

Fonction de distribution globale de l'âge dans un bassin peu profond

Eric Deleersnijder, 11 février 2021 - 29 mai 2021

Fonction de distribution globale de l'âge

Dans Dewals et al. (2020), on calcule la fonction de distribution stationnaire (indépendante du temps) de l'âge de l'eau $c(x,y,\tau)$. Elle est définie comme suit: dans le volume de contrôle élémentaire $H(x,y)\delta x\delta y$, le volume de l'eau dont l'âge appartient à l'intervalle $[\tau, \tau + \delta\tau]$ tend vers $H(x,y)c(x,y,\tau)\delta x\delta y\delta\tau$ pour $\delta x, \delta y, \delta\tau \rightarrow 0$, sachant que $H(x,y)$ est la hauteur de la colonne d'eau au point de coordonnées (x,y) . La fonction de distribution satisfait la contrainte

$$C(x,y) = \int_0^{\infty} c(x,y,\tau) d\tau = 1 \quad (1)$$

où $C(x,y)$ est la concentration de l'eau.

Dans l'étude précitée, on ne calcule pas la **fonction de distribution globale de l'âge**, c'est-à-dire

$$\mu(\tau) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} H(x,y)c(x,y,\tau) dx dy \quad (2)$$

La signification physique de cette fonction est la suivante: le volume total de l'eau dont l'âge appartient à l'intervalle $[\tau, \tau + \delta\tau]$ tend vers $\mu(\tau)V\delta\tau$ pour $\delta\tau \rightarrow 0$, sachant que

$$V = \int_{\Omega} H(x,y) dx dy \quad (3)$$

représente le volume d'eau présent dans le domaine. Entre d'autre termes, $\mu(\tau)\delta\tau$ est la fraction du volume total de l'eau dont l'âge appartient à l'intervalle $[\tau, \tau + \delta\tau]$ pour $\delta\tau \rightarrow 0$. Ainsi, en combinant (1)-(3), il vient

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) d\tau = 1 \quad (4)$$

La dimension physique de $\mu(\tau)$ est l'inverse d'un temps. Il devrait être instructif de produire, pour chaque bassin, un **graphe** de $\mu(\tau)$ en fonction de τ et de placer sur ce graphe les temps caractéristiques classiques, tel que volume/flux.

L'âge moyen de l'eau au point (x,y) est

$$a(x,y) = \frac{\alpha(x,y)}{C(x,y)} = \frac{\int_0^{\infty} \tau c(x,y,\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} c(x,y,\tau) d\tau} = \int_0^{\infty} \tau c(x,y,\tau) d\tau \quad (5)$$

où $\alpha(x,y)$ est la concentration d'âge. L'âge moyen de l'eau dans le domaine vaut

$$\langle a \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} H(x,y) a(x,y) dx dy = \frac{1}{V} \int_{\Omega} H(x,y) \left(\int_0^{\infty} \tau c(x,y,\tau) d\tau \right) dx dy \quad (6)$$

En utilisant (2), on simplifie cette expression comme suit

$$\langle a \rangle = \int_0^{\infty} \tau \left(\frac{1}{V} \int_{\Omega} H(x,y) c(x,y,\tau) dx dy \right) d\tau = \int_0^{\infty} \tau \mu(\tau) d\tau \quad (7)$$

Ci-dessous, on va déterminer la fonction de distribution globale de l'âge associée à des écoulements idéalisés.

Cas limite I: réservoir (infiniment bien mélangé)

La fonction de distribution d'âge dans un réservoir (infiniment bien mélangé) de volume V (m^3) traversé par un flux volumique Q ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) est indépendante de la position vaut $c(x,\tau) = \theta^{-1} e^{-\tau/\theta}$, avec $\theta = V/Q$. La concentration, la concentration d'âge et l'âge moyen sont

$$C(x) = \int_0^{\infty} c(x,\tau) d\tau = 1, \quad \alpha(x) = \int_0^{\infty} \tau c(x,\tau) d\tau = \frac{V}{Q}, \quad a(x) = \frac{\alpha(x)}{C(x)} = \frac{V}{Q} \quad (8)$$

La fonction de distribution globale de l'âge est évidemment

$$\mu(\tau) = \theta^{-1} e^{-\tau/\theta} \Rightarrow \langle a \rangle = \int_0^{\infty} \tau \mu(\tau) d\tau = \frac{V}{Q} = \theta \quad (9)$$

Cas limite II: *plug flow*

On considère un canal de longueur L et de section A traversé par un fluide qui se meut à la vitesse U . Le débit volumétrique vaut donc $Q = AU$. La fonction de distribution est

$$c(x,\tau) = \delta(\tau - x/U) \Upsilon(L/U - \tau) \quad (10)$$

où x est la distance à l'entrée du canal, tandis que δ et Υ désignent respectivement l'impulsion de Dirac et la fonction de Heaviside. En tout point, la concentration, la concentration d'âge et l'âge moyen sont

$$C(x) = \int_0^{\infty} c(x,\tau) d\tau = 1, \quad \alpha(x) = \int_0^{\infty} \tau c(x,\tau) d\tau = \frac{x}{U}, \quad a(x) = \frac{\alpha(x)}{C(x)} = \frac{x}{U} \quad (11)$$

La fonction de distribution globale de l'âge est alors

$$\mu(\tau) = \frac{U}{L} \Upsilon(L/U - \tau) = \frac{Q}{V} \Upsilon(L/U - \tau) \Rightarrow \langle a \rangle = \int_0^{\infty} \tau \mu(\tau) d\tau = \frac{L}{2U} = \frac{V}{2Q} \quad (12)$$

Combinaison des deux cas limites précédents

Les études de Westhoff et al. (2017) ou Dewals et al. (2020) suggèrent que deux régimes d'écoulement cohabitent dans réservoir rectangulaire, quelles que soient ses caractéristiques. On pourrait les idéaliser sous la forme d'un *plug flow*, d'une part, et d'un réservoir bien mélangé, d'autre part.

Waugh and Hall (2005) et Terenzi and Hall (2010) ont étudié le transport de traceurs dans un canal avec zone de stockage latéral. Ici, on s'inspire de cette approche idéalisée mais, par souci de simplification, on va supposer que les deux sous-domaines ne communiquent pas.

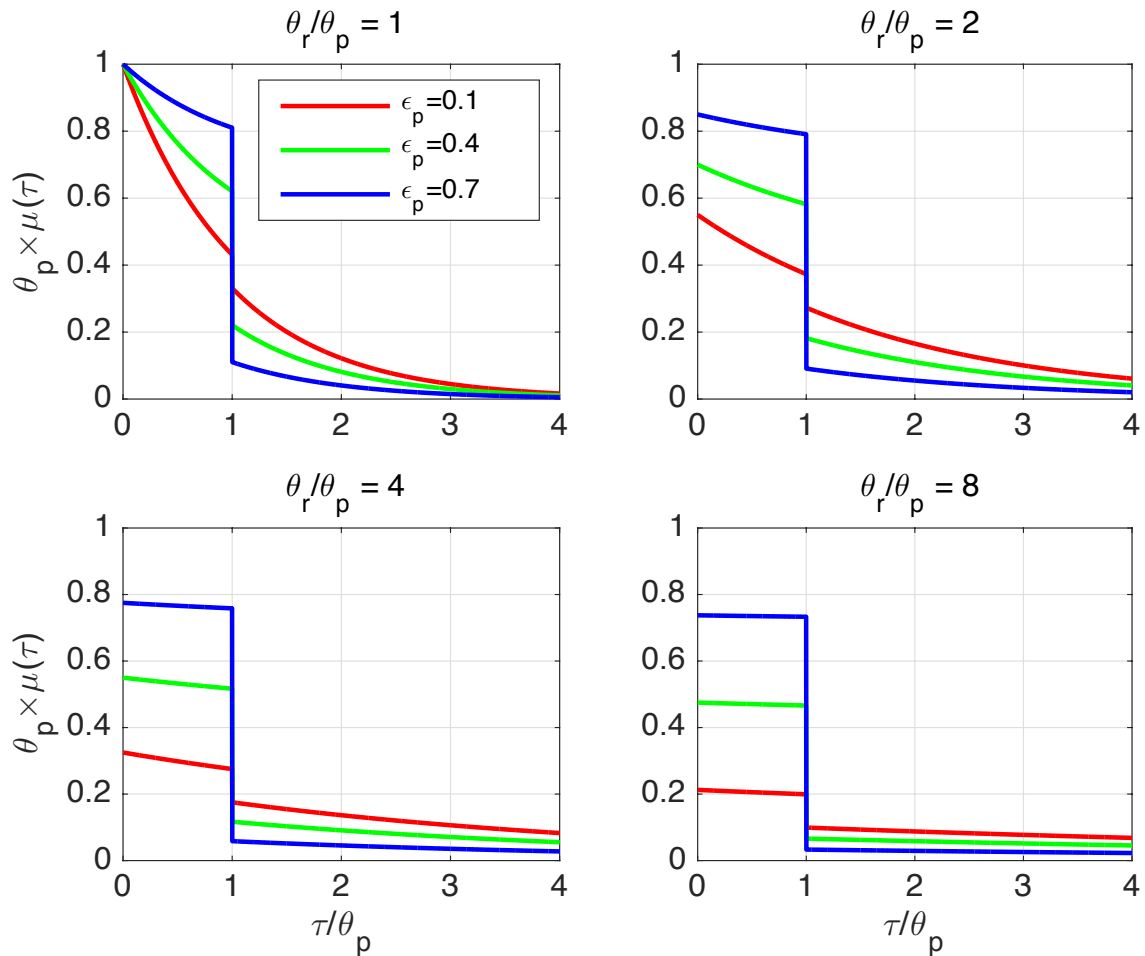
On désigne toute variable relative au *plug flow* par l'indice “*p*” tandis que l'on utilise l'indice “*r*” pour identifier toute variable associée au réservoir bien mélangé. Le volume des deux sous-domaines s'écrit:

$$V_p = \varepsilon_p V, \quad V_r = \varepsilon_r V, \quad \varepsilon_p + \varepsilon_r = 1 \quad (13)$$

où V est le volume total du réservoir. Le débit volumique entrant dans le réservoir, Q , est partagé comme suit:

$$Q_p = \eta_p Q, \quad Q_r = \eta_r Q, \quad \eta_p + \eta_r = 1 \quad (14)$$

Il n'est évidemment pas question de supposer que ε_p et η_p ont le même ordre de grandeur.



On introduit le temps de transit associé au *plug flow*,

$$\theta_p = \frac{V_p}{Q_p} \quad (15)$$

et l'âge moyen (ou temps de résidence moyen) du réservoir

$$\theta_r = \frac{V_r}{Q_r} \quad (16)$$

En utilisant les résultats des sections précédentes, on obtient aisément les fonction de distribution globale de l'âge pour les deux sous-domaines, à savoir

$$\mu_p(\tau) = \frac{1}{\theta_p} \gamma(\theta_p - \tau), \quad \mu_r(\tau) = \frac{1}{\theta_r} e^{-\tau/\theta_r} \quad (17)$$

Ces deux fonctions satisfont (comme il se doit) les contraintes intégrales suivantes:

$$\int_0^{\infty} \mu_p(\tau) d\tau = 1, \quad \int_0^{\infty} \mu_r(\tau) d\tau = 1 \quad (18)$$

La fonction de distribution globale de l'âge dans toute le domaine est la moyenne pondérée par les volumes des fonctions de distributions des sous-domaines (voir figure ci-dessus):

$$\mu(\tau) = \frac{V_p \mu_p(\tau) + V_r \mu_r(\tau)}{V} = \varepsilon_p \mu_p(\tau) + \varepsilon_r \mu_r(\tau) = \frac{\varepsilon_p}{\theta_p} \gamma(\theta_p - \tau) + \frac{\varepsilon_r}{\theta_r} e^{-\tau/\theta_r} \quad (19)$$

Cette fonction satisfait (comme il se doit) la contrainte intégrale suivante

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) d\tau = \frac{\varepsilon_p}{\theta_p} \underbrace{\int_0^{\infty} \gamma(\theta_p - \tau) d\tau}_{=\theta_p} + \frac{\varepsilon_r}{\theta_r} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\tau/\theta_r} d\tau}_{=\theta_r} = \varepsilon_p + \varepsilon_r = 1 \quad (20)$$

Par ailleurs, l'âge moyen vaut

$$\langle a \rangle = \int_0^{\infty} \tau \mu(\tau) d\tau = \frac{\varepsilon_p}{\theta_p} \underbrace{\int_0^{\infty} \tau \gamma(\theta_p - \tau) d\tau}_{=\theta_p^2/2} + \frac{\varepsilon_r}{\theta_r} \underbrace{\int_0^{\infty} \tau e^{-\tau/\theta_r} d\tau}_{=\theta_r^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_p \theta_p + \varepsilon_r \theta_r \quad (21)$$

Références

- Dewals B., P. Archambeau, M. Bruwier, S. Erpicum, M. Piroton, T. Adam, E.J.M. Delhez and E. Deleersnijder, 2020, Age of water particles as a diagnosis of steady-state flows in shallow rectangular reservoirs, *Water*, 12, 2819, doi: 10.3390/w12102819
- Terenzi F. and T.M. Hall, 2010, Idealized tracer transport models with time-varying transport: applications to ocean boundary currents, *Environmental Fluid Mechanics*, 10, 235-255, doi: 10.1007/s10652-009-9135-6
- Waugh D.W. and T.M. Hall, 2005, Propagation of tracer signals in boundary currents, *Journal of Physical Oceanography*, 35, 1538-1552, doi: 10.1175/JPO2779.1

Westhoff M.C., S. Erpicum, P. Archambeau, M. Pirotton and B. Dewals, 2017, Maximum energy dissipation to explain velocity fields in shallow reservoirs, *Journal of Hydraulic Research*, 56(2), 221-230, doi: 10.1080/00221686.2017.1289268
