supérieures	71
5.3.1	Influence de la géométrie des masses attractives sur la distribution des lignes de champ	72
5.3.2	Force gravitationnelle agissant entre chaque paire de masses cylindriques	74
5.3.3	Echelon de force gravitationnelle agissant entre chaque paire de masses cylindriques	76
5.4	Echelon de couple gravitationnel résultant de l'interaction entre les masses cylindriques en laiton	79
5.5	Contribution des supports des masses cylindriques pendulaires et attractives	82
5.6	Géométries alternatives	83
5.6.1	Masse pendulaire autoporteuse.	83
5.6.2	Couple généré par une paire de masses attractives cylindriques	84
5.6.2.1	Calcul du couple gravitationnel : Décomposition par barres élémentaires horizontales	85
5.6.3	Système à deux paires de masses attractives cylindriques	87
5.7	Conclusions	89
6	Actionneur électrostatique	91
6.1	Description de l'actionneur électrostatique	91
6.1.1	Commande des électrodes par Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI)	92
6.2	Couples électrostatiques et coénergie électrique	94
6.2.1	Modèle simple des capacités des électrodes de l'actionneur électrostatique	95
6.3	Procédure d'étalonnage de l'actionneur électrostatique	96
6.3.1	Mesure de capacités par oscillateur à relaxation RC	97
6.3.1.1	Paramètres théoriques de l'oscillateur à relaxation	98
6.3.1.2	Etalonnage des oscillateurs par un jeu de condensateurs étalon	99
6.3.2	Courbe d'étalonnage de l'électrode C34	100
6.3.3	Commentaires et discussions	103
6.3.4	Dépendance de la capacité de l'actionneur électrostatique à la fréquence d'excitation	104
6.4	Commande Complémentaire des électrodes	105
6.5	Conclusions	107
7	Régulateur de rétroaction de position	109
7.1	Introduction :	109
7.2	Régulateur PID à architecture parallèle	109

7.3	Fonction de transfert du système bouclé	110
7.4	Détermination des coefficients PID : Méthode des polynômes normaux à coefficient d'amortissement réglable.....	112
7.4.1	Introduction :	112
7.4.2	Systèmes d'ordre $n = 2$	113
7.4.3	Généralisation : Systèmes d'ordre $n > 2$:	115
7.4.4	Application à notre dispositif expérimental.	116
7.5	Fonction de transfert théorique en mode asservi	117
7.5.1	Paramètres de simulation.....	117
7.5.2	Couple d'asservissement Γ_E : Réponse en fréquence théorique.....	118
7.5.3	Déviations angulaires θ : Réponse en fréquence théorique	120
7.6	Régulateur numérique du dispositif expérimental.....	124
7.6.1	Description et réglages appliqués.....	124
7.6.2	Gain et fréquence de fonctionnement de la boucle de rétroaction	124
7.6.3	Paramètres de dimensionnement	125
7.7	Conclusions et perspectives.....	126
8	Résultats	127
8.1	Forçage périodique, traitement de signal par stacking	127
8.1.1	Principe.....	127
8.1.2	Chaîne de traitement du signal	129
8.1.3	Extraction de différents signaux périodiques	129
8.1.4	Conclusions	130
8.2	Facteur d'échelle des graphes.....	131
8.3	Facteurs d'influence environnementaux.....	132
8.3.1	Onde climatique et onde de marée	132
8.3.2	Dérive à long terme et influence des forçages micro et macrosismiques 134	
8.4	Forçages périodiques en mode libre	139
8.4.1	Réponses indicielles et impulsionnelles	139
8.4.1.1	Amortisseur électrostatique	142
8.4.2	Réponse indicielle à flancs progressifs : Amplitude des fluages en fonction de l'amplitude de l'échelon de forçage	143
8.4.3	Forçages multiples et facteurs d'étalonnage.....	144
8.5	Forçages périodiques en Mode asservi.....	148
8.5.1	Réponse indicielle et impulsionnelle.....	149
8.5.2	Vérification de la prise en charge des couples de forçage externe par la boucle d'asservissement	152
8.5.3	Forçages multiples et facteurs d'étalonnage.....	155
8.6	Dernières séries de mesures.....	160
8.7	Conclusions	161
9	Conclusions	163
10	Annexes	169
10.1	Caractéristiques du bras pendulaire.....	169
10.2	Caractéristiques des Masses attractives.....	170
10.3	Bilan des couples gravitationnels appliqués.....	170
10.4	Optimisation de la géométrie des masses cylindriques coaxiales	170
10.5	Moteur synchrone actionnant les masses attractives	172
10.6	Modélisation des forçages gravitationnels	172

10.6.1	Décomposition par barres longitudinales	172
10.6.2	Calcul analytique de la force agissant entre une masse cylindrique et une masse ponctuelle située le long de son axe de symétrie	173
10.6.3	Calcul du Potentiel gravitationnel : Décomposition en barres élémentaires	173
10.6.4	Effets de projection du champ gravitationnel :	174
10.6.5	Masses attractives annulaires :	175
10.6.6	Calcul des couples : intégration par barres verticales.....	177
10.7	Vérification expérimentale des amplitudes relatives des couples produits par les trois aiguilles de la montre	178
10.8	Etalonnage du micromètre motorisé.....	180
10.9	Oscillateurs à relaxation RC	180
10.10	Etalonnage des deux capacimètres basés sur des oscillateurs RC.....	182
10.11	Schéma de câblage des électrodes de l'actionneur électrostatique.....	184
10.12	Erreur de fond d'échelle de l'actionneur électrostatique.....	185
10.13	Synthèse du régulateur numérique : Equations aux différences.....	185
10.14	Architecture globale de la boucle d'asservissement.....	186
10.15	Forçages macrosismiques en mode libre	186
10.15.1	Comparaison avec le signal d'un gravimètre à ressort.....	186
10.15.2	Enregistrement d'un séisme en acquisition 16 Hz.....	187
10.16	Application de forçages multiples en déflexion libre	188
10.17	Influence des fluages sur la réponse en fréquence expérimentale.....	190
10.18	USGS New Low-Noise Model et déviation angulaire parasite.....	191
10.19	Expérience préliminaire du mois de mars 2006	192
10.19.1	Présentation	192
10.19.2	Facteurs d'étalonnage	194
10.19.2.1	Constante de rappel du pendule :	194
10.19.2.2	Etalonnage du capacimètre de l'actionneur électrostatique	194
10.19.2.3	Etalonnage du capteur de position et de l'actionneur électrostatique	195
10.19.3	Forçages multiples en déflexion libre.....	199
Références		203
Général.....		203
Expériences G.....		206
Catalogues & constructeurs		208

1 Introduction

1.1 Loi de Newton

La loi de la gravitation universelle établie par Newton en 1687 [1] exprime la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses ponctuelles distantes de r .

Cette force F est proportionnelle à la valeur des deux masses en présence m_1 et m_2 , et inversement proportionnelle au carré de la distance r les séparant et ce à un facteur près : la constante universelle de gravitation G (1-1).

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad [N] \quad (1-1)$$

La loi de Newton n'est valable que pour de faibles vitesses des masses par rapport à la vitesse de la lumière et pour des valeurs de champ gravitationnel modérées.

Au-delà, les effets gravitationnels doivent être formalisés dans le cadre de la relativité générale établie en 1915 par Einstein.

Celle-ci interprète les effets gravitationnels comme une déformation de la géométrie de l'espace-temps définie par le tenseur de courbure E , dit tenseur d'Einstein. Ce tenseur est lié à la constante universelle de gravitation G par l'équation (1-2) :

$$E = G \cdot \frac{8 \cdot \pi}{c^4} \cdot T \quad (1-2)$$

où c représente la vitesse de la lumière dans le vide et T le tenseur d'énergie impulsion [2].

La valeur actuelle de G est annoncée avec une incertitude relative de ± 100 ppm (Tableau 1-1).

Elle est dite universelle dans le sens où sa valeur est supposée invariante spatialement et temporellement.

Elle fait partie des constantes dites fondamentales, dans le sens où il n'existe pas actuellement de théories permettant de prédire sa valeur en fonction d'autres constantes fondamentales.

Autrement dit, seule une mesure expérimentale permet d'y accéder.

La faiblesse des effets relativistes intervenant dans les expériences de laboratoire fait que seule l'équation de Newton (1-1) est à considérer.

1.2 Mesure de G , méthodologie

Nous classons les approches expérimentales en deux catégories distinctes : l'approche statique et l'approche dynamique.

L'approche statique consiste à déduire la valeur de G en appliquant directement l'équation de Newton (1-1). Elle est dite statique dans le sens où les masses en présence restent immobiles les unes par rapport aux autres. On parle alors de balance de force. La force gravitationnelle induite par les masses attractives sur les masses solidaires de la balance est comparée avec une ou plusieurs autres forces, afin d'assurer l'étalonnage.

Historiquement, la première expérience fut réalisée en 1798 par Henry Cavendish à l'aide d'une balance de torsion (Figure 1-1) [68].

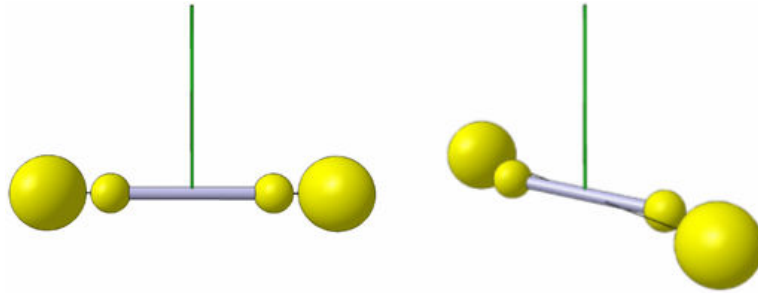


Figure 1-1 : Principe de la balance de torsion

Les couples gravitationnels induits par les masses attractives sur les masses suspendues engendrent une rotation du fléau de la balance jusqu'à ce que le couple gravitationnel appliqué soit compensé par le couple de rappel mécanique du fil de torsion. Celui-ci fait alors office d'étalon de couple.

Le couple de rappel de la balance est déduit de la valeur de la déviation angulaire observée et de la valeur de la constante de rappel du fil de torsion. Cette dernière est déterminée préalablement par une mesure de la période d'oscillation propre du fléau du pendule et du calcul de son moment d'inertie.

La valeur de G est alors déduite de la valeur du couple de rappel mesuré et du couple gravitationnel théorique appliqué à la balance.

L'approche dynamique consiste, quant à elle, à mesurer l'accélération d'une masse de test m_1 sous l'influence d'un champ d'accélération gravitationnel induit par la présence d'une masse attractive m_2 (1-3).

$$a_G = \frac{F}{m_1} = G \cdot \frac{m_2}{r^2} \quad [m/s^2] \quad (1-3)$$

Cette approche, par application du principe d'équivalence entre masse pesante et masse inertielle, a l'avantage d'être indépendante de la valeur de la masse m_1 subissant le champ d'accélération gravitationnel.

Les premières applications expérimentales de cette approche sont beaucoup plus récentes. Elles ont débuté par le développement du pendule de torsion [70], [71], [72], [73], [99], [100], par opposition au concept de balance de torsion. Le principe consiste alors à mesurer la variation de la période d'oscillation propre du fléau du pendule en fonction de la position des masses attractives. On parle aussi de méthode par déplacement de fréquence.

Une variante de cette méthode consiste à munir le pendule de torsion d'une boucle d'asservissement sur l'accélération angulaire du fléau du pendule [71]. Cette méthode a la particularité de ne plus faire intervenir la constante de rappel mécanique du fil de torsion. L'expérience offrant actuellement le plus faible coefficient d'incertitude relative sur la valeur de G (14 ppm) repose sur ce principe [76], [77], [78].

Une application plus directe de l'approche dynamique consiste à mesurer la modification de l'accélération d'un corps en chute libre induite par la présence d'une masse attractive. L'équipe du JILA [84] et [85] a ainsi pu réaliser une telle expérience autour d'un gravimètre absolu commercial avec une incertitude relative sur la valeur de G de l'ordre de 1400 ppm.

À noter que de nombreux laboratoires travaillent actuellement sur la mesure de la chute « d'atomes froids », appelés aussi condensât de Bose-Einstein, par interférométrie atomique. Les précisions obtenues jusqu'à présent restent néanmoins limitées au pour cent du fait des indéterminations sur les positions et les vitesses initiales du « nuage d'atome froid » [86] - [90].

L'analyse des équations (1-1) et (1-3) nous indique que la précision sur la mesure de G est avant tout tributaire des précisions accessibles sur les mesures de masse et de longueur.

Si la détermination de la valeur des masses utilisées peut actuellement être réalisée avec une précision relative de 0,01 ppm [5], [6], en revanche les indéterminations liées à l'homogénéité des matériaux et aux distances relatives entre les masses en présence restent difficiles à contraindre avec une précision relative supérieure au ppm.

À titre d'exemple, la distance entre deux masses ponctuelles écartées de un mètre, doit être contrainte au demi micron près, si l'on souhaite avoir le ppm sur la valeur de la force gravitationnelle agissant entre elles. Cette dernière considération représente une limite de l'état de l'art dans les mesures de distance et constitue actuellement l'un des principaux facteurs limitatifs sur la précision de la valeur de G .

Notons encore que les facteurs environnementaux peuvent jouer un rôle perturbateur important.

Ainsi le repère lié au laboratoire ne peut pas être considéré comme un repère inertiel parfait. Celui-ci peut par exemple osciller de quelques microns sur des périodes de quatre, six et dix secondes liées à l'agitation microsismique naturelle [7].

Ces accélérations inertielles parasites sont du même ordre de grandeur que le champ d'accélération produit par les masses attractives.

Notons encore que les vibrations sismiques liées à l'activité humaine, regroupées sous le vocable de bruits industriels, contribuent aussi aux accélérations inertielles parasites, et ce sur une bande de fréquence allant de 1 à 10 Hz.

Les sources de biais citées dans ce paragraphe sont loin d'être exhaustives, leurs influences sur la mesure de G intervenant à des degrés divers selon l'approche expérimentale utilisée.

1.2.1 Historique et état de l'art

La constante universelle de gravitation G est historiquement la première constante universelle à avoir été mesurée [68] et reste, à ce jour, la constante universelle possédant le plus grand coefficient d'incertitude relative sur sa valeur.

Depuis 1973, le comité CODATA (Committee on Data for Science and Technology) se charge de la normalisation des constantes physiques en fonction des résultats publiés par les différents laboratoires concernés.

L'historique des valeurs de G prônées par CODATA est repris dans le Tableau 1-1.

Année CODATA	G [$10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$]	Incrtitude relative [ppm]
1986 [64]	$6,672\ 59(85) \pm 0,0009$	128
1998 [65]	$6,673(10) \pm 0,01$	1500
2002 [66]	$6,6742(10) \pm 0,001$	150
2006 [67]	$6,67428(67) \pm 0,0006$	100

Tableau 1-1 : Historique des valeurs de G prônées par CODATA et des incertitudes relatives associées

La valeur recommandée par CODATA 1986 repose essentiellement sur l'expérience de Luther & Towler effectuée en 1982 [72]. Celle-ci est basée sur la méthode de déplacement de fréquence. Ce principe est entièrement tributaire de la stabilité mécanique du fil de torsion du pendule.

Or, en 1995, Kuroda [101] montre que la constante de rappel des fils de torsion est fonction de la fréquence à laquelle on les sollicite, du fait de leur caractère non parfaitement élastique.

En 1996 une expérience menée au PTB utilise une balance dont le fil de torsion est remplacé par un flotteur placé dans un bain de mercure [91] [92]. L'étalonnage provenant d'un contrecouple électrostatique fournit une valeur de 0,6 % plus élevée ($6,71540(56) \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \pm 83 \text{ ppm}$) que celle prônée par CODATA en 1986.

Ces deux éléments ont introduit une suspicion élevée sur la présence d'erreurs systématiques liées au caractère non parfaitement élastique des fils de torsion utilisés dans les expériences traditionnelles.

L'erreur relative sur la valeur de G prônée par CODATA en 1998 fut donc ramenée à 1500 ppm.

Depuis lors, de nombreuses expériences originales ont été menées dans différents laboratoires, avec pour objectif principal, d'éliminer les biais liés à l'anélasticité résiduelle des fils de torsion [74] [76] [77] [78] [79] [80] [81] [96].

La valeur de G admise en 2006 est donnée avec une erreur relative de 100 ppm.

Il est intéressant de remarquer que cette valeur est plus élevée que celle prônée en 1986 sachant que les effets anélastiques présents dans les fils de torsion ont pour effet de surestimer la valeur de G [10], [101]. Ceci illustre le fait que les effets anélastiques sont

loin de représenter la seule source d'erreur systématique non maîtrisée dans ce type d'expérience.

La Figure 1-2 et le Tableau 1-2 présentent les barres d'erreur associées aux principales expériences ayant mené à la valeur de CODATA 2006 [67].

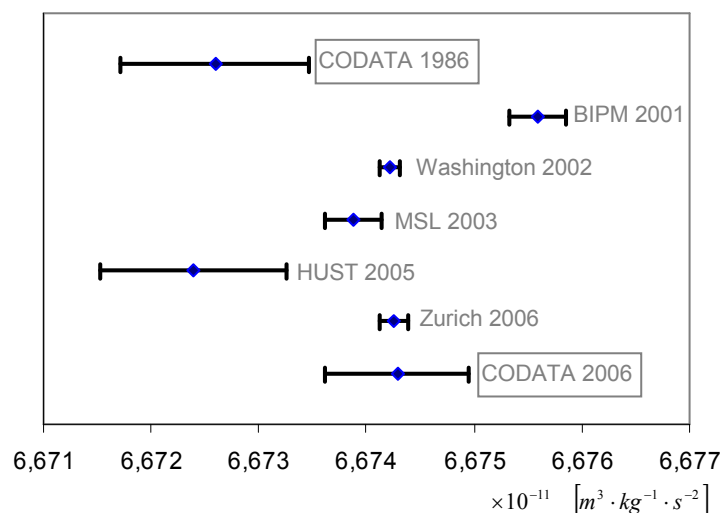


Figure 1-2 : Barres d'erreur sur les expériences les plus récentes ayant mené à la valeur de CODATA 2006 en comparaison avec la valeur prônée par CODATA en 1986 et en 2006.

	G [$10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$]	Incertitude relative [ppm]
BIPM (2001) [74]	$6,6755927 \pm 0,0003$	40
Washington (2002) [76], [77], [78]	$6,67425592 \pm 0,00009$	14
MSL (2003) [96]	$6,6738727 \pm 0,0003$	40
HUST (2005) [99], [100]	$6,67239 \pm 0,0009$	130
Zurich (2006) [80], [81]	$6,6742512 \pm 0,0001$	19

Tableau 1-2 : Valeurs de G associées aux expériences les plus récentes ayant mené à la valeur de CODATA 2006.

Nous observons que, si les incertitudes relatives associées à chaque expérience individuelle sont de faibles amplitudes, elles ne se recoupent par forcément.

Notons par exemple que l'expérience réalisée au BIPM [74] s'écarte de 200 ppm de la valeur admise en 2006.

Les conclusions de CODATA 2006 relatives à la valeur de G pointent l'absence de résultats indépendants et compétitifs sur la valeur de G depuis l'année 2002.

La commission encourage les laboratoires à poursuivre leurs efforts de recherche afin de fournir une valeur de G reposant sur une base de données plus consistante et plus redondante.

1.3 Motivations, historique de notre approche et concepts

Notre étude s'inscrit dans le cadre d'une approche statique.

Nous souhaitons présenter une expérience permettant d'éliminer l'influence des éventuels effets anélastiques de la suspension pointés par Kuroda et reposant sur une approche différente de celles ayant conduit aux résultats présentés par CODATA 2006.

Nous débuterons ce paragraphe par la présentation des deux principales méthodes, relatives aux approches statiques, permettant de diminuer les effets anélastiques de la suspension ainsi que leur mise en application dans les différentes expériences réalisées jusqu'à présent.

Nous présenterons ensuite le cheminement historique de notre démarche et détaillerons les principales spécificités de l'approche expérimentale développée dans ce travail.

1.1.1 Compensation des effets anélastiques

L'objectif est d'atténuer l'influence du travail mécanique de la suspension du fléau des balances utilisées afin de limiter les éventuels biais induits par les effets anélastiques.

Il existe essentiellement deux méthodes pour y arriver :

1) Adjoindre en parallèle du couple de rappel de la suspension, un deuxième couple de rappel qui, par nature, est dénué de tout effet anélastique.

L'université de Wuppertal [82], [83] a utilisé avec succès un système de deux pendules simples en parallèle en tant que balance de force. Le couple de rappel pendulaire, fonction du champ de pesanteur local, procure la plus grande part du couple de rappel total de la balance, la contribution du couple de rappel mécanique de la suspension devenant alors négligeable.

En 2001, le BIPM [74] a initié l'utilisation de balance à ruban de torsion repris dans un certain nombre d'expériences par la suite [74], [96]. La torsion du ruban engendre une élévation du fléau de la balance générant un couple de rappel essentiellement fonction du champ de pesanteur local. Ce type de montage permet d'obtenir des facteurs de qualité extrêmement élevés de l'ordre de 300000 dans le cas de la balance développée au BIPM [74].

L'expérience du PTB mentionnée plus haut s'inscrit dans la même voie avec un couple de rappel d'origine purement électrostatique.

2) Une autre méthode consiste à annuler le couple de rappel mécanique de la suspension en appliquant une rétroaction de position sur le fléau de la balance.

À l'équilibre, le couple gravitationnel est égal au contrecouple appliqué pour maintenir la position angulaire du fléau de la balance constante.

Un certain nombre de laboratoires [74], [96] ont travaillé avec succès sur des balances à ruban de torsion munies d'un actionneur électrostatique pour réaliser l'asservissement de position du fléau de la balance. L'approche statique contemporaine offrant le plus

faible degré d'incertitude relative est basée sur une balance à fléau commerciale modifiée, munie d'un actionneur électromagnétique [80] [81].

1.1.2 Pendule horizontal :

Notre approche a historiquement débuté par une approche purement pendulaire.

Notre expérience fut réalisée au Laboratoire d'Instrumentation Géodynamique (LIG) de l'Observatoire Royal de Belgique. Celui-ci possède une longue expérience dans l'élaboration de pendules avec notamment la mise au point des pendules horizontaux en quartz Verbandert Melchior [29] [30] [31] [32] [33] [34] [35] à suspension de Zollner utilisés dans la mesure des inclinaisons de la croûte terrestre relatives aux marées terrestres [56].

Michel van Ruymbeke a proposé [102] de réaliser une mesure de la constante G à partir de tels pendules associés à une géométrie spécifique des masses attractives (§5.3.1) permettant de diminuer la sensibilité du couple gravitationnel mesuré aux erreurs de positions relatives entre les masses en présence.

Des travaux exploratoires ont été réalisés sur un pendule horizontal à suspension de Zollner métallique [36]. Ceux-ci ont été suspendus suite à des difficultés de mise en œuvre liées notamment à la grande sensibilité de ce type de pendule aux paramètres environnementaux et particulièrement à ceux liés aux inclinaisons du sol.

1.1.3 Pendule astatisé :

Nous nous sommes alors focalisés sur le concept du pendule astatisé. Celui-ci a fait l'objet d'études poussées en 1992 par Quinn & al [14] notamment pour ses propriétés de faible sensibilité aux accélérations microséismiques. Cette géométrie ne déboucha pas pour autant sur des mesures de G concrètes, du fait de la présence de phénomènes dissipatifs importants dans les pivots à faible degré de liberté de mouvement que nécessite ce type de géométrie.

Nous proposons, dans ce travail, de reprendre cette géométrie en lui adjoignant une boucle de rétroaction de position par le biais d'un actionneur électrostatique.

Nous gardons ainsi les caractéristiques de faible sensibilité aux accélérations microséismiques du pendule astatisé tout en compensant l'influence des effets anélastiques de l'axe de rotation par l'application de la boucle d'asservissement de position.

De plus, ce type de géométrie présente l'avantage, contrairement aux balances de torsion, de n'avoir qu'un seul degré de liberté de mouvement à asservir en position.

Cette caractéristique autorise notamment l'emploi de capteurs de position et d'actionneurs de grande résolution.

Nous proposons d'étalonner notre balance en mode asservi par l'intermédiaire de deux étalons de couple indépendants :

- Un étalon de couple lié à l'actionneur électrostatique.

-Un étalon de couple original, reposant sur le changement du point d'application du poids d'une masselotte étalon, solidaire du bras pendulaire.

Dans le cadre de notre étude expérimentale, nous étudierons également le fonctionnement de notre balance en déflexion libre afin de mettre en évidence les effets liés à l'anélasticité résiduelle de la suspension et utiliserons le couple de rappel de celle-ci comme troisième étalon de couple.

Cette nouvelle approche, outre ses qualités propres, devrait présenter des erreurs systématiques d'origine sensiblement différente de celles présentes dans les expériences réalisées jusqu'à présent et répondre ainsi aux recommandations préconisées par CODATA 2006.

1.4 Objectifs

L'objectif de ce travail est de mener une étude de faisabilité théorique et expérimentale de notre approche présentée au §1.1.3.

Les objectifs liés à ces deux aspects complémentaires peuvent être résumés comme suit :

1) Modélisation des principales caractéristiques du dispositif expérimental.

Ces modèles devront en particulier nous permettre de :

- Définir une géométrie de l'actionneur gravitationnel adaptée au pendule astatisé permettant de minimiser la sensibilité du signal gravitationnel aux erreurs de positionnement des masses en présence.

- Etudier l'influence des effets anélastiques de la suspension sur le dimensionnement de la balance.

- Dimensionner les différents paramètres du capteur de position et de la boucle de régulation de position en terme de résolution et de bande passante en fonction des différentes périodes de forçage.

- Etudier la valeur du rapport signal sur bruit des signaux de sortie de notre balance en mode libre et en mode asservi en fonction des accélérations inertielles d'origine sismique.

2) Réalisation d'un dispositif expérimental entièrement contrôlable à distance installé dans un laboratoire souterrain afin de réduire les facteurs d'influence d'origine climatique.

Cet instrument permettra de nous assurer de la cohérence des modèles réalisés et d'étudier l'impact sur le rapport signal sur bruit de facteurs d'influences difficilement modélisable théoriquement.

Cet instrument doit en particulier nous permettre de :

- Comparer les échelons de couple gravitationnel appliqués avec les trois étalons de couples précités avec une précision de l'ordre du pour cent.
- Etudier les facteurs d'influence externes tels que les forçages sismiques et les inclinaisons du sol liées aux marées terrestres.
- Etudier les facteurs d'influence interne tels que les effets anélastiques de la suspension et leur compensation par la boucle d'asservissement de position.

Les enseignements tirés de notre étude théorique et expérimentale nous permettront d'établir une série de propositions et de recommandations quant à la réalisation d'une nouvelle balance compatible avec des mesures de couples gravitationnels au niveau du ppm.

1.5 Apports du travail et principaux points abordés

- Etude et implémentation en langage C d'un algorithme permettant le calcul de force ou de moment de force agissant entre deux masses de géométrie quelconque avec une précision de l'ordre du ppm.
- Proposition d'une géométrie de la balance et des masses attractives minimisant la sensibilité de l'échelon de couple gravitationnel aux erreurs de positionnement des masses en présence.
- Réalisation d'un capteur de position électrostatique ayant une résolution de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-9}$ radians (échantillonné à 1 Hz) et d'un actionneur électrostatique permettant d'appliquer des moments de force avec une résolution de l'ordre de 10^{-9} N·m.
- Gestion de la balance et du régulateur de l'actionneur électrostatique par le biais d'un microcontrôleur programmable permettant notamment d'injecter des forçages électrostatiques de facteur de forme variés.
- Application d'une méthode de réglage du régulateur PID pilotant la rétroaction de position de notre balance compatible avec des systèmes peu amortis.
- Présentation d'un pivot original à billes offrant un unique degré de liberté de mouvement en rotation.
- Mesure et maîtrise des facteurs d'influence externes et internes :
 - Mesure de l'inclinaison du sol liée aux tremblements de terre lointains et du bruit sismique industriel diurne.
 - Mesure de l'inclinaison du sol liée à la déformation de la croûte terrestre sous l'action du forçage lunaire (marées terrestres).

- Définition et application d'un mode opératoire permettant de vérifier que l'anélasticité résiduelle de la suspension ne vienne pas biaiser les mesures de couples appliqués en mode asservi.

2 Principes et Concepts de l'expérience

Nous présentons les principaux concepts associés à notre dispositif expérimental avant de les développer plus en détail dans les chapitres suivants.

2.1 Pendule astatisé

Notre approche est basée sur le concept de pendule astatisé utilisé en tant que balance de force.

Le pendule astatisé s'illustre par le fait que son centre de masse est excentré d'une très petite distance e_{CM} en dessous de la position de l'axe de rotation du pendule (Figure 2-1).

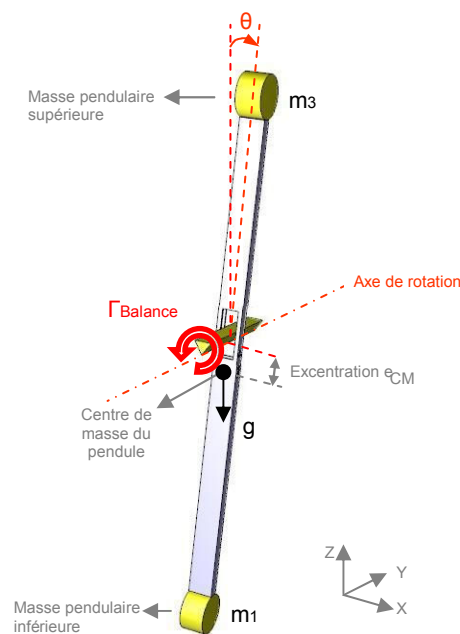


Figure 2-1 : Pendule astatisé constitué de deux masses cylindriques en laiton (en jaune). L'axe de rotation est ici symbolisé par la pointe du couteau de section triangulaire

Une telle caractéristique offre plusieurs propriétés intéressantes :

- Le couple de rappel du pendule produit par le champ de pesanteur local peut être sensiblement diminué voir théoriquement réduit à zéro pour une valeur d'excentration nulle. La déviation angulaire résultant de l'application d'un couple externe sur le bras peut ainsi être sensiblement amplifiée. Nous garderons en pratique une valeur d'excentration non nulle, la fraction pendulaire du couple de rappel de la balance (lié au champ de pesanteur local) permettant d'assurer une certaine stabilité du point de fonctionnement.
- La quasi coïncidence de la position de l'axe de rotation et du centre de masse du pendule permet d'atténuer sensiblement les mouvements parasites du bras pendulaire produits par l'activité microsismique locale.

- Observons enfin que l'unique degré de liberté de mouvement en rotation du pivot permet d'utiliser des capteurs de positions capacitifs offrant une résolution de plusieurs ordres de grandeur supérieure aux autocollimateurs [108] généralement utilisés dans les expériences basées sur des balances de torsion.

Nous parlons ici de pendule astatisé pour faire écho à notre approche historique intrinsèquement pendulaire.

Cette géométrie peut aussi être vue comme une balance à fléau vertical. Cette configuration permet d'appliquer aisément des forces gravitationnelles de part et d'autre des masses pendulaires.

2.2 Application de couples gravitationnels

L'échelon de couple gravitationnel appliqué au bras pendulaire est obtenu par la rotation de 180° de la position des masses attractives autour des masses pendulaires (positions p et p' de la Figure 2-2).

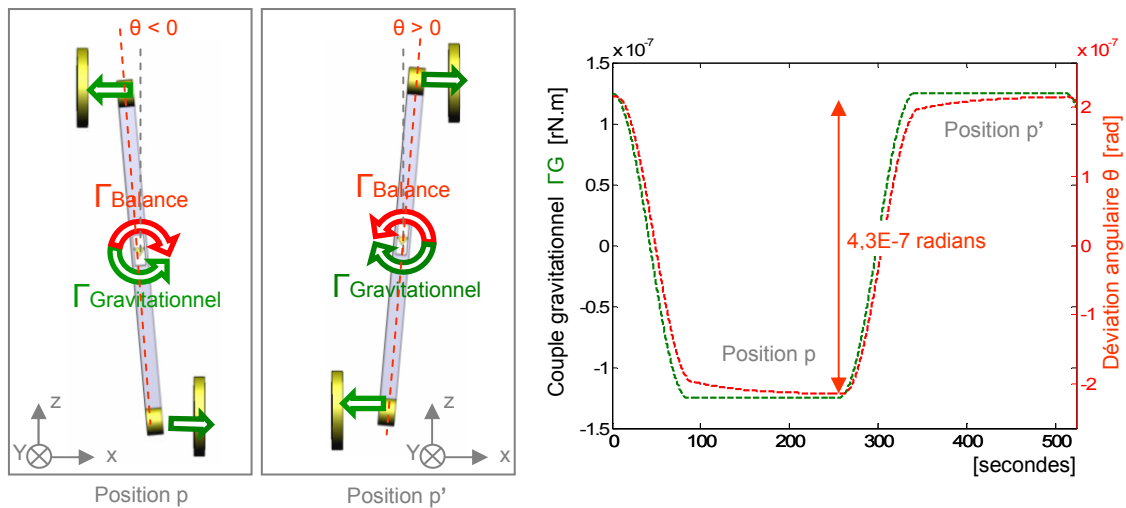


Figure 2-2 : Application d'un échelon de couple gravitationnel par la rotation de 180° de la position des masses attractives. Le graphe de droite illustre l'échelon de couple gravitationnel résultant et la déviation angulaire résultante du bras pendulaire (courbes théoriques calculées à partir des paramètres de notre dispositif expérimental).

L'échelon de couple appliqué sur le bras pendulaire s'apparente à un signal carré dont les flancs progressifs s'étalent sur une durée de 60 secondes correspondant au temps nécessaire à l'inversion de la position des masses attractives.

L'amplitude de l'échelon de couple gravitationnel appliqué est de l'ordre de $2,5 \cdot 10^{-7}$ N.m tandis que la déviation angulaire résultante sur le bras pendulaire est de l'ordre de $0,43 \cdot 10^{-6}$ rad.

Nous observons sur le graphique de droite de la Figure 2-2 que le changement de point de fonctionnement du pendule consécutif à l'application de l'échelon de couple gravitationnel est sujet à des phénomènes de fluages non négligeables, trahissant le

caractère non parfaitement élastique du pivot utilisé pour réaliser l'axe de rotation du pendule.

L'amplitude de ces fluages peut atteindre quelques pour cent de l'amplitude totale du signal dans le cas de notre dispositif expérimental.

Nous verrons au §4.8.4.2, que les phénomènes anélastiques présents dans les suspensions à faible degré de liberté de mouvement, relatifs aux pendules astatisés, sont intrinsèquement supérieurs à ceux présents dans les balances de torsion équivalentes, et ce malgré la présence d'un couple de rappel pendulaire en parallèle.

Ce constat conduit à deux conséquences notables :

- La valeur du couple de rappel du pendule astatisé, déduit par une mesure de période, ne peut être utilisé dans l'état actuel des choses comme étalon de couple précis.
- Les fluages et les fluctuations du couple de rappel du pendule astatisé en déflexion libre ne permettent pas d'obtenir des mesures précises des forçages appliqués.

Nous mènerons néanmoins dans le cadre de notre travail une série d'expériences en déflexion libre afin d'étudier les non-idéalités du pivot de notre balance et afin d'utiliser son couple de rappel comme étalon de couple additionnel permettant une comparaison avec les autres étalons de couple avec une précision de l'ordre du pour cent.

L'utilisation à terme de ce type de géométrie pour une mesure plus précise des couples injectés ne peut être envisagée qu'en asservissement de position.

2.3 Fonctionnement en asservissement de position

La position angulaire du bras du pendule est maintenue constante en moyenne par l'application d'un contrecouple électrostatique compensant l'action de couples externes tels que les échelons de couples gravitationnels produits par l'inversion de la position des masses attractives autour du bras pendulaire (Figure 2-3).

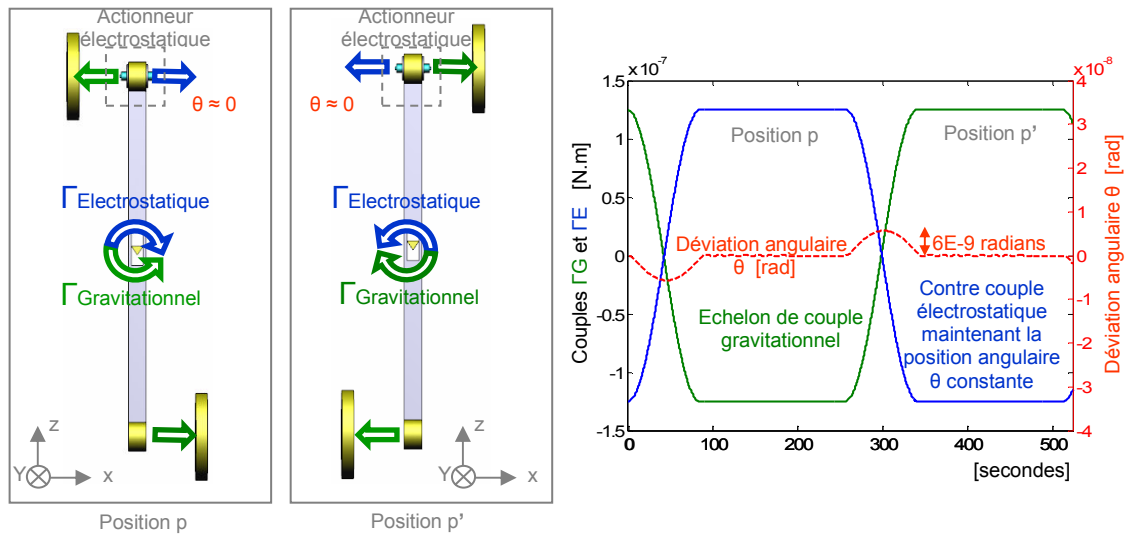


Figure 2-3 : Application d'un échelon de couple gravitationnel sur le bras pendulaire en asservissement de position (courbes théoriques calculées à partir des paramètres de notre dispositif expérimental)

La réduction de l'amplitude du mouvement du pendule permet de diminuer la contribution du couple de rappel mécanique du pivot de la balance ainsi que les éventuels effets anélastiques associés.

L'asservissement de la balance permet d'obtenir un fonctionnement stable et linéaire.

Les dépassements les plus importants observés correspondent aux zones de transition des échelons de couple gravitationnel appliqués. Dans le cas de notre dispositif expérimental, ces dépassements représentent encore plusieurs pour cent de la déviation angulaire induite par le forçage gravitationnel en l'absence de rétroaction de position.

L'amplitude de ces dépassements est fonction des performances de la boucle de rétroaction de position qui sont principalement tributaires de la bande passante et de la résolution du capteur de position utilisé.

Or, nous avons vu au §1.1.3 que notre géométrie offre la possibilité d'utiliser des capteurs de résolution et de bande passante élevée.

L'actionneur électrostatique est constitué de deux condensateurs matérialisés par deux électrodes en forme de disque disposées de part et d'autre de la masse pendulaire supérieure, faisant office d'électrode centrale reliée au potentiel de terre local (Figure 2-4).

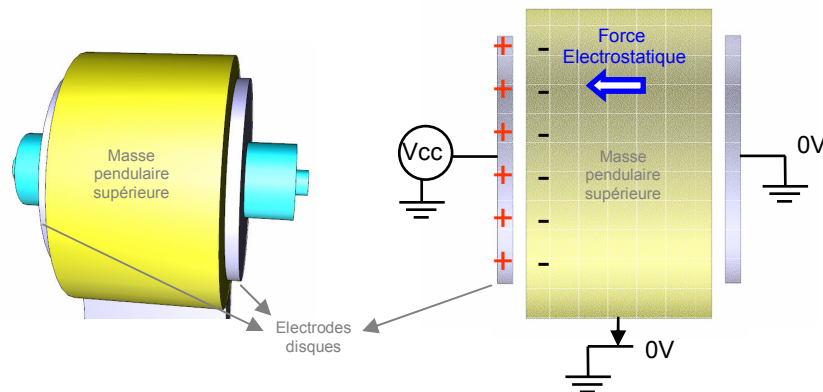


Figure 2-4 : Détail de l'actionneur électrostatique constitué de deux électrodes en forme de disque disposées de part et d'autre de la masse pendulaire supérieure. La figure de droite illustre la force électrostatique produite par la différence de potentiel appliquée entre la masse pendulaire et l'électrode de gauche.

Les forces électrostatiques sont induites en chargeant l'un ou l'autre condensateur en fonction de la direction de la force souhaitée.

La présence de charges électriques de signes opposés sur les électrodes en vis-à-vis crée une force d'attraction électrostatique nette qui a pour effet de réduire l'écartement des électrodes du condensateur considéré.

Nous verrons que les couples électrostatiques appliqués peuvent être étalonnés avec précision, connaissant la tension appliquée aux bornes des condensateurs de l'actionneur et la valeur de leur capacité en fonction de la position angulaire du pendule.

2.4 Couple étalon engendré par la rotation d'une masse excentrique

Nous proposons d'utiliser en complément de l'étalon de couple électrostatique, un étalon de couple original produit par déplacement du point d'application du poids d'une masse étalon m_e solidaire du bras pendulaire (Figure 2-5).

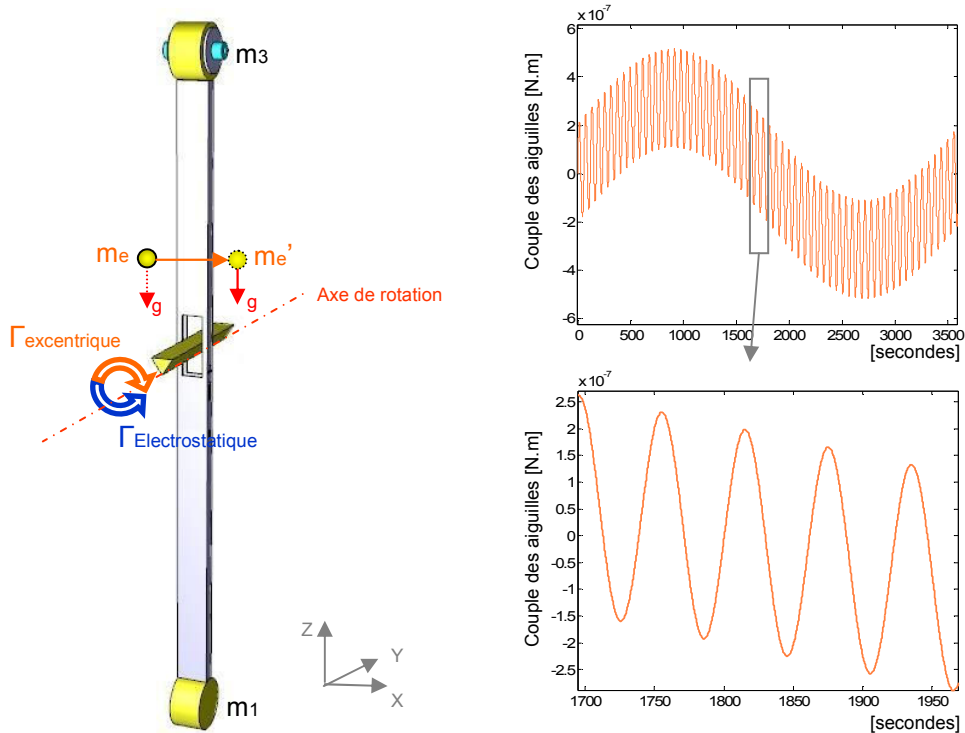


Figure 2-5 : Couple produit par la translation horizontale d'une masselotte étalon sur le bras pendulaire en rétroaction de position électrostatique (courbes théoriques calculées à partir des paramètres des aiguilles de la montre utilisée sur le dispositif expérimental)

Cet étalon de couple présente l'avantage d'être totalement indépendant des caractéristiques de la balance.

Ce concept est matérialisé sur notre balance par l'utilisation d'une montre fixée sur le bras du pendule et dont la rotation des aiguilles dans un plan horizontal génère trois couples sinusoïdaux de période différente (Graphiques de droite de la Figure 2-5).

Nous verrons que les amplitudes des couples sinusoïdaux engendrés par la rotation des aiguilles sont du même ordre de grandeur que l'échelon de couple gravitationnel induit par les masses attractives.

La précision sur l'amplitude des couples produits par la rotation des aiguilles de la montre installée sur notre dispositif expérimental est de l'ordre de quelques pour cent. Nous verrons que la stabilité temporelle de ce type d'étalon de couple peut théoriquement atteindre le ppm.

2.5 Conclusions

Notre approche basée sur un pendule astatisé en asservissement de position muni d'un pivot à faible degré de liberté de mouvement devrait présenter des erreurs systématiques sensiblement différentes de celles présentes dans les expériences réalisées jusqu'à présent.

En outre, la comparaison des facteurs d'étalonnage du couple gravitationnel obtenus avec nos trois étalons de couple de nature différente, nous permet de vérifier qu'un certain nombre d'erreurs systématiques propres à chacun des étalons de couple utilisés ont bien été pris en compte.

Les différents forçages appliqués à notre balance en fonction de son mode de fonctionnement ainsi que les principaux facteurs d'influence mis en évidence lors de nos expériences sont repris sur le schéma de la Figure 2-6.

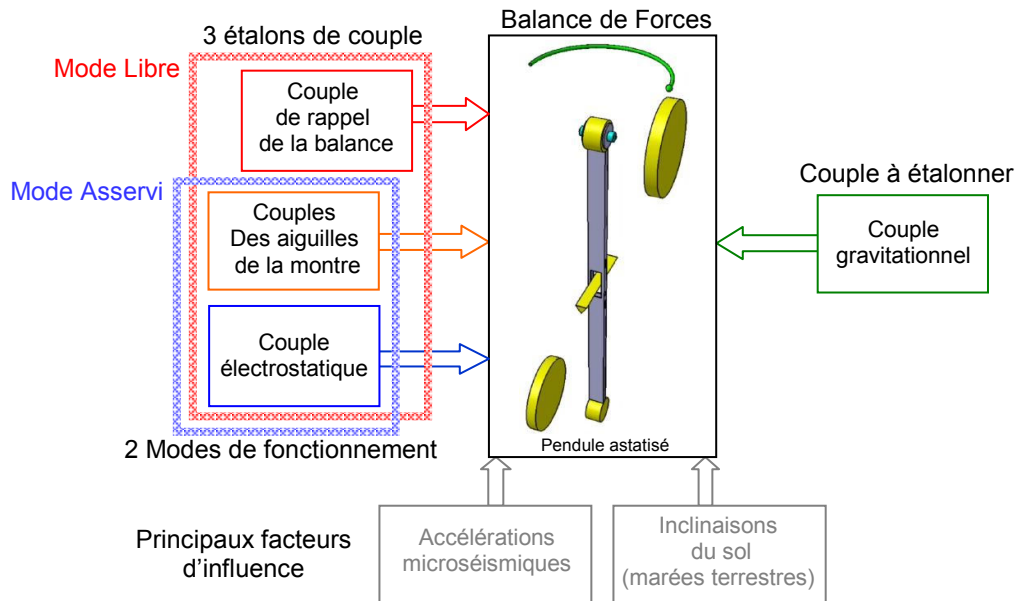


Figure 2-6 : Ensemble des modes de fonctionnement et des forçages étudiés lors de notre étude théorique et expérimentale du pendule astatisé.

Nous disposons ainsi de trois étalons de couple en déflexion libre et de deux en mode asservi.

Les différents concepts présentés dans ce chapitre ont dicté la réalisation du dispositif expérimental dont la description et l'étude de ses différents constituants feront l'objet des chapitres suivants.

La présentation et l'analyse des résultats expérimentaux relatifs aux différents forçages appliqués à notre balance et présentés à la Figure 2-6 seront exposées au chapitre 8.

3 Présentation générale du dispositif expérimental

Les différents principes de notre approche décrits aux chapitres précédents ont mené à la réalisation d'un dispositif expérimental dont la construction a débuté au cours de l'été 2006 (Figure 3-1).



Figure 3-1 : Assemblage de la Balance à l'Observatoire Royal de Belgique (septembre 2006)

La précision théorique de la valeur du couple gravitationnel enregistrée par notre balance serait de l'ordre de 5 % en mode asservi.

Ses principales caractéristiques métrologiques sont résumées au Tableau 3-1.

Description		Valeur
Période propre en mode Libre		15 [secondes]
Constante de rappel de la balance		0,577 [N·m/rad]
Résolution angulaire en acquisition 16Hz		$24 \cdot 10^{-9}$ [rad]
Couple pendulaire résiduel correspondant		$14 \cdot 10^{-9}$ [N·m]
Période propre en mode Asservi		9-10 [secondes]
Résolution de l'actionneur électrostatique	à 100 Volt	$3,31 \cdot 10^{-9}$ [N·m]
	à 88,8 Volt	$2,61 \cdot 10^{-9}$ [N·m]
Fond d'échelle de l'actionneur électrostatique	à 100 Volt	$\pm 1,085 \cdot 10^{-4}$ [N·m]
	à 88,8 Volt	$\pm 8,56 \cdot 10^{-5}$ [N·m]
Echelon de couple gravitationnel appliqué		$2,698 \cdot 10^{-7}$ [N·m]

Tableau 3-1: Principales caractéristiques de la balance en acquisition 16 Hz

La géométrie, les matériaux et la description des différents éléments constituant notre balance sont décrits de la Figure 3-2 à la Figure 3-6.

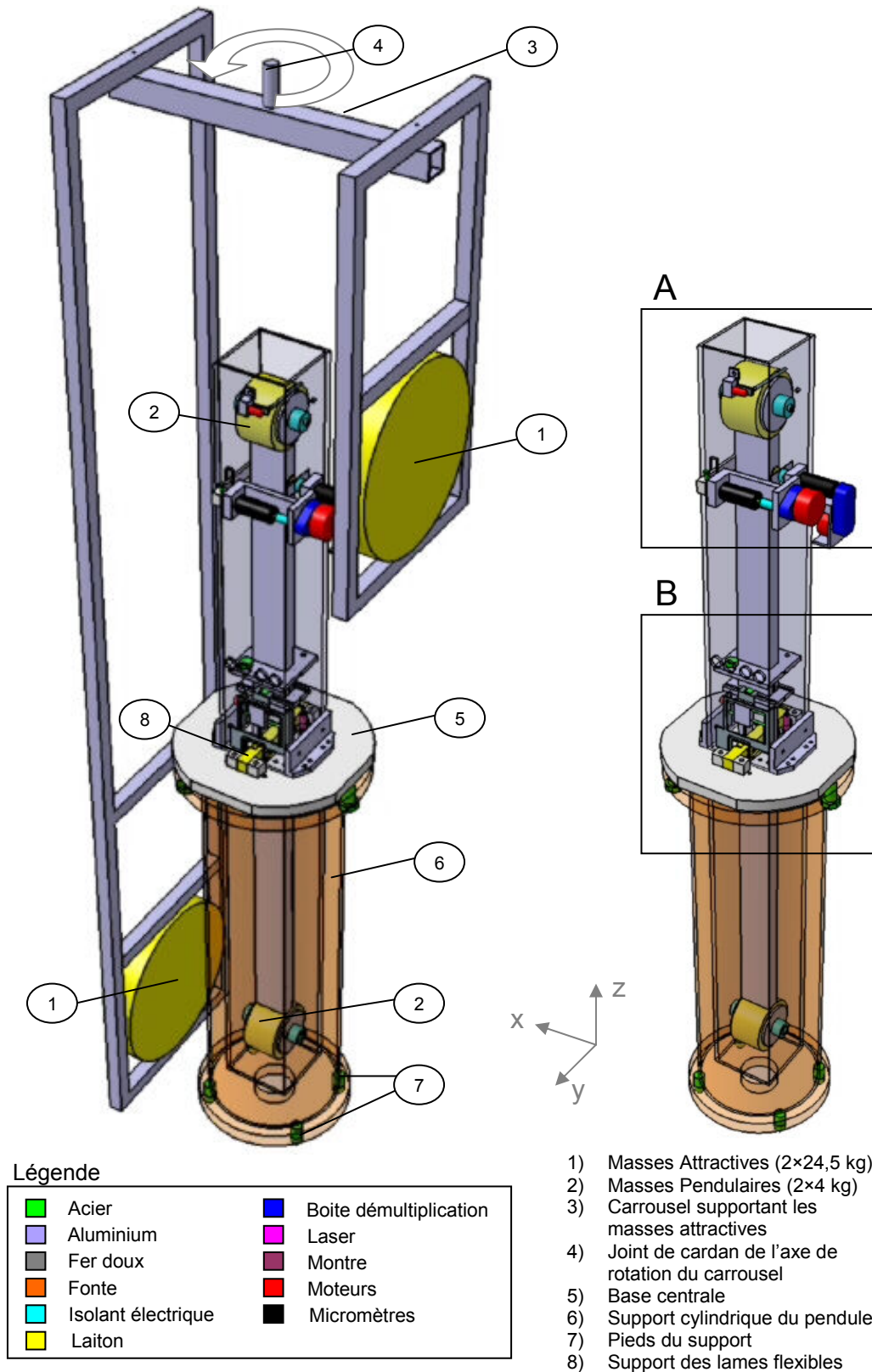


Figure 3-2: Balance gravitationnelle et carrousel supportant les masses attractives. (Notons que le caractère non symétrique de la structure en aluminium supportant les masses attractives en laiton nécessite de tenir compte de celle-ci dans le calcul des couples gravitationnels appliqués au bras pendulaire)

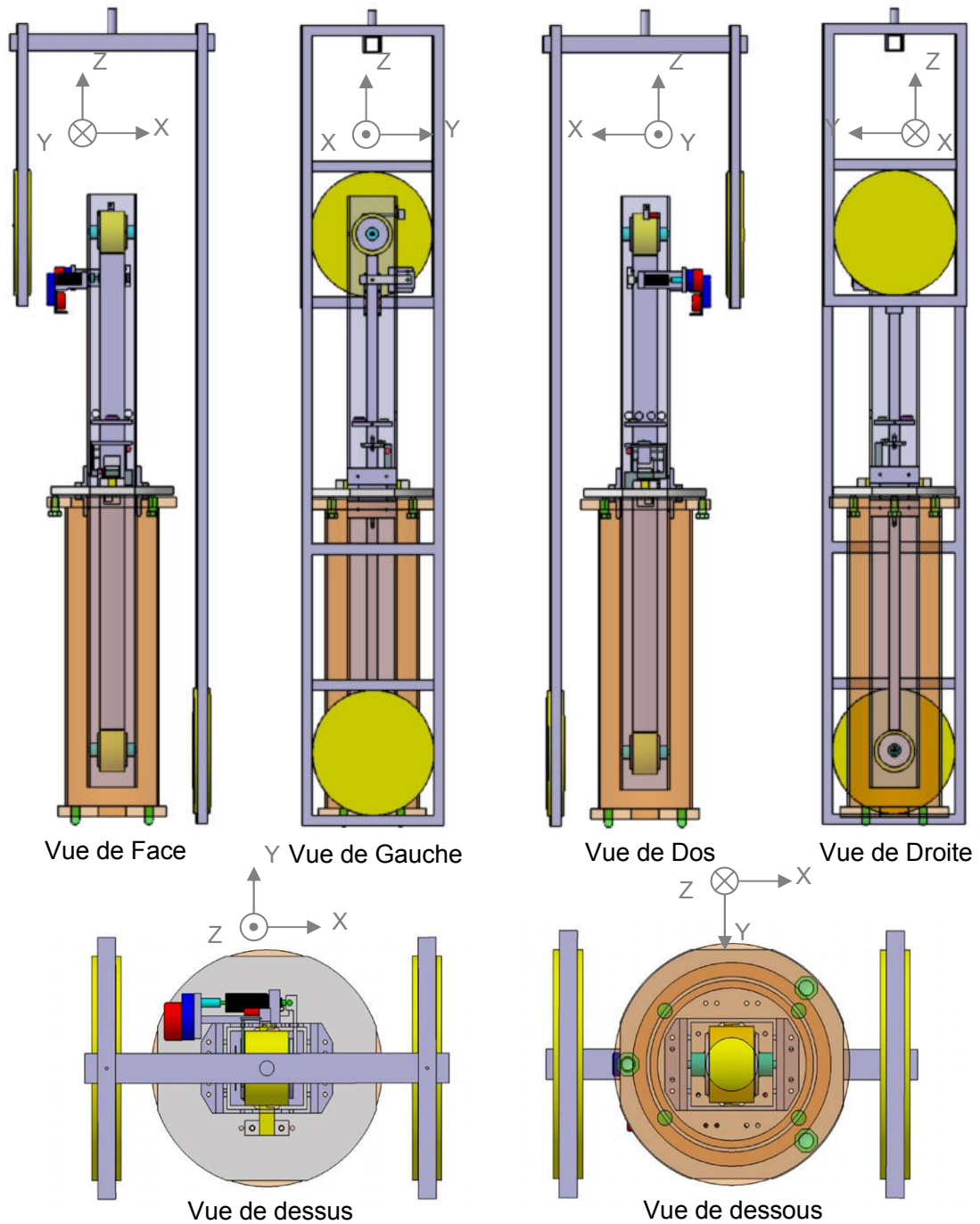


Figure 3-3: Vues de la balance gravitationnelle

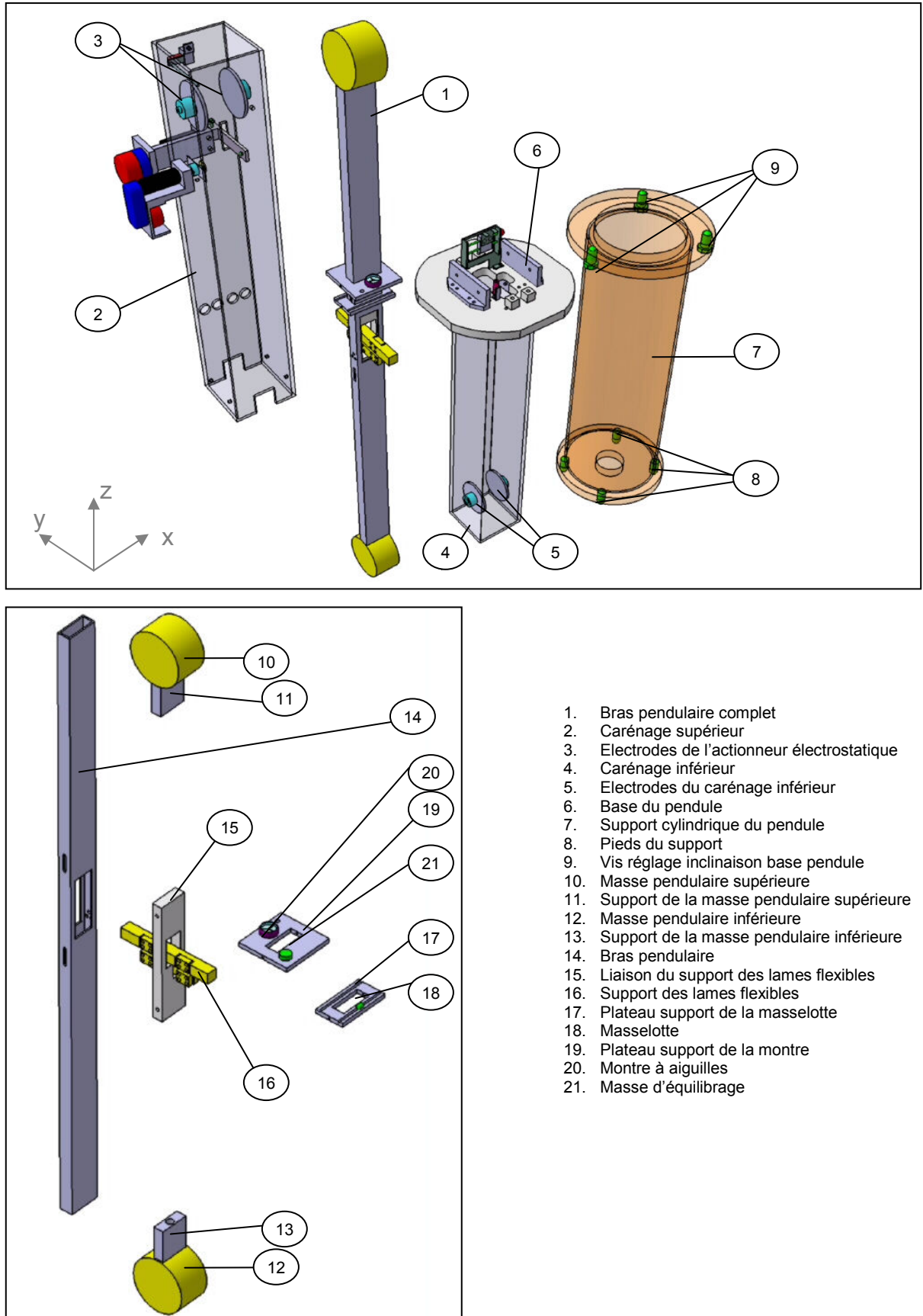


Figure 3-4: Eclaté de la balance gravitationnelle

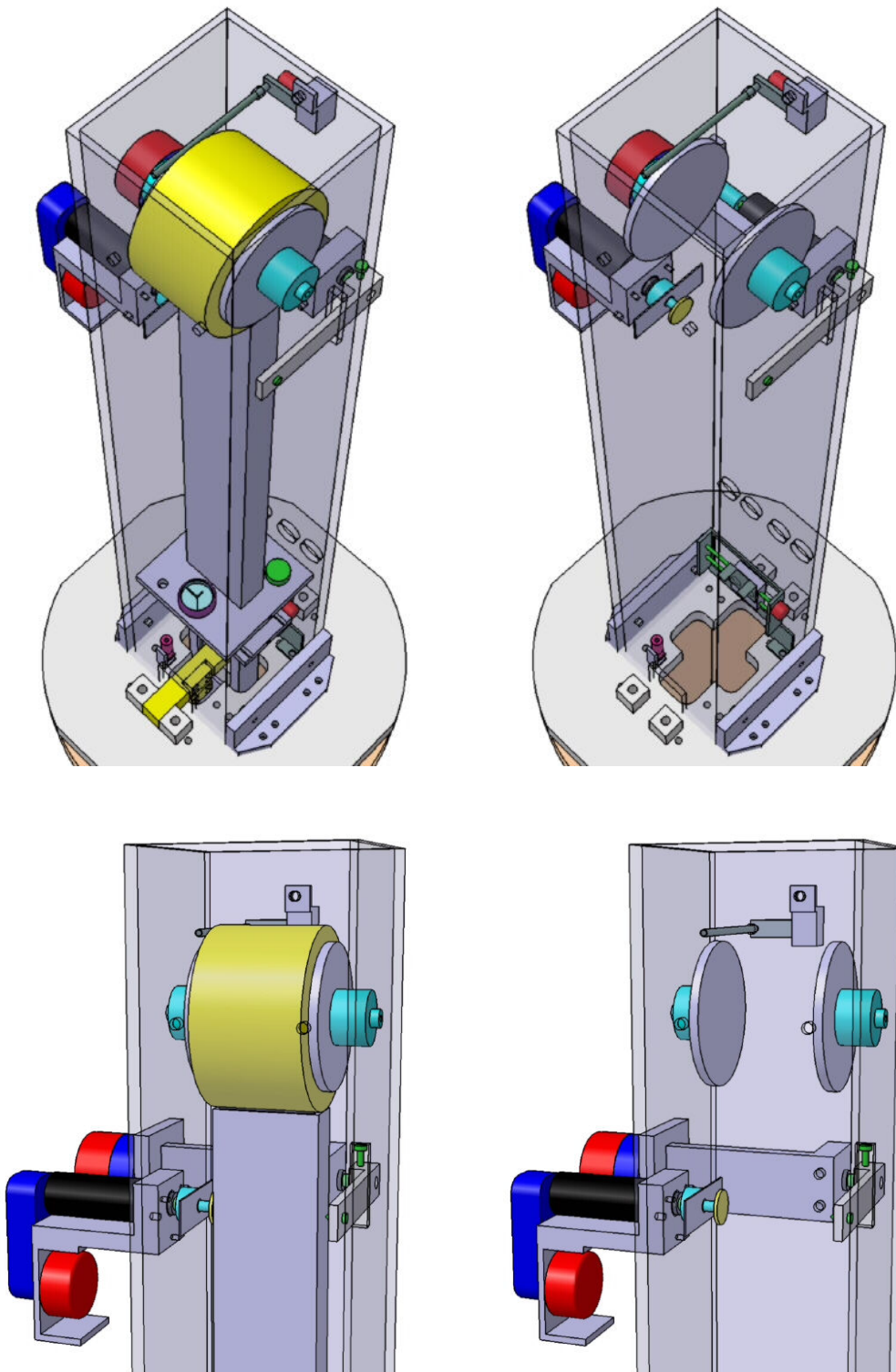


Figure 3-5: Vues complémentaires avec et sans le bras pendulaire, implémentation des électrodes du capteur de position, de l'actionneur électrostatique et du micromètre étalon utilisé pour l'étalonnage du capteur de position.

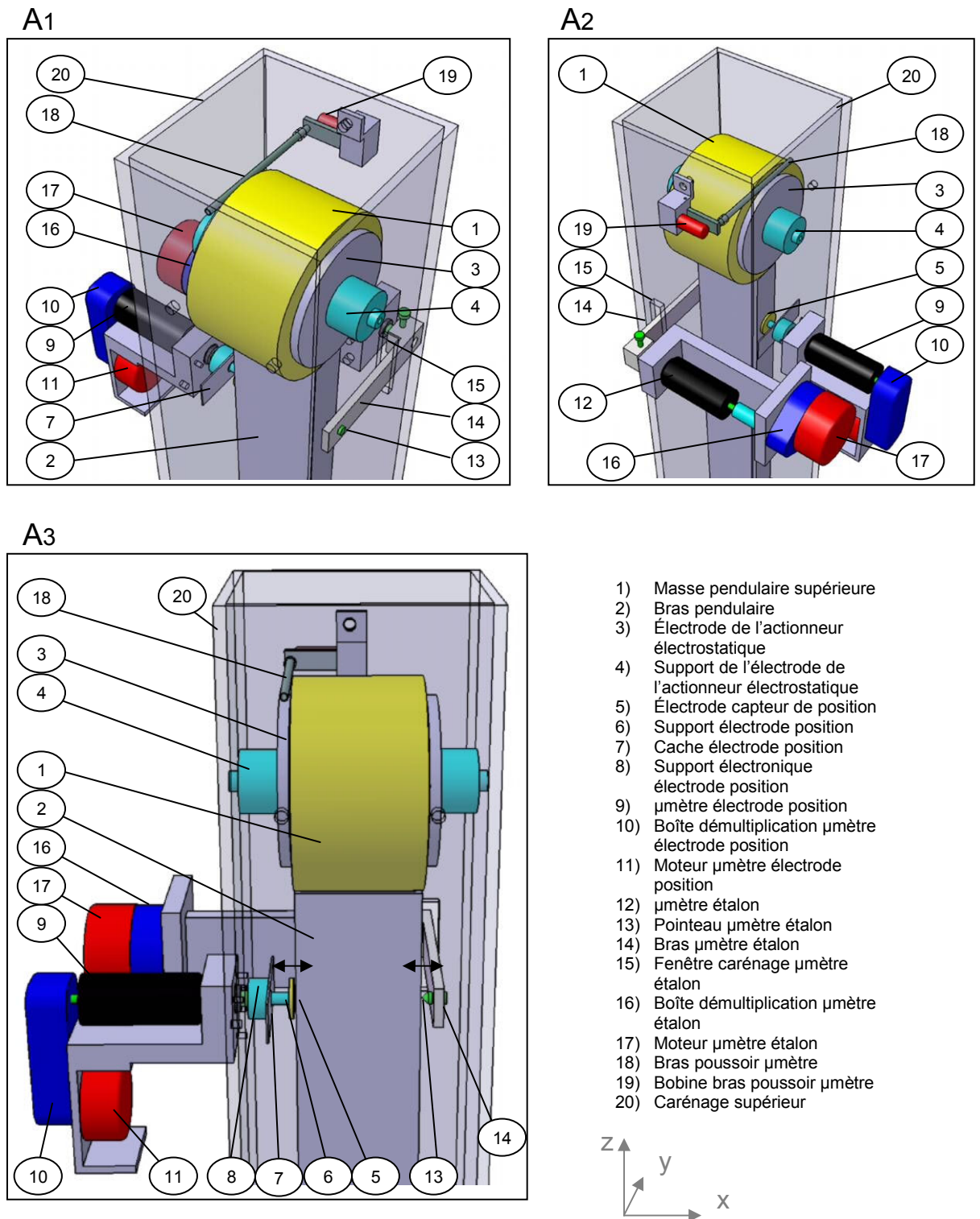
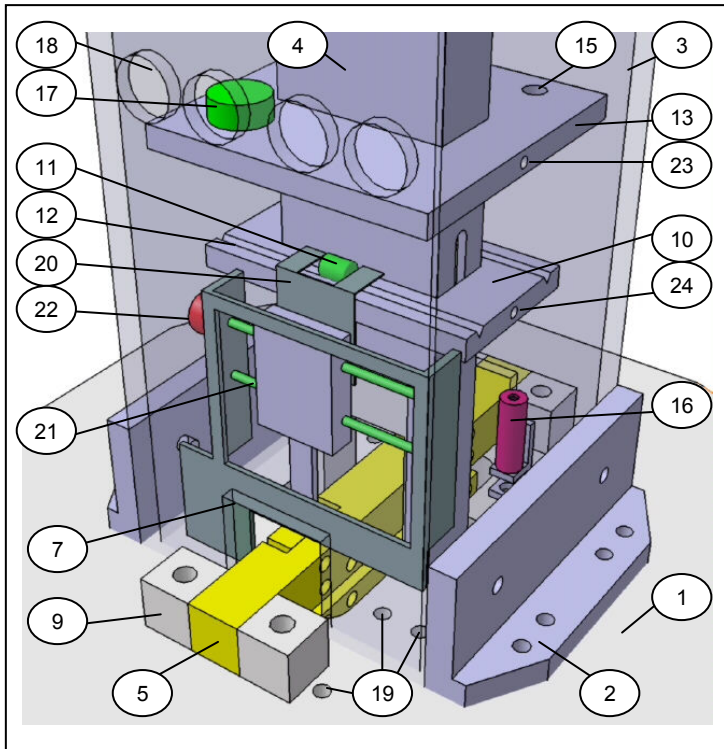


Figure 3-6: Tête de la balance gravitationnelle

B1



- 1) Base du pendule
- 2) Equerre du carénage supérieur
- 3) Carénage supérieur
- 4) Bras pendulaire
- 5) Support des lames flexibles
- 6) Flasques de serrage des lames flexibles
- 7) Fenêtre support lames flexibles
- 8) Liaison support lames flexibles
- 9) Calles support lames flexibles
- 10) Plateau masselotte
- 11) Masselotte
- 12) Rail guidage masselotte
- 13) Plateau support montre
- 14) Montre à aiguilles
- 15) Opercule photo résistance
- 16) Laser de commande de la montre
- 17) Masse d'équilibrage
- 18) Trappe d'accès plateau
- 19) Trous filetés d'ancrage
- 20) Râteau translation masselotte
- 21) Rail translateur râteau
- 22) Moteur translateur râteau
- 23) Attache plateau montre
- 24) Attache plateau masselotte

B2

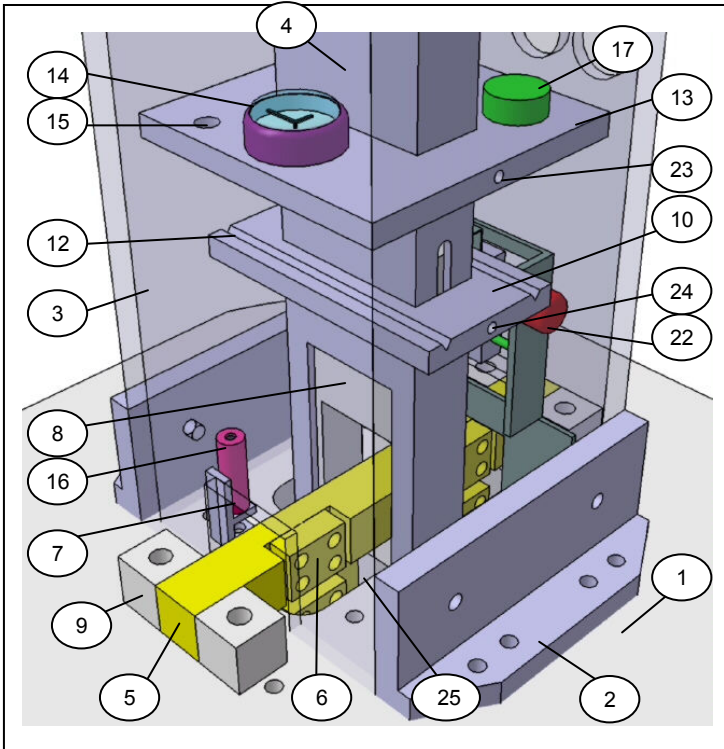


Figure 3-7: Base de la balance gravitationnelle

3.1 Installation au Walferdange Underground Laboratory for Geodynamic

Nous avons installé notre appareil au Luxembourg dans un laboratoire géophysique souterrain occupant une ancienne mine de gypse.

Il est situé en bout de galerie à plus de 700 m de l'entrée du laboratoire. Son axe de rotation coïncide avec l'axe de la galerie dont l'azimut est fixé à 37,6° Nord Est (Figure 3-8).

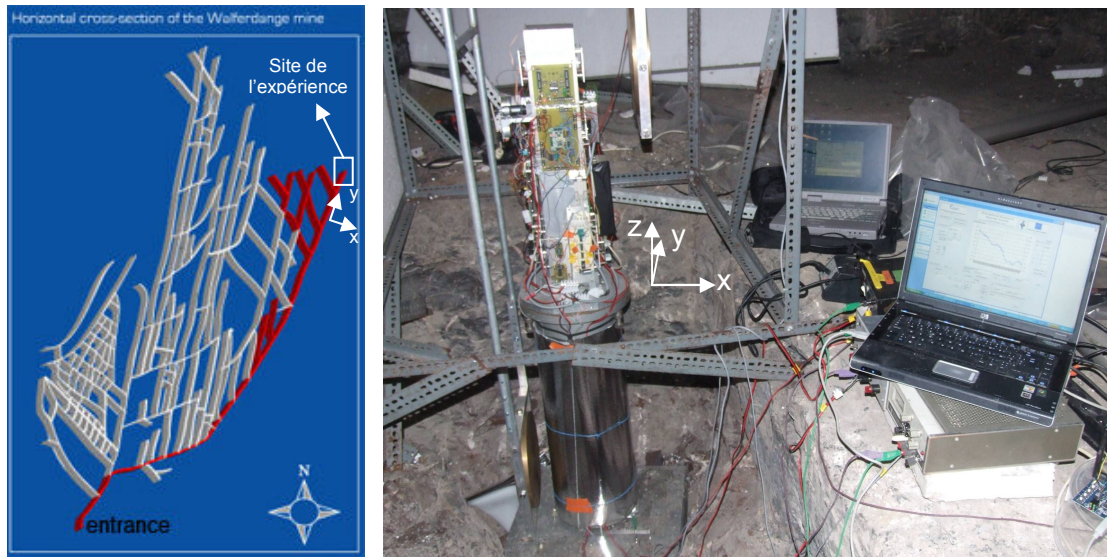


Figure 3-8 : Balance gravitationnelle au sein du laboratoire souterrain de Walferdange au cours d'une visite d'entretien. La figure de gauche illustre l'orientation spatiale de la galerie accueillant l'expérience, l'axe de rotation de la balance est parallèle à l'axe de la galerie.

L'installation de l'appareil en milieu souterrain a l'avantage d'atténuer considérablement les facteurs d'influence d'origine climatique tel que le cycle diurne de la température.

Ainsi la stabilité de la température y est de l'ordre $3 \cdot 10^{-3}^{\circ}\text{C}$ par jour avec une valeur moyenne de 13°C et ne semble pas varier de plus de $0,02^{\circ}\text{C}$ par an [52].

Cette caractéristique permet de limiter l'influence de la dilatation thermique des matériaux constituant la balance ainsi que les convections d'air autour du bras pendulaire.

L'amplitude des inclinaisons du sol liée aux effets climatiques y est également fortement limitée, de sorte que les plus grandes inclinaisons périodiques enregistrées sont liées à l'onde de marée M_2 correspondant à la déformation de la croûte terrestre sous l'action du forçage lunaire. L'amplitude théorique de celle-ci ne dépasse pas quelques dizaines de nanoradians [52].

Ainsi l'incidence des facteurs climatiques extérieurs reste très limitée. Seuls les effets liés aux ondes de pression atmosphériques restent susceptibles d'influencer significativement l'instrument.

L'installation des divers éléments de l'appareil et la mise en service de ses différentes fonctionnalités se sont déroulés en plusieurs étapes dont la chronologie peut être résumée de la manière suivante :

-Juillet 2006 : Première installation de la partie mécanique de la balance équipée d'un capteur de position, de la montre à aiguilles et d'un système d'acquisition de données [49].

-Septembre 2006 : Première installation de la balance complète munie du microcontrôleur ADUC 832 et de l'ensemble de ses périphériques et installation du carrousel muni de ses masses attractives.

-Décembre 2006 : Activation de la rétroaction de position.

La Figure 3-9 illustre différentes vues de la balance et du système de mouvement des masses attractives en ordre de marche au laboratoire souterrain de Walferdange.

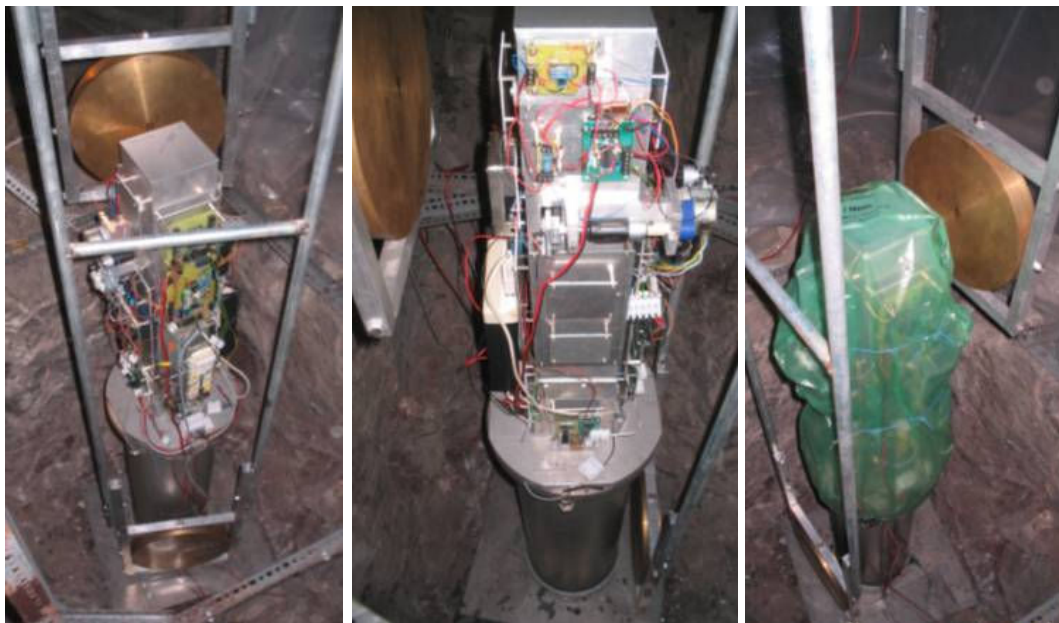


Figure 3-9 : Différentes vues du dispositif expérimental installé au laboratoire de Walferdange. La vue de droite illustre la balance protégée des convections induites par le mouvement de masses attractives par un film plastique (janvier 2007).

Nous observons sur l'image de droite de la Figure 3-9, le film plastique protégeant la balance des éventuelles convections d'air, pouvant notamment être engendrées lors de la rotation du carrousel supportant les masses attractives.

La Figure 3-10 offre une vue plus rapprochée de la partie supérieure de la balance. L'absence du couvercle du carénage supérieur permet de distinguer la masse pendulaire supérieure en interaction avec la masse attractive ainsi que les électrodes de l'actionneur électrostatique.

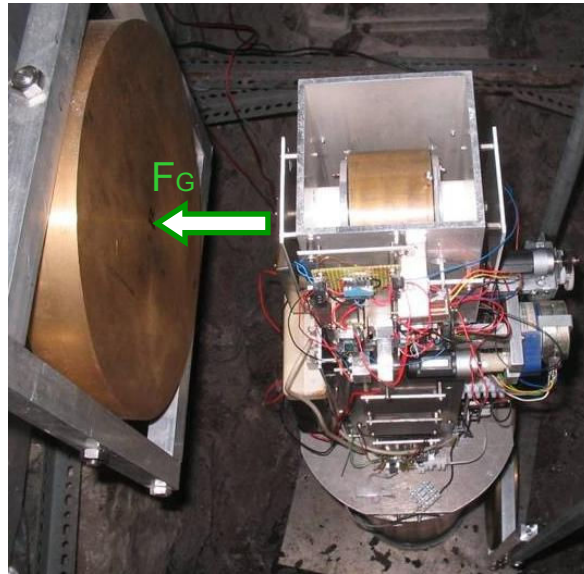


Figure 3-10: Vue plongeante sur la balance. L'absence du couvercle du carénage supérieur laisse entrevoir la masse pendulaire en interaction avec la masse attractive en vis-à-vis.

Les masses pendulaires et attractives sont réalisées en laiton (alliage de cuivre et de zinc). Ces dernières sont montées sur un carrousel (Figure 3-2) permettant de modifier leur position autour des masses pendulaires.

L'entraînement du carrousel est réalisé par l'intermédiaire d'un moteur synchrone agissant sur une boîte de démultiplication appliquée à un système de chaîne et de pignons (Figure 3-11).

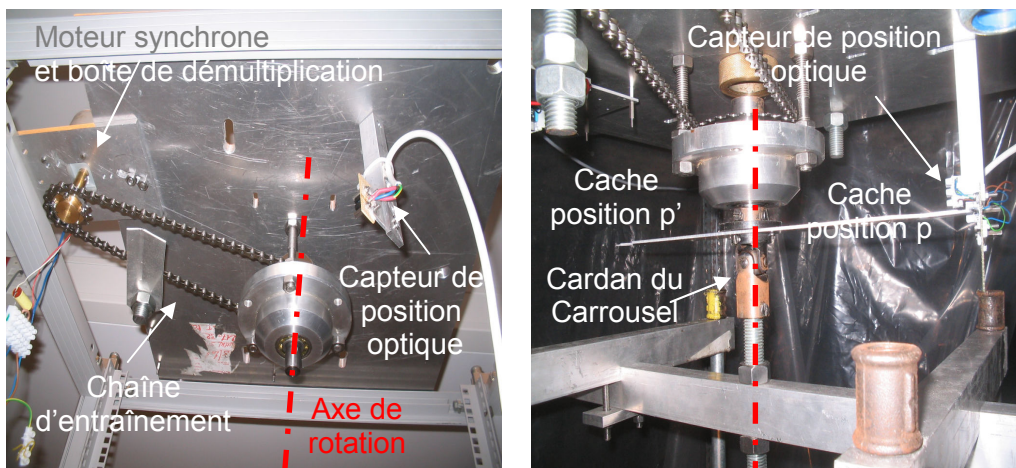


Figure 3-11 : Système d'entraînement du carrousel de l'actionneur gravitationnel.

La vitesse de rotation en sortie de boîte de démultiplication est d'un demi-tour par minute.

Cette dernière est reliée à l'axe du carrousel par un système de deux pignons de diamètres légèrement différents reliés par une chaîne de transmission.

La période de transition des masses entre les deux positions antagonistes est ainsi légèrement supérieure à 60 secondes.

Les deux positions antagonistes p et p' sont définies par le passage devant une cellule photoélectrique de deux caches situés symétriquement de part et d'autre de l'axe de rotation.

La commande du moteur est découplée électriquement de la balance par l'intermédiaire d'un optocoupleur afin d'éviter certains effets parasites.

Cette configuration de type carrousel monté sur un joint de cardan présente l'avantage d'éviter d'induire des inclinaisons indésirables du support du pendule liées au mouvement des masses.

Cette précaution est cruciale dans le cadre d'une approche pendulaire.

Elle permet en outre de bien contraindre les valeurs des distances relatives entre les deux masses attractives qui devront être connues avec précision.

Le carrousel est ancré au plafond de la galerie par l'intermédiaire d'un unique tube en inox et de résine époxyde tandis que la balance repose sur un plateau en aluminium boulonné à trois inserts en inox ancrés au sol (également par l'intermédiaire de résine époxyde) (Figure 3-12).

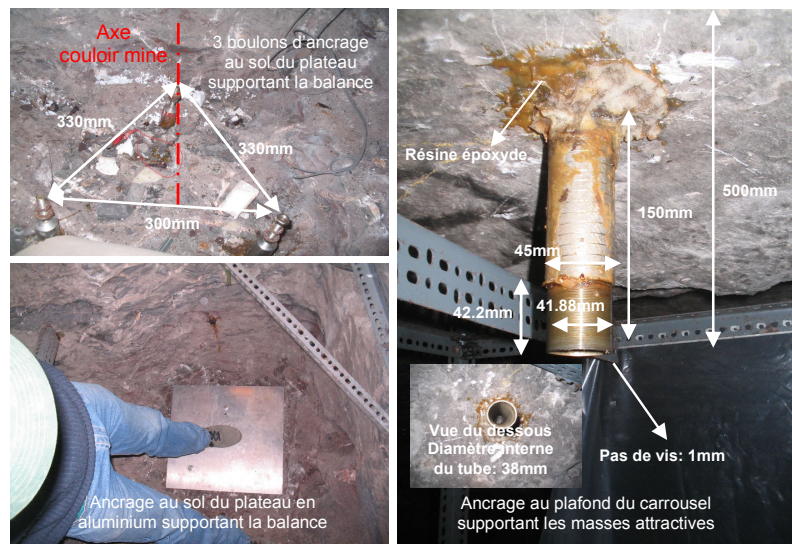


Figure 3-12 : Détail des fixations du pendule au sol et du système de rotation des masses attractives au plafond (14/07/06). (La flèche rouge correspond à l'axe de la galerie)

L'ancrage séparé de la balance et du carrousel dans la galerie permet de limiter au maximum les éventuels couplages mécaniques entre les masses attractives et la partie pendulaire.

Elle permet en outre, conformément à l'expérience acquise par le laboratoire dans l'installation des pendules horizontaux en milieu souterrain [30], de profiter au maximum de la stabilité thermique et mécanique de la galerie.

3.2 Contrôle à distance

La gestion de la balance est assurée par un microcontrôleur ADUC 832. Celui-ci est monté sur la carte mère de la balance assurant les connections vers les différents périphériques de notre appareil que sont les capteurs, les actionneurs et l'ordinateur de commande (Figure 3-13).

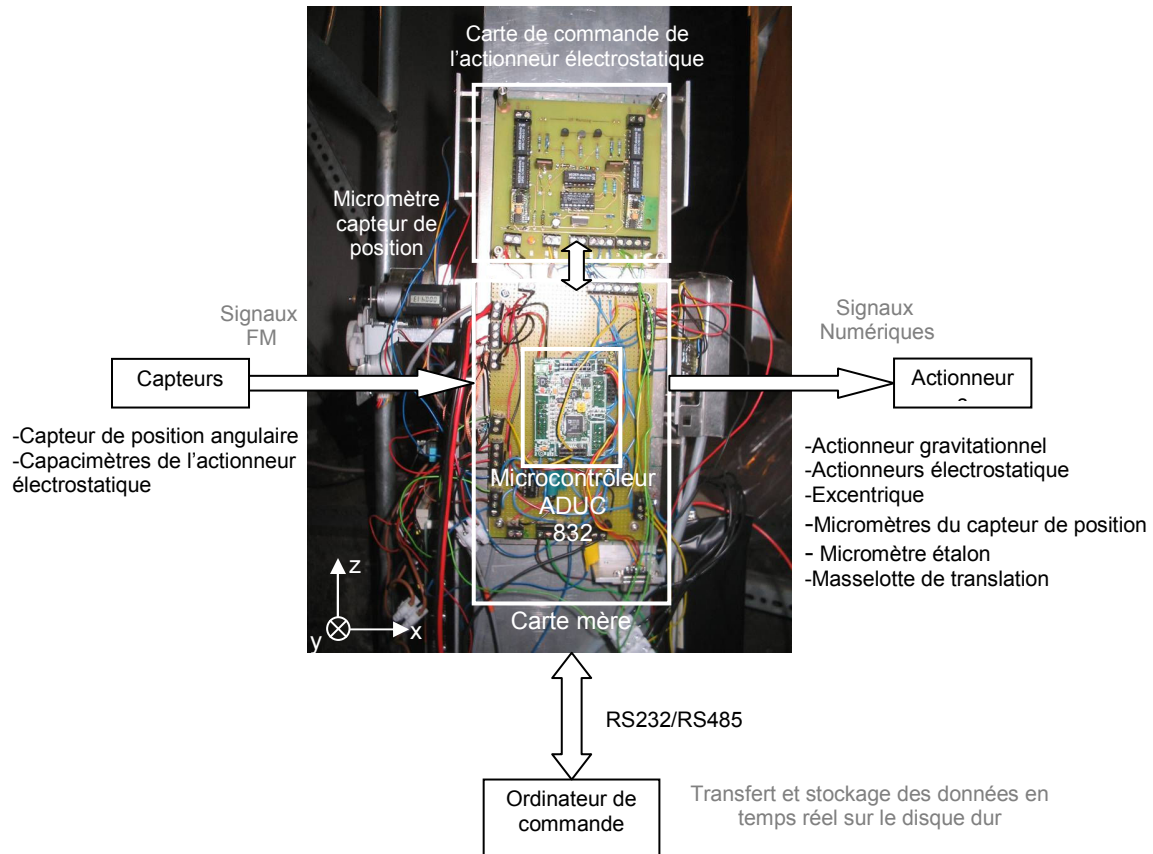


Figure 3-13 : Disposition sur le carénage supérieur de la carte mère de la balance gravitationnelle et de la carte de commande de l'actionneur électrostatique

Le microcontrôleur est amovible et prévu à l'origine pour être remplacé par un ADUC 847 qui a l'avantage d'être muni de convertisseurs ADC 24 bits susceptibles d'être utilisés pour mesurer la sortie modulée en amplitude du capteur de position angulaire.

Le microcontrôleur ADUC 832 peut être programmé à distance en langage C par le biais d'un compilateur spécifique. Il est en outre équipé de nombreux modules permettant notamment de gérer la communication par port série avec l'ordinateur de commande, d'effectuer des mesures de fréquence ou encore de générer des signaux modulés en largeur d'impulsion.

De même l'ensemble des capteurs et actionneurs ont été spécifiquement conçus et réalisés pour la balance présentée dans ce travail.

Notons que du point de vue de la gestion de la base de temps, une même fréquence synchronise l'échantillonnage du capteur de position, de la rétroaction de position et des différents actionneurs.

Le dialogue avec le microcontrôleur de la balance s'opère au travers d'un ordinateur de commande situé 150 mètres en aval dans la galerie afin de ne pas perturber le fonctionnement de la balance (Figure 3-14).

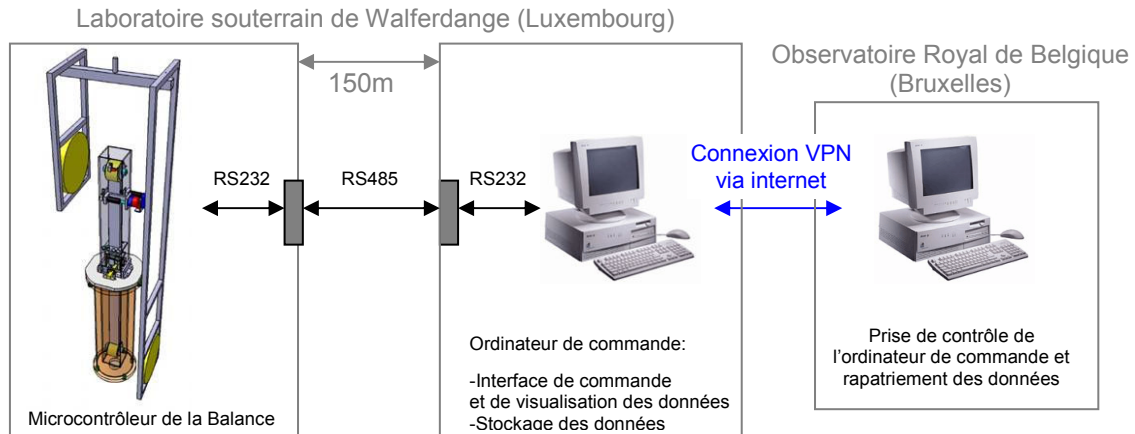


Figure 3-14 : Schéma relatif au contrôle à distance de la balance gravitationnelle

Le transfert des données est bidirectionnel et s'opère au travers d'une ligne RS485. Le chargement du programme dans le microcontrôleur s'opère par la même ligne RS485.

La prise de contrôle de l'ordinateur de commande situé dans le laboratoire souterrain est elle même assurée par une connexion VPN par le biais du réseau internet.

3.2.1 Flux d'information descendant

Le flux d'information transitant de l'ordinateur de commande vers le microcontrôleur du pendule est de type asynchrone.

Le microcontrôleur du pendule accomplit sa tâche de manière continue jusqu'à ce qu'un ordre émane de l'ordinateur de commande. Celui-ci provoque une interruption de la tâche du microcontrôleur qui va alors tenir compte des paramètres reçus avant d'accomplir une nouvelle routine.

Chaque paramètre ou ensemble de paramètres envoyé par l'ordinateur de commande est précédé d'un caractère alphabétique propre le définissant

À titre d'exemple, dans la ligne de code ci-dessous, le « S » signifie au microprocesseur qu'il va recevoir respectivement les valeurs des gains K, a, b du régulateur de la boucle d'asservissement en position ainsi que sa valeur de consigne de position.

```
S 16 7 23 10000
```

3.2.2 Flux d'information ascendant

Le flux d'information allant du microcontrôleur de la balance vers l'ordinateur de commande est lui de type synchrone.

Le rythme de transfert de données peut être réglé de 1 à 16 Hz selon les besoins. Il est cadencé par un quartz externe.

Le microcontrôleur envoie un ensemble de paramètres correspondant aux souhaits de l'opérateur.

À titre d'exemple, dans la ligne de code ci-dessous, le h signifie à l'ordinateur de commande qu'il va recevoir respectivement le signal de position du bras pendulaire, la valeur du signal de commande PID suivi du détail de la contribution de chaque module P, I, D émanant du régulateur de réaction de position ainsi que la valeur du signal de forçage électrostatique appliqué.

```
h 160003 -55644 -48 -55228 -368 6531
```

L'ordinateur de commande lui assigne alors une date (année, mois, jour, heure, minute, seconde) et l'enregistre sur son disque dur dans un fichier texte sous la forme suivante :

```
2007 09 18 21 25 45 160003 -55644 -48 -55228 -368 6531
```

3.2.3 Interface de commande et de visualisation

Les flux d'information ascendants et descendants sont gérés par l'ordinateur de commande au travers d'une interface de visualisation rédigée en Visual Basic[®] (Figure 3-15)

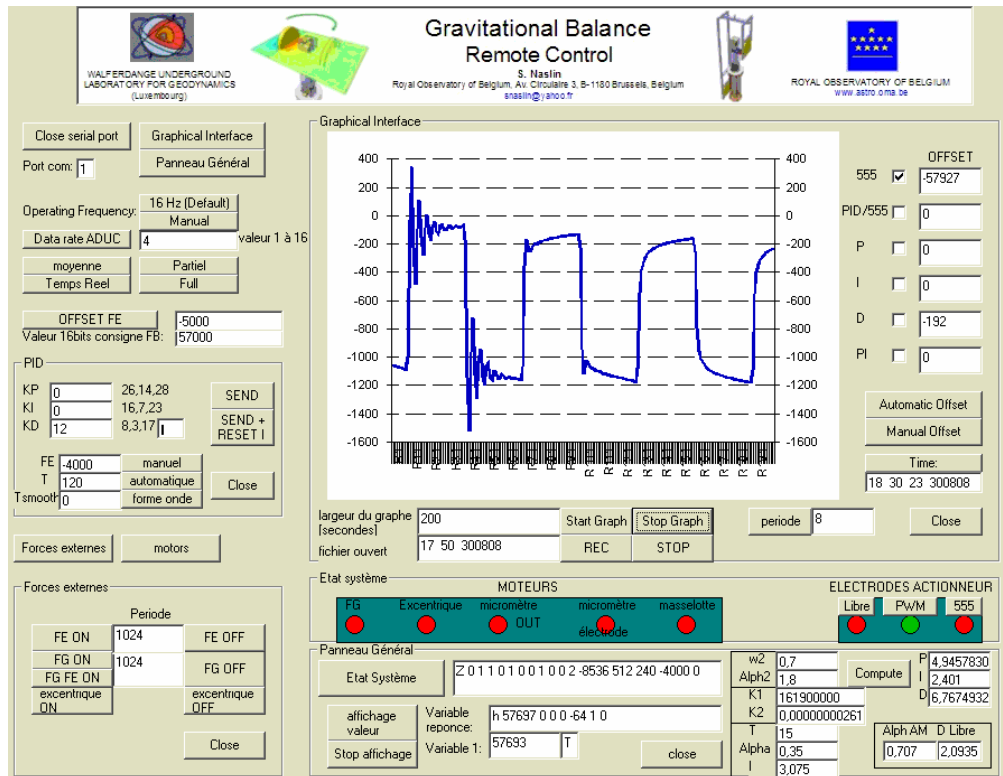


Figure 3-15 : Interface de visualisation et de commande de la balance gravitationnelle (Les signaux observés correspondent à la réponse à un échelon de couple électrostatique en déflection libre avec une valeur croissante de l'amortisseur électrostatique)

Nous avons développé cette interface spécifiquement pour les besoins de notre balance. Elle permet de visualiser et de commander en temps réel l'ensemble des périphériques gérés par le microcontrôleur de notre dispositif expérimental.

Les signaux observés sur l'interface de visualisation de la Figure 3-15 correspondent à la position angulaire du bras du pendule résultant de l'application d'échelon de couples électrostatiques de $1 \cdot 10^{-5}$ N·m pour des valeurs croissantes du gain de l'amortisseur électrostatique utilisé.

4 Pendule astatisé

Nous allons présenter les différents paramètres statiques et dynamiques du pendule astatisé utilisé dans notre dispositif expérimental ainsi que les différents accessoires greffés à celui-ci.

Nous présenterons en particulier le capteur capacitif de position angulaire du bras du pendule ainsi que sa procédure d'étalonnage.

Nous clôturerons le chapitre par une analyse théorique des effets dissipatifs relatifs au pivot à lames flexibles constituant l'axe de rotation du bras pendulaire et leurs conséquences sur les différents paramètres de dimensionnement de notre balance.

4.1 Paramètres géométriques du bras pendulaire

La Figure 4-1 illustre les principales caractéristiques du bras pendulaire utilisé sur notre dispositif expérimental.

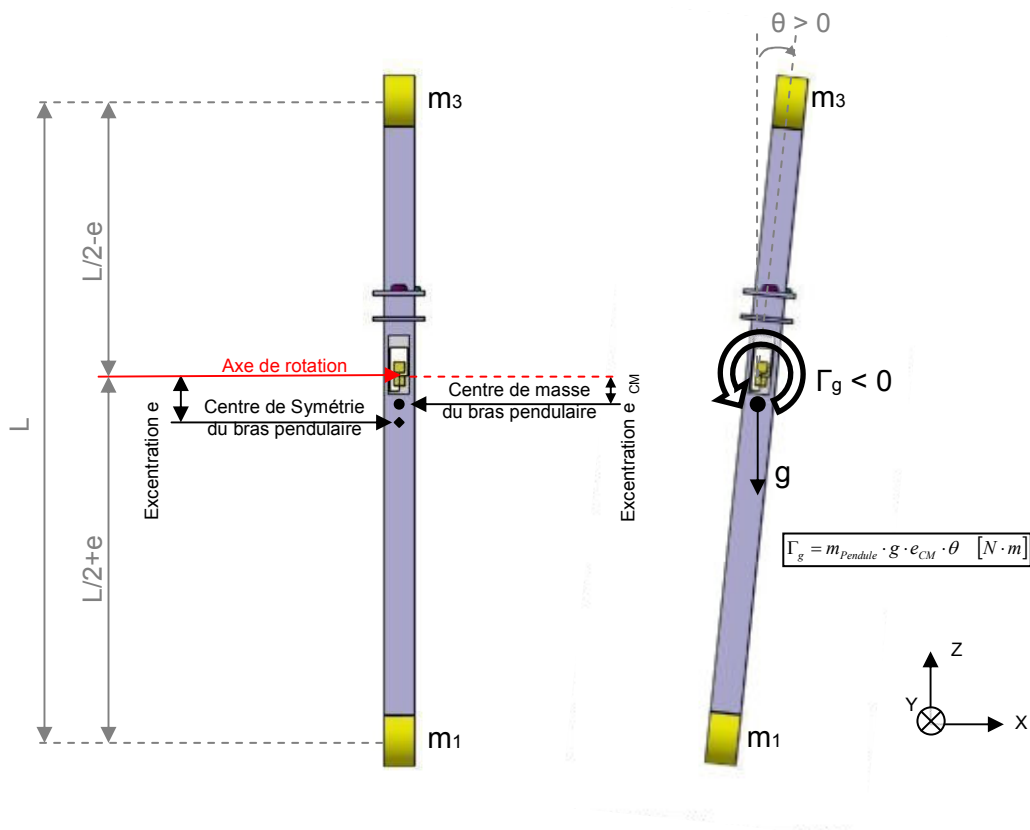


Figure 4-1 : Couple de rappel pendulaire du pendule astatisé et principaux paramètres géométriques (par soucis de lisibilité, les amplitudes des excentrations e et e_{CM} représentées sur le schéma ont été accentuées par rapport aux valeurs réelles)

Les valeurs et la description des principaux paramètres du bras pendulaire utilisés dans ce chapitre sont résumées au (Tableau 4-1).

Variable	Description	Valeur
T [s]	Période d'oscillation propre du pendule	15
ω_L [rad/s]	Pulsation propre du pendule en déflexion Libre	0,42
$m_{Pendule}$ [kg]	Valeur totale des masses suspendues	10,7
e_{CM} [m]	Excentration du centre de masse du bras pendulaire par rapport à l'axe de rotation	$\sim 0,005$
e [m]	Excentration de l'axe de rotation du pendule par rapport au centre de symétrie du bras pendulaire	$\sim 0,01$
I [kg.m ²]	Moment d'inertie total du bras pendulaire	3,29
L [m]	Distance entre les centres de masses des deux masses cylindriques m_1 et m_3 du bras pendulaire	1,24
g [m/s ²]	Champ d'accélération de pesanteur local	$\sim 9,81$

Tableau 4-1: Principaux paramètres du bras pendulaire

Les détails des contributions de chaque élément du bras du pendule intervenant dans le calcul de la masse totale et du moment d'inertie total sont donnés à l'annexe 10.1.

À noter que la position du centre de masse du pendule ne correspond pas avec la position de son centre de symétrie ($e_{CM} \neq e$) du fait notamment de la présence des plateaux techniques et des masselottes d'équilibrages situées au dessus de l'axe de rotation du pendule.

CONVENTIONS ET HYPOTHESES DE TRAVAIL :

- La déviation angulaire θ du bras pendulaire par rapport à la verticale locale et les couples appliqués sont définis comme positifs dans le sens horaire.
- Pour de petites valeurs de déviation angulaire θ exprimées en radian, nous posons que : $\sin(\theta) \approx \theta$.

4.2 Équilibre statique des couples autour de l'axe de rotation

Appliquons un couple externe arbitraire au bras du pendule.

À l'équilibre, le couple externe appliqué est contrebalancé par le couple de rappel de la balance de telle sorte que la somme des couples appliqués soit nulle (4-1).

$$\Gamma_{ext} + \Gamma_{Balance} = 0 \quad [N \cdot m] \quad (4-1)$$

Le couple de rappel de la balance $\Gamma_{Balance}$, fonction de la déviation angulaire θ du bras du pendule, est donné par :

$$\Gamma_{Balance} = -\kappa_{Balance} \cdot \theta \quad [N \cdot m] \quad (4-2)$$

où $\kappa_{Balance}$, représente la constante de rappel de notre balance.

Celle-ci résulte de la combinaison d'une constante de rappel purement pendulaire κ_g , qui est fonction de la valeur du champ de pesanteur local g , et d'une constante de rappel d'origine mécanique κ_{mec} tributaire des propriétés mécaniques du pivot à lames flexibles matérialisant l'axe de rotation du pendule.

La constante de rappel totale de la balance est alors donnée par :

$$\kappa_{Balance} = \kappa_g + \kappa_{mec} \quad [N \cdot m / rad] \quad (4-3)$$

Celle-ci peut être déduite directement du calcul du moment d'inertie du bras pendulaire par rapport à son axe de rotation et de la mesure de sa période d'oscillation propre T en appliquant la relation (4-4).

$$\kappa_{Balance} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{I}{T^2} \quad [N \cdot m / rad] \quad (4-4)$$

La constante de rappel pendulaire κ_g peut être déduite par une mesure de la valeur de la masse totale du pendule, de la valeur du champ d'accélération de pesanteur local g (le gradient vertical de g étant de l'ordre de 0,3 ppm par mètre, nous considérerons la valeur de g constante sur toute la longueur du bras) et de la position du centre de masse du pendule par rapport à l'axe de rotation (excentration e_{CM}) en appliquant la relation (4-5).

$$\kappa_g = m_{Pendule} \cdot g \cdot e_{CM} \quad [N \cdot m / rad] \quad (4-5)$$

La valeur de la constante de rappel mécanique κ_{mec} du pivot peut alors être déduite des trois équations précédentes par la relation (4-6).

$$\kappa_{mec} = \kappa_{Balance} - \kappa_g \quad [N \cdot m / rad] \quad (4-6)$$

Les différentes valeurs des constantes de rappel déduites des trois équations précédentes et des paramètres du Tableau 4-1 sont reprises au Tableau 4-2. La dernière colonne donne la valeur de la période propre du pendule correspondant à chaque type de couple de rappel considéré.

Origine	Constante de rappel [N.m/rad]	Contribution [%]	Période propre [s]
κ_g	~0,525	~91	15,7
κ_{mec}	~0,052	~9	50,0
$\kappa_{Balance}$	~0,577	100	15,0

Tableau 4-2 : Bilan des couples de rappel intervenant dans notre balance

Nous observons que le couple de rappel mécanique du pivot à lames flexibles n'intervient que pour 9 % de la valeur du couple de rappel total (4-7), atténuant d'autant les effets anélastiques liés à cette dernière.

$$K = 100 \cdot \frac{K_{mec}}{K_{Balance}} = 10 \quad [\%] \quad (4-7)$$

Notons que la précision relative obtenue sur la position du centre de masse e_{CM} ne dépasse pas 10 %, de sorte que les valeurs des constantes de rappels pendulaires et mécaniques ainsi que la valeur du ratio K sont données à titre indicatif.

La Figure 4-2, déduite des valeurs du Tableau 4-2 et des équations (4-4), (4-5) et (4-6), illustre l'évolution de la période propre et de la constante de rappel de notre pendule en fonction de l'excentration e_{CM} de l'axe de rotation par rapport au centre de masse pendulaire. La courbe en pointillé donne, à titre indicatif, l'évolution de la période propre de la balance pour une valeur nulle du couple de rappel mécanique du pivot à lames flexibles. Celle-ci tend alors vers une valeur infinie pour une excentration e_{CM} de valeur nulle.

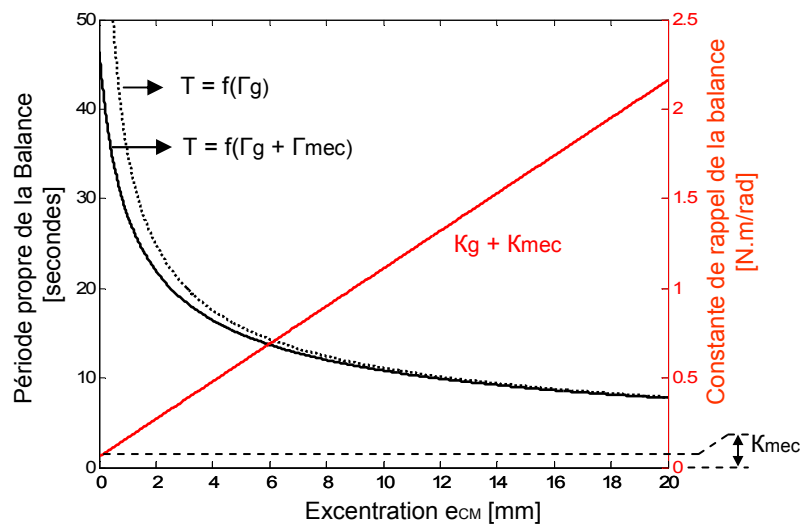


Figure 4-2 : Evolution théorique de la période propre et de la constante de rappel de notre dispositif expérimental en fonction de la valeur de l'excentration e_{CM} de l'axe de rotation par rapport au centre de masse du bras pendulaire.

Une faible valeur d'excentration e_{CM} permet d'augmenter la sensibilité de la balance tout en diminuant l'influence des composantes horizontales des accélérations microséismiques.

En contrepartie, la constante de rappel mécanique du pivot à lames flexibles devient prépondérante devant la constante de rappel pendulaire. Le couple de rappel de la balance devient plus sensible aux phénomènes de dissipation et de fluages liés au pivot, dégradant d'autant la stabilité du point de fonctionnement.

Nous avons opté pour une excentration de 5 mm du centre de masse pendulaire, permettant d'obtenir une centaine de points de résolution en acquisition 1 Hz sur la

déviation angulaire induite par l'échelon gravitationnel tout en laissant une part importante à la constante de rappel pendulaire.

La période d'oscillation propre de 15 secondes résultant de cette valeur d'excentration permet en outre d'éviter d'éventuels modes résonants avec le bruit microsismique dont les pics d'intensité sont situés entre 4 et 6 secondes de période et autour de 10 secondes de période ([7] & Annexe 10.18).

Nous étudierons plus en détail l'influence du pivot à lames flexibles au §4.8.

4.3 Équilibre Dynamique des couples autour de l'axe de rotation

Appliquons un couple externe variable Γ_{ext} au bras de notre pendule.

Le bilan des couples s'exerçant sur le bras pendulaire est donné par (4-8).

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{d\theta}{dt} + \kappa_{Balance} \cdot \theta = \Gamma_{ext} \quad [N \cdot m] \quad (4-8)$$

Avec I , le moment d'inertie du bras pendulaire autour de son axe de rotation, λ le coefficient d'amortissement, $\kappa_{Balance}$ la constante de rappel de la balance et Γ_{ext} le couple externe appliqué.

Nous utiliserons généralement dans ce travail l'équation (4-8) sous la forme (4-9).

$$(I \cdot p^2 + 2 \cdot I \cdot \xi \cdot \omega_L \cdot p + I \cdot \omega_L^2) \cdot \theta = \Gamma_{ext} \quad [N \cdot m] \quad (4-9)$$

En définissant :

$$\text{-L'opérateur de différentiation } p = \frac{d}{dt} = j \cdot \omega \quad [57]$$

-La pulsation propre non amortie ω_L du système en déflexion libre.

$$\omega_L = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa_{Balance}}{I}} \quad [rad/s] \quad (4-10)$$

-Le rapport d'amortissement ξ (dont l'inverse est aussi appelé le facteur de qualité Q du système) est défini par :

$$\xi = \frac{1}{Q} = \frac{\lambda}{2 \cdot I \cdot \omega_L} \quad [N \cdot m \cdot s / rad] \quad (4-11)$$

La fonction de transfert de la balance devient :

$$\frac{\theta}{\Gamma_{ext}} = \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{(p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_L \cdot p + \omega_L^2)} \quad \left[\frac{rad}{N \cdot m} \right] \quad (4-12)$$

Le gain statique (p=0) est alors donné par:

$$\left(\frac{\theta}{\Gamma_{ext}} \right)_{Statique} = \frac{1}{I \cdot \omega_L^2} \quad \left[\frac{rad}{N \cdot m} \right] \quad (4-13)$$

En normalisant l'équation (4-12) en fonction du gain statique (4-13) nous avons la fonction de transfert normalisée :

$$\left(\frac{\theta}{\Gamma_{ext}} \right)_{Normalisé} = \frac{\omega_L^2}{(p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_L \cdot p + \omega_L^2)} \quad (4-14)$$

Cette dernière expression revient à exprimer la valeur de la déviation angulaire résiduelle du bras pendulaire par rapport à la déviation angulaire statique.

Le gain normalisé est alors unitaire dans le cas statique.

La Balance se comporte comme un filtre passe bas vis-à-vis des couples externes, de fréquence de coupure ω_L et de pente d'atténuation de -40 dB/décade.

4.3.1 Facteur d'atténuation de la composante X de l'accélération du sol

Plaçons-nous dans un référentiel lié au sol.

Celui-ci subit des mouvements de translation dans les trois composantes spatiales liés notamment à l'activité microsismique.

Nous supposons que la composante Y de l'accélération du sol est reprise par l'axe de rotation tandis que la composante verticale Z des accélérations reste négligeable vis-à-vis du champ d'accélération de pesanteur local.

Seuls sont considérés ici les effets de la composante X de l'accélération du sol correspondant au plan d'oscillation du bras pendulaire.

La composante X de l'accélération subie par le centre de masse pendulaire induit un couple de forçage inertiel Γ_i sur le bras pendulaire fonction du paramètre d'excentration e_{CM} (4-15)

$$\Gamma_i = m_{Pendulaire} \cdot e_{CM} \cdot \ddot{X}_{sol} \quad [N \cdot m] \quad (4-15)$$

Observons que ce couple inertiel parasite peut être rendu théoriquement nul dans le cas où la position du centre de masse du pendule coïncide avec la position de l'axe de rotation. (Valeur d'excentration e_{CM} nulle).

Le niveau de bruit sismique présent au laboratoire est difficilement évaluable sans passer par une mesure sur le site. Nous pouvons néanmoins l'approcher en utilisant l'"USGS low-noise model" [54] qui donne l'amplitude RMS des accélérations

verticales du sol en fonction de la fréquence par pas d'un sixième de décade (Annexe 10.18).

Supposons par exemple que l'amplitude RMS des accélérations horizontales du sol soit du même ordre de grandeurs que les accélérations verticales et vaille 10^{-7} m/s^2 , quelle que soit la bande de fréquence considérée.

En appliquant l'équation (4-15) à la géométrie de notre pendule, l'amplitude du couple RMS inertiel induit sur le bras pendulaire serait alors de l'ordre de $5 \cdot 10^{-9} \text{ Nm}$ autour de la bande de fréquence considérée. Soit 2 % de l'amplitude de l'échelon de couple gravitationnel appliqué.

En considérant que le couple RMS inertiel de $5 \cdot 10^{-9} \text{ Nm}$ soit appliqué sur la bande de fréquence du bruit industriel, nous pouvons à partir de l'équation (4-12) approcher l'amplitude du bruit RMS résultant sur la déviation angulaire du pendule soit ici :

$3 \cdot 10^{-11} \text{ rad}$ pour des périodes de forçage situées autour de 1 Hz.

Cette source de bruit peut aisément être filtrée en assimilant, en première approximation, la modulation d'amplitude enregistrée par le capteur de position, consécutive aux accélérations inertielles, à un bruit blanc.

Cependant, il a été montré, dans le cas des pendules de torsion, que le couplage des accélérations microsismiques avec le fil de torsion est susceptible d'induire des effets systématiques non négligeables [10].

L'excitation du mode d'oscillation pendulaire vertical de la balance de torsion engendre des couples de rappels parasites [19] tandis que la composante verticale des accélérations inertielles induit une extension du fil de torsion qui engendre des rotations parasites du fléau de la balance [20].

Ces accélérations inertielles n'étant reprises que partiellement par notre boucle d'asservissement de position, des biais analogues ne sont donc pas à exclure dans le cas de notre pivot à lames flexibles. Nous présenterons à ce propos au §8.5.2 un mode opératoire permettant de vérifier que de tels effets ne viennent pas biaiser nos mesures lors du fonctionnement en mode asservi.

4.4 Capteur de position angulaire capacitif

La mesure de la position angulaire du pendule est assurée par un capteur de type capacitif à variation de distance. Celui-ci mesure la position du bras du pendule par rapport au châssis à une distance L_{Capteur} de 0,511 m de la position de l'axe de rotation du pendule (Figure 4-3).

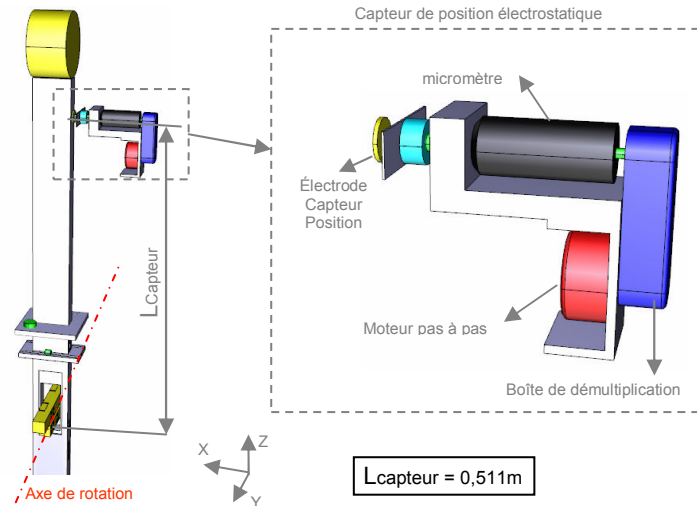


Figure 4-3 : Disposition du capteur de position électrostatique par rapport au bras pendulaire

Le capteur capacitif est constitué d'une électrode en laiton en forme de disque de 2 cm de diamètre et de 2 mm d'épaisseur (Figure 4-4), montée en vis-à-vis du bras pendulaire en aluminium. Celui-ci constitue la deuxième électrode du capteur. Le bras pendulaire est connecté au potentiel de terre local.

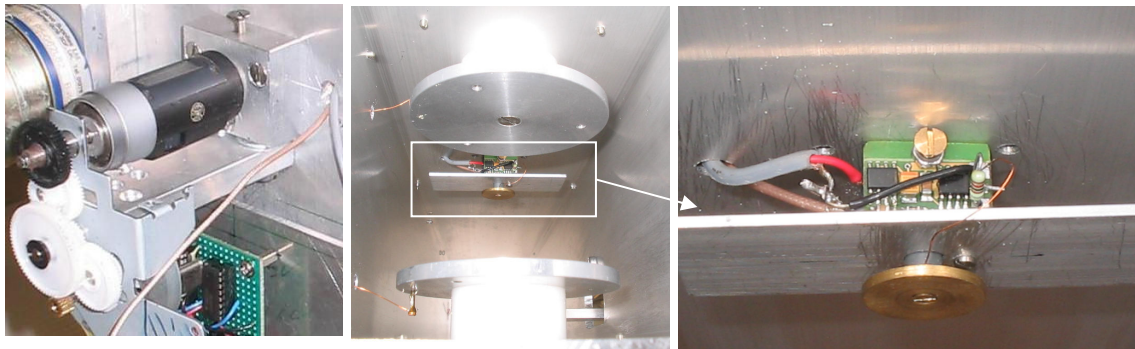


Figure 4-4 : Electrode en forme de disque du capteur de position ainsi que son conditionneur électronique monté au sein du carénage supérieur du pendule (bras pendulaire absent sur la photo). À gauche, vue du micromètre motorisé situé à l'extérieur du carénage supérieur, supportant le capteur de position électrostatique.

Notons par le paramètre h_0 , la valeur de l'entrefer du capteur de position capacitif lorsque le bras du pendule est parfaitement centré par rapport au châssis. Les surfaces entre les électrodes sont alors supposées parfaitement parallèles et la position angulaire θ du pendule nulle.

La valeur de h_0 est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre dans le cas de notre expérience. Celle-ci peut être choisie et ajustée avec précision à l'aide d'un micromètre motorisé supportant l'électrode en forme de disque du capteur de position.

La valeur moyenne h de l'entrefer résultant d'une petite excursion angulaire θ du bras pendulaire autour de la position de référence h_0 peut alors être approchée par la relation (4-16) :

$$h = h_0 + (L_{\text{Capteur}} \cdot \theta) \quad [m] \quad (4-16)$$

Les principales dimensions des électrodes de notre capteur de position sont reprises à la Figure 4-5.

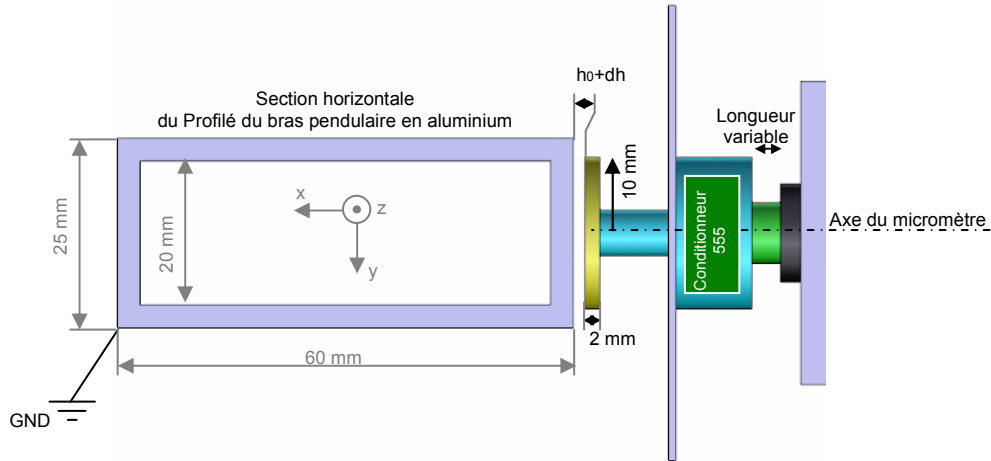


Figure 4-5: Géométrie des électrodes du capteur capacitif de position

La capacité de mesure C_m de notre capteur peut être vue en première approximation comme un condensateur à armatures parallèles dont les électrodes de surface S sont distantes d'une valeur h .

En négligeant les effets de bords, nous pouvons approcher la valeur de la capacité totale C du capteur en fonction de l'écartement h des électrodes par la relation (4-17) :

$$C = C_m + C_0 = \frac{\varepsilon \cdot S}{h} + C_0 \quad [Farad] \quad (4-17)$$

avec :

C_m : la capacité de mesure constituée par les deux électrodes en vis-à-vis.

ε : la permittivité de l'air

C_0 : la capacité tenant compte de l'ensemble des capacités parasites en parallèle dont notamment la capacité entre l'électrode disque et son support relié au potentiel de terre.

La capacité C totale du capteur est mesurée par le biais d'un oscillateur à relaxation. Celui-ci est réalisé à partir d'un circuit LMC555 à technologie CMOS [104]. Le montage utilisé permet de charger et décharger le condensateur C au travers d'une unique et même résistance R . (Annexe 10.9).

La fréquence de sortie f de l'oscillateur, fonction des paramètres R et C , est donnée par la relation (4-18) :

$$f = \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot R \cdot C} \approx \frac{0,7213}{R \cdot C} \quad [Hz] \quad (4-18)$$

Le signal fréquentiel de sortie est compté pendant 1/16 de seconde par le microcontrôleur de la balance [103]. Le résultat du comptage est stocké dans une variable de 16 bits et transféré vers l'ordinateur de commande de la balance.

En combinant les deux dernières équations, nous observons que la relation entre la fréquence de sortie de l'oscillateur et la valeur d'écartement des électrodes est parfaitement linéaire pour une valeur de capacité en parallèle C_0 nulle (4-19).

$$f \approx \frac{0,7213}{R \cdot \varepsilon \cdot S} \cdot h \quad [Hz] \quad (4-19)$$

Dans notre cas de figure, la valeur de la capacité C_0 peut être rendue faible vis-à-vis de la capacité de mesure C_m , en diminuant la valeur de l'entrefer h_0 à l'aide du micromètre supportant l'électrode de mesure.

Notons que le capteur induit un couple électrostatique net sur le bras pendulaire, du même ordre de grandeur que le signal gravitationnel. Ce couple reste néanmoins constant en rétroaction de position et n'interfère donc pas dans ce type de mesure.

Le signal de sortie en fréquence du capteur est prévu à l'origine pour être converti en signal Modulé en Amplitude (AM) afin d'être enregistré par un convertisseur ADC 24 bits. Cette configuration permettrait d'augmenter sensiblement la résolution et la fréquence d'échantillonnage du capteur.

Notons en guise de perspectives qu'il existe actuellement sur le marché des capteurs capacitifs offrant une résolution de 0,4 nm sur une plage de 20 μm pour une bande passante de 6,6 kHz avec une stabilité temporelle de 0,1 nm sur 3 heures [109].

Ceux-ci utilisent un blindage actif permettant d'atténuer fortement l'influence des capacités parasites en parallèle. La présence d'un anneau de garde actif autour de l'électrode de mesure permet en outre d'atténuer les non-linéarités liées aux effets de bord des électrodes.

Les capteurs capacitifs en pont généralement utilisés sur les sismomètres permettent d'atteindre des résolutions de l'ordre de $0,1 \text{ pm} / \sqrt{Hz}$ soit une résolution de l'ordre du picomètre sur une bande passante de 100 Hz [37].

Mentionnons encore le montage présenté à la référence [38] d'un interféromètre miniature à diode de type Michelson de taille réduite et de conception volontairement simple et peu onéreuse pouvant atteindre une résolution de $2 \cdot 10^{-14} \text{ m} / \sqrt{Hz}$ sur une plage de 2,1 μm . Celui-ci est constitué d'un miroir de poursuite monté sur un actionneur piézoélectrique afin de garantir la linéarité du signal de sortie de l'interféromètre sur toute la plage de mesure. Dans notre cas de figure, le miroir de poursuite serait installé sur le bras pendulaire asservi en position.

4.4.1 Etalonnage du capteur de position

Notre procédure d'étalonnage consiste à opérer une rotation du bras pendulaire par le biais de la translation du pointeau d'un micromètre étalon dont le point d'application sur le bras pendulaire est situé à une distance $L_{\mu m}$ de 0,511 m de l'axe de rotation du pendule (Figure 4-6).

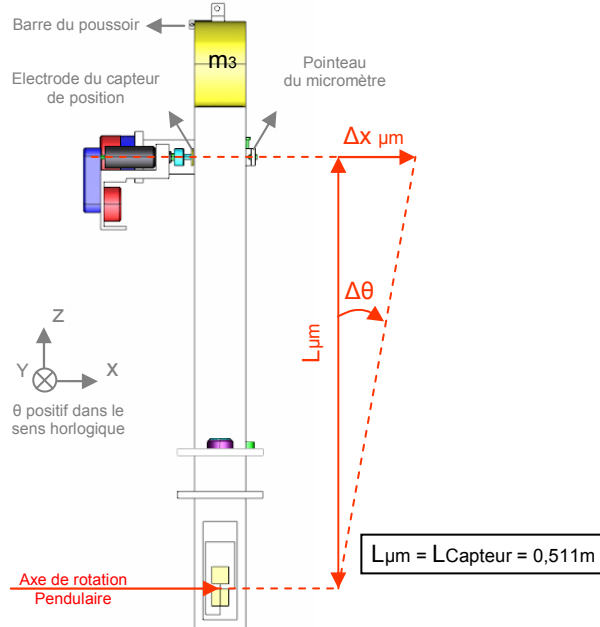


Figure 4-6 : Principe de détermination de la déviation angulaire du bras pendulaire par triangulation

Pour de petites valeurs de déplacement Δx du pointeau du micromètre étalon, la déviation angulaire $\Delta\theta$ induite autour de la position θ_0 du bras pendulaire est alors donnée par la relation (4-20).

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{L_{\mu m}} \quad [rad] \quad (4-20)$$

Dans le cas de notre système, l'axe du pointeau du micromètre coïncide avec le centre de symétrie de l'électrode en forme de disque du capteur de position ($L_{\mu m} = L_{\text{Capteur}}$).

Le micromètre étalon est entraîné à vitesse constante par le biais d'un moteur pas à pas. Sa position est déduite indirectement de sa vitesse d'avancement et d'une mesure de la durée de la translation (Annexe 10.8).

Pendant la procédure d'étalonnage, le bras pendulaire est maintenu mécaniquement en contact avec le pointeau par le biais d'un poussoir actionné par un électroaimant (Figure 4-7).

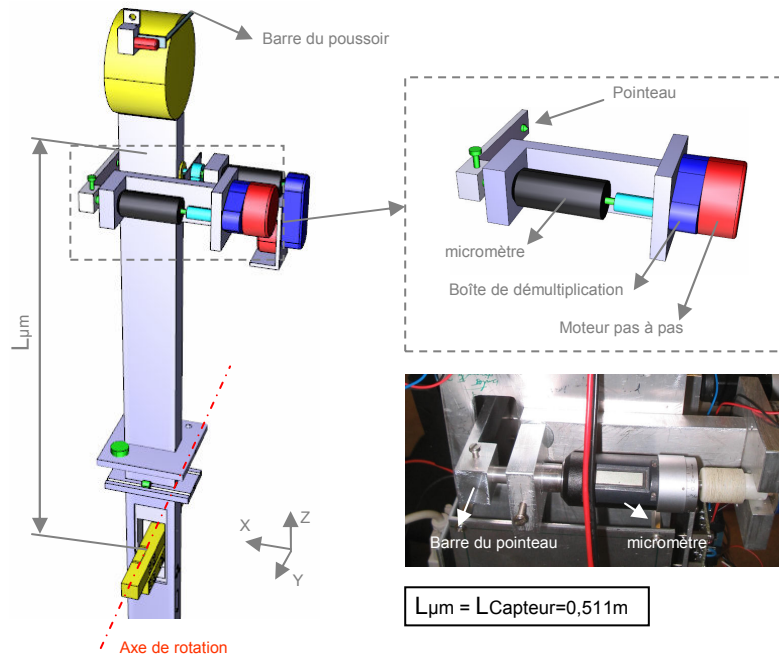


Figure 4-7 : Disposition du micromètre étalon, du pointeau du micromètre étalon et de la barre du poussoir autour du bras pendulaire

Notons que le micromètre supportant l'électrode du capteur de position n'est pas actionné lors de cette procédure.

La résolution de l'affichage digital du micromètre étalon utilisé est de $1 \mu\text{m}$ [111].

Nous opérons nos étalonnages sur une plage d'environ $77 \mu\text{m}$.

Ainsi, dans le cas de l'étalonnage d'un capteur parfaitement linéaire par deux points distants de $77 \mu\text{m}$, la précision relative théorique sur la pente de la droite d'étalonnage du capteur est de l'ordre de 1,3 % (4-25).

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{1 \cdot 10^{-6}}{77 \cdot 10^{-6}} = \pm 1,3 \cdot 10^{-2} \quad (4-21)$$

L'amplitude de cette erreur relative peut encore être réduite en opérant une régression linéaire sur les valeurs des 75 points intermédiaires.

Une autre limitation provient de l'indétermination sur la valeur de la distance $L_{\mu\text{m}}$ entre la position du point d'application du micromètre et l'axe de rotation de la balance. Nous l'évaluons à $\pm 1 \text{ mm}$.

La précision théorique totale sur l'étalon d'angle serait ainsi de l'ordre de $\pm 1,5 \%$ (4-22).

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta L_{\mu\text{m}}}{L_{\mu\text{m}}} \approx \pm 1,5 \cdot 10^{-2} \quad (4-22)$$

4.4.2 Courbe d'étalonnage et gain du capteur de position

La courbe d'étalonnage du capteur de position s'obtient par l'enregistrement de la fréquence de sortie du capteur de position en fonction de la position angulaire du bras du pendule induite par le déplacement du pointeau du micromètre étalon.

Un exemple de courbe d'étalonnage du capteur de position est donné au graphe de la Figure 4-8. Notons que la valeur de la position angulaire $\theta = 0$ a été prise de manière arbitraire. Celle-ci ne correspond pas forcément avec la position centrée avec le châssis du pendule.

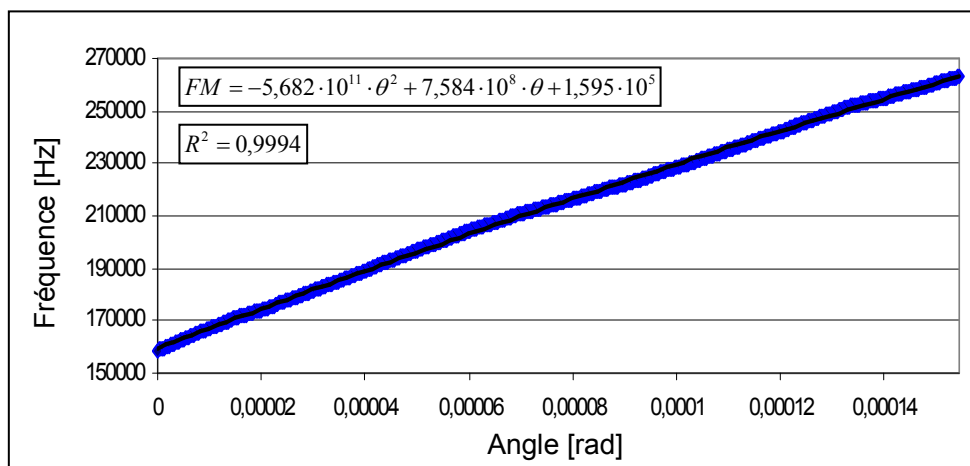


Figure 4-8 : Courbe d'étalonnage du capteur de position angulaire du 25 juin 2007 (Valeurs mesurées (en bleu) et régression polynomiale d'ordre deux par moindre carrée (en noir))

La courbe d'étalonnage est approchée par une régression polynomiale d'ordre deux par moindre carré. Notons que la pente de la régression polynomiale, définissant le gain du capteur, varie de 8 % entre 160 et 200 kHz. Ces deux positions délimitent la plage de fonctionnement du capteur utilisée lors de nos mesures.

L'amplitude des résidus observés entre la courbe d'étalonnage de la Figure 4-8 et la régression polynomiale d'ordre deux est donnée à la Figure 4-9:

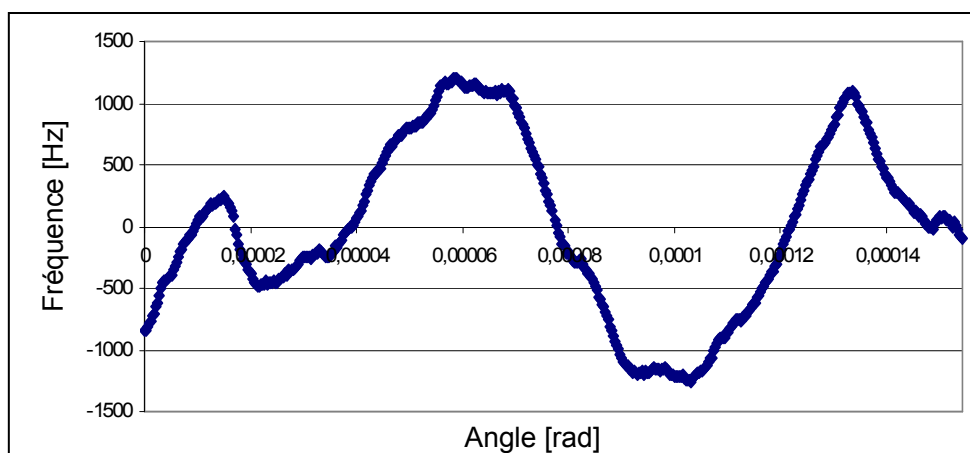


Figure 4-9: Amplitude des résidus présents sur la régression polynomiale d'ordre deux de la courbe d'étalonnage du 25 juin 2007

Nous observons que la pente de la courbe d'étalonnage varie de $\pm 15 \%$ par rapport à la pente donnée par la régression polynomiale.

Nous avons mentionné au §4.4.1 que la position du micromètre est déduite indirectement par le nombre de pas effectués par le moteur pas à pas l'actionnant (Annexe10.8).

La précision de l'étalonnage est alors tributaire de la boîte de démultiplication située entre le moteur d'entraînement et le micromètre.

Les oscillations observées sur le graphe de la Figure 4-9 sont probablement à imputer à la rotation des pignons de la boîte de démultiplication.

Signalons encore que nous n'avons pas pu réaliser d'étalonnage avec une répétabilité meilleur que 30 à 40 % sur le facteur d'étalonnage du capteur de position.

Nous avons observé en particulier des écarts de 30 % sur la valeur du gain du capteur selon que la courbe d'étalonnage est réalisée avec le pointeau du micromètre avançant dans un sens ou un autre. Ces biais sont probablement imputables à des problèmes de glissements observés au niveau de la pièce en nylon assurant le couplage mécanique entre la boîte de démultiplication et le moteur d'entraînement du micromètre. Ces problèmes de glissement augmentant avec le temps, nous n'avons pu réaliser d'étalonnages significatifs après le 25 juin 2007.

Malgré la mise en évidence de cet élément défectueux et disposant des étalons de couple des aiguilles de la montre, nous avons choisi de privilégier la collecte de données au changement des pièces incriminées, cette opération nécessitant un démontage complet du carénage supérieur du pendule.

Observons également que le mouvement du bras pris en étau entre le poussoir et le pointeau peut être sensiblement différent du mouvement du bras non contraint mécaniquement (en particulier, la position de l'axe de rotation peut être rendue légèrement différente).

Compte tenu des remarques précédentes, nous pouvons considérer que la précision obtenue sur le gain du capteur de position n'excède pas 40 % de sa valeur.

Dans le cadre de notre travail, le gain utilisé pour le capteur de position à la fréquence d'échantillonnage de 16 Hz du microcontrôleur est donné par la relation (4-23) :

$$(K_1)_{16Hz} = \frac{1}{16} \cdot \frac{df}{d\theta} = 4,19 \cdot 10^7 \quad (4-23)$$

La sensibilité de notre capteur de position au point de fonctionnement considéré est alors de $1,49 \cdot 10^{-9}$ radians par Hertz.

Le couple de rappel de la balance Γ_{Balance} en fonction du signal de sortie du capteur de position $\text{Signal}_{\text{Capteur}}$ échantillonné à 16 Hz est alors donné par :

$$\Gamma_{Balance} = \frac{\kappa_{Balance}}{(K_1)_{16Hz}} \cdot Signal_{Capteur} \quad [N \cdot m] \quad (4-24)$$

Notons que des étalonnages reproductibles ont pu néanmoins être réalisés lors d'une expérience préliminaire, présentée à l'annexe 10.19, reposant sur un pivot offrant un unique degré de liberté de mouvement en rotation et possédant un couplage mécanique entre le micromètre et la boîte de démultiplication exempt des problèmes de glissement mentionnés plus haut. Ces expériences nous ont permis d'obtenir une cohérence au niveau de quelques pour cent entre nos trois étalons de couple.

Concluons, en guise de perspective, que le micromètre étalon utilisé peut être avantageusement remplacé par un translateur à moteur linéaire piézoélectrique offrant des résolutions de l'ordre de 30 pm sur des plages de plusieurs dizaines de millimètres [110].

4.4.3 Commentaires et perspectives

Les étalonnages d'angles sont généralement obtenus par le biais d'autocollimateurs. Le principe de ces appareils consiste à mesurer la déviation angulaire d'un faisceau lumineux réfléchi par un miroir. Le miroir est solidaire du fléau de la balance utilisée tandis que la déflexion du rayon réfléchi est mesurée par une barrette CCD solidaire de la source lumineuse.

Cette mesure a l'avantage de pouvoir être opérée sans contact mécanique avec le fléau. Aussi ces instruments sont très souvent utilisés pour mesurer la position angulaire du fléau des pendules et des balances de torsion, d'autant qu'une disposition judicieuse des miroirs permet de rejeter les mouvements d'oscillation pendulaire verticale du fléau [75].

Les précisions accessibles sont de l'ordre de 50 nrad [108] pour une résolution intrinsèquement limitée aux mêmes ordres de grandeur par la barrette CCD.

L'unique degré de liberté de mouvement théorique en rotation de notre pendule astatisé autorise l'emploi de technologies de capteurs offrant un gain de plusieurs ordres de grandeur sur les résolutions angulaires accessibles par autocollimateurs.

Ces capteurs déduisent indirectement la déviation angulaire du bras du pendule en mesurant le déplacement d'un point excentré de l'axe de rotation. Cependant, ceux-ci ne possèdent pas de facteur d'étalonnage intrinsèque. Ils doivent faire l'objet d'une procédure d'étalonnage de type micromètre étalon ou autocollimateur.

Observons que la précision nécessaire sur l'étalon d'angle ne doit pas nécessairement atteindre la résolution du capteur de position utilisé.

Ainsi, une précision de l'ordre du pour cent sur la mesure des déviations angulaires du pendule est largement suffisante pour permettre le calcul des paramètres du régulateur PID assurant la rétroaction de position en mode asservi.

En outre, l'étalonnage de l'actionneur électrostatique, également tributaire de l'étalon d'angle, peut s'effectuer sur des plages de mesures compatibles avec le degré de précision octroyé par notre étalonnage d'angle.

Seule l'utilisation du couple de rappel de la balance en mode libre comme étalon de couple nécessiterait d'avoir une précision du même ordre de grandeur que la résolution du capteur. Or une telle précision n'est pas nécessaire étant donné que le couple de rappel de la balance ne peut être utilisé en tant qu'étalon de couple précis du fait des phénomènes anélastiques importants présent dans les pivots des pendules astatisés.

4.5 Étalon de couple généré par la rotation des aiguilles d'une montre solidaire du bras pendulaire.

Notre bras pendulaire est équipé d'un dispositif original, permettant de générer des forçages périodiques d'amplitude constante et ce, indépendamment des caractéristiques de la balance utilisée.

Celui-ci repose sur l'utilisation d'une montre à aiguilles posée à plat sur un plateau solidaire du bras pendulaire (Figure 4-10).

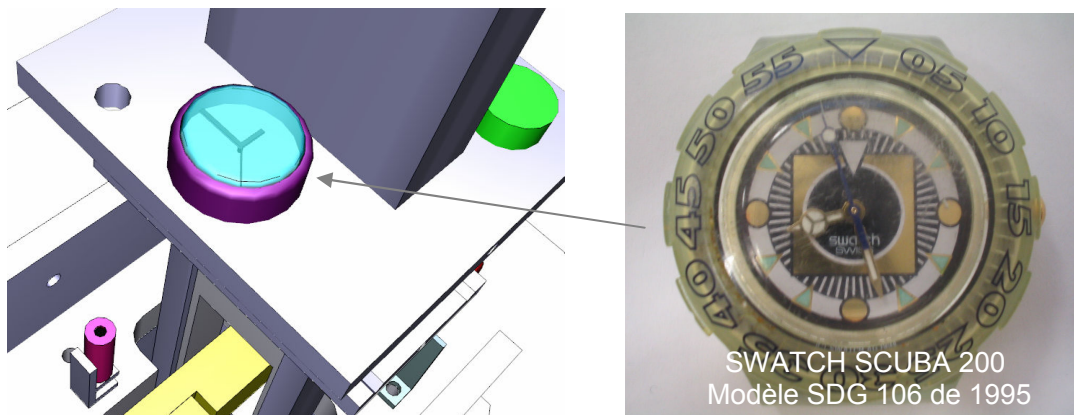


Figure 4-10: Modèle et disposition de la montre à aiguilles fixée sur le bras pendulaire

La rotation dans un plan horizontal du point d'application du poids des aiguilles génère un couple sinusoïdal dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que l'échelon de couple gravitationnel observé.

La mise en marche et l'arrêt de la montre sont commandés par un faisceau laser pointant sur une photorésistance montée en série avec la batterie d'alimentation (Figure 4-11).

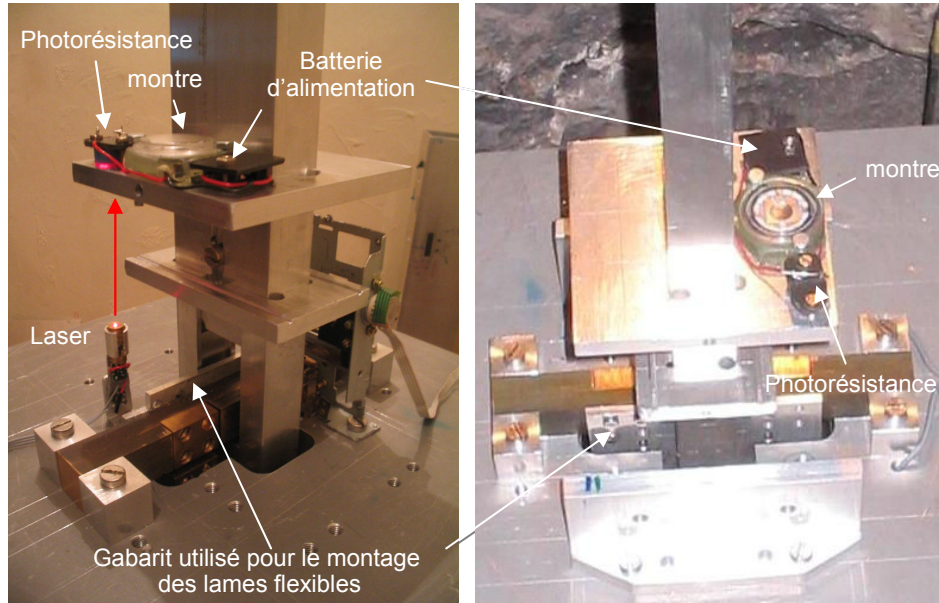


Figure 4-11 : Disposition de la montre à aiguilles boulonnée sur le bras pendulaire avec son laser de commande

Etudions l'amplitude du couple théorique produit par l'une des trois aiguilles de la montre. Cette aiguille peut être modélisée en première approximation par une masse ponctuelle équivalente m_e , située à une distance L_e de son axe de rotation (Figure 4-12).

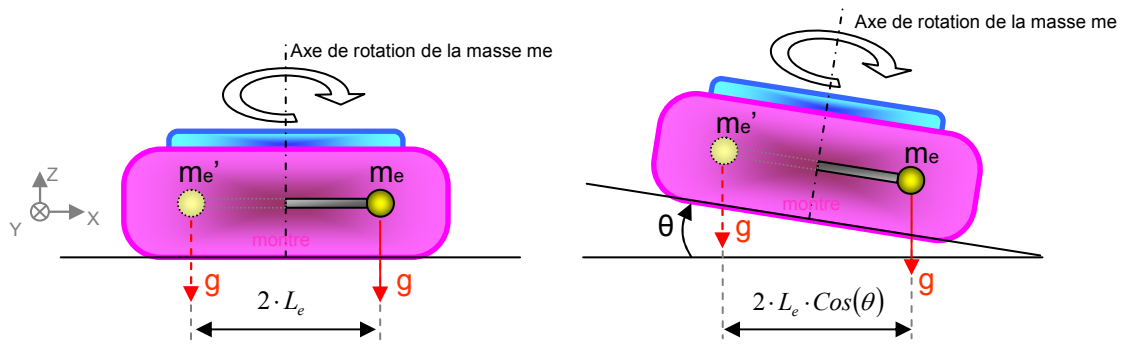


Figure 4-12: Echelon de couple engendré par la rotation d'une des trois aiguilles de la montre et influence de l'inclinaison du support sur l'amplitude de l'échelon de couple appliqué.

L'échelon de couple $\Delta\Gamma_e$ produit par les deux positions antagonistes de la masse ponctuelle m_e le long de l'axe x est formalisé par la relation (4-25):

$$\Delta\Gamma_e = 2 \cdot m_e \cdot g \cdot L_e \cdot \cos(\theta) \quad [N \cdot m] \quad (4-25)$$

L'angle θ est défini comme nul lorsque l'axe de rotation des aiguilles est aligné avec le champ de pesanteur local. La valeur du cosinus de l'angle correspond alors à une valeur extremum. La sensibilité du couple engendré par la rotation des aiguilles à la valeur de l'angle θ est alors nulle pour cette position. Ainsi, l'amplitude du couple appliqué est assurée au niveau du ppm pour une plage de $1,7 \cdot 10^{-3}$ rad autour de cette position.

Notons, à titre de comparaison, que les dérives à long terme observées sur notre pendule sont de l'ordre d'une quinzaine de microradians.

Observons également, que la stabilité de l'échelon de couple engendré par la rotation des aiguilles de la montre est peu affectée par la dilatation thermique des aiguilles. Dans le cas d'aiguilles en acier, elle est de l'ordre de 10 ppm/°C. Or nous avons vu que la stabilité thermique du laboratoire est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$ °C par jour [52].

Le Tableau 4-3 reprend les valeurs des échelons de couple engendré par chacune des trois aiguilles de la montre déduites des données aimablement transmises par le constructeur [106], [107].

Aiguille	Echelon de couple [Nm]
Seconde	$2 \times 2,03 \cdot 10^{-7}$
Minute	$2 \times 3,13 \cdot 10^{-7}$
Heure	$2 \times 2,82 \cdot 10^{-7}$

Tableau 4-3 : Valeurs des échelons de couple relatif aux deux positions antagonistes prises par chaque aiguille de la montre déduite des données transmises par le constructeur.

L'amplitude du couple généré par la rotation des aiguilles est donnée avec trois chiffres significatifs par le constructeur, ce qui nous permet d'ores et déjà de disposer d'un étalon de couple offrant une précision théorique de quelques milliers de ppm sur l'amplitude de l'échelon de couple gravitationnel mesuré (à comparer aux 100 ppm donné par CODATA en 2006).

Notons que les rapports d'amplitude entre les couples produits par les trois aiguilles ont pu être vérifié à quelques pour cent près lors d'une expérience exposée à l'Annexe 10.7 sur notre balance en mode asservi.

En outre, les valeurs des couples produits par l'aiguille des secondes et des minutes ont pu être vérifiées à quelques pour cent près avec deux étalons de couples indépendants (électrostatique et couple de rappel du pendule astatisé) lors d'une expérience préliminaire présentée à l'Annexe 10.19.

Ce dispositif jouera un rôle central dans l'étalonnage des échelons de couple gravitationnel appliqués lors de nos expériences et sur l'étude de la stabilité à long terme de notre balance en mode libre et asservi.

Des investigations supplémentaires doivent encore être menées afin d'évaluer le degré de précision maximal accessible avec ce type d'étalon de couple.

4.6 Masselotte de réglage de zéro

Nous avons équipé notre balance d'un dispositif permettant de régler à distance le point de fonctionnement relatif à la position angulaire θ du bras du pendule.

Ce dispositif consiste à translater une masselotte cylindrique le long d'un rail parallèle à l'axe x et solidaire du bras pendulaire.

La translation de la masselotte est opérée par le biais d'un râteau fixé sur la base du pendule et entraîné par un moteur pas à pas (Figure 4-13).

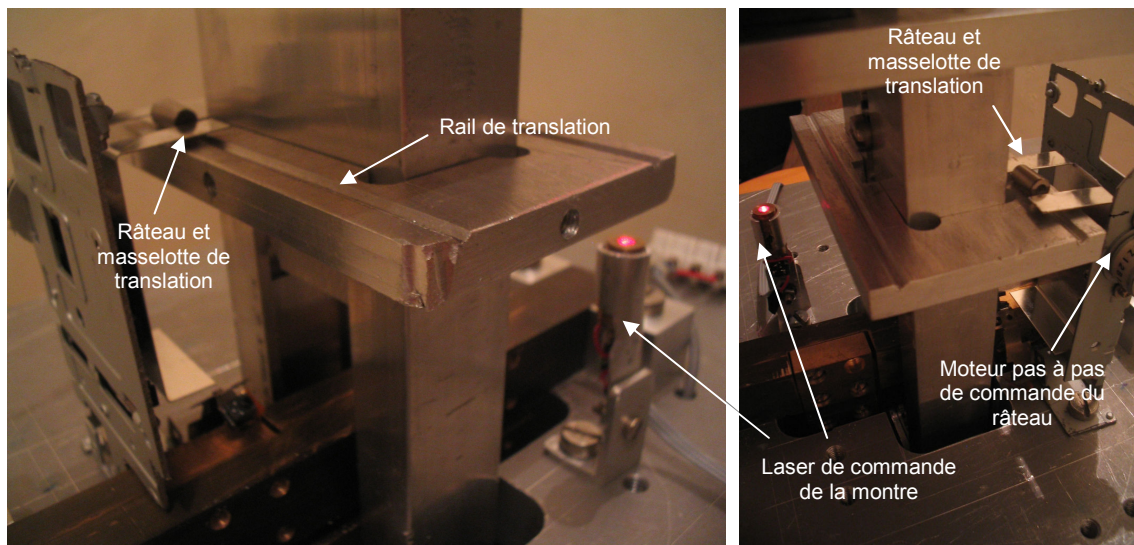


Figure 4-13 : Détail du système de translation de la masselotte sur le rail solidaire du pendule par l'intermédiaire du râteau commandé par un moteur pas à pas

Cet accessoire nous a permis de choisir des points de fonctionnement des lames flexibles présentant des caractéristiques de fluage plus ou moins élevées afin d'étudier leur comportement en mode libre et leur compensation en rétroaction de position.

4.7 Axe de rotation

4.7.1 Introduction

L'axe de rotation du pendule astatisé doit permettre un unique degré de liberté de mouvement en rotation tout en offrant une constante de rappel mécanique aussi faible que possible.

Nous présenterons la solution adoptée sur le dispositif expérimental, basée sur un pivot à lames flexibles et discuterons des différentes alternatives envisagées avec notamment la présentation d'un pivot original basé sur une paire de billes de roulement.

Nous discuterons enfin du facteur de qualité Q global du pendule astatisé et de son incidence sur les différents paramètres de dimensionnement du pendule. Nous verrons que ce type de pendule ne permet pas à l'heure actuelle de concurrencer les facteurs de qualité obtenus avec les balances de torsion en filière libre. Cette remarque justifie notre approche privilégiant le fonctionnement en rétroaction de position.

4.7.2 Pivot à Lames flexibles

Notre axe de rotation est matérialisé par une paire de lames flexibles en acier prises en étau par des mâchoires en laiton (Figure 4-14).



Figure 4-14 : Montage de la suspension à lame flexible sur le bras pendulaire.

Les principales caractéristiques mécaniques et géométriques associées aux lames flexibles utilisées sur notre dispositif expérimental sont décrites au Tableau 4-4:

Epaisseur [mm]	0,1
Largeur totale [mm]	2×3
Longueur libre entre les mâchoires [mm]	6,1
Section totale [mm ²]	0,6
Contrainte en traction [N/mm ²]	~178

Tableau 4-4: Principales caractéristiques des lames flexibles utilisées pour la suspension de notre pendule astatisé

Les lames flexibles proviennent de lames de rasoir commerciales [112]. Nous n'avons pas d'informations exactes sur les propriétés mécaniques de celles-ci. Nous leur attribuerons un module de Young proche de celui des aciers classiques, soit 210 000 N/mm².

Le principal mécanisme de dissipation inhérent à ce type de suspension réside dans l'interface entre la lame flexible et les mâchoires de serrage [10].

Il est possible de limiter les effets de glissement en augmentant le serrage des mâchoires. Mais celui-ci induit en contrepartie des contraintes locales élevées au sein du matériau avec le risque de dépasser ponctuellement la limite d'élasticité de celui-ci.

Ces effets sont en outre fortement dépendants des amplitudes d'oscillation. Les effets d'amortissement liés à ce type de suspension ont été largement étudiés dans les références [15], [21] et [22].

Ce type de réalisation est largement répandu en mécanique, que ce soit en horlogerie, dans la plupart des comparateurs de masses ou certains prototypes de balance de Watt, [26] et [27].

Le montage présenté à la Figure 4-14 a montré néanmoins un certain nombre de faiblesses lors du fonctionnement de notre balance. Nous avons ainsi rencontré des problèmes de fluage importants pouvant varier fortement avec le point de fonctionnement ainsi qu'un vieillissement rapide des lames ayant conduit à la rupture de l'une d'elle.

Ce type de pivot n'est pas souhaitable à terme, car il ne permet de reprendre que partiellement les composantes horizontales des accélérations microsismiques. Nous verrons également que les degrés de liberté de mouvement résiduels sont susceptibles de limiter les gains accessibles par la rétroaction de position.

4.7.3 Perspectives : Pivot à billes et pivot flexible

Une alternative couramment utilisée en métrologie et notamment pour la réalisation de certains prototypes de balance de Watt [25] repose sur les pivots dits à couteau.

Ils ont l'avantage de se rapprocher du cas idéal d'un pivot à un unique degré de liberté de mouvement et de pouvoir, de ce fait, reprendre l'intégralité des composantes horizontale des accélérations inertielles.

La modélisation de l'interaction entre un pivot à couteau et la surface plane sur laquelle il repose (effets d'hystérésis) reste particulièrement complexe [13], de sorte que seule une étude expérimentale permet d'évaluer précisément les caractéristiques de la géométrie envisagée.

Nous avons pu tester lors d'une expérience préliminaire présentée à l'annexe 10.19, une variante reposant sur un pivot constitué d'une paire de billes solidaires du bras du pendule et posée sur un plan de roulement (Figure 4-15).

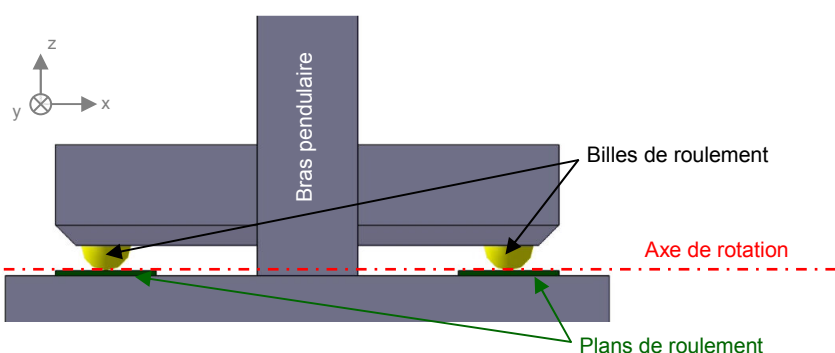


Figure 4-15: Principe d'un pivot constitué d'une paire de billes reposant sur un plan de roulement

Cette configuration a l'avantage d'éviter les contraintes d'alignement et d'être aisément réalisable en reprenant des billes de roulement produites par l'industrie.

Ce pivot nous a permis de comparer et de vérifier les facteurs d'étalonnage de nos trois étalons de couple avec une précision de l'ordre de quelques pour cent (§10.19.3). La qualité du signal observé à Bruxelles était alors excellente. Il serait intéressant, dans un

premier temps, de revenir à cette configuration lors de la mise au point de nouvelles expériences.

Les progrès récents réalisés en matière d'usinage par électroérosion ont permis la mise au point de pivots flexibles réalisés d'un seul tenant [23], évitant les phénomènes de dissipation observés à l'interface entre les mâchoires et les lames flexibles.

La Figure 4-16 illustre les dimensions typiques de tels pivots, l'épaisseur minimale est alors de quelques dizaines de microns.

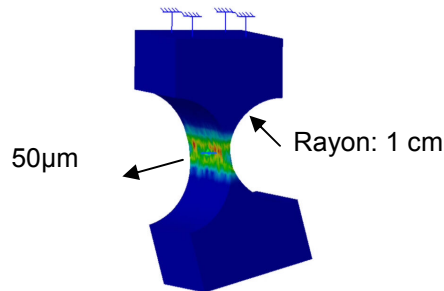


Figure 4-16 : Simulation par élément fini d'un pivot flexible

Cette technologie permet de combiner les avantages liés aux lames flexibles (absence de discontinuité mécanique) et aux billes (reprise des efforts latéraux) citées précédemment.

Les matériaux utilisés pour concevoir ce type de pivot sont généralement basés sur des alliages de cuivre Béryllium.

Cette technologie représente actuellement l'état de l'art en matière de pivots flexibles.

Ce type de pivot est notamment utilisé dans l'expérience « Galileo Galilei on the Ground » [24] destiné à tester les technologies embarquées sur un satellite dédié à la vérification du principe d'équivalence. Cette expérience repose sur un pendule astatisé de dimension et de masse similaire à notre dispositif expérimental. Celui-ci possède un facteur de qualité Q de l'ordre de 500.

4.8 Dimensionnement lié à une suspension à lames flexibles

Nous présentons une étude comparative théorique entre les pivots à lames flexibles montés sur des pendules présentant divers degrés d'astatisation et les suspensions utilisées dans les balances de torsion.

Nous verrons qu'une telle géométrie ne permet pas de rivaliser avec les facteurs de qualité Q des pendules simples (degré d'astatisation nul) d'une part et des pendules de torsion d'autre part, justifiant notre approche limitée à terme au seul fonctionnement en rétroaction de position.

Nous tirerons enfin un certain nombre de conclusions sur les paramètres à prendre en compte dans le dimensionnement des pendules astatisés.

4.8.1 Constante de rappel mécanique : mise en équation

La constante de rappel mécanique relative à un fil de torsion et à une lame flexible chargée est donnée respectivement par les équations (4-26) et (4-27) du Tableau 4-5. Cette dernière équation ayant été établie par Quinn [15].

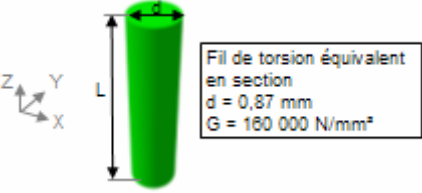
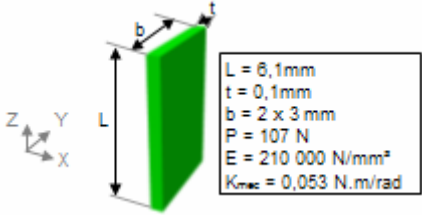
Constante de rappel mécanique κ_{mec} $[N \cdot m / rad]$	
Fil de torsion	Lame flexible
	
$\kappa_{mec} = \frac{\pi}{32} \cdot G \cdot \frac{d^4}{L}$ (4-26)	$\kappa_{mécanique} = \frac{\sqrt{P \cdot E \cdot I_Y}}{2} \cdot \left(Coth(\alpha \cdot L) + \frac{\alpha \cdot L}{Sinh^2(\alpha \cdot L)} \right)$ (4-27)
d = diamètre du fil L = Longueur du fil G = module de Coulomb du matériau	b = largeur de la lame flexible t = épaisseur de la lame flexible L = Longueur de la lame flexible P = Poids des masses suspendues [N] E = module d'élasticité du matériau $I_Y = \frac{b \cdot t^3}{12}$ moment d'inertie de la section de la lame flexible par rapport à l'axe Y. $\alpha = \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_Y}}$

Tableau 4-5 : Constante de rappel mécanique propre aux fils de torsion et aux lames flexibles

L'équation (4-27) nous indique que la constante de rappel mécanique des lames flexibles n'est pas indépendante de la charge supportée par celle-ci.

Cela peut se comprendre en considérant que le rayon de courbure de la lame en flexion est d'autant plus faible que celle-ci est chargée. La constante de rappel du fil de torsion est également fonction de la charge mais dans une moindre mesure, nous n'en tiendrons pas compte dans le cadre de cette étude.

En insérant les paramètres relatifs à notre pivot à lames flexibles donnés au Tableau 4-5 dans l'équation (4-27), nous obtenons une constante de rappel théorique de 0,053 Nm/rad. Soit une valeur de 2 % supérieure à celle établie expérimentalement au Tableau 4-2. Le très bon accord observé entre ces deux valeurs est probablement fortuit ; étant donné le faible degré de précision sur la valeur de l'excentration e_{CM} du centre de masse du pendule par rapport à son axe de rotation et de la méconnaissance des caractéristiques exactes du matériau constituant les lames flexibles utilisées.

Nous allons tirer du Tableau 4-5 une série de conclusions relatives au dimensionnement du pendule astatisé et au facteur de qualité atteignable avec ce type de géométrie.

4.8.2 Rappel : Dimensionnement des balances de torsion

Les premières balances de torsion dédiées à la mesure de G travaillaient avec des valeurs de masses pendulaires élevées partant du constat que la valeur de l'échelon de couple gravitationnel $\Delta\Gamma_G$ appliqué au fléau de la balance de torsion est directement proportionnelle à la valeur des masses suspendues au fléau.

Cependant, l'augmentation de la charge du fil de torsion implique d'augmenter proportionnellement la section de celui-ci afin de ne pas dépasser la contrainte de traction admissible dans le fil de torsion.

En observant que la constante de rappel κ_{mec} de la balance de torsion est proportionnelle au carré de la section du fil (4-26).

Nous pouvons alors écrire :

$$\Delta\Gamma_G \div \text{masses suspendues} \div \text{Section} \div \sqrt{\kappa_{mec}} \quad (4-28)$$

Nous observons que la valeur de la constante de rappel du fil de torsion en fonction de la valeur des masses suspendues augmente plus vite que la valeur de l'échelon de couple gravitationnel appliqué.

La déviation angulaire $\Delta\theta$ consécutive à l'application d'un échelon de couple gravitationnel $\Delta\Gamma_G$ s'écrit alors :

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\Gamma_G}{\kappa_{mec}} \div \frac{\sqrt{\kappa_{mec}}}{\kappa_{mec}} \quad (4-29)$$

Boys [69] a ainsi montré que la sensibilité de la balance de torsion à l'application d'échelons de couple gravitationnel est d'autant plus grande que la valeur de la constante de rappel du fil de torsion et donc que la valeur des masses suspendues sont faibles.

Observons encore qu'une faible valeur de la constante de rappel de la suspension permet également de minimiser l'amplitude des fluctuations du couple de rappel du pendule dues au bruit thermique de la suspension.

En effet, le théorème de fluctuation-dissipation [11], [12] nous indique que la densité spectrale de puissance de fluctuation du couple de rappel mécanique du fil de torsion consécutive au bruit thermique est proportionnelle à la valeur de la constante de rappel de celui-ci [10], (4-30).

$$\delta\Gamma_{mec}^2 \div \kappa_{mec} \quad (4-30)$$

Ce bruit thermique est à l'origine des effets anélastiques observés. Il est probablement dû aux mouvements de dislocation se produisant au sein du matériau [10].

Notons que l'incidence de ces bruits thermiques peut être sensiblement atténuée en travaillant à basse température. Une équipe du Caltech a développé, à cette fin, un pendule de torsion fonctionnant à 2 degrés Kelvin [93], [94], [95].

Les phénomènes anélastiques sont généralement définis par le facteur de qualité Q de la suspension (4-11). À titre d'exemple, le pendule de torsion développé à l'université de Huazhong possède un facteur de qualité Q de 34000 [99].

Les facteurs de qualités les plus élevés sont actuellement obtenus par l'emploi de pendules à ruban de torsion, ceux-ci pouvant atteindre des valeurs de l'ordre de 300000 [16], [74].

Dans le cas de notre balance, seul le facteur de qualité global dépendant du pivot à lames flexibles et de l'amortissement à air a pu être mesuré. Celui-ci varie de 3 à 10 selon la valeur du point de fonctionnement des lames flexibles et la valeur de l'amortissement à air dépendant en grande partie de la valeur de l'entrefer des électrodes du capteur de position.

4.8.3 Dimensionnement des lames flexibles

Comparons l'évolution des constantes de rappel des suspensions à lames flexibles avec celle des suspensions à fils de torsion en fonction de leurs sections respectives.

La Figure 4-17 donne l'évolution de la constante de rappel de la paire de lames flexibles décrite au Tableau 4-5 en fonction de la section des lames pour une largeur de lame b constante. Y figurent également les évolutions des constantes de rappel de trois fils de torsion de longueurs différentes en fonction de leur section.

Ces courbes ont été établies à partir des équations (4-26) et (4-27) et des paramètres du Tableau 4-5.

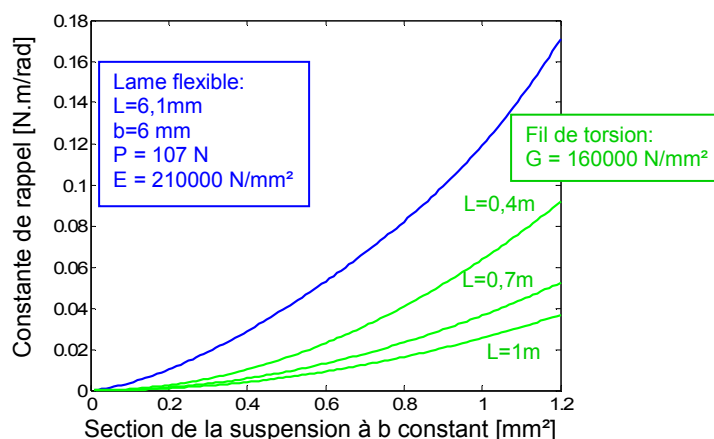


Figure 4-17 : Evolution de la constante de rappel théorique de notre pivot à lames flexibles en fonction de sa section à largeur b constante et comparaison avec la constante de rappel théorique d'une série de fils de torsion de différentes longueurs L en fonction de leur section.

À largeur b constante, nous observons que la constante de rappel des lames flexibles évolue non linéairement avec la section. Au même titre que pour les fils de torsion, la constante de rappel des lames flexibles augmente d'autant plus vite que la section de la suspension augmente. Aussi, les conclusions esquissées au paragraphe précédent quant à la nécessité de travailler avec des fils de torsion de constante de rappel minimale pour augmenter la sensibilité mécanique de la balance et diminuer l'influence du bruit thermique sont également valables pour les lames flexibles.

Observons également qu'à section constante, la constante de rappel d'un fil de torsion peut potentiellement être rendue aussi faible que souhaité en jouant sur la longueur L de celui-ci.

Dans le cas des lames flexibles, la constante de rappel à section constante est fonction du rapport entre la largeur et l'épaisseur des lames flexibles. Or ce rapport ne peut être augmenté indéfiniment sans poser des problèmes d'aspect constructif.

Ces considérations suggèrent que les lames flexibles ne peuvent rivaliser telles quelles avec les propriétés mécaniques des fils de torsion.

Nous verrons au paragraphe suivant que l'adjonction d'un couple de rappel pendulaire en parallèle du couple de rappel des lames flexibles permet de compenser sensiblement les phénomènes anélastiques présents dans les lames. Nous verrons cependant que le facteur de qualité global atteignable avec un pendule astatisé reste intrinsèquement inférieur à celui offert par un pendule de torsion.

4.8.4 Dimensionnement du pendule astatisé monté sur un pivot à lames flexibles

4.8.4.1 Valeur des masses suspendues

L'analyse des équations (4-3) et (4-5) nous indique que la contribution relative du couple de rappel mécanique du pivot à lames flexibles au couple de rappel total de la balance est d'autant plus faible que la valeur des masses suspendues est élevée.

Le graphe de la Figure 4-18 illustre l'évolution de la contribution du couple de rappel mécanique au couple de rappel total de la balance en fonction de la valeur du poids des masses suspendues. Ce graphique est déduit des paramètres des Tableau 4-1 et Tableau 4-5 et des équations (4-4), (4-5), (4-6) et (4-27).

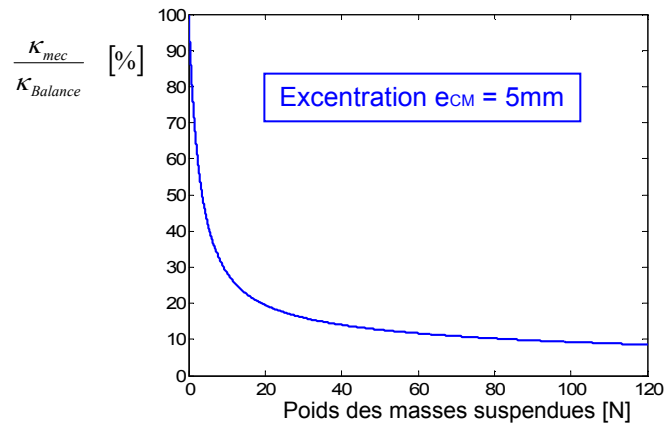


Figure 4-18 : Lames flexibles: évolution de la contribution de la constante de rappel mécanique à la constante de rappel totale de la balance exprimée en pour cent en fonction de la valeur du poids suspendu aux lames flexibles.

Ainsi, pour une paire de lames flexibles donnée, la contribution relative du couple de rappel mécanique des lames flexibles au couple de rappel total de la balance est d'autant plus faible que les lames flexibles sont chargées au maximum de leur capacité, c'est-à-dire à des valeurs proches de leur limite élastique.

4.8.4.2 Facteur de qualité du pendule en fonction de son degré d'astatisation

Supposons par exemple, que notre balance possède un facteur de qualité $Q = 500$ (équivalent au facteur de qualité de l'expérience du GGG évoquée au §4.7.3) pour une valeur d'excentration e_{CM} de 5mm du centre de masse du pendule par rapport à son axe de rotation.

Le coefficient d'amortissement correspondant vaut alors $\lambda = 0,0076$ [N·m/s/rad].

Supposons que ce coefficient d'amortissement résulte uniquement des effets dissipatifs présents dans les lames flexibles. Il est supposé constant, quelle que soit la valeur d'excentration du centre de masse de bras pendulaire.

La valeur du facteur de qualité du pendule astatisé en fonction de la valeur d'excentration de son centre de masse est donnée par l'équation (4-31) déduite de l'équation (4-11).

$$Q = \frac{1}{\xi} = \frac{2 \cdot I \cdot \omega_L}{\lambda} \quad (4-31)$$

Avec la valeur de la pulsation en déflexion libre ω_L déduite de (4-3) et de (4-10) :

$$\omega_L = \sqrt{\frac{\kappa_{mec} + m_{pendule} \cdot g \cdot e_{CM}}{I}} \quad [rad / s] \quad (4-32)$$

L'évolution du facteur de qualité théorique de notre balance en fonction de l'excentration e_{CM} est donnée à la Figure 4-19.

Ce graphique est déduit des paramètres du Tableau 4-1 et du Tableau 4-5.

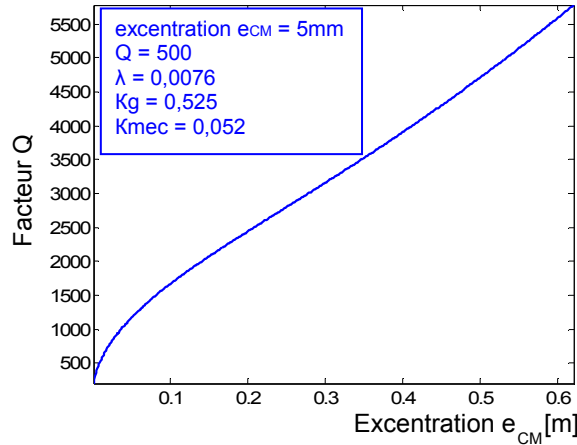


Figure 4-19 : Evolution du facteur de qualité Q du pendule astatisé en fonction de l'excentration de son centre de masse par rapport à la position de son axe de rotation

Nous observons qu'il est nécessaire d'appliquer des valeurs d'excentrations e_{CM} élevées (plusieurs mètres) pour obtenir des facteurs de qualité Q équivalents aux balances de torsion. La géométrie obtenue s'apparente alors plus à celle du pendule simple qu'à celle du pendule astatisé.

Les pendules astatisés ne peuvent apporter une alternative aux pendules de torsion en ce qui concerne la prise en charge des phénomènes anélastiques en déflexion libre [10].

4.8.5 Conclusions :

Le cahier des charges de l'axe de rotation du pendule astatisé doit concilier deux paramètres antagonistes : offrir un unique degré de liberté de mouvement en rotation et une constante de rappel minimale.

La concentration de contrainte élevée répartie dans le faible volume qu'elle implique ne permet pas de concurrencer les facteurs de qualité obtenus avec les balances de torsion dont les contraintes sont réparties tout le long du fil.

Nous tirerons parti de l'unique degré de liberté de mouvement octroyé par cette géométrie et sa faible sensibilité aux accélérations sismiques pour y appliquer un asservissement de position performant.

Notons encore que si l'asservissement de position du bras pendulaire permet d'annihiler les phénomènes de fluage et de se passer du couple de rappel de la balance en tant qu'étalon de couple, il ne permet pas pour autant de diminuer les fluctuations du couple de rappel mécanique induit par le bruit thermique des lames flexibles [10].

5 Actionneur gravitationnel

Nous avons vu au chapitre 1 que la sensibilité de la force gravitationnelle aux erreurs de position des masses en interaction constituait une des principales limitations sur la précision accessible sur la valeur de G .

Nous proposons, dans ce chapitre, l'étude de différentes géométries de masse, adaptées au pendule astatisé, permettant de minimiser la sensibilité du signal gravitationnel à la géométrie de l'actionneur.

Pour ce faire, nous commencerons par présenter un algorithme simple et général, permettant de calculer les forces ou les moments des forces gravitationnels agissant entre deux masses de géométrie quelconque.

Nous présenterons alors les géométries de masses choisies pour notre actionneur gravitationnel ainsi que les différents paramètres le caractérisant.

Nous discuterons ensuite de géométries alternatives, permettant de mieux prendre en charge les contraintes d'inhomogénéité des matériaux et de transposer les paramètres dimensionnels critiques aux dimensions les plus stables et les plus accessibles du point de vue métrologique.

5.1 Détermination de la force gravitationnelle agissant entre deux objets de géométrie et de masse quelconque.

Nous avons vu que l'équation de Newton (1-1) donne la valeur de la force gravitationnelle agissant entre deux masses ponctuelles distantes de r

Nous souhaitons généraliser cette équation à des géométries de masses arbitraires.

Il existe de nombreuses méthodes permettant de déterminer le champ d'accélération en un point généré par une masse de géométrie quelconque.

Beaucoup ont été élaborées dans le cadre de prospection pétrolière par gravimétrie.

Ces méthodes consistent généralement à établir l'expression du champ d'accélération en un point de l'espace produit par un volume élémentaire de la masse considérée, et à substituer son intégration sur le volume total du corps par une intégration sur sa surface externe. Cette dernière peut être résolue en décomposant la surface en facettes élémentaires et en additionnant la contribution de chacune d'elles [7].

Il existe aussi des solutions purement analytiques permettant de déterminer ce champ autour de masses de géométries particulières telles que des masses cylindriques [98].

Il suffit alors d'intégrer ce champ numériquement sur le volume de la masse subissant le champ d'accélération (dont la géométrie est alors arbitraire).

Une autre technique, très souvent utilisée dans l'étude des champs gravitationnels et électromagnétiques, repose sur la méthode d'expansion multi-pôles qui correspond à un développement en série de fonctions dépendant d'angles [8], [9].

Nous allons présenter ici une méthode alternative, reposant sur une somme d'intégrations analytiques appliquée à deux masses de géométrie arbitraire. Cette méthode, transposable à toute géométrie de masse, permet d'atteindre pour des temps de calcul raisonnables une précision de l'ordre du ppm sur la valeur de l'effet gravitationnel calculé (force ou moment de force).

5.1.1 Décomposition en masses ponctuelles :

Prenons, pour illustrer nos propos, le cas de deux cubes de masse m_1 et m_2 et de masse volumique homogène valant respectivement ρ_1 et ρ_2 . Nous supposons nos deux cubes indéformables, la distance entre leurs surfaces en vis-à-vis étant fixée par le paramètre h .

Nous allons calculer la composante suivant la direction x de la force exercée par le cube 2 sur le cube 1 que nous nommerons F_G . Celle-ci est définie positive si elle tend à déplacer le cube 1 dans le sens des x positifs.

Décomposons nos deux cubes de volume V_1 et V_2 par un ensemble de cubes élémentaires identiques de volume Δv_1 et Δv_2 agencés dans un système de coordonnées cartésiennes comme décrit à la Figure 5-1.

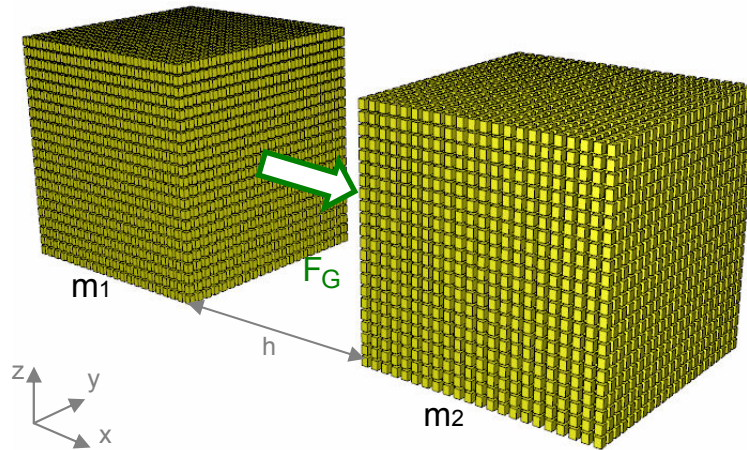


Figure 5-1 : Attraction entre deux masses cubiques, décomposées en un pavage de masses cubiques élémentaires assimilables à des masses ponctuelles

La force exercée entre deux cubes élémentaires peut être directement déduite par l'application de l'équation de Newton (1-1), en les assimilant à des masses ponctuelles. Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée, que le volume des cubes considérés est réduit et que la distance r séparant leurs centres de masses respectifs est élevée.

Considérons l'attraction gravitationnelle F s'exerçant entre deux petits éléments cubiques arbitraires appartenant respectivement au cube 1 et au cube 2 (Figure 5-2).

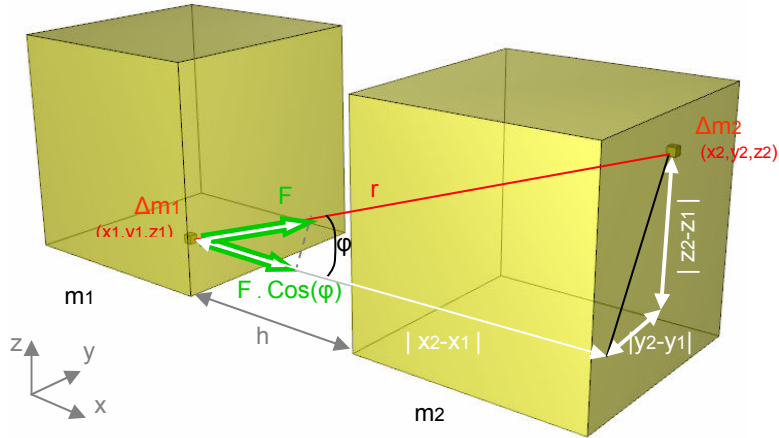


Figure 5-2 : Détermination de la composante x de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses élémentaires Δm_1 et Δm_2 constituant respectivement les masses cubiques m_1 et m_2 . La force gravitationnelle appliquée est définie positive dans le sens des x positifs.

La composante x de la force gravitationnelle F exercée sur la masse élémentaire Δm_1 est donnée par:

$$(F_{1\vec{x}})_{\Delta m_1 \Delta m_2} = (F)_{\Delta m_1 \Delta m_2} \cdot \cos(\varphi) = (F)_{\Delta m_1 \Delta m_2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{r} \quad [N] \quad (5-1)$$

La distance r séparant les centres de masses de deux cubes élémentaires de coordonnées arbitraires (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) appartenant respectivement aux cubes m_1 et m_2 est donnée par la relation (5-2):

$$r = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad [m] \quad (5-2)$$

En appliquant les équations (1-1) et (5-2) aux deux masses élémentaires considérées et en les insérant dans l'équation (5-1) nous avons :

$$(F_{1\vec{x}})_{\Delta m_1 \Delta m_2} = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta v_1 \cdot \Delta v_2 \quad [N] \quad (5-3)$$

Il nous suffit alors d'appliquer le principe de superposition, consistant ici à additionner numériquement la contribution des forces exercées par chacun des volumes cubiques élémentaires Δv_2 du cube 2 sur un volume cubique élémentaire donné Δv_1 du cube 1 et de recommencer l'opération pour l'ensemble des volumes cubiques élémentaires Δv_1 du cube 1.

Cette opération consiste en une sommation du sixième degré correspondant aux trois dimensions spatiales des deux volumes pavés. Ainsi, la composante x de la force gravitationnelle totale exercée par le cube 2 sur le cube 1, désigné par le paramètre F_G est donnée par (5-4).

$$F_G = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{a_{z2}}^{b_{z2}} \sum_{a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{a_{y2}}^{b_{y2}} \sum_{a_{y1}}^{b_{y1}} \sum_{a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{a_{x1}}^{b_{x1}} \frac{(x_2 - x_1)}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta y_2 \cdot \Delta z_2 \quad [N] \quad (5-4)$$

Les bornes de sommation a et b délimitent et définissent la géométrie des deux volumes pavés 1 et 2 dans les trois directions x, y, z du repère cartésien. Ces bornes sont des paramètres libres de l'équation (5-4) et sont donc adaptables au pavage de n'importe quelle géométrie.

Ce type d'approche est néanmoins difficilement exploitable en pratique, du fait de la présence de la sommation d'ordre six. Celle-ci induit des temps de calcul non compatibles avec les précisions souhaitées sur la valeur de l'amplitude de la force gravitationnelle à calculer.

Ainsi, à titre d'exemple, la détermination de l'attraction entre deux cubes de 1 mètre d'arête, pourvus chacun d'un pas de maillage de 1 millimètre nécessite $1000^6 = 10^{18}$ calculs élémentaires correspondants à la formule (5-3).

5.1.2 Décomposition en barres élémentaires:

Nous allons voir qu'il est possible de réduire l'ordre de la sommation sans perte de généralité quant à la géométrie des volumes pavés en décomposant les masses en une somme de barres élémentaires.

La Figure 5-3 illustre le pavage cartésien de nos deux masses cubiques précédentes par un ensemble de barres élémentaires parallèles à l'axe y.

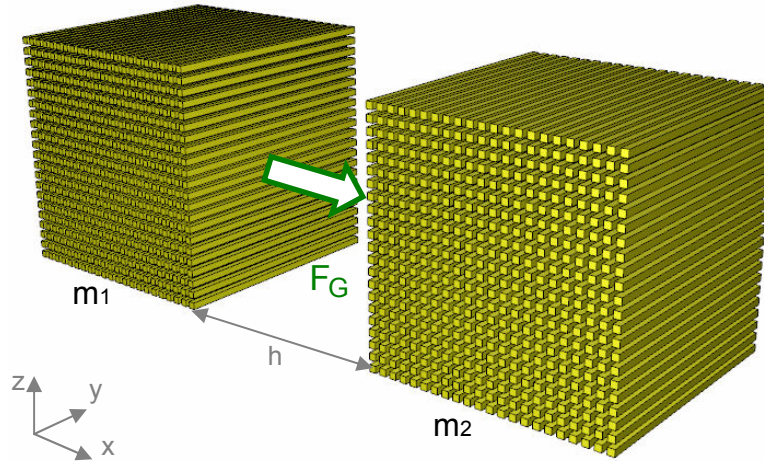


Figure 5-3 : Attraction entre deux masses cubiques, décomposée en un pavage de barres élémentaires parallèles à l'axe y

Autrement dit, les composantes y des sommations sont remplacées par deux intégrations analytiques. Ainsi, la composante x de la force exercée par l'ensemble des barres élémentaires pavant le cube 2 sur l'ensemble des barres élémentaires pavant le cube 1 de la Figure 5-3 est donnée par la relation:

$$F_G = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{a_{z2}}^{b_{z2}} \sum_{a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{a_{x1}}^{b_{x1}} \int_{a_{y2}}^{b_{y2}} \int_{a_{y1}}^{b_{y1}} \frac{(x_2 - x_1)}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \quad [N] \quad (5-5)$$

La résolution de cette intégrale possède une expression relativement simple donnée par :

$$F_G = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{z_2=a_{z2}}^{b_{z2}} \sum_{z_1=a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{x_2=a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{x_1=a_{x1}}^{b_{x1}} \frac{(x_2 - x_1)}{\left[(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right]} \cdot \left[\begin{array}{l} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (a_{y2} - b_{y1})^2 + (x_2 - x_1)^2} \\ - \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (a_{y2} - a_{y1})^2 + (x_2 - x_1)^2} \\ + \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (b_{y2} - a_{y1})^2 + (x_2 - x_1)^2} \\ - \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (b_{y2} - b_{y1})^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{array} \right] \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \quad [N] \quad (5-6)$$

Cette sommation d'ordre 4 permet de réduire considérablement les temps de calcul. Ainsi, la détermination de la force gravitationnelle exercée entre nos deux cubes de référence ne nécessite plus alors que $1000^4 = 10^{12}$ calculs élémentaires. Nous gagnons ainsi un facteur 10^6 sur le nombre de calculs élémentaires à effectuer.

Afin d'optimiser les temps de calcul sur ordinateur, l'intégration numérique proprement dite est réalisée par le biais d'un programme écrit en langage C. Les graphiques présentant les champs autour des masses illustrant ce chapitre ont été obtenus à l'aide de l'éditeur graphique Matlab[®].

L'algorithme déduit les valeurs des masses volumiques et la valeur de la composante x de la force gravitationnelle agissant entre les masses considérées en fonction des valeurs de masses, de géométries et de positions des masses en interaction.

5.1.3 Précision et Convergence de l'algorithme

Afin d'étudier la précision et la convergence de notre algorithme en fonction du pas du maillage, nous l'appliquons au calcul de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses sphériques identiques (Figure 5-4). Nous pouvons alors comparer le résultat obtenu avec la réponse analytique déduite de l'équation de Newton (1-1).

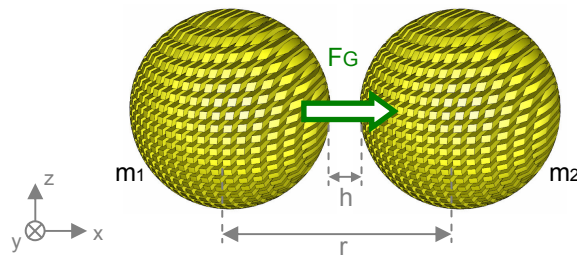


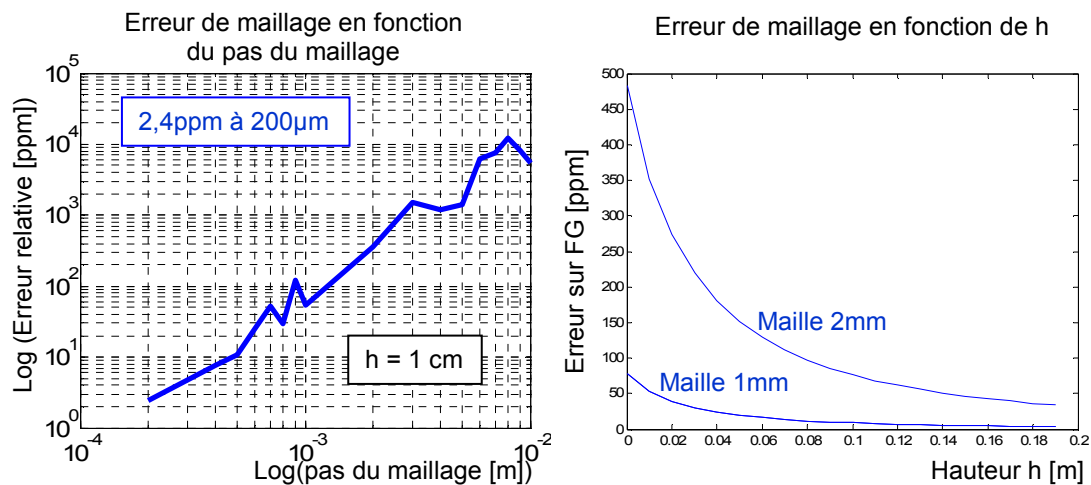
Figure 5-4 : Attraction gravitationnelle entre deux masses sphériques identiques pavées par un ensemble de barres parallèles.

Les caractéristiques des sphères utilisées pour les calculs sont répertoriées au Tableau 5-1.

	Rayon [m]	Masse Volumique [kg/m ³]	r [m]	h [m]
Sphère1	0,05	8400	0,11	0,01
Sphère2				

Tableau 5-1 : Paramètres des sphères présentées à la Figure 5-4.

La Figure 5-5 illustre la convergence de l'intégration par barres en fonction du pas du maillage (graphique de gauche) et en fonction de la distance h séparant les surfaces des sphères en vis-à-vis (graphique de droite). L'erreur relative est exprimée en ppm par rapport à la réponse analytique.



Les sauts observés sur le graphe de gauche trahissent la difficulté à faire correspondre un maillage à pas constant avec les géométries sphériques à paver.

Le graphe de droite met en évidence la diminution des effets de quantification du maillage avec l'augmentation de la distance h séparant les surfaces des sphères en vis-à-vis.

Ainsi, la valeur de la force donnée par notre algorithme ne s'écarte que de 2,4 ppm par rapport à la solution analytique, pour un pas de maillage de 200 µm et une valeur d'écartement h des surfaces en vis-à-vis de 1 cm.

Le graphe de droite nous indique que cette erreur diminue encore de plusieurs ordres de grandeur avec l'augmentation de l'écartement h des surfaces en vis-à-vis.

Notre méthode rend possible, dans des délais raisonnables de l'ordre de quelques heures à quelques jours sur un ordinateur de bureau, l'obtention de la valeur de la force gravitationnelle correspondant à la géométrie des masses de notre actionneur avec une précision de l'ordre du ppm.

5.1.4 Conclusions

L'algorithme proposé au §5.1.2 a l'avantage de garder toute liberté quant à la géométrie des masses à paver, tout en permettant d'atteindre des précisions de l'ordre du ppm pour des délais de calcul raisonnables.

Il est en outre aisément transposable au calcul de champ potentiel (Annexe 10.6.3) ou au calcul de couple gravitationnel tel que celui exercé par les masses attractives sur le bras pendulaire en aluminium. (§5.6.1).

Cette manière de procéder offre ainsi une grande souplesse d'utilisation et est particulièrement intéressante pour tenir compte de certains éléments de géométrie complexe intervenant dans le calcul des forces tels que les supports des masses pendulaires et attractives.

5.2 Géométrie de l'actionneur gravitationnel

L'actionneur gravitationnel utilisé sur notre dispositif expérimental s'articule autour de deux paires de masses cylindriques coaxiales en laiton (Figure 5-6).

L'échelon de couple gravitationnel induit sur le pendule, s'obtient par la rotation des masses attractives de la position p à la position p' .

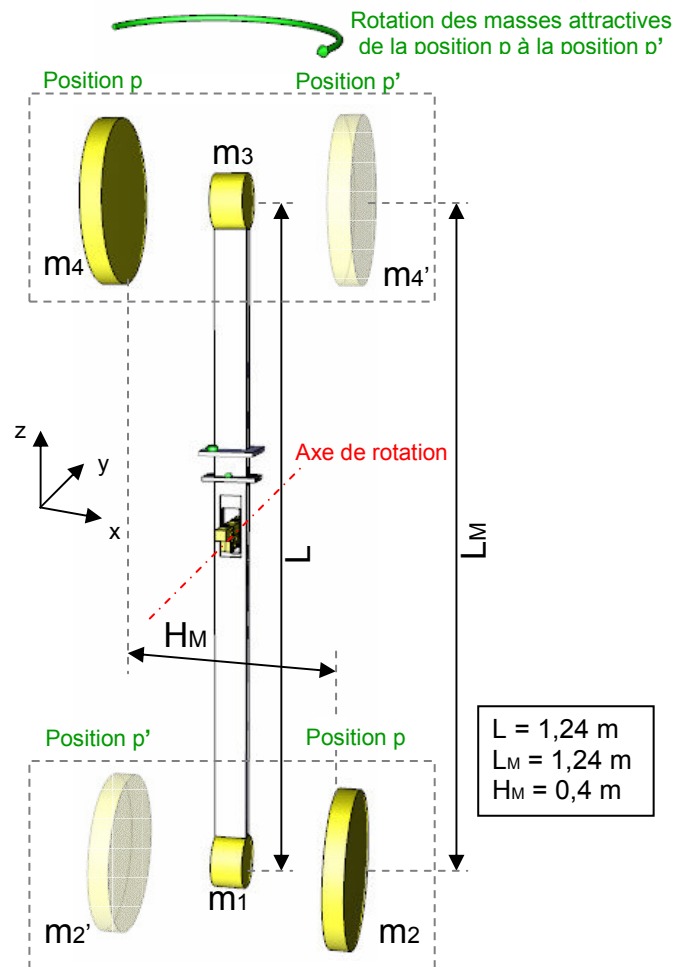


Figure 5-6 : Disposition générale des deux paires de masses cylindriques utilisées pour générer l'échelon de couple gravitationnel sur le bras pendulaire.

CONVENTIONS :

- L'axe de symétrie vertical du bras pendulaire est supposé coïncidant avec l'axe de rotation des masses attractives
- Les variables m_1 et m_3 désignent respectivement les masses pendulaires inférieures et supérieures.
- Les variables m_2 et m_4 désignent respectivement les masses attractives inférieures et supérieures lorsqu'elles occupent la position p .

- Les variables m_2' et m_4' désignent respectivement les masses attractives inférieures et supérieures lorsqu'elles occupent la position p' .
- H_M représente la composante x de la distance entre les surfaces en vis-à-vis des deux masses attractives cylindriques.

Nous n'étudierons dans un premier temps que la seule contribution des quatre masses cylindriques précitées. La valeur de l'échelon de couple gravitationnel sera affinée dans un deuxième temps, en tenant compte de la contribution du support des masses cylindriques pendulaires et attractives.

5.3 Caractéristiques des paires de masses inférieures et supérieures

La Figure 5-7 illustre une des deux paires de masses cylindriques coaxiales utilisées sur notre dispositif expérimental.

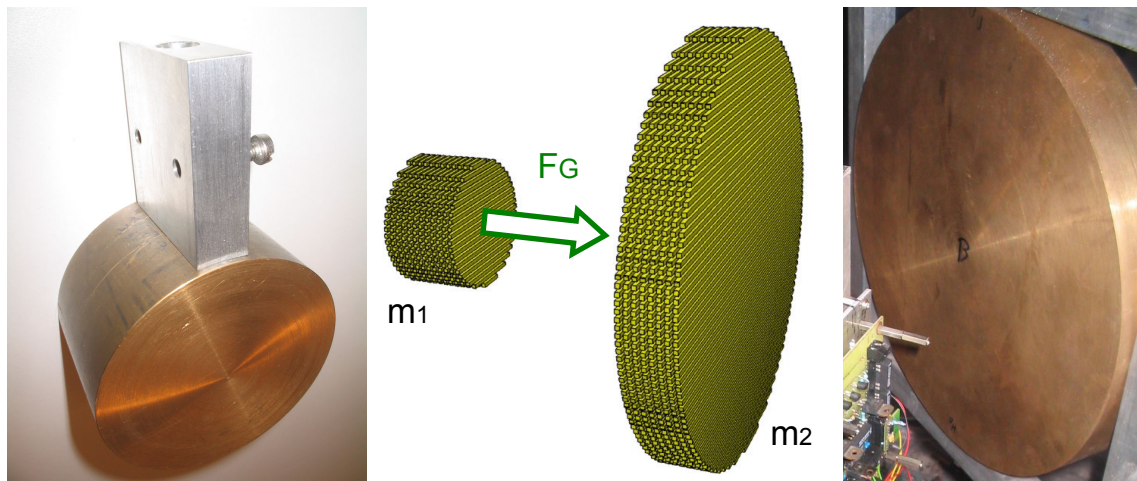


Figure 5-7 : Masse pendulaire et masse attractive en laiton montées sur le dispositif expérimental et leur support en aluminium. Au centre, disposition et maillage d'une des deux paires de masses pendulaires et attractives par des barres horizontales parallèles.

Les masses actuellement utilisées sont réalisées en laiton dont la masse volumique vaut environ 8400 kg/m^3 .

Nous supposons les caractéristiques des paires de masses cylindriques supérieures et inférieures de notre dispositif expérimental comme identiques.

Les valeurs de leurs caractéristiques moyennes utilisées pour nos calculs sont reprises à la Figure 5-8 et au Tableau 5-2.

À titre de comparaison, celles-ci sont données avec les caractéristiques d'une paire de masses sphériques équivalentes du point de vue des masses, des masses volumiques et de la distance h séparant leurs surfaces en vis-à-vis.

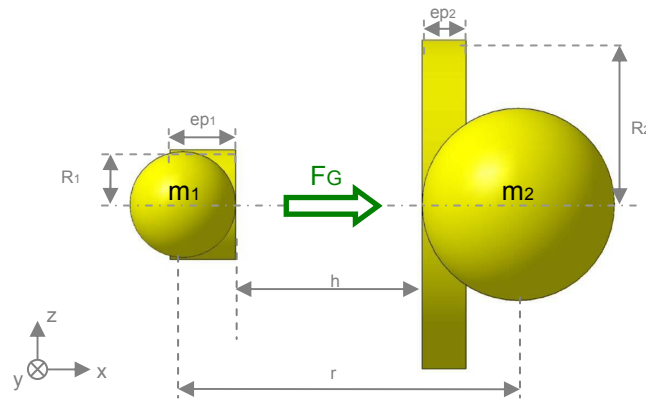


Figure 5-8 : Dimension des masses cylindriques coaxiales et des masses sphériques équivalentes

	Masse [kg]	Masse volumique [kg/m ³]	h [m]	Masses cylindriques		Masses Sphériques équivalentes	
				Rayon [m]	Épaisseur [m]	Rayon [m]	Écartement r [m]
$m_1 \approx m_3$	3,9385	8357,5	0,17	0,05	0,06	0,0482	0,307
$m_2 \approx m_4$	24,525	8446		0,14926	0,041486	0,0885	

Tableau 5-2 : Principaux paramètres géométriques associés aux masses pendulaires et attractives

Les valeurs exactes de chaque masse cylindrique sont reprises aux annexes 10.1 et 10.2. Celles-ci ne s'écartent pas de plus de 0,3 % de leur valeur moyenne calculée au Tableau 5-2.

5.3.1 Influence de la géométrie des masses attractives sur la distribution des lignes de champ

Le choix opéré sur la géométrie des masses attractives m_2 et m_4 se justifie par le fait que leur forme aplatie permet de générer un champ gravitationnel relativement homogène au niveau de la masse pendulaire en vis à vis. La force nette perçue par celle-ci est alors moins dépendante de sa position dans le champ [102].

Afin de mieux appréhender l'intérêt de la géométrie de nos masses attractives, nous allons comparer les équipotentielles et les lignes de champ générées respectivement par notre masse attractive cylindrique et une masse sphérique de masse et de masse volumique équivalente.

Nous appliquerons, pour ce faire, les algorithmes développés à l'annexe 10.6.3 et au §5.1.2. Les valeurs des paramètres utilisées pour les calculs sont celles répertoriées au Tableau 5-2.

La Figure 5-9 illustre les équipotentielles gravitationnelles générées par la masse attractive cylindrique de notre dispositif expérimental (graphique de gauche) et par une masse attractive sphérique équivalente (graphique de droite).

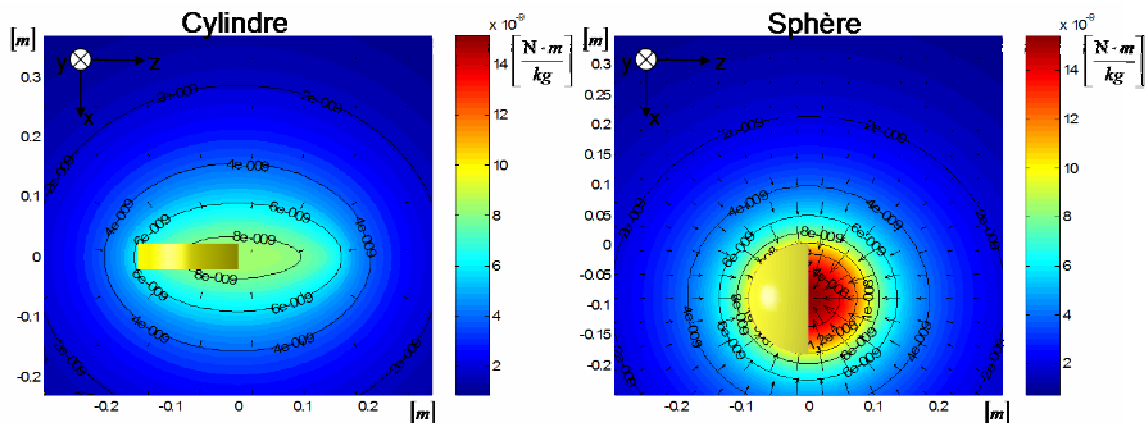


Figure 5-9 : Potentiel gravitationnel et vecteurs gradients générés respectivement par une masse cylindrique et une masse sphérique équivalente (dont seules les moitiés gauches sont visibles).

Y figurent également les vecteurs gradients de potentiels correspondant au champ d'accélération gravitationnel généré par chacune des masses attractives considérées.

La Figure 5-10 représente la projection du champ d'accélération gravitationnel sur l'axe x du repère orthonormé (correspondant au degré de liberté de mouvement de la masse pendulaire) pour la masse cylindrique (graphique de gauche) et la masse sphérique équivalente (graphique de droite).

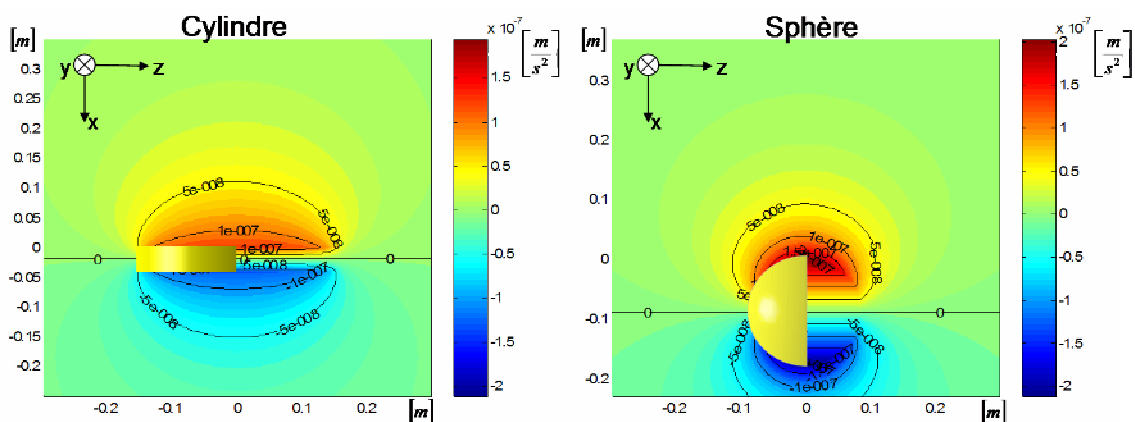


Figure 5-10 : Composante X du champ d'accélération gravitationnel générée respectivement par une masse cylindrique et d'une masse sphérique équivalente (dont seules les moitiés gauches sont visibles sur le dessin).

Ces champs scalaires représentent la composante x de l'accélération que subirait une masse ponctuelle de 1kg en un point donné du champ.

Nous observons que le champ généré par la masse cylindrique est mieux réparti spatialement que celui généré par la masse sphérique. La position de la masse pendulaire subissant ce champ est donc moins critique. Cette remarque se vérifie d'autant mieux que le diamètre de la masse attractive est important. En contre partie, l'étalement spatial du champ induit une diminution de ses valeurs maximales. Au-delà

d'un certain degré d'aplatissement de la masse attractive cylindrique, les forces induites sur la masse pendulaire deviennent plus faibles que dans le cas de masses sphériques équivalentes.

Observons que l'amplitude du champ d'accélération gravitationnel généré par chacune de nos masses attractives est de l'ordre de 10^{-7} m/s^2 (Figure 5-10).

Rappelons que les masses pendulaires subissent également en parallèle le champ d'accélération de pesanteur local, qui est de l'ordre de $9,81 \text{ m/s}^2$, et les accélérations liées au bruit sismique environnant dont l'amplitude RMS de la composante verticale est de l'ordre de 10^{-8} m/s^2 dans la bande de fréquence de 1 à 10 Hz.

Ainsi l'amplitude du champ générant les forces gravitationnelles est extrêmement tenue par rapport aux effets des champs d'accélération parasites. A titre de comparaison, une voiture accélérant à 10^{-7} m/s^2 mettrait 9 ans pour passer de 0 à 100 km/h.

5.3.2 Force gravitationnelle agissant entre chaque paire de masses cylindriques

Nous souhaitons déterminer l'évolution de la force gravitationnelle agissant entre chaque paire de masses en fonction de leurs écarts de positions relatives dans les trois directions du repère cartésien.

La Figure 5-11 illustre ces évolutions pour une des paires de masses cylindriques de notre dispositif expérimental et pour une paire de masses sphériques équivalentes.

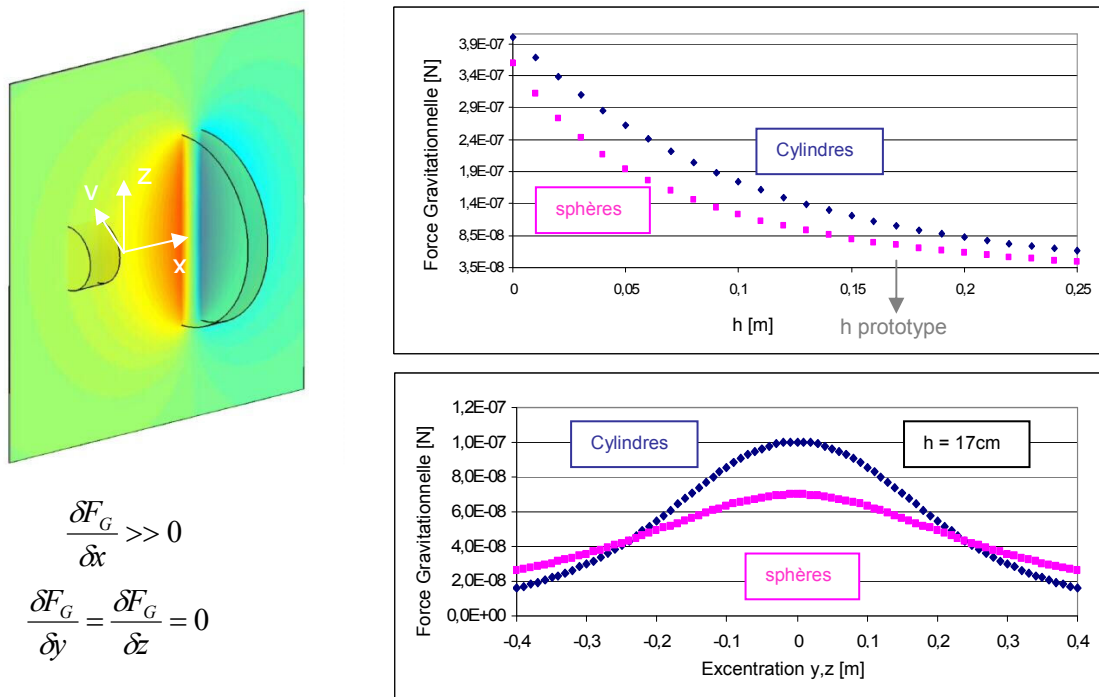


Figure 5-11 : Amplitude de la composante x de la force gravitationnelle agissant entre une des paires de masses cylindriques du dispositif expérimental, ainsi que pour une paire de masses sphériques équivalentes en fonction de leurs positions relatives

La position coaxiale entre les deux masses cylindriques correspond à un maximum d'amplitude de force gravitationnelle. La sensibilité de la force gravitationnelle aux erreurs d'excentration (composantes y et z du repère cartésien) est donc nulle pour cette position.

Il n'en est pas de même en ce qui concerne la sensibilité de la force gravitationnelle à la distance h séparant les paires de masses.

La Figure 5-12 donne l'erreur exprimée en ppm sur la valeur de la force gravitationnelle pour un écart de 1mm sur la valeur de la distance h séparant les masses cylindriques et sphériques équivalentes.

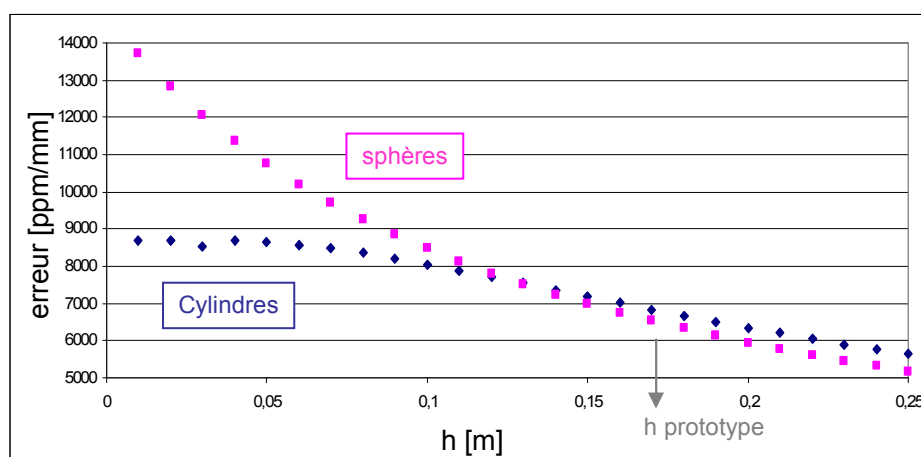


Figure 5-12 : Erreur exprimée en ppm sur la valeur de la force gravitationnelle pour un écart de 1mm sur la valeur de la distance h séparant les masses cylindriques et sphériques équivalentes.

Conformément à ce que suggérait la Figure 5-10, la géométrie de nos masses attractives cylindriques permet, pour des valeurs de h inférieures à 10 cm, d'obtenir des erreurs de positionnement plus faibles que pour des masses sphériques équivalentes, tout en permettant d'appliquer des forces gravitationnelles d'amplitude plus élevée.

Nous montrons en annexe 10.6.5, que l'utilisation de masses attractives de géométries annulaires permet de rendre la sensibilité de la force gravitationnelle nulle aux erreurs de position relative entre les deux masses, tout en conservant une amplitude élevée sur la valeur de la force gravitationnelle appliquée.

Le Tableau 5-3 résume les erreurs faites sur la valeur de l'amplitude de la force gravitationnelle appliquée, pour une variation de 1 mm de la position relative entre les deux masses, pour les trois directions du repère cartésien.

	Erreurs de position relative	Erreurs sur F_G (masses cylindriques) [ppm]	Erreurs sur F_G (masses sphériques) [ppm]
Positions relatives	$\Delta x = 1mm$	6848	6536
	$\Delta y = \Delta z = 1mm$	20	11

Tableau 5-3 : Erreur sur la valeur de la force gravitationnelle appliquée, en fonction des écarts de position relative entre les deux masses, pour les trois directions du repère cartésien

Nous observons que l'écartement h élevé, entre les masses cylindriques, imposé par la géométrie de la balance, ne permet pas d'exploiter les propriétés d'homogénéité du champ gravitationnel aux abords du cylindre attracteur.

Les amplitudes de la force gravitationnelle agissant entre les paires de masses cylindriques et sphériques sont données respectivement par les équations (5-7) et (5-8).

$$(F_G)_{\text{Cylindres}} = 9,866 \cdot 10^{-8} \quad [N] \quad (5-7)$$

$$(F_G)_{\text{Sphères}} = 6,836 \cdot 10^{-8} \quad [N] \quad (5-8)$$

La valeur de G utilisée pour les calculs est $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$.

Nous avons pu établir analytiquement à l'annexe 10.6.2 la valeur de la force gravitationnelle s'exerçant entre l'une de nos masses attractives cylindriques et une masse ponctuelle située le long de son axe de symétrie équivalente à l'une de nos masses pendulaires cylindriques.

La valeur de la force déduite de ce modèle simplifiée vaut $9,970 \cdot 10^{-8} \text{ N}$, soit un écart de 1 % par rapport à la valeur trouvée à l'équation (5-7).

Le champ gravitationnel dans lequel baigne la masse m_1 étant relativement homogène, ce calcul analytique permet d'approcher avec une bonne précision la valeur établie à l'équation (5-7) et permet de s'assurer que l'écriture de notre algorithme d'intégration par barres ainsi que les paramètres utilisés sont bien corrects.

Au final, les erreurs de position relatives aux masses cylindriques utilisées sont plus élevées de 5 % par rapport à des masses sphériques équivalentes. En revanche, l'amplitude de la force gravitationnelle générée par les masses cylindriques est supérieure de 40 % à celle générée par les masses sphériques équivalentes, du fait de la distance plus faible entre les centres de masse.

5.3.3 Echelon de force gravitationnelle agissant entre chaque paire de masses cylindriques

Nous étudions en pratique des échelons de force gravitationnelle appliqués à la masse pendulaire, générés par les deux positions successives p et p' de la masse attractive de part et d'autre de la masse pendulaire (Figure 5-13).

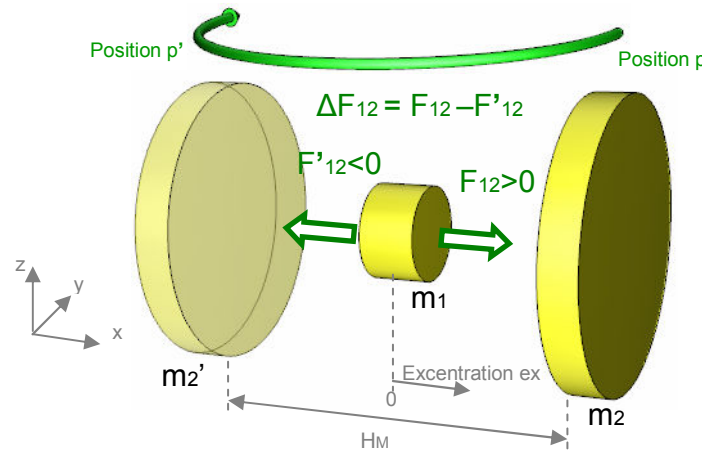


Figure 5-13 : Conventions utilisées pour le système de coordonnées, illustrées ici avec la paire de masses cylindriques inférieures

avec :

F_{12} : La force agissant sur la masse pendulaire m_1 lorsque la masse attractive m_2 est en position p .

F'_{12} : La force agissant sur la masse pendulaire m_1 lorsque la masse attractive m_2 est en position p' .

ΔF_{12} : L'échelon de force gravitationnelle ΔF_G agissant sur la masse pendulaire m_1 lorsque la masse m_2 passe de la position p à la position p' .

ex : La valeur de l'excentration du bras pendulaire dans la direction des x positifs. Celle-ci est nulle lorsque le pendule est parfaitement centré par rapport aux masses attractives.

La Figure 5-14 exprime les valeurs de F_{12} , F'_{12} et ΔF_{12} en fonction de différentes valeurs d'excentration ex de la masse pendulaire.

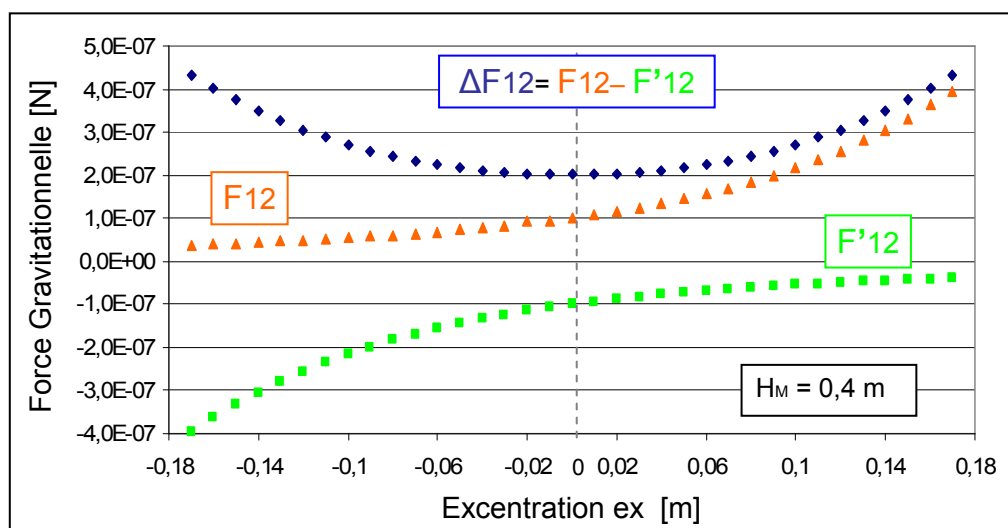


Figure 5-14 : Signal gravitationnel en fonction de l'excentration ex de la masse pendulaire.

La position centrée correspond à un minimum de l'échelon de force gravitationnelle perçu par la masse pendulaire. La sensibilité de la valeur de l'échelon de force gravitationnelle ΔF_{12} à la valeur d'excentration ex de la masse pendulaire est alors nulle pour cette position.

La valeur de l'échelon gravitationnel perçu par la masse pendulaire pour $ex = 0$ vaut :

$$\Delta F_G = 1,973 \cdot 10^{-7} \quad [N] \quad (5-9)$$

Les erreurs sur la valeur de l'échelon de force gravitationnelle ΔF_G appliqué sur la masse pendulaire en fonction des écarts de position de la masse pendulaire et de la masse attractive sont résumées au Tableau 5-4.

	Erreurs de position relative	Erreurs sur ΔF_G [ppm]
Masse pendulaire	$\Delta ex = 1mm$	26
	$\Delta y = \Delta z = 1mm$	20
Masse attractive	$\Delta H_M = 1mm$	3407

Tableau 5-4 : Erreur sur la valeur de l'échelon de force gravitationnelle appliqué sur la masse pendulaire en fonction des écarts de position de la masse pendulaire et de la masse attractive

Ainsi, la valeur de l'échelon de force gravitationnelle perçue par la masse pendulaire est peu dépendante de sa position par rapport à la masse attractive.

La contrainte dimensionnelle critique est reportée sur le paramètre H_M , définissant la composante x de l'écartement entre les surfaces en vis-à-vis des masses attractives.

Une autre manière de voir les choses est d'observer que la valeur de l'amplitude de la composante x du champ d'accélération gravitationnel résultant des deux positions successives de la masse attractive est beaucoup plus homogène au niveau de la position de la masse pendulaire (Figure 5-15).

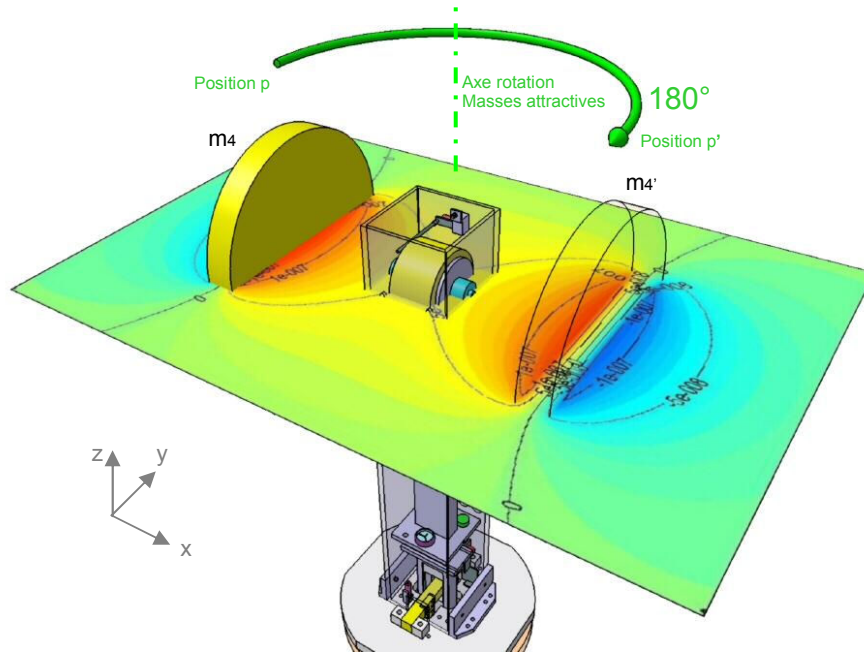


Figure 5-15 : Valeurs de la composante x du champ d'accélération gravitationnel résultant des deux positions successives p et p' de la masse attractive supérieure autour de la masse pendulaire supérieure.

5.4 Echelon de couple gravitationnel résultant de l'interaction entre les masses cylindriques en laiton

En pratique, notre balance ne mesure pas directement les forces gravitationnelles appliquées sur le bras pendulaire mais les moments de force induits sur le bras autour de l'axe de rotation du pendule.

Supposons que le bras pendulaire soit décomposé en une somme de masses ponctuelles élémentaires baignant dans le champ produit par les masses attractives cylindriques.

Le couple appliqué sur une masse élémentaire « i » du bras pendulaire peut être déduit en multipliant la composante x de la force gravitationnelle $(F_{ix})_i$ subie par celle-ci par la composante z_i de la distance entre cette masse élémentaire et l'axe de rotation du pendule.

Il suffit ensuite d'additionner la contribution des couples relatifs aux n masses élémentaires constituant le bras du pendule pour avoir la valeur du couple total Γ_G appliqué sur le bras pendulaire (5-10).

$$\Gamma_G = \sum_{i=1}^n (F_{ix})_i \cdot z_i \quad [N \cdot m] \quad (5-10)$$

L'origine du repère orthonormé est placée au niveau de l'axe de rotation du pendule. Nous définissons ainsi les bras de levier comme positifs pour les masses situées au dessus de l'axe de rotation et négatifs en dessous.

Ainsi une force définie positive dans le sens des x engendrera un couple positif si celle-ci est appliquée au dessus de l'axe de rotation.

Les moments de forces appliqués sont définis positifs s'ils engendrent une rotation anti-horaire du bras pendulaire.

Nous verrons au §5.6.2.1 comment appliquer le principe d'intégration par barres élémentaire au calcul de couples gravitationnels.

Dans notre cas de figure, le moment de force résultant de l'attraction entre deux masses cylindriques coaxiales (cylindres 1-2 et les cylindre 3-4) sera déduit directement en multipliant la composante x de la force gravitationnelle perçue par la masse pendulaire considérée par la composante z de la distance séparant l'axe de rotation du centre de masse de la masse cylindrique pendulaire.

Nous appliquerons également cette procédure au calcul des termes croisés (interaction entre les cylindres 1-3 et les cylindre 2-4) en notant que nous commettons une erreur en prenant la position du centre de masse de la masse pendulaire pour définir le bras de levier, du fait de l'asymétrie du champ perçue par celle-ci. Notons que cette erreur intervient sur quelques pour cent de la valeur du terme croisé qui représente lui-même quelques pour cent du terme direct.

La Figure 5-16 reprend les principales variables et conventions utilisées pour le calcul du couple gravitationnel total appliqué au bras pendulaire résultant de l'interaction entre les masses cylindriques en laiton.

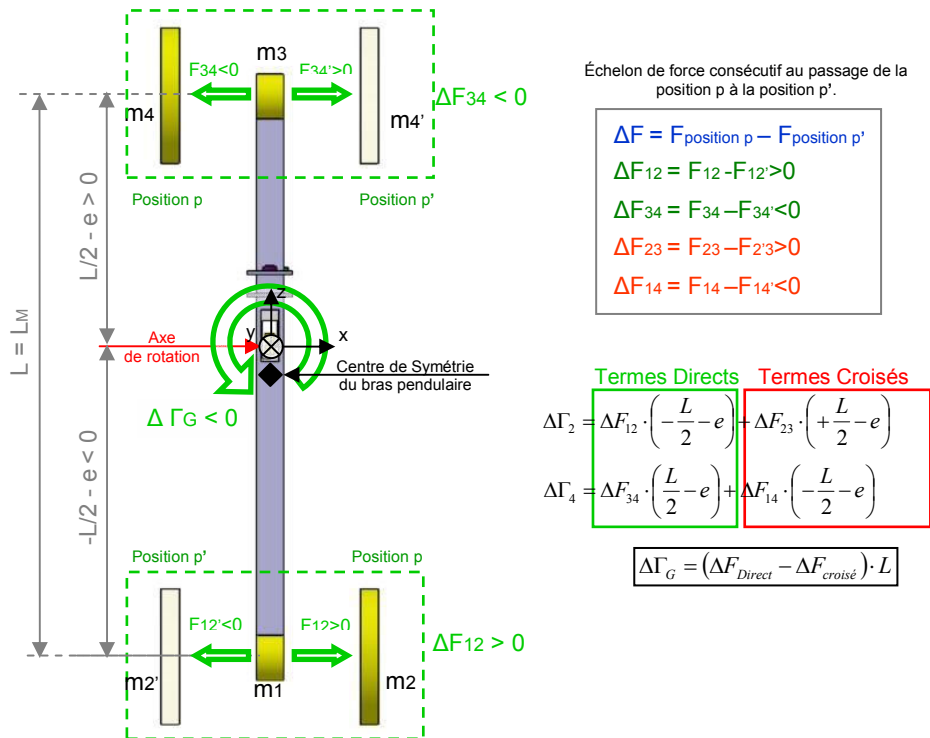


Figure 5-16 : Paramètres utilisés dans le calcul du couple gravitationnel résultant de l'interaction entre les masses cylindriques en laiton (Pour plus de lisibilité, la valeur de l'excentration du centre de masse pendulaire est accentuée sur la figure par rapport à la valeur réelle).

F_{Direct} et $F_{\text{Croisé}}$ représentent respectivement les forces agissant entre les masses cylindriques en vis-à-vis et les masses cylindriques situées de part et d'autre de l'axe de rotation.

Tenant compte des remarques précédentes, nous avons que :

L'échelon de couple appliqué par la masse attractive m_2 sur les deux masses pendulaires vaut:

$$\Delta\Gamma_2 = \Delta F_{12} \cdot \left(-\frac{L}{2} - e\right) + \Delta F_{23} \cdot \left(\frac{L}{2} - e\right) < 0 \quad (5-11)$$

L'échelon de couple appliqué par la masse attractive m_4 sur les deux masses pendulaires vaut.

$$\Delta\Gamma_4 = \Delta F_{34} \cdot \left(\frac{L}{2} - e\right) + \Delta F_{14} \cdot \left(-\frac{L}{2} - e\right) < 0 \quad (5-12)$$

En considérant que les paramètres des jeux de masses inférieures et supérieures soient identiques (Dimension, masse, disposition, masses coaxiales),
Nous pouvons poser :

$$\Delta F_{\text{Direct}} = \Delta F_{12} = -\Delta F_{34} \quad (5-13)$$

$$\Delta F_{\text{Croisé}} = \Delta F_{23} = -\Delta F_{14} \quad (5-14)$$

La force totale exercée sur le pendule étant nulle, le couple gravitationnel total est alors indépendant de la position e de l'axe de rotation.

$$\Delta\Gamma_G = \Delta\Gamma_2 + \Delta\Gamma_4 = (\Delta F_{\text{croisé}} - \Delta F_{\text{Direct}}) \cdot L < 0 \quad (5-15)$$

Etant donné que la disposition des masses attractives autour du bras pendulaire est supposée parfaitement symétrique, nous pouvons aussi écrire que:

$$|\Delta\Gamma_G| = 4 \cdot (F_{\text{croisé}} - F_{\text{Direct}}) \cdot \frac{L}{2} \quad (5-16)$$

Dans le cadre de notre dispositif expérimental, les valeurs des termes directs et croisés valent respectivement :

$$|F_{\text{Direct}}| = 9,866 \cdot 10^{-8} \quad [N] \quad (5-17)$$

$$|F_{\text{Croisé}}| = 7,231 \cdot 10^{-10} \quad [N] \quad (5-18)$$

La contribution du terme croisé induit une diminution de 0,73 % du couple gravitationnel total.

Ainsi, l'échelon de couple gravitationnel théorique perçu par le bras pendulaire inhérent à l'action des masses cylindriques vaut :

$$|\Delta\Gamma_G| = 4 \cdot 9,794 \cdot 10^{-8} \cdot 0,62 = 2,429 \cdot 10^{-7} \quad [N \cdot m] \quad (5-19)$$

Les erreurs sur la valeur de l'échelon de couple gravitationnel $\Delta\Gamma_G$ appliqué sur le bras pendulaire en fonction des erreurs de géométrie de l'actionneur gravitationnel sont résumées au Tableau 5-5.

	Δ Paramètre	Erreurs sur $\Delta\Gamma_G$ [ppm]
Position du Bras pendulaire	$\Delta x = 1\text{mm}$	26
	$\Delta y = \Delta z = 1\text{mm}$	20
Longueur du pendule	$\Delta L = 1\text{mm}$	800
Position des Masses attractives	$\Delta H_M = 1\text{mm}$	3407
	$\Delta L_M = 1\text{mm}$	≈ 10

Tableau 5-5 : Erreurs sur la valeur de l'échelon de couple gravitationnel appliqué au bras pendulaire en fonction des erreurs de géométrie de l'actionneur gravitationnel

Nous observons que la position du pendule par rapport aux masses attractives ne doit pas être contrainte avec précision.

Les dimensions critiques reposent essentiellement sur la longueur L du bras pendulaire et sur la valeur de l'écartement H_M entre les masses attractives.

Notons que la mesure de la longueur L du pendule est contrainte avec une précision de 1 mm tandis que la valeur de l'écartement entre les deux positions successives des masses attractives H_M est contrainte avec une précision de l'ordre du centimètre.

La précision sur la valeur de l'échelon de couple gravitationnel produit par les masses cylindriques est alors théoriquement supérieure au pour cent.

5.5 Contribution des supports des masses cylindriques pendulaires et attractives

À l'échelon de couple gravitationnel engendré par les masses cylindriques, il est nécessaire de tenir compte de la contribution des supports en aluminium de ces mêmes masses cylindriques.

Ceux-ci contribuent pour 10 % à la valeur de l'échelon gravitationnel total appliqué (5-20).

$$|\Delta\Gamma_G| = 2,698 \cdot 10^{-7} \quad [N \cdot m] \quad (5-20)$$

Le détail du poids des éléments intervenant dans la détermination de la valeur (5-20) est donné à l'annexe 10.3.

Afin de simplifier les calculs menant à la valeur (5-20), les supports des masses pendulaires ont été assimilés à des masses ponctuelles, tandis que seul l'effet du cadre en aluminium supportant les masses attractives a été considéré.

En outre, l'absence de symétrie entre les masses attractives et le profilé du bras pendulaire nécessite de calculer explicitement le couple perçu par chaque masse élémentaire le constituant. Nous décrirons aux paragraphes suivants, l'adaptation de nos algorithmes d'intégration par barre au calcul des couples gravitationnels.

Notons enfin que la modélisation de la contribution des différents éléments de géométrie complexe utilisés pour le support des masses cylindriques fait que la précision relative obtenue sur la valeur de l'échelon de couple (5-20) n'excède probablement pas le pour cent.

5.6 Géométries alternatives

Nous proposons une géométrie simplifiée du bras pendulaire permettant de diminuer d'autant les indéterminations géométriques intervenant dans le calcul des couples gravitationnels. Nous montrerons comment adapter nos programmes à ce type de géométrie.

Nous proposerons également une géométrie de masse attractive associée, permettant d'assigner les principales contraintes dimensionnelles aux éléments géométriques les plus stables.

5.6.1 Masse pendulaire autoporteuse

Nous proposons de simplifier la géométrie du bras pendulaire afin de diminuer d'autant les indéterminations intervenant dans le calcul des couples gravitationnels.

Nous proposons d'utiliser une masse pendulaire constituée par un seul et même cylindre vertical comme décrit à la Figure 5-17. Nous parlerons d'une masse pendulaire autoporteuse dans le sens où elle constitue son propre support par rapport à l'axe de rotation.

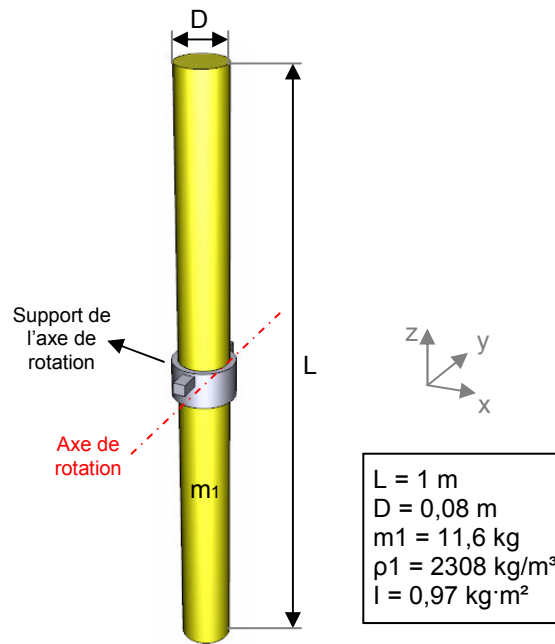


Figure 5-17 : Proposition de masse pendulaire autoporteuse

L'utilisation d'un matériau de masse volumique modérée permet, à charge égale pour la suspension, d'augmenter la longueur du bras pendulaire et, par conséquent, la valeur des couples gravitationnels résultants.

Cette configuration permet en outre, d'augmenter de manière significative la valeur de la rigidité mécanique du bras pendulaire permettant de reprendre les efforts inertiels induits entre autres par l'activité microsismique.

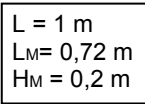
Une expérience de principe peut ainsi rapidement être mise en œuvre en utilisant un bras pendulaire massif en aluminium (2700 kg/m^3) qui possède en plus l'avantage d'offrir une faible valeur de susceptibilité magnétique ($2,3 \cdot 10^{-5}$).

Notons, en guise de perspective à plus long terme, que plusieurs industriels [113] fournissent des lingots cylindriques de silicium monocristallin de qualité solaire pour l'élaboration de cellules photovoltaïques. Ces lingots d'une masse volumique de 2330 kg/m^3 et de faible valeur de coefficient de dilatation thermique ont la particularité d'être purs à 99,9999 %. Cette dernière caractéristique permet de rejeter les effets d'inhomogénéité du bras pendulaire au-delà du ppm.

Nous verrons, au final, que seule la connaissance précise de la longueur du bras pendulaire est nécessaire pour le calcul du couple gravitationnel.

5.6.2 Couple généré par une paire de masses attractives cylindriques

Reprenons les paires de masses attractives cylindriques utilisées sur notre dispositif expérimental afin d'induire des échelons de couples gravitationnels sur notre bras pendulaire autoporteur (Figure 5-18)



De même, le couple gravitationnel exercé sur le bras pendulaire par la masse attractive m_4 a pour expression :

$$\Gamma_4 = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{a_{z4} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{a_{y4} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{a_{x1} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{a_{y1} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int \int \frac{(x_4 - x_1) \cdot z_1}{[(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dy_1 \cdot dy_4 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_4 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_4 \quad [N \cdot m] \quad (5-22)$$

Les deux masses attractives étant disposées symétriquement autour du centre de masse pendulaire, nous avons que la force totale appliquée par celles-ci sur le pendule est nulle.

Par un raisonnement analogue à ce que nous avons vu au §5.4, nous pouvons montrer que l'échelon de couple gravitationnel total perçu par le bras pendulaire est indépendant de la position de l'axe de rotation.

En plaçant notre repère orthonormé au niveau du centre de masse du bras pendulaire, nous avons que l'échelon de couple gravitationnel total perçu par le bras pendulaire a pour expression :

$$\Delta\Gamma_G = \Delta\Gamma_2 + \Delta\Gamma_4 = 4 \cdot G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{a_{z2} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{a_{y2} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{a_{x1} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{a_{y1} = -\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int \int \frac{(x_2 - x_1) \cdot z_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \quad [N \cdot m] \quad (5-23)$$

Après intégration, nous avons :

$$\Delta\Gamma_G = 4 \cdot G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{z_2 = a_{z2}}^{b_{z2}} \sum_{z_1 = -L/2}^{L/2} \sum_{x_2 = a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{x_1 = a_{x1}}^{b_{x1}} \frac{(x_2 - x_1) \cdot z_1}{((z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)} \cdot \left[\frac{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (a_{y2} - b_{y1})^2} + (x_2 - x_1)^2}{-\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (a_{y2} - a_{y1})^2} + (x_2 - x_1)^2} + \frac{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (b_{y2} - a_{y1})^2} + (x_2 - x_1)^2}{-\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (b_{y2} - b_{y1})^2} + (x_2 - x_1)^2} \right] \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \quad [N \cdot m] \quad (5-24)$$

Ces deux relations peuvent être écrites aussi bien en fonction de la masse attractive m_2 que m_4 .

Nous montrerons à l'annexe 10.6.6 une formule équivalente à la formule (5-24) utilisant un pavage par barres verticales.

L'amplitude de l'échelon de couple gravitationnel générée dans la configuration présentée à la Figure 5-18 calculée par la formule (5-24) vaut alors :

$$\Delta\Gamma_G = 2,41 \cdot 10^{-7} \quad [N \cdot m] \quad (5-25)$$

La valeur de l'échelon de couple est ainsi du même ordre de grandeur que sur notre dispositif expérimental pour une longueur de bras pendulaire L plus faible ainsi qu'un écartement H_M plus faible des masses attractives.

Les erreurs sur la valeur de l'échelon de couple gravitationnel $\Delta\Gamma_G$ appliqué au bras pendulaire en fonction des erreurs de géométrie de l'actionneur gravitationnel sont résumées au Tableau 5-6.

	Δ Paramètre	Erreurs sur $\Delta\Gamma_G$ [ppm]
Position du bras pendulaire	$\Delta ex = 1mm$	≈ 0
	$\Delta y = 1mm$	≈ 0
	$\Delta z = 1mm$	≈ 0
Géométrie du bras pendulaire	$\Delta R = 1mm$	300
	$\Delta L = 1mm$	1000
Position des masses attractives	$\Delta H_M = 1mm$	> 1000
	$\Delta L_M = 1mm$	≈ 0

Tableau 5-6 : Erreurs sur la valeur de l'échelon de couple gravitationnel appliqué au bras pendulaire en fonction des erreurs de géométrie de l'actionneur gravitationnel

Les dimensions critiques sont alors limitées à la valeur de la longueur du bras pendulaire et à la valeur de l'écartement H_M entre les deux positions successives prises par les masses attractives.

La valeur de l'échelon de couple gravitationnel obtenu est globalement plus faible qu'avec la géométrie actuelle mais celle-ci est largement compensée par les gains obtenus sur la précision des paramètres caractérisant le bras pendulaire.

5.6.3 Système à deux paires de masses attractives cylindriques

La détermination de l'écartement H_M entre les masses attractives peut être difficile à établir en pratique.

Nous proposons de générer les échelons de couples gravitationnels par l'intermédiaire de deux paires de masses cylindriques, dont l'axe de symétrie est parallèle à celui du bras pendulaire autoporteur (Figure 5-19).

La géométrie et les caractéristiques de chacune des masses attractives cylindriques utilisées sont similaires à celles utilisées sur l'expérience dédiée à la mesure de G menées au JILA autour d'un gravimètre absolu [84], [85].

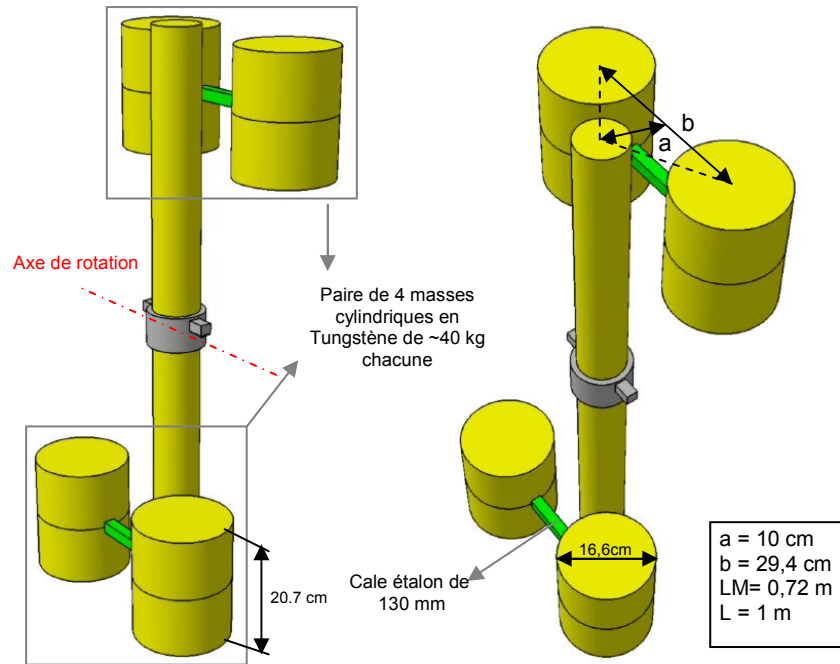


Figure 5-19 : Bras pendulaire autoporteur entouré de paires de masses cylindriques. L'écartement entre chaque paire de masses attractives est assuré par un système de cales étalon.

L'échelon de couple gravitationnel appliqué sur le bras pendulaire est de l'ordre de :

$$\Delta\Gamma_G \approx 7 \cdot 10^{-7} \quad [N \cdot m] \quad (5-26)$$

Les paires de masses attractives cylindriques sont disposées de telle sorte que l'amplitude du couple gravitationnel induit sur le bras pendulaire corresponde à un extremum pour les trois directions du repère cartésien.

La sensibilité du couple gravitationnel aux différentes erreurs de position est alors théoriquement nulle pour cette position.

Seul le paramètre b (par analogie avec le paramètre des masses triangulées donné à l'annexe 10.6.4) définissant l'écartement entre les cylindres de chaque paire de masses doit être connu avec précision. La valeur de l'écartement b peut par exemple être contraint par l'intermédiaire de cales étalon (en vert sur la Figure 5-19).

Remarquons enfin qu'il est possible d'éliminer les effets des éventuels gradients de densité le long du diamètre des masses cylindriques attractives en mesurant le couple appliqué pour différentes positions angulaires des masses attractives autour de leur axe de symétrie [10].

Au final, seules subsistent deux contraintes dimensionnelles critiques localisées sur des éléments stables et accessibles du point de vue de la métrologie : la longueur du bras pendulaire L et l'écartement b entre les cylindres constituant chaque paire de masses attractives.

5.7 Conclusions

Nous avons pu développer un outil très général, permettant le calcul de champ, de forces et de moments de forces gravitationnelles pour des géométries quelconques des masses.

L'application de ces algorithmes nous a permis de déterminer l'amplitude de l'échelon gravitationnel produit par notre actionneur avec une précision de l'ordre de quelques pour cent. Celle-ci est principalement limitée par les indéterminations relatives à la mesure de la géométrie complexe des supports des masses pendulaires et attractives.

Nous proposons de travailler à terme avec une géométrie mieux adaptée au pendule astatisé basée sur un bras pendulaire cylindrique d'un seul tenant et de deux paires de masses cylindriques attractives. Cette géométrie permet de reporter les contraintes dimensionnelles critiques à deux paramètres dimensionnels stables et accessibles du point de vue de la métrologie : La longueur du bras pendulaire et l'écartement des cylindres constituant chaque paire de masses attractives.

6 Actionneur électrostatique

Nous présentons dans ce chapitre les principales caractéristiques de l'actionneur électrostatique utilisé sur notre dispositif expérimental ainsi que la procédure utilisée pour contraindre son facteur d'étalonnage.

6.1 Description de l'actionneur électrostatique

Les électrodes de notre actionneur électrostatique sont constituées de deux disques disposés de part et d'autre de la masse pendulaire supérieure. Cette dernière constitue l'électrode centrale. Elle est connectée au potentiel de terre par l'intermédiaire du pivot à lames flexibles du pendule (Figure 6-1).

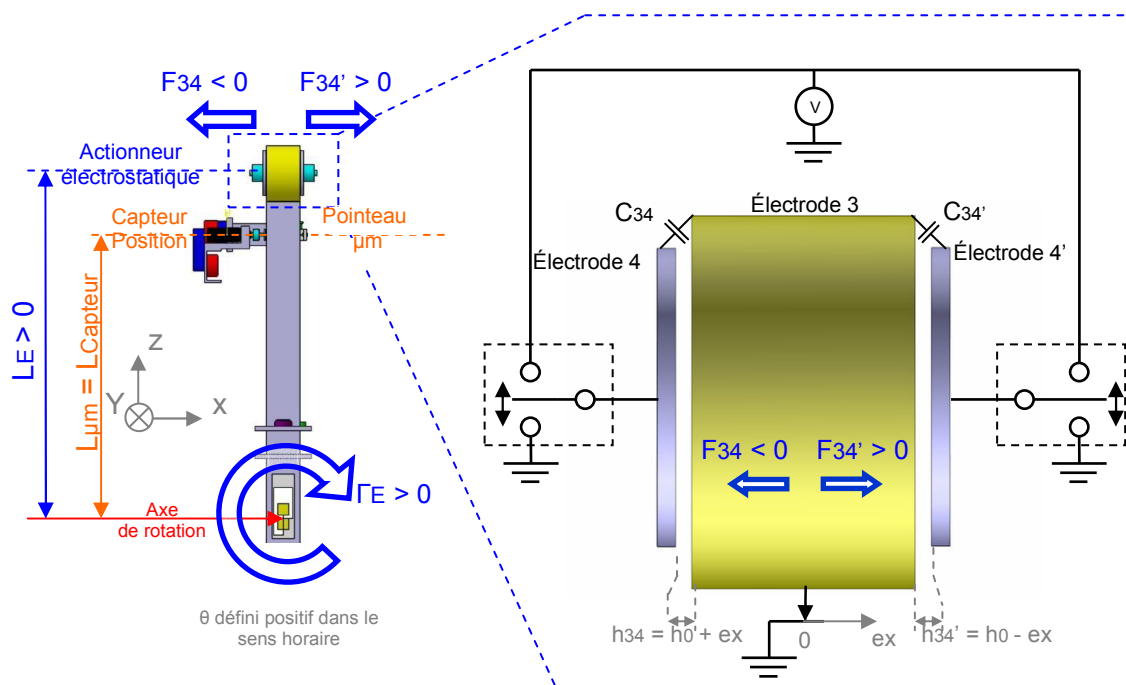


Figure 6-1 : Principales caractéristiques de l'actionneur électrostatique (pour plus de lisibilité, la valeur de l'entrefer des électrodes est accentuée par rapport à la réalité)

Les principales caractéristiques géométriques de l'actionneur électrostatique sont reprises au Tableau 6-1

	Rayon [mm]	Epaisseur [mm]	entrefer h_0 [mm]	L_E [mm]
Electrode 3	50	60	$1 \pm 0,1$	$\sim 616,6$
Electrodes 4 et 4'	40	5		

Tableau 6-1 : Principales caractéristiques géométriques de l'actionneur électrostatique.

Une force électrostatique attractive F_{34} (resp. F'_{34}) apparaît entre la masse pendulaire et l'électrode C_4 (resp. C'_4) lorsque celle-ci est connectée au potentiel V de l'actionneur électrostatique.

La force F_{34} (resp. F'_{34}) induit un moment de force Γ_{34} (resp. Γ'_{34}) autour de l'axe de rotation du pendule.

Les conventions de signe sont les mêmes que celles utilisées pour l'actionneur gravitationnel. Les forces électrostatiques sont définies comme positives si elles tendent à déplacer la masse sur laquelle elles s'appliquent dans le sens des x positifs et les couples appliqués au bras pendulaire sont définis positifs lorsqu'ils tendent à le faire tourner dans le sens horaire.

Notons que le potentiel V d'alimentation de l'actionneur électrostatique a été initialement réglé à 100 V puis abaissé à 88,8 V le 17 octobre 2007.

6.1.1 Commande des électrodes par Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI)

Les interrupteurs assurant la connexion des électrodes au potentiel de terre ou au potentiel V de l'actionneur électrostatique sont réalisés à partir de transistors MOS montés en série avec une résistance de charge de 39 k Ω (Figure 6-2).

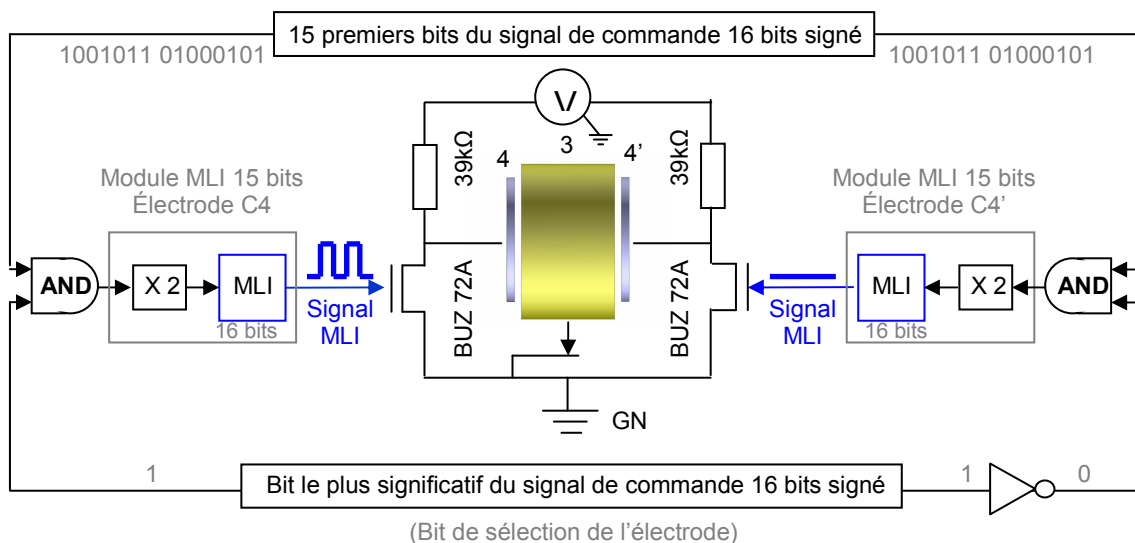


Figure 6-2 : Schéma de commande de l'actionneur électrostatique par modulation de largeur d'impulsion.

Chaque interrupteur est commandé par un signal Modulé en Largeur d'Impulsion (MLI).

Ce type de commande a pour action de charger l'électrode considérée au potentiel V de l'actionneur électrostatique à période fixe T_{MLI} pendant un intervalle de temps Δt compris entre 0 et T_{MLI} . La tension appliquée à l'électrode est nulle le reste du temps.

La fraction du temps pendant laquelle la tension V de l'actionneur électrostatique est appliquée à l'électrode considérée est définie par le rapport cyclique D de la MLI (6-1).

$$D = \frac{\Delta t}{T_{MLI}} \quad (6-1)$$

Nous supposons que la période de travail T_{MLI} de la MLI est suffisamment petite devant la valeur de la période d'oscillation propre T du pendule, de sorte que la force moyenne appliquée sur le bras pendulaire puisse être considérée comme constante.

Les signaux MLI actionnant les interrupteurs des électrodes sont synthétisés par deux modules MLI intégrés au microcontrôleur de la balance [103]. Leur fréquence de travail est fixée à 256 Hz avec une largeur d'impulsion codée sur 16 bits.

Les deux modules MLI sont pilotés par un même signal de commande $S_{commande}$ codé sur une variable de 16 bits signée (de -32768 à +32767, le bit le plus significatif définissant le signe du signal de 15 bits restant). Selon le signe du signal de commande, celui-ci est entièrement appliqué à l'une des deux électrodes, tandis que l'autre reste au potentiel de terre. Le signal de commande est préalablement multiplié par un facteur deux afin de couvrir toute la plage de fonctionnement des deux modules MLI 16 bits utilisés (Figure 6-2).

La valeur du rapport cyclique D du module sélectionné en fonction du signal de commande vaut alors :

$$D = \frac{Signal_{Commande}}{2^{15}} \quad (6-2)$$

La valeur du couple électrostatique généré par l'actionneur en fonction de la paire d'électrode actionnée est donnée par (6-3) et (6-4).

$$\Gamma_E = D \cdot \Gamma_{34} < 0 \quad \text{pour} \quad Signal_{Commande} < 0 \quad (6-3)$$

$$\Gamma_E = D \cdot \Gamma_{34}' > 0 \quad \text{pour} \quad Signal_{Commande} > 0 \quad (6-4)$$

Ce montage a l'inconvénient de présenter une discontinuité du gain de l'actionneur au passage par zéro de la valeur du rapport cyclique, du fait des asymétries résiduelles des géométries des deux paires d'électrodes de l'actionneur ($\Gamma_{34} \neq \Gamma_{34}'$).

Ce point de discontinuité peut être évité en appliquant un signal d'offset au signal de commande de sorte que seule une des deux paires d'électrodes travaille.

Cela revient, en déflexion libre, à appliquer un couple électrostatique constant sur le bras du pendule et, en mode asservi, à choisir une consigne de position suffisamment éloignée du point de fonctionnement en l'absence d'asservissement.

Cette manière de procéder ne nécessite d'étalonner qu'une seule des deux paires d'électrodes. Dans le cas de notre pendule nous nous limiterons à l'étalonnage de la paire d'électrode C_{34} .

Nous présenterons en fin de chapitre, un autre montage, dit complémentaire, permettant d'éliminer les effets du point de discontinuité.

Le Tableau 6-2 illustre les différentes constantes de temps intervenant dans notre actionneur :

Actionneur électrostatique		Signal de commande MLI	
R = 39 kΩ	$\tau_{\text{Actionneur}} = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ [s]}$	MLI 15 bits	$T_{\text{Commande}} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ [s/bit]}$
C ≈ 80 pF		256 Hz	

Tableau 6-2 : Constantes de temps relatives à notre actionneur électrostatique

Nous observons que la constante de temps de charge de l'actionneur au travers de la résistance de 39 kΩ est vingt six fois plus grande que la largeur temporelle d'une impulsion élémentaire du signal de commande MLI (Le temps de décharge étant considéré comme quasiment instantané).

Le facteur de forme du signal MLI est alors biaisé pour des valeurs de rapport cyclique proches des valeurs de fond d'échelle. Le fait d'appliquer un signal d'offset au signal de commande nous permet d'éviter ces points de fonctionnement.

Nous donnons à l'annexe 10.12 un exemple de forçage électrostatique appliqué en déflexion libre avec et sans valeur d'offset.

Notons que les électrodes entourant la masse pendulaire inférieure ne seront pas utilisées dans le cadre des expériences présentées dans ce travail. Elles resteront connectées au potentiel de masse de la balance.

6.2 Couples électrostatiques et coénergie électrique

La valeur de la coénergie électrique stockée dans un condensateur de capacité C, chargé sous un potentiel V est donnée par:

$$W_{ce} = \frac{C \cdot V^2}{2} \quad [J] \quad (6-5)$$

Par application du principe des travaux virtuels [3], [4], nous pouvons exprimer la force s'exerçant entre les électrodes d'un condensateur comme égale à la dérivée de la coénergie électrique.

En posant que les couples électrostatiques sont définis comme positifs lorsqu'ils tendent à faire tourner le bras pendulaire dans le sens des angles θ positifs, nous avons:

$$\Gamma_E = \frac{\delta W_{ce}}{\delta \theta} \quad [N \cdot m] \quad (6-6)$$

Ainsi, tenant compte des deux équations précédentes, le couple électrostatique appliqué par le jeu d'électrode 34 sur la masse 3 est donné par :

$$\Gamma_{34} = \frac{\delta C_{34}}{\delta \theta} \cdot \frac{V_4^2}{2} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\delta C_{34}}{\delta \theta} < 0 \quad (6-7)$$

De même, le couple électrostatique appliqué par le jeu d'électrode 34' sur la masse 3 est donné par :

$$\Gamma_{34'} = \frac{\delta C_{34'}}{\delta \theta} \cdot \frac{V_{4'}^2}{2} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\delta C_{34'}}{\delta \theta} > 0 \quad (6-8)$$

Ainsi, la valeur du couple électrostatique appliqué peut être établie à partir d'une mesure de tension et de la détermination de la variation de la capacité des électrodes impliquées en fonction de l'angle θ , au point de fonctionnement considéré.

Insistons sur le fait que la valeur absolue de la capacité importe peu. Seul le rapport $dC/d\theta$ est à considérer, ce qui simplifie considérablement les données du problème.

6.2.1 Modèle simple des capacités des électrodes de l'actionneur électrostatique

La modélisation de la capacité de chaque paire d'électrodes de l'actionneur électrostatique peut être évaluée par un modèle similaire à celui développé pour le capteur de position à l'équation (4-17) du §4.4.

Dans le cas de la paire d'électrode C_{34} , nous avons :

$$C_{34} = C_m + C_0 = \frac{\varepsilon \cdot S}{(h_0 + ex)} + C_0 \quad [Farad] \quad (6-9)$$

avec :

- C_{34} la valeur de la capacité constituée par la paire d'électrodes 3 et 4, dépendante de la position du bras pendulaire.
- C_0 la valeur totale des capacités parasites avec le carénage du pendule et l'entrée de l'interface électronique.
- h_0 la valeur de l'entrefer de l'électrode C_{34} lorsque le pendule est parfaitement centré par rapport au châssis.
- ex , la variation de la longueur moyenne de l'entrefer consécutive à une petite excursion angulaire θ autour de la position de référence h_0 (6-10).

$$ex = L_E \cdot \theta \quad [m] \quad (6-10)$$

En dérivant l'expression (6-9) en fonction de l'angle θ , nous avons :

$$\frac{dC_{34}}{d\theta} = \frac{\varepsilon \cdot S}{(h_0 + (L_E \cdot \theta))^2} \cdot L_E \quad [Farad / rad] \quad (6-11)$$

Nous observons que la valeur du coefficient $dC_{34}/d\theta$ est dépendante du point de fonctionnement θ .

Sa valeur pour la position $\theta = 0$ est donnée par (6-11).

$$\left(\frac{dC_{34}}{d\theta} \right)_{\theta=0} = \frac{\varepsilon \cdot S}{h_0^2} \cdot L_E \quad [Farad / rad] \quad (6-12)$$

La précision relative accessible sur la valeur du coefficient $dC_{34}/d\theta$ est donnée par l'équation (6-13).

$$\frac{\Delta(dC_{34}/d\theta)}{dC_{34}/d\theta} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta L_E}{L_E} + 2 \cdot \frac{\Delta h_0}{h_0} \quad (6-13)$$

Celle-ci est principalement limitée par la précision relative sur la valeur de l'entrefer h_0 . Elle n'excède pas le dixième de millimètre sur la valeur supposée de 1 mm (Tableau 6-1).

La précision relative sur la valeur du coefficient $dC_{34}/d\theta$ déduite de la géométrie des électrodes n'atteint donc pas $\pm 20 \%$ dans notre cas.

Il n'est pas possible à ce stade de déduire la valeur du coefficient $dC_{34}/d\theta$ avec plus de précision à partir de la seule connaissance des paramètres géométriques des électrodes de notre actionneur électrostatique.

Notons que la formule (6-9) est une formule approchée de la valeur de la capacité de notre actionneur électrostatique ne tenant pas compte des effets de bords. La référence [41] présente un modèle des électrodes permettant de rendre compte avec une bonne précision des effets de bords mesurés sur notre actionneur électrostatique lors de l'expérience préliminaire présentée à l'annexe 10.19.

6.3 Procédure d'étalonnage de l'actionneur électrostatique

Les expériences reposant sur les étalons de couple électrostatique déterminent généralement les différents coefficients $dC/d\theta$ des électrodes de leur actionneur par une approche dite globale. Celle-ci consiste à mesurer les valeurs des capacités des différentes électrodes de l'actionneur électrostatique (par le biais d'un pont capacitif) en fonction de la valeur de la position angulaire du fléau de la balance, [74], [91], [92] sans se préoccuper des caractéristiques exactes de la géométrie des électrodes.

Cette approche permet d'atteindre des degrés de précision de l'ordre de quelques dizaines de ppm sur la valeur du coefficient $dC/d\theta$ dans le cas de l'expérience menée au BIPM [74].

Dans notre cas de figure, la mesure des capacités des électrodes de notre actionneur électrostatique en fonction de l'angle θ s'opère en parallèle de la procédure d'étalonnage du capteur de position par micromètre motorisé développé au §4.4.2.

La Figure 6-3 illustre les dispositions des électrodes de l'actionneur et du capteur de position ainsi que du pointeau du micromètre étalon au sein du carénage supérieur de la balance

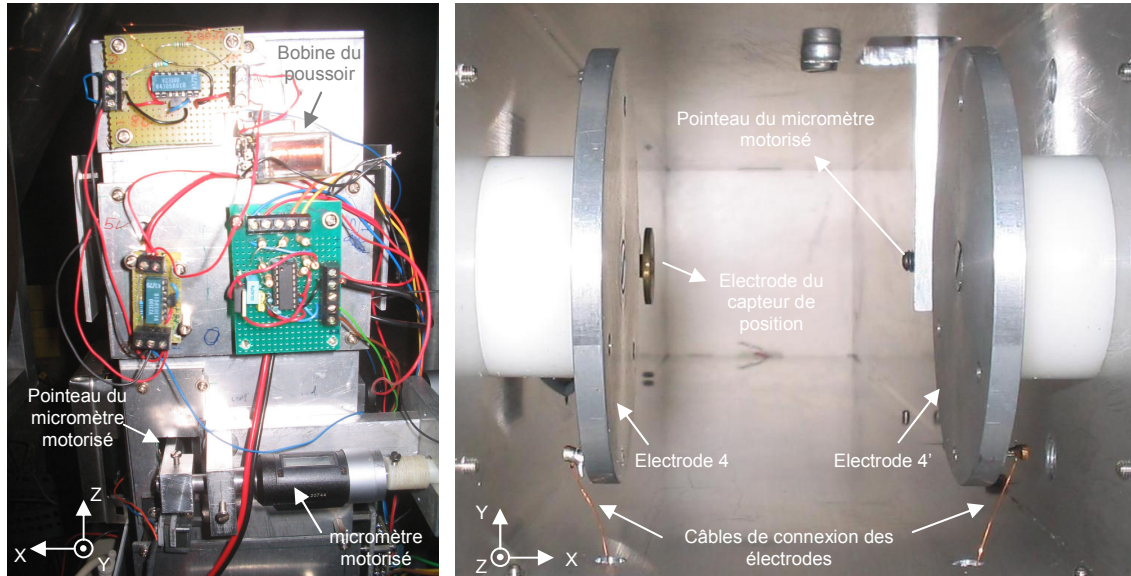


Figure 6-3 : Disposition du pointeau du micromètre motorisé à l'intérieur et à l'extérieur du carénage supérieur du pendule (le bras pendulaire est absent de l'image de droite)

Nous décrivons dans ce paragraphe le montage et les procédures utilisées pour les mesures des capacités des électrodes de l'actionneur électrostatique ainsi que les courbes d'étalonnage ayant mené au coefficient $dC/d\theta$ de l'une des deux électrodes de notre actionneur électrostatique.

6.3.1 Mesure de capacités par oscillateur à relaxation RC

Nous avons équipé chacune des paires d'électrodes C_{34} et $C_{34'}$ de notre actionneur, d'un capacimètre dont l'électronique est basée sur un oscillateur RC similaire à celui utilisé pour le capteur de position angulaire présenté au §4.4.

Les résistances de charge R et R' des oscillateurs 4 et 4' valent respectivement 150 k Ω et 200 k Ω .

Ces deux oscillateurs sont montés directement sur la carte de commande de l'actionneur électrostatique (Figure 6-4). Ils sont amovibles et interchangeables.

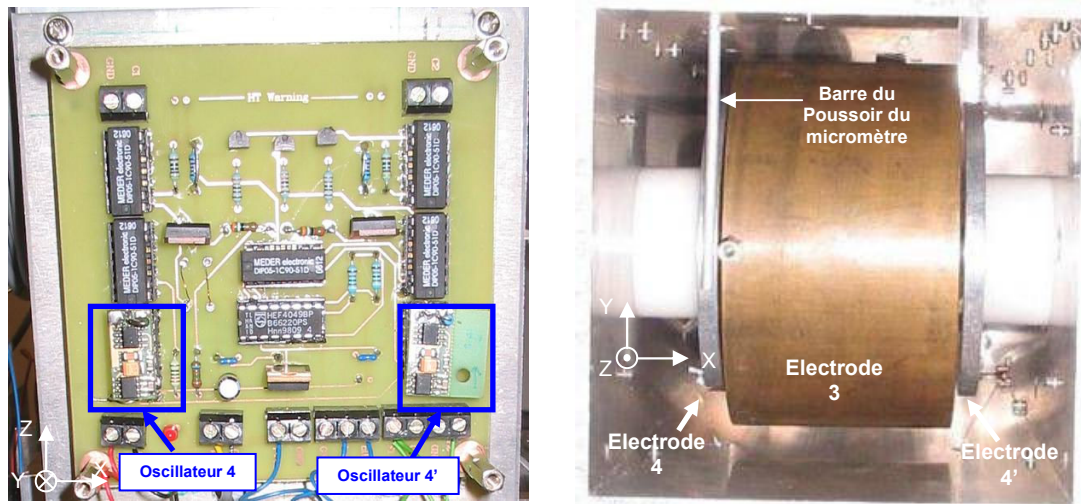


Figure 6-4: Intégration des deux oscillateurs RC d'étalonnage sur la plaque de commande des électrodes (figure de gauche). Vue du dessus des électrodes en forme de disque de l'actionneur électrostatique disposées de part et d'autre de la masse pendulaire (figure de droite)

Les électrodes de l'actionneur électrostatique peuvent être connectées, suivant les besoins de l'expérience, à la tension d'alimentation de l'actionneur électrostatique, à leurs capacimètres respectifs ou au potentiel de terre local.

Ces connections sont opérées sur la carte de commande des électrodes (Annexe 10.11), par un système de microrelais.

Notons que, dans l'état actuel du montage, seule la fréquence de sortie de l'oscillateur 4 est prise en charge par le microcontrôleur.

6.3.1.1 Paramètres théoriques de l'oscillateur à relaxation

Nous avons vu au §4.4 que la fréquence de sortie des oscillateurs utilisés est inversement proportionnelle à la valeur de la capacité totale C perçue par l'oscillateur (6-14).

$$f = \frac{1}{2 \cdot \ln(2)} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \approx \frac{0,7213}{R \cdot C} \quad [Hz] \quad (6-14)$$

La valeur de la capacité totale C vue par l'oscillateur tient compte de la valeur de la capacité mesurée C_m ainsi que des valeurs des capacités additionnelles en parallèle reprises sous le terme C_0 (6-15).

$$C = C_m + C_0 \quad [Farad] \quad (6-15)$$

La valeur du terme C_0 tient compte notamment des capacités des câbles de connexion vers la capacité mesurée et des capacités internes à l'oscillateur.

La relation entre la capacité mesurée C_m et la période d'oscillation T_{555} de l'oscillateur est déduite des équations (6-14) et (6-15).

$$C_m = \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot R} \cdot T_{555} - C_0 \quad [Farad] \quad (6-16)$$

Cette relation a la particularité d'être intrinsèquement linéaire.

Observons que les indéterminations sur la valeur de la capacité en parallèle C_0 et sur les valeurs des temps de commutation non nuls des transistors de l'oscillateur ne permettent pas un étalonnage absolu de la valeur de la capacité C_m .

Néanmoins, dans le cas de notre procédure étalonnage des couples électrostatiques, seule la connaissance de la variation relative de capacité est nécessaire.

Celle-ci est entièrement déterminée par la pente de la relation (6-16).

Dans le cas de l'oscillateur 4 dont la résistance de charge vaut 150 k Ω , nous avons (6-17).

$$\left(\frac{dC_{34}}{dT_{555}} \right)_{Théorique} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot R} = 4,81 \cdot 10^{-6} \quad [Farad / s] \quad (6-17)$$

Le coefficient $\frac{1}{2 \cdot \ln(2)}$ donné par le constructeur [104] correspond au cas d'un oscillateur idéal. Il est par exemple nécessaire de tenir compte de la valeur réelle des niveaux de basculement des comparateurs de l'oscillateur si l'on souhaite des niveaux de précision supérieurs à quelques pour cent sur les valeurs de variation de capacité.

6.3.1.2 Etalonnage des oscillateurs par un jeu de condensateurs étalon

Afin de nous prémunir d'un éventuel écart de comportement de nos oscillateurs vis-à-vis de la relation théorique (6-17), nous appliquons une deuxième méthode d'étalonnage des capacimètres 4 et 4' basée sur une mesure d'une série de onze condensateurs étalon.

Les onze condensateurs sont eux même préalablement étalonnés par un capacimètre digital. La précision de l'affichage digital est donnée à 0,1 pF. Nous opérons nos étalonnages sur une plage de mesure d'environ 100 pF (Figure 6-5).

La précision relative théorique sur la valeur du coefficient dC/dT_{555} est alors de l'ordre de 0,1 % pour un oscillateur parfaitement linéaire.

Le graphe de la Figure 6-5 donne la correspondance entre l'inverse de la fréquence de sortie de l'oscillateur 4 et les valeurs des capacités des 11 condensateurs étalon mesurées.

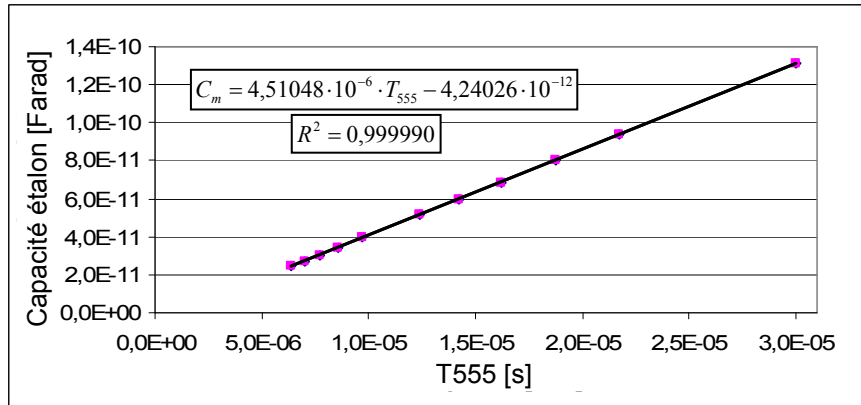


Figure 6-5 : Etalonnage de l'oscillateur 4 : Valeur des 11 capacités étalon en fonction de la période d'oscillation de l'oscillateur 4 (04/12/06).

Comme suggéré par l'équation (6-16), nous obtenons une relation linéaire entre les valeurs des capacités étalon mesurées et la période de sortie de l'oscillateur.

Le coefficient de corrélation entre le modèle linéaire approché par la méthode des moindres carrés et les mesures obtenues est ici de 0,99999.

Nous considérerons nos capacimètres comme linéaires sur la plage de mesure étudiée.

La valeur du coefficient dC_{34}/dT_{555} mesuré pour l'oscillateur 4 est donnée par la pente du graphe de la Figure 6-5, reprise par la relation (6-18).

$$\left(\frac{dC_{34}}{dT_{555}} \right)_{\text{Mesuré}} = 4,51 \cdot 10^{-6} \quad [Farad / s] \quad (6-18)$$

Soit un écart de 6 % par rapport à la relation (6-17) obtenue en tenant compte des caractéristiques théoriques de l'oscillateur utilisé.

Nous retiendrons cette dernière relation pour contraindre le facteur d'étalonnage du couple électrostatique généré par l'électrode C_{34} .

Notons à titre d'information que la valeur de la capacité parasite C_0 , fonction notamment des câbles de connexion avec les condensateurs étalon vaut ici :

$$C_0 = 4,24 \cdot 10^{-12} \quad [F] \quad (6-19)$$

La valeur de C_0 peut varier sensiblement en fonction des branchements opérés sans que celle-ci n'ait d'influence sur la valeur du coefficient dC_{34}/dT_{555} établi en (6-18).

6.3.2 Courbe d'étalonnage de l'électrode C_{34}

La fréquence de sortie des oscillateurs étalon est enregistrée en parallèle avec la déviation angulaire θ induite par la translation du pointeau du micromètre motorisé appliqué sur le bras pendulaire.

Un exemple de courbe d'étalonnage relatif à l'électrode C_{34} est donné au graphe de la Figure 6-6

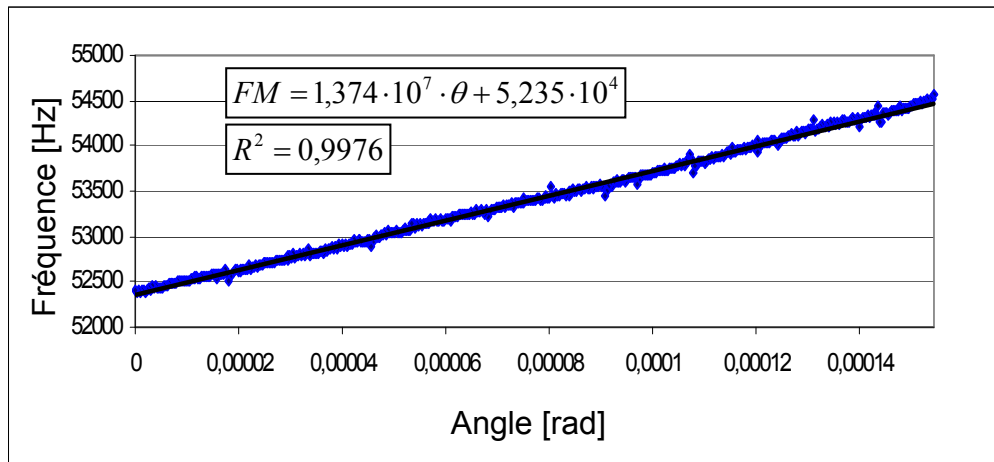


Figure 6-6 : Relation position/fréquence relatif à l'électrode C_{34} (Etalonnage du 25 juin 2007)
(valeurs mesurées et régression linéaire par moindres carrés) (les positions données en abscisse sont des positions relatives)

L'excursion totale de la courbe correspond à une translation de 77 μm au niveau du capteur de position, soit 93 μm au niveau de l'électrode de l'actionneur électrostatique. Nous supposons la relation linéaire sur cette plage.

L'étalonnage de la Figure 6-6 a été réalisé en parallèle de la courbe d'étalonnage du capteur de position angulaire présenté à la Figure 4-8 du §4.4.2. Ces deux courbes partagent la même référence arbitraire $\theta = 0$.

La position absolue du bras du pendule par rapport au châssis n'est pas connue avec précision. Celle-ci dépend de la précision sur la valeur de l'entrefer h_0 de l'électrode de l'actionneur qui, rappelons le, n'est pas connue avec une précision relative meilleure que $\pm 20\%$ dans le cadre de notre expérience.

L'application de la relation (6-18) au graphe de la Figure 6-6 permet de tracer la valeur de la capacité totale vue par l'oscillateur 4 en fonction de la déviation angulaire θ (Figure 6-7).

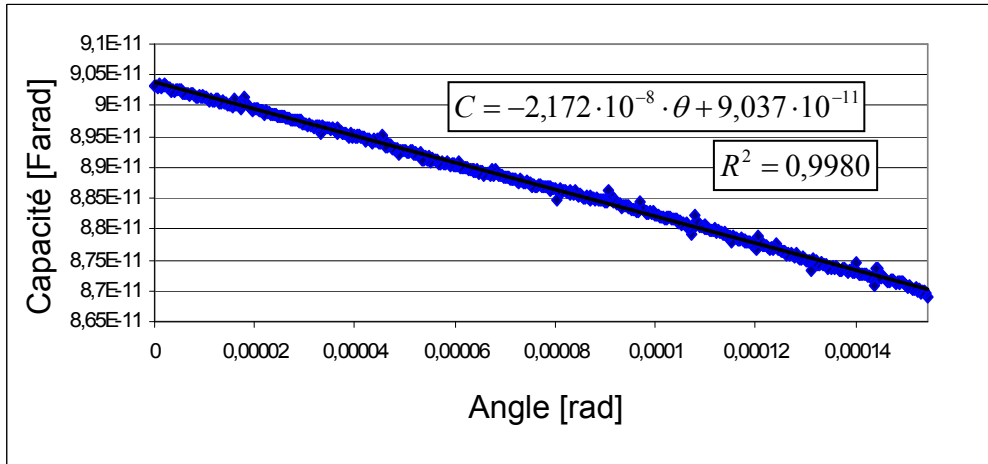


Figure 6-7: Evolution du coefficient $dC_{34}/d\theta$ de la paire d'électrode C_{34} en fonction de la position angulaire θ (valeurs mesurées et régression linéaire par moindres carrés)

Nous supposons la relation linéaire sur la plage de mesure considérée.

Le coefficient $dC_{34}/d\theta$ est alors déduit de la pente du graphe de la Figure 6-7, soit :

$$\frac{dC_{34}}{d\theta} = -2,17 \cdot 10^{-8} \quad [Farad / rad] \quad (6-20)$$

En insérant le coefficient (6-20) dans l'équation (6-7), nous pouvons déduire la valeur du couple électrostatique appliqué en fond d'échelle par la paire d'électrode C_{34} . Celui-ci est donné par les relations (6-21) et (6-22) pour une tension V d'alimentation de l'actionneur électrostatique valant respectivement 88,8 et 100 Volts.

$$(\Gamma_{34})_{88,8V} = 8,56 \cdot 10^{-5} \quad [N \cdot m] \quad (6-21)$$

$$(\Gamma_{34})_{100V} = 1,085 \cdot 10^{-4} \quad [N \cdot m] \quad (6-22)$$

Nous pouvons alors définir le gain K_2 de l'électrode C_{34} de notre actionneur électrostatique. Celui-ci est égal au rapport entre la valeur du couple électrostatique généré en sortie et la valeur du signal de commande $Signal_{Commande}$ d'entrée.

Les équations (6-23) et (6-24) donnent la valeur du gain K_2 pour une tension d'alimentation V de l'actionneur électrostatique valant respectivement 88,8 et 100 Volts.

$$(K_2)_{88,8V} = \frac{\Gamma_{34}}{2^{15}} = 2,61 \cdot 10^{-9} \quad (6-23)$$

$$(K_2)_{100V} = \frac{\Gamma_{34}}{2^{15}} = 3,31 \cdot 10^{-9} \quad (6-24)$$

Notons que la valeur de ces gains est tributaire de l'étalonnage d'angle opéré à l'aide du micromètre étalon. Or, nous avons vu au §4.4.2 que notre procédure d'étalonnage ne permet pas d'offrir une précision relative meilleure que 40 % sur les angles mesurés du fait de la présence de biais mécanique dans notre dispositif expérimental, réduisant d'autant la précision sur l'amplitude des couples générés par notre actionneur électrostatique.

6.3.3 Commentaires et discussions

La détermination du coefficient $dC/d\theta$ est fortement limitée par la précision accessible sur les mesures de capacité et plus particulièrement sur les mesures d'angle. Nous avons vu que ce coefficient est estimé au mieux, dans notre cas de figure, à quelques pour cent.

À titre de comparaison, les équations (6-25) et (6-26) donnent les valeurs des coefficients $dC/d\theta$ correspondant aux expériences réalisées respectivement au BIPM [74] et au PTB [91], [92].

$$\left(\frac{dC}{d\theta}\right)_{BIPM} = 12,5 \cdot 10^{-12} \quad [F / rad] \quad (6-25)$$

$$\left(\frac{dC}{d\theta}\right)_{PTB} = 34 \cdot 10^{-12} \quad [F / rad] \quad (6-26)$$

De prime abord, les valeurs de ces coefficients sont beaucoup plus faibles que le nôtre et donc plus complexes à étalonner. Ils ont cependant la particularité de correspondre à des géométries d'électrodes offrant une très grande linéarité dans les deux cas de figure (condensateurs à variation de surface dans le cas de l'expérience du PTB et électrodes offrant une valeur extremum du coefficient $dC/d\theta$ au point de fonctionnement θ , dans le cadre de l'expérience du BIPM).

Les coefficients $dC/d\theta$ de ces électrodes peuvent donc être établis sur de grandes plages angulaires, compatibles avec la précision des étalons d'angles disponibles.

Ainsi, sur la balance de torsion du BIPM, la détermination de ce coefficient est réalisée sur une plage angulaire d'environ $8 \cdot 10^{-3}$ rad avec des variations de capacité de l'ordre de 0,1 pF.

La marge de manœuvre sur les précisions accessibles sur ce type d'étalonnage reste assez étroite. L'équipe du MSL [96] étalonne d'ailleurs indirectement l'actionneur électrostatique de sa balance de torsion par l'application d'accélération inertielles.

Des études complémentaires sont nécessaires pour définir une géométrie d'électrode la plus appropriée à celle de notre pendule astatique.

6.3.4 Dépendance de la capacité de l'actionneur électrostatique à la fréquence d'excitation

Notre actionneur électrostatique est entouré d'un certain nombre de matériaux diélectriques (isolant, oxydes en surface des électrodes, ...).

Or, la présence de phénomènes dissipatifs au sein de ceux-ci fait que leur polarisation ne suit pas instantanément la valeur de la tension imposée aux bornes des électrodes [42], [43], [44] et [45].

Il en résulte que la valeur de la capacité mesurée à haute fréquence par nos capacimètres (~56 kHz) est plus faible que la valeur effective de la capacité lors de l'application des forces électrostatiques en basse fréquence (256 Hz). L'étalonnage des forces électrostatiques appliquées peut alors présenter des biais non négligeables.

Une solution adoptée au BIPM [74] consiste à faire correspondre la fréquence de fonctionnement de l'actionneur à la fréquence de mesure des capacités des électrodes.

Nous suggérons à l'avenir de déduire directement la valeur des capacités des électrodes par un chronométrage des temps de charge des flancs produit par la MLI de l'actionneur électrostatique comme présenté à la Figure 6-8.

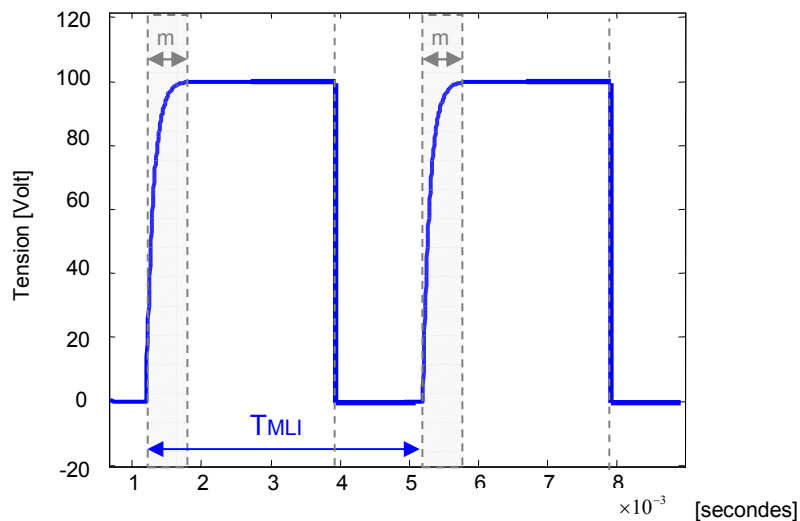


Figure 6-8: Tension d'excitation par MLI appliquée à l'une des électrodes de l'actionneur électrostatique. La mesure de la capacité de l'électrode peut être déduite du chronométrage du temps de montée des flancs engendrés par la MLI.

Une fraction constante m de la période de la MLI est ainsi uniquement consacrée à la mesure de la capacité, la valeur du rapport cyclique D restant limitée à une plage de 10 à 100 % par exemple. Les fréquences d'étalonnage et de fonctionnement de l'actionneur électrostatique sont alors strictement identiques, notons qu'il en va de même pour les tensions d'excitation.

Ce mode opératoire comporte plusieurs autres avantages :

-Le chronométrage des temps de charge des électrodes est directement proportionnel à la valeur de la capacité de l'actionneur électrostatique.

-La mesure de capacité peut être effectuée tout au long de la phase de fonctionnement de l'actionneur, garantissant la stabilité temporelle du gain K_2 de l'actionneur électrostatique.

-La mesure du coefficient $dC/d\theta$ peut également être établie en jouant sur la position de consigne de la boucle de rétroaction de position.

Notons encore que l'étalonnage des capacimètres peut être assuré par le biais de condensateurs étalon branchés en parallèle à chacune des électrodes de l'actionneur. Un condensateur étalon de type Lampard-Thomson [39], [40] serait parfaitement indiqué pour ce type de mesure.

6.4 Commande Complémentaire des électrodes

Ce montage permet d'éviter les effets de discontinuité du gain de l'actionneur électrostatique au passage par zéro.

Les deux modules MLI sont commandés en parallèle par des valeurs de rapport cycliques complémentaires, de sorte que la force électrostatique moyenne totale exercée par l'actionneur sur la masse supérieure est donné par :

$$\Sigma F_E = D \cdot F_{34} + (1 - D) \cdot F_{34'} \quad [N] \quad (6-27)$$

Le schéma de câblage correspondant est présenté à la Figure 6-9.

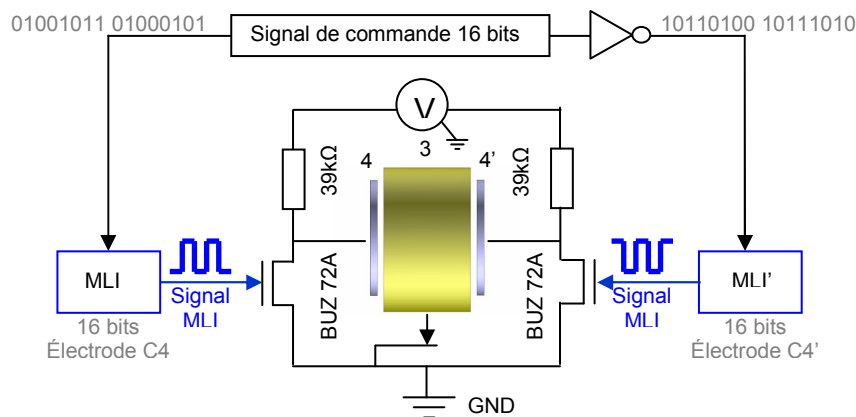


Figure 6-9 : Proposition de commande complémentaire des électrodes, commande à deux paires d'électrodes actives.

En appliquant un modèle simple des capacités des électrodes de l'actionneur, nous avons que la capacité de chaque paire d'électrodes en fonction de l'excentration « ex » de la masse centrale (supposée opérer un translation pure) est donnée par :

$$C_{34} = \frac{\varepsilon \cdot S}{h_0 + ex} \quad C_{34'} = \frac{\varepsilon \cdot S}{h_0 - ex} \quad [Farad] \quad (6-28)$$

Nous supposons la valeur des surfaces S et la valeur de la constante diélectrique ε comme identiques pour les deux paires d'électrodes.

En appliquant les équations (6-27) et (6-28), nous avons que la force moyenne totale théorique appliquée sur la masse pendulaire supérieure en fonction de son excentration « ex » par rapport à sa position centrée est donnée par l'expression :

$$\Sigma F_E = \left(\frac{D}{(h_0 + ex)^2} + \frac{(1-D)}{(h_0 - ex)^2} \right) \cdot \varepsilon \cdot S \cdot \frac{V^2}{2} \quad [N] \quad (6-29)$$

La Figure 6-10 illustre la valeur de la force électrostatique théorique appliquée par chacune des deux paires d'électrodes ainsi que la force totale appliquée sur la masse pendulaire en fonction de l'excentration « ex » de celle-ci.

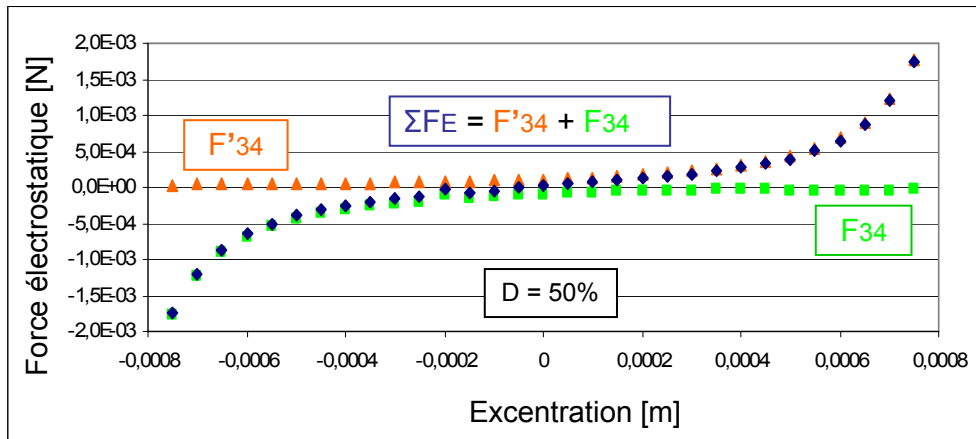


Figure 6-10 : Force électrostatique générée par chacune des deux paires d'électrodes en fonction de l'excentration de l'électrode centrale

La force électrostatique totale appliquée à la masse pendulaire en fonction de l'excentration ex présente un point d'inflexion pour une valeur d'excentration nulle.

La sensibilité de la force électrostatique totale appliquée à la masse pendulaire à la valeur d'excentration est alors nulle pour cette position. Notons que ce constat n'est vérifié que dans le cas d'une valeur de rapport cyclique de la MLI égale à 50 %.

Nous observons alors une erreur de 3 ppm/ μ m sur la valeur de la force injectée en fonction de l'excentration ex .

La position du point d'inflexion exposé à la Figure 6-10 en fonction de la valeur du rapport cyclique D peut être déduite de l'expression (6-30)

$$\frac{d(\Sigma F_E)}{dex} = \left(\frac{2 \cdot (D-1)}{(ex - h_0)^3} - \frac{2 \cdot D}{(ex + h_0)^3} \right) = 0 \quad [N/m] \quad (6-30)$$

dont la solution est donnée par (6-31) :

$$D = \frac{(h_0 + ex)^3}{2 \cdot h_0 \cdot (h_0^2 + 3 \cdot ex^2)} \quad (6-31)$$

Ainsi, que nous options pour un montage complémentaire ou non, il reste nécessaire de travailler avec des géométries d'électrodes dont la capacité varie linéairement avec l'angle θ .

6.5 Conclusions

La stabilité en température et l'inertie thermique de l'actionneur doit être suffisamment élevée afin que le gain de l'actionneur soit suffisamment stable pendant la période d'application du forçage gravitationnel. Nous verrons que l'application du couple engendré par l'aiguille des secondes de la montre permet de vérifier les éventuelles variations de gain à long terme.

L'utilisation de l'actionneur électrostatique en tant qu'étalon de couple est plus délicate à réaliser en pratique. Nous avons vu que les pertes dans les matériaux diélectriques pouvaient induire des biais non négligeables lors de l'étalonnage des couples électrostatiques appliqués et que la détermination du coefficient $dC/d\theta$ nécessite des étalons d'angle et de capacité de grande précision.

Une étude visant à déterminer la géométrie d'électrode la mieux adaptée à notre pendule astatisé doit encore être menée.

7 Régulateur de rétroaction de position

7.1 Introduction :

La fonction du régulateur de position est de piloter l'actionneur électrostatique de telle sorte que la position angulaire moyenne du pendule corresponde à la position de consigne imposée.

Le couple de rappel pendulaire est donc constant et le travail de la suspension nulle. Nous avons en moyenne à l'équilibre dynamique : (7-1)

$$\Gamma_E + \Gamma_G = 0 \quad [N \cdot m] \quad (7-1)$$

Le régulateur permet ainsi de reporter les défauts difficilement maîtrisables des composants mécaniques de la suspension, vers la boucle d'asservissement électronique.

Nous commencerons par rappeler les notions de régulateur PID et établirons la fonction de transfert de notre système en boucle fermée.

Nous réglerons les coefficients du régulateur en appliquant la méthode des polynômes normaux à coefficient d'amortissement réglable [57] [58] [59] [61].

Cette méthode permet de traiter le cas de systèmes peu amortis tout en permettant de déterminer a priori les caractéristiques de pulsation et d'amortissement du système en boucle fermée.

Nous établirons alors les réponses indicielles et les réponses en fréquence théoriques de notre système en boucle fermée pour différents gains.

Nous décrirons enfin l'implémentation de notre régulateur au sein du microcontrôleur de la balance et discuterons des différents aspects liés au caractère numérique de notre régulation.

7.2 Régulateur PID à architecture parallèle

Le souhait de maintenir le point de fonctionnement du pendule constant en moyenne a orienté notre choix pour l'utilisation de régulateurs de type PID.

Pour rappel, ce type de régulateur est constitué de trois modules :

- Un module proportionnel P générant un signal de commande proportionnel à l'écart entre la position du pendule et la position de consigne. Ce module peut être vu comme une constante de rappel additionnelle à la constante de rappel de la balance.

- Un module intégrateur I dont le signal de sortie correspond à l'intégrale des écarts de position avec la consigne. Ce module tient compte de l'historique de l'ensemble des positions précédentes, il permet de supprimer les erreurs statiques associées au caractère fini du gain proportionnel P. C'est ce module qui permet de maintenir constante en moyenne la position du point de fonctionnement du pendule.

-Un module dérivateur D induisant un signal de commande proportionnel à la dérivée de l'erreur de position. Autrement dit, le signal de sortie est proportionnel à la vitesse du bras pendulaire. Dans le cas d'une vitesse nulle, la force appliquée par le module D est nulle, quel que soit le point de fonctionnement. Le module D joue le rôle d'amortisseur et a donc un effet stabilisateur. Le signal généré est naturellement bruité dans le spectre des hautes fréquences du fait qu'il émane de la dérivée du signal de position.

Il est ainsi possible en jouant sur les gains de ces trois modules d'obtenir un système asservi stable.

Le montage utilisé pour notre régulateur correspond à un montage en parallèle des trois modules (Figure 7-1).

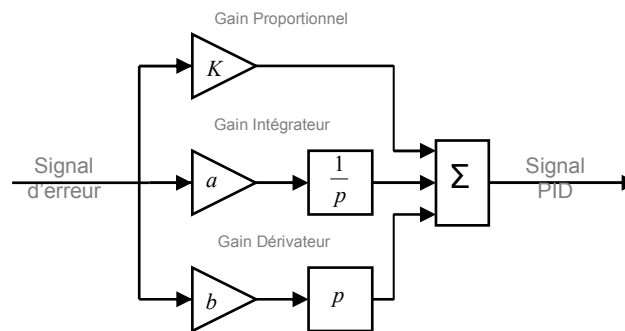


Figure 7-1 : Régulateur PID à architecture parallèle

La fonction de transfert correspondante a alors pour expression:

$$\frac{Signal_{PID}}{Signal_{Erreur}} = K + \frac{a}{p} + b \cdot p = \frac{(a + K \cdot p + b \cdot p^2)}{p} \quad (7-2)$$

Cette architecture a été choisie afin de pouvoir utiliser le module dérivateur D indépendamment des deux autres modules. Cette caractéristique permet d'assurer un amortissement électrostatique en déflexion libre.

Le signal de sortie du régulateur $Signal_{PID}$ est utilisé comme signal de commande des modules MLI de l'actionneur électrostatique.

7.3 Fonction de transfert du système bouclé

Le schéma fonctionnel de notre balance en rétroaction de position est décrit à la Figure 7-2.

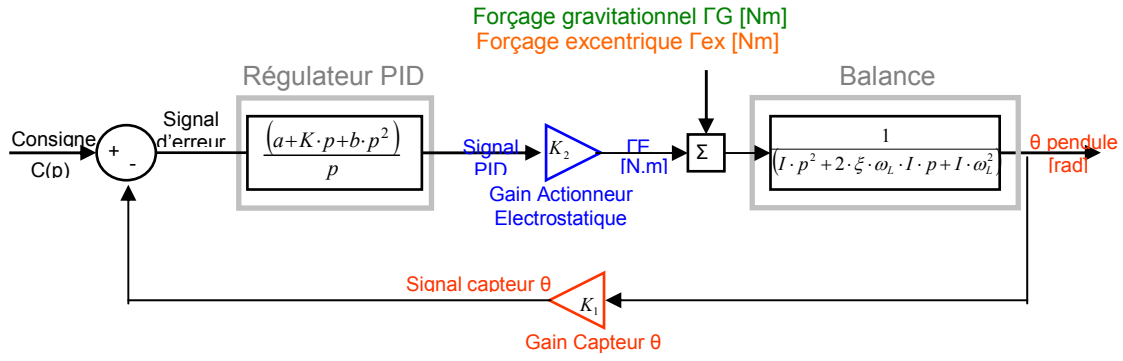


Figure 7-2 : Schéma fonctionnel du pendule en rétroaction de position

avec :

K_1 : Le gain associé au capteur de position.

K_2 : Le gain associé à l'actionneur électrostatique.

$C(p)$: La consigne de position.

$\Gamma_{ext}(p)$: Les couples de forçages externes (gravitationnel Γ_G , excentrique Γ_{ex} , ...).

K, a, b : Les coefficients du régulateur PID.

L'expression dynamique du couple électrostatique Γ_E appliqué par l'actionneur électrostatique peut être déduite à partir du schéma de la Figure 7-2.

$$\Gamma_E(p) = [C(p) - K_1 \cdot \theta(p)] \cdot \frac{(a + K \cdot p + b \cdot p^2)}{p} \cdot K_2 \quad [N \cdot m] \quad (7-3)$$

avec :

$$\theta(p) = \frac{[\Gamma_E(p) + \Gamma_{ext}(p)]}{(I \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_L \cdot I \cdot p + I \cdot \omega_L^2)} \quad [rad] \quad (7-4)$$

En réarrangeant les termes, nous avons :

$$\Gamma_E(p) = \frac{1}{I} \cdot \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot (a + K \cdot p + b \cdot p^2) \cdot \left[\frac{C(p)}{K_1} \cdot (I \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_L \cdot I \cdot p + I \cdot \omega_L^2) - \Gamma_{ext}(p) \right]}{\left[p^3 + \left(2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \right) \cdot p^2 + \left(\omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \right) \cdot p + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \right]} \quad [N \cdot m] \quad (7-5)$$

Par un raisonnement analogue, nous déduisons l'expression dynamique de la déviation angulaire θ enregistrée sur le bras du pendule (7-6) :

$$\theta(p) = \left[\left(erreur(p) \cdot \frac{(a + K \cdot p + b \cdot p^2)}{p} \right) \cdot K_2 + \Gamma_{ext}(p) \right] \cdot \frac{1}{(I \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_L \cdot I \cdot p + I \cdot \omega_L^2)} \quad [rad] \quad (7-6)$$

avec:

$$erreur(p) = C(p) - K_1 \cdot \theta(p) \quad (7-7)$$

En réarrangeant les termes, la fonction de transfert du système bouclé se réécrit (7-8).

$$\theta(p) = \frac{1}{I} \cdot \frac{C(p) \cdot K_2 \cdot (a + K \cdot p + b \cdot p^2) + \Gamma_{ext}(p) \cdot p}{\left(p^3 + \left(2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \right) \cdot p^2 + \left(\omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \right) \cdot p + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \right)} \quad [rad] \quad (7-8)$$

Nous allons nous attacher maintenant à déterminer les paramètres du régulateur afin d'obtenir les caractéristiques souhaitées du système en mode asservi.

7.4 Détermination des coefficients PID : Méthode des polynômes normaux à coefficient d'amortissement réglable

7.4.1 Introduction :

La présence du module intégrateur (injection d'énergie dans le système) rend les régulateurs PID potentiellement instables.

La stabilité du système est alors assurée par un choix judicieux des coefficients du régulateur PID.

Notre système à réguler est conçu pour présenter à terme un facteur d'amortissement proche de zéro en déflexion libre (fonctionnement sous vide associé à un facteur de qualité Q élevé de la suspension).

Or, les méthodes classiques (Ziegler-Nichols [63], marge de gain et de phase,...) ne permettent pas d'assurer la stabilité de tels systèmes.

Nous appliquerons, pour ce faire, la méthode dite des polynômes normaux à coefficient d'amortissement réglable, appelée aussi critère de Naslin [57] [58] [59] [61].

Par analogie aux systèmes du second ordre, la méthode définit un paramètre d'amortissement α pour un système d'ordre n quelconque.

Il est alors possible d'écrire les valeurs des paramètres libres de l'équation caractéristique du système bouclé (les gains K, a, b du régulateur dans notre cas) en fonction du paramètre d'amortissement α mais aussi dans notre cas de figure en fonction de la pulsation ω_A du système asservi.

Cette méthode très générale est applicable à tout type de régulateur pourvu que la fonction de transfert du système bouclé soit connue. Nous l'appliquerons au régulateur PID de notre dispositif expérimental dont l'expression est relativement simple.

La grande souplesse quant au choix et au réglage des paramètres en boucle fermée et la possibilité de réguler des systèmes peu amortis ont orienté notre choix pour cette méthode de réglage.

7.4.2 Systèmes d'ordre $n = 2$

Prenons l'expression d'un système d'ordre 2 à numérateur constant (7-9):

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0} \quad (7-9)$$

L'analyse des systèmes d'ordre deux nous montre que le rapport d'amortissement ξ est lié aux coefficients du polynôme caractéristique par l'équation (7-10)

$$4 \cdot \xi^2 = \frac{a_1^2}{a_0 \cdot a_2} \quad (7-10)$$

Nous appellerons l'expression (7-10) le rapport caractéristique α de notre système d'ordre 2.

Le Tableau 7-1 donne quelques valeurs de rapports caractéristiques déduites de l'équation (7-10) en fonction de trois valeurs type de rapport d'amortissement.

$\xi = 1$	$\Rightarrow$	$\alpha = 4$	Amortissement critique (Dépassement nul de la réponse indicielle)
$\xi = 0,7$	$\Rightarrow$	$\alpha = 2$	Amortissement sous critique (Dépassement de 5% de la réponse indicielle)
$\xi = 0,5$	$\Rightarrow$	$\alpha = 1$	Amortissement sous critique (Dépassement de 15% de la réponse indicielle)

Tableau 7-1 : Correspondance entre coefficient d'amortissement et rapport caractéristique pour quelques valeurs clés

Cette notion de rapport caractéristique nous permettra de généraliser la notion d'amortissement à des systèmes d'ordre n quelconques.

Afin d'illustrer nos propos, prenons le système d'ordre deux suivant :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p^2 + 4 \cdot p + 8} \quad (7-11)$$

Traçons le diagramme de Bode (Figure 7-3) pour la courbe de gain de l'équation (7-11). Nous y avons également inséré les courbes de gain asymptotiques approchées, obtenues en traçant les asymptotes correspondant aux 3 termes de l'équation caractéristique et en conservant seulement les portions de plus grandes amplitudes.

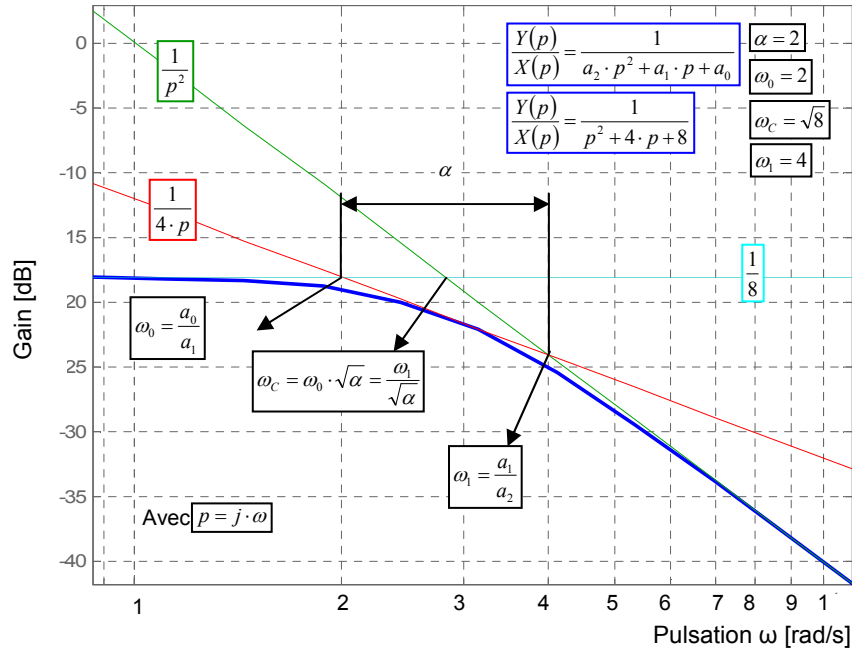


Figure 7-3 : Rapport et pulsation caractéristiques dans le cas d'un système d'ordre 2 (avec $p=j\omega$).

Nous définissons les pulsations caractéristiques comme la position des points anguleux de la courbe de gain asymptotique de l'équation caractéristique :

$$\omega_0 = \frac{a_0}{a_1} \quad \omega_1 = \frac{a_1}{a_2} \quad (7-12)$$

En considérant les équations (7-10) et (7-12) nous pouvons également exprimer le rapport caractéristique α en fonction des pulsations caractéristiques ω_0 et ω_1 (7-13).

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_0} \quad (7-13)$$

La fonction de transfert (7-11) a été choisie de telle sorte que $\alpha=2$ (amortissement sous critique) avec $\omega_0=2$ et $\omega_1=4$.

La valeur du point central ω_c est donné par l'intersection des droites asymptotiques de degré 0 et 2 (7-14).

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\alpha} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\alpha}} \quad (7-14)$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de la pulsation propre en déflexion libre $\omega_L = \sqrt{8}$ du système.

7.4.3 Généralisation : Systèmes d'ordre $n > 2$:

Nous allons généraliser les notions développées précédemment à des systèmes d'ordre n supérieur à deux, sachant que celles-ci restent valables jusqu'à l'ordre $n=8$ [62].

Reprenons le formalisme de l'équation (7-9) écrite pour un ordre n quelconque (7-15).

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n} \quad (7-15)$$

Dans le cas d'un système d'ordre n , les notions de rapports caractéristiques et de pulsations caractéristiques ainsi que la relation les liant sont données respectivement par les équations (7-16), (7-17) et (7-18).

$$\alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} \cdot a_{i+1}} \quad (7-16)$$

$$\omega_i = \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad (7-17)$$

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \quad (7-18)$$

P.Naslin [57], [58], [59], [61], montre que pour des valeurs de rapports caractéristiques α_i identiques, la réponse indicielle du système est pratiquement indépendante de l'ordre n de celui-ci.

La réponse indicielle du système d'ordre n est alors équivalente à un système d'ordre 2. Le rapport d'amortissement est réglé par la valeur du rapport caractéristique α et la pulsation réglée par la valeur des pulsations caractéristiques.

Appliquons les notions précédentes au cas d'un polynôme caractéristique d'ordre $n = 3$ (7-19).

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p^3 + 8 \cdot p^2 + 32 \cdot p + 64} \quad (7-19)$$

Les coefficients ont été choisis de telle sorte que les rapports caractéristiques soient égaux à la valeur 2 (amortissement sous critique) et de telle sorte que la pulsation caractéristique ω_1 vaille 4.

Le diagramme de Bode pour la courbe des gains et la courbe des gains asymptotiques approchés sont donnés par la Figure 7-4.

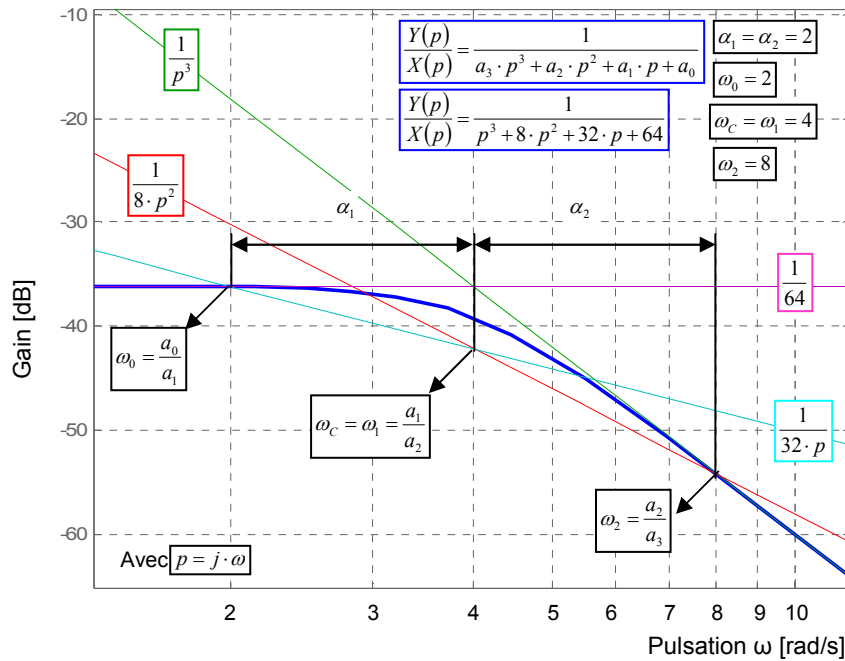


Figure 7-4 : Rapports et pulsations caractéristiques dans le cas d'un système d'ordre $n=3$, Courbe de gain et courbe de gain asymptotique (avec $p=j\omega$)

Le fait d'imposer des valeurs de rapports caractéristiques identiques revient à avoir des pulsations caractéristiques situées à équidistance l'une de l'autre.

Le polynôme étant de degré impair, la valeur du point central est donné par la pulsation caractéristique ω_1 .

La méthode consiste alors à ajuster les paramètres libres intervenant dans les coefficients a_i du polynôme caractéristique en fonction des paramètres d'amortissement et de pulsation en boucle fermée, choisis de telle sorte que les rapports caractéristiques α_i soient identiques.

Nous avons jusqu'à présent traité le cas de fonction de transfert pourvu d'un numérateur constant. Mentionnons ici qu'il existe des formules de corrections empiriques [60] permettant de traiter le cas de numérateurs allant jusqu'à l'ordre 2. Nous ne les utiliserons pas dans le cadre de ce travail.

7.4.4 Application à notre dispositif expérimental.

L'équation caractéristique relative à la fonction de transfert de notre système en boucle fermée (7-8) est donnée par (7-20).

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 \cdot p^3 & + & \left(2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \right) \cdot p^2 & + & \left(\omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \right) \cdot p & + & \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \\
 \longleftrightarrow a_3 & & \longleftrightarrow a_2 & & \longleftrightarrow a_1 & & \longleftrightarrow a_0
 \end{array} \quad (7-20)$$

Le polynôme caractéristique est ici d'ordre $n = 3$. Nous aurons ainsi trois pulsations caractéristiques $[\omega_0, \omega_1, \omega_2]$ correspondant aux points anguleux de la courbe de gain asymptotique.

Nous allons exprimer la valeur des coefficients PID par rapport au point anguleux central ω_C qui, nous l'avons vu, correspond à la pulsation du système en asservissement de position ω_A .

Nous allons écrire les coefficients K , a , b de notre régulateur PID en fonction des différents paramètres de notre système bouclé, de telle sorte que les rapports caractéristiques α soient égaux (équations (7-21), (7-22), (7-23) et (7-24)).

$$a_3 = 1 \quad \text{Valeur imposée par l'équation caractéristique} \quad (7-21)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = 2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \\ a_2 = \omega_2 \cdot a_3 = \omega_2 \cdot 1 = \omega_1 \cdot \alpha \end{array} \right\} \quad b = \frac{I}{K_1 \cdot K_2} \cdot (\omega_A \cdot \alpha - 2 \cdot \xi \cdot \omega_L) \quad (7-22)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \\ a_1 = \omega_1 \cdot a_2 = \omega_1^2 \cdot \alpha \end{array} \right\} \quad K = \frac{I}{K_1 \cdot K_2} \cdot (\omega_A^2 \cdot \alpha - \omega_L^2) \quad (7-23)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \\ a_0 = \omega_0 \cdot a_1 = \omega_0 \cdot \omega_1^2 \cdot \alpha = \omega_1^3 \end{array} \right\} \quad a = \frac{I}{K_1 \cdot K_2} \cdot \omega_A^3 \quad (7-24)$$

Ces relations nous permettent donc de choisir librement les caractéristiques d'amortissement mais aussi de pulsation propre du système en boucle fermée.

7.5 Fonction de transfert théorique en mode asservi

7.5.1 Paramètres de simulation

Nous allons étudier la réponse en fréquence de notre balance pour deux paramètres d'asservissement différents.

-Un Gain 1 correspondant aux caractéristiques théoriques de notre dispositif expérimental avec l'actionneur électrostatique à 88,8 Volts. La pulsation propre de notre appareil passe alors de 0,42 rad/s en boucle ouverte (Tableau 4-1) à 0,63 rad/s en boucle fermée (Tableau 7-2).

-Un Gain 2 plus élevé correspondant aux performances théoriques nécessaires pour compenser, au niveau du ppm, un forçage sinusoïdal de soixante secondes de période. Nous supposons dans ce cas de figure que le rapport d'amortissement de la balance en déflexion libre est proche de la valeur zéro (Balance travaillant sous vide avec une suspension purement élastique). Nous prendrons un rapport caractéristique égal à 4 (correspondant à un amortissement apériodique en boucle fermée) pour illustrer la pertinence des paramètres de réglage déduits du critère de Naslin.

Les valeurs des paramètres d'asservissement pour ces deux gains sont résumées au Tableau 7-2.

	Pulsation propre en mode asservi ω_A [rad/s]	Rapport caractéristique α	Période propre [seconde]	Rapport d'amortissement en déflexion libre ξ
Gain 1	0,63	1,9	10	0,435
Gain 2	16	4	0,4	0

Tableau 7-2 : Paramètres du système en asservissement de position utilisés pour les simulations

Les paramètres mécaniques de la balance sont ceux répertoriés au Tableau 4-1 du §4.1.

7.5.2 Couple d'asservissement Γ_E : Réponse en fréquence théorique

À partir de l'équation (7-5), pour une valeur constante de la valeur de consigne ($C(p)=0$), nous avons.

$$\frac{\Gamma_E(p)}{\Gamma_{ext}(p)} = \frac{1}{I} \cdot \frac{-K_1 \cdot K_2 \cdot (a + K \cdot p + b \cdot p^2)}{\left[p^3 + \left(2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \right) \cdot p^2 + \left(\omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \right) \cdot p + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \right]} \quad (7-25)$$

L'évolution du rapport d'amplitude (7-25) en fonction de la fréquence de forçage du couple externe est donnée par le diagramme de Bode de la Figure 7-5.

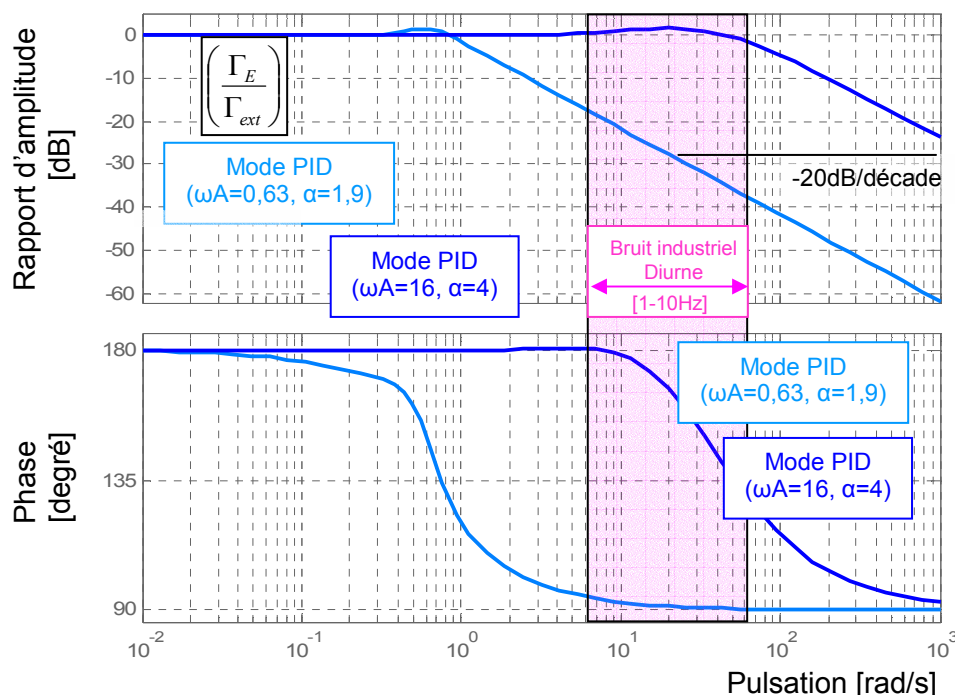


Figure 7-5 : Réponse en fréquence du couple de compensation du régulateur de position à un couple externe (donnée pour deux gains ($\omega_A=0,63$, $\alpha=1,9$) et ($\omega_A=16$, $\alpha=4$))

L'évolution du rapport d'amplitude en fonction de la fréquence de forçage se comporte comme un filtre passe-bas dont la valeur de la fréquence de coupure est donnée par la valeur de la pulsation ω_A du système en mode asservi.

Observons encore la présence de gains légèrement positifs autour des fréquences de coupures correspondant aux deux gains étudiés du fait de la présence d'un numérateur différent d'une constante dans la fonction de transfert du système bouclé.

Le Tableau 7-3 donne les valeurs du rapport d'amplitude théorique Γ_E / Γ_{ext} obtenu pour une période de forçage sinusoïdal Γ_{ext} de respectivement 1 et 60 secondes en fonction des deux gains étudiés.

Période de forçage	Fraction du couple externe compensé	
	à 1 seconde	à 1 minute
Gain 1	13,3% (-17,5 dB)	99,65% (-0,03 dB)
Gain 2	103,5 % (+0,3 dB)	999999,9 ppm ($-9 \cdot 10^{-7}$ dB)

Tableau 7-3 : Fraction du couple externe compensé par le couple électrostatique de la rétroaction de position en fonction de la période du couple de forçage injecté.

L'ordre de grandeur des gains associés au régulateur de notre dispositif expérimental est assez faible.

Ainsi par exemple, les forçages correspondant à la bande de fréquence du bruit industriel (1 à 10 Hz) ne sont au mieux pris en charge qu'à raison de 13,3 % avec le gain 1 et sont quasi intégralement compensés par le régulateur de gain 2.

En supposant en première approximation que les effets de ce bruit sur notre balance sont de nature aléatoire, celui-ci peut alors être filtré par le biais d'une moyenne par stacking (§8.1).

De même, un forçage sinusoïdal périodique d'une minute tel que celui induit par l'aiguille des secondes de la montre n'est compensé qu'au niveau du pour cent par la rétroaction de position.

L'utilisation d'un régulateur de Gain 2 permettrait de compenser le forçage de l'aiguille des secondes avec une résolution supérieure au ppm.

Cette remarque est importante car un tel gain nous permettrait, en théorie, d'appliquer des forçages gravitationnels à une cadence élevée de l'ordre de la minute. L'influence des bruits de basses fréquences tels que les dérives thermiques et les inclinaisons du sol est alors considérablement atténuée.

La Figure 7-6 illustre les réponses indicielles théoriques obtenues respectivement avec le gain 1 et le gain 2.

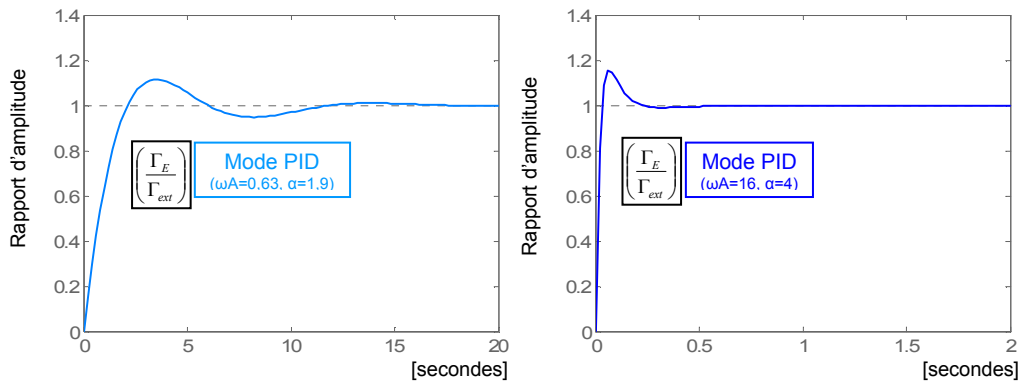


Figure 7-6 : Réponse indicielle théorique pour le gain 1 et le gain 2.

Le rapport d'amplitude entre les couples d'asservissement et les couples de forçage tend vers la valeur unitaire et ce d'autant plus rapidement que la valeur du gain est élevée.

La présence d'un numérateur différent d'une constante dans l'équation (7-25) fait que la réponse indicielle du gain 2, théoriquement réglée pour être au critique ($\alpha=4$), présente un léger dépassement.

7.5.3 Déviation angulaire θ : Réponse en fréquence théorique

En régulation de maintien, la valeur de consigne de position est maintenue constante ($C(p)=0$) et l'équation (7-8) a pour forme (7-26)

$$\frac{\theta(p)}{\Gamma_{ext}(p)} = \frac{p}{I \cdot \left(p^3 + \left(2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \right) \cdot p^2 + \left(\omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \right) \cdot p + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \right)} \quad [rad / N \cdot m] \quad (7-26)$$

En normalisant l'équation (7-26) en fonction du gain statique en déflexion libre établi au chapitre 5 (7-27).

$$\left(\frac{\theta_{\text{capteur}}}{\Gamma_{\text{ext}}} \right)_{\text{Statique}} = \frac{1}{I \cdot \omega_L^2} \left[\frac{\text{rad}}{\text{N} \cdot \text{m}} \right] \quad (7-27)$$

Nous avons (7-28).

$$\left(\frac{\theta(p)}{\Gamma_{\text{ext}}(p)} \right)_{\text{Normalisé}} = \frac{I \cdot \omega_L^2 \cdot p}{I \cdot \left(p^3 + \left(2 \cdot \xi \cdot \omega_L + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot b}{I} \right) \cdot p^2 + \left(\omega_L^2 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K}{I} \right) \cdot p + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot a}{I} \right)} \quad (7-28)$$

Le rapport d'amplitude normalisé correspond au rapport entre la déviation angulaire résiduelle observée et la déviation angulaire statique obtenue en déflexion libre.

Cette dernière relation va nous permettre de tracer la réponse en fréquence de notre système en mode asservi (Figure 7-7) pour les deux gains évoqués au Tableau 7-2.

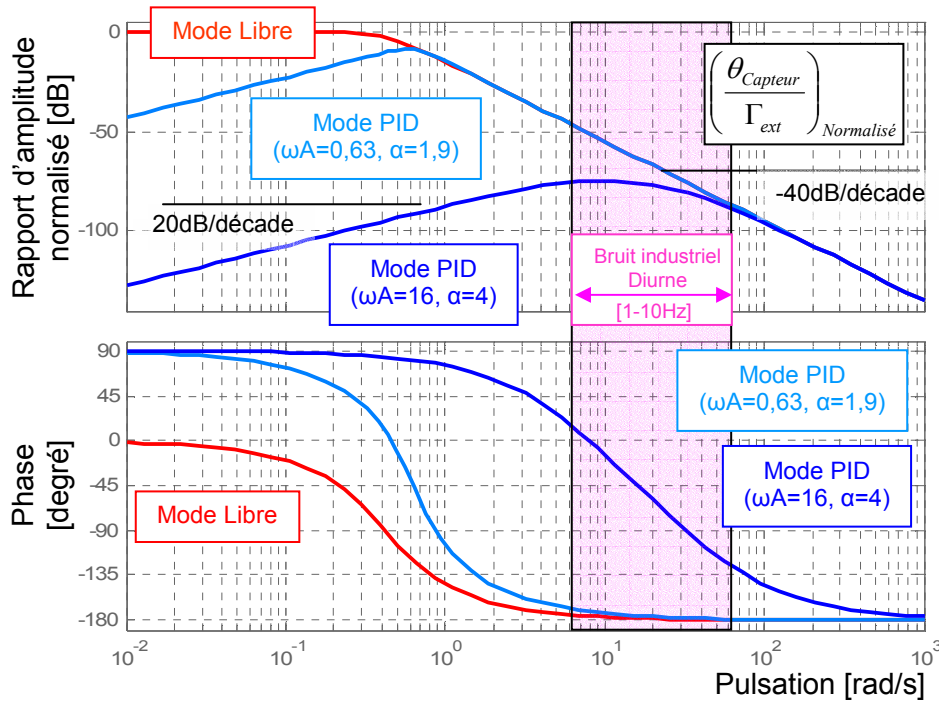


Figure 7-7 : Comparaison de la réponse en fréquence de la déviation angulaire du pendule à un couple externe en mode libre et en mode asservi (donnée pour deux gains ($\omega_A = 0,63$, $\alpha = 1,9$) et ($\omega_A = 16$, $\alpha = 4$))

Notre système bouclé se comporte alors comme un filtre passe bande du point de vue de la déviation angulaire résiduelle.

La sensibilité de la déviation angulaire du pendule au couple externe diminue pour les hautes fréquences (à raison de 40 dB/décades) grâce au moment d'inertie du bras pendulaire ainsi que pour les basses fréquences sous l'action de la boucle de rétroaction de position (à raison de 20 dB/décades).

Nous observons ainsi que les atténuations minimales du résidu angulaire sont proches des valeurs de fréquence de coupure relatives à chaque gain utilisé (la fréquence d'atténuation minimale est en pratique légèrement inférieure à la fréquence de coupure du gain considéré du fait de la valeur plus élevée de la pente d'atténuation haute fréquence par rapport à la pente d'atténuation basse fréquence).

Considérons en particulier les valeurs du rapport d'amplitude normalisé $(\theta/\Gamma_{\text{ext}})_{\text{Normalisé}}$ correspondant aux deux fréquences de coupures considérées ainsi que pour la période de forçage de l'aiguille des secondes de la montre (Tableau 7-4).

	Résidu angulaire pour une période de forçage de		
	0,4 secondes (période propre : gain 2)	10 secondes (période propre : gain 1)	60 secondes (période aiguille secondes)
Gain 1	708 ppm (-63 dB)	35 % (-9 dB)	7 % (-23 dB)
Gain 2	162 ppm (-75,8 dB)	26 ppm (-91,5 dB)	4,5 ppm (-107 dB)

Tableau 7-4: Amplitude théorique des résidus angulaires en mode asservi par rapport à la déviation angulaire équivalente obtenue en déflexion libre en fonction de différentes périodes de forçage.

Nous observons que la déviation angulaire engendrée par l'application d'un couple externe sur le bras du pendule représente au maximum 35 % (-9 dB) du signal équivalent en déflexion libre statique avec le régulateur de gain 1 et 162 ppm (-75,8 dB) avec le régulateur de gain 2.

Considérons à titre d'exemple l'influence des couples inertiels parasites produits par la composante x des accélérations du sol. Nous avons vu au §4.3.1 que l'amplitude RMS de ceux-ci, selon la bande de fréquence étudiée, était équivalente à 2 % de l'amplitude de l'échelon de couple gravitationnel appliqué en statique.

A partir du Tableau 7-4, nous pouvons approcher la valeur du résidu RMS sur l'angle θ par rapport à la déviation angulaire obtenue en déflexion libre avec le forçage gravitationnel. Celle-ci vaut alors 35% de 2 %, soit 0,7 % dans le cas du régulateur de gain 1 et 162 ppm de 2 %, soit 3,2 ppm avec le régulateur de gain 2, diminuant d'autant la contribution du couple de rappel de la balance et les effets anélastiques associés.

Dans le cas de l'application d'un couple de forçage sinusoïdal de 60 secondes de période propre tel que celui induit par la rotation de l'aiguille des secondes de la montre, nous observons que le résidu angulaire non compensé atteint 7 % (-23 dB) du signal équivalent en déflexion libre statique avec le gain 1.

Il est réduit à quelques ppm en utilisant le régulateur de gain 2. Les effets anélastiques inhérents au couple de rappel du pivot à lames flexibles sont alors circonscrits au niveau du ppm dans ce dernier cas.

La Figure 7-8 compare la déviation angulaire du pendule consécutif à un échelon de couple externe Γ_{ext} appliqué en mode libre et en mode asservi.

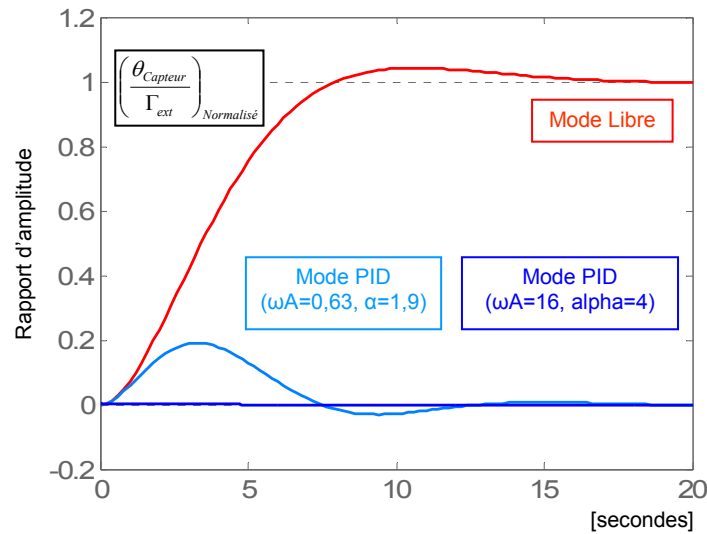


Figure 7-8 : Superposition des réponses indicielles de la déviation angulaire du pendule à un échelon de couple externe, respectivement en mode libre et en mode PID (donnée pour deux gains ($\omega_A=0,63$, $\alpha=1,9$) et ($\omega_A=16$, $\alpha=4$))

La Figure 7-9 reprend séparément les réponses indicielles obtenues en mode asservi avec les gains 1 et 2.

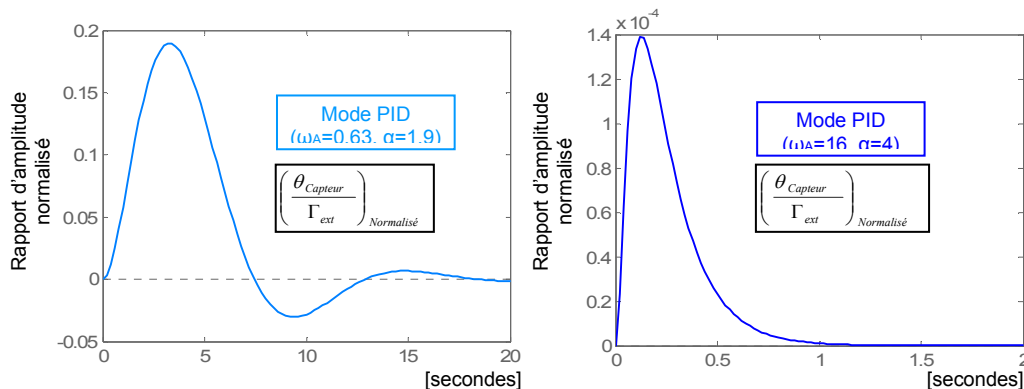


Figure 7-9 : Détail de la réponse indicielle à un échelon de couple en rétroaction de position respectivement pour ($\omega_A=0,63$, $\alpha=1,9$) et. ($\omega_A=16$, $\alpha=4$)

Nous observons un dépassement suivi d'un retour à la position de consigne en mode asservi.

L'amplitude du premier dépassement est de l'ordre de 10 % de la réponse statique en déflexion libre pour le Gain 1 et de 0,015 % pour le Gain 2, ce qui permet d'atténuer d'autant les effets de retour non élastiques liés à la suspension.

Contrairement au numérateur d'ordre deux de l'équation (7-25), le numérateur de l'équation (7-28) n'est plus que d'ordre 1. La réponse indicielle correspondant au gain 2 ($\alpha=4$) est alors plus proche de l'amortissement critique théorique.

7.6 Régulateur numérique du dispositif expérimental

7.6.1 Description et réglages appliqués

Le régulateur installé sur notre dispositif expérimental est réalisé à partir d'un microcontrôleur programmable [103]. La régulation y est ainsi purement numérique.

L'architecture du régulateur PID parallèle y est implémentée en langage C sous forme d'équations aux différences (Annexe 10.13).

La possibilité de reprogrammer intégralement le régulateur à distance et de synthétiser des forçages électrostatiques de facteurs de forme variés a orienté le choix de ce type de support pour réaliser notre régulateur.

Historiquement, les premiers calculs des paramètres (K , a , b) du régulateur ont conduit aux valeurs (16, 7, 23). Nous avons gardé ces coefficients tout au long des expériences présentées au chapitre 8.

À partir de ces coefficients et de la valeur des gains K_1 et K_2 du capteur et de l'actionneur électrostatique (déterminés au §4.4.2 et §6.3.2), nous pouvons déduire, à partir du critère de Naslin, les valeurs des paramètres ω_A et α de notre système en boucle fermée. Ceux-ci sont repris au Tableau 7-5.

Tension de fonctionnement de l'actionneur électrostatique	K_2	K_1	ω_A	α	ξ
88,8V	$2,61 \cdot 10^{-9}$	$4,19 \cdot 10^7$	0,629	1,88	0,435
100V	$3,31 \cdot 10^{-9}$		0,681	1,93	0,33

Tableau 7-5 : Principaux paramètres en boucle fermée de notre dispositif expérimental

Les caractéristiques calculées au Tableau 7-5 sont données à titre indicatif étant donné les précisions de l'ordre de 30 à 40 % obtenues sur les valeurs des gains K_1 et K_2 .

Notons également que le facteur d'amortissement du pendule en déflexion libre peut varier de 0,1 à plus de 0,5 [$N \cdot m \cdot s / rad$] suivant les points de fonctionnement.

7.6.2 Gain et fréquence de fonctionnement de la boucle de rétroaction

Nous avons considéré jusqu'à présent notre boucle de régulation comme un système continu dont la stabilité était assurée par le critère de Naslin.

Or, nous l'avons vu, le régulateur, le capteur et l'actionneur de notre balance sont intrinsèquement de nature numérique, avec une fréquence de fonctionnement de la boucle d'asservissement cadencée à 16 Hz.

Autrement dit, la transmission de l'information du capteur à l'actionneur ainsi que son traitement ne sont pas instantanés.

Or des valeurs de gain trop élevées par rapport aux temps morts de la boucle sont susceptibles de créer des oscillations et rendre la boucle d'asservissement instable.

Une règle communément adoptée en régulation numérique [62] est de choisir une fréquence d'échantillonnage de 6 à 25 fois supérieure à la fréquence de coupure ω_A du système en asservissement de position (7-29).

$$f_{\text{échantillonnage}} = (6 \dots 25) \cdot \frac{\omega_A}{2 \cdot \pi} \quad [\text{Hz}] \quad (7-29)$$

Le Tableau 7-6 donne les valeurs de fréquence d'échantillonnage minimum associées aux deux gains utilisés précédemment pour nos simulations numériques (en prenant le facteur le plus défavorable).

Gains	Fréquence d'échantillonnage minimum
$\omega_A=0,63, \alpha=1,9$	$\sim 2,5 \text{ Hz}$
$\omega_A=16, \alpha=4$	$\sim 64 \text{ Hz}$

Tableau 7-6: Fréquence d'échantillonnage théorique minimum assurant la stabilité du système bouclé pour les valeurs de gains choisies.

Les valeurs présentées au Tableau 7-6 peuvent être affinées par le biais de simulations numériques tenant compte du caractère discret de la boucle d'asservissement de position.

Tenant compte de l'équation (7-29), la fréquence de fonctionnement de 16 Hz de notre régulateur nous autorise en théorie à travailler avec une pulsation en boucle fermée de l'ordre de 4 rad/sec, soit 0,6 Hz.

Nous n'avons pas pu en pratique travailler à des pulsations supérieures à 1,3 rad/sec sans rencontrer des instabilités importantes de la boucle de rétroaction.

Ce constat peut s'expliquer par le fait qu'une erreur sur la détermination du facteur d'étalonnage du capteur et de l'actionneur puisse conduire à des paramètres de réglage du régulateur erronés.

Notons encore que la présence de degrés de liberté de mouvements parasites peu amortis du pivot à lames flexibles est également susceptible de justifier la présence de tels biais.

De ce point de vue, une suspension à bille mieux contrainte en degrés de liberté de mouvement serait beaucoup plus appropriée.

7.6.3 Paramètres de dimensionnement

En pratique, la fréquence de fonctionnement de la boucle d'asservissement est principalement limitée par le compromis résidant entre la résolution du capteur de position et sa fréquence d'échantillonnage.

La résolution du capteur est imposée par la résolution souhaitée sur la déviation angulaire produite par l'échelon de couple gravitationnel.

Celle-ci est néanmoins limitée par la présence de bruits inhérents au mesurande mais aussi à l'électronique du capteur lui-même.

L'amplitude RMS de ces bruits est d'autant mieux atténuée que ceux-ci sont intégrés sur de grands intervalles de temps, correspondant à une faible valeur de fréquence d'échantillonnage.

La résolution imposée au capteur de position limite alors la valeur de sa fréquence d'échantillonnage maximum et donc la valeur du gain de la boucle de rétroaction (Figure 7-10).

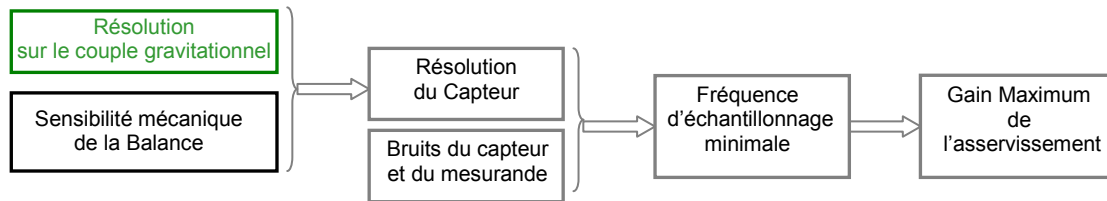


Figure 7-10: Chaîne de dimensionnement de la boucle d'asservissement

Notons qu'un réglage optimal du système bouclé en fonction de la période de forçage étudiée consisterait à choisir une fréquence d'échantillonnage du capteur de position telle que l'amplitude du résidu angulaire non compensé par le régulateur soit du même ordre de grandeur que la résolution du capteur de position.

7.7 Conclusions et perspectives

Le critère de Naslin nous permet d'assurer la régulation de systèmes peu amortis pourvu que la fonction de transfert du système soit connue.

Nous avons pu établir la réponse en fréquence théorique de notre balance pour un gain proche de celui utilisé sur notre régulateur assurant la compensation au pour cent d'un forçage sinusoïdal d'une minute et un gain plus élevé assurant le ppm sur ce même forçage.

Ce dernier gain permet de contraindre les résidus angulaires induits par la composante x des accélérations inertielles du sol à quelques dizaines de ppm de la déviation angulaire induite par le forçage gravitationnel en déflexion libre. Les éventuels effets anélastiques résultants serait alors également circonscrits à ce niveau.

Nous avons vu que le gain du régulateur est principalement limité par la fréquence d'échantillonnage du capteur de position.

Ainsi, dans le cas de notre dispositif expérimental, la compensation au ppm d'un signal gravitationnel sinusoïdal de $2,7 \cdot 10^{-7}$ Nm injecté sur une période d'une minute nécessite un capteur de position offrant une résolution de l'ordre du picomètre à 64 Hz.

8 Résultats

Nous introduirons en guise de rappel en début de chapitre la méthode de traitement de signal utilisée pour extraire les composantes systématiques des signaux périodiques générés par la balance.

Nous débuterons l'analyse des résultats obtenus avec notre balance par l'étude de sa sensibilité aux principaux facteurs d'influence environnementaux (climatiques, sismiques et clinométriques) susceptibles d'interférer avec nos mesures

Nous étudierons ensuite la réponse de notre balance à différents types de forçage afin d'établir ses principales caractéristiques en mode libre et en mode asservi.

Nous présenterons en particulier un mode opératoire spécifique permettant de vérifier la bonne prise en charge des couples de forçage externes par la boucle d'asservissement de position, et ce malgré la présence de fluages importants dans les pivots à lames flexibles.

Nous clôturerons l'étude des caractéristiques de chaque mode de fonctionnement de la balance (libre et asservi) par l'étalonnage des échelons de couple gravitationnel appliqués à notre balance avec les différents étalons de couple disponibles.

Nous discuterons alors de la pertinence des différents facteurs d'étalonnage obtenus.

8.1 Forçage périodique, traitement de signal par stacking

Les forçages injectés sur notre balance ont la propriété d'être tous périodiques et synchronisés avec le système d'acquisition de données.

Nous rappelons ici le principe de traitement de signal par stacking, permettant d'extraire les composantes systématiques des signaux périodiques émanant de notre dispositif expérimental.

8.1.1 Principe

Considérons un signal continu échantillonné avec une période constante Δt .

Supposons que ce signal soit constitué d'un bruit blanc et d'un signal périodique de T échantillons se répétant exactement N fois pendant la durée $N \times T \times \Delta t$ de l'enregistrement.

La moyenne par stacking consiste à considérer séparément les N fenêtres de T échantillons et à moyenner la valeur de chaque échantillon t d'une fenêtre n donnée avec ses valeurs équivalentes dans les (N-1) autres fenêtres.

La valeur moyenne $\bar{a}$ de l'amplitude de chaque échantillon t du signal périodique est donnée par l'équation (8-1):

$$[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_t, \dots, \bar{a}_T] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N [a_1, \dots, a_t, \dots, a_T]_n \quad (8-1)$$

Autrement dit, la moyenne par stacking revient à extraire le facteur de forme moyen du signal périodique étudié.

L'estimation de la dispersion de chaque échantillon t du signal périodique par rapport au facteur de forme moyen, appelée aussi l'écart type σ est donnée par la relation (8-2).

$$[\sigma_1, \dots, \sigma_t, \dots, \sigma_T] = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N [(a_1 - \bar{a})^2, \dots, (a_t - \bar{a}_t)^2, \dots, (a_T - \bar{a}_T)^2]_n} \quad (8-2)$$

Celle-ci est d'autant plus faible que la moyenne s'effectue sur un grand nombre N de périodes.

Illustrons nos propos par l'exemple décrit à la Figure 8-1.

L'amplitude du signal affiché correspond à la déviation angulaire du bras pendulaire soumis à un échelon de couple électrostatique de périodicité $T = 512$ secondes avec une période d'échantillonnage de 1 seconde. Celui-ci est bruité par d'importants phénomènes de convection d'air.

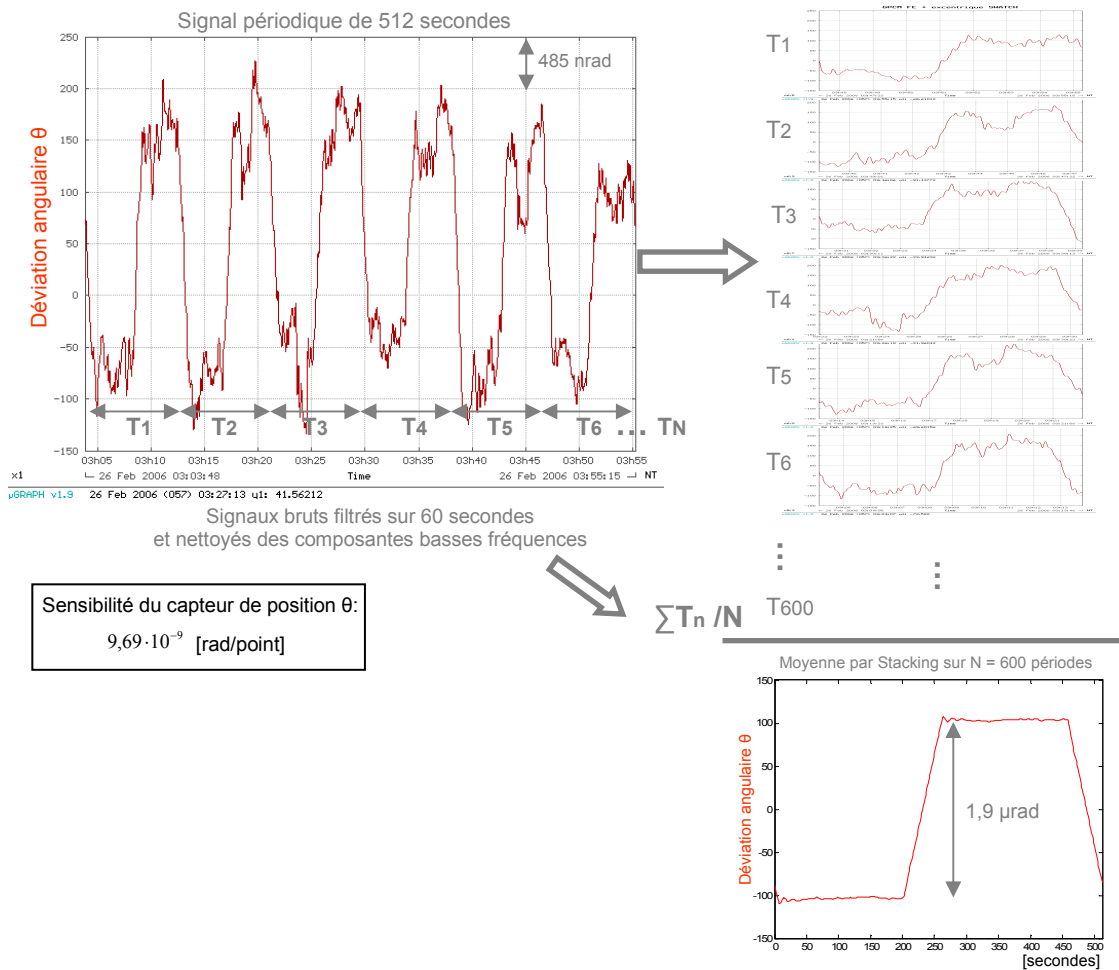


Figure 8-1 : Stacking sur un échelon de couple électrostatique appliqué sur une période de 512 secondes sur le fléau de la balance en déflexion libre sujet à d'importants phénomènes de convection de l'air (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 26/02/06).

Le graphe situé en bas à droite de la Figure 8-1 donne le résultat du stacking effectué sur 600 périodes de forçage comportant chacune 512 échantillons.

Nous observons que les effets de convection, intrinsèquement aléatoires, y sont fortement atténués. Seule subsiste la composante systématique du signal de forçage périodique.

Cette méthode très simple, souvent utilisée en météorologie ou en télécommunication, est appliquée depuis de longues années au laboratoire d'instrumentation géodynamique de l'Observatoire Royal de Belgique (ORB) dans l'étude de divers paramètres géophysiques sujets aux forçages périodiques luni-solaires [51].

Notons qu'un algorithme reposant sur cette méthode d'empilement est intégré au programme de visualisation et de traitement de donnée « MGR » [48] (utilisé dans ce travail pour présenter les signaux bruts enregistrés par notre balance) sous la dénomination de « HiCum » (Histogram Cumulation) [50].

8.1.2 Chaîne de traitement du signal

En pratique la méthode de stacking s'insère dans une chaîne de traitement de signal pouvant être décomposée en trois phases distinctes.

1) Une phase de Pré-traitement

La méthode de stacking ne permettant pas de moyenner efficacement les bruits de périodes supérieurs à la période de stacking (en particulier les dérives linéaires du signal), il est nécessaire de les soustraire préalablement du signal par filtrage. Ainsi les résultats de stacking possèdent une valeur moyenne nulle.

2) La phase de Stacking proprement dite

3) L'application d'éventuels post-traitements

La faible dispersion des valeurs autour du signal périodique extrait par stacking, permet d'appliquer plus aisément les méthodes d'analyses classiques telles que l'analyse par série de Fourier pour extraire des informations sur la composante systématique du signal.

8.1.3 Extraction de différents signaux périodiques

Le stacking permet ainsi de ne garder que les composantes systématiques relatives au signal périodique étudié. Il est ainsi possible d'extraire différents signaux de périodicités distinctes d'un seul et même signal Figure 8-2.

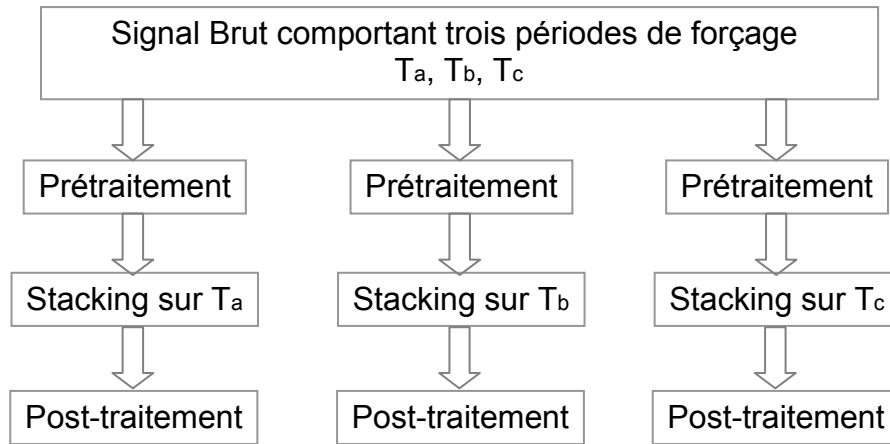


Figure 8-2 : Extraction par stacking des signaux de périodes T_a , T_b et T_c

Un exemple d'extraction de signaux lors de l'application de forçages multiples est donné à l'annexe 10.16.

Notons qu'une attention particulière doit alors être apportée au fenêtrage du signal.

On peut montrer facilement que les stackings relatifs à deux signaux de périodes T_a et T_b sont d'autant mieux démodulés que la longueur totale du signal correspond à un multiple de la période de battement des périodes T_a et T_b .

Le fait de pouvoir extraire des signaux périodiques distincts nous permet potentiellement d'appliquer plusieurs forçages en parallèle du forçage gravitationnel.

Ces forçages additionnels permettent d'apporter des informations supplémentaires sur la stabilité du facteur d'étalonnage et sur la bonne prise en charge des fluages par la boucle de rétroaction.

8.1.4 Conclusions

La méthode de stacking sera utilisée tout au long de ce chapitre pour traiter les signaux périodiques émanant de notre dispositif expérimental.

Cette méthode nécessite une grande stabilité temporelle des périodes de forçages injectés et du système d'acquisition de données.

Afin d'éviter toute perte de synchronisation du stacking sur de longues périodes, l'ensemble des actionneurs (électrostatiques et gravitationnels), ainsi que l'échantillonnage des signaux, sont pilotés par un seul et même quartz.

Seule la montre reste pilotée par un quartz indépendant. Le nombre de périodes utilisées pour réaliser la moyenne par stacking est ainsi limité par la dérive relative des deux bases de temps.

8.2 Facteur d'échelle des graphes

Afin de garder une certaine unicité dans les résultats et ne privilégier aucun couple étalon par rapport à un autre, nous garderons les coordonnées des graphes en unités brutes.

Rappelons que le signal émanant du capteur de position ($Signal_{\text{capteur}}$) et celui émanant du régulateur PID ($Signal_{\text{PID}}$) sont codés sur des variables de 16 bits et échantillonnés à une fréquence de 16 Hz par le microcontrôleur de la balance.

Pour limiter la taille des fichiers téléchargés, ces données sont généralement intégrées sur une période d'une seconde.

Nous avons vu aux chapitres 4 et 6 que le couple de rappel de la balance et le couple électrostatique appliqué étaient reliés au signal de sortie du capteur de position $Signal_{\text{capteur}}$ et au signal de sortie $Signal_{\text{PID}}$ du régulateur PID commandant l'actionneur électrostatique par les expressions (8-3) et (8-4).

$$\Gamma_{\text{Balance}} = \frac{\kappa_{\text{Balance}}}{K_1} \cdot Signal_{\text{Capteur}} \quad [N \cdot m] \quad (8-3)$$

$$\Gamma_E = K_2 \cdot Signal_{\text{PID}} \quad [N \cdot m] \quad (8-4)$$

avec pour rappel :

$\kappa_{\text{Balance}} = 0,577 \quad [N \cdot m / rad]$, la constante de rappel de la balance.

$(K_1)_{16\text{Hz}} = 4,19 \cdot 10^7$, le gain du capteur de position

$(K_2)_{100\text{V}} = 3,31 \cdot 10^{-9}$, le gain de l'actionneur électrostatique à 100 V, avant le (17/10/07)

$(K_2)_{88,8\text{V}} = 2,61 \cdot 10^{-9}$, le gain de l'actionneur électrostatique à 88,8 V, après le (17/10/07)

Le Tableau 8-1 reprend les différents facteurs d'étalonnage du capteur de position et de l'actionneur électrostatique établis aux chapitres précédents.

		Acquisition 16 Hz	Acquisition 1 Hz
Déviation angulaire θ		$2,38 \cdot 10^{-8}$ [rad/point]	$1,49 \cdot 10^{-9}$ [rad/point]
Couple rappel de la Balance Γ_{Balance}		$1,37 \cdot 10^{-8}$ [N.m/point]	$8,58 \cdot 10^{-10}$ [N.m/point]
Couple Electrostatique Γ_E	Avant le (17/10/07)	$3,31 \cdot 10^{-9}$ [N.m/point]	$2,07 \cdot 10^{-10}$ [N.m/point]
	Après le (17/10/07)	$2,61 \cdot 10^{-9}$ [N.m/point]	$1,63 \cdot 10^{-10}$ [N.m/point]

Tableau 8-1 : Ordre de grandeur des facteurs d'étalonnage des graphes présentés dans ce chapitre

Ainsi par exemple, un échelon de 500 points sur le signal du capteur de position angulaire échantillonné à 1 Hz signifie que celui-ci a mesuré une déviation angulaire de 745 nrad.

De même un signal de commande de l'actionneur électrostatique de 500 points d'amplitude échantillonné à 16 Hz signifie que celui-ci applique au bras du pendule un couple de $1,6 \mu\text{N}\cdot\text{m}$ pour les expériences ayant lieu avant le 17 octobre 2007

8.3 Facteurs d'influence environnementaux

L'objectif de ce paragraphe est de répertorier et d'analyser les principales sources de bruits susceptibles d'interférer avec le signal gravitationnel injecté.

8.3.1 Onde climatique et onde de marée

Nous allons comparer les enregistrements de notre appareil effectués en surface à l'Observatoire Royal de Belgique et en milieu souterrain au laboratoire de Walferdange au Luxembourg.

La Figure 8-3 illustre les résultats de deux expériences similaires réalisées à quelques semaines d'intervalle sur les deux sites.

Le pendule en déflexion libre est soumis au forçage des aiguilles de la montre. Les signaux sont filtrés sur une heure de sorte que seule subsiste la sinusoïde de 12 heures produite par la rotation de l'aiguille des heures de la montre.

L'amplitude totale du couple sinusoïdal appliqué au bras pendulaire est de $2 \times 2,82 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}$, ce qui correspond à une déviation angulaire du bras d'environ $1 \mu\text{rad}$.

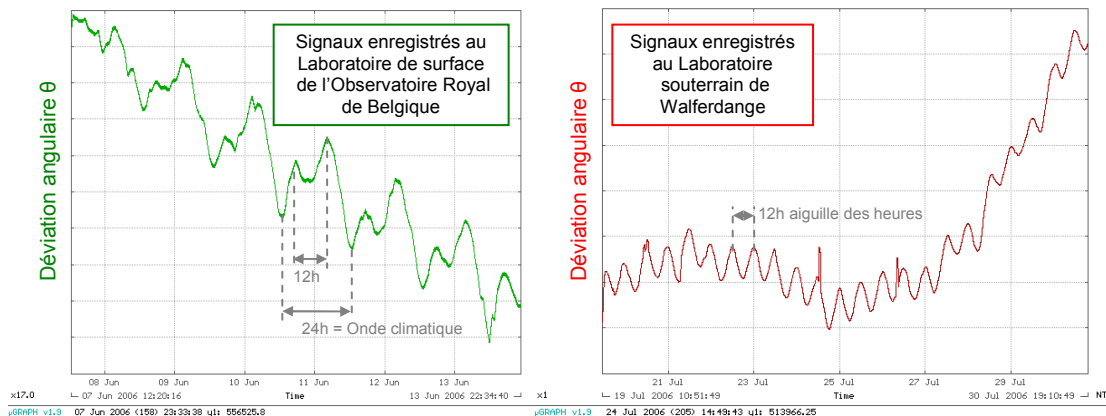


Figure 8-3 : Atténuation de l'onde climatique en milieu souterrain, comparaison des enregistrements de la position du bras du pendule soumis au forçage des aiguilles de la montre, effectués respectivement à Bruxelles et au laboratoire de Walferdange.

Nous observons que l'enregistrement en surface comporte un signal additionnel d'une périodicité de 24 heures absent de l'enregistrement en laboratoire souterrain.

Ce signal traduit la sensibilité de notre balance aux différents effets liés au cycle diurne et particulièrement au cycle diurne de la température qui peut se traduire par une dilatation thermique des matériaux constituant la balance ainsi que par des inclinaisons du sol liées à la dilatation thermique de celui-ci. Ces effets sont fortement atténués en milieu souterrain.

Ainsi, l'inclinaison périodique la plus importante enregistrée dans le laboratoire souterrain de Walferdange est liée à l'onde de marée M_2 dont la période de forçage est égale à 12h 25m 14,2s. Celle-ci correspond à la déformation de la croûte terrestre sous l'effet du forçage lunaire [56].

La Figure 8-4 illustre le résultat d'un stacking opéré sur la période de l'onde M_2 réalisé à partir des données de la Figure 8-5. La balance était alors en déflexion libre en l'absence de tout forçage externe.

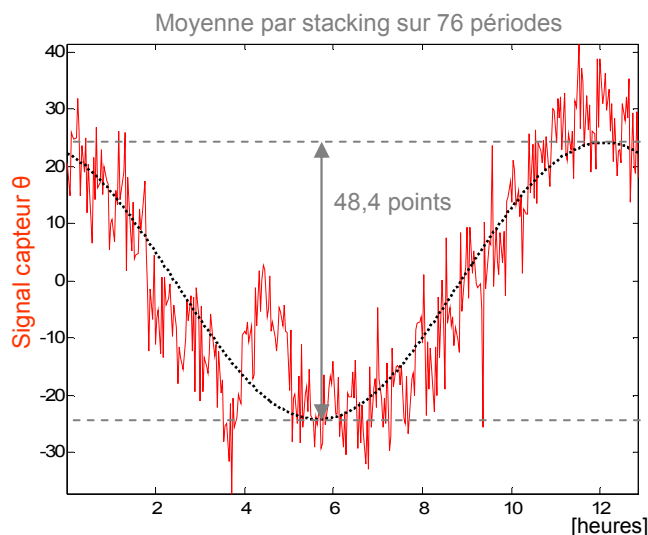


Figure 8-4 : Stacking sur l'onde de marée M_2 , Déviation angulaire mesurée sur le bras pendulaire échantillonné à 1 Hz (en rouge) et sinusoïde approchée par la méthode des moindres carrés (en pointillé) (13/06/08)

Nous observons un résidu systématique sinusoïdal dont l'amplitude totale de 2×36 nrad équivaut à 8 % de l'amplitude générée par le signal gravitationnel (928 nrad à la Figure 8-15).

Le Tableau 8-2 compare la valeur de l'amplitude du résidu enregistré par notre appareil avec les valeurs théoriques de l'amplitude de l'onde de marée M_2 à Walferdange [52].

Direction	M_2 théorique	Déviation angulaire du bras
Nord/Sud	37,8 nrad	~36 nrad (Axe à 37,6°Nord Est)
Est/Ouest	49,6 nrad	

Tableau 8-2 : Amplitude théorique de l'onde de marée M_2 à Walferdange et valeur mesurée avec notre dispositif expérimental

L'analyse du Tableau 8-2 nous indique que les ordres de grandeur entre les amplitudes théoriques et mesurées sont relativement cohérents.

Rappelons que notre appareil est positionné à l'extrémité de la galerie du laboratoire. Or cette position est sujette à des effets dits de « cavité » : La déformation locale des roches peut induire des écarts de plusieurs dizaines de pour cent entre la valeur des inclinaisons enregistrées et celles données théoriquement [55].

Rappelons également que la déviation angulaire du bras pendulaire est atténuée de 9 % par rapport à l'inclinaison réelle du sol, du fait de la présence du couple de rappel du pivot à lames flexibles.

Les ondes de marées théoriques ne permettent pas dans ces conditions de fournir directement un facteur d'étalonnage additionnel pour notre appareil. En revanche, leur enregistrement donne une bonne indication sur la stabilité des étalonnages à long terme. Nous allons voir au paragraphe suivant que la dérive du point de fonctionnement de notre pendule balaye en pratique des plages beaucoup plus importantes. L'origine de ces dérives est purement instrumentale et probablement imputable en grande partie à des phénomènes de relaxation au niveau du pivot à lames flexibles.

8.3.2 Dérive à long terme et influence des forçages micro et macrosismiques

La Figure 8-5 illustre un enregistrement sur une période de plus d'un mois de la position du bras du pendule en l'absence de tout forçage externe.

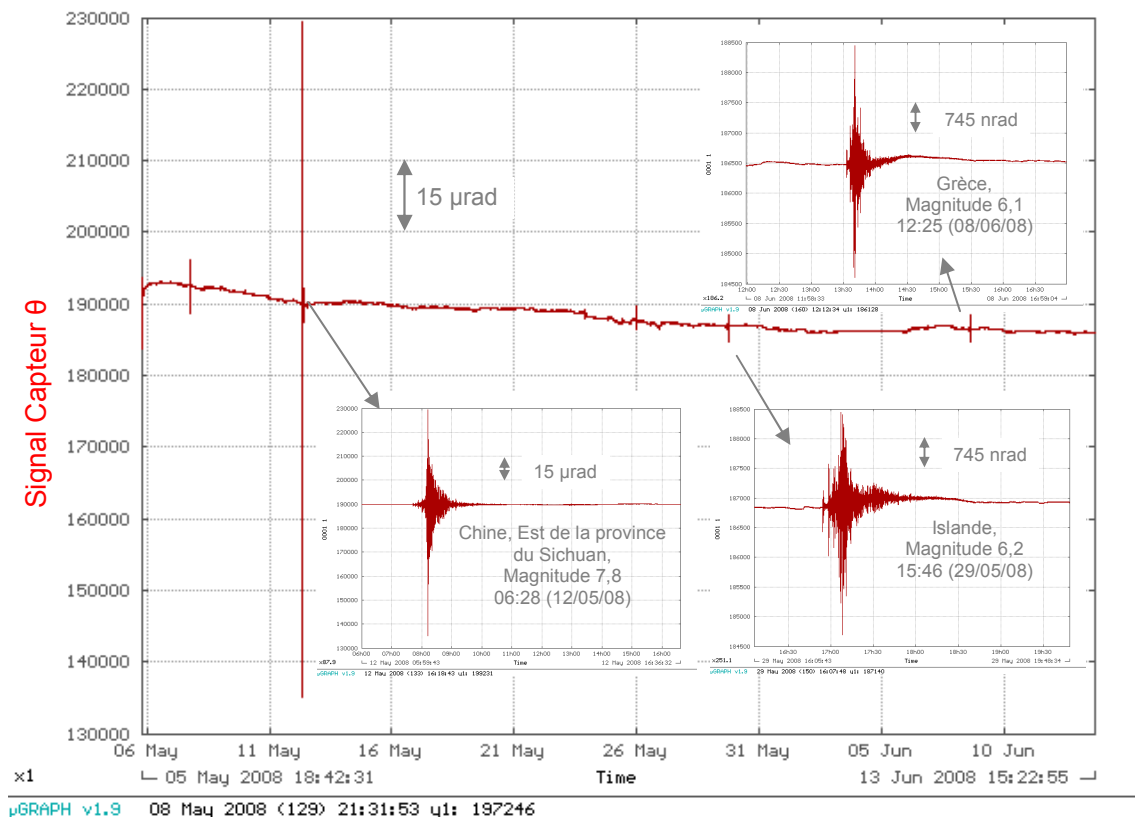


Figure 8-5 : Enregistrement de la position du bras pendulaire sur une période de 34 jours (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, Mai-Juin 2008)

La relaxation des différentes contraintes mécaniques liées à la structure de la balance et au pivot à lames flexibles ainsi que les éventuelles dérives de l'électronique font que la stabilité globale du point de fonctionnement à long terme est plutôt de l'ordre d'une

quinzaine de microradians, soit trente fois l'amplitude théorique engendrée par l'échelon de couple gravitationnel.

Outre la dérive du point de fonctionnement, nous observons sur la Figure 8-5 le passage d'une série de trois séismes majeurs provenant de différentes parties du globe.

Les amplitudes des déviations angulaires enregistrées sur le bras pendulaire peuvent alors dépasser la valeur de $100\ \mu\text{rad}$ selon la localisation et le type de séisme enregistré.

La Figure 8-6 illustre un enregistrement de cinq jours de la balance en rétroaction de position, soumis au forçage des aiguilles de la montre.

Le graphe du haut donne le signal de sortie du capteur de position (en rouge), tandis que le graphe du bas donne la valeur du signal PID commandant l'actionneur électrostatique assurant la rétroaction de position (en bleu).

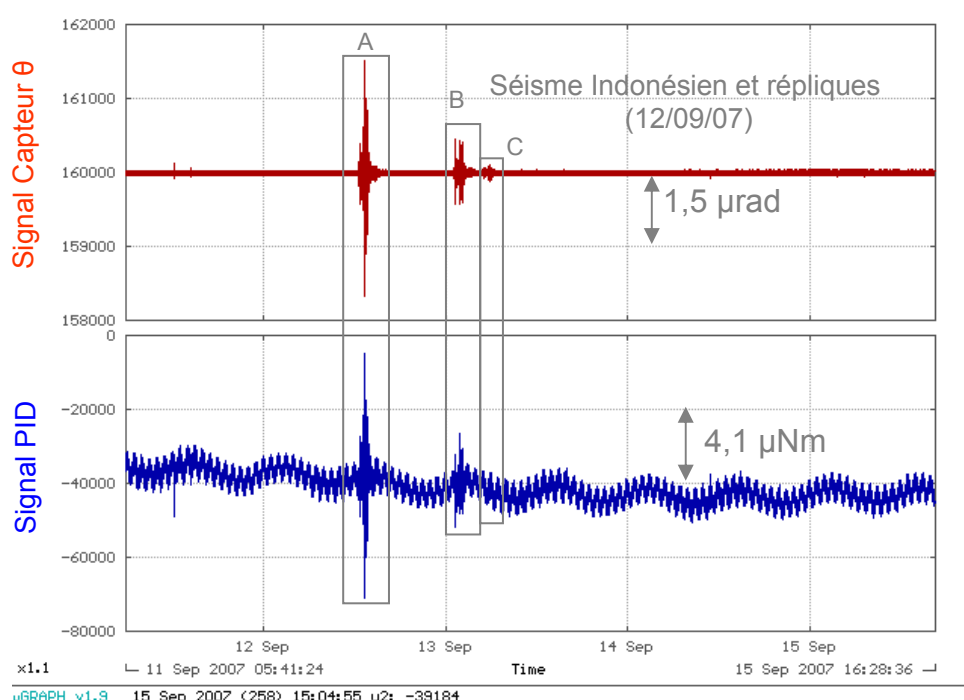


Figure 8-6 : Balance en rétroaction de position sujet au forçage des aiguilles de la montre. Les trois perturbations encadrées correspondent à l'enregistrement du séisme indonésien du (12/09/07) et de deux de ses répliques (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz).

Nous observons trois perturbations liées au séisme indonésien du (12/09/07) et de deux de ses répliques principales. Celles-ci sont reprises séparément sur les trois graphes de la Figure 8-7.

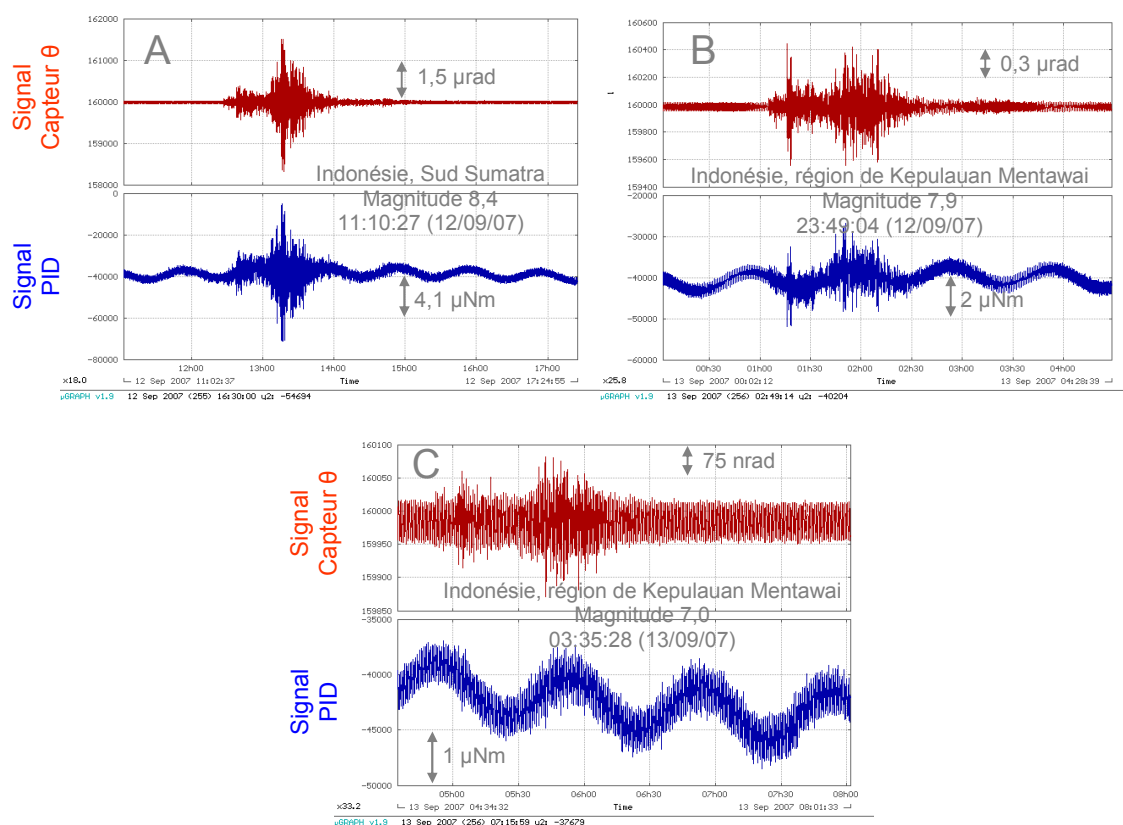


Figure 8-7 : Détails des signaux liés au séisme indonésien du (12/09/07) et de ses répliques enregistrés sur notre balance en asservissement de position (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz)

Nous enregistrons au plus fort du séisme un écart de 2 μrad sur la position angulaire par rapport à la position de consigne. L'amplitude de la perturbation est alors de quatre à cinq fois supérieure à l'amplitude induite par la rotation de l'aiguille des secondes de la montre. Rappelons que celle-ci est équivalente à l'amplitude du signal gravitationnel observé.

La géométrie de notre pendule astatisé en fait un sismomètre aux propriétés particulières : Il est sensible à la composante d'accélération angulaire correspondant au degré de liberté du bras pendulaire tout en atténuant les composantes verticales et horizontales des accélérations sismiques.

Une telle caractéristique semblerait trouver un certain intérêt en sismologie, notamment pour corriger le bruit lié aux inclinaisons du sol enregistrées par les sismomètres classiques. Une expérience exploratoire a été développée en ce sens en 2003 au Albuquerque Seismological Laboratory (ASL) [28]. Cette expérience basée sur un pendule astatisé en déflexion libre a donné des résultats encourageants.

La Figure 8-8 correspond à un enregistrement du pendule en déflexion libre effectué avec une fréquence d'échantillonnage de 16 Hz sur une période de trois jours en l'absence de tout forçage. Le signal du graphe supérieur donne la déviation angulaire du bras tandis que le graphe inférieur donne l'écart de position entre deux valeurs adjacentes (Signal différentiel).

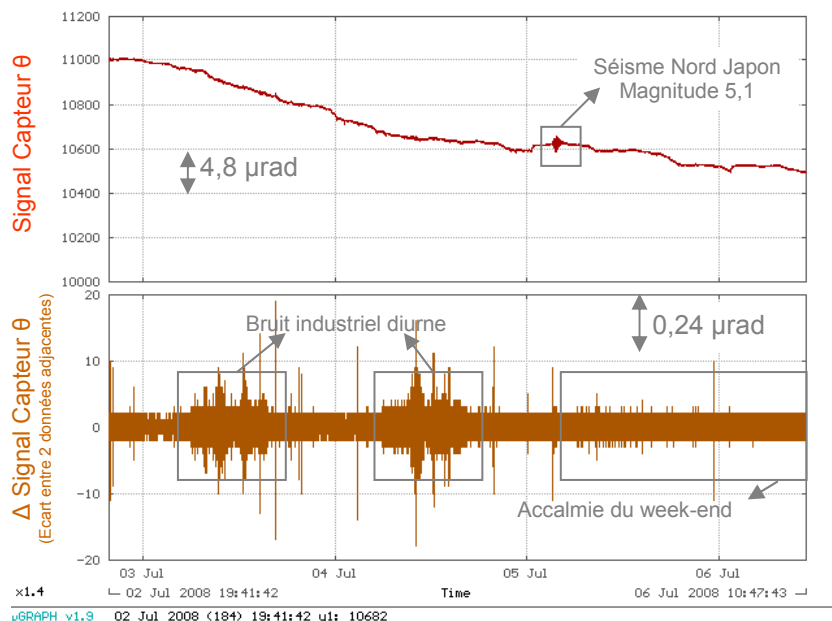


Figure 8-8 : Illustration de l'incidence sur notre balance en déflexion libre de la fluctuation quotidienne de l'activité micro sismique (Fréquence d'échantillonnage de 16 Hz, juillet 2008)

Nous observons très nettement sur le graphe inférieur une augmentation du bruit sismique diurne lié à l'ensemble des bruits engendrés par l'activité humaine (routes, trains, industrie,...), et une diminution lors des périodes de week-end.

Ce bruit, dit industriel, agit dans une bande de fréquence de 1 à 10 Hz [7].

L'amplitude RMS sur le signal différentiel est de l'ordre de $\pm 65 \cdot 10^{-9}$ rad la journée pour tomber à $\pm 22 \cdot 10^{-9}$ rad la nuit, ce qui correspond théoriquement à respectivement 14 et 4,7 % de l'amplitude du signal gravitationnel théorique injecté.

Le bruit observé est ainsi plus élevé de plusieurs ordres de grandeur que le bruit RMS théorique de $3 \cdot 10^{-11}$ rad établi au §4.3.1 dans l'étude de la sensibilité du pendule aux accélérations horizontales du sol.

Ce constat mène à plusieurs observations :

- L'amplitude du bruit industriel peut augmenter de plusieurs ordres de grandeur selon les sites et les périodes de mesure par rapport aux amplitudes prises dans nos modèles.
- Une fraction du bruit observé provient probablement des accélérations angulaires du sol. La littérature offre malheureusement peu de renseignements sur l'amplitude des niveaux de bruits correspondants. Une évaluation expérimentale de l'amplitude des accélérations angulaires du sol peut être réalisée en comparant les signaux émanant de notre pendule et d'un sismomètre mesurant la composante x des accélérations du sol.
- Le bruit industriel observé excite probablement des modes résonnants correspondant aux degrés de liberté de mouvements résiduels non amortis de notre pivot à lames flexibles. Un pivot mieux contraint en degré de liberté de mouvement devrait donner de meilleurs résultats.
- Observons enfin que l'amplitude RMS des bruits observés sont très proches de la limite de résolution du capteur de position qui est de $23 \cdot 10^{-9}$ rad à la fréquence d'échantillonnage de 16 Hz.

Notons encore que nous n'avons pas pu mettre clairement en évidence la présence de bruit sur les périodes de quatre, six et dix secondes correspondant à l'agitation microsismique [7]. Cela s'explique probablement par la résolution limitée de notre capteur de position et par l'absence de modes propres résonnant du pendule à ces périodes.

Notons qu'il est également possible de déduire l'accélération angulaire perçue par le bras pendulaire en différenciant deux fois le signal de position angulaire de la Figure 8-8. La fréquence d'échantillonnage et la résolution limitée du capteur ne sont cependant pas suffisantes pour extraire des informations exploitables d'une telle opération.

8.4 Forçages périodiques en mode libre

L'ensemble des forçages périodiques appliqués à la balance en déflection libre et leur disposition au sein du schéma fonctionnel correspondant sont répertoriés à la Figure 8-9.

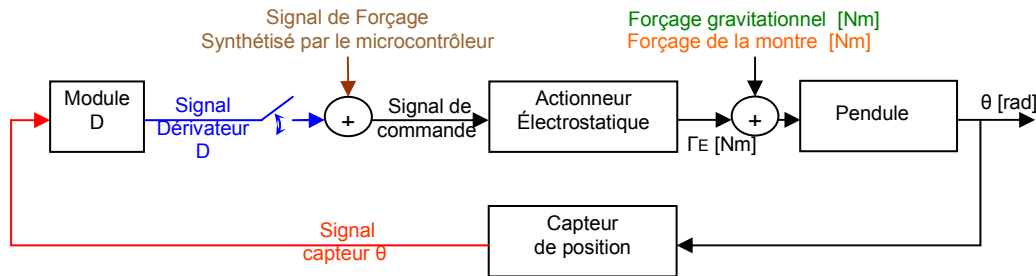


Figure 8-9 : Schéma fonctionnel de la balance en déflection libre

L'application de ces forçages va nous permettre d'établir les principales caractéristiques de la balance et du pivot à lames flexibles. Leur comparaison permettra de fixer le facteur d'étalonnage de l'échelon gravitationnel appliqué.

Notons que le signal de commande de l'actionneur électrostatique vaut ici :

$$Signal_{Comande} = Signal_D + Signal_{Forçage} \quad (8-5)$$

où la variable $Signal_D$, désigne le signal de sortie du module D du régulateur PID. La variable $Signal_{Forçage}$ représente le signal de forçage synthétisé par le microcontrôleur.

8.4.1 Réponses indicielles et impulsionnelles

Nous souhaitons établir les principales caractéristiques du pendule en déflection libre, notamment en terme de période propre et d'amortissement mais aussi en terme de réponse en fréquence.

Nous donnerons également un exemple de réponse indicielle réalisée avec et sans amortisseur électrostatique.

La Figure 8-10 illustre la réponse indicielle de la balance à un échelon de couple électrostatique produit par l'électrode C_{34} .

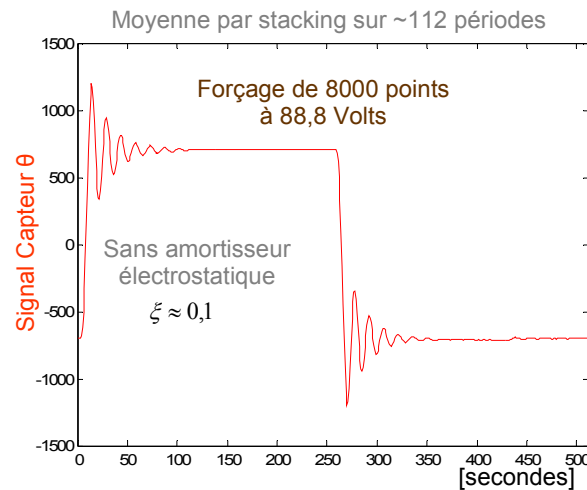


Figure 8-10 : Réponse indicielle lors de l'application d'un couple électrostatique de 8000 points (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 7 novembre 2007)

La période propre du pendule est d'environ 15 secondes tandis que son coefficient d'amortissement est ici de l'ordre de 0,1 [N·m·s/rad].

Celui-ci peut varier de 0,1 à plus de 0,5 selon le point de fonctionnement du pendule.

Il est essentiellement fonction de l'amortissement à air et des dissipations se produisant au sein des lames flexibles.

Etablissons la réponse en fréquence expérimentale de notre balance :

Dans le cas d'un système linéaire et invariant, celle-ci peut être calculée à partir de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système.

La réponse impulsionnelle correspond à la réponse d'un système linéaire à une impulsion dite de Dirac. Une telle impulsion a la propriété de posséder une valeur constante sur tout le spectre de fréquence. Autrement dit, cette procédure est équivalente à appliquer à notre système des forçages sinusoïdaux d'amplitude constante sur tout le spectre de fréquence.

La réponse impulsionnelle du système peut être approchée avec une bonne précision en calculant la dérivée première de la réponse indicielle.

Celle-ci est obtenue dans notre cas de figure par une simple décimation entre deux valeurs adjacentes de la réponse indicielle obtenue à la Figure 8-10 (Figure 8-11).

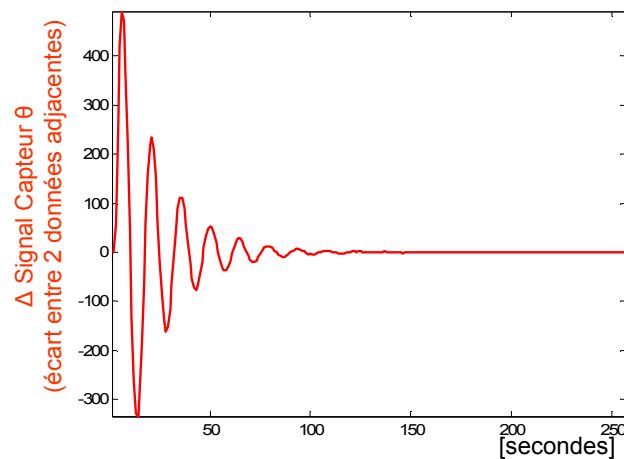


Figure 8-11 : Réponse impulsionnelle déduite de la dérivée première de la réponse indicielle (7 novembre 2007)

La Transformée de Fourier (TF) de la réponse impulsionnelle nous donne alors la réponse en fréquence de notre système à un couple externe (en rouge sur la Figure 8-12)

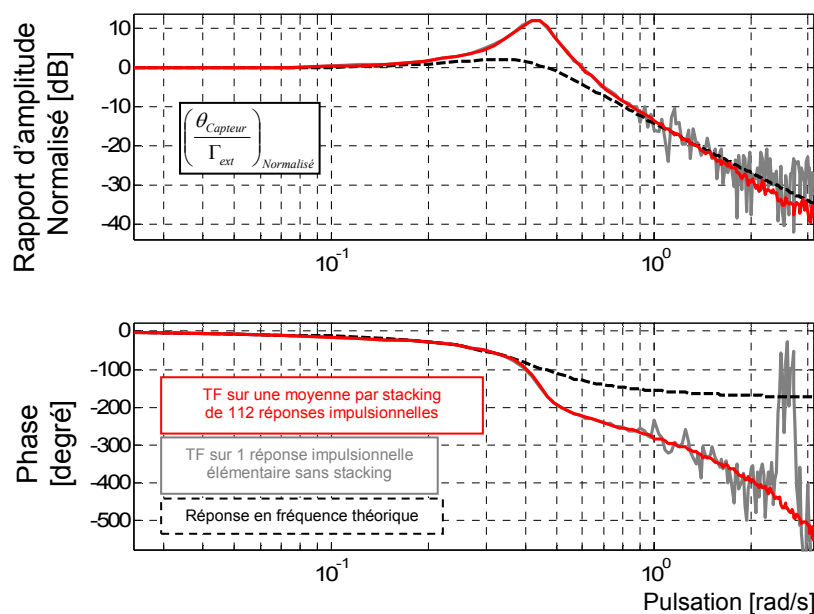


Figure 8-12 : Réponse en fréquence expérimentale avec stacking (en rouge) et sans stacking (en gris) déduit de la réponse indicielle du (07/11/07) et réponse en fréquence théorique (en pointillé)

La courbe en pointillé donne la réponse en fréquence théorique déduite des paramètres du Tableau 4-1 pour une valeur de rapport d'amortissement critique.

Nous observons que le diagramme des phases présente des biais d'autant plus importants que les fréquences étudiées se rapprochent de la valeur de fréquence d'échantillonnage. Ces biais sont purement calculatoires. Ainsi par exemple, pour une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, nous n'avons que dix points pour calculer la valeur du déphasage à 0,1 Hz.

Une manière de pallier les biais induits par la fréquence d'échantillonnage sur le diagramme des phases serait d'extrapoler localement les points intermédiaires de la réponse indicielle par le biais d'un polynôme glissant.

Insistons sur le fait que le stacking réalisé sur la réponse indicielle permet de ne garder que la composante systématique du signal. Le diagramme de Bode de la Figure 8-12 est ainsi peu bruité. À titre de comparaison, nous avons tracé en grisé, la réponse en fréquence déduite de la réponse indicielle non moyennée par stacking correspondant à l'application d'un unique échelon de couple.

Notons enfin que notre actionneur électrostatique permet de générer directement un signal proche d'une impulsion de Dirac. Cette manière de procéder a l'avantage d'éviter de passer par la dérivée de la réponse indicielle et donc de diminuer singulièrement les bruits observés sur la Figure 8-12. Elle n'a néanmoins pas été utilisée dans le cadre des expériences présentées dans ce travail.

8.4.1.1 Amortisseur électrostatique

Comme exposé à la Figure 8-9, le signal du module dérivateur D du régulateur PID est appliqué en parallèle avec le signal de forçage au travers de notre actionneur électrostatique. Celui-ci permet d'amortir le système en appliquant un couple électrostatique proportionnel et antagoniste à la vitesse de déplacement du bras pendulaire [18].

Cette configuration, contrairement aux amortisseurs à courant de Foucault, a l'avantage d'être indépendante de la susceptibilité magnétique résiduelle du bras pendulaire. Elle n'induit pas de couple de rappel magnétique parasite. Dans le cas d'une expérience préliminaire sur notre pendule, nous avons observé une diminution d'un facteur deux de la période propre du pendule (de 30 à 15 secondes) à l'approche d'un aimant permanent au voisinage de la masse pendulaire inférieure.

La possibilité d'amortir le pendule sera indispensable à terme pour travailler sous atmosphère réduite.

La Figure 8-13 illustre la réponse à un échelon électrostatique en mode libre sans et avec l'application de l'amortisseur électrostatique. Les signaux ont été échantillonnés à la fréquence de travail du régulateur, soit 16 Hz.

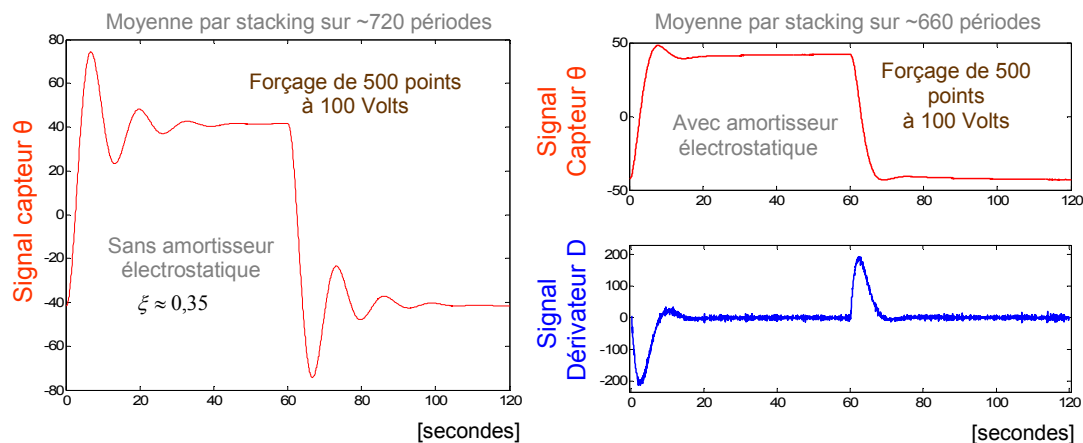


Figure 8-13 : Réponse du pendule en mode libre sans et avec amortisseur électrostatique à un échelon électrostatique de 500 points (Fréquence d'échantillonnage de 16 Hz, le 29 et 28/07/07)

Notons que la valeur du rapport d'amortissement résiduel en l'absence d'amortisseur électrostatique est ici de l'ordre de 0,35 [N·m·s/rad] alors qu'il n'était que de 0,1 [N·m·s/rad] à la Figure 8-10.

Observons également que les couples électrostatiques injectés par l'amortisseur travaillent autour de la valeur zéro. Or nous avons vu que les gains des deux électrodes de l'actionneur ne sont pas forcément identiques et que ceux-ci sont biaisés pour des valeurs proches des fonds d'échelle (§6.1.1).

Nous avons ici un amortisseur non-linéaire qui ne permet pas d'amortir correctement les petits signaux. Une manière de palier ce biais serait d'appliquer un couple électrostatique constant en parallèle de sorte qu'une seule et unique électrode soit mise à contribution et ce, loin de ses valeurs de fond d'échelle. (Le résultat d'une telle expérience est illustré lors de la présentation de l'interface de commande de la Figure 3-15).

8.4.2 Réponse indicielle à flancs progressifs : Amplitude des fluages en fonction de l'amplitude de l'échelon de forçage

Nous souhaitons montrer ici l'évolution de l'amplitude du fluage du pivot à lames flexibles en fonction de l'amplitude de l'échelon de couple appliqué au bras pendulaire.

Nous allons pour ce faire, appliquer deux échelons de couples électrostatiques d'amplitudes différentes dont la transition entre deux niveaux s'établit progressivement de telle sorte que le pendule puisse être considéré à l'équilibre statique durant toute la durée du transitoire. Ce mode opératoire nous permet de nous contenter de l'amortissement à air.

Les flancs des échelons sont ici construits à partir d'un signal sinusoïdal, la période de transition entre deux niveaux est de 60 secondes.

La Figure 8-14 illustre les déviations angulaires de 2,01 et 0,124 μrad produits respectivement par deux échelons électrostatiques progressifs dont les amplitudes sont

équivalentes respectivement à deux fois et 10 % de l'amplitude du signal gravitationnel observé.

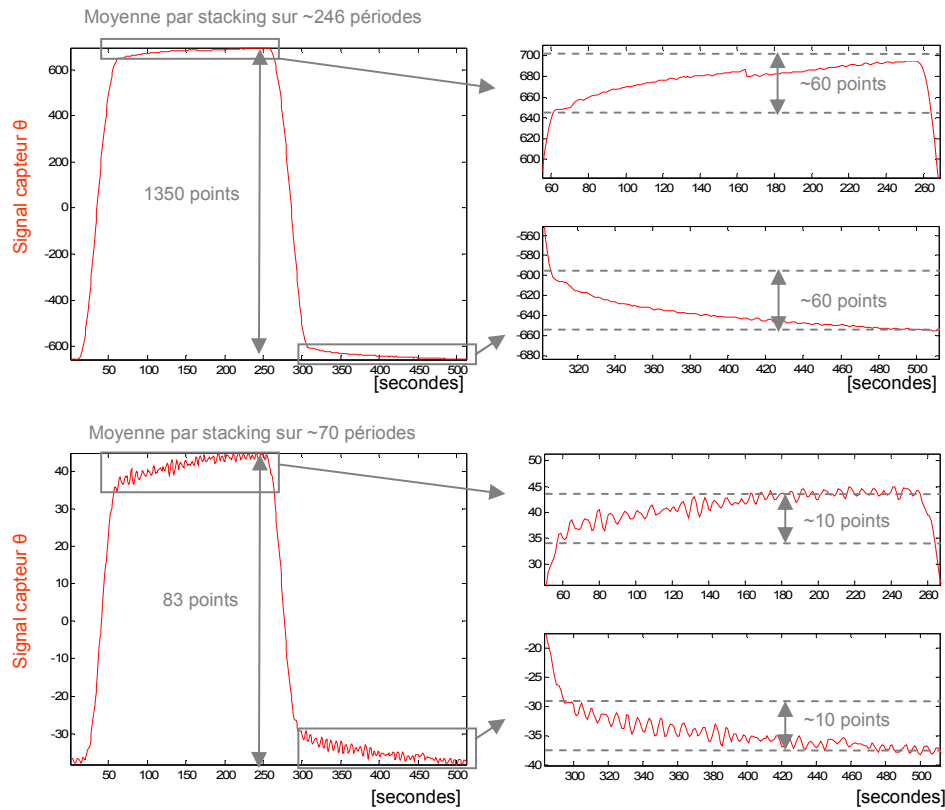


Figure 8-14 : Amplitude des fluages en fonction de l'amplitude de l'échelon électrostatique appliqué (le graphe du dessous correspond à un forçage d'amplitude 6 fois inférieur au forçage gravitationnel, le graphe du dessus à un forçage 3 fois supérieur) (respectivement le 28 et 29/02/08, fréquence d'échantillonnage de 1 Hz)

Nous observons que les amplitudes relatives des fluages observés représentent alors respectivement 4 et 12 % de l'amplitude des échelons angulaires observés.

Autrement dit, dans le cas de notre suspension au point de fonctionnement considéré, l'amplitude relative du fluage par rapport à l'amplitude totale du signal est d'autant plus élevée que l'amplitude de l'échelon appliqué est faible. Observons que l'amplitude élevée des fluages observés résultent probablement de dépassements ponctuels de la limite élastique des lames flexibles au niveau de l'interface avec les mâchoires de serrage (§4.7.2).

8.4.3 Forçages multiples et facteurs d'étalonnage

Nous allons utiliser notre pendule en tant que balance de force et étalonner l'échelon de couple gravitationnel appliqué avec nos trois étalons de couple disponibles en déflexion libre.

La Figure 8-15 illustre les déviations angulaires produites par l'application successive d'un échelon de couple gravitationnel suivi d'un échelon de couple électrostatique et du démarrage de la montre à aiguille.

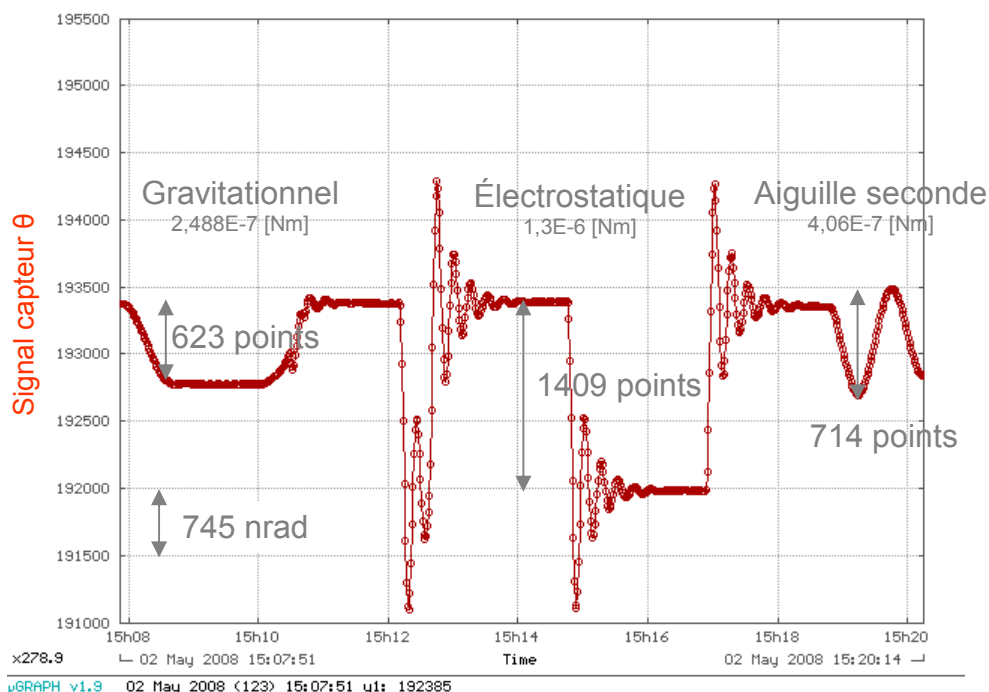


Figure 8-15 : Signal brut en acquisition seconde du pendule en mode libre sous l'action de forçages multiples. (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 02/05/08)

Les valeurs des amplitudes correspondant aux forçages des aiguilles des minutes et des secondes ont été déduites du stacking de la Figure 8-16.

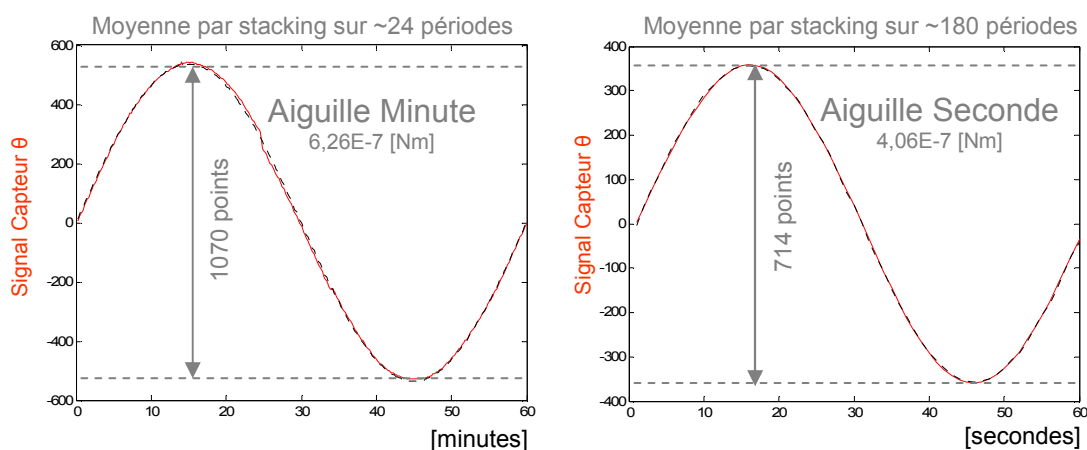


Figure 8-16 : Déviation angulaire résultant de la rotation de l'aiguille des minutes (en rouge) et sinusôides approchées par la méthode des moindres carrés (en pointillé)

Nous observons au passage que le rapport d'amplitude entre la déviation angulaire produite par l'aiguille des minutes et l'aiguille des secondes vaut ici 1,5. Cette valeur ne

s'écarte que de 3 % du rapport 1,54 déduit des données fournies par le constructeur (Tableau 4-3).

Cette dernière observation est importante, car elle tend à montrer que l'effet des fluages au point de fonctionnement considéré n'a qu'une incidence limitée sur les résultats obtenus. Notons à ce sujet que les fluages observés peuvent varier considérablement en fonction du point de fonctionnement utilisé. La valeur de la déviation angulaire produite par l'aiguille des secondes peut alors être atténuée de plusieurs dizaines de pour cent.

L'échelon de couple électrostatique observé à la Figure 8-15 est produit par un signal PID de 8000 points échantillonné à 1 Hz.

En tenant compte des biais de fond d'échelle relatifs à l'actionneur électrostatique mentionnés au §6.1.1, nous montrons à l'annexe 10.12 que le couple électrostatique réellement appliqué par l'actionneur électrostatique est atténué de 17 %, soit ici $1,08 \cdot 10^{-6}$ Nm.

Le Tableau 8-3 reprend les valeurs des différents forçages appliqués ainsi que les valeurs des déviations angulaires résultantes.

Forçages appliqués		Déviation angulaire résultante		Couple de rappel pendulaire résultant [Nm]
Type	Amplitude théorique [Nm]	Signal Capteur θ [#]	Déviation angulaire θ [rad]	
Échelon gravitationnel	$2,698 \cdot 10^{-7}$	623	$9,28 \cdot 10^{-7}$	$5,36 \cdot 10^{-7}$
Aiguille seconde	$4,06 \cdot 10^{-7}$	714	$1,06 \cdot 10^{-6}$	$6,14 \cdot 10^{-7}$
Aiguille minute	$6,26 \cdot 10^{-7}$	1070	$1,59 \cdot 10^{-6}$	$9,20 \cdot 10^{-7}$
Echelon électrostatique* (*corrigé)	$1,08 \cdot 10^{-6}$	1409	$2,10 \cdot 10^{-6}$	$1,21 \cdot 10^{-6}$

Tableau 8-3 : Récapitulatif des forçages injectés

En appliquant une règle de 3 sur les valeurs du Tableau 8-3, nous pouvons déduire les différents facteurs d'étalonnages de l'échelon de couple gravitationnel appliqué (Tableau 8-4).

Etalons	Echelon gravitationnel $\Delta\Gamma_G$ [N·m]	Ecart* [%]
Calcul théorique	$2,698 \cdot 10^{-7}$	0
Aiguille seconde	$3,54 \cdot 10^{-7}$	+31
Aiguille minute	$3,64 \cdot 10^{-7}$	+35
Electrostatique	$4,78 \cdot 10^{-7}$	+77
Couple de rappel de la Balance	$5,36 \cdot 10^{-7}$	+98

Tableau 8-4 : Facteurs d'étalonnage de l'échelon de couple gravitationnel en mode libre

Nous observons que la valeur de l'échelon de couple gravitationnel est surestimée par les quatre facteurs d'étalonnage mentionnés au Tableau 8-4.

Ce constat nécessite plusieurs commentaires :

Nous observons sans surprise que les facteurs d'étalonnage déduits du couple de rappel du pendule et des couples électrostatiques appliqués représentent les plus grands écarts vis à vis de la valeur théorique de l'échelon de couple gravitationnel appliqué.

Rappelons en effet que ces deux étalons de couple dépendent tous deux de la précision sur l'étalon d'angle θ donnée par le micromètre étalon.

Or nous avons vu que celle-ci est probablement biaisée de plusieurs dizaines de pour cent.

Observons également que le couple de rappel du pendule est proportionnel à l'angle θ (4-2) tandis que le couple électrostatique appliqué est inversement proportionnel à cet angle (6-7).

De sorte qu'une même erreur sur le facteur d'étalonnage de l'angle θ devrait induire une erreur identique sur les valeurs des deux étalons de couple considérés mais de signe opposé [74]. La valeur réelle du couple à étalonner étant alors égale à la valeur moyenne des deux couples étalon utilisés.

L'analyse du Tableau 8-4 nous montre néanmoins que ces deux étalons de couple donnent tous deux une surestimation de la valeur de l'échelon de couple gravitationnel théorique et des couples engendrés par la rotation des aiguilles de la montre.

Ce constat est probablement à imputer aux non linéarités importantes du capteur de position et de l'actionneur électrostatique couplé au fait que les étalonnages ont été effectués plusieurs mois avant les mesures présentées ci-dessus.

Ces résultats pourraient également trahir la présence de biais non maîtrisés au niveau des tensions appliquées aux électrodes de l'actionneur électrostatique.

Des investigations supplémentaires doivent être menées à ce sujet.

Observons néanmoins que nous avons pu réaliser un étalonnage cohérent au pour cent entre nos trois étalons de couple lors d'une expérience préliminaire présentée à l'annexe 10.19.

Cette expérience différait sur trois points :

- Absence de glissement au niveau du micromètre assurant l'étalon d'angle.
- Utilisation d'un pivot à billes offrant un unique degré de liberté de mouvement en rotation.
- Application des tensions d'asservissement en continu et non en MLI.

Ainsi les facteurs d'étalonnage des couples produit par les aiguilles de la montre déduits des données du constructeur ont pu être vérifiés par plusieurs méthodes indépendantes au niveau du pour cent (annexes 10.7 et 10.19.3).

Aussi l'écart moyen de 33 % obtenu entre la valeur théorique de l'échelon de couple gravitationnel appliqué et les facteurs d'étalonnage donnés par les aiguilles des minutes et des secondes de la montre est plus problématique à justifier.

Nous verrons au §8.5.3 que les écarts entre les différents facteurs d'étalonnage observés au Tableau 8-4 restent relativement identiques en mode asservi.

Nous étudierons alors plus en détails les éventuelles causes de biais susceptibles de justifier les écarts observés entre le facteur d'étalonnage donné par les aiguilles de la montre et la valeur théorique de l'échelon de couple gravitationnel appliqué.

8.5 Forçages périodiques en Mode asservi

L'ensemble des forçages périodiques appliqués à la balance en mode asservi et leur disposition au sein du schéma fonctionnel correspondant sont répertoriés à la Figure 8-17.

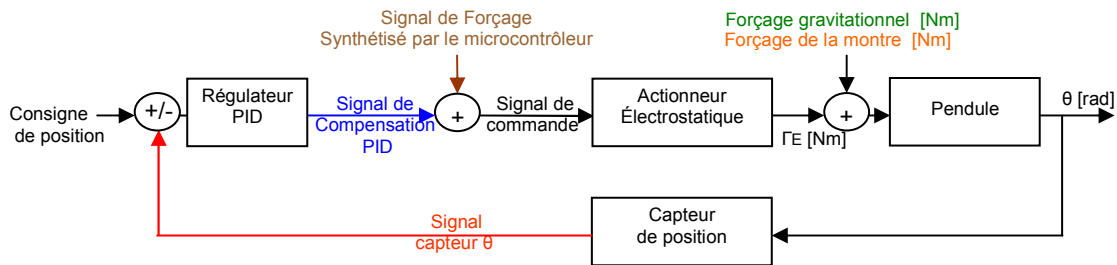


Figure 8-17 : Schéma fonctionnel de la balance en mode asservi (Le signal de compensation et le signal de forçage électrostatique utilisent le même actionneur électrostatique).

L'application de ces forçages va nous permettre d'établir les principales caractéristiques de la balance en mode asservi et plus particulièrement d'étudier la bonne compensation du couple de rappel mécanique des pivots à lames flexibles par la boucle d'asservissement de position.

La comparaison des différents couples de forçage permettra de fixer le facteur d'étalonnage de l'échelon gravitationnel appliqué.

Notons que le signal de commande de l'actionneur électrostatique vaut ici :

$$Signal_{Commande} = Signal_{PID} + Signal_{Forçage} \quad (8-6)$$

où la variable $Signal_{PID}$, désigne le signal de sortie du régulateur PID et la variable $Signal_{Forçage}$ représente le signal de forçage synthétisé par le microcontrôleur.

La Figure 8-18 donne un exemple de réponse de la balance à un échelon de couple électrostatique progressif sans et avec rétroaction de position.

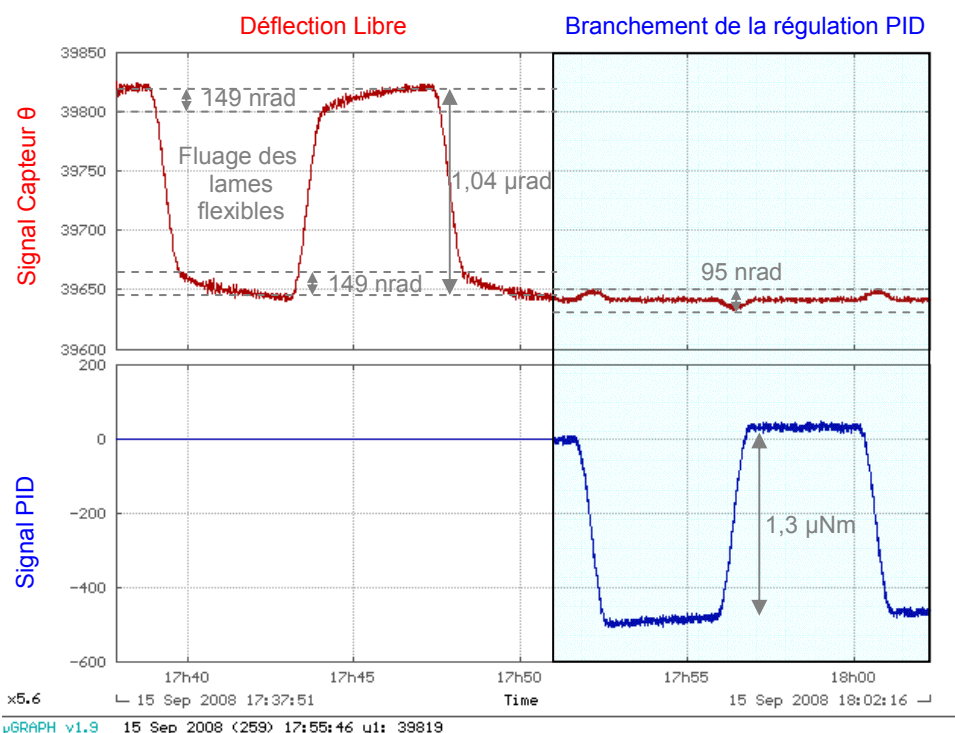


Figure 8-18 : Réponse à un échelon de couple électrostatique progressif de 500 points d'amplitude en déflection libre et en rétroaction de position (Fréquence d'échantillonnage et de fonctionnement du régulateur de 4 Hz avec un offset de -5000 points, le 15/09/08).

Nous observons clairement l'atténuation des fluages en mode asservi. Nous verrons que l'influence de ceux-ci reste limitée par la résolution imposée par le capteur de position. (Les courbes de la Figure 8-18 ont été obtenues en appliquant un couple électrostatique constant en parallèle de telle sorte que le signal de l'actionneur électrostatique soit éloigné des valeurs de fond d'échelle en mode libre).

Nous présenterons au §8.5.2 un mode opératoire permettant d'évaluer de manière objective la prise en charge des phénomènes anélastiques par la boucle de rétroaction de position.

8.5.1 Réponse indicielle et impulsionnelle

De manière analogue à ce que nous avons réalisé en déflection libre, nous allons établir la réponse en fréquence expérimentale de la balance en mode asservi sous l'action d'un échelon de couple électrostatique.

La Figure 8-19 illustre le résultat du stacking effectué sur une période de forçage fixée ici à 512 secondes.

Au signal de compensation du graphe inférieur (en bleu), nous avons superposé le signal de forçage inversé (en brun), synthétisé par le microcontrôleur.

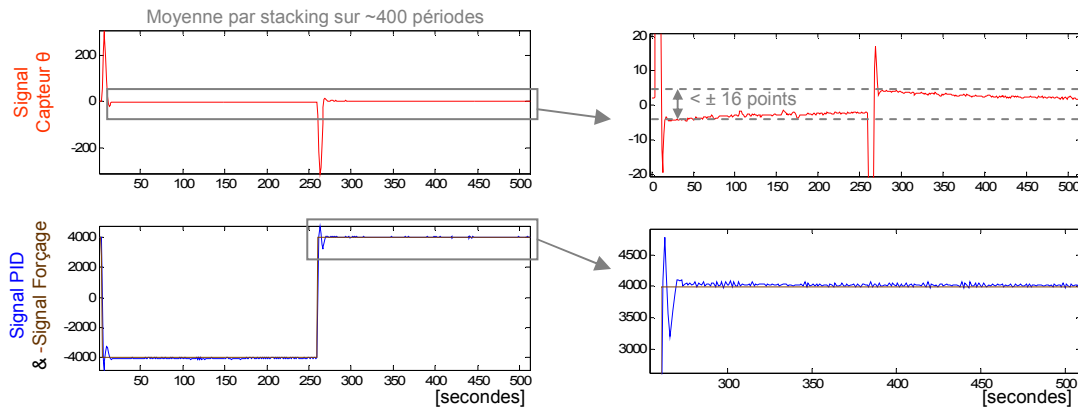


Figure 8-19 : Echelon électrostatique injecté et signal de compensation émanant de la boucle d'asservissement de position (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz et actionneur électrostatique à 100V le 19/08/07).

En calculant la transformée de Fourier du signal de compensation PID de la réponse indicielle de la Figure 8-19, nous obtenons la valeur du signal de compensation PID (en bleu) en fonction de la fréquence du couple de forçage injecté (Figure 8-20).

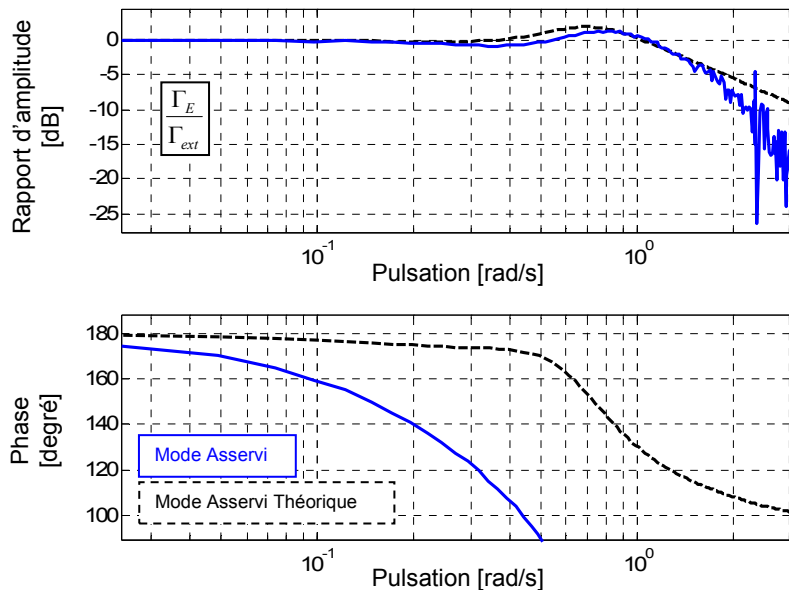


Figure 8-20 : Signal de compensation PID: Réponse en fréquence expérimentale (en bleu) déduite de la réponse indicielle du (19/08/07) et réponse en fréquence théorique (en pointillé)

La courbe en pointillé donne la réponse en fréquence théorique déduite des paramètres du Tableau 7-5 pour une tension de travail de l'actionneur électrostatique de 100 Volts. De manière analogue au cas de la réponse indicielle en déflection libre de la Figure 8-12, nous observons un décrochage entre les courbes expérimentales et théoriques pour les hautes fréquences du fait du sous échantillonnage.

Notons que la courbe expérimentale est très bruitée pour les hautes fréquences du fait de la présence du module D.

Les rapports d'amplitudes théoriques et expérimentaux divergent particulièrement entre 0,3 et 0,8 rad/s (8 à 20 secondes de période de forçage), c'est-à-dire dans la bande de fréquence où l'amplitude du mouvement résiduel du bras est maximale (Figure 8-21).

La contribution du pivot à lames flexibles est probablement à l'origine de l'écart observé. Nous donnons à titre de comparaison, à l'annexe 10.17, un diagramme équivalent effectué pour un point de fonctionnement présentant un haut degré de fluage, les écarts observés sont alors encore plus élevés.

La Figure 8-20 nous indique que le signal de compensation reprend 98,5 % des forçages sinusoïdaux à une minute. Il sera donc nécessaire d'apporter une correction de 1,5 % lors de la mesure du couple généré par l'aiguille des secondes de la montre.

De même, en calculant la transformée de Fourier de la dérivée du résidu angulaire de la réponse indicielle de la Figure 8-19, nous obtenons la déviation angulaire résiduelle en fonction de la fréquence du couple de forçage injecté (Figure 8-21).

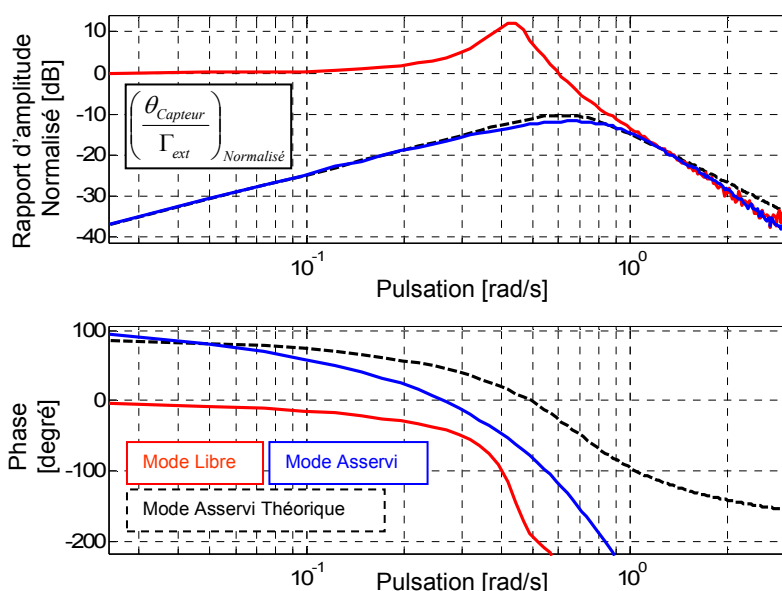


Figure 8-21 : Déviation angulaire: Réponse en fréquence expérimentale en mode asservi (en bleu) déduite de la réponse indicielle du (19/08/07), réponse en fréquence expérimentale en déflection libre (en rouge) déduite de la réponse indicielle du (07/11/07) et réponse en fréquence théorique en mode asservi (en pointillé)

À titre de comparaison nous avons également inséré la réponse indicielle en déflection libre (courbe en rouge) calculée à la Figure 8-12.

Afin de compenser les erreurs d'étalonnage liées au capteur et à l'actionneur, la valeur d'offset des courbes a été réglée de telle sorte que les droites d'atténuation haute fréquence en mode libre et en mode asservi soient confondues, le comportement en haute fréquence du système bouclé étant principalement dicté par les caractéristiques mécaniques du pendule.

La courbe en pointillé donne la réponse en fréquence théorique déduite des paramètres du Tableau 7-5 pour 100 Volts. Nous observons à nouveau un décrochage entre les

courbes expérimentales et théoriques pour les hautes fréquences du fait du sous échantillonnage.

Nous pouvons tirer deux informations importantes de ce graphe :

- La déviation angulaire résiduelle en mode asservi est maximale pour une période de forçage de 9,9 secondes, elle atteint alors 25 % (-11,8 dB) de l'amplitude équivalente en déflexion libre.

- La déviation angulaire résiduelle en mode asservi vaut encore 5,6 % (-25 dB) de l'amplitude équivalente obtenue en déflexion libre pour une période de forçage de 60 secondes.

Il sera donc nécessaire d'opérer une correction sur la mesure du couple appliqué par l'aiguille des secondes.

Notons encore que ces dépassements résiduels sont susceptibles d'induire des biais dans le fonctionnement de la boucle d'asservissement de position lié à l'anélasticité du pivot à lames flexibles.

8.5.2 Vérification de la prise en charge des couples de forçage externe par la boucle d'asservissement

Nous avons vu plus haut que la boucle d'asservissement, en contraignant la position du bras, permet de limiter le travail de la suspension et les éventuels effets anélastiques associés.

Nous souhaitons ici vérifier et quantifier expérimentalement que la rétroaction de position compense bien les forçages injectés, dans les limites de la résolution du capteur de position.

Appliquons pour ce faire un échelon de couple électrostatique à flancs progressifs (la transition entre les deux niveaux s'opère ici en 120 secondes) d'amplitude 8000 échantillonné à 1 Hz et ayant une consigne de position fixée à 160 kHz.

La Figure 8-22 illustre la réaction du pendule consécutive à un tel forçage pour une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz.

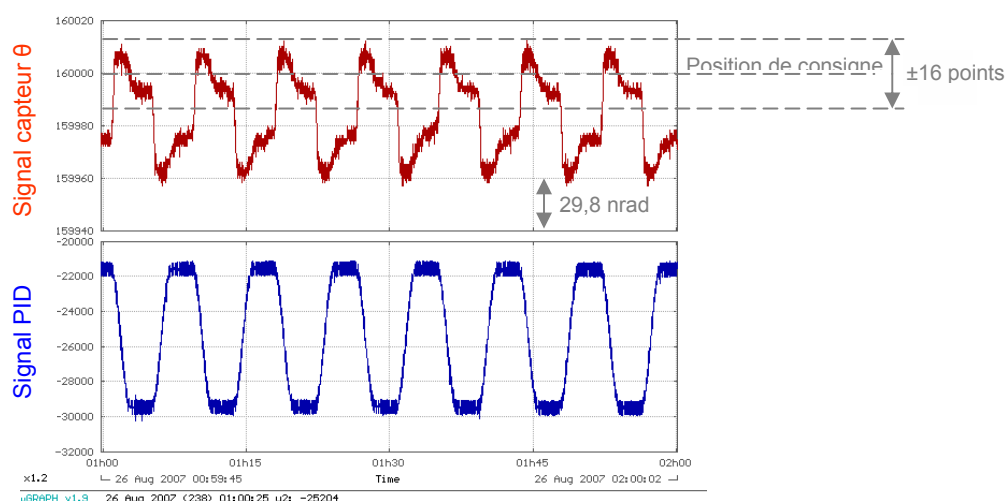


Figure 8-22 : Réponse à un échelon de couple électrostatique progressif, signaux bruts (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 26/08/07).

La résolution du capteur de position est de ± 1 point à la fréquence de travail de 16 Hz du régulateur de la balance. Soit une résolution de ± 16 points pour une fréquence comptée sur une période d'une seconde. L'asservissement est donc aveugle dans cette zone de travail. La présence du module intégrateur fait que le point de fonctionnement moyen en mode asservi s'établit à ± 16 points autour de la consigne de position suivant que celle-ci est fixée au dessus ou en dessous du point de fonctionnement en mode libre.

La Figure 8-23 illustre le résultat du stacking effectué sur la période de forçage de 512 secondes.

Y figurent le signal de compensation PID (en bleu), le signal de forçage électrostatique inversé (en brun) ainsi que le résidu sur la position angulaire (en rouge).

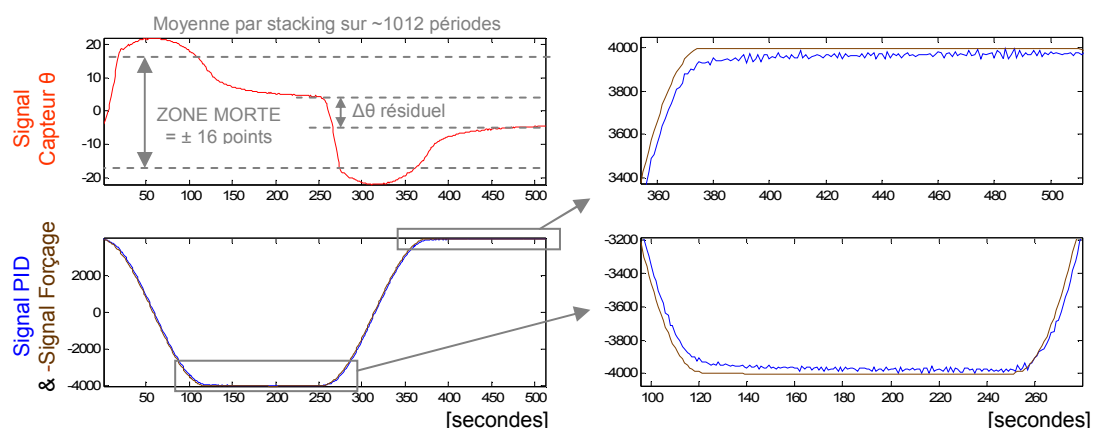


Figure 8-23 : Application d'échelon électrostatique progressif d'amplitude modérée (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 26/08/07)

Dans le cas d'une rétroaction de position idéale, le signal de compensation PID et l'inverse du signal de forçage doivent parfaitement se superposer. (Les deux signaux pilotant le même actionneur électrostatique (Figure 8-17)).

En pratique, le gain limité de l'asservissement, ainsi que la résolution limitée du capteur de position engendrent des résidus non nuls sur la position du bras pendulaire par rapport à la position de consigne choisie.

Les éventuels effets de plasticité liés à la flexion résiduelle des lames flexibles seraient alors susceptibles d'induire des biais sur le signal de compensation.

La comparaison du signal de forçage et de compensation est essentielle dans notre expérience car elle permet de garantir qu'aucun paramètre non maîtrisé ne vienne biaiser la boucle d'asservissement.

Nous observons sur le signal de position angulaire de la Figure 8-23 une zone morte, liée à la résolution du capteur de position, au sein de laquelle la suspension reste libre de fluer.

Nous observons également qu'il subsiste un résidu sur la position angulaire $\Delta\theta$ non nul justifiant l'écart observé entre le signal de compensation et le signal de forçage électrostatique. L'amplitude de ce résidu est d'autant plus faible que la suspension a le temps de fluer au sein de la zone morte.

La Figure 8-24 illustre un mode opératoire identique pour un échelon électrostatique d'amplitude 16 fois plus élevé.

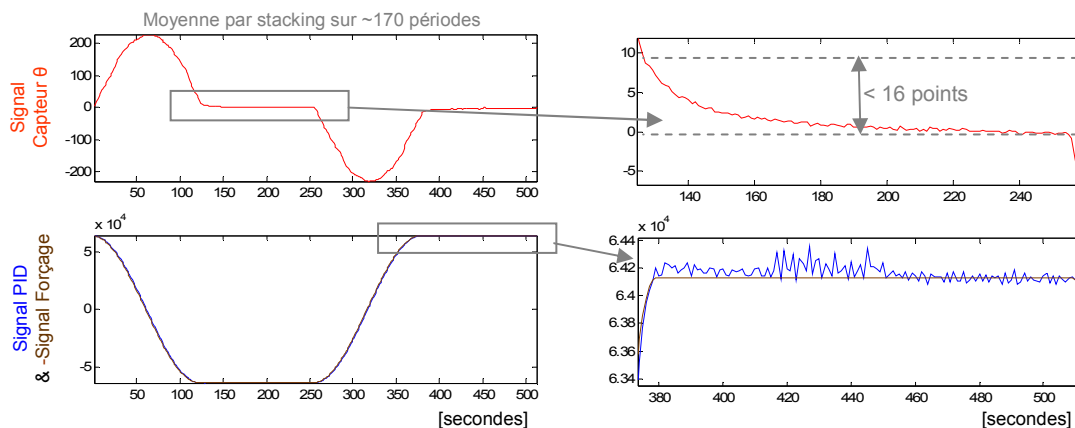


Figure 8-24 : Application d'échelon électrostatique d'amplitude élevée (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 06/09/07)

La rétroaction de position continue à maintenir la position du bras pendulaire dans une fourchette de 16 points autour de la valeur de consigne.

L'influence de la résolution du capteur devient négligeable devant l'amplitude de l'échelon. Ainsi, la forme du résidu se rapproche du résidu théorique correspondant au déphasage de 90° des sinusoïdes constituant les flancs montants et descendants de l'échelon progressif de forçage.

De nouveaux travaux sont nécessaires pour démontrer que les phénomènes de traînage puissent être compensés au niveau du ppm sur l'amplitude du signal gravitationnel.

Observons pour conclure que ces échelons électrostatiques progressifs peuvent être appliqués en parallèle à l'échelon de couple gravitationnel, et à une période différente,

afin d'être démodulés par la méthode de stacking présentée en début de chapitre. Leur analyse donnera une bonne indication sur la bonne prise en charge de l'échelon de couple gravitationnel par l'asservissement de position.

8.5.3 Forçages multiples et facteurs d'étalonnage

De manière analogue à ce que nous avons réalisé au §8.4.3 où nous avons étalonner notre échelon de couple gravitationnel avec nos trois étalons de couple disponibles en déflexion libre, nous allons ici étalonner l'échelon de couple gravitationnel avec nos deux étalons de couple disponibles en mode asservi.

Les deux graphes de la Figure 8-25 illustrent la réponse de notre balance en asservissement de position échantillonné à 1 Hz aux forçages successifs des aiguilles de la montre puis de l'actionneur gravitationnel.

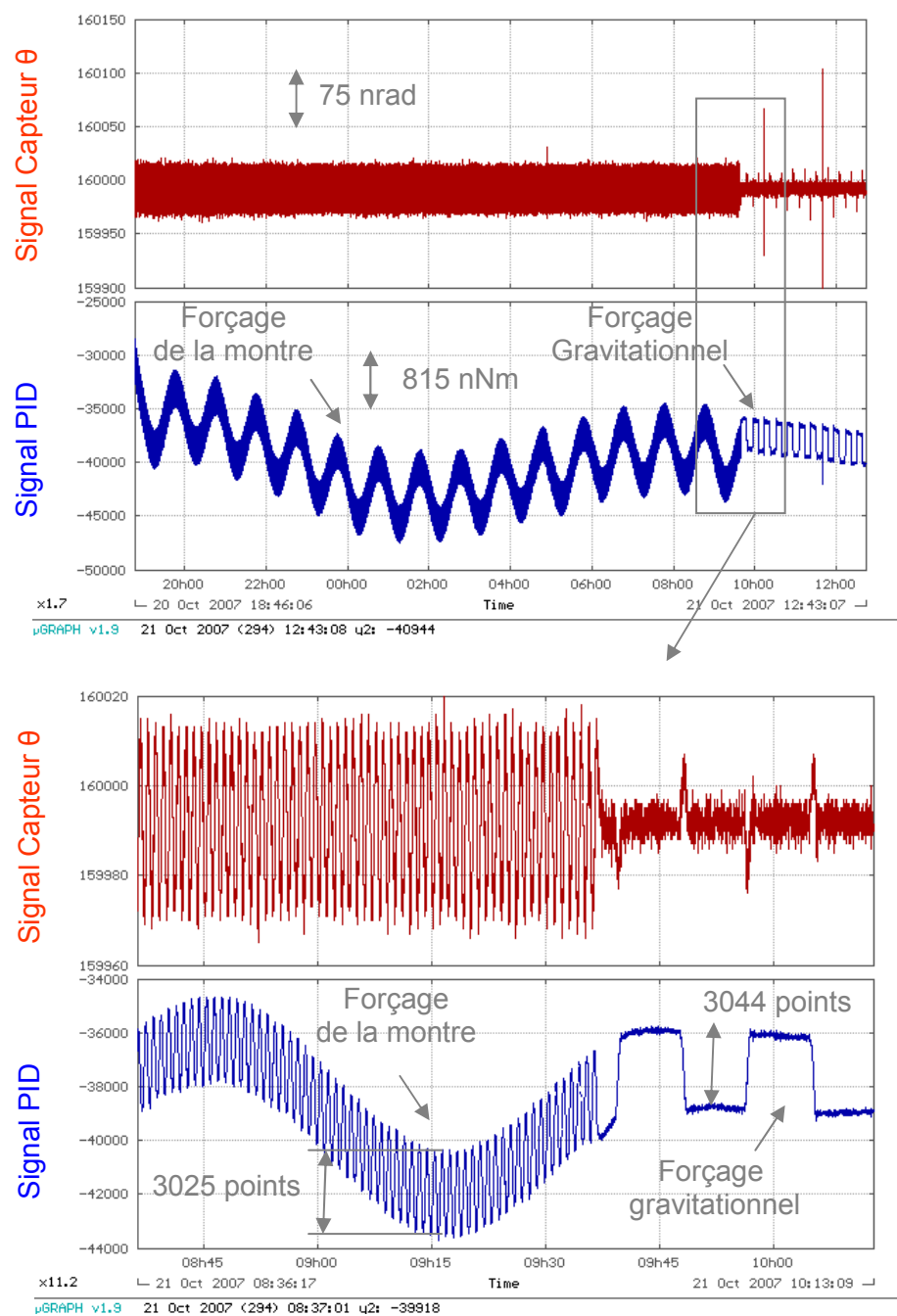


Figure 8-25 : Forçage de la montre suivi du forçage de l'actionneur gravitationnel en asservissement de position (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 21/10/07)

La Figure 8-26 représente le résultat du stacking sur la période d'application des échelons de couples gravitationnels.

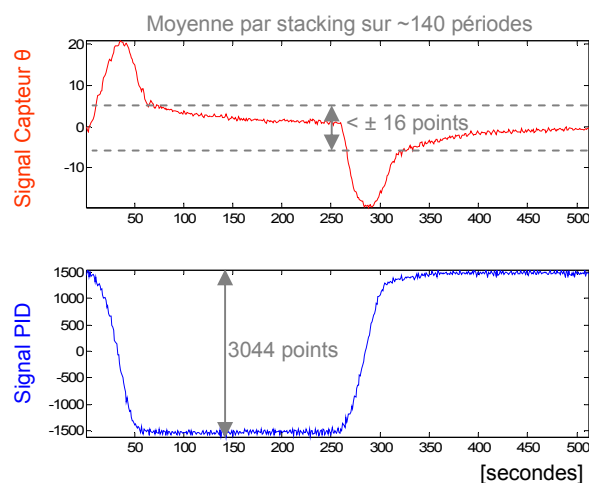


Figure 8-26 : Stacking sur la période du forçage gravitationnel (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz et fréquence de fonctionnement du régulateur de 16 Hz, le 14/11/07)

Les graphes de la Figure 8-27 représentent le résultat d'un stacking opéré sur la période de forçage de l'aiguille des minutes et des secondes.

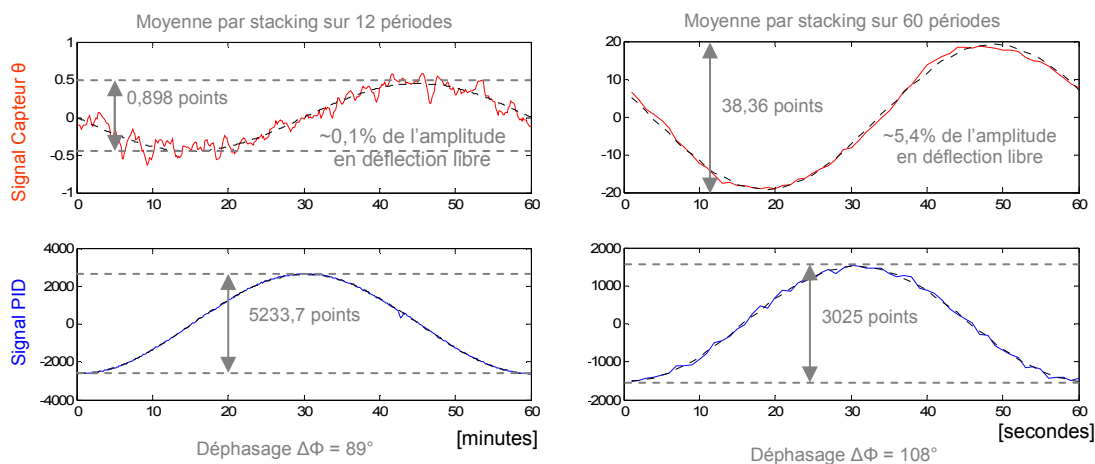


Figure 8-27 : Stacking sur la période de l'aiguille des secondes et des minutes (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 22/10/07)

L'amplitude du résidu angulaire consécutif au forçage de l'aiguille des secondes représente 5,4 % de l'amplitude équivalente obtenue en déflexion libre à la Figure 8-16. Cette valeur est en accord avec la valeur de 5,6 % déduite de la réponse en fréquence expérimentale établie à la Figure 8-21.

Nous observons en revanche que, contrairement à ce que suggérerait la réponse en fréquence expérimentale de la Figure 8-20, le signal de compensation PID ne reprend que 91,5 % du signal sinusoïdal de 60 secondes injecté, et ce, indépendamment de

l'amplitude du signal sinusoïdal injecté. Nous avons observé expérimentalement que cet écart semble augmenter avec le degré de fluage de la suspension (Annexe 10.17). Ce ratio a pu être établi précisément en appliquant un forçage sinusoïdal de 60 secondes de période par le biais de l'actionneur électrostatique (Figure 8-28).

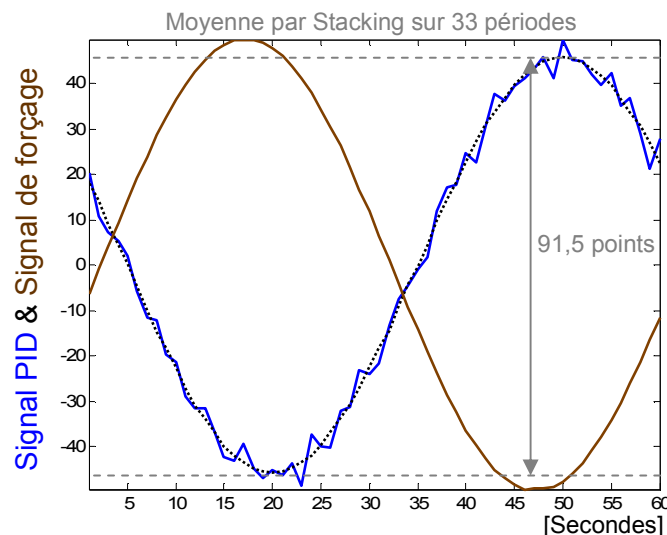


Figure 8-28 : Réponse à un forçage électrostatique sinusoïdal de 60 secondes de période. Seul 91,5 % du signal de forçage est repris par le signal de rétroaction de position PID.

Nous observons que le signal de forçage de double amplitude 100 (en brun) ne représente plus que 91,5 unités sur le signal de compensation (en bleu). Notons que cet écart tombe à 2 % pour une sinusoïde de 200 secondes de période.

L'amplitude du signal PID de 3025 points compensant le signal de l'aiguille des secondes vaut alors 3306 points après correction.

Le rapport d'amplitude entre l'aiguille des minutes et des secondes vaut alors 1,58 au lieu de 1,54 selon le constructeur.

La correction à apporter pour le forçage de l'aiguille des minutes est négligeable vis-à-vis de la précision de nos mesures supposées être de l'ordre du pour cent. Nous n'appliquerons pas de correction pour ce forçage.

Le Tableau 8-5 reprend les valeurs des différents forçages appliqués ainsi que les valeurs correspondantes des couples électrostatiques de compensation.

Forçages appliqués		Rétroaction de position	
Type	Amplitude théorique [Nm]	Signal PID [#]	Couple électrostatique [Nm]
Échelon gravitationnel	$2,698 \cdot 10^{-7}$	3044	$4,96 \cdot 10^{-7}$
Aiguille seconde* (corrigé)	$4,06 \cdot 10^{-7}$	3306	$5,39 \cdot 10^{-7}$
Aiguille minute	$6,26 \cdot 10^{-7}$	5233,7	$8,53 \cdot 10^{-7}$

Tableau 8-5 : Récapitulatif des forçages injectés

Nous pouvons déduire les différents facteurs d'étalonnage du signal gravitationnel en appliquant une règle de trois sur les valeurs établies au Tableau 8-5. (Tableau 8-6).

Etalons	Valeur de l'échelon gravitationnel $\Delta\Gamma_G$ [N.m]	Ecart* [%]
Calcul théorique	$2,698 \cdot 10^{-7}$	0
Aiguille seconde* (*corrigé)	$3,74 \cdot 10^{-7}$	+38
Aiguille minute	$3,59 \cdot 10^{-7}$	+33
Couple électrostatique	$4,96 \cdot 10^{-7}$	+83

Tableau 8-6 : Facteurs d'étalonnage du signal gravitationnel en mode asservi

Nous retrouvons sensiblement les mêmes écarts relatifs entre les différents facteurs d'étalonnage en mode asservi et ceux observés en mode libre au Tableau 8-4.

Cette constatation permet d'écarter un certain nombre d'effets systématiques liés au fluage des lames flexibles et au fonctionnement de la boucle d'asservissement de position.

Aussi, le facteur d'étalonnage donné par l'étalon de couple électrostatique est à exclure pour les mêmes raisons que celles évoquées au §8.4.3 lors de la comparaison des différents facteurs d'étalonnage en déflexion libre.

Nous avons vu alors que seuls les facteurs d'étalonnage donnés par les aiguilles de la montre semblent donner des valeurs reproductibles au pour cent.

Nous obtenons ici un écart moyen de 35 % entre la valeur théorique de l'échelon de couple gravitationnel appliqué et les facteurs d'étalonnage donnés par les aiguilles des minutes et des secondes de la montre à comparer avec l'écart moyen de 33 % obtenu en déflexion libre.

DISCUSSIONS :

-Une erreur sur les positions relatives des masses en présence ne peut justifier à elle seule de tels écarts. Une valeur plus élevée de l'échelon de couple gravitationnel appliqué ne peut se justifier que pour une valeur plus faible de l'écartement H_M des masses attractives ou une excentration non nulle de la position du bras pendulaire entre les masses attractives.

Dans le premier cas de figure, H_M doit passer de 40 à 28 cm pour combler l'écart moyen observé de 35 %.

Dans le deuxième cas de figure, l'excentration ex doit valoir au moins 10 cm.

Or les précisions obtenues sur les valeurs des paramètres H_M et ex sont de l'ordre du centimètre.

-Nous avons observé lors d'une expérience préliminaire évoquée au §8.4.1.1 une susceptibilité magnétique non nulle du bras pendulaire.

Une éventuelle dépendance du champ magnétique local à la position des masses attractives est alors susceptible d'expliquer les biais observés sur la valeur du couple gravitationnel mesuré.

Des investigations supplémentaires doivent encore être menées à ce sujet.

8.6 Dernières séries de mesures

Les Figure 8-29 et Figure 8-30 représentent respectivement la réponse du pendule en mode asservi à un échelon de couple gravitationnel et à un échelon de couple électrostatique à flanc progressif dont l'amplitude et la durée de transition entre deux niveaux sont similaires à ceux induits par l'échelon de couple gravitationnel.

La fréquence de fonctionnement du régulateur ainsi que l'échantillonnage des données sont ici opérées à la fréquence de 4 Hz pour un gain similaire aux expériences réalisées précédemment. La résolution du capteur de position angulaire est ici théoriquement de 5,9 nrad par points.

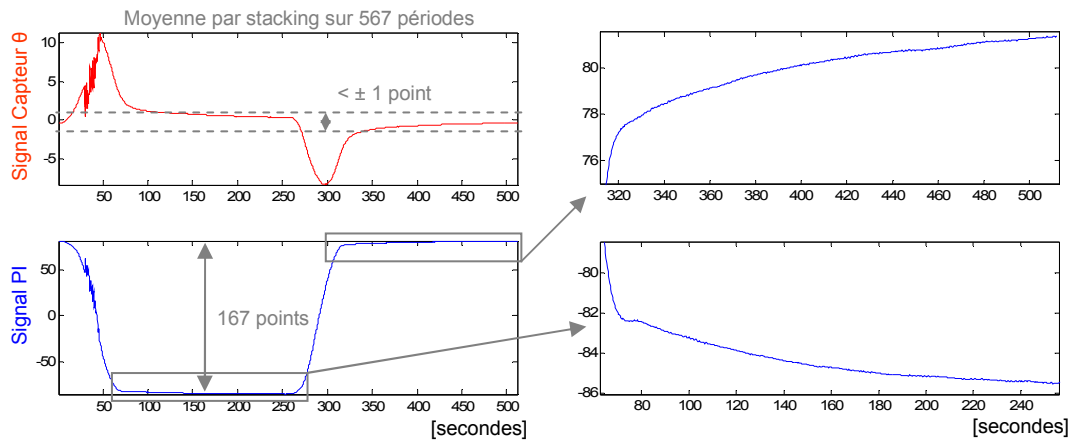


Figure 8-29 : Réponse à un échelon de couple gravitationnel (Fréquence d'échantillonnage et de fonctionnement du régulateur de 4 Hz, données filtrées sur 5 secondes le 18/08/08)

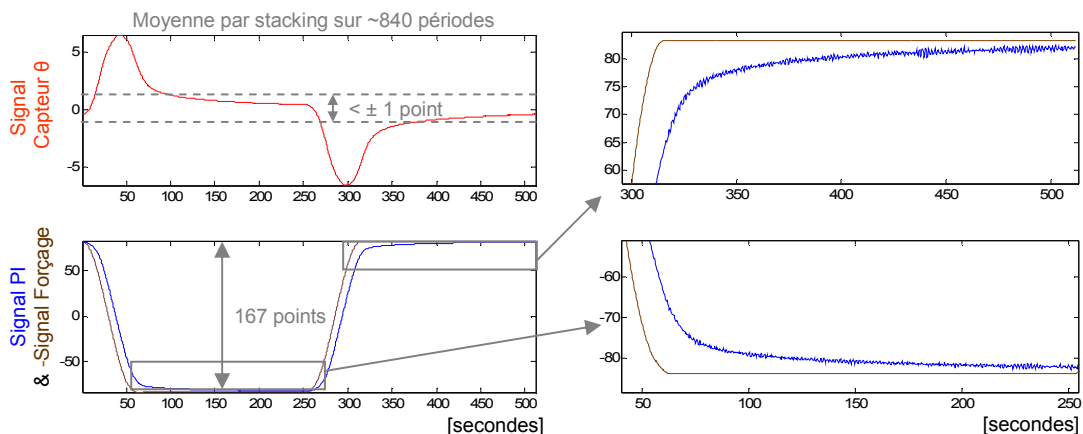


Figure 8-30 : Réponse à un échelon de couple électrostatique progressif (Fréquence d'échantillonnage et de fonctionnement du régulateur de 4 Hz le 25/08/08)

La comparaison des résultats de ces deux stackings permet de quantifier précisément la bonne prise en charge de l'échelon gravitationnel par l'asservissement de position. Nous observons que la précision des mesures reste uniquement limitée par la résolution du capteur de position. Or les technologies disponibles actuellement sur le marché [37], [38], [109], permettent d'offrir une grande marge de progression dans ce domaine, nous permettant théoriquement d'atteindre quelques ppm sur la valeur du couple gravitationnel injecté.

Notons encore que les résidus non pris en charge par la boucle de rétroaction peuvent éventuellement être comptabilisés afin d'affiner la mesure des échelons de couples appliqués.

8.7 Conclusions

Les effets dissipatifs présents dans notre pivot à lames flexibles rendent le fonctionnement de notre balance extrêmement délicate en mode libre, les fluages observés pouvant varier fortement d'un point de fonctionnement à l'autre. L'influence de ceux-ci peut être rapidement évaluée en mesurant l'atténuation de la déviation angulaire produite par l'aiguille des secondes par rapport à l'aiguille des minutes.

Le fonctionnement en mode asservi nous a permis en revanche d'obtenir des résultats parfaitement reproductibles tout au long de l'exploitation de l'appareil. Nous avons également observé une atténuation variable du signal pour des périodes de forçages de l'ordre de la minute. Ces atténuations sont probablement imputables au travail des lames flexibles consécutives aux résidus angulaires eux-mêmes liés au gain limité de notre asservissement de position.

Le fait de pouvoir injecter des signaux de forçages électrostatiques de facteur de forme proche des signaux de forçage produits par l'actionneur gravitationnel et les aiguilles de la montre nous permet de nous assurer de leur bonne prise en charge par la boucle de rétroaction de position.

Ainsi, la précision sur la compensation du couple gravitationnel injecté ne semble à l'heure actuelle limitée que par la résolution du capteur de position utilisé.

Or nous l'avons vu, il est possible de gagner plusieurs ordres de grandeur sur la valeur de ce paramètre.

Les facteurs d'étalonnage des trois types d'étalons de couple proposés pour étalonner les échelons de couples appliqués sur notre balance ont pu être vérifiés au niveau du pour cent lors d'une expérience préliminaire.

Cependant les étalons de couple basés sur le couple de rappel de la balance et les couples générés par l'actionneur électrostatique utilisés sur notre balance n'ont pas permis d'obtenir de facteur d'étalonnage précis suite à un problème d'origine mécanique.

Notons néanmoins que les écarts entre nos trois facteurs d'étalonnage sont identiques en mode libre et en mode asservi.

Ainsi, seuls les étalons de couple produits par les aiguilles de la montre, vérifiés au niveau du pour cent lors de notre expérience préliminaire, ont pu être utilisés pour contraindre le facteur d'étalonnage de l'échelon de couple gravitationnel appliqué.

Nous avons observé alors un écart moyen de 35 % entre la valeur théorique de l'échelon de couple gravitationnel appliqué et les facteurs d'étalonnage en mode libre et asservi donnés par les aiguilles des minutes et des secondes.

Des investigations supplémentaires doivent encore être menées pour justifier les écarts observés.

9 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé et élaboré une mesure de G reposant sur une approche sensiblement différente de celles ayant conduit aux résultats présentés par CODATA 2006 afin de répondre aux recommandations prônées par celle-ci.

Notre expérience a la particularité d'être peu sensible aux accélérations microséismiques et son asservissement de position électrostatique permet de garantir la bonne compensation des phénomènes anélastiques présents dans la suspension.

En outre l'utilisation en mode asservi de deux étalons de couple complètement indépendants l'un de l'autre nous permet de nous prémunir contre un certain nombre d'erreurs systématiques.

Nous avons pu dimensionner et étudier les principales caractéristiques de notre approche par une modélisation :

- du comportement dynamique du pendule en mode libre et asservi (§4.3 & §7.5).
- des couples gravitationnels appliqués par le développement d'un algorithme simple et général (§5.1.2, §5.6.2.1 & §10.6.6).
- du facteur d'étalonnage des différents étalons de couple utilisés (§4.2, §4.5 & §6.3).

Ces modèles ont pu être confrontés aux résultats obtenus sur un dispositif expérimental et une expérience préliminaire entièrement conçus à cet effet, permettant de tester l'ensemble des concepts de notre approche avec une résolution de l'ordre du pour cent.

Nous avons pu en particulier établir et tester un mode opératoire permettant de vérifier très précisément la bonne prise en charge des forçages externes par la boucle de rétroaction de position de notre balance.

Les expériences réalisées sur notre appareil nous ont montré que cette prise en charge n'était limitée que par la résolution et la bande passante du capteur de position angulaire pilotant la boucle d'asservissement. Or nous avons vu au §4.4 qu'il est possible de gagner plusieurs ordres de grandeur sur ces paramètres [37], [38], [109].

Ainsi actuellement, les échelons de couple gravitationnel appliqués sont pris en charge avec une précision de $\pm 2,5 \%$ par notre asservissement de position (§8.5.3) et avec une précision de $\pm 0,6 \%$ en augmentant la résolution de notre capteur de position d'un facteur quatre (§8.6).

Les facteurs d'influence internes (anélasticité résiduelle du pivot) et externes (microséisme) ne semblent donc pas avoir d'influence en moyenne aux résolutions étudiées. Nous observons en particulier que la rétroaction de position compense parfaitement les fluages importants des lames flexibles observés en déflexion libre (§8.5).

Nous avons pu également recouper les facteurs d'étalonnage de nos trois étalons de couple avec une précision de l'ordre du pour cent lors de notre expérience préliminaire présentée au §10.19. Notons que l'étalon de couple basé sur les aiguilles de la montre permet d'atteindre théoriquement une précision de quelques milliers de ppm selon les données du constructeur (§4.5).

En revanche, la comparaison directe entre les étalons de couple donnés par les aiguilles de la montre et les échelons de couple gravitationnels appliqués donne une surestimation moyenne de 35 % de la valeur de l'échelon de couple gravitationnel et donc de la valeur de G , et ce, aussi bien en mode libre (§8.4.3) qu'en mode asservi (§8.5.3).

La susceptibilité magnétique importante du bras pendulaire (§8.4.1.1) pourrait justifier de tels écarts. Des investigations supplémentaires doivent encore être menées à ce sujet.

Nous nous proposons d'extrapoler les différents enseignements tirés de nos modèles et de nos expériences à la réalisation d'une nouvelle version du pendule astatisé en mode asservi compatible avec la mesure d'échelon de couple gravitationnel au niveau du ppm. La géométrie de la balance et des masses attractives correspond à celle proposée au §5.6 avec un pivot à billes (§4.7.3). Cette configuration a la particularité de diminuer la sensibilité du couple gravitationnel aux erreurs de position des masses en interaction, de rigidifier et de simplifier la géométrie du bras pendulaire et de n'offrir qu'un unique degré de liberté de mouvement en rotation. La balance est équipée d'un capteur de position offrant une résolution de 10^{-10} rad avec une fréquence d'échantillonnage de 64 Hz compatible avec la rétroaction de position de gain 2 décrite au §7.5.1.

Les principales caractéristiques du dispositif expérimental proposé sont reprises au Tableau 9-1.

Description	Valeur
Période propre en mode libre	18,3 [secondes]
Excentration e_{CM} du centre de masse	0,001 [m]
Constante de rappel de la balance	0,11 [N·m/rad]
Résolution angulaire en acquisition 64 Hz	$1 \cdot 10^{-10}$ [rad]
Couple pendulaire résiduel correspondant	$1,1 \cdot 10^{-11}$ [N·m]
Période propre en mode asservi	0,4 [secondes]
Echelon de couple gravitationnel appliqué	$7 \cdot 10^{-7}$ [N·m]
Période de rotation des masses attractives	60 [secondes]
Erreur de position des masses	< 10 [ppm/mm]
Résolution sur l'échelon de couple gravitationnel	16 [ppm]

Tableau 9-1 : Paramètres relatifs à une éventuelle nouvelle version du pendule astatisé en mode asservi dont la géométrie générale est esquissée au §5.6.

Un tel dispositif expérimental offrirait théoriquement une résolution de l'ordre d'une dizaine de ppm sur l'amplitude des échelons gravitationnels mesurés, ces derniers pouvant être appliqués avec une périodicité élevée de l'ordre de la minute. Le résidu angulaire correspondant à une telle période de forçage ne représentant en effet plus que 3,1 ppm de l'amplitude équivalente statique obtenue en déflexion libre. (équation (7-28)).

En appliquant le raisonnement exposé au §7.5.3 nous observons d'autre part que l'influence de la composante x des accélérations microsismiques du sol équivaut au maximum à 0,2 ppm de la déviation angulaire obtenue en déflexion libre avec le forçage gravitationnel, diminuant d'autant la contribution du couple de rappel de la balance et les éventuels effets anélastiques résultants.

L'expérience proposée ci-dessus permettrait notamment de vérifier la bonne prise en charge, au niveau de quelques dizaines de ppm, du forçage gravitationnel par la boucle d'asservissement de position (par application du mode opératoire mentionné au §8.5.2). La réalisation d'une telle expérience est essentielle avant d'aller plus loin étant donné les effets anélastiques potentiellement élevés des suspensions utilisées dans les pendules astatisés par rapport à celles utilisées sur les pendules de torsion.

Il serait intéressant de ce point de vue de comparer les résultats obtenus avec un modèle dynamique de notre balance en mode asservi intégrant un modèle simplifié des effets anélastiques présents dans le pivot.

Nous proposons à ce sujet de placer notre balance dans une enceinte à vide afin de permettre l'étude du facteur de qualité Q du pivot monté sur la balance ainsi que de diminuer les éventuels bruits liés aux convections d'air autour de fléau.

Observons que la cadence élevée de l'application des échelons de couple gravitationnel et la stabilité de l'étalon de couple donné par la montre à aiguille permettraient de vérifier une éventuelle variation de 540 ppm de la valeur de G corrélée avec la période de rotation de la terre dans le repère sidéral (période $K_1 = 23\text{h } 56\text{min } 4,1\text{sec}$ devant être démodulée de la période solaire S_1 de 24 heures source de nombreux parasites) mise en évidence par une équipe de chercheurs [97].

Notons enfin que les caractéristiques de la balance proposée en font un instrument idéal pour mesurer les accélérations angulaires du sol dans son plan d'oscillation. Un tel instrument semble trouver un certain intérêt en sismologie (§8.3.2). Il nous permettrait également d'étudier précisément l'influence de ces accélérations angulaires, qui n'ont pas été traitées dans nos modèles, sur le rapport signal sur bruit de la balance.

Des études complémentaires devront encore être menées afin d'étendre la précision de nos deux étalons de couple en mode asservi à 100 ppm sur l'amplitude des couples gravitationnels appliqués (degré de précision équivalent à CODATA 2006).

La balance décrite ci-dessus nous permettrait alors de tester et comparer nos deux étalons de couple avec un degré de précision équivalent à quelques dizaines de ppm de l'amplitude des couples gravitationnels appliqués avant l'utilisation de masses pendulaires et attractives de qualité métrologique.

Nous espérons que ce document pourra inspirer d'autres travaux, et tout au moins contribuera à aider à prendre conscience des nombreux aspects liés à la problématique de la mesure de la constante universelle de gravitation G .

10 Annexes

10.1 Caractéristiques du bras pendulaire

		Partie inférieure	Partie supérieure
Masse cylindrique en laiton	Rayon [mm]	50,0	
	Épaisseur [mm]	60,0	
	Masse [kg]	3,951	3,926
	Masse volumique calculée (Laiton) [kg/m³]	8384	8331
	Distance L entre les centres de masse [m]	1,24	
	Excentration de l'axe de rotation par rapport au centre de masse du bras pendulaire [mm]	~5	
	Moment d'inertie total [kg·m²]	3,028	
Support des masses cylindriques en aluminium	Masse avec boulons [kg]	0,173	0,163
	Longueur du support [mm]	~63	
	Masse volumique (Aluminium) [kg/m³]	2700	
	Moment d'inertie total [kg·m²]	0,1	
Profilé creux du bras pendulaire	Masse [kg]	1,382	
	Masse volumique (Aluminium) [kg/m³]	2700	
	Longueur [m]	1,14	
	Section [mm²]	(60×25×3)	
	Moment d'inertie [kg·m²]	0,159	
Plateau de la montre	Masse (Aluminium) [kg]	0,184	
	Moment d'inertie (Aluminium) [kg·m²]	0,0049	
Masses d'équilibrage	Masse (Inox + plomb) [kg]	(0,056 + 0,08)	
	Moment d'inertie (Inox + plomb) [kg·m²]	(0,00152 + 0,00245)	
Plateau de la masselotte	Masse (Aluminium) [kg]	0,082	
	Moment d'inertie (Aluminium) [kg·m²]	0,001	
Support des lames flexibles	Masse (Aluminium + laiton) [kg]	(0,487 + 0,21)	
	Moment d'inertie (Aluminium + laiton) [kg·m²]	(0,003 + 0,000034)	
Masse totale du bras pendulaire [kg]		10,7	
Moment d'inertie total du bras pendulaire [kg·m²]		3,29	

Tableau 10-1 : Principales caractéristiques du bras pendulaire

La position non symétrique des plateaux techniques et des masses d'équilibrage par rapport au centre de symétrie du bras pendulaire fait que la position du centre de masse du pendule est excentrée de 6 mm de son centre de symétrie.

Non comptabilisés : la montre et son électronique de commande.

10.2 Caractéristiques des Masses attractives

		Partie inférieure	Partie supérieure
Masse cylindrique en laiton*	Rayon [mm]	149,26	
	Épaisseur [mm]	41,487	41,485
	Masse [kg]	24,52	24,53
	Masse volumique calculée [kg/m ³]	8444	8448
Cadre carré en aluminium supportant les masses en laiton	Section carrée pleine [mm]	(25×25)	
	Masse [kg]	2,2	

Tableau 10-2: Caractéristiques exactes des deux masses attractives en laiton de l'actionneur gravitationnel

* Valeurs moyennes prises sur 10 mesures.

10.3 Bilan des couples gravitationnels appliqués

Le Tableau 10-3 énumère l'ensemble des effets gravitationnels induits sur le bras pendulaire, tenant compte de l'ensemble des éléments décrits au Tableau 10-1 et au Tableau 10-2..

	Echelon de couple gravitationnel [N·m]	Contribution [%]
Masses cylindriques coaxiales	$2,429 \cdot 10^{-7}$	90
Support des masses pendulaires	$8,2 \cdot 10^{-9}$	3
Profilé creux du bras pendulaire	$3,1 \cdot 10^{-9}$	1
Support des masses attractives	$\sim 1,56 \cdot 10^{-8}$	6
Total :	$2,698 \cdot 10^{-7}$	100

Tableau 10-3: Bilan des couples induits sur le bras pendulaire par l'actionneur gravitationnel

10.4 Optimisation de la géométrie des masses cylindriques coaxiales

Pour une valeur déterminée de la distance h séparant les surfaces en vis-à-vis des deux masses cylindriques coaxiales et pour une valeur déterminée de leurs masses respectives, nous pouvons montrer qu'il existe une géométrie unique des deux masses cylindriques considérées maximisant la valeur de la force gravitationnelle résultante.

Utilisons le paramètre d'épaisseur à masse constante pour définir la géométrie de chaque cylindre (Figure 10-1).

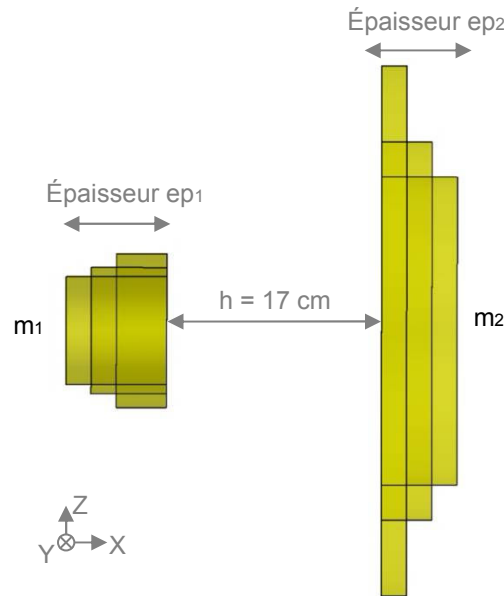


Figure 10-1: Géométries des masses cylindriques coaxiales en fonction de leurs épaisseurs respectives

La Figure 10-1 représente la valeur de la force gravitationnelle agissant entre nos deux masses cylindriques coaxiales (de masse et de masse volumique similaire aux masses cylindriques utilisées sur notre dispositif expérimental) en fonction de la géométrie de chacune des deux masses en présence (définie par la variable d'épaisseur à masse constante).

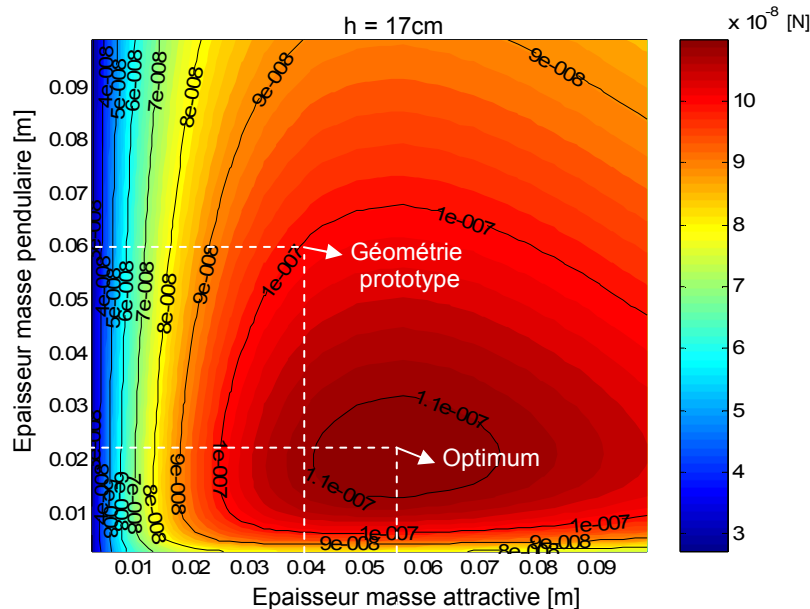


Figure 10-2: Optimisation de la géométrie des masses cylindriques coaxiales

Nous observons que la valeur de la force maximale obtenue est de $1,11 \cdot 10^{-7}$ N pour une masse attractive de 5,7 cm d'épaisseur et 14 cm de rayon et une masse pendulaire de 2,1 cm d'épaisseur et 8,4 cm de rayon.

10.5 Moteur synchrone actionnant les masses attractives

Le carrousel supportant les masses attractives est entraîné par un moteur synchrone à aimant permanent par l'intermédiaire d'un réducteur mécanique. Leurs principales caractéristiques sont reprises au Tableau 10-4.

Assemblage moteur + réducteur RC 65 Crouzet: (Référence 80547)	
Moteur: (Référence 82540)	Réducteur: (Référence 81037)
-Puissance totale : 7,2 Watt -Puissance utile moteur : 2,65 Watt -Tension: 230V 50Hz -Vitesse: 250 tours/minutes	-Rapport de réduction : 1/500 -Couple maximum admissible sur le réducteur en régime permanent : 5 Nm

Tableau 10-4: Principales caractéristiques de l'assemblage moteur/ réducteur actionnant le carrousel des masses attractives

10.6 Modélisation des forçages gravitationnels

10.6.1 Décomposition par barres longitudinales

Il est possible de décomposer les deux masses en présence par un pavage de barres parallèles à la direction de la force projetée (parallèles à l'axe des x du repère cartésien) (10-1)

$$F_G = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{a_{z2}}^{b_{z2}} \sum_{a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{a_{y2}}^{b_{y2}} \sum_{a_{y1}}^{b_{y1}} \int_{a_{x2}}^{b_{x2}} \int_{a_{x1}}^{b_{x1}} \frac{(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \quad [N] \quad (10-1)$$

avec F_G la composante x de la force gravitationnelle appliquée à la masse m_1 par la masse m_2 .

Après intégration, nous avons alors (10-2).

$$F_G = G \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sum_{z_2=a_{z2}}^{b_{z2}} \sum_{z_1=a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{x_2=a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{x_1=a_{x1}}^{b_{x1}} \left[\begin{aligned} &+ \ln \left(\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (a_{x2} - a_{x1})^2} + a_{x2} - a_{x1} \right) \\ &- \ln \left(\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (b_{x2} - a_{x1})^2} + b_{x2} - a_{x1} \right) \\ &- \ln \left(\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (a_{x2} - b_{x1})^2} + a_{x2} - b_{x1} \right) \\ &+ \ln \left(\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (b_{x2} - b_{x1})^2} + b_{x2} - b_{x1} \right) \end{aligned} \right] \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 \cdot \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \quad [N] \quad (10-2)$$

10.6.2 Calcul analytique de la force agissant entre une masse cylindrique et une masse ponctuelle située le long de son axe de symétrie

En reprenant les conventions de la Figure 5-8 du §5.3 et en supposant la masse m_1 ramenée à une masse ponctuelle au niveau de son centre de masse, nous avons :

$$F_G = \iiint_{\text{Cylindre2}} G \cdot \frac{m_1 \cdot dm_2}{r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad [N] \quad (10-3)$$

En exprimant la composante x de la force gravitationnelle en coordonnée cylindrique et en posant :

$$dm_2 = \rho_2 \cdot r_2 \cdot dr_2 \cdot d\theta \cdot dx$$

$$\text{et } r^2 = x^2 + r_2^2$$

nous avons :

$$F_G = G \cdot \rho_2 \cdot m_1 \int_h^{h+ep_2} \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{r_2 \cdot dr_2 \cdot d\theta \cdot dx}{(x^2 + r_2^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r_2^2}} \quad [N] \quad (10-4)$$

qui après intégration donne :

$$F_G = 2 \cdot \pi \cdot \rho_2 \cdot G \cdot m_1 \cdot \left[ep_2 - \left(\sqrt{(h+ep_2)^2 + R_2^2} - \sqrt{h^2 + R_2^2} \right) \right] \quad [N] \quad (10-5)$$

10.6.3 Calcul du Potentiel gravitationnel : Décomposition en barres élémentaires

De manière analogue à ce que nous avons présenté au §5.1.2 pour le calcul de force entre deux masses de géométrie quelconque, nous appliquons le concept d'intégration par barre à une masse de géométrie quelconque afin de déterminer le potentiel gravitationnel générée par celle-ci en tout point (x_2, y_2, z_2) de l'espace.

L'expression générale du potentiel gravitationnel est donnée par :

$$\Phi(x_2, y_2, z_2) = -G \cdot \frac{m_1}{r} \quad [N \cdot m] \quad (10-6)$$

Par commodité et par analogie avec les conventions prises en géophysique et géodésie, nous définirons le potentiel gravitationnel positif [7] :

$$\Phi(x_2, y_2, z_2) = G \cdot \frac{m_1}{r} \quad [N \cdot m] \quad (10-7)$$

L'intégration par barres a alors pour forme :

$$\Phi(x_2, y_2, z_2) = G \cdot \rho_1 \cdot \sum_{a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{a_{x1}}^{b_{x1}} \int_{a_{y1}}^{b_{y1}} \frac{1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot dy_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta z_1 \quad [N \cdot m] \quad (10-8)$$

Ainsi le potentiel en tout point de l'espace est donné par :

$$\Phi(x_2, y_2, z_2) = G \cdot \rho_1 \cdot \sum_{z_1=a_{z1}}^{b_{z1}} \sum_{x_1=a_{x1}}^{b_{x1}} \left[-LN \left(\frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - a_{y1})^2 + (z_2 - z_1)^2} + a_{y1} - y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - b_{y1})^2 + (z_2 - z_1)^2} + b_{y1} - y_2} \right) \right] \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta z_1 \quad [N \cdot m] \quad (10-9)$$

10.6.4 Effets de projection du champ gravitationnel :

Considérons l'attraction d'une paire de masses sphériques sur une troisième masse sphérique dont la disposition par rapport aux deux premières est décrite à la Figure 10-3.

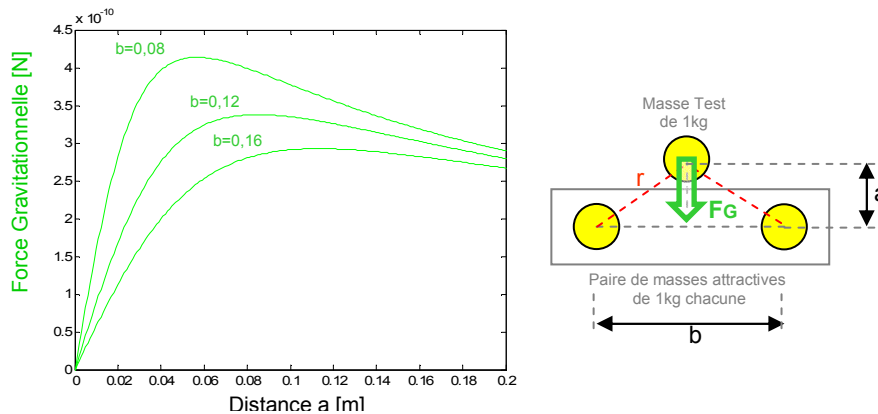


Figure 10-3 : Force gravitationnelle s'exerçant entre une paire de masses attractives sphériques et une masse sphérique de test en fonction de la distance a

L'expression de la force appliquée sur la masse de test par la paire de masses attractives est donnée par :

$$F_G = 2 \cdot \frac{G \cdot m \cdot M \cdot a}{\left[a^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad [N] \quad (10-10)$$

Les effets de projection font que la force gravitationnelle atteint une valeur maximale pour :

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad [m] \quad (10-11)$$

La sensibilité de la force gravitationnelle à l'écartement a est alors nulle en ce point.

L'angle de projection correspondant vaut alors :

$$\text{Arctg}\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35^\circ \quad (10-12)$$

Notons encore que la valeur de l'écartement b des masses attractives permet de moduler la position de cet extremum ainsi que sa forme (graphe de gauche de la Figure 10-3).

Notons encore que la sensibilité de la force gravitationnelle à la valeur de b est de l'ordre de plusieurs milliers de ppm par millimètre.

10.6.5 Masses attractives annulaires :

Une extension des propos tenus au paragraphe précédent consiste à utiliser une géométrie de masse attractive annulaire.

Reprenons la géométrie de la masse pendulaire présentée au Tableau 5-2 et remplaçons la masse cylindrique par une masse annulaire d'épaisseur, de masse et de masse volumique identiques.

Nous avons choisi une valeur du rayon interne de la masse annulaire de 0,113 m (ce qui implique une valeur de 0,188 m pour le rayon externe) de telle sorte que l'erreur de position soit minimale pour une valeur d'écartement h de 5cm entre les surfaces en vis à vis des deux masses considérées (Figure 10-4).

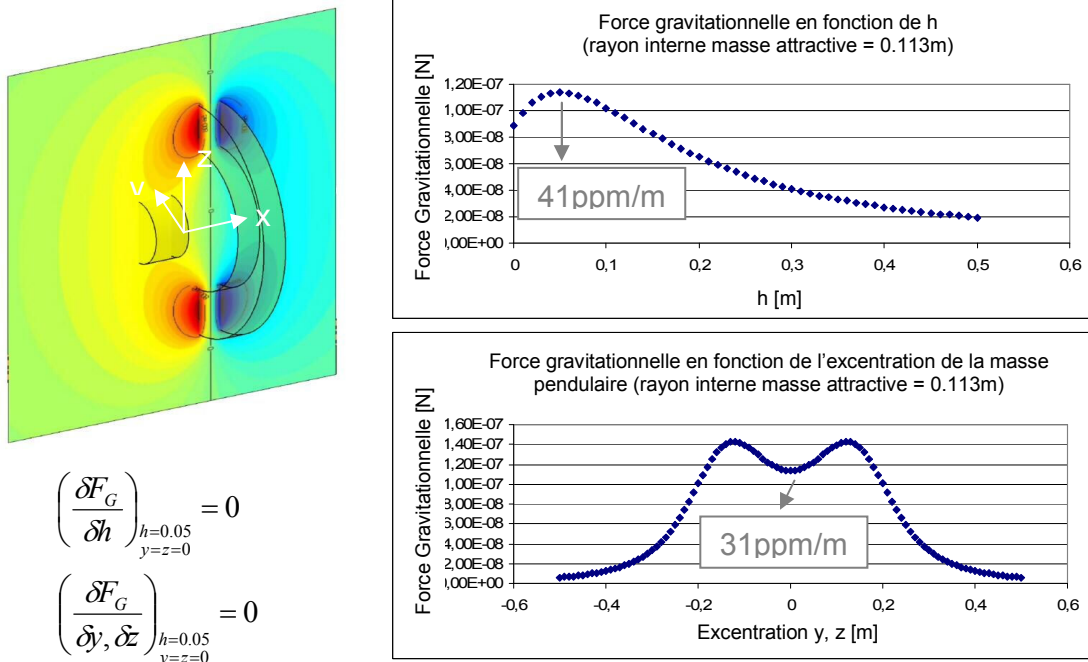


Figure 10-4 : Sensibilité de la force gravitationnelle s'exerçant entre une masse attractive annulaire et une masse test cylindrique aux erreurs de positions relatives. Les masses sont disposées de telle sorte que la composante x de la force gravitationnelle correspond à une valeur extremum.

La force gravitationnelle perçue par la masse pendulaire vaut alors

$$F_G = 1,138 \cdot 10^{-7} \quad [N] \quad (10-13)$$

La Figure 10-5 illustre respectivement les potentiels gravitationnels et la composante x du champ d'accélération gravitationnel produit par la masse annulaire décrite plus haut.

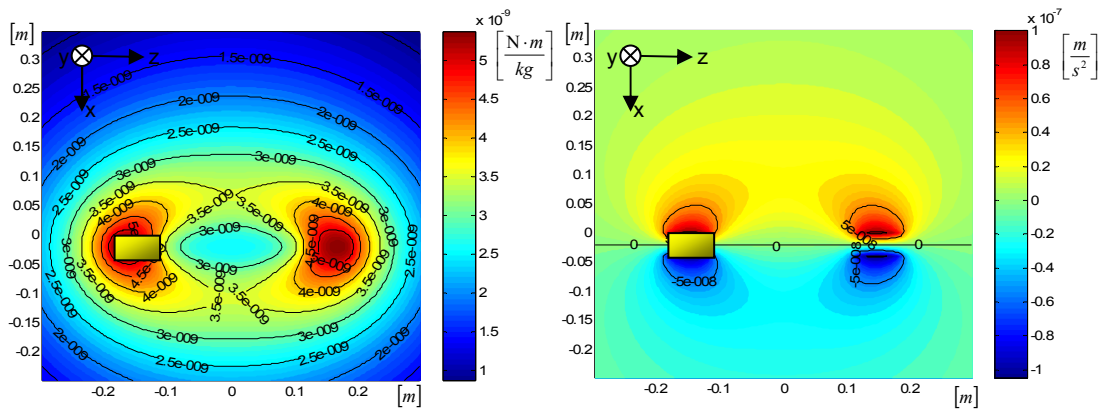


Figure 10-5 : Champ potentiel gravitationnel et composante x du champ d'accélération gravitationnel autour d'une masse cylindrique annulaire (dont seule la section de la moitié gauche est visible sur le dessin)

Cette configuration permet de générer des champs très homogènes à une certaine distance le long de l'axe de symétrie de la masse cylindrique annulaire.

Une telle géométrie de masses attractives en anneau est notamment utilisée au Caltech [93], [94], [95], autour d'un pendule de torsion, à l'université de Zurich [80], [81], sur une balance à fléau et sur la plupart des expériences basées sur la mesure de l'accélération de corps en chute libre.

Il est possible d'optimiser la géométrie des deux masses en présence afin de maximiser la valeur de la force gravitationnelle. La Figure 10-6 donne la valeur de la force gravitationnelle en fonction des épaisseurs des deux masses étudiées. La valeur du rayon interne de la masse annulaire est prise de telle sorte que la force gravitationnelle présente un maximum.

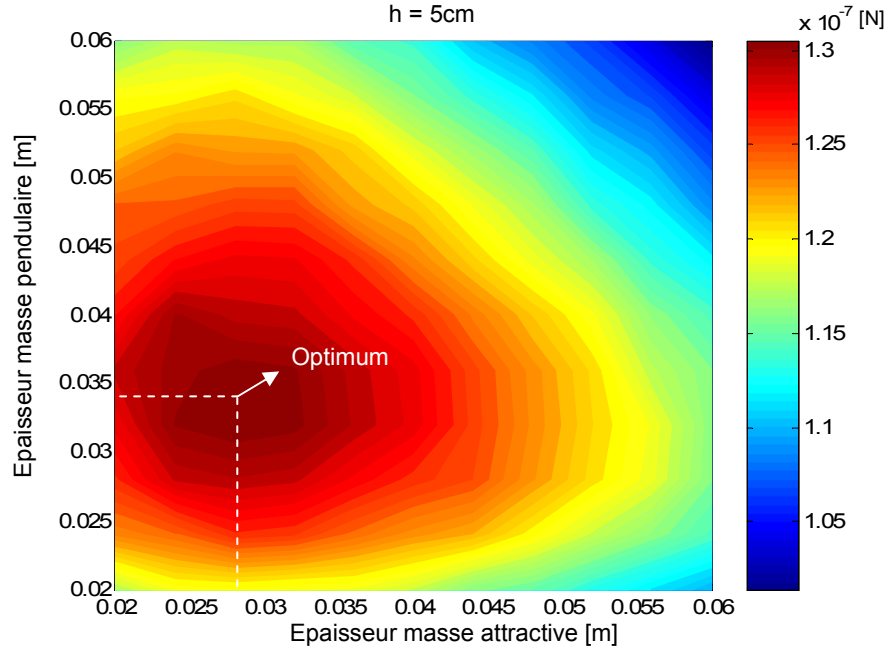


Figure 10-6 : Optimisation de la géométrie de la masse attractive annulaire et de la masse pendulaire cylindrique.

10.6.6 Calcul des couples : intégration par barres verticales

L'intégration (5-23) peut également être résolue par un pavage de barres verticales (10-14).

$$\Delta\Gamma_G = 4 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot G \cdot \sum_{a_{y2}}^{b_{y2}} \sum_{a_{y1}}^{b_{y1}} \sum_{a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{a_{x1}}^{b_{x1}} \int_{a_{z2}-L/2}^{b_{z2}+L/2} \int \frac{(x_2 - x_1) \cdot (z_1)}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{3/2}} \cdot dz_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 \quad [N \cdot m] \quad (10-14)$$

Après intégration, nous trouvons:

$$\Delta\Gamma_G = 4 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot G \cdot \sum_{a_{y2}}^{b_{y2}} \sum_{a_{y1}}^{b_{y1}} \sum_{a_{x2}}^{b_{x2}} \sum_{a_{x1}}^{b_{x1}} \frac{(x_1 - x_2)}{8 \cdot \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]} \cdot \left[\begin{aligned} & -4 \cdot \ln \left(\sqrt{L^2 - 4 \cdot L \cdot a_{z2} + 4 \cdot [a_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} - L + 2 \cdot a_{z2} \right) \cdot \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \\ & + 4 \cdot \ln \left(\sqrt{L^2 - 4 \cdot L \cdot b_{z2} + 4 \cdot [b_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} - L + 2 \cdot b_{z2} \right) \cdot \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \\ & + 4 \cdot \ln \left(\sqrt{L^2 + 4 \cdot L \cdot a_{z2} + 4 \cdot [a_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} + L + 2 \cdot a_{z2} \right) \cdot \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \\ & - 4 \cdot \ln \left(\sqrt{L^2 + 4 \cdot L \cdot b_{z2} + 4 \cdot [b_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} + L + 2 \cdot b_{z2} \right) \cdot \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \\ & - (L - 2 \cdot a_{z2}) \cdot \sqrt{L^2 + 4 \cdot L \cdot a_{z2} + 4 \cdot [a_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \\ & - (L + 2 \cdot a_{z2}) \cdot \sqrt{L^2 - 4 \cdot L \cdot a_{z2} + 4 \cdot [a_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \\ & + (L - 2 \cdot b_{z2}) \cdot \sqrt{L^2 + 4 \cdot L \cdot b_{z2} + 4 \cdot [b_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \\ & + (L + 2 \cdot b_{z2}) \cdot \sqrt{L^2 - 4 \cdot L \cdot b_{z2} + 4 \cdot [b_{z2}^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \end{aligned} \right] \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 \quad [N \cdot m] \quad (10-15)$$

10.7 Vérification expérimentale des amplitudes relatives des couples produits par les trois aiguilles de la montre

Nous souhaitons vérifier expérimentalement les valeurs des rapports d'amplitude entre les couples produits par les trois aiguilles de la montre déduits des valeurs données par le constructeur.

Nous avons pour cela enregistré les couples produits par la rotation des aiguilles de la montre sur une période de 12 jours avec notre balance en asservissement de position échantillonnée à 1 Hz (Figure 10-7).

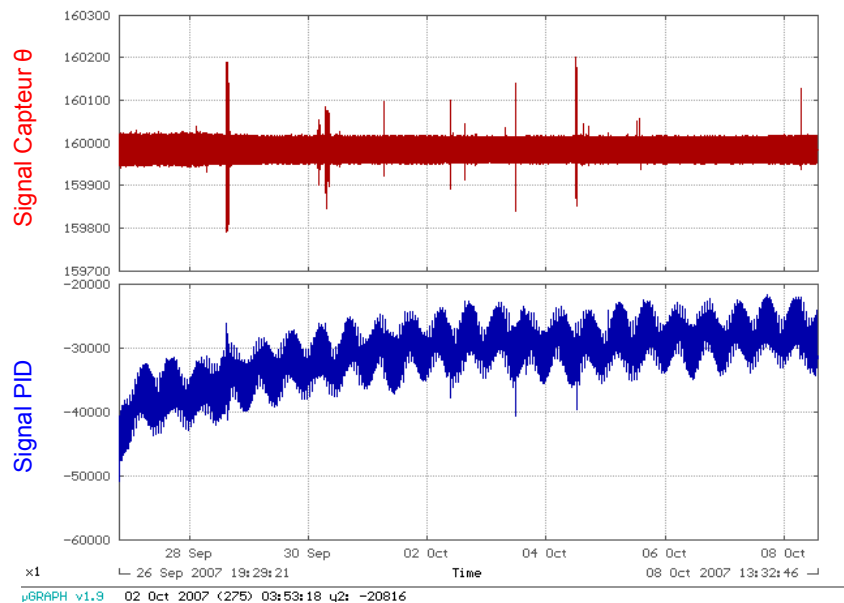


Figure 10-7: Signaux correspondant à l'application du couple des trois aiguilles de la montre sur 12 jours, avec de haut en bas, le résidu sur la position du bras pendulaire et la valeur du couple électrostatique assurant la rétroaction de position (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, actionneur électrostatique à 100V le 08/10/07).

La Figure 10-8 donne le résultat des moyennes par stacking opérées sur la période de rotation de chacune des trois aiguilles. Le stacking sur la période de 12 heures a préalablement été filtré sur une période d'une heure, tandis que le stacking sur la période d'une heure l'a été sur une période d'une minute.

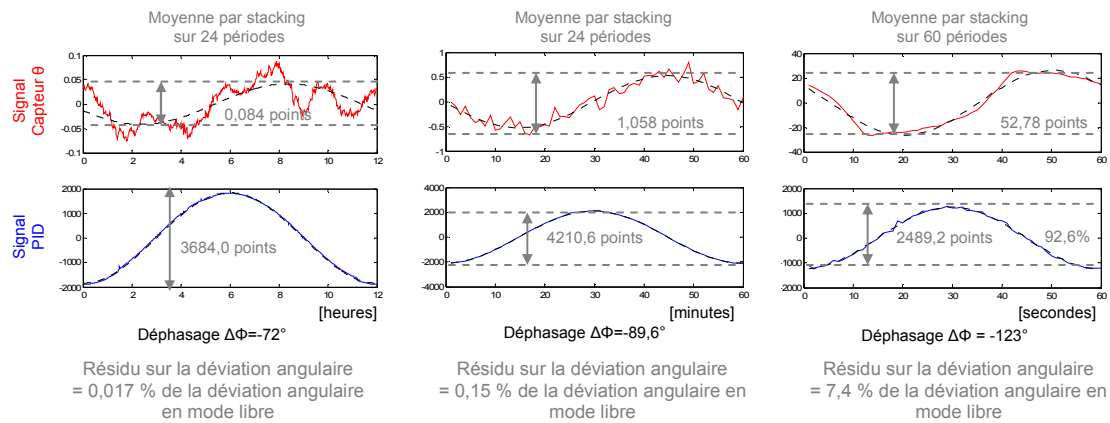


Figure 10-8: Stacking sur chacune des trois périodes correspondant à chacune des trois aiguilles de la montre (heure, minute, seconde)

Nous avons vu au §8.5.3 que le forçage induit par l'aiguille des secondes n'est repris qu'à 91,5 % par le couple électrostatique de la rétroaction de position, du fait notamment de la valeur limitée des gains de la boucle de rétroaction.

En tenant compte de cette correction, la double amplitude du signal de compensation PID correspondant passe de 2489,2 à 2720,4 points.

Le Tableau 10-5 compare les valeurs des couples constructeurs et leurs valeurs étalonnées par notre actionneur électrostatique en tenant compte de la correction mentionnée ci-dessus :

Echelon de couple	Γ Aiguille heure [N.m]	Γ Aiguille minute [N.m]	Γ Aiguille seconde [N.m]
Valeur constructeur	$5,64 \cdot 10^{-7}$ [N.m]	$6,26 \cdot 10^{-7}$ [N.m]	$4,06 \cdot 10^{-7}$ [N.m]
Signal de compensation PID	3684,0 [#]	4210,6 [#]	2720,4 [#] [*] (Corrigé)
Couple électrostatique Correspondant	$7,63 \cdot 10^{-7}$ [N.m] (+35 %)	$8,72 \cdot 10^{-7}$ [N.m] (+39 %)	$5,63 \cdot 10^{-7}$ [N.m] (+39 %) [*] (Corrigé)

Tableau 10-5: Comparaison des valeurs d'échelon de couple mesurées pour chaque aiguille avec les valeurs données par le constructeur (le couple mesuré pour les aiguilles des secondes tient compte de la correction de 91,5 %)

Nous retrouvons un écart de plusieurs dizaines de pour cent sur les valeurs absolues des couples engendrés par la rotation des aiguilles, consécutifs à la présence de biais rencontrés dans le facteur d'étalonnage de notre actionneur électrostatique.

En revanche les rapports d'amplitude mesurés entre l'aiguille des minutes vis-à-vis de l'aiguille des secondes et des heures correspondent à quelques pour cent près avec les valeurs déduites des données du constructeur (Tableau 10-6).

Rapport d'amplitude	Valeurs Constructeur	Valeurs Mesurées	Ecart [%]
Minute/Seconde	1,54	1,55	0,6
Minute/Heure	1,11	1,14	2,7

Tableau 10-6: Rapport d'amplitude sur la valeur du couple appliqué sur le bras pendulaire entre l'aiguille des minutes et les deux autres aiguilles, Comparaison entre les valeurs mesurées et les données constructeur.

Ces chiffres mettent en évidence la bonne linéarité de la rétroaction de position d'une part et la fiabilité des chiffres donnés par le constructeur de la montre d'autre part.

10.8 Etalonnage du micromètre motorisé

La position du pointeau du micromètre est déduite indirectement par le nombre de pas effectués par le moteur pas à pas l'actionnant [105].

Le moteur pas à pas entraîne indirectement le micromètre par le biais d'une boîte de démultiplication.

Les caractéristiques de ces trois éléments sont reprises au Tableau 10-7

	Moteur	Rapport Boite de démultiplication	micromètre
Caractéristiques	48 pas/tour	1/15000	1mm/tour

Tableau 10-7: Caractéristiques de l'étalon de longueur

La distance Δp parcourue par le pointeau du micromètre pour un pas du moteur est donnée par :

$$\Delta p = \frac{0,001m}{48 \cdot 15000} = 1,38 \cdot 10^{-9} \quad [m] \quad (10-16)$$

La vitesse v d'avancement du pointeau du micromètre peut être déduite de la fréquence d'excitation du moteur pas à pas fixée à 112,515 Hz.

$$v = \Delta p \cdot 112,5 = 1,56 \cdot 10^{-7} \quad [m/s] \quad (10-17)$$

10.9 Oscillateurs à relaxation RC

Nos oscillateurs à relaxation RC sont réalisés à partir d'un circuit LMC555 CMOS dont le schéma de câblage extrait de [104] est repris à la Figure 10-9.

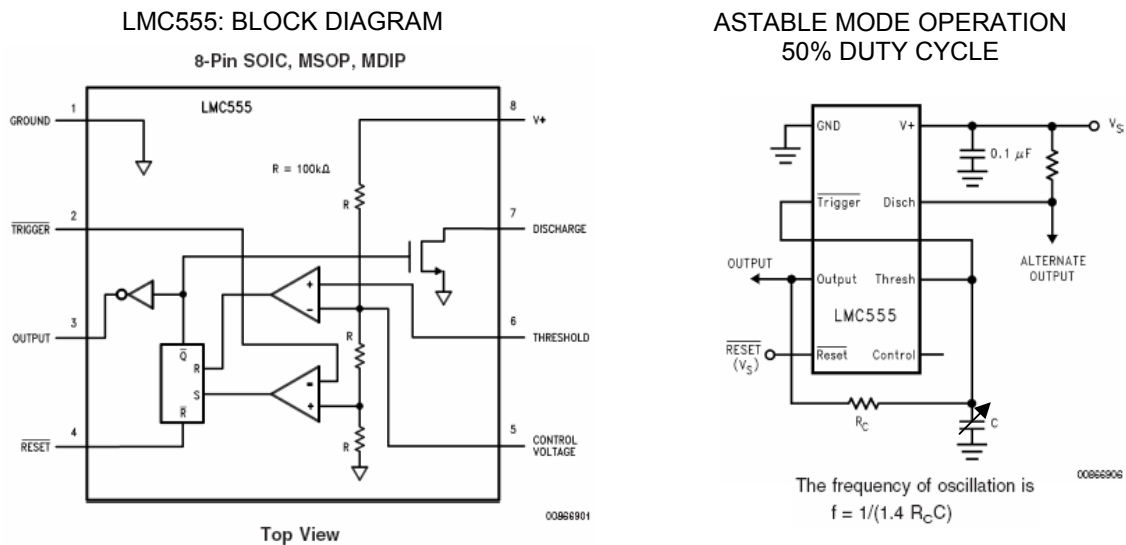


Figure 10-9 : Schéma bloc du circuit LMC555 CMOS et schéma de câblage en mode astable extrait de [104]

Ce montage permet d'obtenir un oscillateur RC très simple, de rapport cyclique égal à 50 %, la charge et la décharge du condensateur s'opérant au travers de la même résistance R.

La Figure 10-10 illustre l'évolution temporelle théorique de la tension d'excitation et de la tension aux bornes du condensateur en fonction de la valeur de sa capacité.

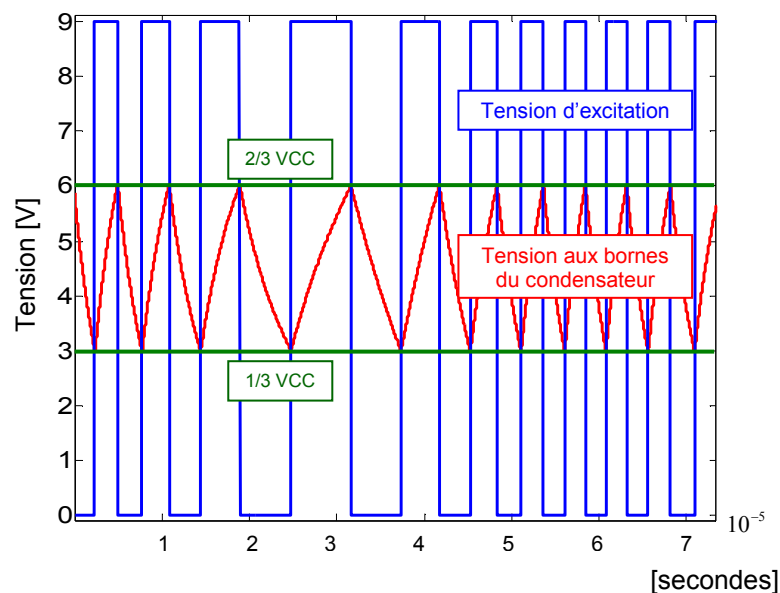


Figure 10-10 : Oscillateur à relaxation RC en mode astable opérant avec un rapport cyclique de 50 %. Évolution théorique des tensions d'excitation et des tensions aux bornes du condensateur en fonction de la valeur de sa capacité.

Les oscillateurs utilisés sur le dispositif expérimental ont été réalisés dans le cadre du projet EDAS [48], [49].

10.10 Etalonnage des deux capacimètres basés sur des oscillateurs RC

La sensibilité théorique de nos capacimètres à oscillateur à relaxation est donnée par la relation (10-18).

$$\left(\frac{dC}{dT_{555}} \right)_{\text{Théorique}} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot R} \quad [\text{Farad} / \text{s}] \quad (10-18)$$

Les résistances utilisées pour les oscillateurs 4 et 4' valent respectivement 150 et 200 k Ω .

Nos oscillateurs ont été étalonnés en boîte noire par une série de 11 condensateurs eux mêmes préalablement étalonnés par le biais d'un capacimètre numérique (Figure 10-11).



Figure 10-11 : Etalonnage des condensateurs de transfert d'étalon de capacité par le biais d'un capacimètre numérique

Le Tableau 10-8 représente le résultat de l'étalonnage de nos deux oscillateurs par le jeu des onze condensateurs étalon.

Oscillateur 4 (R=150kΩ)		Oscillateur 4' (R=200kΩ)	
Fréquence [Hz]	C[Farad]	Fréquence [Hz]	C[Farad]
33348	1,31E-10	25320	1,31E-10
45968	9,38E-11	34936	9,37E-11
53382	8,02E-11	40585	8,02E-11
61811	6,86E-11	47016	6,86E-11
70320	5,98E-11	53503	5,99E-11
80833	5,15E-11	61532	5,15E-11
103262	3,94E-11	78678	3,94E-11
116877	3,44E-11	89094	3,44E-11
130148	3,04E-11	99259	3,04E-11
142978	2,74E-11	108954	2,73E-11
157260	2,46E-11	120032	2,46E-11

Tableau 10-8 : Etalonnage des deux capacimètres à oscillateur à relaxation, par une série de onze condensateurs étalon

Les droites d'étalonnage correspondantes sont représentées à la Figure 10-12 :

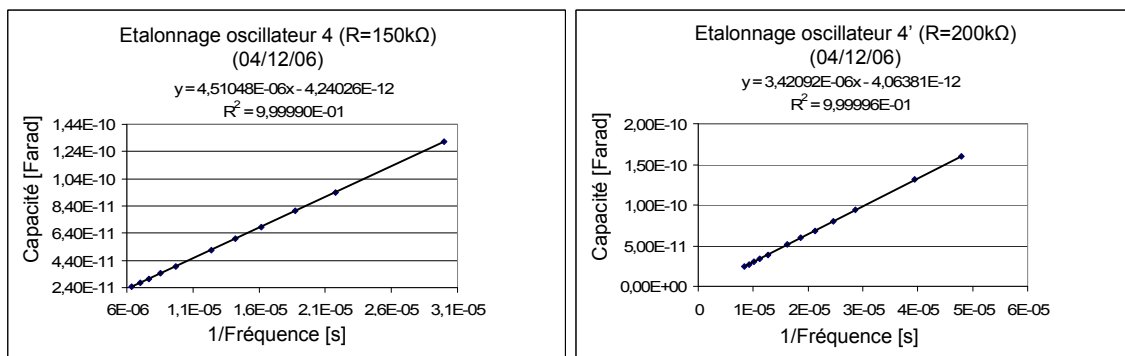


Figure 10-12 : Droite d'étalonnage des deux oscillateurs étalon 4 et 4'

Les valeurs des coefficients dC/dT_{555} établis théoriquement par la relation (10-18) et expérimentalement sur les graphes de la Figure 10-12 pour les deux oscillateurs 4 et 4' sont résumées au Tableau 10-9.

	Oscillateur 4	Oscillateur 4'
$\left(\frac{dC}{dT_{555}}\right)_{\text{Théorique}}$	$4,81 \cdot 10^{-6} \text{ [Farad / s]}$	$3,61 \cdot 10^{-6} \text{ [Farad / s]}$
$\left(\frac{dC}{dT_{555}}\right)_{\text{Mesuré}}$	$4,51 \cdot 10^{-6} \text{ [Farad / s]}$	$3,42 \cdot 10^{-6} \text{ [Farad / s]}$
Ecart	6,2 [%]	5,3 [%]

Tableau 10-9: Comparaison entre les caractéristiques théoriques et mesurées des deux oscillateurs étalon 4 et 4'.

Nous observons un écart moyen de 5,7 % entre les deux procédures de détermination du coefficient dC/dT_{555} .

10.11 Schéma de câblage des électrodes de l'actionneur électrostatique

Les électrodes de l'actionneur électrostatique peuvent être commutées vers trois circuits différents par l'intermédiaire d'un jeu de microrelais MEDER IC 90-51 D.

Ainsi les électrodes en forme de disque de l'actionneur électrostatique peuvent être connectées alternativement :

- à la terre
- à la tension de rétroaction de position
- aux oscillateurs RC d'étalonnage des condensateurs.

Le schéma de câblage correspondant est illustré à la Figure 10-13.

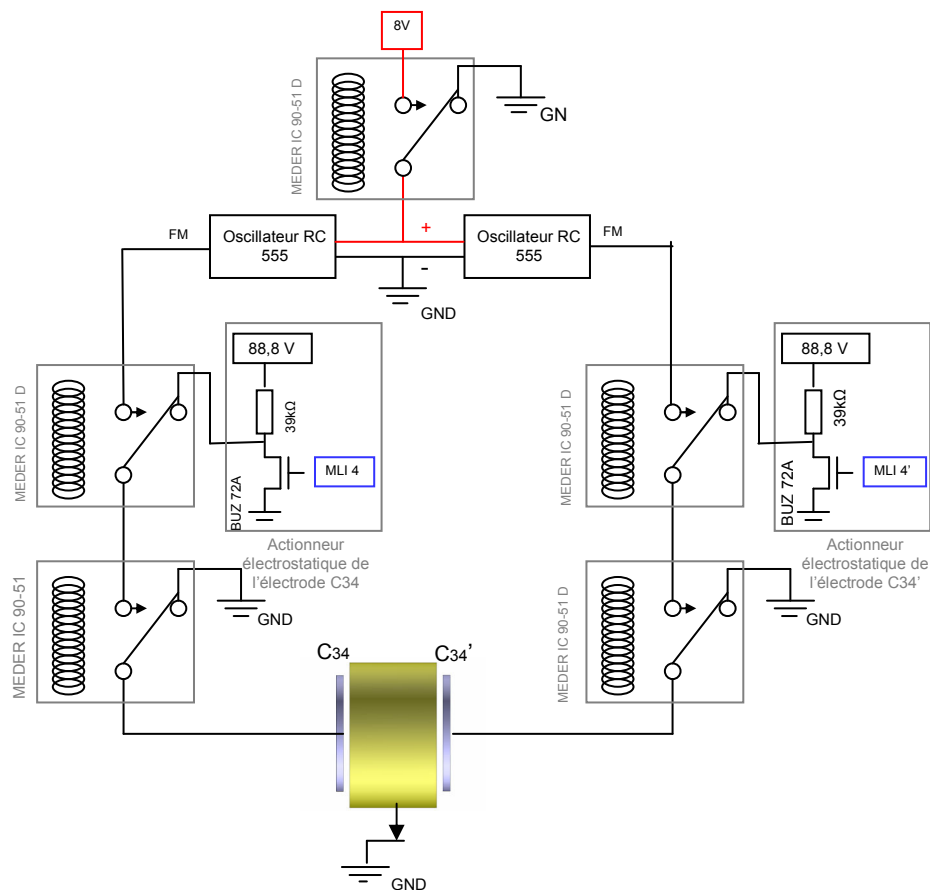


Figure 10-13 : Schéma de câblage des électrodes de l'actionneur électrostatique

Observons que les oscillateurs mesurant la valeur des capacités des électrodes de l'actionneur électrostatique ne sont alimentés que lorsqu'ils sont connectés à ces dernières.

10.12 Erreur de fond d'échelle de l'actionneur électrostatique

Les erreurs de fond d'échelle de l'actionneur électrostatique font qu'un signal de commande de l'actionneur électrostatique de 8000 points en donnée seconde génère un couple électrostatique atténué de 17 % par rapport au même signal appliqué avec une valeur d'offset de 5000 points et donc dénué d'erreur de fond d'échelle (Figure 10-14).

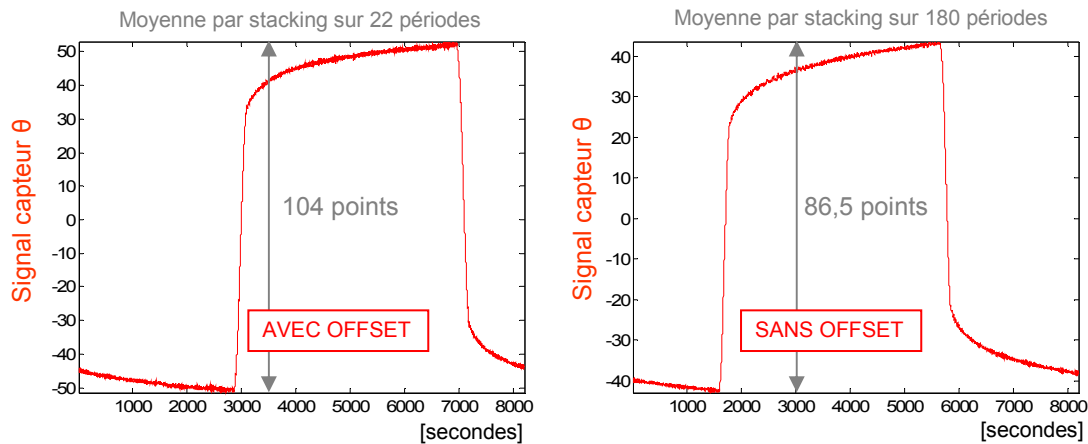


Figure 10-14: Application en déflection libre d'un échelon de couple électrostatique progressif de 8000 points d'amplitude avec une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz et une valeur d'offset électrostatique de 5000 points sur le graphe de gauche (10/09/08) et sans valeur d'offset pour le graphe de droite (14/09/08). Nous observons une atténuation de 17 % de l'échelon appliqué à cause des erreurs de fond d'échelle de l'actionneur électrostatique

Remarquons ici les fluages importants rencontrés pour ces deux points de fonctionnement.

10.13 Synthèse du régulateur numérique : Equations aux différences

La fréquence de fonctionnement du régulateur est fixée à 16 Hz. Le pas temporel utilisé dans nos équations aux différences vaut donc :

$$\Delta t = 0,0625 \quad [s] \quad (10-19)$$

Nous définissons la variable d'erreur de position par rapport à la consigne pilotant le régulateur par :

$$\text{erreur}(k) = \text{consigne}_\theta - \theta_{\text{mesuré}} \quad (10-20)$$

avec κ le paramètre d'incrément de deux pas temporels.

Les variables de sortie de chaque module P, I, D, en fonction des gains K, a, b du régulateur, de la position angulaire θ et du signal d'erreur sont données respectivement par les équations aux différences : (10-21), (10-22) et (10-23) :

$$P(k) = K \cdot \text{erreur}(k) \quad (10-21)$$

$$I(k) = I(k-1) + a \cdot \text{erreur}(k) \cdot \Delta t \quad (10-22)$$

$$D(k) = b \cdot \frac{\theta_{\text{mesuré}}(k-1) - \theta_{\text{mesuré}}(k)}{\Delta t} \quad (10-23)$$

La valeur du signal PID à l'instant κ est alors donnée par la somme des signaux de sortie des trois modules précédents au même instant κ (10-24).

$$\text{Signal PID}(k) = P(k) + I(k) + D(k) \quad (10-24)$$

10.14 Architecture globale de la boucle d'asservissement

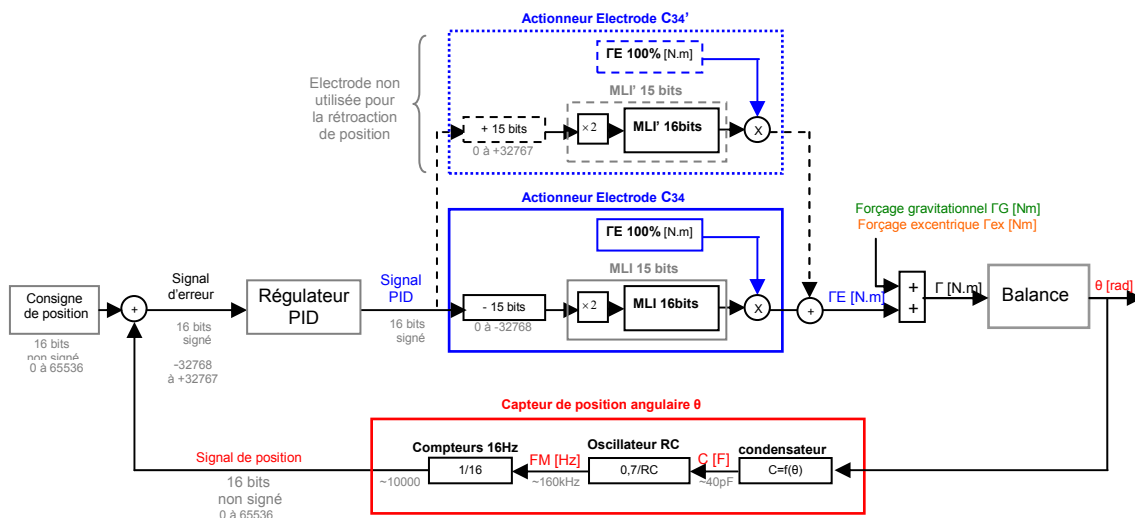


Figure 10-15 : Architecture globale de la régulation de position utilisée sur la balance

10.15 Forçages macrosismiques en mode libre

10.15.1 Comparaison avec le signal d'un gravimètre à ressort

La Figure 10-16 correspond aux enregistrements réalisés par notre balance et un gravimètre à ressort lors d'un séisme de magnitude 7,7 au Pérou le (15/08/07).

Le graphe supérieur correspond à la position angulaire du bras du pendule en déflexion libre soumis à un échelon de couple électrostatique progressif.

Le graphe inférieur correspond au signal de sortie d'un gravimètre LCR336 muni d'un asservissement de position MVR [46], [47] installé dans une galerie voisine de celle de la balance.

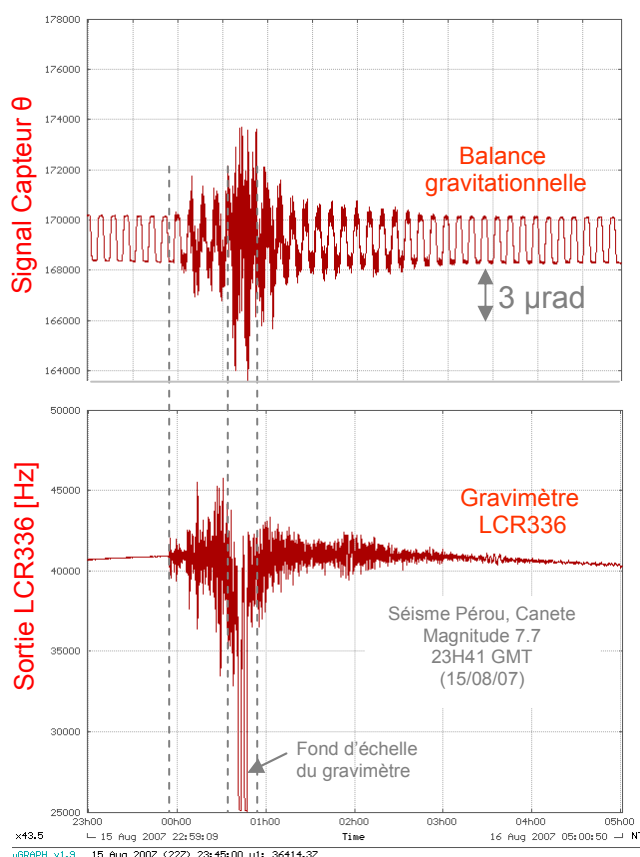


Figure 10-16 : Comparaison des signaux enregistrés au laboratoire de Walferdange par notre balance gravitationnelle en mode libre (soumise à une série d'échelons de couple électrostatique) et par le gravimètre LCR336 lors du séisme Péruvien du (15/08/07, fréquence d'échantillonnage de 1 Hz).

Les niveaux de bruit de fond enregistrés par les deux appareils ne reviennent à leur niveau initial que plusieurs heures après le séisme.

(Le temps de référence de notre système d'acquisition de données est en GMT+1)

10.15.2 Enregistrement d'un séisme en acquisition 16 Hz

La Figure 10-17 correspond à l'enregistrement du signal de sortie du capteur de position du pendule en déflexion libre échantillonné à 16 Hz, lors d'un séisme de magnitude de 5,1 ayant eu lieu au nord du Japon le 5 juillet 2008.

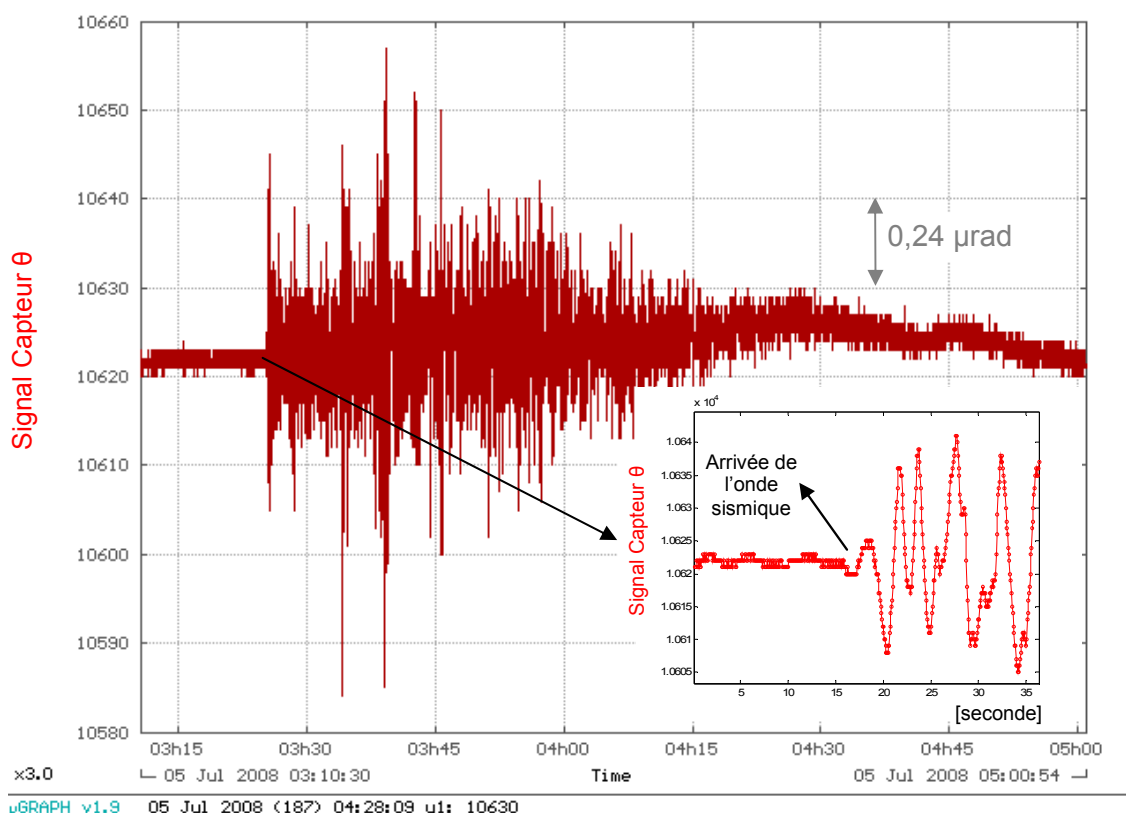


Figure 10-17 : Déviation angulaire du bras du pendule en déflexion libre, enregistré lors du séisme de magnitude 5,1 au nord du Japon (Fréquence d'échantillonnage de 16 Hz, le 05/07/08).

10.16 Application de forçages multiples en déflexion libre

La Figure 10-18 illustre la position angulaire du bras du pendule en déflexion libre soumis au forçage simultané d'un échelon de couple électrostatique et des couples induits par la rotation des trois aiguilles de la montre

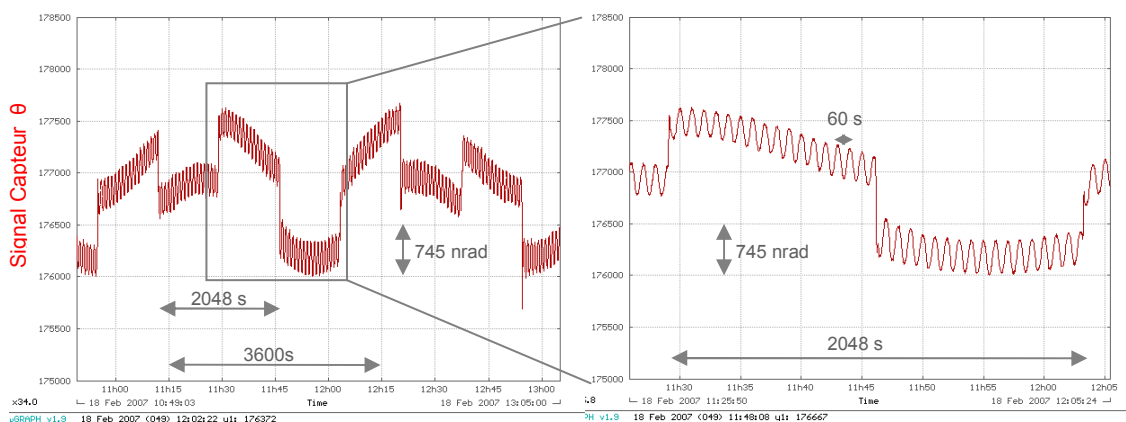


Figure 10-18 : Signaux bruts en mode libre soumis à des forçages multiples donnés pour deux échelles de temps différentes (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 20/02/07)

La Figure 10-19 illustre le résultat du stacking opéré pour chacune des périodes de forçage. (Le stacking sur la période d'une heure a été préalablement filtré sur une période d'une minute)

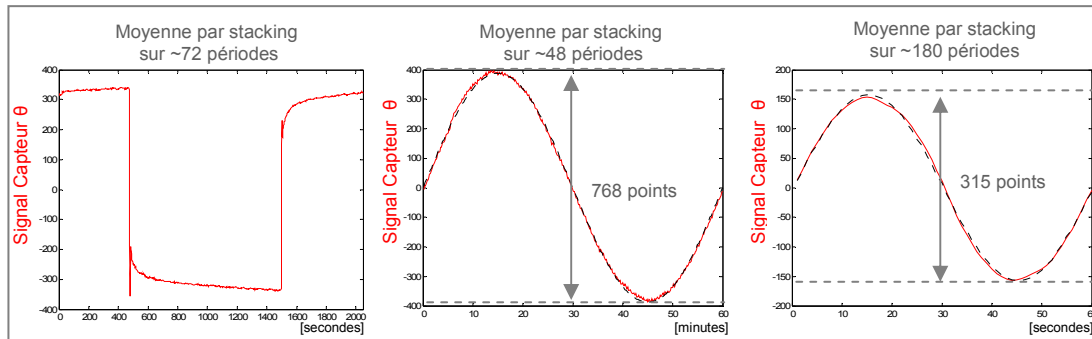


Figure 10-19 : Résultats des Stacking sur les différentes périodes de forçages appliqués à la balance en mode libre

Nous observons que la réponse à l'échelon de force électrostatique présente des caractéristiques de fluages importants. L'amplitude liée à l'aiguille des secondes est ainsi fortement atténuée. Ainsi, le rapport entre la déviation angulaire produite par l'aiguille des minutes et celle produite par l'aiguille des secondes est de 2,4 au lieu de 1,54 déduite des données fournies par le constructeur.

10.17 Influence des fluages sur la réponse en fréquence expérimentale

La Figure 10-20 et la Figure 10-21 représentent respectivement les réponses en fréquences expérimentales réalisées en mode libre et en mode asservi pour des points de fonctionnement présentant d'importants degrés de fluages.

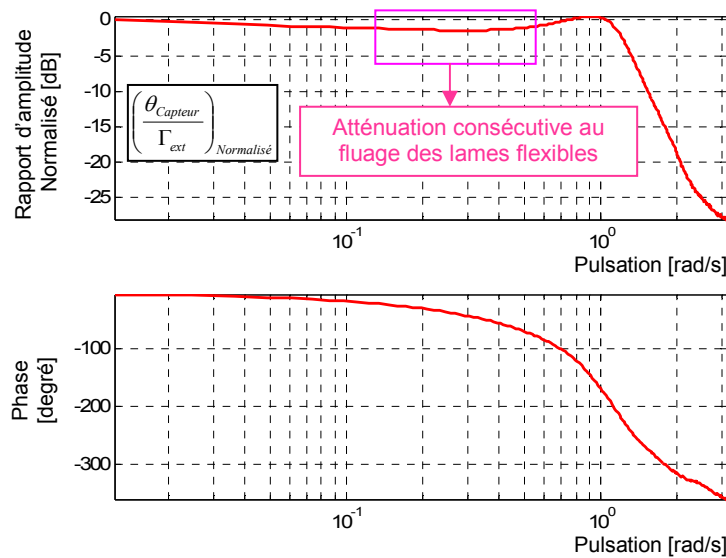


Figure 10-20: Déviation angulaire en déflexion libre: Réponse en fréquence expérimentale (15/07/08)

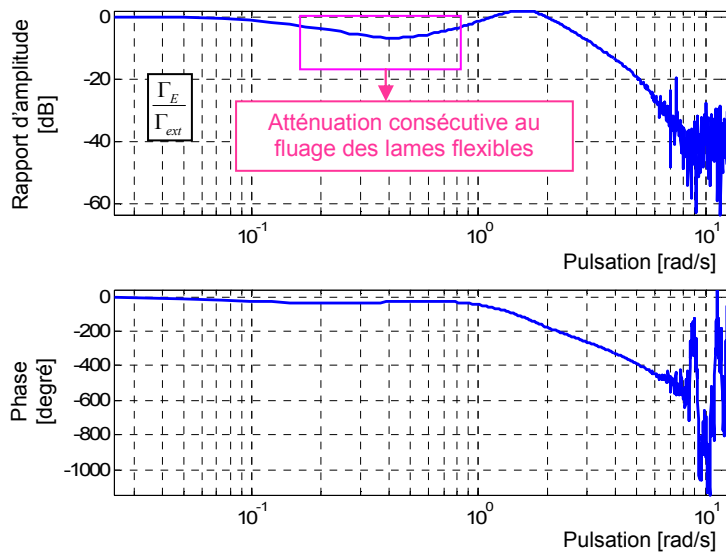


Figure 10-21: Signal de compensation PID: Réponse en fréquence expérimentale (10/11/08)

Nous observons de fortes atténuations pour les périodes de forçages comprises entre 6 et 60 secondes. Celles-ci sont à l'origine des corrections à apporter aux enregistrements relatifs au forçage de l'aiguille des secondes.

10.18 USGS New Low-Noise Model et déviation angulaire parasite

L'USGS New Low-Noise Model [54], appelé aussi PLNM (Peterson Low-Noise Model) est une représentation graphique et numérique de l'amplitude RMS des niveaux de bruits sismiques verticaux les plus faibles observés à la surface du globe indépendamment de la contribution des activités humaines (Figure 10-22).

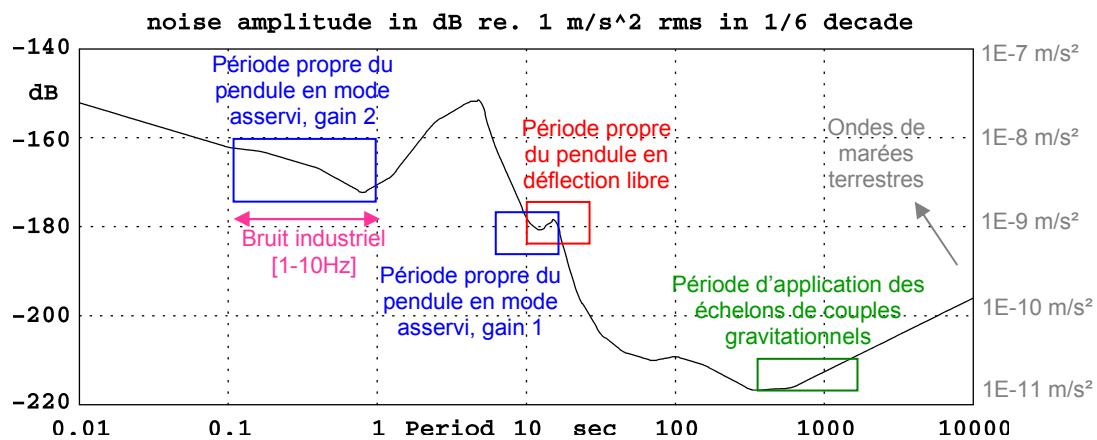


Figure 10-22: USGS New Low-Noise Model : Amplitude RMS de l'accélération verticale minimale du sol observée à la surface du globe, exprimée en $[m/s^2]$ en fonction de la période par pas d'un sixième de décade (figure extraite de [54])

Nous observons un extremum de l'amplitude RMS des accélérations microsismiques verticales entre 4 et 6 secondes ainsi qu'un deuxième extremum d'amplitude moindre pour une période de l'ordre de 10 secondes.

Pour plus de lisibilité, nous avons inséré sur la Figure 10-22 les principales périodes propres intervenant dans notre approche expérimentale en mode libre et asservi.

Nous observons que l'extremum local d'activité sismique autour de 10 secondes correspond avec la période propre observée du pendule en mode asservi de gain 1 et n'est pas très éloigné de sa période propre en déflexion libre (15 secondes).

Nous observons également que la période propre théorique de 0,4 secondes du pendule en mode asservi de gain 2 (Tableau 7-2) coïncide avec la bande de fréquence du bruit dit industriel. Rappelons que l'influence de celui-ci n'est pas intégrée dans le modèle de la Figure 10-22, de sorte que les amplitudes des accélérations sismiques observées localement peuvent être sensiblement plus élevées que celles prévues par le modèle (de plusieurs ordres de grandeur).

Dans le cadre de notre étude, nous prendrons une valeur moyenne de $10^{-7} m/s^2$, surestimant les valeurs données par le modèle pour toute les plages de fréquence considérées. Nous supposons en outre que les amplitudes RMS des accélérations horizontales de sol sont du même ordre de grandeur.

10.19 Expérience préliminaire du mois de mars 2006

10.19.1 Présentation

Nous avons, préalablement à la construction de la balance présentée dans ce travail, validé nos différentes procédures d'étalonnage sur un premier dispositif expérimental spécifiquement dédié à cet effet.

Cet appareil ne comporte pas d'actionneur gravitationnel et son fonctionnement est limité au seul mode libre.

Les masses pendulaires utilisées sont identiques à celles montées sur la balance actuelle, le profilé en aluminium les supportant est lui plus long de 26 cm.

Les principales caractéristiques du bras pendulaire utilisé sont reprises à la Figure 10-23.

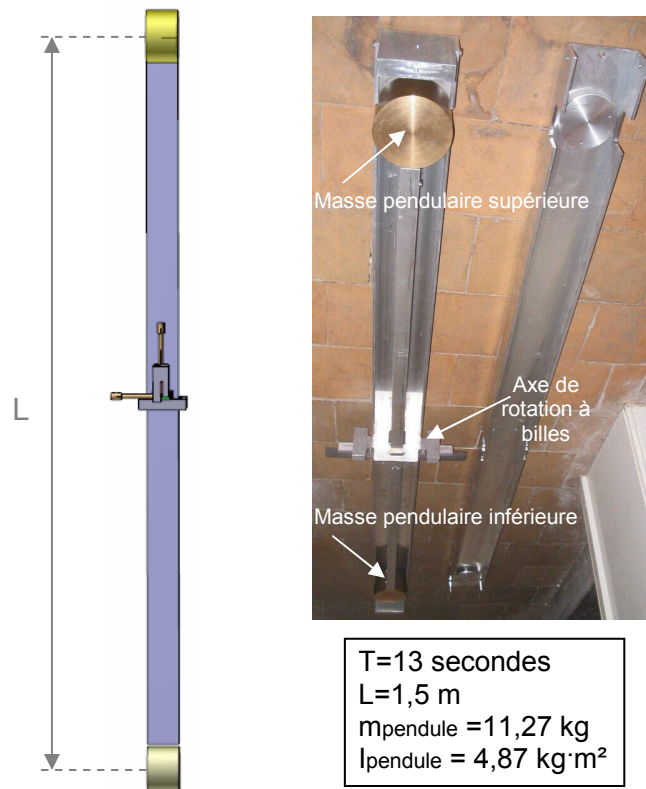


Figure 10-23: Expérience préliminaire: pendule astatisé monté sur un pivot à billes

Le pivot du pendule possède la particularité d'être constitué de deux billes de roulement en acier de 9,5 mm de diamètre solidaires du bras pendulaire et posées sur une plaque d'aluminium par l'intermédiaire d'une lame de rasoir posée à plat. La lame de rasoir permet d'obtenir une surface de roulement de bonne qualité exempte de traces d'oxydation (Figure 10-24).

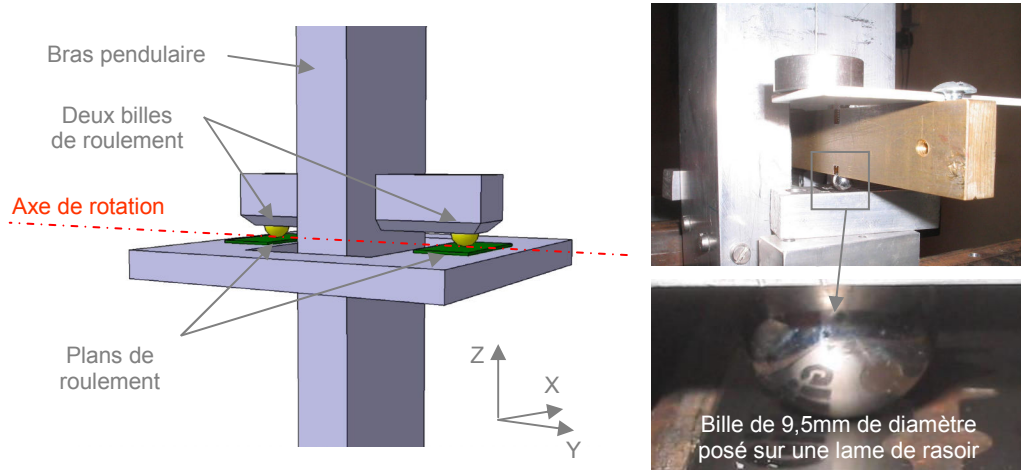


Figure 10-24: Pivot à billes du pendule astatisé (mars 2006)

Remarquons qu'une déviation angulaire de 10^{-9} rad du bras pendulaire se traduit par un roulement de $5 \cdot 10^{-12}$ m pour une bille de 1 cm de diamètre. La distance de roulement est ainsi de deux à trois ordres de grandeur inférieure au diamètre atomique.

Notons à ce propos que le diamètre des billes utilisées est largement surdimensionné par rapport à la charge qu'elles supportent.

Le pivot à billes a l'avantage des pivots dits à couteau, permettant de reprendre l'intégralité des accélérations horizontales tout en évitant les contraintes de rectitudes liées aux lames des couteaux.

Elle permet en outre de bénéficier du savoir faire de l'industrie pour une large gamme de billes et d'une documentation détaillée pour contraindre leur dimensionnement.

La masse pendulaire supérieure est entourée de deux électrodes (Figure 10-25) dont la géométrie et les dimensions sont identiques aux électrodes de l'actionneur électrostatique de notre balance présenté au §6.1.

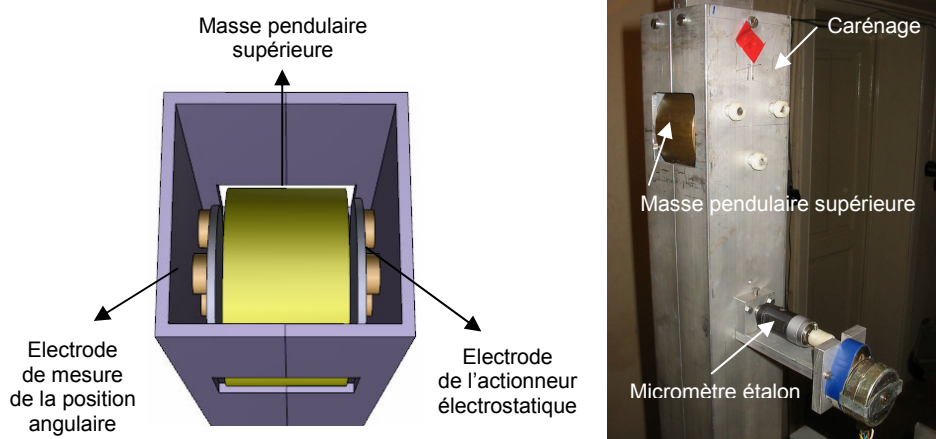


Figure 10-25 : Vue du dessus de la balance avec les deux électrodes en forme de disque disposées de part et d'autre de la masse cylindrique supérieure. Une électrode sert à mesurer la position angulaire du pendule tandis que l'autre sert à appliquer des échelons de couple électrostatique

Une électrode est utilisée pour le capteur de position angulaire tandis que l'autre permet d'appliquer les échelons de couple électrostatique.

Les conditionneurs utilisés pour le capteur de position ainsi que pour la mesure de la capacité de l'électrode de l'actionneur électrostatique sont tous deux basés sur des oscillateurs à relaxation RC équivalents à ceux présentés précédemment.

10.19.2 Facteurs d'étalonnage

10.19.2.1 Constante de rappel du pendule :

La valeur de la constante de rappel du pendule est déterminée à partir de l'équation (4-4) et des paramètres du pendule donnés à la Figure 10-23.

Le calcul de sa valeur est alors donné par :

$$\kappa_{Balance} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{I}{T^2} = 1,13 \quad [N \cdot m / rad] \quad (10-25)$$

Le couple de rappel du pendule est alors donné par la relation (10-26).

$$\Gamma_{Balance} = \kappa_{Balance} \theta \quad [N \cdot m] \quad (10-26)$$

10.19.2.2 Etalonnage du capacimètre de l'actionneur électrostatique

La valeur du gain théorique de notre capacimètre peut être déterminée à partir du modèle de l'oscillateur à relaxation RC décrit à l'équation (6-17) et de la valeur de la résistance de 220 kΩ montée sur celui-ci (10-27).

$$\left(\frac{dC_m}{dT_{555}} \right)_{Théorique} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2) \cdot R} = 3,28 \cdot 10^{-6} \quad [Farad / s] \quad (10-27)$$

Le gain du capacimètre a pu être déterminé par une deuxième méthode indépendante, basée sur la mesure d'une série de neuf condensateurs préalablement étalonnés par un capacimètre numérique.

Le résultat de cet étalonnage est donné à la Figure 10-26.

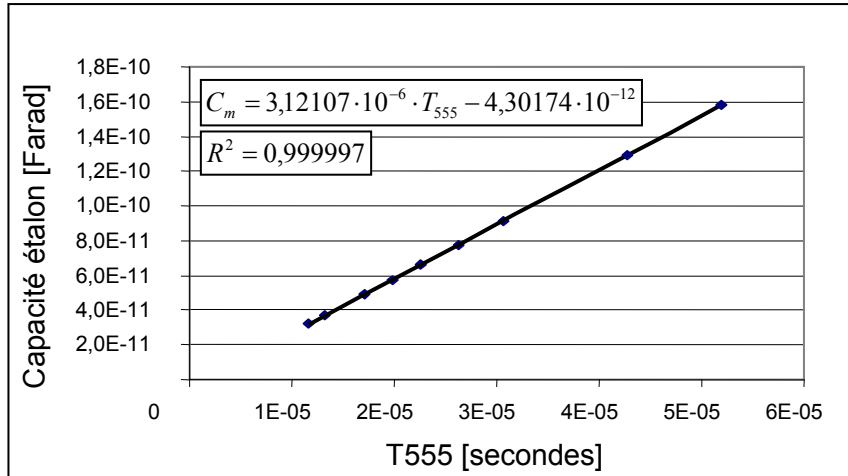


Figure 10-26: Etalonnage de l'oscillateur étalon

La valeur du gain du capacimètre déduit de la Figure 10-26 est alors donnée par (10-28).

$$\left(\frac{dC_m}{dT_{555}} \right)_{\text{Mesuré}} = 3,12 \cdot 10^{-6} \quad [\text{Farad} / \text{s}] \quad (10-28)$$

Soit un écart de 4,9 % avec la valeur obtenue en (10-27). Nous retiendrons cette dernière valeur pour contraindre la valeur de l'échelon électrostatique appliqué.

10.19.2.3 Etalonnage du capteur de position et de l'actionneur électrostatique

La procédure d'étalonnage repose sur un micromètre étalon actionné par un moteur pas à pas (Figure 10-25). Cependant, contrairement au dispositif installé actuellement sur la balance, le couplage mécanique entre le micromètre et la boîte de démultiplication ne présentait pas de défauts apparents.

La Figure 10-27 donne les sorties en fréquence, exprimées en Hertz, émanant du capteur de position angulaire et de l'oscillateur mesurant la capacité de l'électrode de l'actionneur électrostatique en fonction de la déviation angulaire du bras pendulaire induite par le micromètre étalon. Ces courbes ont été réalisées sur une plage totale de $1,2 \cdot 10^{-3}$ rad avec une phase aller et une phase retour du pointeau du micromètre étalon.

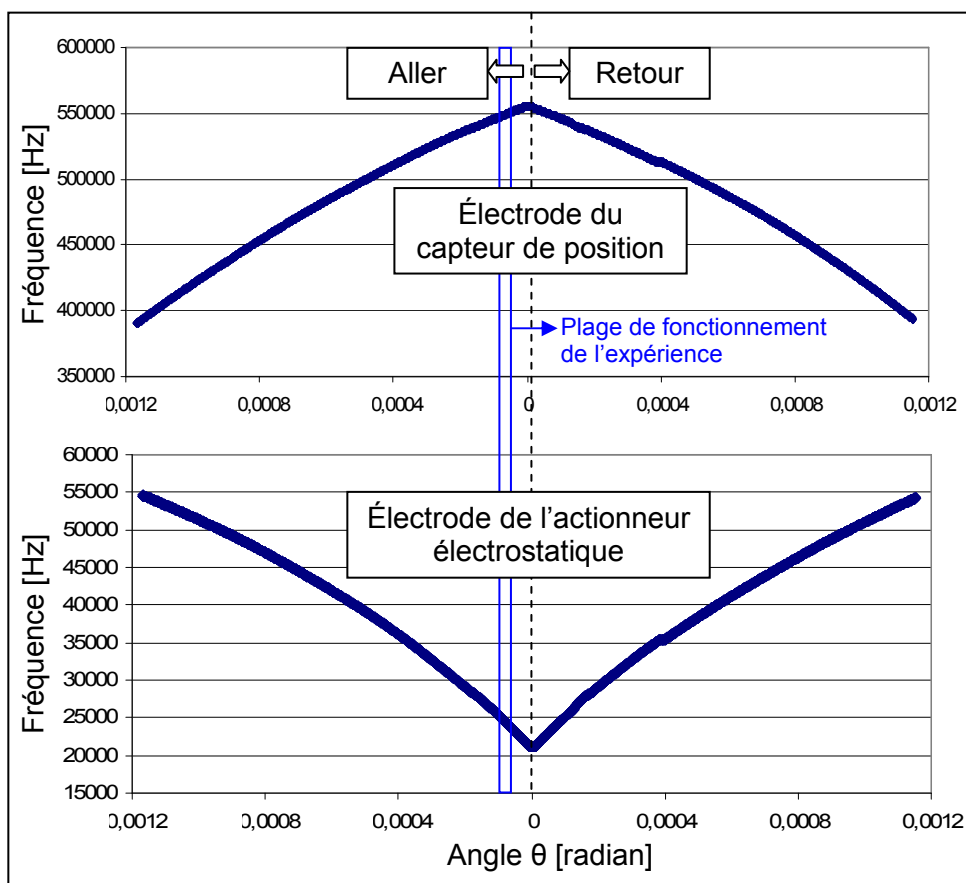


Figure 10-27 : Etalonnage du capteur de position et de l'actionneur électrostatique en parallèle (07/03/06)

À partir de la relation (10-28), et du deuxième graphe de la Figure 10-27, nous pouvons tracer l'évolution de la valeur de la capacité de l'électrode de l'actionneur électrostatique en fonction de la position angulaire du bras du pendule (Figure 10-28).

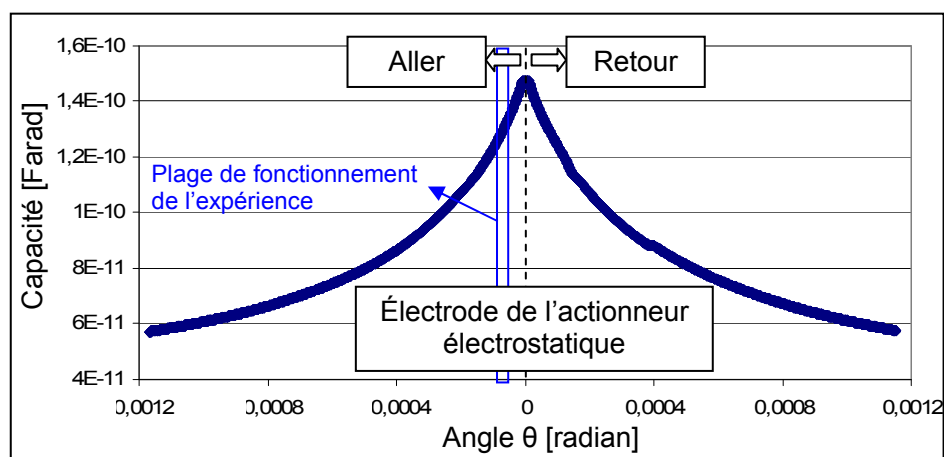


Figure 10-28: Etalonnage de l'actionneur électrostatique

Les expériences présentées dans ce paragraphe ont été réalisées pour une position fortement excentrée du pendule (proche de l'électrode de l'actionneur électrostatique) sur une plage relativement étroite de 30 μ rad.

La Figure 10-29 donne la courbe d'étalonnage du capteur de position correspondant à la plage de mesure utilisée par nos expériences.

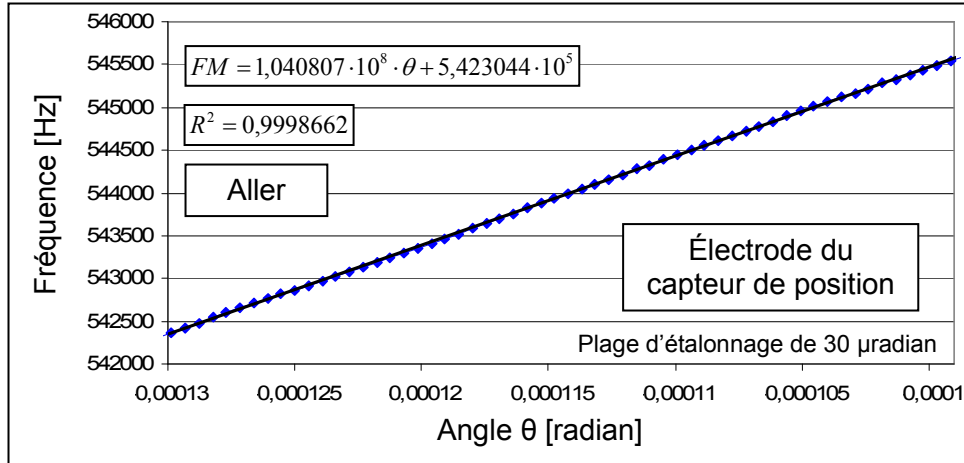


Figure 10-29: Etalonnage du capteur de position, plage d'étalonnage sur 30 μ rad correspondant à la plage de fonctionnement de l'expérience (valeurs mesurées et régression linéaire par moindres carrés)

Nous pouvons supposer la sensibilité du capteur de position constante sur la plage de mesure considérée, avec comme valeur :

$$\frac{d\theta}{d(\text{fréquence})} = 9,69 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Hz} \quad (10-29)$$

Tenant compte de l'équation (10-26) et du coefficient (10-29), nous pouvons exprimer la valeur du couple de rappel du pendule en fonction de la fréquence de sortie du capteur de position (10-30)

$$\frac{d\Gamma_{\text{Balance}}}{d(\text{fréquence})} = 1,09 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m/Hz} \quad (10-30)$$

La courbe d'étalonnage de l'actionneur électrostatique relative à la plage de fonctionnement utilisée pour nos expériences est donnée par la Figure 10-30.

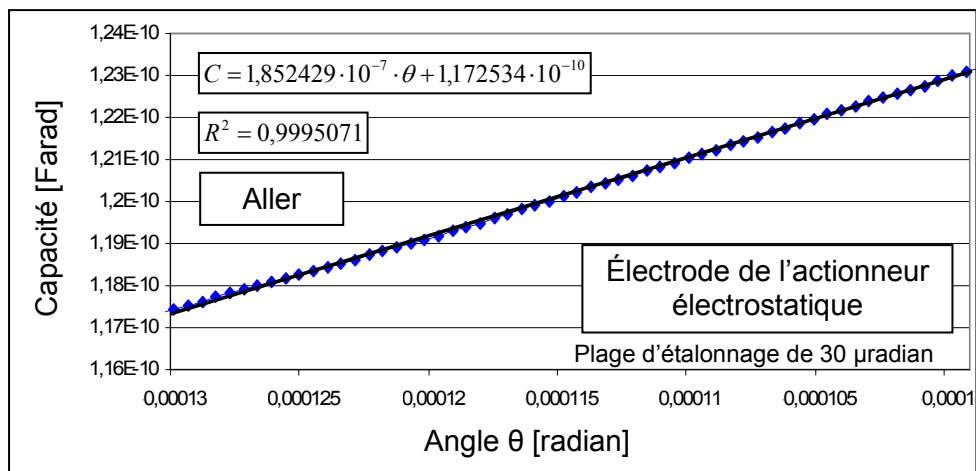


Figure 10-30: Etalonnage de l'électrode de l'actionneur électrostatique, plage d'étalonnage de 30 μradians correspondant à la plage de fonctionnement de l'expérience (valeurs mesurées et régression linéaire par moindre carré)

Nous supposons la valeur du coefficient $dC/d\theta$ de l'actionneur électrostatique constant sur la plage de mesure considérée, avec comme valeur (10-31).

$$\frac{dC}{d\theta} = 1,85 \cdot 10^{-7} \quad [\text{Farad} / \text{rad}] \quad (10-31)$$

Les échelons de couples électrostatiques sont appliqués en connectant alternativement l'électrode de l'actionneur au potentiel de terre local et à une tension continue de 4,9980 Volts.

Tenant compte de la valeur du coefficient (10-31) et de l'équation (6-7), l'échelon de couple électrostatique $\Delta\Gamma_E$ produit par notre actionneur électrostatique est alors donné par :

$$\Delta\Gamma_E = \frac{dC}{d\theta} * \frac{V^2}{2} = 2,31 \cdot 10^{-6} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (10-32)$$

Les différents facteurs d'étalonnages liés au couple de rappel du pendule et à l'échelon de couple électrostatique induit par l'actionneur électrostatique sont résumés au Tableau 10-10.

Etalons	Acquisition seconde
Déviation angulaire θ	$9,69 \cdot 10^{-9} [\text{rad}/\text{point}]$
Couple de rappel de la Balance	$1,09 \cdot 10^{-8} [\text{N} \cdot \text{m}/\text{point}]$
Echelon de couple électrostatique	$2,31 \cdot 10^{-6} [\text{N} \cdot \text{m}]$

Tableau 10-10 : Récapitulatif des facteurs d'étalonnage

10.19.3 Forçages multiples en déflexion libre

Nous avons soumis notre pendule au forçage combiné des aiguilles de la montre présentée au §4.5 et de l'actionneur électrostatique sur une période de quatre jours (Figure 10-31).

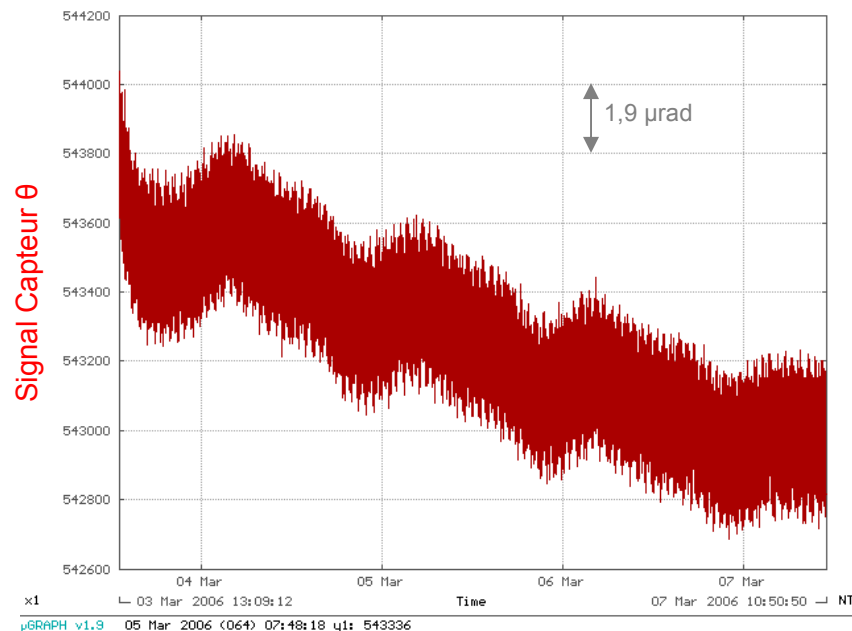


Figure 10-31: Signal brut en acquisition seconde du pendule en mode libre sous l'action de forçages multiples (Fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le 07/03/06)

La Figure 10-32 illustre une plage d'enregistrement plus étroite de l'ordre de quelques minutes. On distingue alors nettement l'influence des forçages induits par les aiguilles de la montre et l'échelon de couple électrostatique.

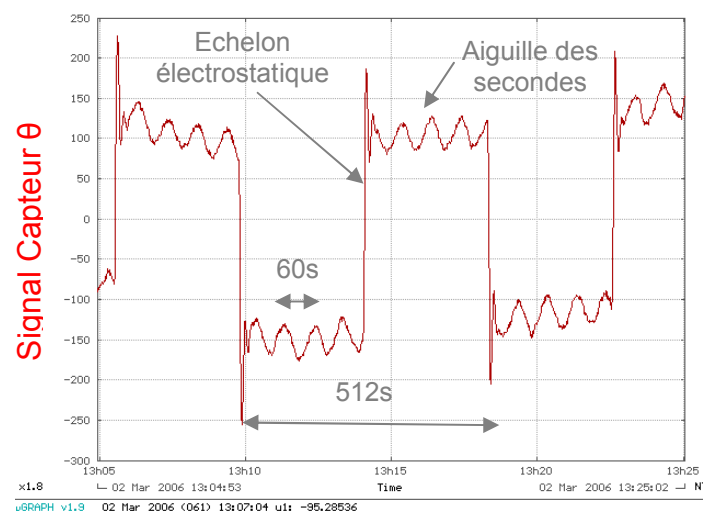


Figure 10-32: Séquence de 20 minutes extraite de la figure précédente

Observons que le rapport signal sur bruit apparent de ces expériences réalisées à l'Observatoire Royal de Belgique reste de très bonne qualité.

La Figure 10-33 donne le résultat du stacking opéré sur la période de forçage de l'échelon électrostatique.

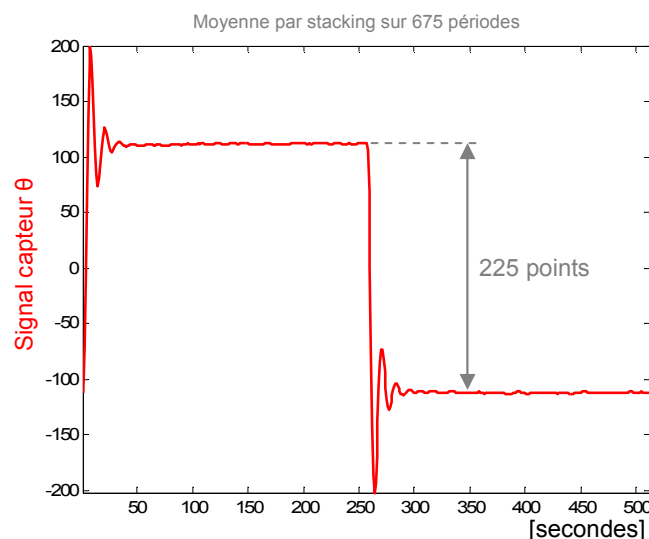


Figure 10-33: Moyenne par stacking sur l'échelon de couple électrostatique consécutif à un échelon de tension de 4,9980 Volts

Les résultats des stackings opérés sur les périodes de forçage de l'aiguille des minutes et des secondes de la montre sont donnés à la Figure 10-34.

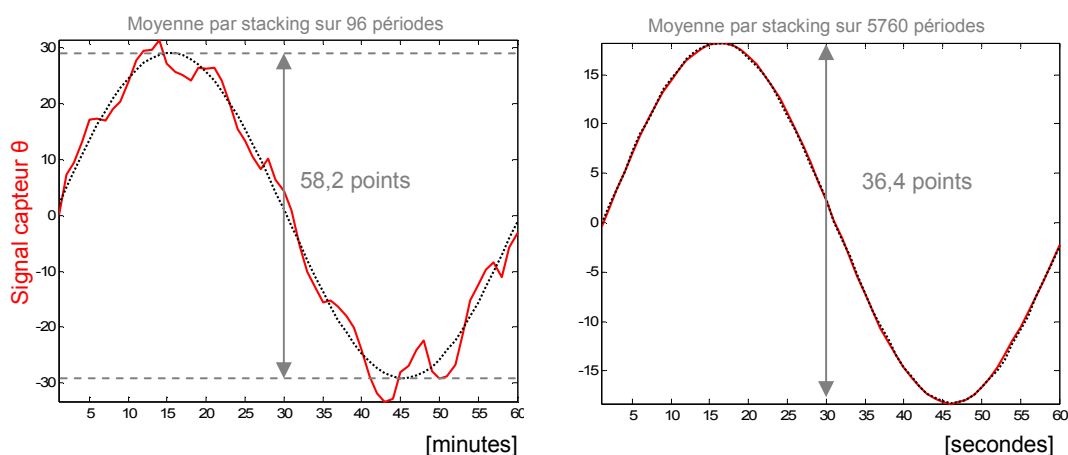


Figure 10-34: Moyenne par stacking sur la période de l'aiguille des minutes et des secondes

Observons que le rapport d'amplitude mesuré entre la déviation angulaire produite par le couple de l'aiguille des minutes et des secondes est de 1,6 au lieu de la valeur de 1,54 donnée par le constructeur.

Le Tableau 10-11 récapitule les valeurs de déviation angulaire et de couple de rappel résultant de l'application du forçage électrostatique et des aiguilles de la montre déduite des stackings de la Figure 10-33 et de la Figure 10-34 ainsi que des coefficients du Tableau 10-10.

Forçages	Sortie capteur θ [Hz]	Dévation angulaire [rad]	Couple de rappel du pendule [N.m]
Aiguille des minutes	58,2	$5,64 \cdot 10^{-7}$	$6,34 \cdot 10^{-7}$
Aiguille des secondes	36,4	$3,53 \cdot 10^{-7}$	$3,97 \cdot 10^{-7}$
Échelon de couple électrostatique	225	$2,18 \cdot 10^{-6}$	$2,45 \cdot 10^{-6}$

Tableau 10-11 : Déviation angulaire et couple de rappel consécutifs au forçage électrostatique et au forçage de la montre

Nous pouvons comparer la valeur théorique du couple engendré par les aiguilles de la montre (données constructeur) avec les facteurs d'étalonnage donnés par le couple de rappel du pendule et l'échelon de couple électrostatique en appliquant une règle de trois aux valeurs du Tableau 10-11. Ces données sont reprises au Tableau 10-12.

Etalons	Γ Aiguille minute [N.m]	Γ Aiguille seconde [N.m]
Valeur théorique (Constructeur)	$6,26 \cdot 10^{-7}$	$4,06 \cdot 10^{-7}$
Couple de rappel de la Balance	$6,34 \cdot 10^{-7}$ (+1,6%)	$3,97 \cdot 10^{-7}$ (-3%)
Electrostatique	$5,98 \cdot 10^{-7}$ (-4,5%)	$3,74 \cdot 10^{-7}$ (-7,9%)

Tableau 10-12: Comparaison du facteur d'étalonnage des aiguilles de la montre donné par le constructeur avec les facteurs d'étalonnage donnés par le couple de rappel pendulaire et le couple électrostatique.

Cette expérience préliminaire nous a permis de vérifier la pertinence de nos méthodes d'étalonnage à quelques pour cent près et a justifié la construction de la balance présentée dans ce travail.

Références

Général

- [1] Newton, S.I.: « *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ». London, (1687).
- [2] Mavridès, S.: « *La relativité* », Que sais-je, Presse Universitaire de France, ISBN: 2 13 042839 8. (2000).
- [3] Feynman, R.: « *Le cours de physique de Feynman Electromagnétisme 1* », Feynman/Leighton/Sands, InterEditions, Paris. ISBN 2-7296-0028-0, (1979).
- [4] Feynman, R.: « *Le cours de physique de Feynman Mécanique 1* », Feynman/Leighton/Sands, InterEditions, Paris. ISBN 2-7296-0026-4, (1979).
- [5] Davis, R.S.: « *Possible new definitions of the kilogram* ». Phil. Trans. R. Soc. A 363, (doi:10.1098/rsta.2005.1637.), (2005).
- [6] Machacek, A.C.: « *The Kilogram, définition, réalisation an dits replacement* » Department of Physics, Clarendon Laboratory, University of Oxford (june 1998).
- [7] Dubois, J., Diamant, M.: « *Géophysique 3^{ème} édition* » Dunod, Paris, ISBN : 2 10 049185 7, (2005).
- [8] D'Urso, C., Adelberger E.G.: Phys. Rev. D 55, 7970, (1997).
- [9] Trenkel, C., Speake, C.C.: Phys. Rev. D 60, 107501, (1999).
- [10] Speake, C.C.: « *Newton's constant and the twenty-first century laboratory* ». Phil. Trans. R. Soc. A, 363, 2265–2287, (2005).
- [11] Nyquist, H.: « *Thermal agitation of Electric Charge in Conductors* », Physical Review 32 : 110-113, (1928).
- [12] Callen, H.B., Welton, T.A.: « *Irreversibility and Generalized Noise* », Physical Review 83 :34-40, (1951).
- [13] Quinn, T.J.: « *The beam balance as an instrument for very precise weighing* », Meas. Sci. Technol. 3, 141-159, (1992).
- [14] Quinn, T.J., Speake, C.C. & Brown, L.M.: « *Materials problems in the construction of long period pendulums* ». Phil. Mag. A 65, 261–276, (1992).
- [15] Quinn, T.J., Speake, C.C., Davis, R.S. & Tew, W.: « *Stress dependent damping in Cu–Be torsion and flexure suspensions at stresses up to 1.1 GPa* ». Phys. Lett. A 197, 197–208, (1995).
- [16] Quinn, T.J., Davis, R.S., Speake, C.C. & Brown, L.M.: « *The restoring torque and damping in wide Cu–Be torsion strips* ». Phys. Lett. A 228, 36–42, (1997).
- [17] Speake, C.C., Quinn, T.J., Davis, R.S. & Richman, S.J.: « *Experiment and theory in anelasticity* ». Meas. Sci. Technol. 10, 430–434, (1999).
- [18] Speake, C.C., Davis, R.S., Quinn, T.J. & Richman, S.J.: « *Electrostatic damping and its effect on precision mechanical experiments* ». Phys. Lett. A 263, 219–225, (1999).
- [19] Speake, C.C., Hammond, G.D. & Trenkel, C.: « *The torsion balance as a tool for geophysical prospecting* ». Geophysics 66, 527–534, (2001).
- [20] Adelberger, E.G., Heckel, B.R. & Nelson, A.E.: « *Tests of the gravitational inverse square law* » Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 53, 77-121 art. n° 086004, (2003).
- [21] Cagnoli, G., Gammaitoni, L., Kovalik, J., Marchesoni, F. & Segoloni, D., *Philos. Mag.*, 68, 865, (1993).

- [22] Cagnoli, G., Gammaitoni, L., Kovalik, J., Marchesoni, F., Punturo, M., *Phys. Lett. A*, 213, 245, (1996).
- [23] Joseph, C.: « *Contribution à l'accroissement des performances du processus de μ EDM par l'utilisation d'un robot à dynamique élevée et de haute précision* », Thèse n°3281, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2005).
- [24] Comandi, G.L.: « *A fast rotating differential accelerometer for testing the equivalence principle: Preliminary results* », Thèse, Università Degli Studi di Pisa, Dipartimento di Fisica (2004).
- [25] Schwartz, J.P. & al, « *Hysteresis and related error mechanisms in the NIST Watt balance experiment* » Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, Volume 106, Number 4, (627-640), (July-August 2001).
- [26] Geneves, G. & al : « *La balance de Watt: vers une nouvelle définition de l'unité de masse?* » Revue française de métrologie, ISSN°1772-1792, n°9, (2007).
- [27] Pinot, P. & al : « *Expérience française de la balance de Watt: Conception et réalisation du comparateur de forces* » (CNAM-INM, LNE).
- [28] Hutt, C.R., Holcomb, L.G., Sandoval, L.D.: « *An Inertial Rotation Meter (Tiltmeter)* » USGS Albuquerque Seismological Laboratory (2003).
- [29] Melchior, P., « *Sur la question de la dépendance de la période et de l'amplitude pour les pendules horizontaux en quartz* », BIM n°35 PP 1180-1182, (1964).
- [30] Melchior, P., Flick, J., Ducarme, B.: « *Station-Walferdange-Mesures faites dans les composantes Nord-Sud et Est-Ouest avec les pendules horizontaux VM n° 10, 12, 23, 42, 56, 65,66 en 1968* ». Bull. OBS. Marées terrestres V.III Fasc. V pp 1-78, (1970).
- [31] Van Ruymbeke, M.: « *Sur l'étalonnage de pendules horizontaux à l'aide de céramiques piezo-electriques* » AC. R. Belg.-CL.SC.-ORB Comm n° SGN PP 378-386, (1972).
- [32] Verbaandert, J., Melchior, P.: « *Construction et étalonnage d'un pendule horizontal en quartz* ». Obs. Roy. Belg. Comm N°142, SER. Geoph. N°4,7 pp 114-115. (1958).
- [33] Verbaandert, J.: « *Etalonnage des pendules horizontaux* ». Boll. Geophysica. Teorica E Appl., Vol 4 n°16 pp 419-446. (1962).
- [34] Verbaandert, J.: « *Quelques progrès réalisés dans la méthode d'étalonnage des pendules horizontaux* ». BIM N°35 pp 1167-1166. (1964).
- [35] Verbaandert, J.: « *Nouvel interferometre pour etalonnage des crapaudines dilatables* ». 5^{ème} Symp int sur les marées terrestres. Obs Roy Belg Comm N°236 S Geoph N°69 pp 197-213. (1964).
- [36] Pütz, E.: « *Mise au point d'instruments permettant la mesure des effets gravitationnels* ». Mémoire DEC. Université de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées, (2002).
- [37] Jones, R. V., Richards, J.C.S.: « *The design and some applications of sensitive capacitance micrometers* », Journal of Physics-E, Scientific Instruments, 6, 589, (July 1973).
- [38] Gray, M.B., McClelland, D.E., Barton, M., Kawamura, S.: « *A simple high-sensitivity interferometric position sensor for test mass control on an advanced LIGO interferometer* ». Optical and Quantum Electronics Review, ISSN: 0306-8919, Volume 31, Numbers 5-7, (July 1999).
- [39] Thompson, A.M., and Lampard, D.G.: « *A new theorem in electrostatics and its application to calculable standards of capacitance* » Nature (London) 177, 888 (1956).
- [40] Zimmerman, N.M.: « *A primer on electrical units in the System international* » Am. J. Phys. 66, 324-331, (1998).
- [41] Matagne, E., Naslin, S.: « *Etalonnage d'un actionneur électrostatique aide par un calcul de l'effet de bord* », Soumis pour communication à la conférence : Les journées « Electrotechnique du futur », EF 2009, UTC, Compiègne (24 & 25 septembre 2009).

- [42] Debye, P.: « **Polar Molecules** », Chimeical Catalogue Company, New York, p94, (1929).
- [43] Cole K.S., Cole R.H.: « **Dispersion and absorption in dielectrics- 1 Alternating current characteristics** » Journal of Chemical Physics, vol. 9. (Apr. 1941).
- [44] Cole K.S., Cole R.H.: « **Dispersion and absorption in dielectrics- 2 Direct current characteristics** » Journal of Chemical Physics, vol. 10. (Feb. 1942).
- [45] Cole R.H.: « **Theories of dielectric polarization and relaxation** » In Progress in Dielectrics, vol 3, Heywood (1961).
- [46] Van Ruymbeke, M.: « **Transformation of Nine Lacoste Romberg in Feedback Systems** » Marées Terrestres Bulletin d'Information, n°93, pp.6202-6228, ISSN 0542-6766 CODEN MTBIBP, (1985).
- [47] Van Ruymbeke, M.: « **New Developments of Feedback Electronics** ». Marees Terrestres Bulletin d'Informations. No. 104, pp. 7292 – 7298, (1989).
- [48] Beauducel, F. :« **Structure et comportement mécanique du volcan Mérapi (Java) : une approche méthodologique du champ de déformation** ». PhD , Université Paris 7, Géophysique interne, (1998).
- [49] Van Ruymbeke, M., Beauducel, F., Somerhausen, A.: « **The environmental Data Acquisition System (EDAS) developed at the Royal Observatory of Belgium** ». Journal of the Geodetic Society of Japan, vol.47 N° 1, pp. 40-46, (2001).
- [50] Van Ruymbeke, M., Howard, R., Pütz, E., Beauducel, F., Somerhausen, A., Barriot, J.P.: « **An introduction to the use of HiCum for signal analysis** », BIM 138, 10955-10966 (2003).
- [51] Van Ruymbeke, M., Zhu, P., Cadicheanu, N., Naslin, S.: « **Very Weak Signals (VWS) detected by stacking method according to different astronomical periodicities (HiCum)** ». Natural Hazards and Earth System Science, 7. 651-656. (2007).
- [52] D'Oreye de Lantremange, N: « **Thèse: Inclinomètre à niveaux hydrostatiques de haute résolution en géophysique** », Département de physique, Louvain-la Neuve (2003).
- [53] Jiang, Z., Becker, M., Francis, O., Germak, A., Palinkas, V., Jousset, P., Kosteletzky, J., Dupont, F., Lee, C.W., Tsai, C.L., Falk, R., Wilmes, H., Kopaev, A., Ruess, D., Ullrich, M.C., Meurers, B., Mrlina, J., Deroussi, S., Métivier, L., Pajot, G., Pereira Dos Santos, F., Van Ruymbeke, M., Naslin, S. & Ferry, M.: « **Relative Gravity Measurement Campaign during the 7th International Comparison of Absolute Gravimeters (2005)**», Metrologia 46, 214-226, (2009).
- [54] Peterson, J.: « **Observations and modelling of background seismic noise** », Open File report 93-322, US Geological Survey, Albuquerque, New Mexico, Peterson et al, (1993).
- [55] Harrison, J.C.: « **Cavity and Topographic Effects in Tilt and Strain Measurements** » Journ. Geoph. Res., vol 81, n°2, pp 319-328 (1976).
- [56] Melchior, P.: « **The tides of the planet earth** », Pergamon Press, London. ISBN: 0-08-022047-9, (1978).
- [57] Naslin, P.: « **Les régimes variables dans les systèmes linéaires et non linéaires** », Dunod, Paris, (1962).
- [58] Naslin, P.: « **Nouveau critère d'amortissement** », Automatisme, (juin 1960).
- [59] Naslin, P.: « **Polynômes normaux et critère algébrique d'amortissement** », Automatisme, (juin et juil.-août 1963).
- [60] Naslin, P.: « **Influence du numérateur de la transmittance sur la réponse indicielle** », automatisme, (sept. 1965).
- [61] Naslin, P.: « **Mesures et contrôles. Techniques de l'Ingénieur** », fascicule R 7407, (décembre 1998).

- [62] Lequesne, D.: « *Régulation P.I.D. analogique-numérique-floue* », Hermes Sciences publications, Lavoisier. ISBN 2-7462-1301-X, (2006).
- [63] Ziegler, J.G., Nichols, N.B.: « *Optimum settings for automatic controllers* » Trans. ASME, Vol. 64, p 759-768, (novembre 1942).
- [64] Cohen, E.R., Taylor, B.N.: « *The 1986 CODATA recommended values of the fundamental physical constants* », Rockwell International Science Center Thousand Oaks, CA91369, National Bureau of Standards Gaithersburg, MD 20899, (1987).
- [65] Mohr, P.J., Taylor, B.N.: « *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998* », National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8401, (2000).
- [66] Mohr, P.J., Taylor, B.N.: « *CODATA recommended values of the fundamental physical constants 2002* ». Rev. Mod. Phys. 77, 1–107, (2005).
- [67] Mohr, P.J., Taylor, B.N., Newell, D.B.: « *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006* », National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8420, USA, (2007).

Expériences G

- [68] Cavendish, H. « *To determine the mean density of the Earth* ». Phil. Trans. R. Soc. 88, 469–526. (1798).
- [69] Boys, C.V.: « *On the Newtonian constant of gravitation* ». Phil. Trans. R. Soc. 186, 1–72, (1895).
- [70] Heyl, P.R., Chrzanowski, P.: « *A new redetermination of the constant of gravitation* ». J. Res. Natl Bur. Stand. (US) 29, 1–31, (1942).
- [71] Rose, R.D., Parker, H.M., Lowry, R.A., Kuhlthau, A.R., Beams, J.W.: « *Détermination of the gravitational constant G* » Phys. Rev. Lett. 23, 655-658, (1969).
- [72] Luther, G.G., Towler, W.: « *Redetermination of the Newtonian gravitational constant* ». Phys. Rev. Lett. 48, 121–123, (1982).
- [73] Bagley, C.H., Luther, G.G.: Phys. Rev. Lett. 78, 3047 (1997).
- [74] Quinn, T.J., Speake, C.C., Richman, S.J., Davis, R.S., Picard, A.: « *A new determination of G using two methods* ». Phys. Rev. Lett. 87 art. no. 111101, (2001).
- [75] Gundlach, J.H.: « *A rotating torsion balance experiment to measure Newton's constant* » Meas. Sci. Technol 10, 454-459, PII : S0957-0233(99)01412-5, (1999).
- [76] Gundlach, J.H., Adelberger, E.G., Heckel, B.R., Swanson, H.E.: « *New technique for measuring Newton's constant G* ». Phys. Rev. D 54, R1256–R1259, (1996).
- [77] Gundlach, J.H., Merkowitz, S.M.: « *Measurement of Newton's constant using a torsion balance with angular acceleration feedback* ». Phys. Rev. Lett. 85, 2869–2872 (2000).
- [78] Gundlach, J.H., Merkowitz, S.M.: private communication, (2002).
- [79] Gundlach, J.H., Merkowitz, S.M.: « *Measurement of Newton's Constant Using a Torsion Balance with Angular Acceleration Feedback* » Department of Physics, Nuclear Physics Laboratory, University of Washington, Seattle, Washington 98195, PACS numbers: 06.20.Jr, 04.80.-y, 06.30.Gv, 97.10.Nf, 91.10, (June 23, 2006).
- [80] Schlamminger, S., Holzschuh, E., Kundig, W.: « *Determination of the gravitational constant with a beam balance* ». Phys. Rev. Lett. 89 art. N°. 161102, (2002).

- [81] Schlamminger, S., Holzschuh, E., Kundig, W., Nolting, F., Pixley, R.E., Schurr, J., Straumann, U.: « *A Measurement of Newton's Gravitational Constant* », Physik-Institut der Universität Zürich, CH 8057 Zürich, Switzerland PACS numbers: 04.80.-y, 06.20.Jr
- [82] Schumacher, A.: « *Systematische Untersuchungen zur Messung der Newtonschen Gravitationskonstanten mit einem Pendelresonator* », Dissertation, zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereiches Physik der Universität Wuppertal, WUB-DIS 99-13, (August 1999).
- [83] Kleinvos, U.: « *Gravitationskonstanten G* », Dissertation, zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereiches Physik der Universität Wuppertal, WUB-DIS 2002-2, (Januar 2002).
- [84] Schwarz, J.P.: « *The free fall determination of the universal constant of gravity* », Thesis (PHD), University of Colorado at Boulder, Source DAI-B 60/01, (Jul 1999).
- [85] Schwarz, J.P., Robertson, D.S., Niebauer, T.M., Faller, J.E.: « *A Free-Fall Determination of the Newtonian Constant of Gravity* », *Science*: Vol. 282. no. 5397, pp. 2230 – 2234 DOI: 10.1126/science.282.5397.2230 (18 December 1998).
- [86] Fattori, M., Lamporesi, G., Petelski, T., Stuhler, J., Tino, G.M.: « *Towards an atom interferometric determination of the Newtonian gravitational constant* ». *Phys. Lett. A* 318, 184–191, (2003).
- [87] McGuirk, J.M., Foster, G.T., Fixler, J.B., Snadden, M.J., Kasevich, M.A. « *Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry* ». *Phys. Rev. A* 65B art. N°. 033608, (2002).
- [88] Bertoldi, A., Lamporesi, G., Cacciapuoti, L., de Angelis M., Fattori, M., Peters, A., Petelski, T., Prevedelli, M., Stuhler, J., Tino, G.M.: « *Atom interferometry gravity-gradiometer for the determination of the Newtonian gravitational constant G* », *Eur. Phys. J. D* 40, 271 (2006).
- [89] Stuhler, J., Fattori, M., Petelski, T., Tino, G.M.: « *MAGIA- Using atom interferometry to determine the Newtonian gravitational constant* », *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 5, S75 (2003).
- [90] Tino, G.M.: « *High Precision Gravity Measurements by Atom Interferometry* » A relativistic Spacetime Odyssey, I. Ciufolini, D. Domenici, L. Lusanna eds., p 147, World Scientific (2003).
- [91] Michaelis, W., Haars, H., Augustin, R.: « *A new precise determination of Newton's gravitational constant* ». *Metrologia* 32, 267–276, (1996).
- [92] Michaelis, W., Melcher, J., Haars, H.: « *Supplementary investigations to PTB's evaluation of G* ». *Metrologia* 41, L29–L32, (2005).
- [93] Newman, R., Bantel, M.K.: « *On determining G using a cryogenic torsion pendulum* ». *Meas. Sci. Technol.* 10, 445–453, (1999).
- [94] Berg, E. C., Bantel, M. K., Cross, W. D., Inoue, T., Newman, R. D., Steffen, J.H., Moore, M.W., Boynton, B.E.: « *Laboratory test of gravitational Physics using a cryogenic torsion pendulum* ». in proceedings of the 10 th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Rio de Janeiro 2003, eds. M.N. Novello and S.P. Bergliaffa, World Scientific, pp. 994-1010 (2005).
- [95] Boynton, P.E., Bonicalzi, R.M., Kalet, A.M., Kleczewski, A.M., Lingwood, J.K., McKenney, K.J., Moore, M.W., Steffen, J. H., Berg, E.C., Cross, W.D., Newman, R.D., Gephart, .G.E.: « *Gravitation Physics at BGPL* », *New Astronomy Reviews* Vol.51. Issue 3-4, p334 (2007).
- [96] Armstrong, T.R., Fitzgerald, M.P.: « *New measurement of G using the measurement standards laboratory torsion balance* ». *Phys. Rev. Lett.* 91 art. N°. 201101, (2003).
- [97] Gershteyn, M.L., Gershteyn, L.I., Gershteyn, A., Karagioz, O.V.: « *Experimental evidence that the gravitational constant varies with orientation* », *Gravitational & Cosmology* Vol.8, N°3 (31), pp.243-246, (2002).

- [98] Chen, Y.T., Cook, A.H.: « *Gravitational Experiments in the Laboratory* », Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-39171-7, pp 27-28, (1993).
- [99] Luo, J. & al.: « *The determination of G at the Huazhong University of Science and Technology (HUST)* », Wuhan (1999).
- [100] Hu, Z.K., Guo, J.K., Luo, J.: Phys. Rev. D 71, 127505 (2005).
- [101] Kuroda, K.: « *Does the Time-of-Swing Method Give a Correct Value of the Newtonian Gravitational Constant?* », Phys. Rev. Lett., Vol. 75, No. 15, pp. 2796-2798, (October 1995).
- [102] Van Ruymbeke, M. « *Un pendule horizontal à méthode de zero permet de mesurer la constante de la gravitation universelle G* ». Thèse annexe, Bruxelles. (1979).

Catalogues & constructeurs

- [103] ADuC 832 Datasheet Analogue Devices, © Analog Devices, Inc., 2002. All rights reserved.
- [104] National Semiconductor, LMC555 CMOS Timer, Datasheet May 2006, www.national.com.
- [105] Moteurs Crouzet, www.crouzet.com
- [106] SWATCH Group Ltd, Seevorstadt 6P.O. Box2501 Biel / Bienne, Switzerland www.swatchgroup.com
- [107] UNIVERSO S.A, CH-2301 La Chaux-de-Fonds, www.universo.ch
- [108] Elcomat-HR et Elcomat-2000, Möller-Wedel Optical, GmbH, Rosengarten 10, D-22880-Wedel
- [109] D-510.020 Single-Electrode Capacitive Position Sensor, Physik Instrument (PI), GmbH & Co. KG Auf der Römerstr, 1 D- 76228 Karlsruhe/Palmbach, Germany. www.pi.ws
- [110] N-310 Piezo stepping Linear Motor Actuator, Physik Instrument (PI), GmbH & Co. KG Auf der Römerstr, 1 D- 76228 Karlsruhe/Palmbach, Germany. www.pi.ws
- [111] TESA France Division ROCH SAS, 13/15 av Georges de la Tour 54303 Luneville Cedex France, www.tesabs.ch
- [112] Wilkinson 3D Diamond, Wilkinson Sword Ltd, Sword House, High Wycombe, Bucks HP13 6DG, www.wilkinsonsword.co.uk
- [113] Ergon Power Italia Srl (ErgonSolair-Wonlex Tech Group), www.ergonpower.it