

CHAPITRE 4

Modèle minimal de $F(M; 2)$ pour une variété M polygène

Dans tout ce chapitre, M désigne une variété compacte 1-connexe sans bord de dimension n . Nous supposons en outre que cette variété est polygène : $H^*(M; \mathbb{Q})$ nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre.

Notre objectif est de calculer explicitement le modèle minimal de Sullivan de $F(M; 2)$.

La première section rappelle la construction de Lambrechts et Stanley permettant d'obtenir un modèle commutatif de $F(M; 2)$, à partir d'un modèle semi-libre du modèle minimal de M .

Dans les deux sections suivantes, nous démontrons que la fibre homotopique F_2 de l'inclusion $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$, est rationnellement un bouquet de sphères. Plus précisément, nous identifions rationnellement F_2 avec la fibre homotopique F_0 de l'inclusion $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$, étudiée par Halperin et Lemaire dans [12]. Nous en tirons une conséquence importante :

L'algèbre de Lie $L_{F(M; 2)}$ s'inscrit dans une suite exacte d'algèbres de Lie $0 \rightarrow L_{F_2} \rightarrow L_{F(M; 2)} \rightarrow L_{M \times M} \rightarrow 0$, dans laquelle L_{F_2} est une algèbre de Lie libre.

Dans la quatrième section, nous construisons explicitement l'algèbre de Sullivan $(\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$, qui s'injecte dans le modèle minimal de Sullivan de $M \setminus m_0$. La réalisation géométrique de cette algèbre est un espace noté Z_M , qui s'inscrit dans un diagramme de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & Z_M & \longrightarrow & M_0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow Id \\ F_0 & \longrightarrow & (M \setminus m_0)_0 & \longrightarrow & M_0. \end{array}$$

La cinquième section est réservée à la construction d'un "bon" modèle semi-libre de $(\Lambda V, d)$. Celui-ci est tout simplement le modèle minimal relatif de l'application $A_{PL}(\Delta) : A_{PL}(M \times M) \rightarrow A_{PL}(M)$ induite par la diagonale $\Delta : M \rightarrow M \times M$.

Enfin, dans l'avant-dernière section, nous construisons l'algèbre de Sullivan $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d)$ qui s'injecte dans $m_{F(M; 2)}$, et dont la réalisation géométrique, notée E_M , s'inscrit dans un diagramme de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & E_M & \longrightarrow & M_0 \times M_0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow Id \\ F_2 & \longrightarrow & F(M; 2)_0 & \longrightarrow & M_0 \times M_0. \end{array}$$

Dans la dernière section, nous démontrons que si la variété M est formelle, l'algèbre de Sullivan $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d)$ s'injecte naturellement dans le modèle minimal bigradué de $F(M; 2)$.

4.1. MODÈLE DE LAMBRECHTS ET STANLEY

P.Lambrechts et D.Stanley construisent dans [15], un modèle de $F(M; 2)$, à partir du modèle minimal $(\Lambda V, d)$ de M . Le point de départ de leur construction est contenu dans la Proposition suivante :

Proposition 4.1. Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal d'une variété compacte M , simplement connexe et de dimension n , et (G, d) un modèle semi-libre de $(\Lambda V, d)$, en tant que $(\Lambda V \otimes \Lambda V, d)$ -module différentiel. Il existe un morphisme de $(\Lambda V \otimes \Lambda V, d)$ -modules de degré n , $\varphi : (G, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V, d)$, qui commute aux différentielles et tel que $[\varphi(1)] = \Delta$. De plus, celui-ci est unique à homotopie près.

Ils considèrent ensuite le cône algébrique

$$C(\varphi) = ((\Lambda V \otimes \Lambda V) \oplus_{\varphi} s(s^{-n}G), D) \text{ avec } D(s\alpha) = \varphi(\alpha) - sd(\alpha),$$

et définissent l'application linéaire

$$\mu : C(\varphi) \otimes C(\varphi) \rightarrow C(\varphi)$$

en posant

$$\begin{aligned} \mu(z \otimes z') &= z \cdot z' \\ \mu(z \otimes sg) &= (-1)^{|z|} s(z \cdot g) \\ \mu(sg \otimes z') &= (-1)^{|s(g)||z'|} s(z' \cdot g) \\ \mu(sg \otimes sg') &= 0 \end{aligned}$$

pour tous les éléments homogènes $z, z' \in \Lambda V \otimes \Lambda V$ et $g, g' \in s^{-n}G$. Cette multiplication définit une structure d'algèbre graduée commutative sur $C(\varphi)$.

Notons I_0 un supplémentaire de l'espace des cocycles dans $(\Lambda V \otimes \Lambda V)^{2n-3}$, K_0 un supplémentaire de l'espace des cocycles dans $(s^{-n}G)^{2n-2}$, et posons $I = \oplus_{p \geq 2n-2} (\Lambda V \otimes \Lambda V)^p \oplus I_0$, et $K = \oplus_{q \geq 2n-1} (s^{-n}G)^q \oplus K_0$.

L'espace vectoriel $I \oplus sK$ est stable par la différentielle D , et le résultat de Lambrechts et Stanley est le

Théorème 4.2. [15] La multiplication μ induit sur le quotient $C(\varphi)/I \oplus sK$ une structure d'algèbre différentielle graduée commutative. En outre, cette adgc est reliée par une chaîne de quasi-isomorphismes au modèle minimal de $F(M; 2)$.

Par souci de complétude, nous donnons ici une preuve de la Proposition 4.1. Rappelons auparavant la définition et quelques propriétés de l'objet Ext différentiel.

Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée, et soient (M, d) et (N, d) deux (A, d) -modules différentiels. On peut former le complexe de co-chaines $(Hom_A(M, N), D)$, en posant

$$Hom_A(M, N)^r = \prod_q Hom_A(M^q, N^{q+r}) \text{ et } D(f) = df - (-1)^{|f|} f d.$$

Choisissons alors un (A, d) -module semi-libre (P, d) quasi-isomorphe à (M, d) . L'homologie du complexe $Hom_A(P, N)$ ne dépend pas du choix de (P, d) . Cette homologie se note $Ext_A(M, N)$:

$$Ext_A^q(M, N) = H^q(Hom_A(P, N), D).$$

Lorsque les différentielles sont nulles sur A, M et N , on peut prendre pour (P, d) une résolution libre de M comme A -module et on retrouve le Ext usuel avec une autre graduation. Le $Ext_A(M, N)$ est alors bigradué,

$$Ext_A(M, N) = \oplus_{p,q} Ext_A^{p,q}(M, N),$$

le premier indice référant à la graduation usuelle du Ext .

Dans le cas général, on a une suite spectrale

$$E_2 = Ext_{H(A)}(H(M), H(N)) \implies Ext_A(M, N).$$

Cette suite spectrale induit une bigraduation naturelle sur l'aboutissant $Ext_A(M, N)$.

Preuve de la proposition 4.1

Notons $H = H^*(M; \mathbb{Q}) \cong H^*(\Lambda V, d)$. On a

$$Ext_{H \otimes H}^{0,2n}(\mathbb{Q}, H \otimes H) = \mathbb{Q} \text{ et } Ext_{H \otimes H}^{q,r}(\mathbb{Q}, H \otimes H) = 0$$

pour $q > 0$ ou $q = 0, r \neq 2n$, car $H \otimes H$ est une algèbre à dualité de Poincaré [9]. Il résulte alors de la longue suite exacte associée à une extension de modules, que pour tout $H \otimes H$ -module de dimension finie

E ,

$$\begin{cases} \text{Ext}_{H \otimes H}^{q,*}(E, H \otimes H) = 0 \text{ si } q > 0 \text{ et} \\ \dim(\text{Ext}_{H \otimes H}^{0,*}(E, H \otimes H)) = \dim(E). \end{cases}$$

Lorsque $E = H$ considéré comme un $H \otimes H$ -module par la multiplication, on choisit une base $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ de H et on construit des éléments γ_i de $\text{Hom}_{H \otimes H}(H, H \otimes H) = \text{Ext}_{H \otimes H}^{0,*}(H, H \otimes H)$ tels que

$$\gamma_i(h) = \Delta(\alpha_i h \otimes 1).$$

Comme $\dim(\text{Ext}_{H \otimes H}^{0,*}(H, H \otimes H)) = \dim(H)$, ces éléments forment une base de Ext^0 , et $\dim(\text{Ext}_{H \otimes H}^{0,n}(H, H \otimes H)) = 1$. On considère maintenant la suite spectrale associée au Ext différentiel

$$\text{Ext}_{\Lambda V \otimes \Lambda V}(\Lambda V, \Lambda V \otimes \Lambda V).$$

Le terme $E_2 = \text{Ext}_{H \otimes H}(H, H \otimes H)$ étant concentré en colonne 0, la suite spectrale dégénère. Ceci montre qu'à homotopie près, il existe un unique morphisme de modules différentiels $\varphi : G \rightarrow \Lambda V \otimes \Lambda V$ tel que $[\varphi(1)] = \Delta$.

□

4.2. ATTACHEMENT DE LA DERNIÈRE CELLULE

Fixons un point $m_0 \in M$, et notons F_0 la fibre homotopique de l'inclusion $i_0 : M \setminus m_0 \hookrightarrow M$. Notons encore

$$g : S^{n-1} \rightarrow M \setminus m_0,$$

la restriction à la sphère de rayon $\frac{1}{2}$ d'un homéomorphisme $G : D^n \rightarrow D$ avec $G(0) = m_0$, entre le disque ouvert unitaire de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert D de M contenant m_0 . On obtient la variété M en attachant une cellule de dimension n le long de g :

$$M = M \setminus m_0 \cup_g e^n.$$

Le résultat suivant de Halperin et Lemaire [12], indique que l'attachement de la cellule e^n le long de g influence très peu les groupes d'homotopie.

Théorème 4.3. Si $H^*(M; \mathbb{Q})$ a au moins deux générateurs en tant qu'algèbre, alors pour chaque $k \geq 0$, l'homomorphisme $\pi_k(i_0) \otimes \mathbb{Q} : \pi_k(M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_k(M) \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif. De plus, la fibre homotopique F_0 de l'inclusion $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$ a le type d'homotopie rationnel de $\Sigma^{n-1}(\Omega M \vee S^0)$.

Plus généralement, les attachements $Y = X \cup_{\varphi} e^k$ pour lesquels l'injection $X \hookrightarrow Y$ induit un homomorphisme surjectif en homotopie, sont dits *inertes*. Dans [12], Halperin et Lemaire étudient en détail ces attachements. Nous rappelons ici leurs résultats dans le cas particulier de l'attachement $M = M \setminus m_0 \cup_g e^n$.

Comme g est homotopiquement triviale dans M , g se factorise à homotopie près via F_0 en

$$\tilde{g} : S^{n-1} \rightarrow F_0.$$

Ceci définit les éléments

$$\begin{aligned} x &= H_{n-1}(\tilde{g})([S^{n-1}]) \in H_{n-1}(F_0; \mathbb{Q}) \text{ et} \\ u &= \Sigma_{n-2}^{-1}([\tilde{g}]) \in \pi_{n-2}\Omega F_0 \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Théorème 4.4. ([12]) Si la variété M est polygène, alors

- (1) L'algèbre de Lie $\pi_*\Omega F_0 \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de Lie libre, notée $\mathbb{L}(R)$, qui s'inscrit dans la courte suite exacte d'algèbres de Lie graduées

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(R) \longrightarrow \pi_*\Omega M \setminus m_0 \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi_*(\Omega i_0) \otimes \mathbb{Q}} \pi_*\Omega M \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

- (2) Pour l'opération induite par l'holonomie

$$h : H_*(\Omega M; \mathbb{Q}) \otimes H_*(F_0; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(F_0; \mathbb{Q}),$$

l'homologie réduite $\tilde{H}_*(F_0; \mathbb{Q})$ est un module libre engendré par l'élément $x \in H_{n-1}(F_0; \mathbb{Q})$.

Remarquons que $Hur \circ \Sigma_* : \pi_*(\Omega F_0) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_{*+1}(F_0; \mathbb{Q})$ induit un isomorphisme $R_* \rightarrow \tilde{H}_{*+1}(F_0; \mathbb{Q})$.

- (3) Notons $\sigma : \pi_*(\Omega M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(\Omega M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q}$ une section linéaire de $\pi_*(\Omega i_0) \otimes \mathbb{Q}$. Le diagramme suivant, dont les lignes verticales sont des isomorphismes, est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Omega M; \mathbb{Q}) \otimes H_*(F_0) & \xrightarrow{h} & H_*(F_0) \\ \uparrow 1 \otimes Hur \circ \Sigma & & \uparrow Hur \circ \Sigma \\ U(\pi_*(\Omega M) \otimes \mathbb{Q}) \otimes R & \xrightarrow{Ad} & R \cong \mathbb{L}(R)/\mathbb{L}^{\geq 2}(R). \end{array}$$

l'application Ad étant définie, comme dans la section 1.3, par

$$Ad((\alpha_1 \dots \alpha_k) \otimes r) = [\sigma(\alpha_1), [\dots, [\sigma(\alpha_k, r) \dots]]$$

pour $(\alpha_1 \dots \alpha_k) \in \pi_*(\Omega M) \otimes \mathbb{Q}$, $r \in R$.

En conséquence, R est un $H_*(\Omega M, \mathbb{Q})$ -module libre engendré par u .

- (4) Si on filtre $\pi_*(\Omega M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q}$ par l'idéal engendré par u , on obtient une algèbre de Lie filtrée : F_p est le sous-espace vectoriel engendré par les crochets de Lie contenant au moins p fois la variable u . L'algèbre de Lie graduée associée $E_p = F_p/F_{p+1}$ vérifie

$$E_* = (\pi_*(\Omega M) \otimes \mathbb{Q}) \amalg \mathbb{L}(u).$$

4.3. LA SUITE EXACTE $0 \rightarrow L_{F_2} \rightarrow L_{F(M;2)} \rightarrow L_{M \times M} \rightarrow 0$

Notons $i_2 : F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$ l'inclusion naturelle et F_2 la fibre homotopique de cette application.

Proposition 4.5. L'algèbre de Lie graduée $L_{F(M;2)}$ s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \rightarrow L_{F_2} \rightarrow L_{F(M;2)} \rightarrow L_{M \times M} \rightarrow 0.$$

En outre, l'algèbre de Lie graduée L_{F_2} est une algèbre de Lie libre, ce qui revient à dire que F_2 a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères.

Preuve

Premièrement, remarquons que le centre de $\pi_*\Omega(M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q}$ est réduit à 0.

En effet, suivant le Théorème 4.4, il existe une filtration pour laquelle l'algèbre de Lie graduée associée est un produit libre. Or dans un produit libre d'algèbres de Lie, le centre est réduit à 0. Mais, par définition, le centre d'une algèbre de Lie graduée associée à une algèbre de Lie filtrée contient le gradué associé au centre de cette algèbre de Lie.

Deuxièmement, le Corollaire 1.33 assure, pour chaque $k \geq 0$, l'exactitude de la suite

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow \pi_k\Omega(M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_k\Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_k\Omega M \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{L}(R) & \xrightarrow{i_R} & \pi_* \Omega(M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi_* \Omega i_0 \otimes \mathbb{Q}} & \pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \pi_* \Omega j \otimes \mathbb{Q} & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \pi_* \Omega F_2 \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi_* \Omega i_2 \otimes \mathbb{Q}} & \pi_* \Omega(M \times M) \otimes \mathbb{Q} \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & \pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q} \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

FIG. 1

Troisièmement, par définition de la fibre homotopique, il existe une application $j : F_0 \rightarrow F_2$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
F_0 & \xrightarrow{j} & F_2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
M \setminus m_0 & \xrightarrow{b} & F(M; 2) \\
\downarrow i_0 & & \downarrow i_2 \\
M & \xrightarrow{b} & M \times M
\end{array}$$

où $b(m) = (m, m_0)$. On déduit de ce diagramme de fibrations le diagramme commutatif d'espaces vectoriels gradués de la figure 1. Enfin, au vu de ce diagramme, et des points précédents, on vérifie que le morphisme $\pi_* \Omega i_2 \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif, et que son noyau $\pi_* \Omega F_2 \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathbb{L}(R)$. Par conséquent, l'algèbre de Lie $\pi_* \Omega F_2 \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de Lie libre que nous noterons $\mathbb{L}(R')$. Ceci prouve que F_2 a le même type d'homotopie rationnel que F_0 , c'est à dire le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères. De plus, $\pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q}$ s'inscrit dans la courte suite exacte d'algèbres de Lie graduées suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(R') \xrightarrow{i_{R'}} \pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi_* \Omega i_2 \otimes \mathbb{Q}} L_M \oplus L_M \longrightarrow 0.$$

□

FIG. 2

L'isomorphisme $R \cong R'$ induit une structure de $\cup L_M$ -module sur R' . Plus précisément, R' est un $\cup L_{M \times \{m_0\}}$ -module libre engendré par

$$(4.2) \quad \tilde{t} = \pi_* \Omega_j(u) \in \pi_{n-2} \Omega F_2 \otimes \mathbb{Q}. \text{ (Théorème 4.4.)}$$

La classe $\tilde{t}$ correspond par adjonction à l'application $t : S^{n-1} \rightarrow F_2$ définie comme la composée de $b : M \setminus m_0 \rightarrow F(M; 2) : m \mapsto (m, m_0)$ avec $g : S^{n-1} \rightarrow M \setminus m_0$. Ceci vient de la commutativité du diagramme représenté à la figure 2.

A présent, choisissons une section linéaire σ de $\pi_* \Omega i_2 \otimes \mathbb{Q}$,

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(R') \xrightarrow{i_{R'}} \pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} \xrightleftharpoons[\sigma]{\pi_* \Omega i_2 \otimes \mathbb{Q}} \pi_* \Omega(M \times M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Suivant les notations de la section 1.4, on peut alors écrire

$$i_{R'}(a_1 \cdots a_n * \tilde{t}) = [\sigma(a_1), [\sigma(a_2), [\cdots, [\sigma(a_n), \tilde{t}] \cdots]]$$

pour certains $a_1, \dots, a_n \in L_{M \times \{m_0\}}$. L'action $*$ étant indépendante de σ , nous noterons simplement

$$i_{R'}(a_1 \cdots a_n * \tilde{t}) = [a_1 \cdots a_n, \tilde{t}].$$

L'existence de σ prouve la

Proposition 4.6. Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués $\pi_* \Omega F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} \cong (\pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\pi_* \Omega M \otimes \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{L}(s^{n-2} H_*(\Omega M; \mathbb{Q})).$

L'existence d'une section d'algèbres de Lie $\sigma : L_M \oplus L_M \rightarrow L_{F(M;2)}$ n'est pas garantie. Dans le chapitre suivant, nous donnerons des exemples de variétés polygènes pour lesquelles il ne peut pas exister de telle section. Toutefois, voici une condition nécessaire de l'existence d'une telle section.

Lemme 4.7. Si l'homomorphisme i_{2*} admet une section d'algèbres de Lie $\sigma : L_M \oplus L_M \rightarrow L_{F(M;2)}$, alors l'homomorphisme $i_{0*} : L_{M \setminus m_0} \rightarrow L_M$ admet une section d'algèbres de Lie.

Preuve Dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 L_{M \setminus m_0} & \xrightarrow{i_{0*}} & L_M \\
 \downarrow i & & \downarrow i_2 \\
 L_{F(M;2)} & \xrightarrow{i_{2*}} & L_M \oplus L_M \\
 \downarrow p_{1*} & & \downarrow p_1 \\
 L_M & \xrightarrow{Id} & L_M,
 \end{array}$$

les colonnes sont des suites exactes. Par conséquent, la section σ induit un homomorphisme $\sigma' : L_M \rightarrow L_{M \setminus m_0}$, car $p_{1*} \circ \sigma \circ i_2 = p_1 \circ i_{2*} \circ \sigma \circ i_1 = 0$. L'homomorphisme σ' est une section de i_{0*} . En effet, $i_2 \circ i_{0*} \circ \sigma' = i_{2*} \circ i \circ \sigma' = i_{2*} \circ \sigma \circ i_2 = i_2$.

□

4.4. MODÈLE DE L'INCLUSION $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$

Notons $(\Lambda V, d) \xrightarrow{m_M} A_{PL}(M)$ le modèle minimal de Sullivan de M . Dans cette section, nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 4.8. Il existe un diagramme commutatif d'adgc, modèle de l'injection $i_0 : M \setminus m_0 \hookrightarrow M$:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda T, d) & \longrightarrow & (\Lambda T, \bar{d}) \\
 \downarrow Id & & \downarrow \eta & & \downarrow \bar{\eta} \\
 (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) & \longrightarrow & (\Lambda W, \bar{D}) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 A_{PL}(M) & \xrightarrow{A_{PL}(i_0)} & A_{PL}(M \setminus m_0), & &
 \end{array}$$

jouissant des propriétés suivantes :

- (1) $(\Lambda T, \bar{d}) = (\Lambda T, 0)$,
- (2) η est un quasi-isomorphisme jusqu'en degré $2n - 3$,

(3) η est injectif,

(4) $H^*(\bar{\eta}) : T \rightarrow \tilde{H}^*(\Lambda W, \overline{D})$ est un isomorphisme.

De plus, la réalisation géométrique du rectangle supérieur de ce diagramme est un diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & Z_M & \longrightarrow & M_0 \\ \bar{\varphi} \uparrow & & \varphi \uparrow & & Id \uparrow \\ F_0 & \longrightarrow & (M \setminus m_0)_0 & \longrightarrow & M_0 \end{array}$$

tel que

(1) K est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane,

(2) $\tilde{H}_*(F_0; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*^S(K; \mathbb{Q})$, où H^S désigne l'homologie sphérique,

(3) L'application $\varphi : M \setminus m_0 \rightarrow Z_M$ est surjective en homotopie.

(a) Construction de $(\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$

Notons $\overline{V} = sV$ la suspension de V et considérons la construction acyclique $(\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V}, D)$ qui est décrite ci-dessous.

Proposition 4.9. ([8]) Il existe une différentielle D sur l'algèbre graduée $\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V}$ telle que pour chaque $v \in V$, on ait $D(v) = d(v)$ et

$$D(\bar{v}) = v + \sum_{i \in I} u_i \otimes w_i, \quad u_i \in \Lambda^+ V, \quad w_i \in \Lambda^+ \overline{V},$$

et telle que les lignes du diagramme commutatif suivant soient des quasi-isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda \overline{V}, 0) & \xrightarrow[\simeq]{\overline{m}} & A_{PL}(\Omega M) \\ \uparrow \epsilon \otimes 1 & & \uparrow \\ (\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V}, D) & \xrightarrow[\simeq]{m} & A_{PL}(PM) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\Lambda V, d) & \xrightarrow[\simeq]{m_M} & A_{PL}(M). \end{array}$$

Notons $\{v_a\}_{a \in A}$ une base homogène de V et $\{\omega_j\}_{j \in J}$ une base homogène de $\Lambda^{\geq 2} \overline{V}$. D'après la Proposition 4.9, pour chaque $a \in A$ et chaque $i \in J$,

$$\begin{aligned} D(\bar{v}_a) &= v_a + \sum_{b \in A} u_b^a \otimes \bar{v}_b + \sum_{j \in J} u_j^a \otimes \omega_j \\ D(\omega_i) &= \sum_{b \in A} u_b^i \otimes \bar{v}_b + \sum_{j \in J} u_j^i \otimes \omega_j, \end{aligned}$$

pour certains $u_b^a, u_j^a, u_b^i, u_j^i \in \Lambda^+ V$. Le simple fait que $D^2 = 0$ permet d'en déduire les égalités suivantes :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} d(v_a) &= -\sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^a|} u_b^a v_b, \\ d(u_c^a) &= -\sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^a|} u_b^a u_c^b - \sum_{k \in J} (-1)^{|u_k^a|} u_k^a u_c^k, \\ d(u_i^a) &= -\sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^a|} u_b^a u_i^b - \sum_{k \in J} (-1)^{|u_k^a|} u_k^a u_i^k, \\ d(u_j^i) &= -\sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^i|} u_b^i u_j^b - \sum_{k \in J} (-1)^{|u_k^i|} u_k^i u_j^k, \\ d(u_c^i) &= -\sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^i|} u_b^i u_c^b - \sum_{k \in J} (-1)^{|u_k^i|} u_k^i u_c^k. \\ 0 &= \sum_{b \in A} u_b^i v_b, \end{aligned}$$

Notons $T = s^{-n+1}(\Lambda \overline{V})$. Une base de T est donnée par les vecteurs t, t_a, t_j en correspondance bijective avec la base $\{1, \overline{v}_a, \omega_j\}$ de $\Lambda \overline{V}$ que nous avons choisie :

$$|t| = n - 1, |t_a| = |\overline{v}_a| + n - 1 \text{ et } |t_j| = |\omega_j| + n - 1.$$

Choisissons encore un cocycle $\omega \in \Lambda V$ représentant $[\check{M}]$, la classe duale de la classe fondamentale de M . La proposition suivante illustre une technique de construction que nous utiliserons à plusieurs reprises.

Proposition 4.10. Avec les notations précédentes, il existe une algèbre de Sullivan relative

$$(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$$

avec

$$\begin{aligned} d(t) &= \omega, \\ d(t_a) &= tv_a + \sum_{b \in A} u_b^a t_b + \sum_{j \in J} u_j^a t_j + \xi_a, \\ d(t_i) &= \sum_b u_b^i t_b + \sum_{j \in J} u_j^i t_j + \xi_i, \end{aligned}$$

pour certains $\xi_a, \xi_i \in \Lambda^+ V$.

Preuve

Comme ω est un cocycle de ΛV , en posant $d(t) = \omega$, on assure l'égalité $d^2 = 0$ sur $\Lambda V \otimes \Lambda t$.

Nous allons travailler par récurrence sur le degré des éléments de la base de $\Lambda \overline{V}$.

Pour $\overline{v}_a$ de degré minimal, on constate que $D(\overline{v}_a) = v_a$. Dès lors, $0 = D^2(\overline{v}_a) = d(v_a)$. Par conséquent, $d(tv_a) = \omega v_a \in (\Lambda V)^{\geq n+1}$ est un cocycle de degré supérieur à n . Il existe donc $\xi_a \in \Lambda V$ tel que $d(\xi_a) = -d(tv_a)$ et en posant $d(t_a) = tv_a + \xi_a$, on étend d en différentielle.

Supposons avoir construit d sur tous les t_b, t_j pour lesquels v_b ou w_j sont de degré inférieur à k . Prenons alors un élément de la base, de degré $k + 1$, $\overline{v}_a$ ou w_i .

Un simple calcul basé sur les égalités 4.3 et l'hypothèse de récurrence,

donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} d(tv_a + \sum_{b \in A} u_b^a t_b + \sum_{j \in J} u_j^a t_j) &= \omega v_a + \sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^a|} u_b^a \xi_b + \sum_{j \in J} (-1)^{|u_j^a|} u_j^a \xi_j, \\ d(\sum_{b \in A} u_b^i t_b + \sum_{j \in J} u_j^i t_j) &= \sum_{b \in A} (-1)^{|u_b^i|} u_b^i \xi_b + \sum_{j \in J} (-1)^{|u_j^i|} u_j^i \xi_j. \end{aligned}$$

Les membres de droite de ces égalités sont des cocycles de ΛV de degré supérieur à $k + n + 1$. Il existe donc ξ_a ou $\xi_i \in \Lambda V$, tel que

$$\begin{aligned} d(\xi_a) &= -d(tv_a + \sum_{b \in A} u_b^a t_b + \sum_{j \in J} u_j^a t_j) \text{ ou} \\ d(\xi_i) &= -d(\sum_{b \in A} u_b^i t_b + \sum_{j \in J} u_j^i t_j). \end{aligned}$$

Enfin, en posant

$$d(t_a) = tv_a + \sum_{b \in A} u_b^a t_b + \sum_{j \in J} u_j^a t_j + \xi_a, \text{ ou } d(t_i) = \sum_{b \in A} u_b^i t_b + \sum_{j \in J} u_j^i t_j + \xi_i,$$

on termine la construction de d . $\square$

(b) Construction de η

Nous allons étudier le lien entre l'algèbre de Sullivan $(\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$ et l'espace $M \setminus m_0$.

L'inclusion $i_0 : M \setminus m_0 \hookrightarrow M$ induit un morphisme d'adgc

$$A_{PL}(i_0) : A_{PL}(M) \rightarrow A_{PL}(M \setminus m_0).$$

Notons $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ le modèle minimal relatif de ce morphisme d'adgc, caractérisé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{A_{PL}(i_0) \circ m_M} & A_{PL}(M_0) \\ & \searrow & \nearrow m \\ & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) & \end{array}$$

Comme $H^q(i_0)$ est un isomorphisme pour $q < n$, la première étape dans la construction de W consiste en l'introduction d'une variable y pour tuer $\text{Ker} H^n(i_0) = \mathbb{Q} \cdot \omega$. Donc $W^{n-1} = \mathbb{Q} \cdot y$, $d'(y) = \omega$. D'autre part, par la Proposition 4.5, la fibre homotopique F_0 de l'inclusion $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$ est un bouquet de sphères. Nous pouvons dès lors supposer, suivant le Corollaire 1.41, que $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ est le modèle minimal de Sullivan de $M \setminus m_0$.

Proposition 4.11. On peut étendre l'inclusion $(\Lambda V, d) \hookrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ en un morphisme de dga $\eta : (\Lambda V \otimes \Lambda T, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$, avec $\eta(t) = y$.

Preuve

En posant $\eta(t) = y$, on définit un unique morphisme de dga $\eta : (\Lambda V \otimes \Lambda t, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$.

Supposons à présent avoir défini un tel η sur tous les générateurs t_a, t_i de degré inférieur ou égal à k , et donnons-nous un t_a de degré $k+1$.

Un calcul rapide montre que

$$\eta(d(t_a)) = yv_a + \sum_{b \in A} u_b^a \eta(t_b) + \sum_{j \in J} u_j^a \eta(t_j) + \xi_a$$

est un cocycle de $(\Lambda V \otimes \Lambda W)^{>n}$. Il existe donc $\delta_a \in \Lambda V \otimes \Lambda W$ tel que $D(\delta_a) = \eta(d(t_a))$, et on pose $\eta(t_a) = \delta_a$. De la même manière, on peut trouver $\delta_i \in \Lambda V \otimes \Lambda W$ tel que $D(\delta_i) = \eta(d(t_i))$ et poser $\eta(t_i) = \delta_i$, ce qui termine la construction. $\square$

Remarque 4.12. L'existence de η implique que $(\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$ est une algèbre de Sullivan minimale.

Notons

$$K \xrightarrow{j'} Z_M \xrightarrow{i'} M$$

une fibration réalisant le modèle de Sullivan relatif

$$(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda T, d) \rightarrow (\Lambda T, \bar{d}),$$

et notons $\varphi : M \setminus m_0 \rightarrow Z_M$ une application continue réalisant

$$\eta : (\Lambda V \otimes \Lambda T, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, D).$$

L'application φ induit au niveau des fibres une application $\bar{\varphi} : F_0 \rightarrow K$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & \longrightarrow & (M \setminus m_0)_0 & \xrightarrow{i_0} & M_0 \\ \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \varphi & & \downarrow id \\ K & \xrightarrow{j'} & Z_M & \xrightarrow{i'} & M_0. \end{array}$$

Par construction, le modèle de ce diagramme topologique est donné par celui-ci :

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) & \longrightarrow & (\Lambda W, \bar{D}) \\ \uparrow Id & & \uparrow \eta & & \uparrow \bar{\eta} \\ (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda T, d) & \longrightarrow & (\Lambda T, \bar{d}). \end{array}$$

Remarque 4.13. (1) La formule de la différentielle d dans $(\Lambda V \otimes \Lambda T, d)$, implique que $\bar{d} = 0$ dans $(\Lambda T, \bar{d})$. Par conséquent,

$$H^*(K; \mathbb{Q}) \cong \Lambda T.$$

L'espace K a donc le type d'homotopie rationnel d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

(2) La surjectivité de $\pi_*(i_0) \otimes \mathbb{Q}$ entraîne celle de $\pi_*(i') \otimes \mathbb{Q}$, et a fortiori l'injectivité de $\pi_*(j') \otimes \mathbb{Q}$.

(3) D'une part T est une suspension de l'espace vectoriel $\Lambda \bar{V} \cong H_*(\Omega M, \mathbb{Q})$. D'autre part $\hat{H}_*(F_0; \mathbb{Q}) \cong H_*(\Omega M; \mathbb{Q}) \cdot x$. Ceci implique l'égalité

$$\dim(T^{q+n-1}) = \dim(H^{q+n-1}(\Lambda W, \bar{d}')),$$

pour chaque q .

(4) Par la Proposition 4.11, $\bar{\eta}(t) = y$. En conséquence, $H^{n-1}(\bar{\varphi}) = H^{n-1}(\bar{\eta})$ est un isomorphisme.

(c) L'opération d'holonomie de la fibration $K \rightarrow Z_M \rightarrow M$

Lemme 4.14. Soit $y = \lambda t + \sum_{a \in A} \gamma_a t_a + \sum_{i \in J} \gamma_i t_i$ un élément de T . Si $d(y) \in \Lambda^{\geq 2} V \oplus \Lambda^{\geq 3}(V \oplus T)$, alors $y = \lambda t$.

Preuve

Soit donc un tel y . Le simple calcul

$$\begin{aligned} d(y) &= \lambda \omega + \sum_{a \in A} \gamma_a d(t_a) + \sum_{i \in J} \gamma_i d(t_i) \\ &= \lambda \omega + \sum_{a \in A} \gamma_a t v_a + \sum_{b, a} \gamma_a u_b^a t_b + \sum_{a, j} \gamma_a u_j^a t_j + \sum_a \gamma_a \xi_a \\ &\quad + \sum_{i, b} \gamma_i u_b^i t_b + \sum_{i, j} \gamma_i u_j^i t_j + \sum_i \gamma_i \xi_i \end{aligned}$$

permet d'affirmer que $\gamma_a = 0$ pour chaque $a \in A$.

Dès lors, $y = \lambda t + \sum_{i \in J} \gamma_i t_i$. Prenons pour base J de $\Lambda^{\geq 2} \bar{V}$, la base formée des monômes en les $\bar{v}_a$. Notons $t_{\bar{v}_{a_1} \dots \bar{v}_{a_r}}$ l'élément de T correspondant à $\bar{v}_{a_1} \dots \bar{v}_{a_r}$. Dans ce cas

$$d(t_{\bar{v}_{a_1} \dots \bar{v}_{a_r}}) = \sum_{i=1}^r (-1)^{(|\bar{v}_{a_1}| + \dots + |\bar{v}_{a_{i-1}}|)|\bar{v}_{a_i}|} v_{a_i} \cdot t_{\widehat{\bar{v}_{a_1} \dots \bar{v}_{a_i} \dots \bar{v}_{a_r}}}$$

modulo $\Lambda^{\geq 2}V \oplus \Lambda^{\geq 3}(V \oplus T)$. On écrit

$$y = \lambda t + \sum_{i_1, \dots, i_r} \gamma_{i_1 \dots i_r} t_{\bar{v}_{a_{i_1}} \dots \bar{v}_{a_{i_r}}}.$$

Le coefficient de $v_{a_{i_1}} t_{\bar{v}_{a_{i_2}} \dots \bar{v}_{a_{i_r}}}$ dans $d(y)$ est $\gamma_{i_1 \dots i_r}$. Ce coefficient doit donc être nul et $y = \lambda t$. $\square$

Notons $H_*^S(K; \mathbb{Q})$ l'homologie sphérique rationnelle de K . Comme le connectant rationnel de la fibration $K \rightarrow Z_M \rightarrow M$ est trivial, d'après la Remarque 4.13, $H_*^S(K; \mathbb{Q})$ est un $H_*(\Omega M; \mathbb{Q})$ -module, par la Proposition 1.34.

Lemme 4.15.

$$H_*^S(K; \mathbb{Q}) \cong H_*(\Omega M; \mathbb{Q}) \cdot \check{t}$$

où $\check{t}$ désigne le générateur de $H_{n-1}(K; \mathbb{Q})$ dual de $[t] \in H^*(K)$ par évaluation.

Preuve

Comme $H_*^S(K; \mathbb{Q})$ est un $H_*(\Omega M; \mathbb{Q})$ -module, il est clair que

$$H_*(\Omega M; \mathbb{Q}) \cdot \check{t} \subset H_*^S(K; \mathbb{Q}).$$

Avec les notations de 1.6, par le Lemme 4.14, l'application $\sum_i v_i \otimes \theta_i^* : T^{\geq n} \rightarrow V \otimes T$ est injective. Il en résulte (Proposition 1.38) que l'action de $H_*(\Omega M; \mathbb{Q})$ induit un homomorphisme surjectif $H_*(\Omega M; \mathbb{Q}) \otimes H_{<n}^S(K; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*^S(K; \mathbb{Q})$. On remarque alors que $H_{<n}^S(K; \mathbb{Q}) = \check{t} \cdot \mathbb{Q}$, ce qui complète la preuve, les deux espaces vectoriels ayant la même dimension en chaque degré. $\square$

(d) **Les propriétés de φ et $\bar{\varphi}$**

Proposition 4.16. Le morphisme $\bar{\varphi} : F_0 \rightarrow K$, induit un isomorphisme

$$H_*(\bar{\varphi}) : \tilde{H}_*(F_0; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*^S(K; \mathbb{Q}).$$

Preuve

L'application $H_*(\bar{\varphi})$ est un morphisme de $H_*(\Omega M; \mathbb{Q})$ -modules entre deux $H_*(\Omega M; \mathbb{Q})$ -modules libres de rang 1, engendrés en degré $n-1$. Or, d'après la Remarque 4.13, $H_{n-1}(\bar{\varphi})$ est un isomorphisme. $\square$

Proposition 4.17. Le morphisme η est injectif.

Preuve

Grâce au Lemme 1.9, il suffit de prouver que $Q(\eta)$ est injectif, ou encore que l'homomorphisme $\pi_*(\varphi) \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif. Au vu du diagramme

suivant, dont les lignes sont exactes,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_*(F_0) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \pi_*(M \setminus m_0) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \pi_*(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\
 & & \pi_*(\overline{\varphi}) \otimes \mathbb{Q} \downarrow & & \pi_*(\varphi) \otimes \mathbb{Q} \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \pi_*(K) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \pi_*(Z_M) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \pi_*(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

il suffit donc de prouver que $\pi_*(\overline{\varphi}) \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_*(F_0) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi_*(\overline{\varphi}) \otimes \mathbb{Q}} & & \pi_*(K) \otimes \mathbb{Q} & \\
 \downarrow \text{hur}_{F_0} \otimes \mathbb{Q} & \searrow \text{hur}_{F_0} \otimes \mathbb{Q} & & \swarrow \text{hur}_K \otimes \mathbb{Q} & \downarrow \text{hur}_K \otimes \mathbb{Q} \\
 & H_*^S(F_0; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_*^S(K; \mathbb{Q}) & & & \\
 \swarrow \cong & & \searrow & & \\
 \tilde{H}_*(F_0; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{H_*(\overline{\varphi}; \mathbb{Q})} & & \tilde{H}_*(K; \mathbb{Q}) &
 \end{array}$$

Comme l'espace F_0 a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères, l'injection $H_*^S(F_0; \mathbb{Q}) \hookrightarrow \tilde{H}_*(F_0; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme. De plus, comme K est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, l'application de Hurewicz induit un isomorphisme

$$\text{hur}_K \otimes \mathbb{Q} : \pi_*(K) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*^S(K; \mathbb{Q}).$$

Enfin, la Proposition 4.16 montre que $H_*^S(F_0; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*^S(K; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme. Une petite chasse sur le diagramme précédent permet donc de conclure car l'homomorphisme

$$\text{hur}_{F_0} \otimes \mathbb{Q} : \pi_*(F_0) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*^S(F_0; \mathbb{Q})$$

est surjectif. $\square$

4.5. MODÈLE DE LA FIBRATION $M^{[0,1]} \rightarrow M \times M$

Le modèle de la fibration $\Omega M \rightarrow M^{[0,1]} \rightarrow M \times M$ est bien connu. Nous le décrivons en détail pour exhiber certaines propriétés importantes.

Considérons le diagramme topologique

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M & \xleftarrow{\Delta} & M \\
 \swarrow \text{ev}_0 \times \text{ev}_1 & & \searrow c \\
 & M^{[0,1]} &
 \end{array}$$

dans lequel l'équivalence d'homotopie c est définie par

$$c(x) : [0, 1] \rightarrow M : t \mapsto x.$$

Notons T les involutions de $M \times M$ et de $M^{[0,1]}$ définies par

$$T(a, b) = (b, a) \text{ et } T(\tau)(t) = \tau(1 - t).$$

Ces applications commutent entre elles, comme le décrivent les égalités suivantes : $T \circ \Delta = \Delta$, $T \circ c = c$ et $T \circ (ev_0 \times ev_1) = (ev_0 \times ev_1) \circ T$.

Soit $(\Lambda V', d')$ une copie de $(\Lambda V, d)$, le modèle minimal de Sullivan de M .

Le morphisme d'adgc $\rho : (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V', d') \rightarrow (\Lambda V, d)$, défini par

$$\begin{aligned} \rho(v) &= v \\ \rho(v') &= v \end{aligned}$$

pour chaque $v \in V, v' \in V'$, est un modèle minimal de l'application diagonale $\Delta : M \rightarrow M \times M$. En particulier, le morphisme $H^*(\rho) : H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes H^*(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{Q})$ est le cup produit. Dans la proposition suivante, nous décrivons un modèle de la fibration $M^{[0,1]} \rightarrow M \times M$.

Proposition 4.18. Il existe un quasi-isomorphisme

$$\sigma : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D) \rightarrow (\Lambda V, d)$$

tel que

(1)

$$\begin{aligned} D(v) &= d(v) \\ D(v') &= d'(v') \\ D(\overline{v}) &= v - v' + \alpha_v \end{aligned}$$

pour certains $\alpha_v \in \Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda^+ \overline{V}$,

(2) Le diagramme suivant commute,

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V', d') & \xrightarrow{\rho} & (\Lambda V, d) \\ & \searrow & \nearrow \sigma \\ & (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D), & \end{array}$$

avec $\sigma(\overline{V}) = 0$,

(3) L'unique automorphisme T de $\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}$ défini par

$$T(v) = v', T(v') = v, T(\overline{v}) = -\overline{v}$$

commute à la différentielle D .

Preuve

Pour construire D , nous allons travailler par récurrence sur le degré des éléments de la base $(v_a)_{a \in A}$. Pour chaque générateur $v_a \in V$ de degré minimal $r \geq 2$, posons $D(\overline{v_a}) = v_a - v'_a$. De cette façon, on obtient un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda V^{\leq r} \otimes \Lambda V'^{\leq r} \otimes \Lambda \overline{V}^{< r}, D) \xrightarrow[\simeq]{\sigma} (\Lambda V^{\leq r}, d)$$

et D a clairement les propriétés 1, 2 et 3.

Supposons ensuite avoir construit D sur $\overline{V}^{< k}$ pour $k \geq r$, vérifiant les conditions 1, 2 et 3, de telle manière que

$$\sigma : (\Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{< k}, D) \rightarrow (\Lambda V^{\leq k}, d)$$

soit un quasi-isomorphisme. Soit $v_a \in V^{k+1}$. Le cycle $d(v_a) - d'(v'_a)$ de $\Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{< k}$ est tel que $\sigma(d(v_a) - d'(v'_a)) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe donc un décomposable

$$u_{v_a} \in \Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{< k}$$

tel que $-d(v_a) + d'(v'_a) = D(u_{v_a})$. De plus,

$$0 = \sigma(D(u_{v_a})) = d(\sigma(u_{v_a})),$$

et l'hypothèse de récurrence implique donc l'existence d'un cycle $\tau_{v_a} \in \Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{< k}$ et d'un $\gamma_{v_a} \in \Lambda V^{\leq k}$ tels que

$$\sigma(u_{v_a}) = d(\gamma_{v_a}) + \sigma(\tau_{v_a}).$$

Notons $\beta_{v_a} = u_{v_a} - \tau_{v_a} - d(\gamma_{v_a}) \in \Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{< k}$. On vérifie que $D(\beta_{v_a}) = -d(v_a) + d'(v'_a)$ et $\sigma(\beta_{v_a}) = 0$. De plus, β_{v_a} se décompose en une somme $\beta_{v_a} = \beta'_{v_a} + \beta''_{v_a}$ avec $\beta'_{v_a} \in \Lambda V \otimes \Lambda V'$ et $\beta''_{v_a} \in \Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda^+ \overline{V}$. Par construction, $\sigma(\beta_{v_a}) = 0$ et donc $\sigma(\beta'_{v_a}) = 0$. Par conséquent,

$$\beta'_{v_a} = \sum_c (v_c - v'_c) w_c$$

pour certains $v_c \in V^{\leq k}$ et $w_c \in \Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k}$. Notons

$$z_a = \sum_c \overline{v}_c w_c.$$

Alors on peut écrire

$$\beta'_{v_a} = D(z_a) - \sum_c \alpha_{v_c} w_c - \sum_c (-1)^{|\overline{v}_c|} \overline{v}_c d(w_c).$$

Posons

$$\bar{\alpha}_{v_a} = - \sum_c \alpha_{v_c} w_c - \sum_c (-1)^{|\bar{v}_c|} \bar{v}_c d(w_c) + \beta''_{v_a} \in \Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda^+ \bar{V}.$$

Par construction, $D(\bar{\alpha}_{v_a}) = D(\beta_{v_a}) = -d(v_a) + d(v'_a)$.

L'hypothèse de récurrence permet de faire le calcul suivant

$$0 = TD(v_a - v'_a + \bar{\alpha}_{v_a}) = DT(v_a - v'_a + \bar{\alpha}_{v_a}) = d(v'_a) - d(v_a) + D(T(\bar{\alpha}_{v_a})),$$

duquel on déduit que

$$D(T(\bar{\alpha}_{v_a})) = d(v_a) - d(v'_a) = -D(\bar{\alpha}_{v_a}).$$

Dès lors, l'élément $\alpha_{v_a} = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}_{v_a} - T(\bar{\alpha}_{v_a})) \in \Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda^+ \bar{V}$, satisfait les égalités $D(\alpha_{v_a}) = D(\bar{\alpha}_{v_a})$ et $T(\alpha_{v_a}) = -\alpha_{v_a}$. Posons $D(\bar{v}_a) = v_a - v'_a + \alpha_{v_a}$. Les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \sigma(D(\bar{v}_a)) &= \sigma(v_a) - \sigma(v'_a) - \sigma(\alpha_{v_a}) = 0 = d(\sigma(\bar{v}_a)), \\ D^2(\bar{v}_a) &= d(v_a) - d'(v'_a) + D(\bar{\alpha}_{v_a}) = 0, \end{aligned}$$

prouvent que de cette façon, on étend D en une différentielle, telle que

$$(\Lambda V^{\leq k+1} \otimes \Lambda V'^{\leq k+1} \otimes \Lambda \bar{V}^{< k+1}, D) \xrightarrow{\sigma} (\Lambda V^{\leq k+1}, d)$$

est un morphisme d'adgc satisfaisant les conditions 1, 2 et 3. Clairement, ce morphisme est un quasi-isomorphisme et la preuve est complète. $\square$

Remarque 4.19. (1) L'algèbre de Sullivan relative $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \bar{V}, D)$, est un *modèle semi-libre* de $(\Lambda V, d)$, en tant que $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ -module différentiel.

(2) Si on regarde l'espace des chemins PM en tant que produit fibré

$$\begin{array}{ccc} PM & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^{[0,1]} & \xrightarrow{ev_0} & M, \end{array}$$

on constate que l'adgc

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \bar{V}, D) \otimes_{(\Lambda V', d)} (\mathbb{Q}, 0) \cong (\Lambda V \otimes \Lambda \bar{V}, \bar{D})$$

est un modèle de Sullivan de l'espace des chemins qui vérifie les propriétés montrées dans la Proposition 4.9.

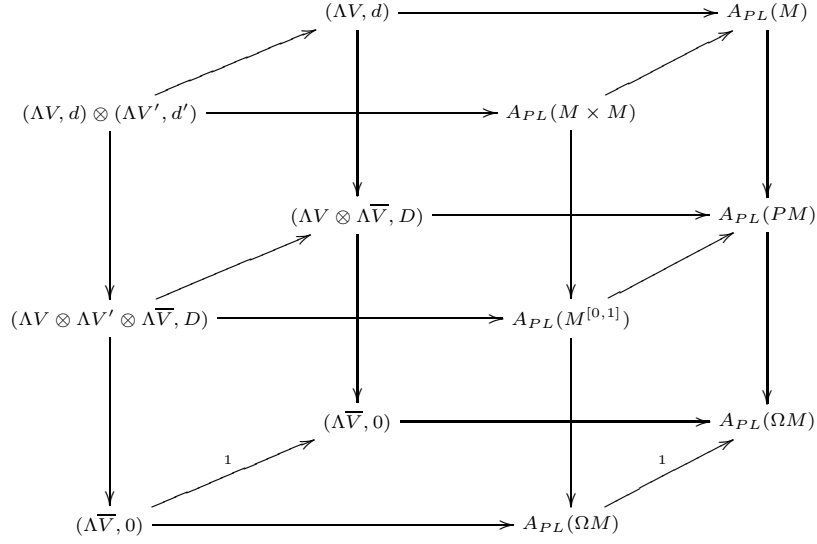


FIG. 3

L'application $ev_0 \times ev_1 : M^{[0,1]} \rightarrow M \times M$ est une fibration qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega M & \xrightarrow{1} & \Omega M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 PM & \longrightarrow & M^{[0,1]} \\
 \downarrow ev_1 & & \downarrow ev_0 \times ev_1 \\
 M & \xrightarrow{b} & M \times M,
 \end{array}$$

où $b(m) = (m_0, m)$. En modèles, ce diagramme induit le diagramme commutatif représenté à la figure 3.

Remarque 4.20. La commutativité du diagramme représenté à la figure 3 permet d'affirmer que dans la définition de D , Proposition 4.18, (1),

$$\alpha_v \in \Lambda^+(V \oplus V') \otimes \Lambda \bar{V}.$$

Reprenons à présent la base $\{\bar{v}_b\}_{b \in A} \cup \{\omega_j\}_{j \in J}$ de $\Lambda^+ \bar{V}$ introduite à la section 4.4. Les $\{\bar{v}_b\}_{b \in A}$ forment une base de $\bar{V}$ et la famille $\{\omega_j\}_{j \in J}$ est une base bihomogène de $\Lambda^{\geq 2} \bar{V}$. On note $r = l(\omega_j)$, si $\omega_j \in (\Lambda^r \bar{V})$. Pour

chaque $b \in A$, nous pouvons écrire

$$(4.5) \quad \alpha_{v_b} = \sum_{a \in A} z_a^b \bar{v}_a + \sum_{j \in J} z_j^b \omega_j,$$

pour certains $z_a^b, z_j^b \in \Lambda^+(V \oplus V')$. La différentielle D a donc la forme suivante

$$(4.6) \quad D(\bar{v}_b) = v_b - v'_b + \sum_{a \in A} z_a^b \bar{v}_a + \sum_{j \in J} z_j^b \omega_j,$$

$$(4.7) \quad D(w_j) = \sum_a z_a^j \bar{v}_a + \sum_i z_i^j \omega_i,$$

pour certains $z_a^b, z_j^b, z_a^j, z_i^j \in \Lambda^+(V \oplus V')$.

En particulier, nous obtenons

$$(4.8) \quad D(\bar{v}_a \bar{v}_b) = (v_a - v'_a) \bar{v}_b + (-1)^{|\bar{v}_a||\bar{v}_b|} (v_b - v'_b) \bar{v}_a + \alpha_{v_a} \bar{v}_b + (-1)^{|\bar{v}_a||\bar{v}_b|} \alpha_{v_b} \bar{v}_a.$$

La condition 3 de la Proposition 4.18 implique aussi le

Lemme 4.21. Pour tous les $a, b \in A$ et $i, j \in J$ on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} T(z_a^b) &= z_a^b, \\ T(z_j^b) &= (-1)^{l(w_j)+1} z_j^b, \\ T(z_a^j) &= (-1)^{l(w_j)+1} z_a^j, \\ T(z_i^j) &= (-1)^{l(w_i)+l(w_j)} z_i^j. \end{aligned}$$

Enfin, un calcul simple partant du fait que $D^2 = 0$, établit les égalités suivantes :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} d(v_b) - d'(v'_b) &= -\sum_a (-1)^{|z_a^b|} z_a^b (v_a - v'_a), \\ D(z_a^b) &= -\sum_c (-1)^{|z_c^b|} z_c^b z_a^c - \sum_j (-1)^{|z_j^b|} z_j^b z_a^j, \\ D(z_j^b) &= -\sum_k (-1)^{|z_k^b|} z_k^b z_j^k - \sum_a (-1)^{|z_a^b|} z_a^b z_j^a, \\ D(z_a^j) &= -\sum_c (-1)^{|z_c^j|} z_c^j z_a^c - \sum_i (-1)^{|z_i^j|} z_i^j z_a^i, \\ D(z_k^j) &= -\sum_a (-1)^{|z_a^j|} z_a^j z_k^a - \sum_i (-1)^{|z_i^j|} z_i^j z_k^i, \\ 0 &= \sum_a (-1)^{|z_a^j|} z_a^j (v_a - v'_a) \end{aligned}$$

4.6. LA FIBRATION $F_2 \rightarrow F(M; 2) \rightarrow M \times M$

Dans cette section, nous construisons un modèle minimal de $F(M; 2)$ à partir du modèle minimal relatif de

$$ev_0 \times ev_1 : M^{[0,1]} \rightarrow M \times M.$$

Notre construction est basée sur le $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ -module différentiel $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D)$, construit en 4.5, qui est un modèle semi-libre de $(\Lambda V, d)$. Nous nous inspirons du modèle de Lambrechts et Stanley décrit dans la section 4.1.

(a) Construction de l'adgc $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d)$ et d'un morphisme d'adgc $\theta : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d) \rightarrow m_{F(M; 2)}$

Dans la Proposition 4.1, nous avons prouvé l'existence d'un morphisme de $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ -module différentiel de degré 0

$$(4.10) \quad \varphi : s^{-n}(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$$

tel que $\varphi(s^{-n}(1)) = \Omega$, un cocycle représentant Δ .

Le cône sur φ est le $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ -module différentiel $C(\varphi) = (\Lambda V \otimes \Lambda V' \oplus_\varphi s(s^{-n}(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V})), D')$, où la différentielle D' est définie par

$$D'(sx) = \varphi(\alpha) - sD(x).$$

Dans la section 4.4, nous avons construit une base explicite pour l'espace vectoriel gradué $T = s^{-n+1}(\Lambda \overline{V})$. Cette base est composée des générateurs $t, (t_b)_{b \in A}, (t_j)_{j \in I}$. Nous identifions le cône $C(\varphi)$ au module différentiel $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \mathbb{Q} \oplus \Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes T, \partial)$, dont la différentielle ∂ sur $\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes T$ a la forme suivante :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \partial(v) &= d(v) \\ \partial(v') &= d(v') \\ \partial(t) &= \Omega \\ \partial(t_b) &= tv_b - tv_{b'} + \sum_{a \in A} z_a^b t_a + \sum_{i \in I} z_i^b t_i + \xi_b \\ \partial(t_j) &= \sum_{a \in A} z_a^j t_a + \sum_{i \in I} z_i^j t_i + \xi_j \end{aligned}$$

où $\xi_b = \varphi(s^{-n}(\overline{v}_b))$ et $\xi_j = \varphi(s^{-n}(w_j))$. Une extension multiplicative d de la différentielle ∂ à l'algèbre $\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T$, donne une algèbre différentielle graduée commutative

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d)$$

et une injection de $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ -modules différentiels

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes (\mathbb{Q} \oplus T), \partial) \hookrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d).$$

Notons $I \oplus sK$ le sous-module différentiel de $C(\varphi)$ défini, conformément à la section 4.1, par $I = (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \mathbb{Q})^{\geq 2n-2} \oplus I_0$ et $K = (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes T)^{\geq 2n-1} \oplus K_0$, où I_0 désigne le supplémentaire des cocycles dans $(\Lambda V \otimes \Lambda V')^{2n-3}$ et K_0 un supplémentaire des cocycles dans

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes T)^{2n-2}.$$

Suivant le Théorème 4.2, le quotient $C(\varphi)/I \oplus sK$ est une algèbre différentielle graduée commutative, reliée au modèle minimal de $F(M; 2)$, par une chaîne de quasi-isomorphismes :

$$C(\varphi)/I \oplus sK \xleftarrow{\sim} (A_1, d) \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} m_{F(M; 2)}.$$

Dans cette algèbre, la multiplication est définie par $T \cdot T = 0$.

Remarquons maintenant que $I \oplus sK \oplus \Lambda^{\geq 2} T$ est un idéal différentiel dans l'algèbre différentielle $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d)$. Ceci prouve l'existence d'un morphisme d'adgc

$$\eta : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d) \rightarrow C(\varphi)/I \oplus sK.$$

Le Lemme 1.4 prouve l'existence d'un relèvement de

$$\eta : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D) \rightarrow C(\varphi)/I \oplus sK$$

que nous noterons

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, d) \xrightarrow{\theta} m_{F(M; 2)}.$$

Nous noterons enfin $g : F(M; 2) \rightarrow E_M$ la réalisation géométrique de θ .

(b) Le modèle minimal de $F(M; 2)$.

Notons $(\Lambda V \otimes \Lambda V', d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ le modèle minimal relatif de $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$. Suivant le Corollaire 1.41, comme F_2 est rationnellement un wedge de sphères, on peut supposer que $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ est le modèle minimal de $F(M; 2)$. Les constructions précédentes nous mènent au

Théorème 4.22. Il existe un diagramme commutatif d'adgc

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V \otimes \Lambda V', d) & \xrightarrow{id} & (\Lambda V \otimes \Lambda V', d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D) & \xrightarrow{\theta} & (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D) \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\ (\Lambda T, 0) & \xrightarrow{\bar{\theta}} & (\Lambda W, d) \end{array}$$

dans lequel $Q(\theta)$ est injectif. L'inclusion rationnalisée $i_2 : F(M; 2)_0 \hookrightarrow M_0 \times M_0$ se factorise via E_M , la réalisation de $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D)$ et

ceci donne un diagramme commutatif dont les lignes sont des fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longrightarrow & E_M & \longrightarrow & M_0 \times M_0 \\
 \bar{g} \uparrow & & g \uparrow & & \uparrow \\
 F_2 & \longrightarrow & F(M; 2)_0 & \xrightarrow{k} & M_0 \times M_0
 \end{array}$$

et dans lequel

- (1) K est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane,
- (2) L'application $\bar{g}$ induit un isomorphisme en homologie sphérique.

Preuve Le théorème est une conséquence de la Remarque 4.19 et de la Proposition 4.8. $\square$

Pour suivre, nous utilisons le Lemme 1.40. Celui-ci assure l'existence d'un isomorphisme

$$(4.12) \quad (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T \otimes \Lambda N, D) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$$

tel que $(\Lambda(T \oplus N), \bar{D}) \cong (\Lambda W, d)$.

D'autre part, l'écrasement de $\Lambda V'$ donne un morphisme d'adgc

$$\rho : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda T, d).$$

Notons $h : Z_M \rightarrow E_M$ la réalisation géométrique de ρ . Toutes les constructions précédentes peuvent être résumées dans le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes verticales sont des fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
 F_0 & \xrightarrow{j} & F_2 & & \\
 \searrow \bar{\varphi} & & \searrow \bar{g} & & \\
 & K & & K & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 M \setminus m_0 & \xrightarrow{b} & F(M; 2) & & \\
 \searrow \varphi & & \searrow g & & \\
 & Z_M & & E_M & \\
 \downarrow i_0 & \downarrow & \downarrow i_2 & \downarrow h & \\
 M & \xrightarrow{b} & M \times M & & \\
 \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\
 & M & \xrightarrow{b} & M \times M &
 \end{array}$$

avec $b(m) = (m, m_0)$.

Comme $(\Lambda W, d)$ est le modèle d'un bouquet de sphères, on peut prendre pour $(\Lambda W, d)$ le modèle bigradué de $H^*(\Lambda W, d)$. En particulier W admet une seconde graduation $W = \bigoplus_{p \geq 0} W_p$ et

$$\tilde{H}^*(\Lambda W, d) \cong \tilde{H}_0(\Lambda W, d) \cong W_0.$$

Sachant que $H_*^S(\bar{g})$ est un isomorphisme, on peut affirmer que $H^*(\bar{g}) : T \rightarrow W_0$ est un isomorphisme. On peut donc supposer que $\Lambda T = \Lambda W_0$. Par le Théorème 4.11 sur les fibrations de fibre un bouquet de sphères, on a aussi

$$D(W_p) \subset (\Lambda^2 W)_{p-1} \oplus (\Lambda^+(V \oplus V') \otimes W_{\leq p}) \oplus \Lambda^+(V \oplus V').$$

Remarque 4.23. Dans le modèle $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$, l'espace vectoriel W_{p-1} correspond donc au dual de l'espace des crochets de longueur p dans $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$.

(c) **Un modèle de l'involution** $\tau : F(M; 2) \rightarrow F(M; 2)$.

Nous avons défini précédemment l'application $\tau : F(M; 2) \rightarrow F(M; 2)$ correspondant à la permutation des composantes. Notons

$$\iota : (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$$

le modèle de τ qui étend le morphisme d'adgc $\iota : (\Lambda V \otimes \Lambda V', d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda V', d)$ modélisant $\tau : M \times M \rightarrow M \times M$, et défini par $\iota(v) = v'$ et $\iota(v') = v$.

Le Lemme 2.15 nous permet d'affirmer que $\iota(\Omega) = (-1)^n \Omega$, et de faire le calcul suivant

$$d(\iota(t)) = \iota(d(t)) = \iota(\Omega) = (-1)^n d(t).$$

Notons $t' = \frac{1}{2}(t + (-1)^n \iota(t))$. Par ce qui précède, $d(t') = d(t)$ et $\iota(t') = (-1)^n t'$. En remplaçant t par t' on obtient donc un nouveau modèle de $F(M; 2)$ dans lequel on lit mieux l'action de τ .

Proposition 4.24. Il existe un représentant du modèle minimal de Sullivan de $F(M; 2)$ de la forme $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ où le modèle obtenu en écrasant $\Lambda V \otimes \Lambda V'$ est le modèle bigradué $(\Lambda W, d)$ du wedge de sphères F , où $\iota(W_q) \subset W_q$ pour tout q , et où la restriction de ι à $s^{-n+1}(\Lambda^r \bar{V}) \subset T \subset W$ est la multiplication par $(-1)^{n+r}$.

Preuve

Nous allons travailler par récurrence sur la graduation de W .

Dans un premier temps, prouvons que c'est vrai pour $T = W_0$. Nous avons décrit ci-dessus comment choisir t de telle manière que $\iota(t) = (-1)^n t$.

Pour un t_a de degré minimal, nous savons que $d(t_a) = tv_a - tv'_a + \xi_a$. Or, $d(\xi_a) = -\Omega(v_a - v'_a)$. Quitte à remplacer ξ_a par $\xi'_a = \frac{1}{2}(\xi_a + (-1)^n \iota(\xi_a))$, on peut donc supposer que $\iota(\xi_a) = (-1)^{n+1} \xi_a$. En remplaçant t_a par $t'_a = \frac{1}{2}(t_a + (-1)^{n+1} \iota(t_a))$, on fait de lui un vecteur propre de ι car $\iota(t'_a) = (-1)^{n+1} t'_a$.

Supposons à présent que les générateurs de $T^{\leq r}$ soient des vecteurs propres tels que $\iota(t_b) = (-1)^{n+1} t_b$ et $\iota(t_j) = (-1)^{n+l(j)} t_j$. Soit t_a ou t_i un générateur de T^{r+1} . Par construction, on a les égalités

$$\begin{aligned} d(t_b) &= tv_b - tv'_b + \sum_{b \in A} z_b^a t_b + \sum_{j \in I} z_j^a t_j + \xi_a, \\ d(t_i) &= \sum_{b \in A} z_b^i t_b + \sum_{j \in I} z_j^i t_j + \xi_i. \end{aligned}$$

Le Lemme 4.21 et l'hypothèse de récurrence permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} d(\iota(t_a)) &= (-1)^{n+1} t(v_a - v'_a) + (-1)^{n+1} \sum_{b \in A} z_b^a t_b + (-1)^{n+1} \sum_{j \in I} z_j^a t_j + \iota(\xi_a) \\ d(\iota(t_i)) &= (-1)^{n+l(i)} \sum_{b \in A} z_b^i t_b + (-1)^{n+l(i)} \sum_{j \in I} z_j^i t_j + \iota(\xi_i). \end{aligned}$$

Quitte à modifier ξ_a ou ξ_i comme précédemment, il suffit donc de remplacer les générateurs par $t'_a = \frac{1}{2}(t_a + (-1)^{n+1} \iota(t_a))$ ou $t'_i = \frac{1}{2}(t_i + (-1)^{n+l(i)} \iota(t_i))$, pour en faire les vecteurs propres désirés. Supposons à présent que les générateurs de $W_{<r}$ soient transformés. Soit $u \in W_r$. Notons $w \in \Lambda^2 W_{r-1}$ la partie de $d(u)$ telle que

$$d(u) - w \in (\Lambda^+(V \oplus V') \otimes W) \oplus \Lambda^+(V \oplus V').$$

Par l'hypothèse de récurrence, on peut décomposer w en une somme de deux expressions du second degré $w = q_1 + q_2$, avec $\iota(q_1) = q_1$ et $\iota(q_2) = -q_2$. Supposons que q_1 et q_2 soient non nuls. Dans ce cas, u et $\iota(u)$ sont des indécomposables linéairement indépendants, car les parties de leur différentielle dans $\Lambda^2 W$ le sont. En les remplaçant par les générateurs $\frac{1}{2}(u + \iota(u))$ et $\frac{1}{2}(u - \iota(u))$, on conserve bien un modèle minimal de $F(M; 2)$. Dans ce modèle, nous pouvons donc supposer que $\iota(w) = (-1)^{r(w)} w$ où $r(w)$ désigne un certain entier. En remplaçant u par $u' = \frac{1}{2}(u + (-1)^{r(w)} \iota(u))$, on termine donc la preuve. $\square$

L'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de la fibre homotopique de l'inclusion $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$ est comme on l'a vu, une algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(R')$. Les espaces vectoriels $\mathbb{L}^r(R')$ correspondent par dualité aux espaces W_{r-1} . Il en résulte que l'involution préserve la longueur des mots

dans $\mathbb{L}(R')$ car elle envoie W_r dans W_r . De plus l'involution est un morphisme d'algèbres de Lie et sur les générateurs de R' , elle est définie par

$$\begin{cases} \iota(\check{t}) &= (-1)^n \check{t} \\ \iota(\check{t}_a) &= (-1)^{n+1} \check{t}_a \\ \iota(\check{t}_j) &= (-1)^{n+q} \check{t}_j \text{ si } t_j \in s^{-n+1}(\Lambda^q \overline{V}). \end{cases}$$

4.7. VARIÉTÉS FORMELLES

Supposons que M soit une variété formelle. Dans ce cas, l'espace des configurations $F(M; 2)$ est aussi formel, pour autant que $H^2(M; \mathbb{Q}) = 0$ (voir [15]). Si on désigne $H^*(M; \mathbb{Q})$ par H , alors

$$H^*(F(M; 2); \mathbb{Q}) = H \otimes H / (\Delta).$$

Considérons le modèle bigradué $(\Lambda V, d)$ de M et notons $(\Lambda V', d')$ une copie de cette algèbre de Sullivan minimale. Nous montrons que l'on peut définir une bigraduation sur le modèle minimal $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ de $F(M; 2)$ qui en fasse son modèle bigradué et qui prolonge la bigraduation de $\Lambda V \otimes \Lambda V'$. Il suffit de savoir le faire sur T car l'extension de T à W est formelle. Remarquons de suite que la graduation induite sur W ne correspond pas à la graduation naturelle définie par $W_0 = T$. L'objet $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ est d'une certaine manière trigradué.

Remarque 4.25. La réalisation de $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda T, D)$ n'est en général pas un espace formel. Considérons par exemple le cas $M = S^3 \times S^3$. Notons $(\Lambda(a, b), 0)$, $|a| = |b| = 3$, le modèle minimal de M . La classe diagonale de M est donnée par

$$\Delta = -a \otimes b + 1 \otimes ab + ab \otimes 1 + b \otimes a.$$

Dans le modèle minimal $(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a', b') \otimes \Lambda T, D)$, les premières différentielles s'écrivent

$$\begin{aligned} D(t) &= \Delta, \\ D(t_a) &= t(a \otimes 1 - 1 \otimes a), \\ D(t_b) &= t(b \otimes 1 - 1 \otimes b), \\ D(t_{ab}) &= t_a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) + t_b(a \otimes 1 - 1 \otimes a). \end{aligned}$$

L'élément $t \cdot t_a + t_{ab}(a \otimes 1 - 1 \otimes a)$ est un cocycle non trivial, décomposable dans le modèle, mais pas en cohomologie. Il s'ensuit que la réalisation de $(\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a', b') \otimes \Lambda T, D)$ ne peut pas être un espace formel. $\square$

Définissons maintenant la bigraduation sur $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ et commençons par une bigraduation sur $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D)$ où $\overline{V}$ désigne de

nouveau l'espace vectoriel bigradué tel que $\overline{V}_p^q = V_{p-1}^{q+1}$.

Remarquons que la construction de l'adgc $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V}, D)$ de la Proposition 4.18, peut être raffinée pour obtenir l'inclusion

$$(4.13) \quad D((V \oplus V' \oplus \overline{V})_p) \subset (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \overline{V})_{p-1} \text{ pour chaque } p \geq 0.$$

En effet, par définition, $D(V_p) = d(V_p) \subset (\Lambda V)_{p-1}$ et $D(V'_p) = d'(V'_p) \subset (\Lambda V')_{p-1}$. De plus, en posant $D(\overline{v}_b) = v_b - v'_b$ pour chaque v_b de degré minimal r , on obtient un quasi-isomorphisme

$$\sigma : (\Lambda V^{\leq r} \otimes \Lambda V'^{\leq r} \otimes \Lambda \overline{V}^{\leq r-1}, D) \longrightarrow (\Lambda V^{\leq r}, d)$$

vérifiant $D(\overline{V}_1) \subset (\Lambda V)_0$ et donc 4.13. Supposons ensuite que pour $k \geq r$, on ait un quasi-isomorphisme

$$\sigma : (\Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{\leq k-1}, D) \longrightarrow (\Lambda V^{\leq k}, d)$$

vérifiant 4.13. Soit $\overline{v}_b \in \overline{V}_q^k$ un élément de la base de $\overline{V}$. Le cycle $d(v_b) - d'(v'_b) \in (\Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k})_{q-2}$ vérifie $\sigma(d(v_b) - d'(v'_b)) = 0$. Dès lors, l'hypothèse de récurrence implique l'existence d'un $u_{v_b} \in (\Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{\leq k-1})_{q-1}$ tel que $D(u_{v_b}) = d(v_b) - d'(v'_b)$. Dans la construction de la Proposition 4.18, on choisit alors $\alpha_{v_b} \in (\Lambda V^{\leq k} \otimes \Lambda V'^{\leq k} \otimes \Lambda \overline{V}^{\leq k-1})_{q-1}$. Ceci termine l'argument.

Soient $(a_i)_{i \in I} \in (\Lambda V)_0$, $(b'_i)_{i \in I} \in (\Lambda V')_0$ des cocycles représentant les bases duales $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\beta_i)_{i \in I}$ introduites dans la section 2.3. Notons

$$\Omega = \sum_{i \in I} (-1)^{|a_i|} a_i b'_i.$$

Proposition 4.26. Il existe une graduation sur $(\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda W, D)$ qui en fait un modèle bigradué de $F(M; 2)$, dont la différentielle sur T , est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} D(v_b) &= d(v_b), \\ D(v'_b) &= d'(v'_b), \\ D(t) &= \Omega, \\ D(t_b) &= tv_b - tv'_b + \sum_{a \in A} z_a^b t_a + \sum_{j \in J} z_j^b t_j + \xi_b, \\ D(t_j) &= \sum_{a \in A} z_a^j t_a + \sum_{i \in J} z_i^j t_i + \xi_j, \end{aligned}$$

pour certains $\xi_b, \xi_j \in \Lambda V \otimes \Lambda V'$.

Preuve

Comme Ω est un cocycle de $(\Lambda V \otimes \Lambda V')_0$, en posant $D(t) = \Omega$, on assure l'égalité $D^2 = 0$ sur $\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda t$. Posons $T_1 = \mathbb{Q} \cdot t$.

Nous allons travailler par récurrence sur le degré q de filtration de $(\Lambda\overline{V})_q$. Soit $\overline{v}_b$ un générateur de $\overline{V}_1$. On calcule

$$D(t \cdot (v_b - v'_b)) = \left(\sum_{i \in I} (-1)^{|a_i|} a_i b'_i \right) \cdot (v_b - v'_b).$$

Le Lemme 2.12 assure donc l'existence de $\xi_b \in \Lambda V \otimes \Lambda V'$ tel que $D(\xi_b) = -\delta(t \cdot (v_b - v'_b))$. Dès lors, il suffit de poser

$$D(t_b) = tv_b - tv'_b + \xi_b$$

avec $t_b \in T_2$ pour définir une bonne différentielle.

Supposons avoir construit D sur tous les t_a, t_i pour lesquels v_a ou $w_i \in (\Lambda\overline{V})_{\leq q}$ et soit $\overline{v}_b$ ou $w_j \in (\Lambda\overline{V})_{q+1}$. Un calcul simple et le Lemme 4.9 permettent d'obtenir les égalités suivantes

$$\begin{aligned} D(tv_b - tv'_b + \sum_{a \in A} z_a^b t_a + \sum_{j \in J} z_j^b t_j) &= \Omega(v_b - v'_b) + \sum_{a \in A} (-1)^{|z_a^b|} z_a^b \xi_a + \sum_{j \in J} (-1)^{|z_j^b|} z_j^b \xi_j, \\ D(\sum_{a \in A} z_a^j t_a + \sum_{i \in J} z_i^j w_i) &= \sum_{a \in A} (-1)^{|z_a^j|} z_a^j \xi_a + \sum_{i \in J} (-1)^{|z_i^j|} z_i^j \xi_i. \end{aligned}$$

Les deux membres de droite sont des cocycles de $(\Lambda(V \oplus V'))_q$ et donc des cobords. Par conséquent, il existe ξ_b ou $\xi_j \in (\Lambda(V \oplus V'))_{q+1}$ tel que

$$\begin{aligned} D(\xi_b) &= -\Omega(v_b - v'_b) - \sum_{a \in A} (-1)^{|z_a^b|} z_a^b \xi_a - \sum_{j \in J} (-1)^{|z_j^b|} z_j^b \xi_j \\ D(\xi_j) &= -\sum_{a \in A} (-1)^{|z_a^j|} z_a^j \xi_a - \sum_{i \in J} (-1)^{|z_i^j|} z_i^j \xi_i. \end{aligned}$$

Et en introduisant le générateur t_b ou $t_j \in T_{q+2}$, tel que

$$D(t_b) = tv_b - tv'_b + \sum_{a \in A} z_a^b t_a + \sum_{j \in J} z_j^b t_j + \xi_b$$

ou

$$D(t_j) = \sum_{a \in A} z_a^j t_a + \sum_{i \in J} z_i^j w_i + \xi_j,$$

on complète la preuve. L'extension à W est évidente. $\square$